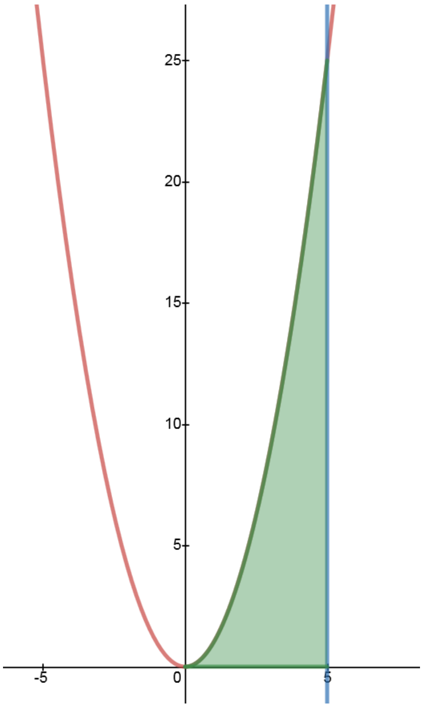
1. I uppgiften görs ett antagande att den även begränsas av y-axeln.



Eftersom rotationen sker kring x-axeln så blir värdet på y radien, och då används formeln

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

I figuren så kan man observera att integralen går från 0 till 5

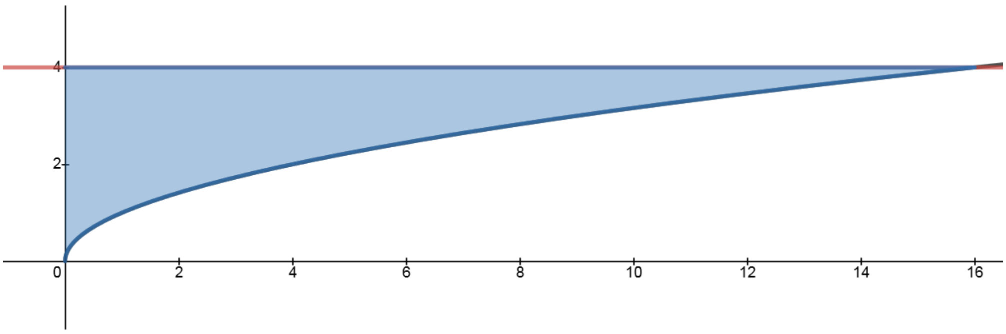
$$\pi \int_0^5 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^5 x^4 dx$$

Som då integreras

$$\Rightarrow \pi(\frac{x^5}{5})]_0^5 = \pi 5^5/5 = \pi 625 v.e$$

2. Radien i denna uppgift blir istället radien x. Då hamnar x på $x = y^2$. Vilket grafiskt kan tänkas som att funktionerna x^2 och $\sqrt{x}$ har en rotationel symetri. Då används formeln

$$\pi \int_a^b f(y)^2 dy$$

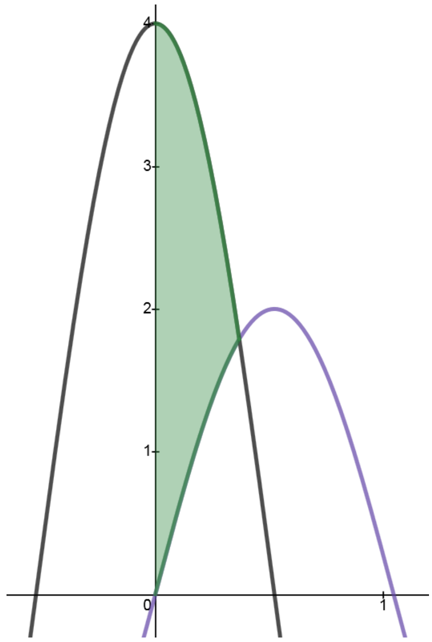


I figuren ser vi att integralen går från 0 till 4.

$$\pi \int_0^4 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^4 y^4 dy$$

$$\Rightarrow \pi \frac{y^5}{5}]_0^4 = \pi \frac{4^5}{5} = \pi \frac{1024}{5} v.e$$

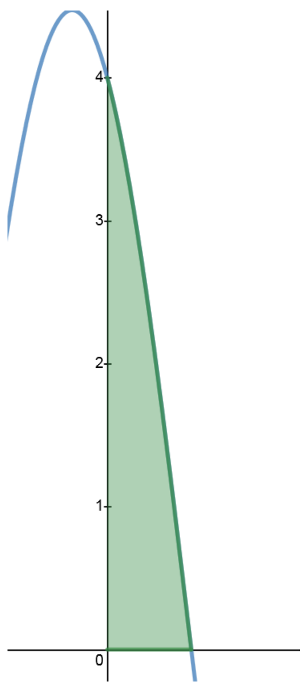
3. Följande area ska utberäknas



Med sådana integraler räknar man rektanglarna mellan funktionerna, dvs $g(x) - f(x)$, och integrerar sedan över den nya funktionen som i detta fall blir

$$4cos(3x) - 2sin(3x)$$

Som då blir den här arean



Integralen som räknas ut blir då mellan 0 och intersektionspunkten. Intersektionspunkten är när

$$4cos(3x) = 2sin(3x) \Rightarrow 2 = \frac{sin(3x)}{cos(3x)} = tan(3x) \Rightarrow x = \frac{tan^{-1}(2)}{3}$$

