1. (a) Med produktregeln blir derivatan

$$x'cos(x) + x(cos(x))' = cos(x) - xsin(x)$$

(b) Med produktregeln blir derivatan

$$\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$$

2. (a) Derivatan är

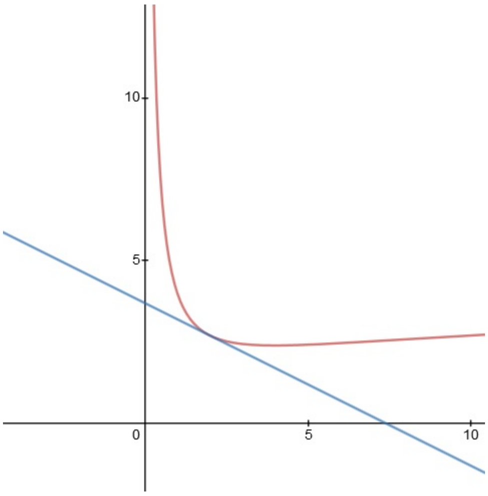
(b)

$$y'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{x}$$

Så

$$y'(2) = -\frac{4}{4} + \frac{1}{2} = -0.5$$

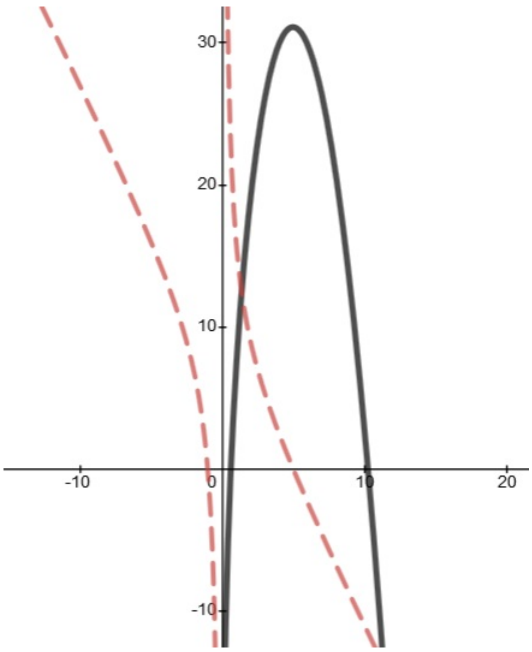
Vilket kan verifieras med en bild



3. Derivatan blir

$$\frac{10}{x} - 2x + 8$$

Som illustreras som röd medans den svarta är orginalekvationen.



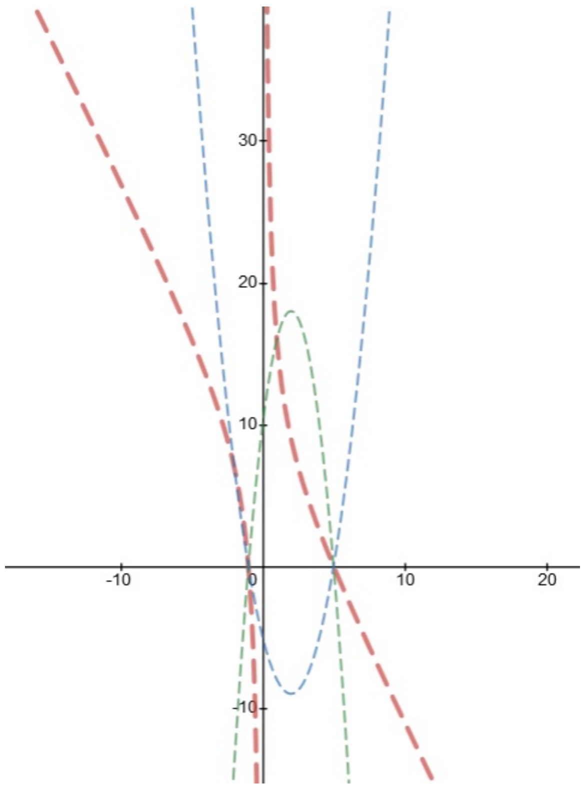
Extrempunkterna hamnar där derivatan är noll

$$\frac{10}{x} - 2x + 8 = 0$$

Skriver om den till en andragradsekvation

$$10 - 2x^2 = -8x \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0$$

Extrempunkterna sker då vid 5 och -1. Man kan se vid dom olika omskrivningarna av derivatan så behåller möter dom fortfarande varandra på x-axeln. Att manipulera polynomer som man sätter lika med noll är samma som att transformera kurvan i det tvådimensionella planet som behåller punkten.



