

1. (a) Med produktregeln blir derivatan

$$x' \cos(x) + x(\cos(x))' = \cos(x) - x \sin(x)$$

- (b) Med produktregeln blir derivatan

$$\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$$

2. (a) Med substitution får man att $u = 3 - 2x$ och $y = 2u^3$. Då följer detta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow 6u^2 \cdot (-2) = -12(3 - 2x)^2$$

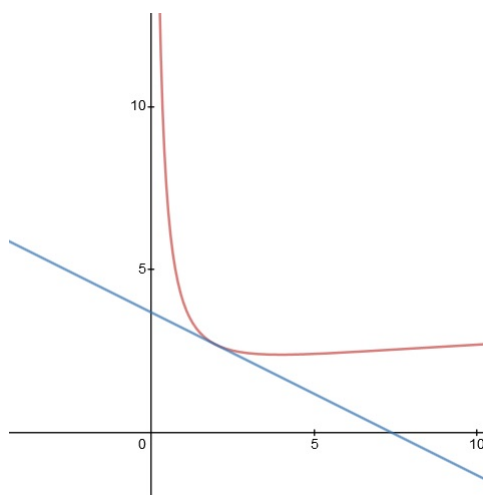
- (b)

$$y'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x}$$

Så

$$y'(2) = -\frac{4}{4} + \frac{1}{2} = -0.5$$

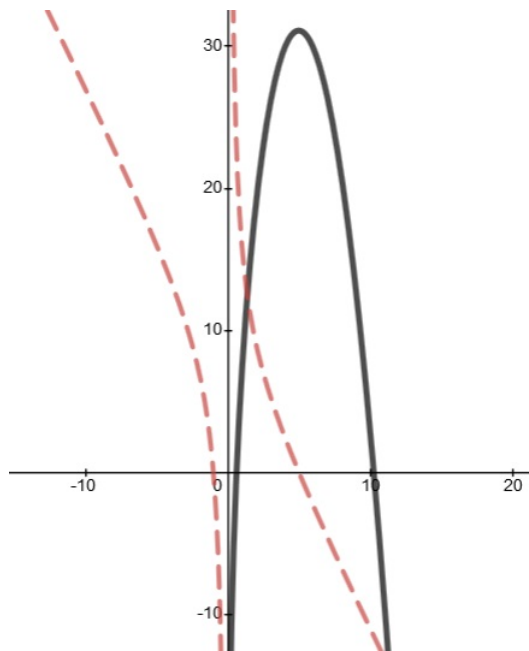
Vilket kan verifieras med en bild



3. Derivatan blir

$$\frac{10}{x} - 2x + 8$$

Som illustreras som röd medans den svarta är originalekvationen.



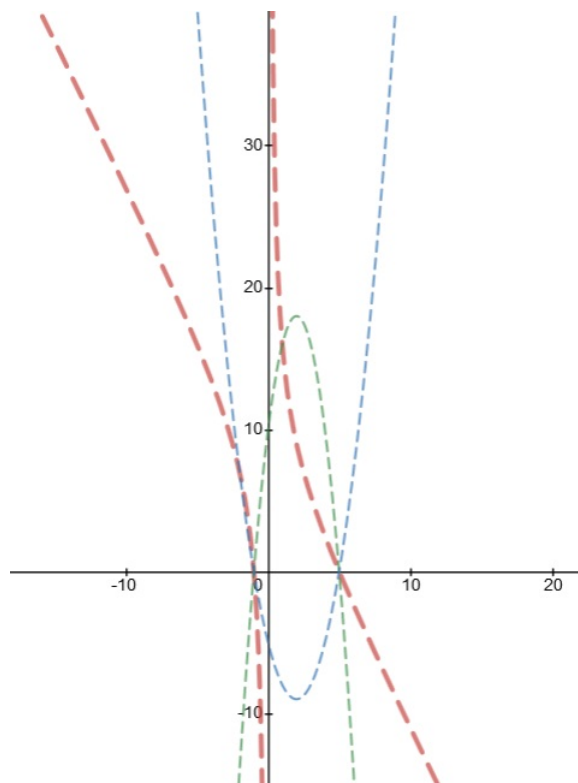
Extrempunkterna hamnar där derivatan är noll

$$\frac{10}{x} - 2x + 8 = 0$$

Skriver om den till en andragradsekvation

$$10 - 2x^2 = -8x \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$$

Extrempunkterna sker då vid 5 och -1. Man kan se vid dom olika omskrivningarna av derivatan så behåller möter dom fortfarande varandra på x-axeln. Att manipulera polynomer som man sätter lika med noll är samma som att transformera kurvan i det tvådimensionella planet som behåller punkten.



