

# **V606 Messung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen**

Katharina Brägelmann      Tobias Janßen  
katharina.braegelmann@tu-dortmund.de  
tobias2.janssen@tu-dortmund.de

Durchführung: 8. Mai 2018, Abgabe: 15. Mai 2018

# **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
2.1 Berechnung der Suszeptibilität . . . . .	3
2.2 Messung der Suszeptibilität . . . . .	6
<b>3 Aufbau und Durchführung</b>	<b>8</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>9</b>
4.1 Filterkurve des Selektivfilters . . . . .	9
4.2 Suszeptibilität von Neodym . . . . .	10
<b>5 Diskussion</b>	<b>13</b>

# 1 Zielsetzung

In dem folgenden Experiment soll die Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen gemessen werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Berechnung der Suszeptibilität

Die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  ergibt sich aus der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  und der Induktionskonstante  $\mu_0$ . Zusätzlich wird bei Anwesenheit einer Materie die Magnetisierung  $M$  addiert.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + M$$

$M$  setzt sich aus dem mittleren magnetischen Moment  $\bar{\mu}$  und der Zahl  $N$  der Momente pro Volumeneinheit zusammen.

$$\vec{M} = N \mu_0 \bar{\mu}$$

Die Magnetisierung  $\vec{M}$  kann auch ausgedrückt werden als:

$$\vec{M} = \mu_0 \chi \vec{H}$$

$\chi$  ist dabei die Suszeptibilität welche wiederum von  $H$  und der Temperatur  $T$  abhängt. Um einen Paramagnetismus zu beobachten benötigt man Materialien die einen nicht verschwindenden Drehimpuls besitzen. Durch die Orientierung der magnetischen Momente, welche mit den Drehimpuls gekoppelt sind, relativ zu einem äusseren Feld entsteht der Paramagnetismus. Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  eines Atoms besteht aus drei Komponenten. Dem Bahndrehimpuls der Elektronenhülle  $\vec{L}$ , dem Eigendrehimpuls (Spin) der Elektronen  $\vec{S}$  und dem Kerndrehimpuls. Der Kerndrehimpuls spielt beim Paramagnetismus keine große Rolle und kann daher vernachlässigt werden. Bei kleinen Magnetfeldern gilt die LS-Kopplung.

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Aus der Quantenmechanik folgt, dass

$$\vec{\mu}_L = -\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L}$$

und

$$\vec{\mu}_S = -g_S \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

gilt.  $g_S$  ist das gyromagnetische Verhältnis. Das Bösche Magneton  $\mu_B$  ist dabei gegeben als

$$\mu_B := \frac{1}{2} \frac{e_0}{m_0} \hbar.$$

Der Betrag des Gesamtdrehimpulses ist gegeben durch

$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar$$

Somit ergiebt sich:

$$|\vec{\mu}_L| = \mu_B \sqrt{L(L+1)}$$

und

$$|\vec{\mu}_S| = g_S \mu_B \sqrt{S(S+1)}.$$

Aus der Abbildung 1 ergiebt sich nun die Beziehung

$$|\vec{\mu}_J| = |\vec{\mu}_S| \cos(\alpha) + |\vec{\mu}_L| \cos(\beta)$$

Mit der aus der Quantenmechanik kommenden Annahme, dass  $g_S$  den Wert 2 besitzt ergiebt sich für  $|\vec{\mu}_B|$  folgender Ausdruck

$$|\vec{\mu}_S| = |\mu_B| \sqrt{J(J+1)} \cdot g_J$$

$g_J$  ist der Landé-Faktor und ist gegeben durch:

$$g_J = \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (1)$$

Die aus der Quantenmechanik kommende Richtungsquantelung besagt, dass nur bestimmt Winkel zwischen  $\vec{\mu}_J$  und dem äußeren Magnetfeld möglich sind.