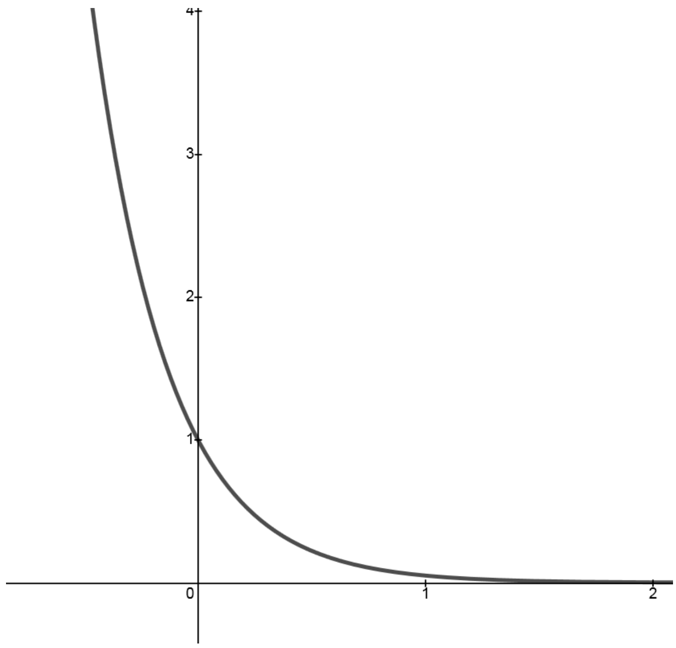
$$\int_0^{tan^{-1}(2)/3} 4cos(3x) - 2sin(3x)dx = \frac{4sin(3x) + 2cos(3x)}{3}]_0^{tan^{-1}(2)/3}$$
$$= \frac{4sin(tan^{-1}(2)) + 2cos(tan^{-1}(2)) - 2}{3} \approx \frac{4sin(1.11) + 2cos(1.11) - 2}{3} \approx 0.824a.e$$

Detta är rimligt med tanke på att området är väldigt tunt.

4. Differentialekvationen kan skrivas om som $y' = -3y$. Som då kan integreras och lösas ut som

$$dx = \frac{1}{-3y}dy \Rightarrow x = -\frac{1}{3}ln(y) + C$$

Funktionen den här bildar är väldigt lik en bakvänd e^x funktion



Löser man ut y får man ekvationen.

$$x - C = -\frac{1}{3}ln(y) \Rightarrow 3C - 3x = ln(y) \Rightarrow y = e^{3c-3x}$$

Antar man att c=0 så blir konstanten $a = -3$.

5.

$$sin(x) + \frac{cos(2x)}{2}]_0^{\pi/2}$$
$$1 - 1/2 = 0.5$$

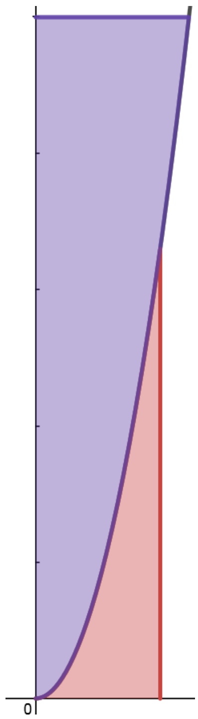
6. Man kan sätta in lösningen i den originella differnetialekvationen.

$$y' = A - 2B/x^3$$
$$y'' = 6B/x^4$$

Sedan sätts dom in i ekvationen.

$$\begin{aligned} & x^2 6B/x^4 + 2x(A - 2B/x^3) - 2(Ax + B/x^2) \\ &= 6B/x^2 + 2xA - 4B/x^2 - 2xA - 2B/x^2 \\ &= \frac{B}{x^2}(6 - 4 - 2) + 2xA(2 - 2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

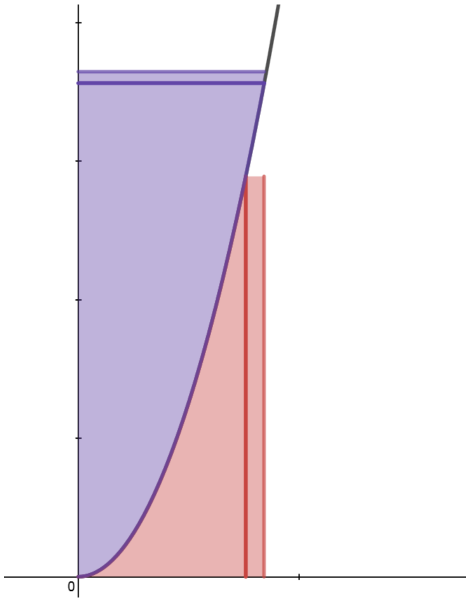
7. Följande områden ska bilda rotationsvolymer där area A är lila och area B är röd.



Där den lila linjen visar vart y=b är och den röda linjen visar vart x=a är. Rotationsvolymen V_a roterar på x-axeln och går mellan 0 och a, så då blir det $V_a = \pi \int_0^a x^4 dx$ medans för den som roterar runt y axeln blir $V_b = \pi \int_0^b y dy$. Sambadet mellan dom räknas då ut som följande.

$$\pi \int_0^a x^4 dx = \pi \int_0^b y dy \Rightarrow \frac{x^5}{5}]_0^a = \frac{y^2}{2}]_0^b \Rightarrow \frac{a^5}{5} = \frac{b^2}{2} \Rightarrow 2a^5 = 5b^2$$
$$\Rightarrow b = \sqrt{\frac{2a^5}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} a^{5/2}$$

Enligt ekvationen åvan, vid större värden av a, så måste b växa väldigt fort. Detta är logiskt då rotationsvolymen som bildas av b (den lila delen av bilden nedan) växer mycket långsammare än den som är begränsad av a (röda delen). En liten förändring db bildar en mycket större förändring da.


0