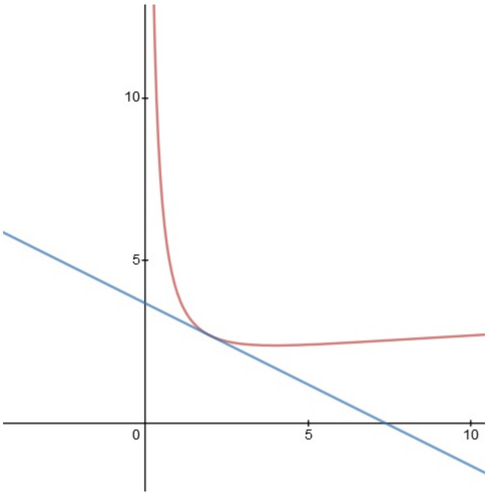
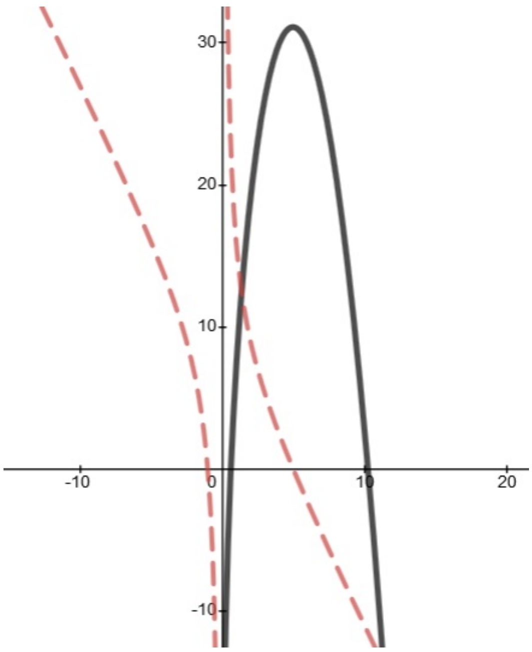
1. (a) Med produktregeln blir derivatan
$$x'cos(x) + x(cos(x))' = cos(x) - xsin(x)$$
   (b) Med produktregeln blir derivatan
$$\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$$

2. (a) Derivatan är
   (b)
$$y'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x}$$
   Så
$$y'(2) = -\frac{4}{4} + \frac{1}{2} = -0.5$$
   Vilket kan verifieras med en bild



3. Derivatan blir
$$\frac{10}{x} - 2x + 8$$
Som illustreras som röd medans den svarta är orginalekvationen.



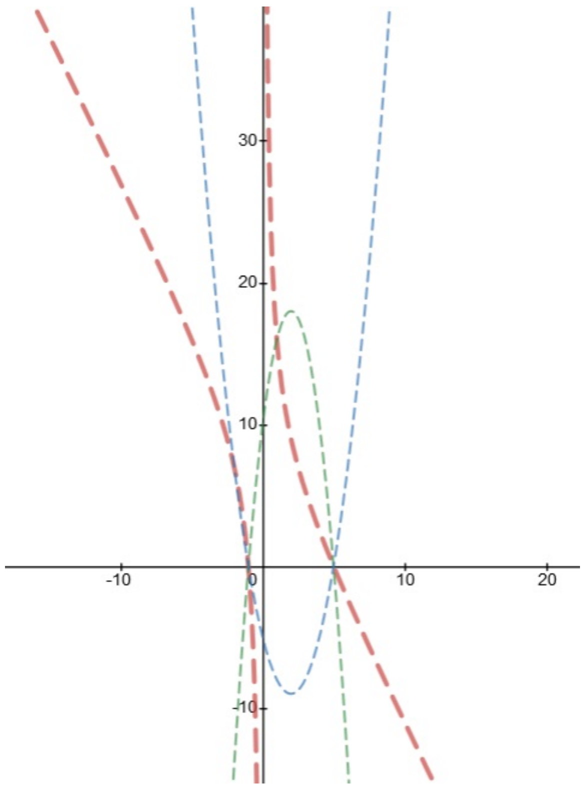
Extrempunkterna hamnar där derivatan är noll

$$\frac{10}{x} - 2x + 8 = 0$$

Skriver om den till en andragradsekvation

$$10 - 2x^2 = -8x \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0$$

Extrempunkterna sker då vid 5 och -1. Man kan se vid dom olika omskrivningarna av derivatan så behåller möter dom fortfarande varandra på x-axeln. Att manipulera polynomer som man sätter lika med noll är samma som att transformera kurvan i det tvådimensionella planet som behåller punkten.



