

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll die Zeitkonstante eines unbekannten RC-Gliedes bestimmt werden. Weiterhin sollen die Amplitude der Kondensatorspannung und die Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung jeweils in Abhängigkeit von der Frequenz untersucht werden. Zum Schluss soll gezeigt werden, dass ein RC-Glied Spannungen integrieren kann.

2 Theorie

Relaxationsvorgänge beschreiben die nicht-oszillatorische Rückkehr eines Systems in seine Ausgangslage, nachdem es aus dieser entfernt wurde. Dabei ist die Änderungsgeschwindigkeit der Größe A meistens proportional zu der Abweichung, die die Größe A zu einem Zeitpunkt t zu ihrem Endzustand $A(\infty)$ hat:

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)]. \quad (1)$$

Diese Gleichung kann vom Zeitpunkt 0 bis zu einem beliebigen Zeitpunkt t integriert werden. Dann ergibt sich für die Größe A zum Zeitpunkt t :

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)]e^{ct}, \quad (2)$$

wobei $c < 0$ sein muss, damit die Größe A beschränkt ist. Als Beispiel für einen solchen Vorgang werden im Folgenden Auf- und Entladevorgänge eines RC-Kreises, Abbildung 1, betrachtet. Bei dem Entladevorgang liegt zunächst eine bestimmte Ladung Q auf den

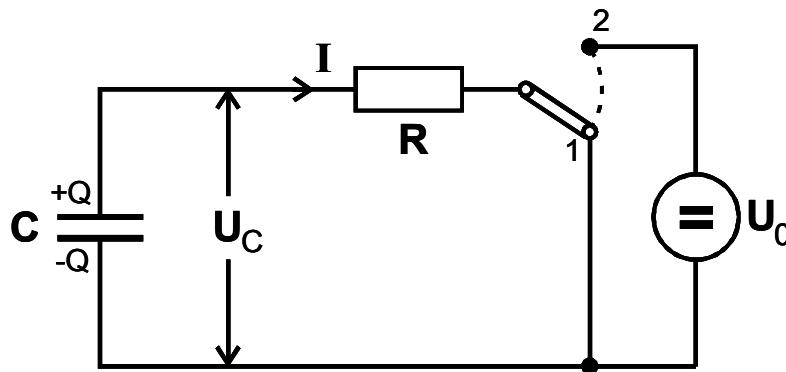


Abbildung 1: Ent- und Aufladung (Stellung 1 bzw. 2) eines Kondensators über einen Widerstand [1, S. 276].

Platten des Kondensators der Kapazität C vor. Die Spannung U_C , die zwischen den beiden Platten anliegt, ist dabei durch

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (3)$$

gegeben. Mit Hilfe des ohmschen Gesetzes $U = R \cdot I$, sowie der Beziehung $\dot{Q} = -I$, ergibt sich eine Differentialgleichung, welche die Form der Gleichung (1) besitzt. Mit der Voraussetzung $Q(\infty) = 0$ ergibt sich:

$$Q(t) = Q(0)e^{\frac{-t}{RC}}, \quad (4)$$

wobei RC als Zeitkonstante bezeichnet wird. Für den Aufladevorgang lassen sich analoge Überlegungen anstellen, sodass sich hier mit den Randbedingungen $Q(0) = 0$ und $Q(\infty) = CU_0$ die Gleichung

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{\frac{-t}{RC}}) \quad (5)$$

ergibt. Die Spannung U_0 ist dabei die Spannung einer anliegenden Spannungsquelle. Auch wenn ein System periodisch aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt wird, treten Relaxationsvorgänge auf. Um weiterhin das Beispiel des RC-Kreises zu nutzen, liegt an diesem nun eine Wechselspannung an, wie in Abbildung 2 zu sehen ist. Unter bestimmten

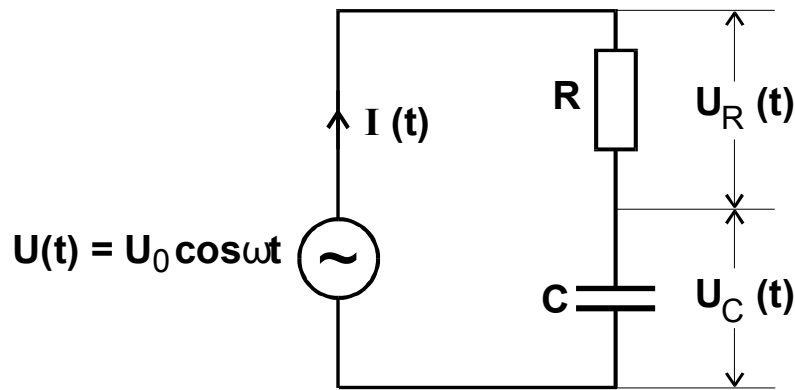


Abbildung 2: Periodische Anregung eines RC-Kreises [1, S. 278].