Men eftersom att den originella ekvationen innehåller $10\ln(x)$ så är den odefinierad för reella variabler. Då lär jag svara att det finns en extrempunkt vid $x=5$

Tar man andraderivatan $-\frac{10}{x^2} - 2$ vid $x=5$ får man att andraderivatan är negativ, vilket innebär att det är en maximipunkt. Detta kan man se i figur 2.

4. Ekvationen för en tangent vid punkt x_0 är $f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

Eftersom att $x_0 = 0$ så simplificeras den till $f'(0)x + f(0)$.

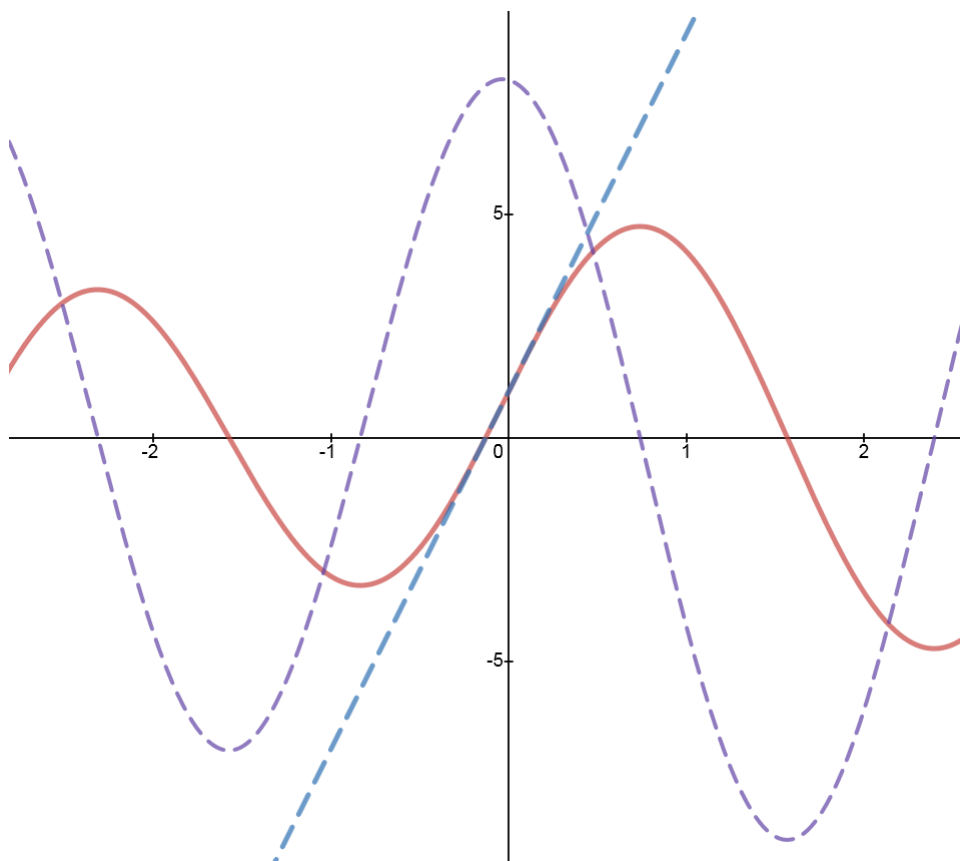
$$f(0) = 4\sin(2 \cdot 0) + \cos(0) = 1$$

$$f'(x) = 8\cos(2x) - \sin(x)$$

$$f'(0) = 8\cos(2 \cdot 0) - \sin(0) = 8$$

Så då blir tangenten och svaret på frågan följande: $f'(0)x + f(0) = 8x + 1$

I figuren nedan är tangenten blå, derivatan lila och den originella ekvationen är röd. Observera att y och x axlarna inte har samma skala.