Men eftersom att den orginella ekvationen inehåller $10ln(x)$ så är den odefinierad för reella variabler. Då lär jag svara att det finns en extrempunkt vid x=5

Tar man andraderivatan $-\frac{10}{x^2} - 2$ vid x=5 får man att andraderivatan är negativ, vilket innebär att det är en maximipunkt. Detta kan man se i figur 2.

4. Ekvationen för en tangent vid punkt x_0 är $f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

   Eftersom att $x_0 = 0$ så simplifieras den till $f'(0)x + f(0)$.

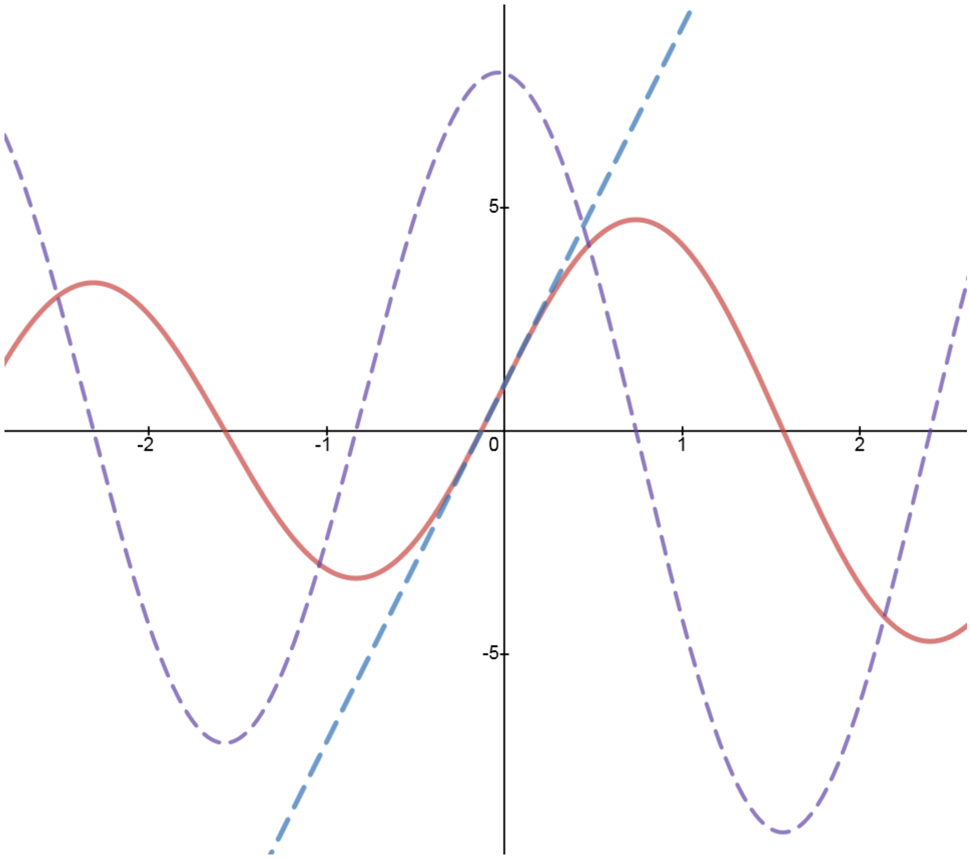
   $f(0) = 4\sin(2 \cdot 0) + \cos(0) = 1$

   $f'(x) = 8cos(2x) - sin(x)$

   $f'(0) = 8cos(2 \cdot 0) - sin(0) = 8$

   Så då blir tangenten och svaret på frågan följande: $f'(0)x + f(0) = 8x + 1$

   I figuren nedan är tangenten blå, derivatan lila och den orginella ekvationen är röd. Observera att y och x axlarna inte har samma skala.



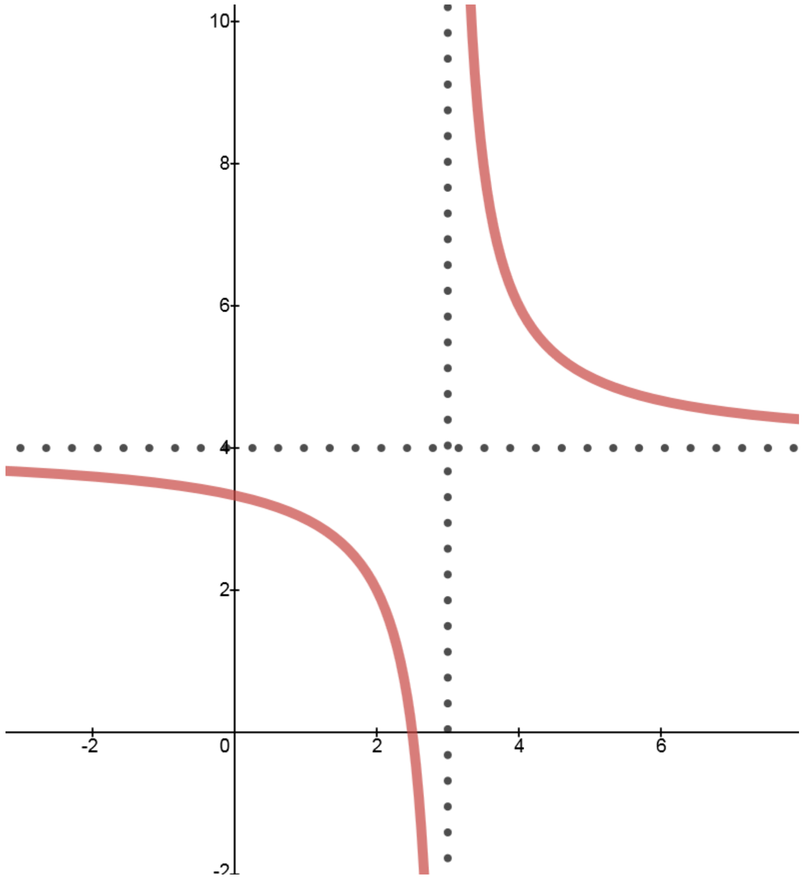
5. Asymptoterna är ställen i funktionen där man delar på noll. Vid

$$y = \frac{2}{x-3} + 4$$

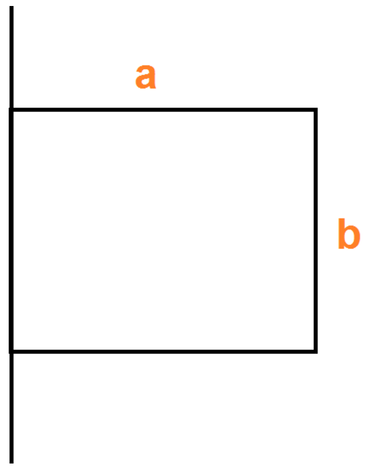
är det självklart att 3 är en assymptot. På y-axeln sker det också en asymptot. 4:an i ekvationen får en att tänka sig att det sker då (se figur nedan) eftersom att 4 transformerar hela grafen upp med 4. Men för att göra detta rigoröst lösar man ut x

$$y - 4 = \frac{2}{x-3} \Rightarrow x - 3 = \frac{2}{y-4} \Rightarrow x = \frac{2}{y-4} + 3$$

Detta visar att y=4 är den andra asymptoten.



6. I uppgiften får vi reda på två sanningar. Med följande variabler



Får vi ut att Arean $A = ab$ och omkretsen $O = 50 = 2a + b$ Omkretsekvationen kan skrivas om som $b = 50 - 2a$ och sedan sättas in i den första vilket bildar $A = a(50 - 2a) = 50a - 2a^2$.

Maxpunkten blir då där derivatan av funktionen är noll. $50 - 4a = 0 \Rightarrow a = 12.5$ meter.

Så när a är 12.5 meter blir det optimal area, och följande ekvationen kring omkretsen måste b ha längden $50 - 2 \cdot 12.5 = 25$ meter.

7. Med produktregeln blir derivatan $(x^2)'2^x + x^2(2^x)' = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot ln(2)$

Och dom blir noll när
$$0 = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot ln(2)$$

$$-x^2 \cdot 2^x \cdot ln(2) = 2x \cdot 2^x$$
$$-x^2 \cdot ln(2) = 2x$$
$$-x \cdot ln(2) = 2$$
$$x = -\frac{2}{ln(2)}$$

Men eftersom det är en andragradsekvation så finns det ett till svar som man enkelt kan se är $x = 0$.

Ett till svar (kanske?) är "minus oändlighet", men man kan inte bara sätta in det utan man lär använda sig av gränsvärden

$$\lim_{x \to -\infty} 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot ln(2) = \lim_{x \to -\infty} 2^x = \lim_{x \to \infty} 2^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2^x} = 0$$

8. I uppgiften får vi differentialekvationen $\frac{dr}{dt} = 3$ där r är radien och t är tid. Vi vet även att Arean av en cirkel är $A = \pi r^2$. Vi löser ekvationen $dr = 3dt \Rightarrow \int dr = \int 3dt \Rightarrow r = 3t + c$. Men vi kan anta att konstanten $c = 0$ om början av olyckan var vid en punkt.

   Sedan stoppas den in i Area ekvationen $A = \pi(3t)^2 = \pi 9t^2$. Frågan är hur fort arean ökar, så då deriveras ekvationen med respekt av tid och man får $\frac{dA}{dt} = \pi 18t$. Vid tid $t = 5$ så ökar arean med $\pi 18 \cdot 5 = 90\pi \approx 282 m^2/s$

   FEL SVAARARARAARAR DEN ÄR OMÖJLIGT SÅ SNABBT VÄXANDE

9. Jag börjar med att skriva om ekvationen så den blir enklare att derivera.

$$f(x) := \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$
$$(x^2 + 3)(x - 1)^{-1}$$

   Nu deriveras det. Med produktregeln blir det

$$f'(x) = (x - 1)^{-1}(x^2 + 3)' + ((x - 1)^{-1})'(x^2 + 3)$$

   Jag börjar med att derivera $(x - 1)^{-1}$. Låt $u = x - 1$ och $y = \frac{1}{u}$. Med Leibniz notering

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{3}{u^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(x - 1)^2}$$

   Sammtidigt blir derivatan för $x^2 + 3 = 2x$ Då blir det

$$f'(x) = (x - 1)^{-1} 2x - \frac{1}{(x - 1)^2}(x^2 + 3)$$
$$= \frac{2x}{x - 1} - \frac{x^2 + 3}{(x - 1)^2}$$

   Extrempunkterna där derivatan är noll och andraderivatan är negativ är där maxpunkter finns.

$$0 = \frac{2x}{x - 1} - \frac{x^2 + 3}{(x - 1)^2}$$

$$\frac{x^2+3}{(x-1)^2} = \frac{2x}{x-1}$$

$$\frac{x^2+3}{x-1} = 2x$$

$$x^2+3 = 2x(x-1)$$

$$x^2+3 = 2x^2-2x$$

$$0 = x^2-2x-3$$

$$0 = (x-3)(x+1)$$

Extrempunkter sker vid 3 och -1. Med hjälp av andraderivatan kan man ta reda på vilka som är min, max eller terraspunkt.

$$f''(x) = (\frac{2x}{x-1})' - (\frac{x^2+3}{(x-1)^2})'$$

Där

$$(2x(x-1)^{-1})' = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{(x-1)^2}$$

Och

$$(\frac{x^2+3}{(x-1)^2})' =$$