

1. (a) Med produktregeln blir derivatan

$$x' \cos(x) + x(\cos(x))' = \cos(x) - x \sin(x)$$

- (b) Med produktregeln blir derivatan

$$\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$$

2. (a) Derivatan är

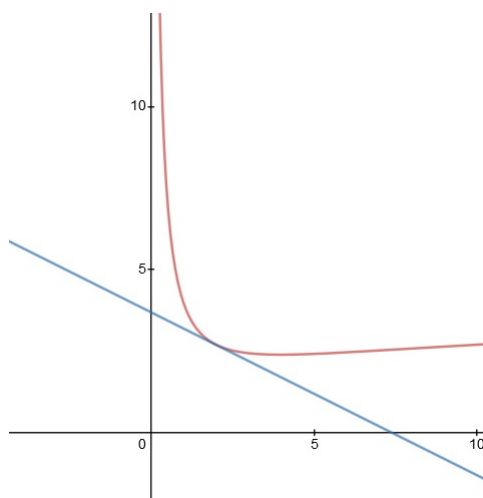
- (b)

$$y'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x}$$

Så

$$y'(2) = -\frac{4}{4} + \frac{1}{2} = -0.5$$

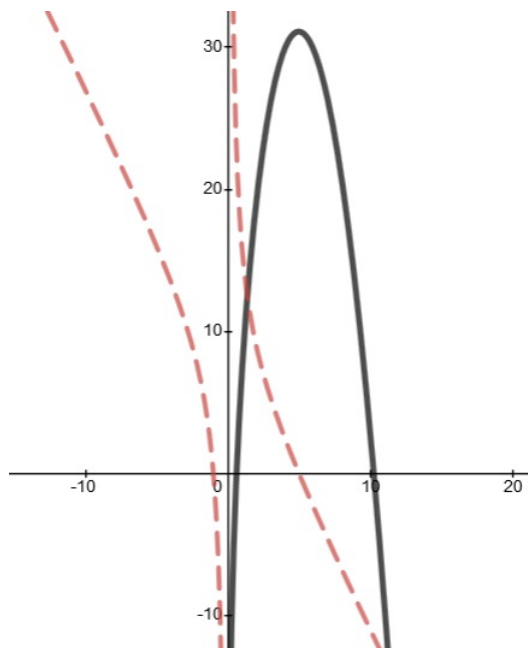
Vilket kan verifieras med en bild



3. Derivatan blir

$$\frac{10}{x} - 2x + 8$$

Som illustreras som röd medans den svarta är orginalekvationen.



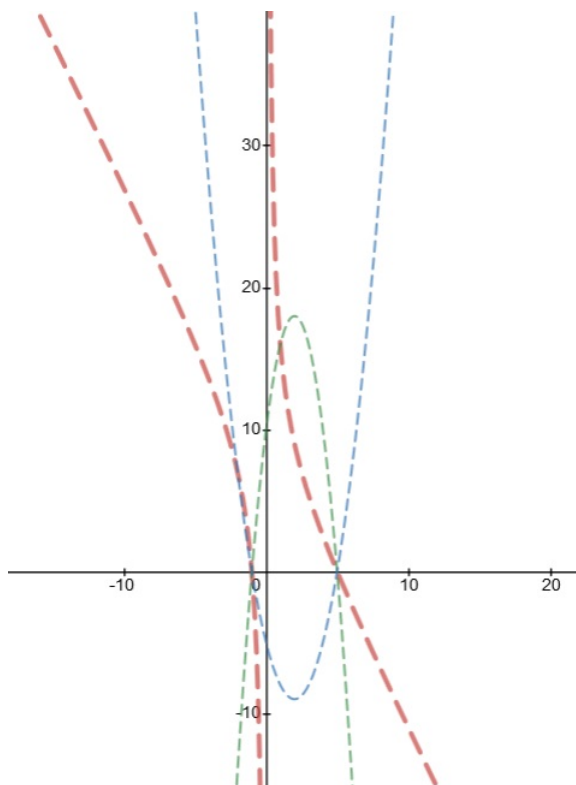
Extrempunkterna hamnar där derivatan är noll

$$\frac{10}{x} - 2x + 8 = 0$$

Skriver om den till en andragradsekvation

$$10 - 2x^2 = -8x \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$$

Extrempunkterna sker då vid 5 och -1. Man kan se vid dom olika omskrivningarna av derivatan så behåller möter dom fortfarande varandra på x-axeln. Att manipulera polynomer som man sätter lika med noll är samma som att transformera kurvan i det tvådimensionella planet som behåller punkten.