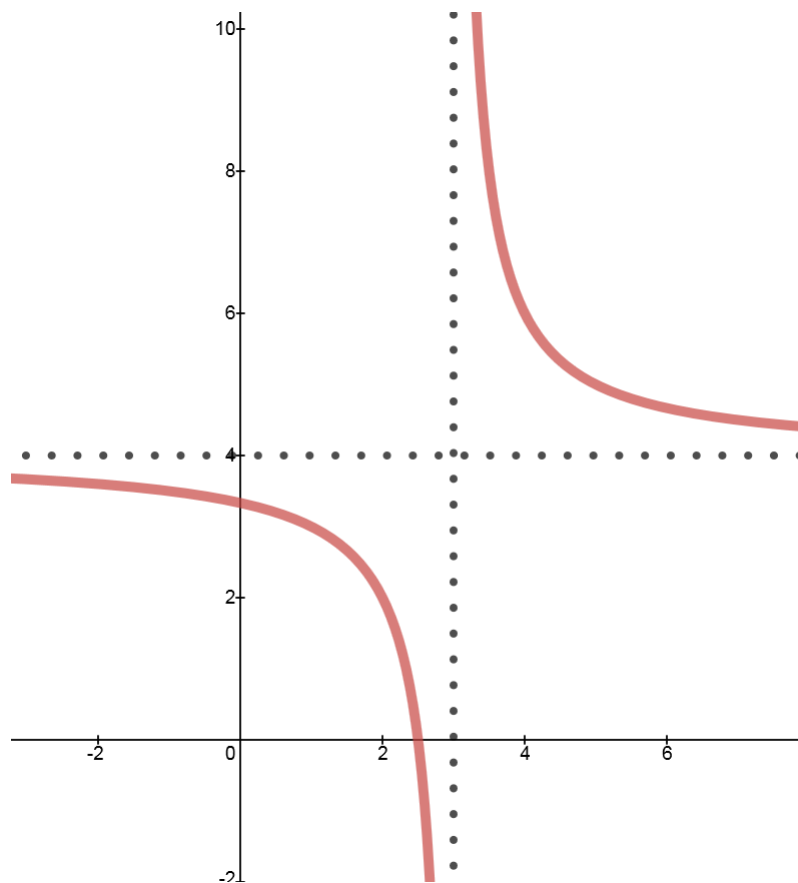
5. Asymptoterna är ställen i funktionen där man delar på noll. Vid

$$y = \frac{2}{x-3} + 4$$

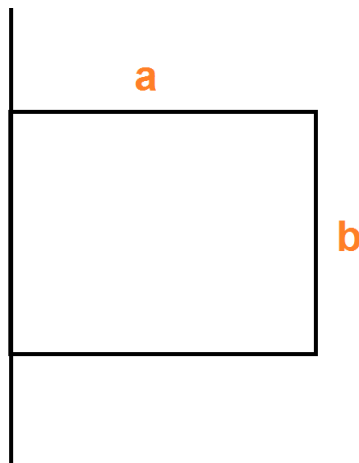
är det självklart att 3 är en asymptot. På y-axeln sker det också en asymptot. 4:an i ekvationen får en att tänka sig att det sker då (se figur nedan) eftersom att 4 transformerar hela grafen upp med 4. Men för att göra detta rigoröst lösas man ut x

$$y - 4 = \frac{2}{x-3} \Rightarrow x - 3 = \frac{2}{y-4} \Rightarrow x = \frac{2}{y-4} + 3$$

Detta visar att $y=4$ är den andra asymptoten.



6. I uppgiften får vi reda på två sanningar. Med följande variabler



Får vi ut att Arean $A = ab$ och omkretsen $O = 50 = 2a + b$ Omkretsekvationen kan skrivas om som $b = 50 - 2a$ och sedan sättas in i den första vilket bildar $A = a(50 - 2a) = 50a - 2a^2$.

Maxpunkten blir då där derivatan av funktionen är noll. $50 - 4a = 0 \Rightarrow a = 12.5$ meter.

Så när a är 12.5 meter blir det optimal area, och följande ekvationen kring omkretsen måste b ha längden $50 - 2 \cdot 12.5 = 25$ meter.

7. Med produktregeln blir derivatan $(x^2)'2^x + x^2(2^x)' = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2)$

Och dom blir noll när

$$0 = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2)$$

$$\begin{aligned}
-x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2) &= 2x \cdot 2^x \\
-x^2 \cdot \ln(2) &= 2x \\
-x \cdot \ln(2) &= 2 \\
x &= -\frac{2}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

Men eftersom det är en andragradsekvation så finns det ett till svar som man enkelt kan se är $x = 0$.

