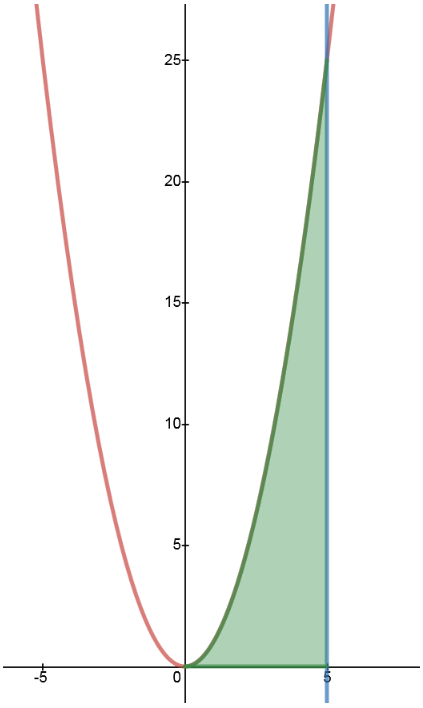
1. I uppgiften görs ett antagande att den även begränsas av y-axeln.



Eftersom rotationen sker kring x-axeln så blir värdet på y radien, och då används formeln

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

I figuren så kan man observera att integralen går från 0 till 5

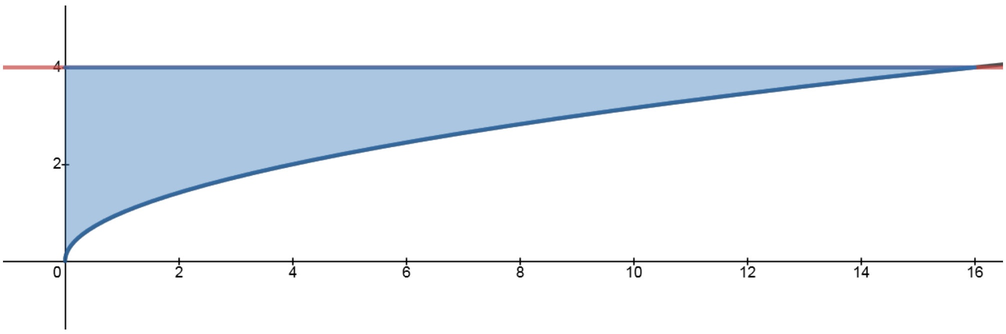
$$\pi \int_0^5 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^5 x^4 dx$$

Som då integreras

$$\Rightarrow \pi(\frac{x^5}{5})]_0^5 = \pi 5^5/5 = \pi 625 v.e$$

2. Radien i denna uppgift blir istället radien x. Då hamnar x på $x = y^2$. Vilket grafiskt kan tänkas som att funktionerna x^2 och $\sqrt{x}$ har en rotationel symetri. Då används formeln

$$\pi \int_a^b f(y)^2 dy$$

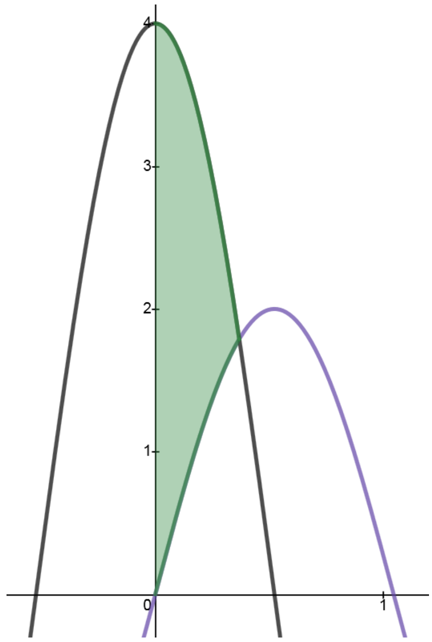


I figuren ser vi att integralen går från 0 till 4.

$$\pi \int_0^4 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^4 y^4 dy$$

$$\Rightarrow \pi \frac{y^5}{5}]_0^4 = \pi \frac{4^5}{5} = \pi \frac{1024}{5} v.e$$

