

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie [2, S. 1–2]	3
2.1 Forier-Analyse	4
2.2 Fourier-Synthese	5
2.3 Lissajous-Figuren	5
3 Durchführung	5
3.1 Vorbereitung: Bestimmung der Fourier-Koeffizienten	5
3.1.1 Rechteck-Schwingung	5
3.1.2 Dreieck-Schwingung	8
3.1.3 Sägezahn-Schwingung	8
3.2 Experiment: Fourier-Analyse/-Synthese	9
3.2.1 Fourier-Analyse	10
3.2.2 Fourier-Synthese	10
4 Ergebnisse	11
4.1 Fourier-Analyse: Fourier-Transformation	11
4.2 Fourier-Synthese	13
4.2.1 Rechteck-Schwingung	13
4.2.2 Dreieck-Schwingung	14
4.2.3 Sägezahn-Schwingung	15
4.3 Auswertung	15
5 Fehlerrechnung	16
6 Diskussion	16
Literatur	17

Anhang

1 Zielsetzung

In diesem Experiment soll der mathematische Umgang mit dem Fourier-Theorem und die Fourier-Analyse, sowie die -Transformation geübt werden. Dazu werden beispielsweise elektrische Schwingungen in Fourier-Komponenten zerlegt oder umgekehrt selbige Schwingungen aus den Fourier-Komponenten zusammengesetzt.

2 Theorie [2, S. 1–2]

Für den Versuch zur Fourier-Analyse und Synthese müssen zunächst einige Grundlagen erklärt werden: Periodische Vorgänge im Raum, beispielsweise sich ausbreitende Wellen oder ungedämpfte Schwingungen, lassen sich durch eine Funktion beschreiben, die zeitlich und räumlich periodisch ist. Physikalisch bedeutet dies, dass eine entsprechende Größe nach einer Periodenzeit T und/oder einer Distanz D an den Ursprungsort zurückkehrt und den Ablauf wiederholt. Solche Funktionen können die Sinus- oder Cosinusfunktion sein. Dabei beschreibt der Vorfaktor die Amplitude, das Argument die Frequenz und die Phase.

Jean Baptiste Joseph Fourier nutzte die Tatsache, dass diese Funktionen nahezu jedes Phänomen der Natur beschreiben können, in dem es das Fouriersche Theorem formulierte:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right) \quad (1)$$

„Ist diese Reihe gleichmäßig konvergent“, also ist $f(t)$ überall stetig, „so stellt sie eine periodische Funktion $f(t)$ mit der Periode T dar, und für die Koeffizienten a_n und b_n gilt:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (2)$$

und

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt \quad (3)$$

mit $n = 1, 2, \dots, N$, wobei $N \in \mathbb{R}$ [2, S. 1–2]. $f(t)$ enthält möglicherweise Knickstellen, also unterschiedliche Werte für die links- und rechtsseitige Ableitung.

Mit der Ausnahme der Grundschwingung f_1 , bei der (2) null wird und (3) 1, sodass $f_1 = \frac{1}{T}$, treten nur ganzzahlige Vielfache von f_1 auf. Dies sind die so genannten Oberschwingungen. In (1) können nur die Phasen 0 , $\frac{\pi}{2}$, π und $\frac{3\pi}{2}$ auftreten. Werden nun diese Amplituden a_n und b_n als Funktion der Frequenzen dargestellt, so ergibt sich das (Linien-)Spektrum der Schwingung. Werden diese Koeffizienten ermittelt, wird eine

Fourier-Analyse betrieben. Es kommt ferner zum Gibbschen Phänomen, wenn an einer unstetigen Stelle t_0 von $f(t)$ eine Approximation versucht wird. Dieses Phänomen bezeichnet eine (endliche) Abweichung der Reihe.

Mittels der Fourier-Transformation kann das gesamte Frequenzspektrum einer zeitabhängigen Funktion ermittelt werden, unabhängig von möglichen Periodizitäten:

$$g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{ift} dt \quad (4)$$

mit dem Frequenzspektrum $g(f)$ und $k(t)$ als approximierte Funktion, da die Grundfrequenz bereits als f angenommen wird. Nicht periodische Funktionen besitzen daher ein kontinuierliches Frequenzspektrum, periodische ein Linienspektrum. $g(f)$ besteht also aus einer (konvergierenden) Reihe von δ -Funktionen. Die Umkehrfunktion lautet:

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(f)e^{-ift} df \quad (5)$$

Dies bedeutet: „Die Fourier-Transformierte der Spektralfunktion g ist gleich der Zeitabhängigkeit des Vorganges“ [2, S. 3]. Leider treten durch endliche Integration Abweichungen von den zu erwartenden Ereignissen auf. Bei einem Linienspektrum sind also beispielsweise die Linien von endlicher Breite, da g keine δ -Funktionen mehr besitzt, sondern stetig und differenzierbare Funktionen. Dadurch entstehen wiederum Nebenmaxima.