$$\mu_{J_z} = -\mu_B g_J m \quad (2)$$

$m$  ist die Orientierungsquantenzahl und tritt nur ganzzahlig auf. Der Winkel kann nur  $2J+1$  verschiedene Einstellungen haben. Jeder dieser Winkel besitzt eine bestimmte potentielle Energie mit dieser kann die Magnetisierung  $\vec{M}$  berechnet werden. Dafür wird die Häufigkeit der auftretenden Orientierungen Bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit wird mit dem manetischen Moment aus Formel 2 multipliziert und anschließend über alle möglichen Winkeleinstellungen summiert. Es ergiebt sich nach Umformungen die Suszeptibilität als:

$$\chi = \frac{\mu_0 \mu_B^2 g_J^2 N J(J+1)}{3kT}. \quad (3)$$

$N$  beschreibt die Anzahl der Momente pro Volumeneinheit. Die Boltzmannkonstante wir mit  $k$  angegeben und die Temperatur mit  $T$ . Für hohe Temperaturen kann

$$\chi \sim \frac{1}{T}$$

angenommen werden. Diese Proportionalität ist als Curiesches Gesetz des Paramagnetismus bekannt. Es ist bekannt, dass sich der Paramagnetismus besonders gut bei Seltenen Erden beobachten lässt. Die Elektronen in der 4f-Schale sind dafür verantwortlich. Durch die Hundschen Regeln werde die Verteilung der Elektronen innerhalb einer Schale und der daraus resultierende Gesamtdrehimpuls beschreiben.

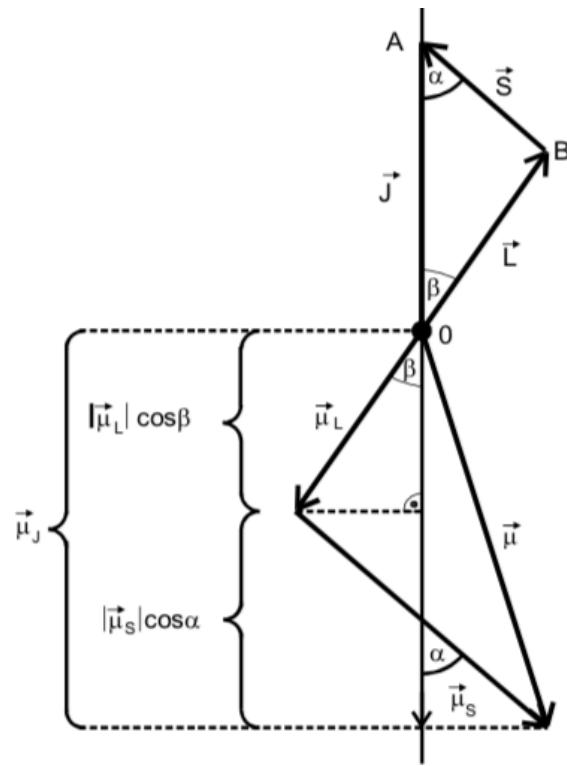


Abbildung 1: Vektordiagramm aus den Drehimpulsvektoren einer Elektronenhülle und den daraus resultierenden magnetischen Momenten [1]

- Die Spins  $\vec{s}_i$  summieren sich zu einem maximalen Gesamtspin  $\vec{S} = \sum \vec{s}_i$  der nach dem Pauli-Prinzip möglich ist.
- Der Bahndrehimpuls  $\vec{l}_i$  wird ebenfalls summiert zu  $\vec{L} = \sum \vec{l}_i$ .  $\vec{L}$  muss mit den Pauli-Prinzip und der ersten Regel Verträglich sein.

- Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  setzt sich, für eine mehr als halb volle Schale, zusammen aus  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ . Ist die Schale hingegen weniger als halb besetzt ergibt sich  $\vec{J} = \vec{L} - \vec{S}$ .

## 2.2 Messung der Suszeptibilität

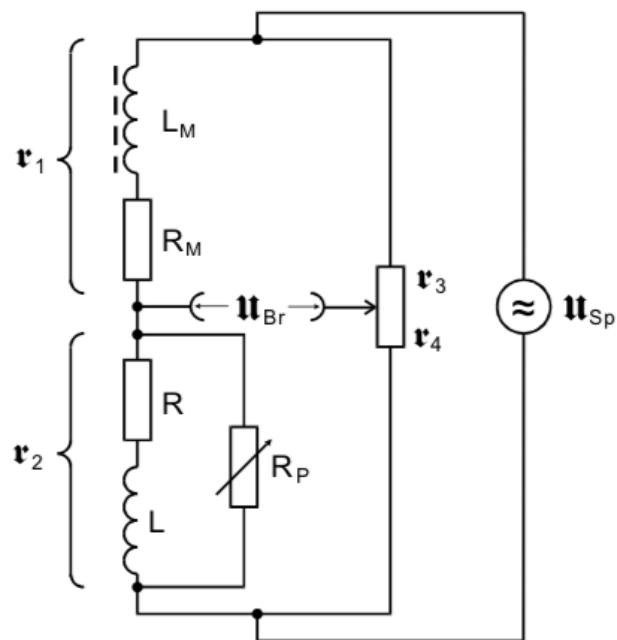


Abbildung 2: Brückenschaltung für eine Suszeptibilitätsmessung [1]

Die Messung der Suszeptibilität wird nun mit der in Abbildung 2 zusehenen Brückenschaltung durchgeführt. Für die Brückenschaltung benötigt man zwei gleiche Spulen mit identischer Induktivität. Um  $\chi$  zu bestimmen wird Materie in eine Spule eingeführt und die Induktivitätsdifferenz  $\Delta L$  zu luftgefüllte Spule gemessen. Die Schaltung bietet zwei Möglichkeiten die Suszeptibilität zu messen. Zu beginn wird die Brücke angeglichen, das heißt, dass keine Brückenspannung  $U_{Br}$  zu messen ist. Füllt man nun eine Spule, mit der zu untersuchenden Materie, kann man aus der anliegenden Brückenspannung die Suszeptibilität bestimmen. Für hohe Messfrequenzen ( $\omega^2 L^2 \gg R^2$ ) ergiebt sich durch Umformungen

$$\chi(\omega \rightarrow \infty) = 4 \frac{F U_{Br}}{Q U_{Sp}}. \quad (4)$$

Der Spulenquerschnitt ist als  $F$  gegeben.  $Q$  beschreibt den Querschnitt der Probe und  $U_{Sp}$  steht für die Speisespannung.

Bei der zweiten möglichen Berechnung wird nach dem Abgleichen der Brücke die Spule mit der Probe gefüllt und die Brücke erneut abgeglichen. Mit der auftretenden Differenz der Einstellungen der Abgleichelemente lässt sich über die Formel

$$\chi = 2 \frac{\Delta R}{R_3} \frac{F}{Q} \quad (5)$$

ebenfalls die Suszeptibilität bestimmen.  $R_3$  ist dabei der Widerstand am Potentiometer, und  $\Delta R$  beschreibt die Differenz der Einstellungen.

### 3 Aufbau und Durchführung

Der Aufbau setzt sich aus den folgenden Bestandteilen zusammen: ein Funktionsgenerator mit regelbarer Frequenz  $f$ , eine Brückenschaltung mit regelbarem Widerstand  $R$ , den Messspulen und einer Öffnung für die Proben, ein Selektivfilter mit regelbarem Verstärker, ein Linearverstärker, ein Oszilloskop mit Millivoltmeter und die Proben. Zunächst wird die Ausgangsspannung des Funktionsgenerators geprüft, da der Selektivverstärker nicht mehr als  $U = 1 \text{ V}$  gespeist bekommen darf. Dafür wird der Funktionsgenerator mit dem Oszilloskop verbunden. Die Filterkurve des Selektivfilters wird ausgemessen. Dazu wird der Funktionsgenerator mit dem Selektivfilters verbunden. Der Selektivfilter wird an das Oszilloskop mit Millivoltmeter geschlossen. Gemessen wird die maximale Ausgangsspannung  $U_A$  am Oszilloskop in Abhängigkeit der vom Funktionsgenerator erzeugten Frequenz  $f$ .

Für die Messung der Suszeptibilität wird die Schaltung geändert (Abb. 3). Der Funkti-

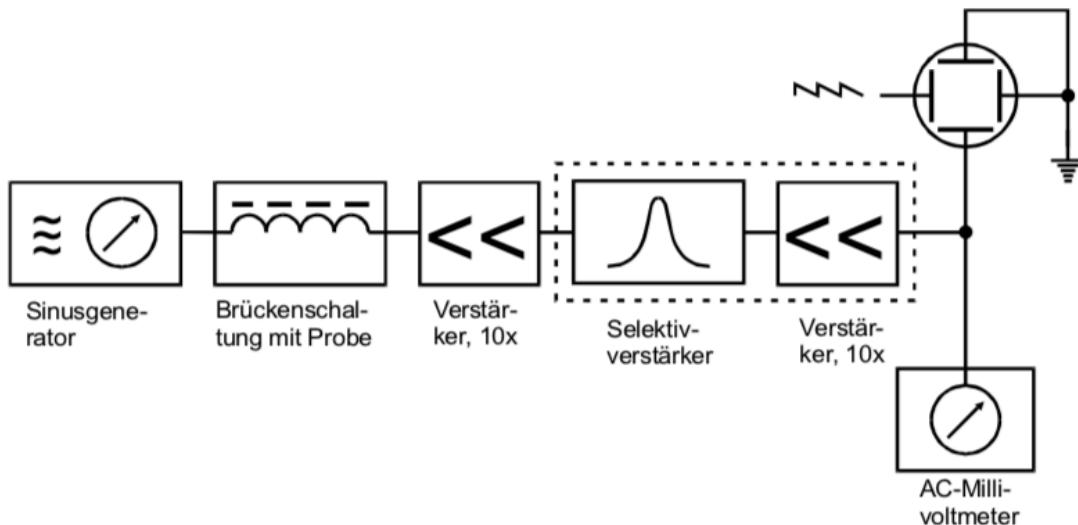


Abbildung 3: Aufbau der Messapparatur [1]

onsgenerator wird mit der Brückenschaltung verbunden. Die Brückenschaltung wird mit dem Linearverstärker vernetzt. Der Linearverstärker wird an den Selektivfilter geschaltet. Am Selektivfilter wird die Verstärkung  $\times 10$  gewählt. Der Selektivfilter wird anschließend mit dem Millivoltmeter verbunden. Als Frequenz der Spannung wird der Hochpunkt der Filterkurve gewählt. Nun wird der regelbare Widerstand so lange verändert, bis die Ausgangsspannung auf dem Millivoltmeter ein Minimum erreicht. Die Ausgangsspannung und der Widerstand werden notiert. Nun wird die Probe in die Spule eingeführt. Erneut wird mit dem regelbaren Widerstand das Minimum der Ausgangsspannung gesucht. Die Ausgangsspannung und der Widerstand werden notiert. Die Messung wird drei mal wiederholt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Filterkurve des Selektivfilters

Die Ausgangsspannung  $U_A$  wird in Abhängigkeit der Frequenz  $f$  gemessen. Die Messwerte sind in Tabelle 1 zu finden. Sie sind in Abbildung 4 aufgetragen. Als Maximum der

Tabelle 1: Ausgangsspannung  $U_A$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$

$f/\text{kHz}$	$U_A/\text{V}$	$f/\text{kHz}$	$U_A/\text{V}$
20	0,0432	34,5	0,5120
21	0,0480	34,6	0,5280
22	0,0528	34,8	0,5360
23	0,0584	35	0,5520
24	0,0648	35,1	0,5600
25	0,0728	35,2	0,5600
26	0,0816	35,3	0,5600
27	0,0928	35,4	0,5600
28	0,1040	35,5	0,5600
29	0,1240	35,6	0,5440
30	0,1480	35,7	0,5440
31	0,1820	35,8	0,5280
32	0,2320	36	0,5040
33	0,3120	37	0,3840
33,5	0,3640	38	0,3040
34	0,4480	39	0,2480
34,2	0,4640	40	0,1840
34,4	0,5040	-	-

Messwerte ergibt sich  $U_A = U_{Sp} = 0,560 \text{ V}$  bei der Frequenz  $f$ :

$$f = 35 \text{ kHz}.$$

Diese Frequenz wird vom Selektivfilter ungehindert durchgelassen.

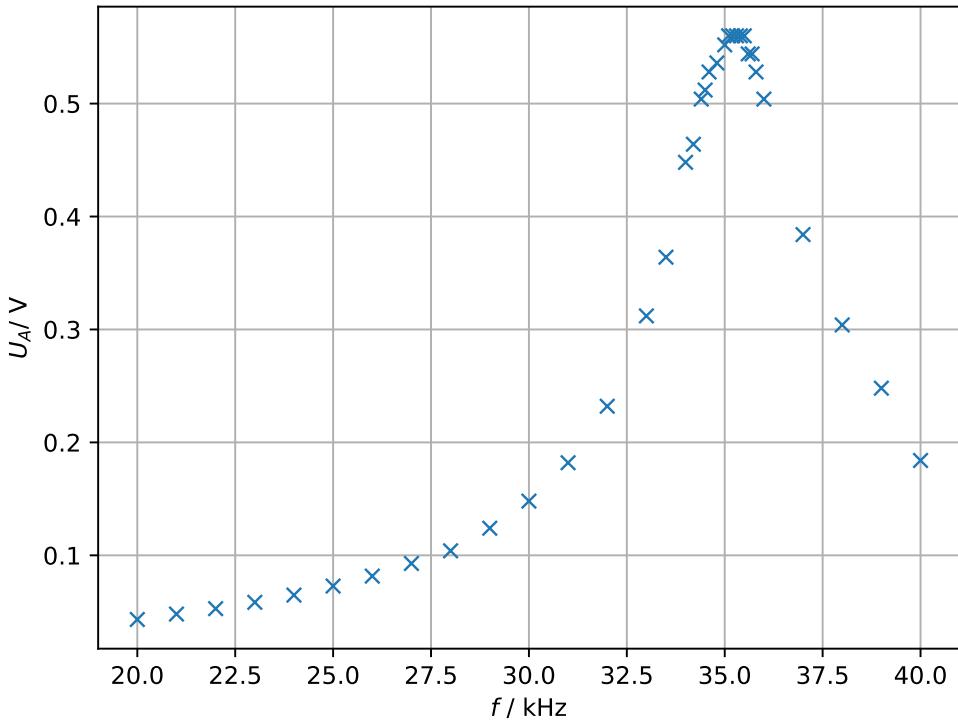


Abbildung 4: Ausgangsspannung  $U_A$  gegen Frequenz  $f$

## 4.2 Suszeptibilität von Neodym

Zur Berechnung des Theoriewerts der Suszeptibilität  $\chi$  wird zunächst die Anzahl der magnetischen Momente pro Volumeneinheit berechnet. Die Masse  $m$  berechnet sich allgemein mit der Dichte  $\rho$  und dem Volumen  $V$  als:

$$m = \rho V.$$

Die Masse eines Stoffs lässt sich aber auch durch die Molare Masse  $M$  und die Stoffmenge  $n$  ausdrücken:

$$m = Mn.$$

Damit ergibt sich

$$N = \frac{n}{V} = \frac{\rho}{M}.$$

Mit der molaren Masse  $M = 144,242u$  [2] und der Dichte  $\rho = 7240 \text{ kg/m}^3$  ergibt sich:

$$N = 3,0227 \cdot 10^{28} \text{ 1/m}^3.$$

Dabei ist  $u$  die atomare Masseneinheit [3].

Die Quantenzahlen ergeben sich aus der Anzahl der 4f-Elektronen des Stoffs. Neodym

besitzt drei 4f-Elektronen. Die f-Elektronen besitzen generell die Nebenquantenzahl, auch Drehimpuls-Quantenzahl,  $l = 3$ .

Die Spinquantenzahl  $s$  ergibt sich aus den Hund'schen Regeln zu  $s = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5$ .

Damit kommt es zu einem Gesamtdrehimpuls  $j$  von  $j = 4,5$ .

Der Landé-Faktor ergibt sich nach Gleichung (1) zu:

$$g_j = \frac{8}{11} = 0,727.$$

Mit der magnetischen Feldkonstante  $\mu_0$  [3] und der Raumtemperatur  $T = 293,15\text{ K}$  berechnet sich die Suszeptibilität nach Gleichung (3) als:

$$\chi_{theo} = 0,003\,522$$

Die Probe des Metalls Neodym  $Nd_2O_3$  besitzt folgende Eigenschaften:

Massen	$m = 0,009\text{ kg}$
Dichte	$\rho = 7240\text{ kg/m}^3$
Länge	$L = 0,165\text{ m}$
#4f-Elektronen	$n = 3$ .

Die effektive Querschnittsfläche  $Q_{\text{real}}$  der Probe wird durch

$$Q_{\text{real}} = \frac{m}{L \cdot \rho}$$

berechnet und ergibt sich damit zu

$$Q_{\text{real}} = 7,53 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2.$$

Die Messspule hat den Querschnitt  $F$

$$F = 86,6\text{ mm}^2 = 86,6 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2$$

Der Widerstand der Brückenschaltung beträgt laut dem Gerät  $R_3 = 998\text{ }\Omega$ . Die Messwerte zur Berechnung der Suszeptibilität sind in Tabelle 2 notiert. Der Mittelwert berechnet

Tabelle 2: Messung der Suszeptibilität  $\chi$

$U_o/\text{V}$	$U_p/\text{V}$	$R_o/\Omega$	$R_p/\Omega$	$\Delta U$	$\Delta R$
0,0235	0,020	1,93	1,205	0,0035	0,725
0,0225	0,019	1,82	0,745	0,0035	1,075
0,0210	0,017	1,425	0,425	0,0040	1

sich allgemein mit der Anzahl  $n$  der Messwerte  $x$  über

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_1^n x_n.$$

Der Wert  $\Delta R$  wird gemittelt zu

$$\langle \Delta R \rangle = \frac{14}{15} \Omega = 0,933 \Omega.$$

$\Delta U$  wird gemittelt und ergibt sich als Brückenspannung:

$$\langle \Delta U \rangle = U_{Br} = 3,667 \cdot 10^{-3} \text{ V.}$$

Die eingehende Spannung hat die Amplitude

$$U_{Sp} = 0,560 \text{ V.}$$

Mit Gleichung (4) und unter Beachtung der beiden eingeschalteten Verstärker errechnet sich die Suszeptibilität zu

$$\chi_U = 0,003\,01.$$

Mit den aufgeführten Werten und Gleichung (5) und unter der Beachten der Verstärker ergibt sich  $\chi$  für die Neodym-Probe zu

$$\chi_R = 0,002\,15.$$

## 5 Diskussion

Die Werte der Suszeptibilität unterliegen verschiedenen Fehlerquellen. Initial ist auffällig, dass das Ampermeter auch ohne angeschlossene Spannungsquelle stark ausschlägt. Während der Messung gibt es weitere starke Schwankungen. Des Weiteren können parallele Fehler und Schwankungen im Stromnetz nicht ausgeschlossen werden. Außerdem wird versehentlich vor dem Messungsbeginn der Parallelwiderstand verändert, sodass nur die Messung für Neodym auswertbar wird. Zudem filtert der Bandpassfilter nicht alle Frequenzen und die Messung der Filterkurve wurde mit der Güte  $Q = 10$  statt  $Q = 100$  durchgeführt. Weiterhin hat der Funktionsgenerator einen Wackelkontakt.

Als theoretischer Wert der Suszeptibilität ergibt sich

$$\chi_{theo} = 0,003\,522.$$

Der errechnete Messwert über die Brückenspannung berechnet sich zu

$$\chi_U = 0,003\,01.$$

Die Suszeptibilität über die Widerstände berechnet, beträgt

$$\chi_R = 0,002\,15.$$

Die relative Abweichung  $f$  wird allgemein über

$$f = \frac{x_{exp} - x_{theo}}{x_{theo}}$$

berechnet. Die Abweichung zwischen dem über die Spannung berechneten Wert  $\chi_U$  und dem theoretischen Wert beträgt dementsprechend  $f_U = 14,54\%$ . Der über die Widerstände errechnete Wert weicht um  $f_R = 38,96\%$  von dem Theoriewert ab. Insgesamt lässt sich sagen, dass die Erwartungen dennoch erfüllt wurden, denn die Suszeptibilitäten liegen in einer passenden Größenordnung.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. In: *Versuchsanleitung V602*.
- [2] Thomas Seilnacht. *Periodensystem: Neodym*. URL: <http://www.seilnacht.com/Lexikon/60Neodym.html> (besucht am 11.05.2018).
- [3] Casio Taschenrechner. In: *fx-991ES*.

### VGO6

Nennreihe a)  $U_{A\max} = 560 \text{ mV}$  bei  $f = 30 \text{ kHz}$  ~~unabhängig von  $U_A$~~

$U_A$ mV	f kHz	$U_A$ mV	f kHz	$U_A$ mV	f kHz
43,20	20	182,0	31	364,0	33,5
<del>48,00</del>	<del>21</del>	232,0	32	512,0	34,5
<del>52,80</del>	<del>22</del>	312,0	33,99	560,0	35,5
58,40	23	448,0	34	448,0	36,5
64,80	24	552,0	35	464,0	34,2
72,80	25	504,0	36	504,0	34,4
81,60	26	384,0	37	528,0	34,6
92,80	27	304,0	38	536,0	34,8
104,0	28,1	248,0	39	560,0	35,1
124,0	28,99	184,0	40	560,0	35,2
148,0	30			560,0	35,3
				560,0	35,4
				544,0	35,5
				544,0	35,7
				528,0	35,8

Nennreihe b)

$U_0$ /mV	$U_p$ /mV	Probe
25	77	Gd2O3 $m=14,08 \text{ g}$
17	18	C60/2 Pr-2 $m=7,87 \text{ g}$
17,5		

Abbildung 5: Originale Messdaten

Messreihe b)					Probe				
	$U_o$ mV	$U_p$ mV	$R_o$ MΩ	$R_p$ MΩ					
NR	18	16	740	0	Gd 203				
	17,5	16	685	350	Nd 203				
	17,5	32	800	0					
	23,5	20	1,83	1,205					
	22,5	19	1,82	0,745					
	21	17	1,425	0,425					
	$U_o$ mV	$U_p$ mV	$R_o$ MΩ	$R_p$ MΩ					

Messreihe a)					.				
	$U_A$ mV	f kHz	$U_A$ mV	f kHz		$U_A$ V	f kHz	$U_A$ V	f kHz
	19,5	20	240	33,8	0,026	20		33,5	
	22	21	380	34	0,03	21		34	
	26	22	490	34,2	0,034	22		34,2	
	30	25	550	34,4	0,039	23		34,4	
	34,5	24	680	34,5	0,044	24		34,5	
	40	28	740	34,6	0,05	25		34,6	
	46	26	300	34,8	0,058	26		34,8	
	54	27	1000	35	0,068	27		35	
	64	28		35,1	0,08	28		35,1	
	77,5	29		35,2	0,095	29		35,2	
	95,5	30		35,3	0,1045	30		35,3	
	50	31		35,4		31		35,4	
	90	32				32			
	107,0	33				33			

Abbildung 6: Originale Messdaten