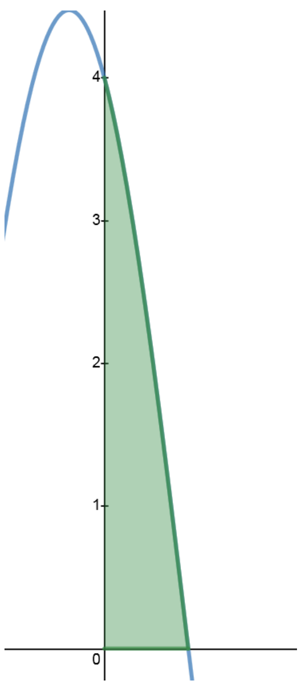
3. Följande area ska utberäknas



Med sådana integraler räknar man rektanglarna mellan funktionerna, dvs $g(x) - f(x)$, och integrerar sedan över den nya funktionen som i detta fall blir

$$4cos(3x) - 2sin(3x)$$

Som då blir den här arean



Integralen som räknas ut blir då mellan 0 och intersektionspunkten. Intersektionspunkten är när

$$4cos(3x) = 2sin(3x) \Rightarrow 2 = \frac{sin(3x)}{cos(3x)} = tan(3x) \Rightarrow x = \frac{tan^{-1}(2)}{3}$$

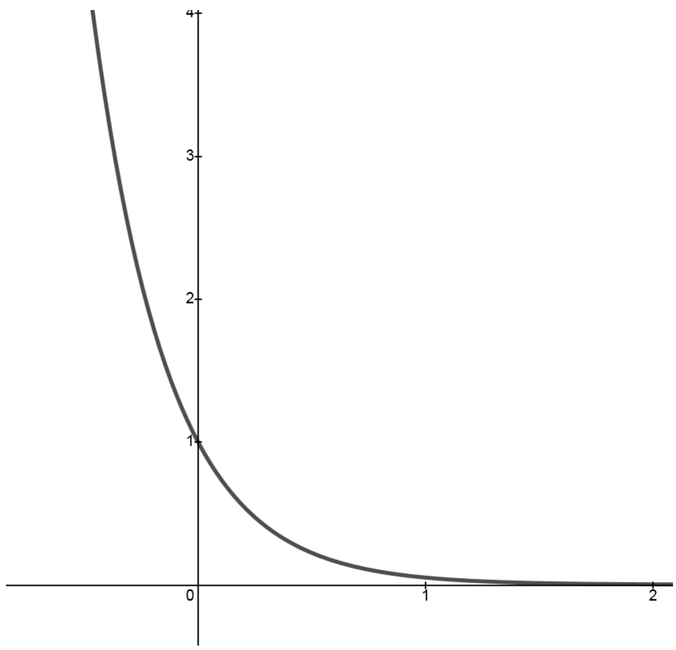
$$\int_0^{tan^{-1}(2)/3} 4cos(3x) - 2sin(3x)dx = \frac{4sin(3x) + 2cos(3x)}{3}]_0^{tan^{-1}(2)/3}$$
$$= \frac{4sin(tan^{-1}(2)) + 2cos(tan^{-1}(2)) - 2}{3} \approx \frac{4sin(1.11) + 2cos(1.11) - 2}{3} \approx 0.824a.e$$

Detta är rimligt med tanke på att området är väldigt tunt.

4. Differentialekvationen kan skrivas om som $y' = -3y$. Som då kan integreras och lösas ut som

$$dx = \frac{1}{-3y}dy \Rightarrow x = -\frac{1}{3}ln(y) + C$$

Funktionen den här bildar är väldigt lik en bakvänd e^x funktion



Löser man ut y får man ekvationen.