2.1 Forier-Analyse

Bei der Fourier-Analyse werden Schwingungen in Fourier-Koeffizienten zerlegt und die eigentliche Schwingung approximiert. Dabei kann es zu Abweichungen kommen, die in Abb. 7 sehr deutlich zu erkennen sind. Diese werden von dem Gibbschen Phänomen erfasst, das bereits in Kapitel 2 erläutert wurde. Dazu braucht es einen Generator, der eine Signalspannung erzeugt und über einen hochohmigen Widerstand einen Parallelresonanzkreis zu erzwungenen Schwingungen anregt. Dabei kommt es möglicherweise zum so genannten Resonanzeffekt, der durch eine Spannungszunahme am Schwingkreis charakterisiert ist. Bei der Analyse wird sich außerdem zu Nutze gemacht, dass $U_{\text{Resonanz}} \sim A_{\text{Oberwelle}}$, da damit sämtliche Oberwellen angeregt und das Amplitudenverhältnis der Fourierkomponenten bestimmt werden kann.

Dazu wird der Signalgenerator auf die Frequenz „ $\frac{v_R}{n}$ “ eingestellt, sodass die n -te Oberwelle die Frequenz

$$n \frac{v_R}{n} = v_R \quad (6)$$

besitzt. v_R bezeichnet dabei die Resonanzfrequenz mit $v_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Dadurch wird der Schwingkreis zum verstärkten Mitschwingen (in Resonanz) gebracht. Um sehr kleine

Fourier-Komponenten (und den Wert 0) messen zu können, wird eine Resonanzkurve mit steil abfallenden Flanken benötigt. Dazu könnten mehrere Schwingkreise realisiert werden.

2.2 Fourier-Synthese

Bei der Synthese geschieht der umgekehrte Vorgang der Fourier-Analyse. Aus den errechneten Fourier-Koeffizienten wird die entsprechende Schwingung konstruiert. Dazu wird ein Sinus-Generator genutzt, der phasenstarre Sinus-Schwingungen liefert, deren Frequenzen sich wie ganze Zahlen verhalten.

2.3 Lissajous-Figuren

Bei der Fourier-Synthese treten „Lissajous-Figuren“ auf, die durch Überlagerung „zweier harmonischer, rechtwinkelig zueinander stehender Schwingungen entstehen“[4]. Diese werden später dazu benötigt, die Phasendifferenz zweier Schwingungen aufzuheben, bzw. auf null zu bringen.

3 Durchführung

3.1 Vorbereitung: Bestimmung der Fourier-Koeffizienten

Vor Beginn der Messreihe werden die Fourier-Koeffizienten der gewählten Rechteck-, Dreieck- und Sägezahn-Schwingung bestimmt. Dazu wird eine vereinfachte Annahme gemacht, dass es sich bei den Schwingungen um gerade, bzw. ungerade Funktionen handelt.

3.1.1 Rechteck-Schwingung

Zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten a_n und b_n wird die Funktion als eine ungerade Funktion definiert: Damit gilt $f(x) = -f(-x)$.

Die Funktion lautet daher:

$$f(t) = \begin{cases} -A & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ A & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (7)$$

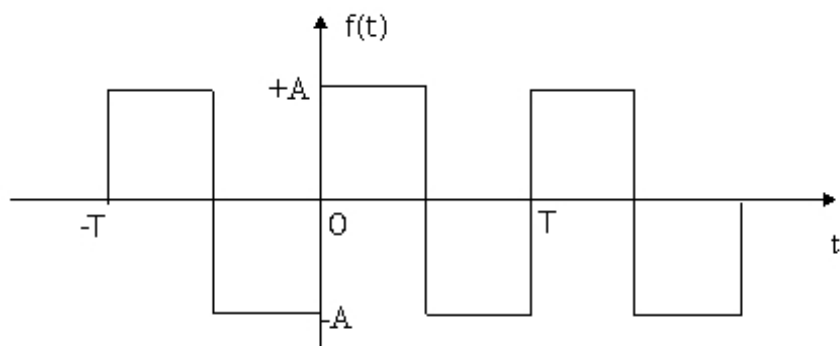


Abbildung 1: Rechteck-Schwingung [3]

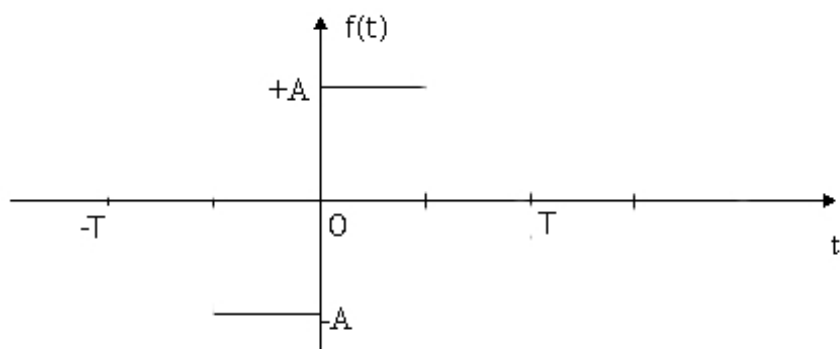


Abbildung 2: Rechteck-Schwingung als ungerade Funktion

Damit ist der Koeffizient $a_n = 0 \forall n$.
Für b_n ergibt sich also nach (3):

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt \Leftrightarrow \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 -A \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt \right) \quad (8)$$

Mit der Stammfunktion

$$F(t) = \left[A \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) \frac{T}{2\pi n} \right]_{-\frac{T}{2}}^0 \quad (9)$$

und aus Symmetrieüberlegungen folgt für b_n

$$b_n = 2 \left(A \cos(-n\pi) \frac{1}{\pi n} + \frac{A}{\pi n} \right) \quad (10)$$

Da die Cosinus-Funktion einen Wertebereich von $[-1;1]$ besitzt und für ganzzahlige Vielfache entweder -1 oder 1 wird, folgt mit Ausklammern:

$$b_n = \frac{2A}{\pi n} ((-1)^n + 1) \quad (11)$$

Schließlich kann eine Fallunterscheidung für gerade und ungerade n durchgeführt werden:

Tabelle 1: Fallunterscheidung für gerade und ungerade n

n gerade	n ungerade
$\frac{4A}{\pi n}$	0

3.1.2 Dreieck-Schwingung

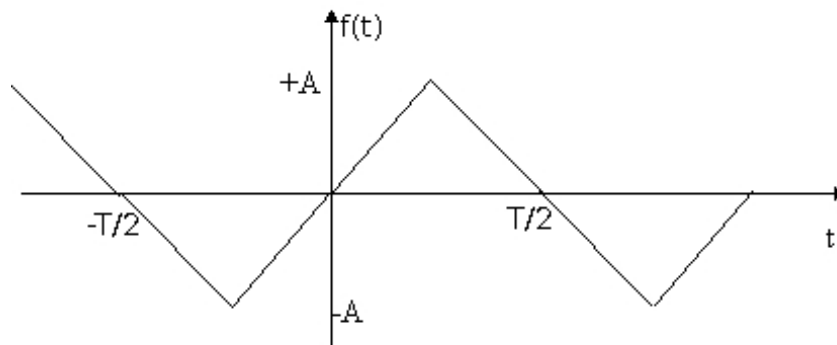


Abbildung 3: Dreieck-Schwingung [1]

Analog zu Kapitel 3.1.1 folgt dieselbe Vorgehensweise für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten der Dreieck-Schwingung. Diesmal wird allerdings eine gerade Funktion angenommen, sodass gilt:

$$f(x) = f(-x) \quad (12)$$

Damit verschwinden hier alle b_n , also $b_n = 0 \forall n$. Für die Funktion $f(t)$ ergibt sich analog:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4At}{T} + A & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ -\frac{4At}{T} + A & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (13)$$

Die Rechnung wird der Übersichtlichkeit halber im Anhang aufgezeigt, hier lediglich das Resultat für den Koeffizient a_n :

Tabelle 2: Fallunterscheidung für gerade und ungerade n

n gerade	n ungerade
0	$\frac{-8A}{\pi^2 n^2}$

3.1.3 Sägezahn-Schwingung

Für die Sägezahn-Schwingung wird eine ungerade Funktion (vgl. Kapitel 3.1.1) gewählt, sodass erneut $a_n = 0 \forall n$ ist.

Die Funktion lautet:

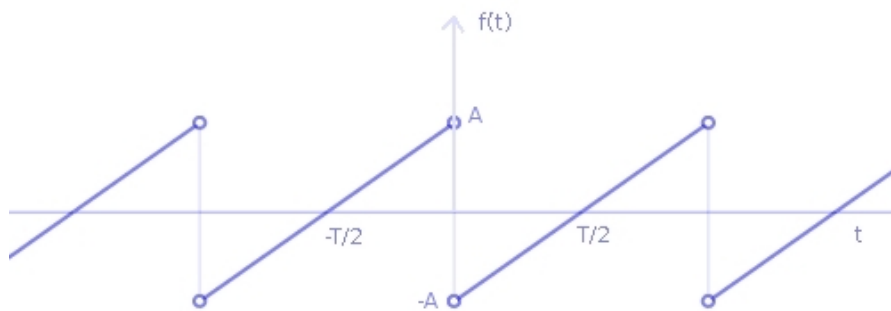


Abbildung 4: Sägezahn-Schwingung [5]

$$f(t) = \begin{cases} \frac{At}{T} - A & 0 < t < \frac{T}{2} \\ \frac{At}{T} & \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad (14)$$

Für den Koeffizienten b_n ergibt sich nach (3)

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt \Leftrightarrow b_n = \frac{2}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{At}{T} - A\right) \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T \frac{At}{T} \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt \right) \quad (15)$$

über partielle Integration ergibt sich die Rechnung analog zu 6:

$$\frac{A}{\pi n} (-1)^n \quad (16)$$

Analog zu 3.1.1 ergibt sich:

Tabelle 3: Fallunterscheidung für gerade und ungerade n

n gerade	n ungerade
$\frac{A}{\pi n}$	$-\frac{A}{\pi n}$

3.2 Experiment: Fourier-Analyse/-Synthese

Für die kommende Messung wird eine einfach periodische elektrische Schwingung in ihre Fourier-Komponenten zerlegt und diese mit den Ergebnissen aus dem Fourierschen Theorem (1) verglichen.

3.2.1 Fourier-Analyse

Zunächst sollen die Rechteck-, Dreiecks- und Sägezahn-Schwingung mittels einer Fourier-Analyse untersucht werden.

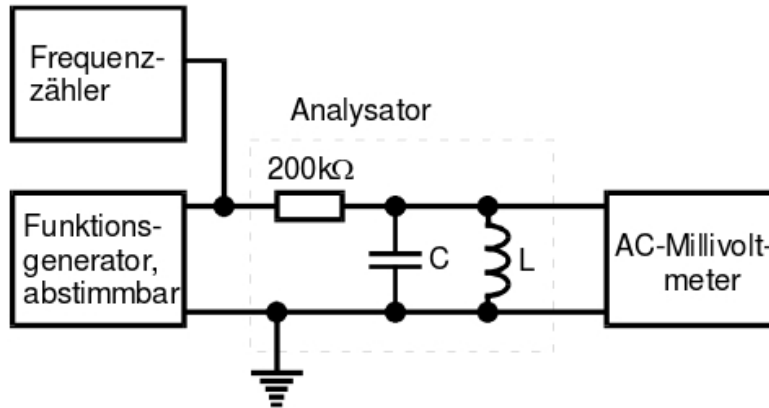


Abbildung 5: Schaltung zur Fourieranalyse

Dies geschieht beispielsweise mittels einer Fourier-Transformation und lässt sich wie folgt darstellen: Das digitale Oszilloskop wird eingeschaltet und mit dem ebenfalls einzu-

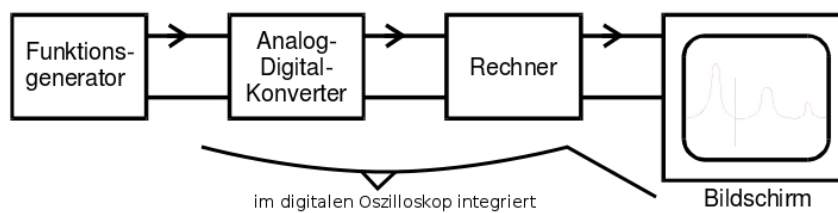


Abbildung 6: schematischer Aufbau der Messapparatur zur Fourier-Transformation

schaltenden Funktionsgenerator verbunden. Am Generator werden jeweils die Rechteck-, Dreieck- und Sägezahn-Schwingung eingestellt und aktiviert. Am Oszilloskop wird mit dem Cursor an die jeweiligen Amplituden gefahren und die Messwerte abgelesen.

3.2.2 Fourier-Synthese

Sodann wird der Sinuswellen-Generator angeschaltet und mit dem einzuschaltenden Voltmeter verbunden. Dazu wird der Signalgenerator auf die Frequenz „ $\frac{v_R}{n}$ “ eingestellt und die Höhe der Resonanzspannung gemessen. Die Resonanzspannung der ersten Oberwelle wird auf den maximalen Wert von $0,6473\text{V}$ gestellt und die ungeraden Oberwellen

zu a_3, a_5, a_7 und a_9 soweit von null hochgeregelt, dass die Frequenz der j -ten Oberwelle der Quotient aus der ersten Oberwelle und i^n ist, also:

$$U_i = \frac{U_1}{i^n} \quad (17)$$

Diese Berechnung korreliert mit den errechneten Koeffizienten aus Kapitel 3.1 und die Potenz von n in den jeweiligen Koeffizienten gibt die Teilungspotenz in Gleichung (17) an. Die (un-)geraden Amplituden müssen nach der Koeffizientenberechnung aus Kapitel 3.1 null sein.

Die anderen beiden Messungen für die Dreiecks- und Sägezahnschwingung lassen sich analog einstellen, wobei die erste Resonanzspannung bei der Dreieckschwingung 0,6466V betrug und durch das Quadrat der i -ten Amplitude geteilt werden muss.

Bei der Sägezahnschwingung hatte die erste Oberwelle eine Spannung von 0,6467V. Für diese Schwingung muss jede Amplitude eingestellt werden, nach Kapitel 3.1.3 beträgt die Potenz -1 .

Sodann wird die Verkabelung umgelegt und der Generator mit dem Oszilloskop über beide Kanäle „CH1“ (X-Eingang) und „CH2“ (Y-Eingang) mittels eines Adapter verbunden. Dabei führen beide minusgepolte Kabel aus den Adaptern in die Erdungsbuchse des Generators. Das plusgepolte Kabel wird jeweils mit dem Adapter des jeweiligen Kanals und dem Ausgang am Generator, bzw. der zu untersuchenden Oberwelle gekoppelt.

Der Modus wird in den Display-Einstellungen auf „xy-Modus“ gestellt. Auf dem Oszillograph ist nun eine Lissajous-Figur zu erkennen. Die Phasen der jeweiligen Oberwelle wird nun so angepasst, dass die Lissajous-Figur zu einer Kurve überlagert. Sodann ist die Phase 0 oder π eingestellt. Dies wird mit jeder Amplitude gemacht.

Sodann wird am Summationskanal des Generators eine Verbindung zum Oszilloskop gelegt und auf „xt“-Betrieb umgeschaltet. Es zeigen sich die zu erwartenden Schwingungen. Diese werden abschließend über den „Print Screen“-Knopf des Oszilloskop gesichert und auf einen USB-Stick übertragen.

4 Ergebnisse

4.1 Fourier-Analyse: Fourier-Transformation

Für die kommende Messung wird eine einfach periodische elektrische Schwingung in ihre Fourier-Komponenten zerlegt und diese mit den Ergebnissen aus dem Fourierschen

Theorem (1) verglichen. Die Fehler berechnen sich nach Kapitel 5, die jeweilige genutzte Gleichung steht in der Tabelle. Der theoretische Wert ergibt sich durch die Resonanzspannung der ersten Amplitude dividiert durch i mit der Potenz der errechneten Koeffizienten (vgl. 3.2.2 und 17).

Tabelle 4: Spannungen ΔU in $[\Delta U] = V$, Amplituden A_n und Fehler der Rechteck-Schwingung

ΔU	gemessene A_n	theoretische A_n	$\frac{A_n}{A_1}$	$\frac{1}{A_n}$	RF(%) nach (18)
a_1	8,8800	8,8800	1,0000	1,0000	0,0000
a_3	2,9200	2,9600	0,3288	0,3333	1,3514
a_5	1,6800	1,7760	0,1892	0,2000	5,4054
a_7	1,1400	1,2686	0,1284	0,1429	10,1351
a_9	0,8200	0,9867	0,0923	0,1111	16,8919

Tabelle 5: Spannungen ΔU in $[\Delta U] = V$, Amplituden A_n und Fehler der Dreieck-Schwingung

ΔU	gemessene A_n	theoretische A_n	$\frac{A_n}{A_1}$	$\frac{1}{A_n}$	RF(%) nach (18)
a_1	5,6800	5,6800	1,0000	1,0000	0,0000
a_3	0,6300	0,6311	0,1109	0,1111	0,1761
a_5	0,2100	0,2272	0,0370	0,0400	7,5704
a_7	0,0870	0,1159	0,0153	0,0204	24,9472
a_9	0,0520	0,0701	0,0092	0,0123	25,8451

Tabelle 6: Spannungen ΔU in $[\Delta U] = \text{V}$, Amplituden A_n und Fehler der Sägezahn-Schwingung

ΔU	gemessene A_n	theoretische A_n	$\frac{A_n}{A_1}$	$\frac{1}{A_n}$	RF(%) nach (18)
a_1	4,4800	4,4800	1,0000	1,0000	0,0000
a_2	2,2400	2,2400	0,5000	0,5000	0,0000
a_3	1,4800	1,4933	0,3304	0,3333	0,8929
a_4	1,0800	1,1200	0,2411	0,2500	3,5714
a_5	0,8800	0,8960	0,1964	0,2000	1,7857
a_6	0,7200	0,7467	0,1607	0,1667	3,5714
a_7	0,6400	0,6400	0,1429	0,1429	0,0000
a_8	0,5500	0,5600	0,1228	0,1250	1,7857
a_9	0,4900	0,4978	0,1094	0,1111	1,5625
a_{10}	0,4400	0,4480	0,0982	0,1000	1,7857

4.2 Fourier-Synthese

Es folgen drei Bildschirmfotos der Schwingungen:

4.2.1 Rechteck-Schwingung

Mit einer Amplitude von $a_1 = 0,6473\text{V}$ der ersten Oberwelle ergibt sich folgende Approximation:

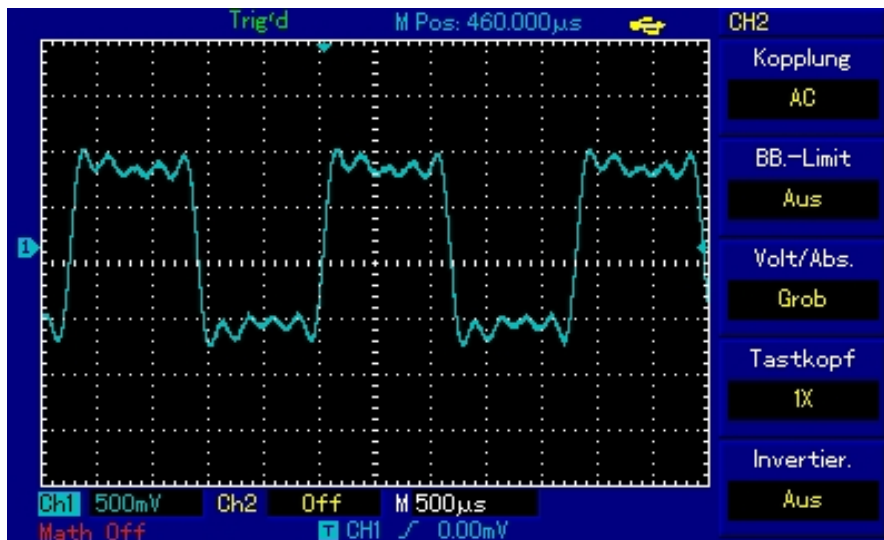


Abbildung 7: Rechteck-Schwingung

4.2.2 Dreieck-Schwingung

Mit einer Amplitude von $a_1 = 0,6466\text{V}$ der ersten Oberwelle ergibt sich folgende Approximation:

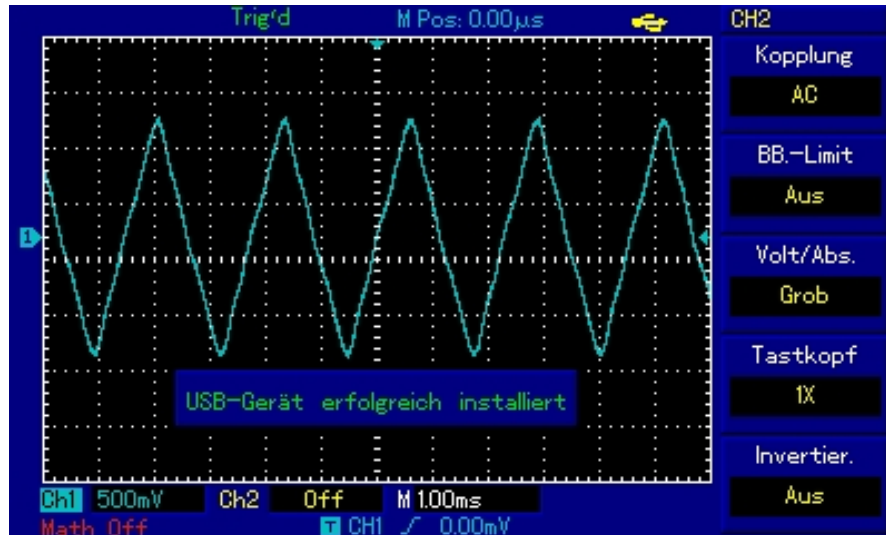


Abbildung 8: Dreieck-Schwingung

4.2.3 Sägezahn-Schwingung

Mit einer Amplitude von $a_1 = 0,6467\text{V}$ der ersten Oberwelle ergibt sich folgende Approximation: Dabei wurden die anderen Amplituden nach 3.2.2 theoretisch berechnet und

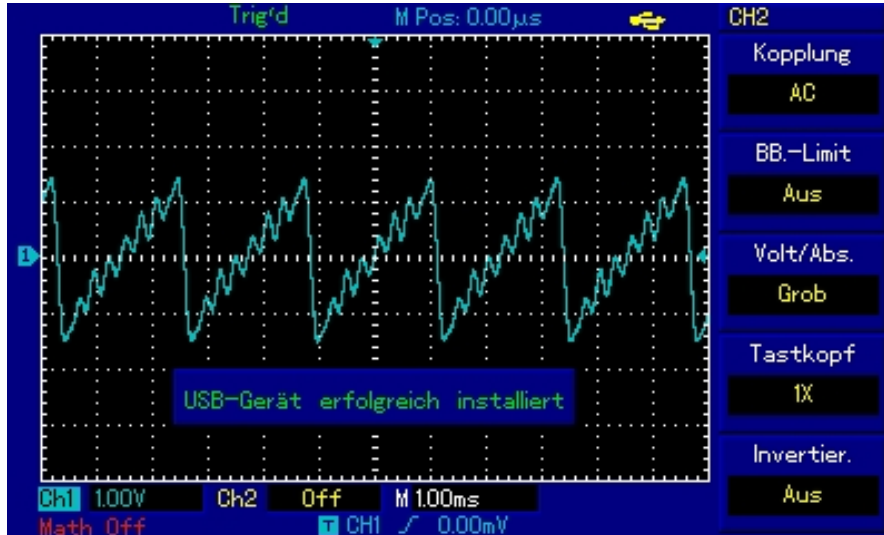


Abbildung 9: Sägezahn-Schwingung

am Sinusgenerator eingestellt.

Bei allen Kurven wurden die Phasenschalter nachträglich noch einmal so fein justiert, dass die Approximation an die zu erwartenden Graphen besser wurde.

4.3 Auswertung

Es fällt auf, dass die Graphen Abweichungen in Form von periodischen Kurven aufweisen. Diese bezeichnen das so genannte Gibbsche Phänomen. Offensichtlich wurde also an diesen Stellen nur noch hinreichend approximiert (vgl. Kapitel 2). Das Rechteck zeigt im Maximum der Schwingung keine Konstanz, was in Abb. 7 deutlich wird: Dort kommt es im Maximum zu einem leichten Abstieg, während im Minimum der Schwingungsverlauf eher ansteigt. Die Dreiecksschwingung wurde am besten angenähert, dort treten lediglich leichte Ungenauigkeiten zwischen den Extrema auf. Die Sägezahnschwingung zeigt im Anstieg ebenfalls keine Konstanz, auch hier gibt es die bei der Rechteckschwingung beobachteten Ungenauigkeiten. Ebenso sind am absteigenden Ast weitere Ungenauigkeiten zu erkennen.