Voraussetzungen ist die Spannung U_C am Kondensator die gleiche wie die anliegende Spannung $U(t)$, nämlich genau dann, wenn $\omega \ll \frac{1}{RC}$ gilt. Mit einer größer werdenden Anregungsfrequenz bildet sich allerdings eine Phasenverschiebung ϕ zwischen den beiden Spannungen aus, da die Kondensatorspannung zeitlich hinter die Generatorspannung fällt. Des Weiteren nimmt die Amplitude A der Kondensatorspannung ab. Um eine Lösung für die Frequenzabhängigkeiten der Phasenverschiebung und der Amplitude zu finden, wird der Ansatz

$$U_C(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) \quad (6)$$

gewählt. Nach Verwendung der Kirchhoffschen Regeln und Umformungen ergibt sich für die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung die folgende Formel:

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC). \quad (7)$$

An dieser Formel wird nun deutlich, dass die Phasenverschiebung für kleine Frequenzen tatsächlich null ist und sich für hohe Frequenzen dem Wert $\frac{\pi}{2}$ annähert. Für die

Frequenzabhängigkeit der Amplitude ergibt sich mit weiteren Überlegungen:

$$\sin(\phi) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (8)$$

$$\text{und} \quad A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (9)$$

Auch diese Formel bestätigt die zu erwartenden Grenzfälle. Für kleine Frequenzen nähert sich $A(\omega)$ U_0 an, für große Frequenzen hingegen verschwindet $A(\omega)$. Aufgrund dieser Eigenschaft werden RC-Glieder als Tiefpässe eingesetzt.

Der RC-Kreis in Abbildung 2 kann unter gewissen Voraussetzungen auch die angelegte Spannung $U(t)$ integrieren. Dazu muss die Frequenz von $U(t)$ sehr viel größer als $\frac{1}{RC}$ sein. Wenn diese Bedingung für ω erfüllt ist, gilt

$$U_C(t) \approx \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt'. \quad (10)$$

3 Fehlerrechnung

Im Folgenden werden alle Mittelwerte mit folgender Formel bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (11)$$

Der zugehörige Fehler des Mittelwertes berechnet sich mit

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (12)$$

Werden fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel benutzt, so wird der neue Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung angegeben:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \quad (13)$$

Eventuelle Ausgleichsgeraden berechnen sich über

$$y = a \cdot x + b \quad (14a)$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (14b)$$

$$b = \frac{\overline{x^2 \bar{y}} - \bar{x} \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (14c)$$

Die Regression sowohl von Ausgleichsgeraden als auch von anderen Polynomen, sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler, wird mit iPython 2.1.0 durchgeführt.

4 Durchführung

Um die Zeitkonstante des RC-Gliedes zu bestimmen, wird die Schaltung wie in Abbildung 6 zu sehen, aufgebaut. Das benutzte digitale Oszilloskop wird so eingestellt, dass

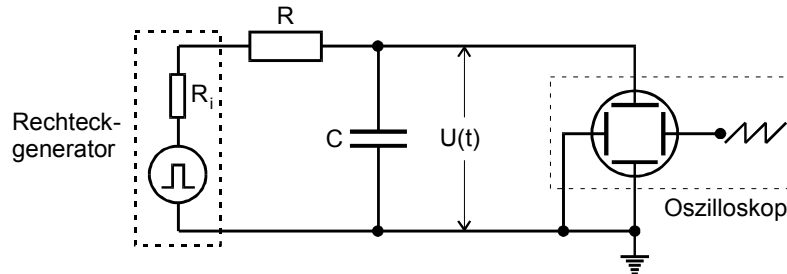


Abbildung 3: Messschaltung zur Zeitkonstantenbestimmung mit Hilfe des Entladevorganges des Kondensators [1, S. 281].

die abfallende Flanke sichtbar ist. Mit der Cursor-Funktion des Oszilloskopes werden ungefähr 20 Datenpaare, bestehend aus der Kondensatorspannung U_C und der Zeit t , ausgelesen und notiert.