Men eftersom att den orginella ekvationen inehåller $10ln(x)$ så är den odefinierad för reella variabler. Då lär jag svara att det finns en extrempunkt vid x=5

Tar man andraderivatan $-\frac{10}{x^2} - 2$ vid x=5 får man att andraderivatan är negativ, vilket innebär att det är en maximipunkt. Detta kan man se i figur 2.

4. Ekvationen för en tangent vid punkt x_0 är $f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

   Eftersom att $x_0 = 0$ så simplifieras den till $f'(0)x + f(0)$.

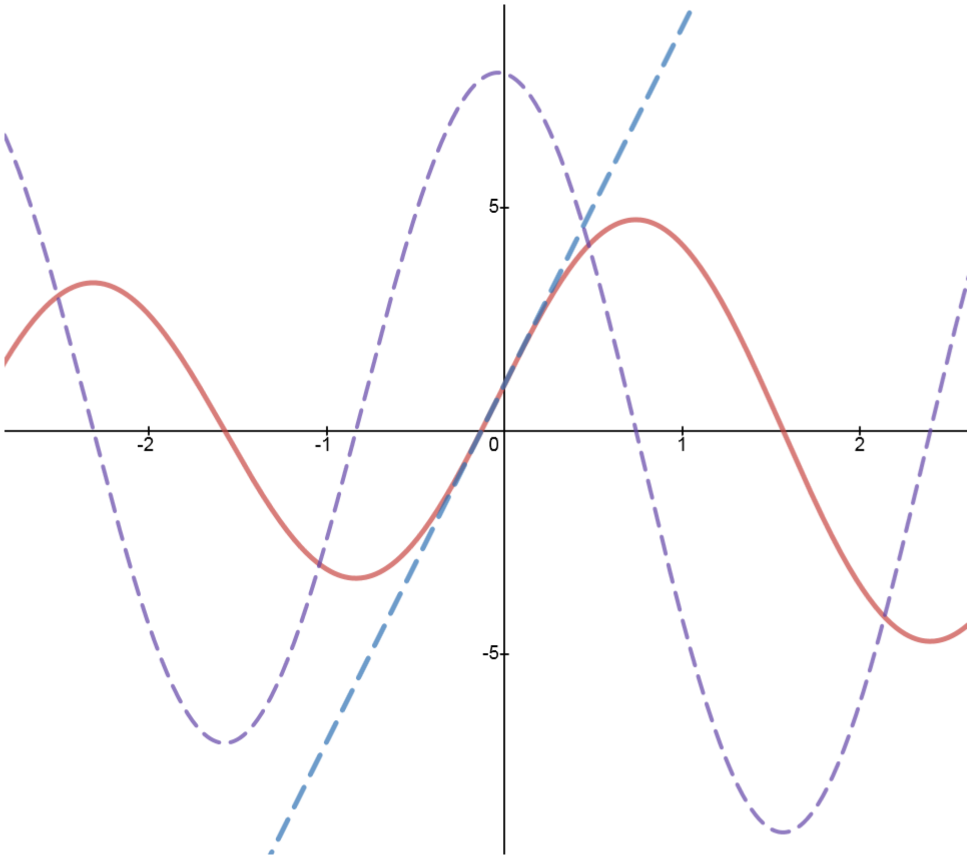
   $f(0) = 4\sin(2 \cdot 0) + \cos(0) = 1$

   $f'(x) = 8cos(2x) - sin(x)$

   $f'(0) = 8cos(2 \cdot 0) - sin(0) = 8$

   Så då blir tangenten och svaret på frågan följande: $f'(0)x + f(0) = 8x + 1$

   I figuren nedan är tangenten blå, derivatan lila och den orginella ekvationen är röd. Observera att y och x axlarna inte har samma skala.



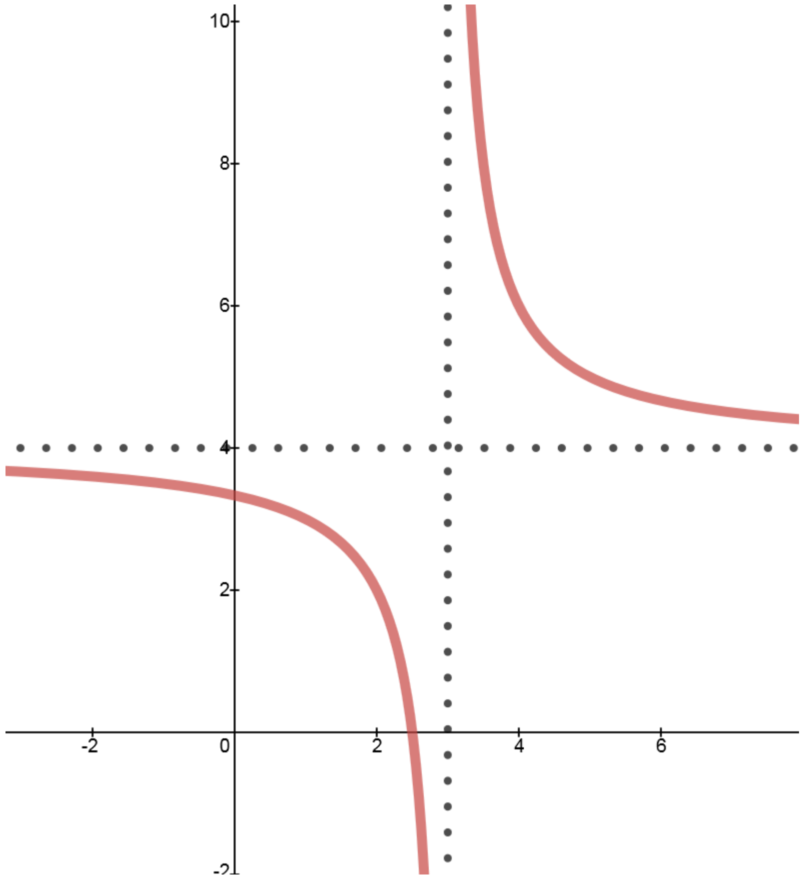
5. Asymptoterna är ställen i funktionen där man delar på noll. Vid

$$y = \frac{2}{x-3} + 4$$

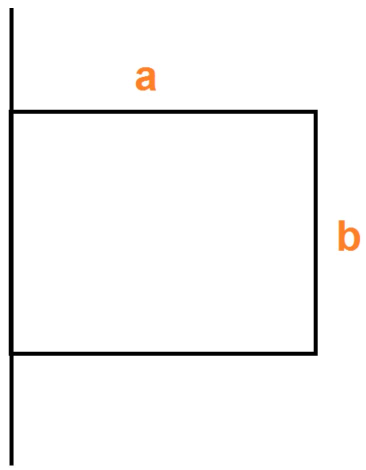
är det självklart att 3 är en assymptot. På y-axeln sker det också en asymptot. 4:an i ekvationen får en att tänka sig att det sker då (se figur nedan) eftersom att 4 transformerar hela grafen upp med 4. Men för att göra detta rigoröst lösar man ut x

$$y - 4 = \frac{2}{x-3} \Rightarrow x - 3 = \frac{2}{y-4} \Rightarrow x = \frac{2}{y-4} + 3$$

Detta visar att y=4 är den andra asymptoten.



6. I uppgiften får vi reda på två sanningar. Med följande variabler



   Får vi ut att Arean $A = ab$ och omkretsen $O = 50 = 2a + b$ Omkretsekvationen kan skrivas om som $b = 50 - 2a$ och sedan sättas in i den första vilket bildar $A = a(50 - 2a) = 50a - 2a^2$.

   Maxpunkten blir då där derivatan av funktionen är noll. $50 - 4a = 0 \Rightarrow a = 12.5$ meter.

   Så när a är 12.5 meter blir det optimal area, och följande ekvationen kring omkretsen måste b ha längden $50 - 2 \cdot 12.5 = 25$ meter.

7. Med produktregeln blir derivatan $(x^2)'2^x + x^2(2^x)' = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot ln(2)$

   Och dom blir noll när
$$0 = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot ln(2)$$

$$-x^2 \cdot 2^x \cdot ln(2) = 2x \cdot 2^x$$
$$-x^2 \cdot ln(2) = 2x$$
$$e^{-x^2 \cdot ln(2)} = e^{2x}$$
$$e^{-x \cdot ln(2)} = e^2$$