Ett till svar (kanske?) är "minus oändlighet", men man kan inte bara sätta in det utan man lär använda sig av gränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = 0$$

8. Arean på cirkeln $A = \pi r^2$, så derivatan blir $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$. Vi kan då göra följande

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \cdot 3 = 6\pi r$$

Eftersom att i uppgiften får vi reda på att förändringen av radien är tre, $\frac{dr}{dt} = 3$. Men då följer det att $r = 3t$. Då får vi följande

$$\frac{dA}{dt} = 6\pi 3t = 18\pi t$$

När $t=5$ så växer cirkelns area med $18\pi \cdot 5 = 90\pi \approx 282$ meter per sekund.

9. Jag börjar med att skriva om ekvationen så den blir enklare att derivera.

$$\begin{aligned}
f(x) &:= \frac{x^2 + 3}{x - 1} \\
&= (x^2 + 3)(x - 1)^{-1}
\end{aligned}$$

Nu deriveras det. Med produktregeln blir det

$$f'(x) = (x - 1)^{-1}(x^2 + 3)' + ((x - 1)^{-1})'(x^2 + 3)$$

Jag börjar med att derivera $(x - 1)^{-1}$. Låt $u = x - 1$ och $y = \frac{1}{u}$. Med Leibniz notering

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{3}{u^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(x - 1)^2}$$

Samtidigt blir derivatan för $x^2 + 3 = 2x$ Då blir det

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x - 1)^{-1}2x - \frac{1}{(x - 1)^2}(x^2 + 3) \\
&= \frac{2x}{x - 1} - \frac{x^2 + 3}{(x - 1)^2}
\end{aligned}$$

Extrempunkterna där derivatan är noll och andraderivatan är negativ är där maxpunkter finns.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{2x}{x-1} - \frac{x^2+3}{(x-1)^2} \\
\frac{x^2+3}{(x-1)^2} &= \frac{2x}{x-1} \\
\frac{x^2+3}{x-1} &= 2x \\
x^2+3 &= 2x(x-1) \\
x^2+3 &= 2x^2-2x \\
0 &= x^2-2x-3 \\
0 &= (x-3)(x+1)
\end{aligned}$$

Extrempunkter sker vid 3 och -1. Med hjälp av andraderivatan kan man ta reda på vilka som är min, max eller terraspunkt.

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{x-1}\right)' - \left(\frac{x^2+3}{(x-1)^2}\right)'$$

Eftersom att vi vet sedan tidigare vad derivatan av $(x-1)^{-1}$ är så används produktregeln enkelt här nere

$$(2x(x-1)^{-1})' = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{(x-1)^2}$$

Och med kvotregeln deriveras den andra delen

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2+3}{(x-1)^2}\right)' &= \frac{(x^2+3)'(x-1)^2 - (x^2+3)((x-1)^2)'}{((x-1)^2)^2} \\
&= \frac{2x(x-1)^2 - 2(x^2+3)(x-1)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{2x(x-1) - 2(x^2+3)}{(x-1)^3} \\
&= -\frac{2(x+3)}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

Så andraderivatan blir då

$$f''(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{(x-1)^2} + \frac{2(x+3)}{(x-1)^3}$$

Då undersöker vi extrempunkterna -1 och 3. Vid -1 är ekvationen åvan

$$\frac{2}{-2} - \frac{2}{(-2)^2} + \frac{2 \cdot 4}{(-2)^3} = -1 - 0.5 + 1 = -0.5$$

10. Från uppgiften får vi två sanningar: $f(3) = -8$ och $f'(3) = 0$. Vi utgår från den första sanningen

$$3^2a + 3b + 10 = -8 \Rightarrow 9a + 3b + 18 = 0$$

Sedan tar vi reda på b med den andra sanningen

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(3) = 6a + b = 0 \Rightarrow b = -6a$$

Sätt sedan in b i den första ekvationen

$$9a + 3(-6a) + 18 = 0 \Rightarrow 9a - 18a + 18 = 0 \Rightarrow -9a = -18 \Rightarrow a = 2$$

Använd sedan av $b = -6a$ för att ta reda på b

$$b = -6 \cdot 2 = -12$$

Något som kan verifieras grafiskt:

