Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Mit Beginn der Mechanikexperimente wird in diesem Versuch das Trägheitsmoment verschiedener geometrischer Körper bestimmt und ebenso der Steiner'sche Satz verifiziert werden. Dazu werden verschiedene Körper auf eine Drillachse gesteckt und deren Trägheitsmoment untersucht.

2 Theoretische Grundlagen [2]

„Das Trägheitsmoment ist ein Maß für die Masseverteilung in einem ausgedehnten Körper bezüglich einer Rotationsachse."[1, S. 146]. Dabei ist das Gesamtträgheitsmoment mit den Massen m_i gegeben durch:

$$I = \sum_i \mathrm{r_i^2} \cdot \mathrm{m_i}$$

mit $\mathrm{r_i}$ als Abstand der Massenelemente von der Drehachse.

Für infinitisimale Massen dm gilt:

$$I = \int \mathrm{r^2 dm}$$

Für den Fall, dass die Schwerpunktachse nicht die Drehachse ist, wird das Trägheitsmoment I um einen Summanden ergänzt. Damit ergibt sich für punktförmige Massen m bei paraleller Verschiebung der Achse um den Abstand a der Steiner'sche Satz:

$$\mathrm{I} = \mathrm{I_s} + \mathrm{m} \cdot \mathrm{a}^2 \tag{1}$$

mit $\mathrm{I_s}$ als Trägheitsmoment durch den Schwerpunkt.

2.1 Vorbereitung

Für die vorbereitende Aufgabe soll das Drehmoment M einer Stange berechnet werden. Das vektorielle Drehmoment M ist gegeben durch:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

.

Es gilt nach der Defintion von Vektorprodukten[5]:

$$|\vec{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{b}}| = |\vec{\mathrm{a}}||\vec{\mathrm{b}}|\sin(\varphi)$$

Eine skalare Definition des Drehmomentes M liefert somit

$$\mathrm{M} = \mathrm{Fr} \cdot \sin(\varphi) \tag{2}$$

.

2.2 Statische Methode

Bei der statischen Methode wird der Körper um einen Winkel φ ausgelenkt und die Kraft F senkrecht zum Bahnradius r gemessen.

2.3 Dynamische Methode

Für die dynamische Methode wird ein Körper um einen beliebigen Winkel φ ausgelenkt und losgelassen. Die dann zu beobachtende (harmonische) Schwingung besitzt eine Schwingungsdauer T, welche durch die Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{ges}}}{D}} \Leftrightarrow I_{\text{ges}} = \frac{T^2 D}{4\pi^2} \Rightarrow I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} - I_D \tag{3}$$

gegeben ist, wobei D die Winkelrichtgröße beschreibt und sich das Trägheitsmoment I_{ges} aus dem Trägheitsmoment der Drillachse I_D und dem Trägheitsmoment I des Körpers zusammensetzt, beschrieben wird. Aus der Formel wird ersichtlich, dass die Schwingungsdauer T unabhängig des Auslenkwinkels φ ist, wobei diese Näherung auch nur (näheres s. Diskussion, Kap. 6) für kleine Winkel φ gilt.

2.4 Hinweise zur Bestimmung der Drillachse

In der Versuchsdurchführung 3 soll darauf geachtet werden, dass die Federwaage senkrecht zum Radius r gehalten wird. Dies begründet sich durch die theoretische Vorüberlegung, dass sich bei Winkeln $\varphi \neq 90°$ die betraglich gemessene Kraft aus den drei Komponenten F_x, F_y und F_z (F_i jeweils für die Kraft in Richtung der jeweiligen Achse) zusammensetzt. Dadurch würde der Stab eine Schwingung in mehrere Richtungen ausführen, was aufgrund der Bauweise der Achse nicht möglich ist. Außerdem käme es zu Ungenauigkeiten durch die Gewichtskraft. Somit würde die Messung verfälscht, da ggf. kleinere Kräfte auf der Federwaage angezeigt würden.

Damit wird das Drehmoment durch sin(90°)=1 maximal und die Winkelrichtgröße ist gegeben durch

$$D = \frac{Fr}{\varphi} \tag{4}$$

3 Durchführung

Für die Bestimmung der Trägheitsmomente müssen zunächst die Radien und die Höhen des weißen Zylinders, der styroporgemusterten Kugel und der Gewichte mit den Gravuren B und E aufgenommen und fünfach für eine Fehlerrechnung gemessen werden. Außerdem müssen die Massen aller Objekte gemessen werden. Bei der Puppe sollen die Längen aller Körperteile einfach und die Dicken fünffach gemessen werden. Die Massen der einzelnen Körperteile ergeben sich dann durch die Volumina der Körperteile und der Gesamtmasse der Puppe.

3.1 Bestimmung des Trägheitsmomentes der Drillachse I_D, bzw. zur Winkelrichtgröße D

Dazu wird ein als masseloser angenommener Stab auf die folgende Apparatur geschraubt:

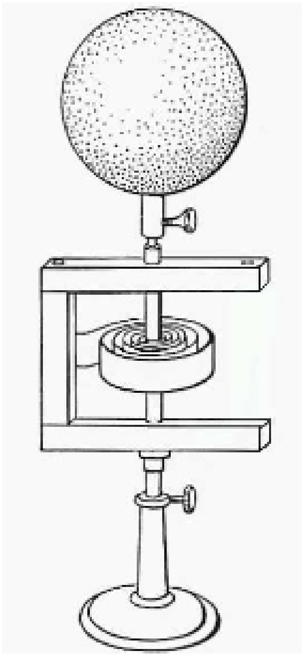


Abbildung 1: Apparatur zum Versuch[2, S. 3]

Dabei muss stets darauf geachtet werden, dass die Spiralfeder nicht überdehnt wird, also keine inelastische Verformung erleidet. Der Winkel φ ist somit auf unter 360° beschränkt.

3.2 Statische Methode / Apparaturkonstante

Sodann wird mithilfe einer senkrecht zum Bahnradius r angebrachten Federwaage der Stab um einen Winkel φ ausgelenkt. Dabei wird jeweils die Kraft F mit der Federwaage aufgenommen, der Abstand r, sowie der Drehwinkel φ notiert. Diese Messung wird für 11 verschiedene Auslenkwinkel von 100°-200° durchgeführt.

3.3 Dynamische Methode / Bestimmnung der Trägheitsmomente der Drillachse und der Körper

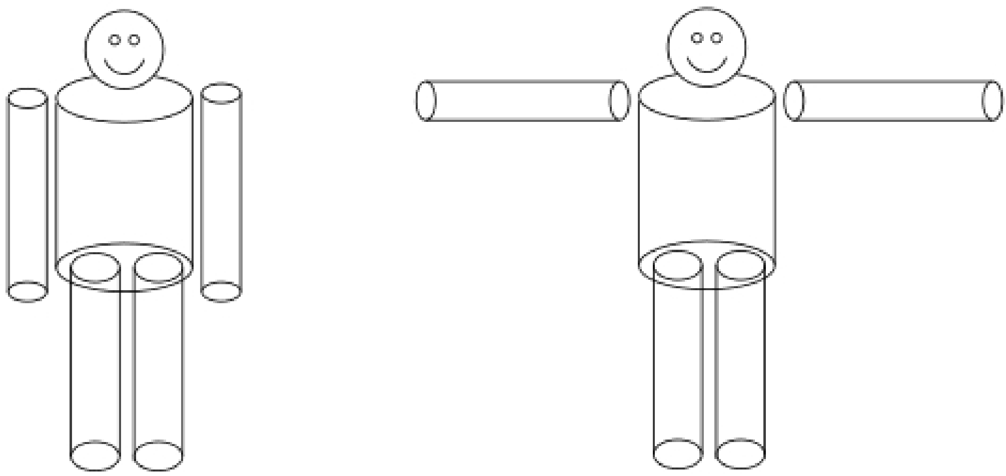
Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes I_D werden zum Metallstab zwei baugleiche Gewichte im einem gleichen Abstand r befestigt. Sodann wird der Stab um einen beliebigen Winkel ausgelenkt und die Schwingungsdauer T gemessen. Diese Messung wird für 10 verschiedene Abstände durchgeführt.

3.4 Trägheitsmomente des Zylinders und der Kugel

Analog wird für einen weißen Zylinder und einer styroporgemusterten Kugel verfahren werden. Dabei ist der Abstand a =konstant. Dafür werden die Objekte auf der Drillachse befestigt und um einen beliebigen Winkel ausgelenkt. Diese Messung wird ebenfalls zehnfach durchgeführt.

3.5 Trägheitsmoment I_p einer Modellpuppe in zwei verschiedenen Körperhaltungen

Nun soll das Trägheitsmoment einer Holzpuppe für folgende Stellungen bestimmt werden:



(a) Erste Haltung

(b) Zweite Haltung

Abbildung 2: Puppe in zwei verschiedenen Körperhaltungen, Abb. a: mit angewinkelten Armen[2, S. 4]

Dazu wird die Puppe in zwei Messungen mit der jeweiligen Haltung auf der Drillachse befestigt und anschließend um einen beliebigen Winkel ausgelenkt. Anschließend wird die Schwingungsdauer T aufgenommen.

4 Fehlerrechnung

Der Mittelwert errechnet sich nach:

$$\overline{v_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{5}$$

Analog die Standardabweichung:

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(v_j - \overline{v_i})^2} \tag{6}$$

mit zufälligen Fehlern behafteten Werten v_j mit j = 1,..,n

Ferner die Streuung der Mittelwerte oder Unsicherheit σ_i mit i = 1,..,n:

$$\sigma_i = \frac{s_i}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(v_j - \overline{v_i})^2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(v_j - \overline{v_i})^2}{n(n-1)}} \tag{7}$$

Somit ergibt sich für den Gauß-Fehler:

4.1 Gauß-Fehler für eine fehlerbehaftete Größe

$$\Delta \mathrm{x_k} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{k}} \cdot \sigma_\mathrm{k} \tag{8}$$

f sei die fehlerbehaftete Funktion und k die fehlerbehaftete Größe. σ_k ist die Ungenauigkeit der fehlerbehafteten Größe.

Der relative Gauß-Fehler kann somit angegeben werden mithilfe von:

$$\Delta \mathrm{x_{rel}} = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\mathrm{x}} = \frac{\sigma_\mathrm{k}}{\mathrm{k}} \cdot 100\% \tag{9}$$

4.2 Gauß-Fehler mehrere Unabhängige

Bei mehreren unabhängingen Größen ergibt sich der Gauß-Fehler wie folgt:

4.2.1 absoluter Gauß-Fehler

$$\Delta x_i = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial k_1} \cdot \sigma_{k_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial k_2} \cdot \sigma_{k_2}\right)^2 + \dots} \tag{10}$$

4.2.2 relativer Gauß-Fehler

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{k_1}}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{k_2}}{k_2}\right)^2 + \dots} \cdot 100\% \tag{11}$$

4.3 Lineare Regression

Die lineare Regression berechnet sich nach [4] zu:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{N} \left[y_k - \left(\overline{B} x_k + \overline{A}\right)\right]^2 \tag{12}$$

, wobei $\overline{B} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$ die Steigung der Geraden und $\overline{A} = \overline{y} - \overline{B}\overline{x}$ $\overline{B}$ den Schnittpunkt mit der Ordinate beschreibt. Bei einer linearen Funktion

$$y = mx + b \tag{13}$$

ist $\overline{B} := m$ und $\overline{A} := b$. σ^2 beschreibt somit die mittlere quadratische Abweichung der Messwerte von der Geradengleichung. Damit folgt der Fehler von m mit N:=Anzahl der Messwerte:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{N\left(\overline{y}^2 - \overline{x}^2\right)} \tag{14}$$

5 Auswertung

5.1 Vorbereitung

Als vorbereitende Aufgabe soll das Drehmoment M einer Stange berechnet werden. Dazu sind in der Versuchsanleitung[2, S. 2] die Kraft F=0.1N und die Winkel $\varphi = 45°$, bzw. $\varphi = 90°$ gegeben. Außerdem soll der Abstand r in einem Bereich von 5-25cm elffach variiert werden.

Dazu wird Gleichung (2) genutzt, somit ergibt sich für das Drehmoment $M_{90°}$ bei $\varphi = 90°$, bzw. $M_{45°}$ für $\varphi = 45°$:

Tabelle 1: Vorbereitung zur Bestimmung des Drehmoments eines Stabes

r / m	$M_{90°}$ / Nm $\cdot 10^{-3}$	$M_{45°}$ / Nm $\cdot 10^{-3}$
0,05	5,00	3,50
0,07	7,00	4,90
0,09	9,00	6,40
0,11	11,00	7,80
0,13	13,00	9,20
0,15	15,00	10,60
0,17	17,00	12,00
0,19	19,00	13,40
0,21	21,00	14,80
0,23	23,00	16,30
0,25	25,00	17,70

Die in Kapitel 3 erwähnten, zu bemessenen Maße der Objekte mit Fehlerrechnung nach Kapitel 4 mit den Gleichungen (5) (Mittelwert), (6) (Standardabweichung) und (7) (Ungenauigkeit) ergeben sich zu:

Tabelle 2: Messdaten der Objekte mit Fehler

Objekt	d (cm)	h (cm)	r (cm)	m (g)
Weißer Zylinder	8,00	14,00	4,00	1525,50
	8,01	13,95	4,01	1525,50
	7,99	13,92	4,00	1525,50
	8,01	13,91	4,01	1525,50
	7,99	13,92	4,00	1525,50
Mittelwert	8,000	13,940	4,000	1525,50
Standardabweichung	0,010	0,037	0,005	0,00
Ungenauigkeit	0,004	0,016	0,002	0,00
Styropor Kugel	13,80		6,90	812,60
	14,00		7,00	812,60
	13,70		6,85	812,60
	13,80		6,90	812,60
	13,81		6,91	812,60
Mittelwert	13,822		6,911	812,60
Standardabweichung	0,109		0,055	0,00
Ungenauigkeit	0,049		0,024	0,00
Stange	0,50	61,00		135,30

Tabelle 3: Messdaten Gewichte

B-E-Gewichte	Masse B: 222,45g	Masse E: 223,26g	
	d (cm)	h (cm)	r (cm)
	3,46	2,97	1,73
	3,45	2,95	1,73
	3,48	3,00	1,74
	3,45	2,95	1,73
	3,47	2,96	1,74
Mittelwert	3,462	2,966	
Standardabweichung	0,013	0,021	
Ungenauigkeit	0,006	0,009	

5.2 Statische Methode / Drillachse

Für die Bestimmung der Winkelrichtgröße (oder Apparaturkonstante) D ergeben sich nach Kapitel 3.2 die Kraft F, sowie der Auslenkwinkel φ bei einem konstanten Radius von 0,295m zu:

Tabelle 4: Aufgabe a1: Messdaten zur Bestimmung der Winkelrichtgröße

F (N)	φ (Rad)	D (Nm)
0,120	1,745	0,020
0,140	1,920	0,022
0,160	2,094	0,023
0,180	2,269	0,023
0,185	2,443	0,022
0,200	2,618	0,023
0,220	2,793	0,023
0,240	2,967	0,024
0,260	3,142	0,024
0,270	3,316	0,024
0,280	3,491	0,024
Mittelwert		0,0229
Fehler		
Standardabweichung nach (6)		0,0012
Ungenauigkeit nach (7)		0,0004

Somit ergibt sich für die Apparaturkonstante nach (4) folgender gemittelter Wert:
D = 0,0229 Nm $\pm 1,75\%$.

Der Graph folgt somit zu:

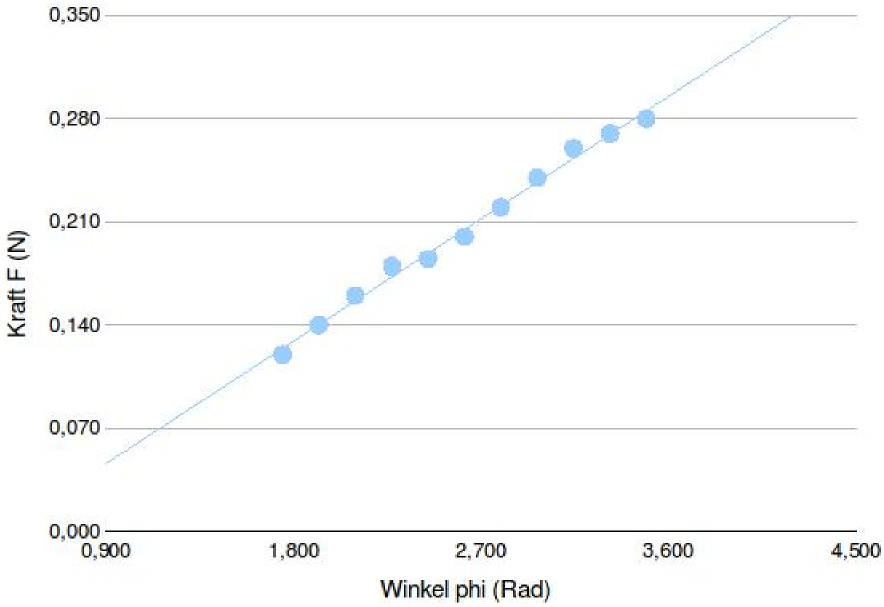


Abbildung 3: Graph der Messdaten von Tabelle 4

Mittels linearer Ausgleichsrechnung mit [3] und nach Kapitel 4, bzw. [4] ergibt sich mit Fehler nach Gleichung (6)

Tabelle 5: Aufgabe a1: Ausgleichsrechnung

	Steigung m	Achsenabschnitt n
Wert	0,0925	-0,0370
Abweichung	0,0026	0,0070

Womit sich für die Winkelrichtgröße D_{statisch} nach $D = mr$ folgender Wert ergibt: $D_{\text{statisch}} = 0{,}0273\text{Nm} \pm 16{,}07\%$ mit dem Gauß-Fehler nach (9).

Für das Eigenträgheitsmoment I_D wird nun der Abstand a und die Schwingungsdauer T_5 für 5 Schwingungen gemessen. Daraus wurden noch a^2, T_1,für eine Schwingungsperiode, und T_1^2 berechnet. Bei letzterem wurde vereinfacht angenommen, dass alle Schwingungen gleich lange dauern, sodass durch 5 geteilt werden kann. Dadurch ergibt sich ein systematischer Fehler, der aber zu vernachlässigen ist.

Tabelle 6: Aufgabe a2: Abstand und Schwingungsdauer für das Eigenträgheitsmoment I_D

a (cm)	T_5 (s)	T_1 (s)	$a^2(m^2)$	$(T_1)^2(s^2)$
28,70	40,72	8,14	0,08	66,32
27,90	39,00	7,80	0,08	60,84
24,60	36,18	7,24	0,06	52,36
22,25	33,19	6,64	0,05	44,06
20,80	30,63	6,13	0,04	37,53
18,10	27,69	5,54	0,03	30,67
16,70	25,47	5,09	0,03	25,95
14,00	22,50	4,50	0,02	20,25
12,50	20,66	4,13	0,02	17,07
10,30	18,32	3,66	0,01	13,42

Sodann wird T^2 gegen a^2 aufgetragen und das Eigenträgheitsmoment I_D mittels linearer Regression mithilfe von [3] bestimmt:

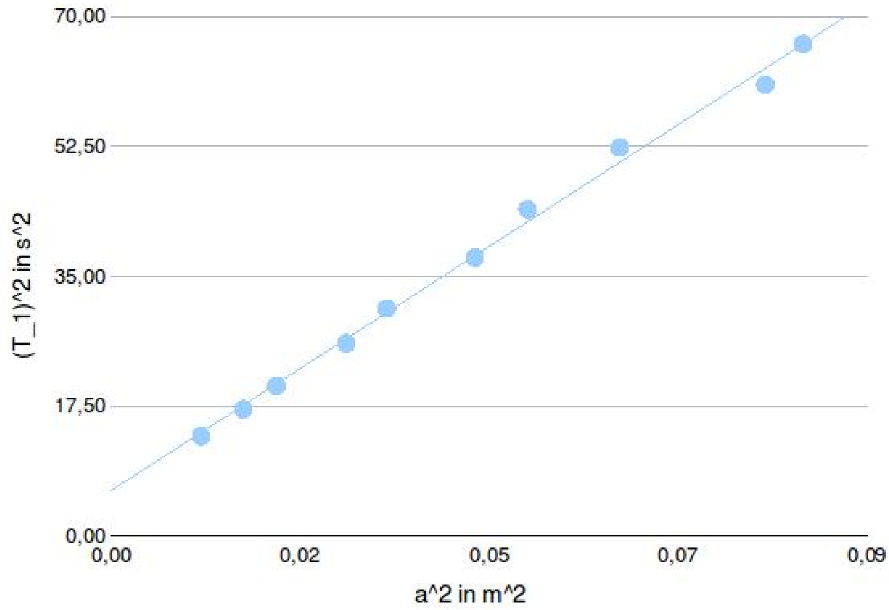


Abbildung 4: Graph der Messdaten von Tabelle 6

Tabelle 7: Aufgabe a2: Ausgleichsrechnung

	Steigung m	Achsenabschnitt n
Wert	731,8173	6,1133
Abweichung	16,7747	0,8118

Nach der dynamischen Methode ergibt sich somit das Trägheitsmoment mittels $I_{\text{dyn}} = \frac{8\pi^2 M}{m}$, wobei M die gemittelte Masse der Gewichte und m die Steigung darstellt, zu:
$I_{\text{dyn}} = (0{,}0240 \pm 0,0006) \cdot \text{kgm}^2$.
Nun müssen für die Berechnung des Eigenträgheitsmomentes mithilfe des steinerschen Satzes noch die Trägheitsmomente der Gewichte, sowie das der Stange berechnet werden. Die Trägheitsmomente $I_{\text{Zylin(B,E)}}$ berechnen sich schließlich mithilfe von
$I_{\text{Zylin(B,E)}} = \frac{m\left(\frac{d_{\text{mittel}}}{2}\right)^2}{4} + \frac{m \cdot h^2_{\text{mittel}}}{12}$ [2, S. 1] zu:
$I_{\text{Zylin(B)}} = (33 \pm 0,1) \cdot 10^{-6}\text{kgm}^2$ für Gewicht B, bzw.
$I_{\text{Zylin(E)}} = (33,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-6}\text{kgm}^2$ für das Gewicht E.

Nun folgt noch das Trägheitsmoment der Stange durch $I_{\text{Stange}} = \frac{m_{\text{stange}} \cdot (h_{\text{stange}}/2)^2}{12}$ zu:
$I_{\text{Stange}} = 1,05 \cdot 10^{-3}\text{kgm}^2$.

Das Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse ergibt sich theoretisch mithilfe des Steiner'schen Satzes nach Gleichung (1) durch $I_D = \frac{nI_{\text{dyn}}}{4\pi^2} - I_{\text{Zylin(B)}} - I_{\text{Zylin(E)}} - I_{\text{Stange}}$, wobei n der Schnittpunkt mit der Ordinate ist, zu:
$I_D = (2{,}61 \pm 0,50) \cdot 10^{-3}\text{kgm}^2$

5.3 Trägheitsmoment des weißen Zylinders und einer styroporgemusterten Kugel

Nun sollen die Trägheitsmomente eines weißes Zylinders und einer styroporgemusterten Kugel bestimmt werden. Dazu wurden erneut die Schwingungsdauern T_5 (und daraus T_1) notiert:

Tabelle 8: Aufgabe b: Schwingungsdauern mit Fehler

T_5 (s)	T_1 (s)
11,530	2,306
10,660	2,132
11,750	2,350
11,750	2,350
11,850	2,370
11,690	2,338
11,820	2,364
11,630	2,326
11,840	2,368
11,880	2,376

Fehler	T_5 (s)	T_1 (s)
Mittelwert	11,640	2,328
Standardabweichung	0,361	0,072
Ungenauigkeit	0,114	0,023

Das Trägheitsmoment I berechnet sich schließlich mithilfe von Gleichung (3) zu:
$I_{\text{Zyl, exp}} = (3,30 \pm 0,10) \cdot 10^{-3}\text{kgm}^2$
Der theoretische Wert errechnet sich mithilfe des Steiner'schen Satzes nach Gleichung (1) nach $I_{\text{Zyl, theo}} = \frac{m_{\text{gem}} \cdot r_{\text{gem}}^2}{4} + \frac{m_{\text{gem}} \cdot h_{\text{gem}}^2}{12}$ zu:
$I_{\text{Zyl, theo}} = (3,08 \pm 0,001) \cdot 10^{-3}\text{kgm}^2$ mit einem prozentualen Fehler von 6,67%.

Analog wird nun mit der Styropor Kugel verfahren:

Tabelle 9: Aufgabe b: Schwingungsdauern mit Fehler

T_5 (s)	T_1 (s)
8,220	1,644
8,440	1,688
8,340	1,668
8,440	1,688
8,620	1,724
8,370	1,674
8,590	1,718
8,400	1,680
8,440	1,688
8,470	1,694

Fehler	T_5 (s)	T_1 (s)
Mittelwert	8,433	1,687
Standardabweichung	0,116	0,023
Ungenauigkeit	0,037	0,007

Das Trägheitsmoment I berechnet sich schließlich mithilfe von Gleichung (3) zu:
$I_{\text{Kugel, exp}} = (1,55 \pm 0,01)10^{-3} \cdot \text{kgm}^2$
Der theoretische Wert errechnet sich mithilfe des Steiner'schen Satzes nach Gleichung (1) wie oben nach $I_{\text{Kugel, theo}} = \frac{2m_{\text{gem}}R^2}{5}$ zu:
$I_{\text{Kugel, theo}} = (1,73 \pm 0,004)10^{-3} \cdot \text{kgm}^2$ mit einem prozentualen Fehler von 10,39%.

Es zeigen sich Differenzen zwischen den errechneten und dem theoretischen Wert mit de Steiner'schen Satz. Mögliche Gründe sind menschliche Ungenauigkeiten vor allem durch das ungenaue Stoppen der Zeit, aber auch systematische Fehler, die sich z.B. durch Anstoßen des Tisches ergeben.

5.4 Trägheitsmoment I_p einer Modellpuppe für obige Körperhaltungen

Für die Puppe ergeben sich folgende Maße:

- siehe Anhang -

Daraus kann nun das Gesamtvolumen berechnet werden: $V_{\text{ges}} = 218,09cm^3$,sowie die Gesamtmasse: $m_{\text{ges}} = 162,74g$

Nach

$$\rho = \frac{m}{V}$$

ergibt sich für die Dichte $\rho = 0,746\frac{g}{cm^3}$.

Nun wird die Puppe nach 2a und 2b durch zylindrige, bzw. vollkuglige Körperteile angenähert. Das Gesamtträgheitsmoment I_{ges} ergibt sich durch Summation der einzelnen Trägheitsmomente. Dabei wird der Steiner'sche Satz nach Gleichung (1) ausgenutzt.

Nun werden die Trägheitsmomente der Körperteile mittels der bereits genutzten Formeln [2, S. 1] berechnet. Der Kopf wird als Vollkugel beschrieben, die anderen Körperteile als Zylinder. Für die Trägheitsmomente ergibt sich somit:

$I_{\text{Kugel, theo, Kopf}} = \frac{2m_{\text{gem}}R^2}{5}$

$I_{\text{Zylinder, theo, Rumpf}} = \frac{mR^2}{2}$

$I_{\text{Zylinder, theo, Arme}} = \frac{mR^2}{2} + m_{\text{gemittelt}}a^2$

$I_{\text{Zylinder, theo, Beine}} = \frac{mR^2}{2} + m_{\text{gemittelt}}a^2$

5.4.1 angelegte Haltung

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes I_p wird die Puppe auf die Drillachse gespannt und die Schwingungsdauer T gemessen:

Tabelle 10: Aufgabe c: Puppe: Schwingungsdauer in angewinkelter Position

Fehler	T_5 (s)	T_1 (s)
	2,03	0,41
	2,13	0,43
	2,13	0,43
	2,50	0,50
	2,44	0,49
	2,47	0,49
	2,19	0,44
	2,43	0,49
	2,04	0,41
	2,09	0,42
Mittelwert	2,245	0,449
Standardabweichung	0,191	0,038
Ungenauigkeit	0,061	0,012

Für die Position mit angelegten Armen ergeben sich folgende Ergebnisse:

Tabelle 11: Aufgabe c: Puppe: Trägheitsmomente der Einzelteile mit Fehler

	Trägheitsmomente (kgm^2)	Fehler der Radien r	Fehler der Massen m
I_{Kopf}	2,20E-06	3,25E-07	5,51E-07
I_{Rumpf}	1,10E-05	1,40E-06	1,29E-06
I_{Arm}	3,11E-07	6,21E-08	5,88E-08
	3,15E-07	5,99E-08	5,62E-08
I_{Bein}	7,13E-07	1,34E-07	1,38E-07
	5,90E-07	1,26E-07	1,26E-07
$I_{\text{Stein,Arm}}$	1,21E-05		2,28E-06
	1,21E-05		2,16E-06
$I_{\text{Stein,Bein}}$	2,99E-06		5,79E-07
	2,83E-06		6,05E-07

Die Arme und Beine verlaufen parallel zur Rotationsachse, womit erneut der Steiner'sche Satz nach (1) zu nutzen ist.

Der Gauß-Fehler bestimmt sich mithilfe folgender Gleichungen nach (10):

$$\Delta x_{\text{Kopf}} = \sqrt{\left(\frac{2R^2}{5} \cdot \sigma_m\right)^2 + \left(\frac{4rm}{5}\sigma_r\right)^2}$$

$$\Delta x_{\text{Rumpf}} = \sqrt{(mr \cdot \sigma_m)^2 + \left(\frac{r^2}{2}\sigma_m\right)^2}$$

$$\Delta x_{\text{Arm}} = \sqrt{(mr \cdot \sigma_r)^2 + \left(\frac{r^2}{2}\sigma_m\right)^2 + (a^2 \cdot \sigma_m)^2}$$

$$\Delta x_{\text{Bein}} = \sqrt{(mr \cdot \sigma_r)^2 + \left(\frac{r^2}{2}\sigma_m\right)^2 + (a^2 \cdot \sigma_m)^2}$$

Der Gesamtfehler ergibt sich durch *Radizieren der Quadratsumme* der Einzelfehler, also:

$$\Delta_{x_{\text{ges}}} = \sqrt{\Delta x^2_{\text{Kopf}} + \Delta x^2_{\text{Rumpf}} + \Delta x^2_{\text{Arm, li}} + \Delta x^2_{\text{Arm, re}} + \Delta x^2_{\text{Bein, li}} + \Delta x^2_{\text{Bein, re}}}$$

Analog zu 5.3 wird mittels Gleichung (3) das Trägheitsmoment I_p bestimmt zu:
$I_{\text{p,angel, exp}} = (0,123 \pm 0,007) \cdot 10^{-3} kgm^2$

Ebenso ergibt sich für das theoretische Trägheitsmoment I_p der Puppe durch die Summation der Einzelträgheitsmomente: $I_{\text{p,angel, theo}} = (0,045 \pm 0,004) \cdot 10^{-3} kgm^2$

und einem prozentualen Fehler von 63,21%.

5.4.2 ausgestreckte Haltung

Die Messung der puppschen Schwingungsdauer ergibt:

Tabelle 12: Aufgabe c: Puppe: Schwingungsdauer in ausgestreckter Haltung

Fehler	T_5 (s)	T_1 (s)
	2,97	0,59
	3,00	0,60
	3,15	0,63
	3,10	0,62
	3,12	0,62
	3,09	0,62
	3,15	0,63
	3,06	0,61
	3,06	0,61
	2,97	0,59
Mittelwert	3,07	0,61
Standardabweichung	0,07	0,01
Ungenauigkeit	0,02	0,00

Zu guter Letzt selbige Rechnung für die ausgestreckte Haltung. Dabei ändert sich lediglich die Position der Arme. Die völlig analoge Rechnung zu Kapitel 5.4.1 wird daher nicht erneut durchgegangen, sondern lediglich tabellarisch festgehalten:

Tabelle 13: Aufgabe c: Puppe: Trägheitsmomente der Einzelteile mit Fehler

	Trägheitsmomente	Fehler der Radien r	Fehler der Massen m
I_{Kopf}	2,20E-06	3,25E-07	5,51E-07
I_{Rumpf}	1,10E-05	1,40E-06	1,29E-06
I_{Arm}	2,21E-05	3,10E-08	4,18E-06
	2,24E-05	3,00E-08	4,00E-06
I_{Bein}	7,13E-07	1,34E-07	1,38E-07
	5,90E-07	1,26E-07	1,26E-07
$I_{\text{Stein,Arm}}$	9,64E-05		1,82E-05
	9,70E-05		1,73E-05
$I_{\text{Stein,Bein}}$	2,99E-06		5,79E-07
	2,83E-06		6,05E-07

Analog zu 5.3 wird mittels Gleichung (3) das Trägheitsmoment I_p bestimmt zu:
$I_{\text{p, ausge, exp}} = (0,258 \pm 0,026) \cdot 10^{-3}\text{kgm}^2$

Ebenso analog ergibt sich für das theoretische Trägheitsmoment I_p der Puppe durch die Summation der Einzelträgheitsmomente:
$I_{\text{p, ausge, theo}} = (0,229 \pm 0,006) \cdot 10^{-3}\text{kgm}^2$

und einem prozentualen Fehler von -12,73%.

6 Diskussion

Wie bereits in Kapitel 5.3 erwähnt, kommt es durch Bewegungen und Tischstöße zu Ungenauigkeiten bei der Messung. Die ergebenen Unterschiede sind allerdings sehr gering.

Außerdem ist zu erwähnen, dass die Waage nicht geeicht war und die Stangen der Objekte meist nicht durch den Schwerpunkt gingen. Bei der Messung der Abstände der Metallstange wurde außerdem ein ungenaueres Maßband benutzt. Ebenso ist anzumerken, dass die Metallstange nicht wie angenommen masselos ist, womit sich ein weiterer systematischer Fehler ergibt.

Bei der Schwingungsdauer wird von kleinen Winkel φ ausgegangen. Ab $\varphi \gg 10°$ ist diese Näherung somit stark fehlerbehaftet, womit sich in allen Rechnungen mit der Schwingungsdauer T ein systematischer Fehler ergibt.

Literatur

[1] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme, 6. Auflage.* 2012.

[2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Experiment V354 - Gedämpfte und erzwungene Schwingungen.* 2014.

[3] Microsoft Excel. *lineare Ausgleichsrechnung.* Aufruf vom 17.12.2014. URL: `http://office.microsoft.com/de-de/excel-help/rgp-HP005209155.aspx`.

[4] Uni Magdeburg. *lineare Regression.* Aufruf vom 14.11.2014. URL: `http://www.uni-magdeburg.de/exph/mathe_gl/regression.pdf`.

[5] Wikipedia. *Kreuzprodukt.* Aufruf vom 20.12.2014. URL: `http://de.wikipedia.org/wiki/Kreuzprodukt#Geometrische_Definition`.

7 Anhang: Abmessungen der Puppe

linkes Bein:

Tabelle 14: Aufgabe c: Puppe: linkes Bein

Fehler	d (cm)	h (cm)	r (cm)	m (g)	V(cm^3)	a_{angewi}	a_{ausgestr}
	1,55	14,79	0,78	20,82	27,91	1,15	
	2,10	”	1,05	38,23	51,23	”	
	1,29	”	0,65	14,42	19,33	”	
	1,70	”	0,85	25,05	33,57	”	
	1,30	”	0,65	14,65	19,63	”	
Mittelwert	1,588	14,790	0,794	22,635	30,333	1,150	
Standardabweichung	0,335	0,000	0,167	9,790	13,120	0,000	
Ungenauigkeit	0,150	0,000	0,075	4,378	5,867	0,000	

rechtes Bein:

Tabelle 15: Aufgabe c: Puppe: rechtes Bein

Fehler	d (cm)	h (cm)	r (cm)	m (g)	V(cm^3)	a_{angewi}	a_{ausgestr}
	1,48	15,80	0,74	20,28	27,18	1,15	
	2,00	”	1,00	37,04	49,64	”	
	1,22	”	0,61	13,78	18,47	”	
	1,63	”	0,82	24,60	32,97	”	
	1,10	”	0,55	11,20	15,02	”	
Mittelwert	1,486	15,800	0,743	21,382	28,655	1,150	
Standardabweichung	0,355	0,000	0,178	10,223	13,701	0,000	
Ungenauigkeit	0,159	0,000	0,079	4,572	6,127	0,000	

linker Arm:

Tabelle 16: Aufgabe c: Puppe: linker Arm

Fehler	d (cm)	h (cm)	r (cm)	m (g)	V(cm^3)	a_{angewi}	a_{ausgestr}
	1,60	13,55	0,80	20,33	27,24	2,90	8,20
	1,60	"	0,80	20,33	27,24	"	"
	1,08	"	0,54	9,26	12,41	"	"
	1,35	"	0,68	14,47	19,40	"	"
	0,96	"	0,48	7,32	9,81	"	"
Mittelwert	1,318	13,550	0,659	14,343	19,221	2,900	8,200
Standardabweichung	0,294	0,000	0,147	6,059	8,120	0,000	0,000
Ungenauigkeit	0,131	0,000	0,066	2,710	3,631	0,000	0,000

rechter Arm, Kopf und Rumpf:

Tabelle 17: Aufgabe c: Puppe: rechter Arm

Fehler	d (cm)	h (cm)	r (cm)	m (g)	V(cm^3)	a_{angewi}	a_{ausgestr}
	1,60	13,60	0,80	20,40	27,34	2,90	8,20
	1,55	"	0,78	19,15	25,66	"	"
	1,10	"	0,55	9,64	12,92	"	"
	1,40	"	0,70	15,62	20,94	"	"
	0,96	"	0,48	7,35	9,84	"	"
Mittelwert	1,322	13,600	0,661	14,433	19,342	2,900	8,200
Standardabweichung	0,281	0,000	0,140	5,755	7,712	0,000	0,000
Ungenauigkeit	0,126	0,000	0,063	2,574	3,449	0,000	0,000

Tabelle 18: Aufgabe c: Puppe: Kopf

Fehler	d (cm)	h (cm)	r (cm)	m (g)	V(cm^3)	a_{angewi}	a_{ausgestr}
	3,10	5,70	1,55	11,64	15,60		
	3,10	”	1,55	11,64	15,60		
	4,50	”	2,25	35,60	47,71		
	3,40	”	1,70	15,36	20,58		
	3,40	”	1,70	15,36	20,58		
Mittelwert		1,750	17,919	24,014			
Standardabweichung		0,289	10,059	13,480			
Ungenauigkeit		0,129	4,499	6,029			

Tabelle 19: Aufgabe c: Puppe: Rumpf

Fehler	d (cm)	h (cm)	r (cm)	m (g)	V(cm^3)	a_{angewi}	a_{ausgestr}
	4,00	9,75	2,00	92,21	123,57		
	2,55	9,95	1,28	37,47	50,22		
	3,95	9,80	1,98	89,92	120,50		
	3,65		1,83	76,78	102,89		
	3,65		1,83	76,78	102,89		
	3,20		1,60	59,01	79,08		
Mittelwert	3,500	9,833	1,750	72,028	96,526		
Standardabweichung	0,546	0,104	0,273	20,668	27,697		
Ungenauigkeit	0,223	0,060	0,111	8,438	11,307		