5 Fehlerrechnung

Der Gauß-Fehler mit $n :=$ Anzahl der Oberwelle errechnet sich nach:

$$\sigma_{2,A_n,n} = \sqrt{\left(\frac{A_{n, \text{Messung}}}{A_{n, \text{theoretisch}}} - 1\right)^2} \cdot 100 \quad (18)$$

6 Diskussion

Bereits während der Messung der Rechteck-Schwingung fiel auf, dass die Spannungen der geraden Amplituden nicht konstant null waren, bzw. die Resonanzspannungen der ungeraden Amplituden nicht auf den berechneten Wert eingestellt werden konnten. Analog kann davon ausgegangen werden, dass die zugehörigen Phasen nicht bei konstant null, bzw. π lagen. Ebenso war das Voltmeter nicht geeicht. Dadurch ergibt sich eine Abweichung von den theoretischen Werten, die sich entweder durch die fehlende Eichung oder Spannungsschwankungen im Stromnetz bemerkbar macht. Außerdem bot der Sinus-Generator lediglich 10 Amplituden an, wodurch es zu den in Kapitel 2 erwähnten Ungenauigkeiten kommt. Theoretisch würden unendlich viele benötigt, allerdings stellt sich eine genügend präzise Messung auch bei hinreichend vielen Amplituden ein, wie man in [5] anschaulich sieht.

Wie in Abb. 6 skizziert, eint das Oszilloskop den Rechner und den Analog-Digital-Konverter. Da das Oszilloskop sehr wohl zeitabhängige Schwingungen darstellen kann, entfällt die Beachtung des Abtasttheorems.

Durch die Innenwiderstände des Voltmeters und der vereinfachten Annahme über gerade und ungerade Funktionen aus Sektion 3.1 kommt es zu systematischen Fehlern. Durch Spannungsinkonsistenzen kommt es zu Messfehlern. Diese sind in den stetig größer werdenden Abweichungen aus den Tabellen 4, 5 und 6 zu entnehmen.

Wenn auch nicht explizit gefordert, wurden die Phasen zu den einzelnen Amplituden nicht notiert. Dies ist aber auch nicht zwingend notwendig; Eine Phasenverschiebung in den Lissajous-Figuren führt zu offensichtlichen „Kanten“, bis hin zu Schwingungswechsel im Oszillogramm. Diese sind in den Abbildungen aber sehr gering; Auf die weiteren Berechnungen hatte dies daher keine relevanten Auswirkungen.

Literatur

- [1] Hello Berlin.net. *Dreieckschwingung*. Aufruf vom 28.11.2014. URL: <http://www.moz.ac.at/user/rwolff/EigenePublikationen/Didaktik/Bilder/dreieck.gif>.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Experiment V351 - Fourier-Analyse und Synthese*. 2014.
- [3] Diplomarbeit Müller/Schönwolf IEM THM. *Rechteckschwingung*. Aufruf vom 28.11.2014. URL: http://www.iem.thm.de/telekom-labor/zinke/fourier/dipl_html/dpl46.gif.
- [4] Wikipedia. *Lissajous-Figuren*. Aufruf vom 28.11.2014. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Lissajous-Figur>.
- [5] Wikipedia. *Sägezahnsschwingung*. Aufruf vom 28.11.2014. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Kippschwingung#mediaviewer/File:Synthesis_sawtooth.gif.

Dreieck-Schwingung: Berechnung

Im Folgenden wird die Symmetrieüberlegung gemacht, dass die Fläche unter dem Graphen zwischen $-\frac{T}{2}$ bis 0 und 0 bis $\frac{T}{2}$ identisch ist. Daher wird das Integral wie folgt vereinfacht:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4At}{T} + A & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ -\frac{4At}{T} + A & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (19)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt \Leftrightarrow \frac{4}{T} \left(\frac{4A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} t \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt + \underbrace{A \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt + A \int_{-\frac{T}{2}}^0 1 dt}_{=AT} \right) \quad (20)$$

$$a_n = \frac{4A}{T} \left(\frac{4}{T} \left(\left[\frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) \right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{T}{2n\pi} \sin\left(\frac{2nt\pi}{T}\right) dt \right) + T \right) \quad (21)$$

$$a_n = \frac{4A}{T} \left(4 \left(2\pi n \cdot \sin(n\pi) - \frac{1}{2n\pi} \frac{T}{2n\pi} \left[\left(-\cos\left(\frac{2nt\pi}{T}\right) \right) \right]_0^{\frac{T}{2}} \right) + T \right) \quad (22)$$

Da eine gerade Funktion wurde, entfällt der Sinus-Term:

$$a_n = 4A \left(\frac{1}{n^2\pi^2} (\cos(n\pi) - 1) \right) \quad (23)$$

Somit ergibt sich:

$$a_n = \frac{4A}{\pi^2} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (24)$$

Abschließend wird noch die Fallunterscheidung für gerade und ungerade n durchgeführt. Diese findet sich in Kapitel 3.1.2.