Um die Spannungsamplitude A am Kondensator zu beobachten, wird das RC-Glied wie in Abbildung 4 zu sehen, angeschlossen. Die Generatorfrequenz ν wird im Bereich von

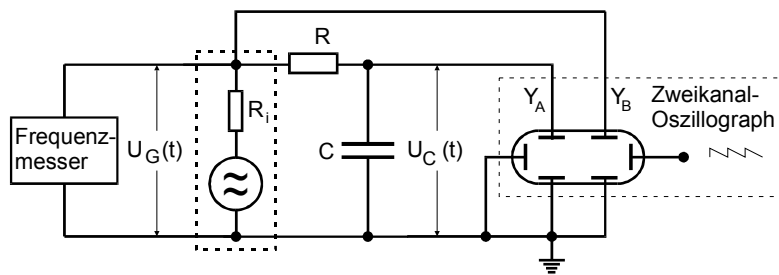


Abbildung 4: Messschaltung zur Beobachtung der Kondensatorspannung, sowie der Phasenverschiebung zwischen der Kondensator- und Generatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz [1, S. 282].

(10–10 000) Hz hochgeregelt. Dabei bleibt der zweite Ausgang am Oszilloskop, welcher mit dem Sinusspannungsgenerator verbunden ist, zunächst deaktiviert. Zum Ausmessen der Spannungsamplitude wird die Cursor-Option des Oszilloskopes verwendet. Es werden mindestens 30 Datenpaare, bestehend aus der Spannungsamplitude A und der Frequenz ν für die Auswertung benötigt.

Um die Phasenverschiebung ϕ zwischen der Kondensator- und Generatorspannung zu beobachten, wird die bereits aufgebaute Schaltung, zu sehen in Abbildung 4, erneut verwendet. Das Oszilloskop wird nun so eingestellt, dass sowohl die Kondensatorspannung U_C als auch die Generatorspannung U_G dargestellt werden. Dazu wird nun auch der zweite Eingang am Oszilloskop verwendet. Am Oszilloskop ist bei einer Phasenverschiebung von $\phi > 0$ ein ähnliches Bild wie in Abbildung 5 zu sehen. Die verschiedenen Frequenzen

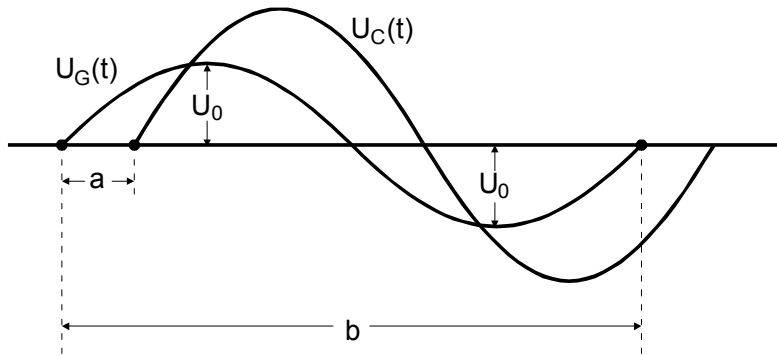


Abbildung 5: Schema zur Vermessung der Phasenverschiebung [1, S. 282].

ν werden in diesem Versuchsteil genauso gewählt wie im vorherigen. Der Abstand a wird mit der Cursor-Option des Oszilloskopes bestimmt, die Schwingungsdauer b ergibt sich durch Umrechnen der Frequenz ν . Beide Werte werden notiert.

Um zu zeigen, dass das RC-Glied bestimmte Spannungen integrieren kann, kann wieder die Schaltung aus Abbildung 4 verwendet werden. Es wird eine Frequenz von 5000 Hz eingestellt. Nun wird der Reihe nach eine Sinus-, Dreieck- und Rechteckspannung an das RC-Glied angelegt. Die angelegte und integrierte Spannung werden auf dem Oszilloskop dargestellt und als Bild gespeichert.