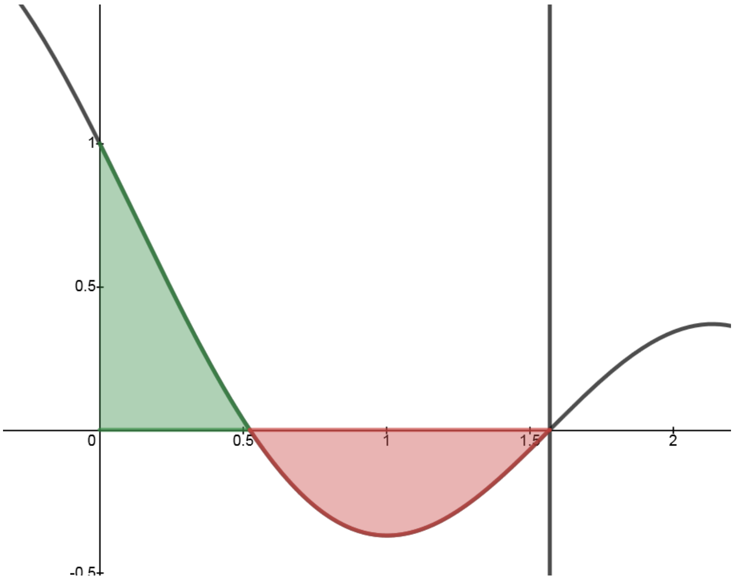
$$x - C = -\frac{1}{3}ln(y) \Rightarrow 3C - 3x = ln(y) \Rightarrow y = e^{3c-3x}$$

Antar man att c=0 så blir konstanten $a = -3$.

5.

$$sin(x) + \frac{cos(2x)}{2}]_0^{\pi/2}$$
$$= 1 - 1/2 - 1/2 = 0$$

Man kan verifiera det här grafiskt



Man kan uppmana att den gröna arean minus den röda arean kommer ligga välidigt nära noll då dom, med ögonmått, ser ut att vara lika stora.

6. Man kan sätta in lösningen i den originella differnetialekvationen.

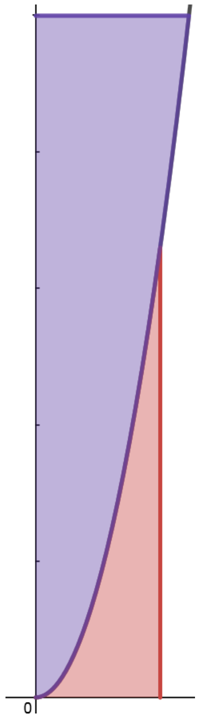
$$y' = A - 2B/x^3$$
$$y'' = 6B/x^4$$

Sedan sätts dom in i ekvationen.

$$\begin{aligned} &x^2 6B/x^4 + 2x(A - 2B/x^3) - 2(Ax + B/x^2) \\ &= 6B/x^2 + 2xA - 4B/x^2 - 2xA - 2B/x^2 \\ &= \frac{B}{x^2}(6 - 4 - 2) + 2xA(2 - 2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vilket är korrekt enligt uppgiften.

7. Följande områden ska bilda rotationsvolymer där area A är lila och area B är röd.



Där den lila linjen visar vart y=b är och den röda linjen visar vart x=a är. Rotationsvolymen V_a roterar på x-axeln och går mellan 0 och a, så då blir det $V_a = \pi \int_0^a x^4 dx$ medans för den som roterar runt y axeln blir $V_b = \pi \int_0^b y dy$. Sambadet mellan dom räknas då ut som följande.

$$\pi \int_0^a x^4 dx = \pi \int_0^b y dy \Rightarrow \frac{x^5}{5}]_0^a = \frac{y^2}{2}]_0^b \Rightarrow \frac{a^5}{5} = \frac{b^2}{2} \Rightarrow 2a^5 = 5b^2$$
$$\Rightarrow b = \sqrt{\frac{2a^5}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} a^{5/2}$$

Enligt ekvationen åvan, vid större värden av a, så måste b växa väldigt fort. Detta är logiskt då rotationsvolymen som bildas av b (den lila delen av bilden nedan) växer mycket långsammare än den som är begränsad av a (röda delen). En liten förändring db bildar en mycket större förändring da.