Men eftersom att den originella ekvationen innehåller $10\ln(x)$ så är den odefinierad för reella variabler. Då lär jag svara att det finns en extrempunkt vid $x=5$

Tar man andraderivatan $-\frac{10}{x^2} - 2$ vid $x=5$ får man att andraderivatan är negativ, vilket innebär att det är en maximipunkt. Detta kan man se i figur 2.

4. Ekvationen för en tangent vid punkt x_0 är $f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

Eftersom att $x_0 = 0$ så simplificeras den till $f'(0)x + f(0)$.

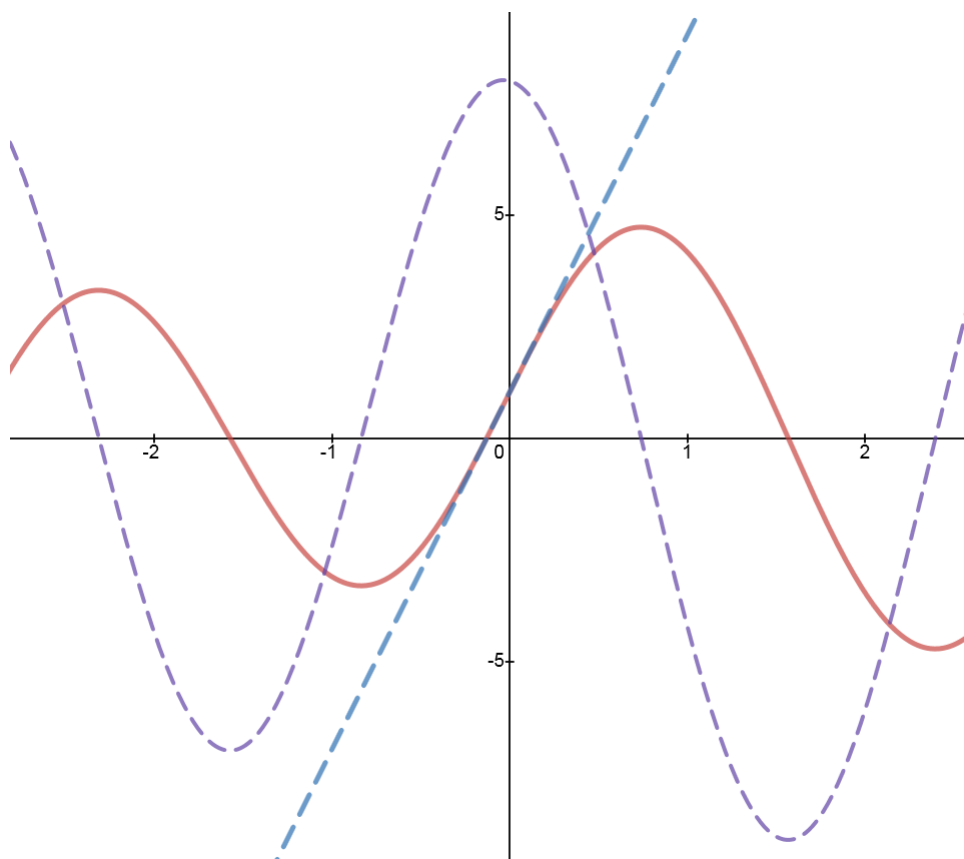
$$f(0) = 4\sin(2 \cdot 0) + \cos(0) = 1$$

$$f'(x) = 8\cos(2x) - \sin(x)$$

$$f'(0) = 8\cos(2 \cdot 0) - \sin(0) = 8$$

Så då blir tangenten och svaret på frågan följande: $f'(0)x + f(0) = 8x + 1$

I figuren nedan är tangenten blå, derivatan lila och den originella ekvationen är röd. Observera att y och x axlarna inte har samma skala.



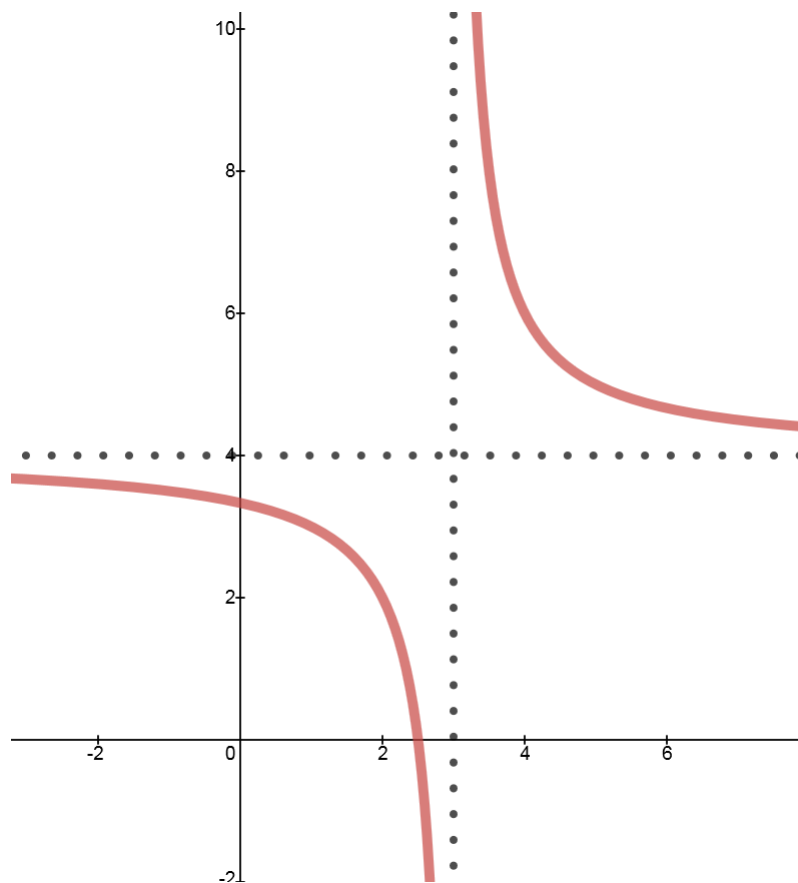
5. Asymptoterna är ställen i funktionen där man delar på noll. Vid

$$y = \frac{2}{x-3} + 4$$

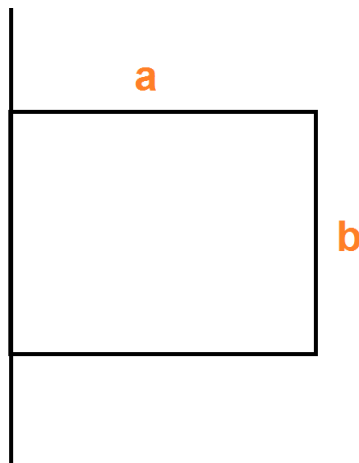
är det självklart att 3 är en asymptot. På y-axeln sker det också en asymptot. 4:an i ekvationen får en att tänka sig att det sker då (se figur nedan) eftersom att 4 transformerar hela grafen upp med 4. Men för att göra detta rigoröst lösar man ut x

$$y - 4 = \frac{2}{x-3} \Rightarrow x - 3 = \frac{2}{y-4} \Rightarrow x = \frac{2}{y-4} + 3$$

Detta visar att $y=4$ är den andra asymptoten.



6. I uppgiften får vi reda på två sanningar. Med följande variabler



Får vi ut att Arean $A = ab$ och omkretsen $O = 50 = 2a + b$ Omkretsekvationen kan skrivas om som $b = 50 - 2a$ och sedan sättas in i den första vilket bildar $A = a(50 - 2a) = 50a - 2a^2$.

Maxpunkten blir då där derivatan av funktionen är noll. $50 - 4a = 0 \Rightarrow a = 12.5$ meter.

Så när a är 12.5 meter blir det optimal area, och följande ekvationen kring omkretsen måste b ha längden $50 - 2 \cdot 12.5 = 25$ meter.

7. Med produktregeln blir derivatan $(x^2)'2^x + x^2(2^x)' = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2)$

Och dom blir noll när

$$0 = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2)$$

$$-x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2) = 2x \cdot 2^x$$

$$-x^2 \cdot \ln(2) = 2x$$

$$-x \cdot \ln(2) = 2$$

$$x = -\frac{2}{\ln(2)}$$

Men eftersom det är en andragradsekvation så finns det ett till svar som man enkelt kan se är $x = 0$.

Ett till svar (kanske?) är "minus oändlighet", men man kan inte bara sätta in det utan man lär använda sig av gränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = 0$$

8. I uppgiften får vi differentialekvationen $\frac{dr}{dt} = 3$ där r är radien och t är tid. Vi vet även att Arealen av en cirkel är $A = \pi r^2$. Vi löser ekvationen $dr = 3dt \Rightarrow \int dr = \int 3dt \Rightarrow r = 3t + c$. Men vi kan anta att konstanten $c = 0$ om början av olyckan var vid en punkt.

Sedan stoppas den in i Area ekvationen $A = \pi(3t)^2 = \pi 9t^2$. Frågan är hur fort arean ökar, så då deriveras ekvationen med respekt av tid och man får $\frac{dA}{dt} = \pi 18t$. Vid tid $t = 5$ så ökar arean med $\pi 18 \cdot 5 = 90\pi \approx 282m^2/s$

FEL SVAARARARAARAR

9.

$$\frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

$$\frac{x^2 + 3}{x - 1}$$