5 Auswertung

Die gemessenen Daten für die Bestimmung der Zeitkonstanten RC befinden sich in Tabelle 1. Zur Auswertung wird der Logarithmus von $\frac{U_C}{U_0}$ gegen die Zeit t abgetragen. Nach Umstellen der Gleichung (4) zu

$$\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right) = -\frac{1}{RC}t \quad (15)$$

wird eine lineare Regression zur Bestimmung der Zeitkonstanten durchgeführt. Die Regression sowie die abgetragenen Messdaten befinden sich in Abbildung 6. Die berechnete Regression lautet:

$$\ln\left(\frac{U_C}{U_0}\right) = -\frac{1}{a}t + b$$

$$\text{mit } a = (1,298 \pm 0,019) \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\text{und } b = 0,10 \pm 0,04.$$

Die berechnete Zeitkonstante ist entsprechend

$$RC = a = (1,298 \pm 0,019) \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Es soll erneut die Zeitkonstante bestimmt werden, dieses Mal aber mit Hilfe der Frequenzabhängigkeit der Spannungsamplitude A am Kondensator. Dazu werden die mit

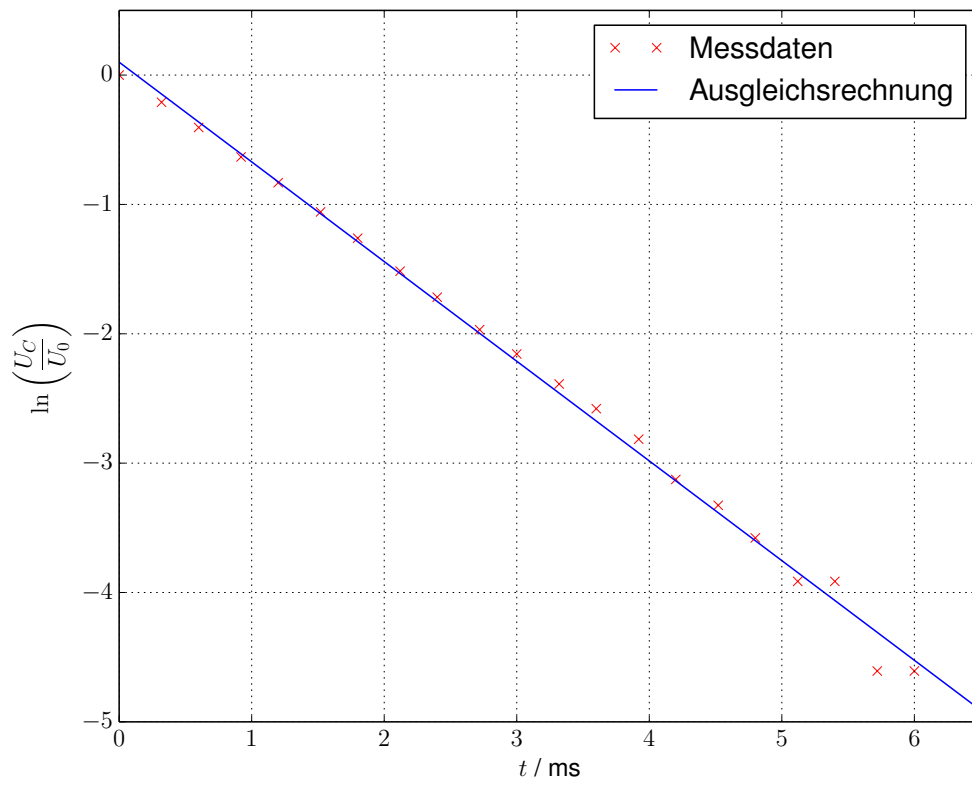


Abbildung 6: Lineare Regression zur Bestimmung der Zeitkonstanten.

Tabelle 1: Messdaten zur Bestimmung der Zeitkonstanten RC .

$U_C / 10^{-3} \text{ V}$	$\ln \left(\frac{U_C}{U_0} \right)$	$t / 10^{-3} \text{ s}$
1002	0,000	0,000
812	-0,210	0,320
668	-0,405	0,600
532	-0,633	0,920
436	-0,832	1,200
348	-1,058	1,520
284	-1,261	1,800
220	-1,516	2,120
180	-1,717	2,400
140	-1,968	2,720
116	-2,156	3,000
92	-2,388	3,320
76	-2,579	3,600
60	-2,815	3,920
44	-3,126	4,200
36	-3,326	4,520
28	-3,578	4,800
20	-3,914	5,120
20	-3,914	5,400
10	-4,607	5,720
10	-4,607	6,000

der anliegenden Spannung von der Wechselspannungsquelle normierten Amplituden gegen die Frequenz in einem halblogarithmischen Diagramm abgetragen. Die Daten befinden sich in Tabelle 2. Es wird eine Ausgleichsrechnung gemäß Gleichung (9) durchgeführt, die in Abbildung 7 zu sehen ist. Damit ergibt sich als Wert für die Zeitkonstante:

$$RC = (1,388 \pm 0,003) \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

Die Zeitkonstante wird ein drittes Mal, nun mit Hilfe der Phasenverschiebung zwischen der Generator- und Kondensatorspannung, bestimmt. Die Phasenverschiebung ϕ ergibt sich durch

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi.$$

In Tabelle 3 befinden sich alle verwendeten Daten. Es wird erneut eine nach Gleichung (7) ergebende Ausgleichsrechnung durchgeführt. Damit ergibt sich der Wert für die Zeitkonstante als:

$$RC = (1,49 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

Tabelle 2: Messdaten zur Bestimmung einer optimalen Zeitkonstanten RC .

$U / 10^{-3} \text{ V}$	$\nu / \text{ Hz}$
992	10,00
984	15,00
976	20,00
968	25,00
960	30,00
944	40,00
920	50,00
888	60,0
824	80,0
784	90,0
756	100,0
720	110,0
692	120,0
660	130,0
612	150,0
560	170,0
516	190,0
480	210,0
432	240,0
392	270,0
356	300,0
308	350,0
274	400,0
246	450,0
222	500,0
186	600
162	700
142	800
114	1000
76,8	1500
58,8	2000
40,0	3000
24,6	5000
$U / 10^{-3} \text{ V}$	$\nu / 10^3 \text{ Hz}$
18,0	7,00
12,9	10,00

Tabelle 3: Messdaten zur Beobachtung der Phasenverschiebung zwischen der Generator- und Kondensatorspannung.

ϕ / rad	ν / Hz
0,101	10,00
0,123	15,00
0,201	20,00
0,251	25,00
0,302	30,00
0,402	40,00
0,408	50,00
0,490	60,0
0,653	80,0
0,735	90,0
0,817	100,0
0,898	110,0
0,905	120,0
0,817	130,0
0,942	150,0
0,961	170,0
1,003	190,0
1,056	210,0
1,116	240,0
1,188	270,0
1,206	300,0
1,275	350,0
1,307	400,0
1,357	450,0
1,319	500,0
1,357	600
1,407	700
1,407	800
1,407	1000
1,470	1500
1,508	2000
1,583	3000
1,477	5000
ϕ / rad	ν / 10^3 Hz
1,495	7,00
1,533	10,00

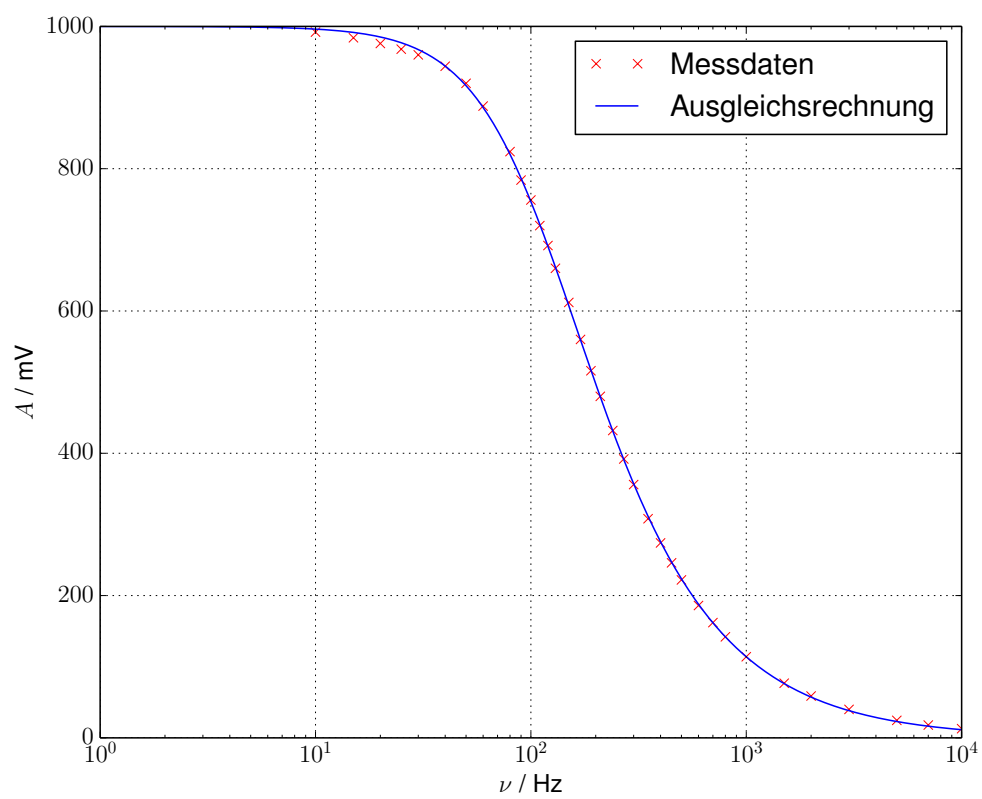


Abbildung 7: Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Zeitkonstanten.

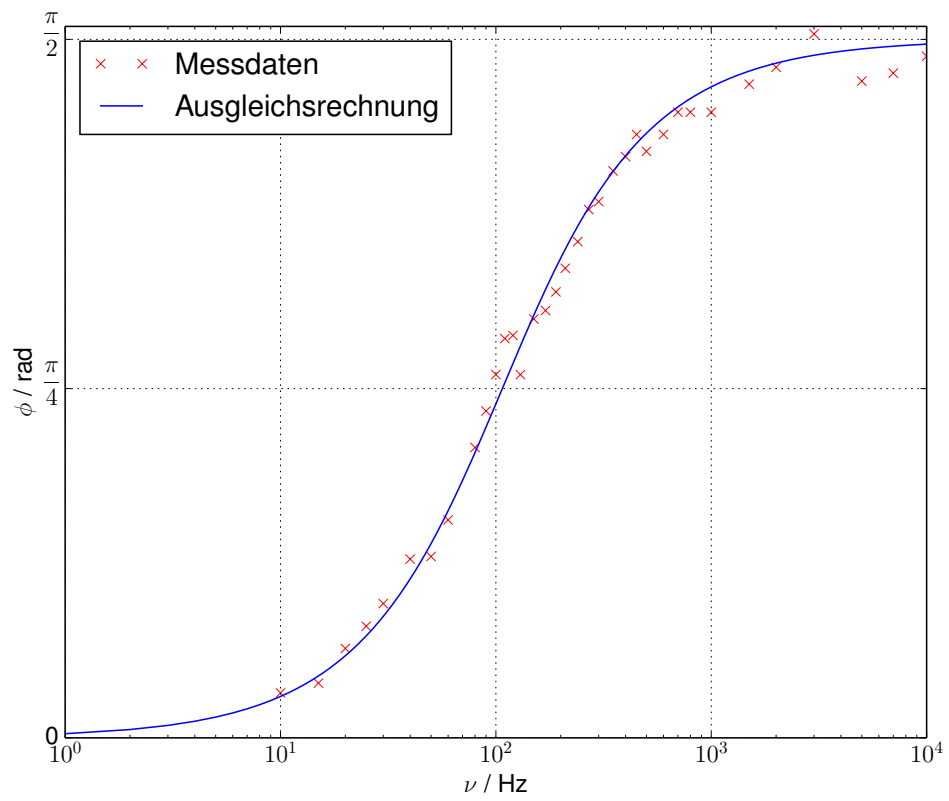


Abbildung 8: Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Zeitkonstanten.

Mit den jetzt bereits vorhandenen Messdaten aus Tabelle 4 wird ein Polarplot erstellt. Zudem wird eine Theoriekurve nach den Gleichungen (8) und (9) sowie dem zuletzt berechneten Wert für die Zeitkonstante $RC = (1,49 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ s}$ eingezeichnet, zu sehen in Abbildung 9.

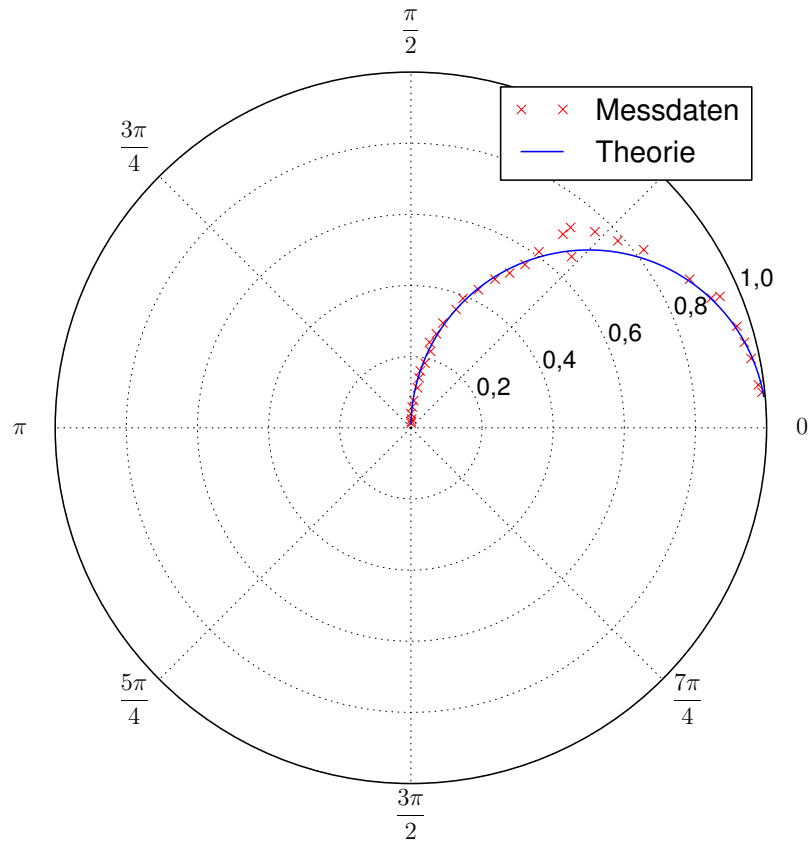


Abbildung 9: Polarplot zur Beobachtung der Phasenverschiebung zwischen der Generator- und Kondensatorspannung.

Tabelle 4: Messdaten zur Beobachtung der Phasenverschiebung zwischen der Generator- und Kondensatorspannung.

$\frac{A}{U_0}$	ϕ / rad
0,992	0,101
0,984	0,123
0,976	0,201
0,968	0,251
0,960	0,302
0,944	0,402
0,920	0,408
0,888	0,490
0,824	0,653
0,784	0,735
0,756	0,817
0,720	0,898
0,692	0,905
0,660	0,817
0,612	0,942
0,560	0,961
0,516	1,003
0,480	1,056
0,432	1,116
0,392	1,188
0,356	1,206
0,308	1,275
0,274	1,307
0,246	1,357
0,222	1,319
0,186	1,357
0,162	1,407
0,142	1,407
0,114	1,407
0,0768	1,470
0,0588	1,508
0,0400	1,583
0,0246	1,477
0,0180	1,495
0,0129	1,533

Um zu zeigen, dass dieses RC-Glied Spannungen integrieren kann, werden die erwarteten Kurvenverläufe mit den am Oszilloskop angezeigten Bildern verglichen. Die zu integrierenden und zugehörigen integrierten Funktionen lauten:

Sinusspannung wird integriert:

$$f(x) = c \cdot \sin(x)$$

$$F(x) = -c \cdot \cos(x)$$

Dreiecksspannung wird integriert:

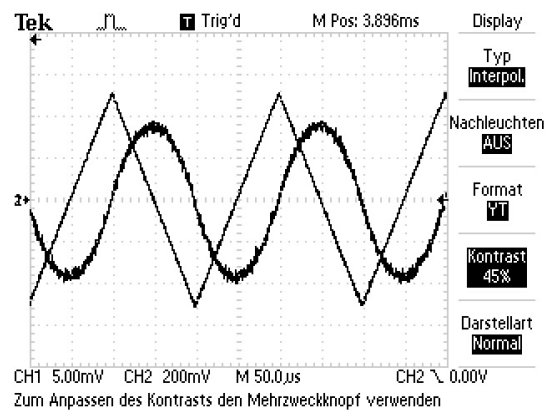
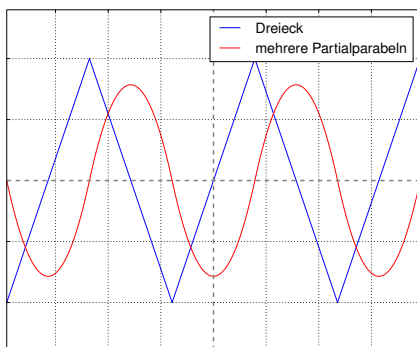
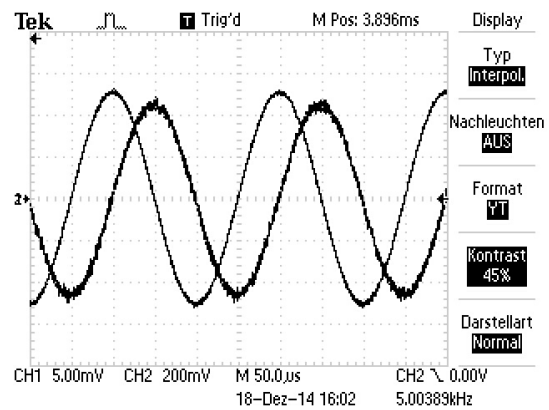
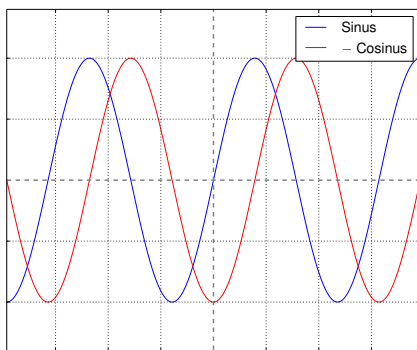
$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x, & -a < x \leq a \\ -c \cdot x, & a < x \leq 3a \end{cases}$$

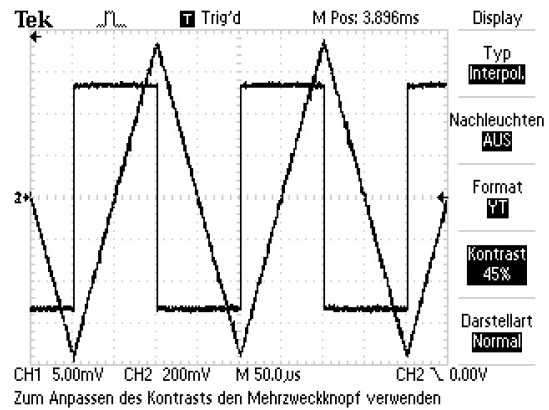
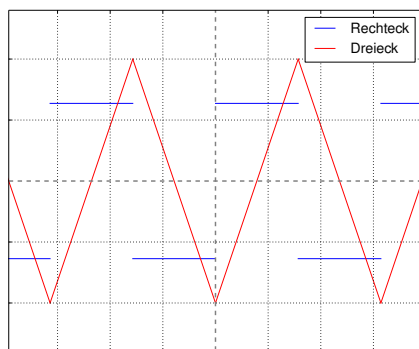
$$F(x) = \begin{cases} \frac{c}{2} \cdot x^2, & -a < x \leq a \\ -\frac{c}{2} \cdot x^2, & a < x \leq 3a \end{cases}$$

Rechtecksspannung wird integriert:

$$f(x) = \begin{cases} c, & 0 < x \leq a \\ -c, & a < x \leq 2a \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} c \cdot x, & 0 < x \leq a \\ -c \cdot x, & a < x \leq 2a. \end{cases}$$





Da die ausgegebenen Bilder den erwarteten entsprechen, ist gezeigt worden, dass das RC-Glied als Integrator funktioniert.

6 Diskussion

Die Messwerte sind, wie in der E-Technik üblich, durchgehend nah an den Ausgleichsrechnungen beziehungsweise an der Theoriekurve bei dem Polarplot.

Eine mögliche Fehlerquelle zeigt sich, da bei allen drei Messungen für die Zeitkonstante leicht unterschiedliche Werte ermittelt wurden. Dies lässt sich nur durch systematische Fehler erklären. Dieser wird vermutlich durch den Generatorinnenwiderstand hervorgerufen, welcher allerdings nicht ausgerechnet werden kann, da die benötigten Angaben über den Widerstand R des RC-Gliedes fehlen.

Quellenverzeichnis

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 353, Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 18. Dez. 2014. eprint: <http://129.217.224.2/HOME/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>.