Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Zum Experiment über die Leerlaufspannung und den Innenwiderstand von Spannungsquellen sollen verschiedene Stromstärken und Spannungen verschiedener Spannungsquelle gemessen werden. Konkret sollen die Quell- und die Klemmenspannung an der Monozelle und dem LC-Generator unter Sinus- und Rechteckspannung gemessen werden. Ferner sollen daraus weitere Größen, wie die umgesetzte Leistung P_{umges}, bestimmt und entsprechende Graphen gezeichnet werden.

2 theoretische Grundlagen [2, S. 1]

2.1 Variablen

U_0 = Leerlaufspannung in $[U_0] = \text{V}$
I_k = k-te Stromstärke in $[I_k] = \text{A}$
R_i = Innenwiderstand in $[R_i] = \Omega$
R_a = Belastungswiderstand / äußerer Lastwiderstand in $[R_a] = \Omega$
U_k = Klemmenspannung in $[U_k] = \text{V}$
P_{umges} = umgesetzte Leistung in $[P_{\text{umges}}] = \text{W}$
R_v = Eingangswiderstand in $[R_v] = \Omega$

Für das Experiment der Leerlaufspannung und der Innenwiderstände von Spannungsquellen müssen zunächst einige Begriffe verdeutlicht werden: Der Begriff „Spannungsquelle“ meint dabei ein Gerät, das eine konstante elektrische Leistung liefert. Exemplarisch werden in der Versuchsanleitung das „galvanische Element, der Dynamo und der LC-Generator“ genannt (vgl. [2, S. 1]).

Für weitere Berechnungen müssen daher die Urspannung U_0 und die Innenwiderstände des Geräts bekannt sein.

Diese Leerlaufspannung U_0 liegt, wenn kein Strom fließt, an den Ausgangsklemmen – in dem Ersatzschaltbild 1 an den Schnittpunkten des gestrichelten Rechtecks mit dem Schaltkreis – einer Spannungsquelle an. Es ergibt sich nach dem Ohm-Gesetz:

$$U = RI \tag{1}$$

und durch Superposition des Innenwiderstandes, bzw. Lastwiderstandes:

$$U_0 = IR_i + IR_a \tag{2}$$

Dazu wird ein hochohmiges Voltmeter in den Stromkreis gebracht, das nach dem Ohmschen Gesetz (1) den Stromfluss verringert.

Die Klemmenspannung U_k meint die Spannung, die an den Ausgangsbuchsen abgegriffen werden kann. Wenn an einem äußeren Lastwiderstand R_a ein endlicher Strom I fließt, sinkt die Klemmenspannung U_k durch die Innenwiderstände R_i der Spannungsquelle unterhalb U_0:

$$U_k = IR_a = U_0 - IR_i \tag{3}$$

Wegen des geringen Stromes I lässt sich der Term „-IR_i“ aus (3) vernachlässigen. Dadurch gilt $U_k \approx U_0$ (vgl. Sektion 4.1).

In der Realität gibt es jedoch in jeder Spannungsquelle Innenwiderstände. Dadurch wird die elektrische Leistung der Geräte begrenzt.

Bei der so genannten „Leistungsanpassung“ wird die abgegebene Leistung N für einen entsprechend großen Lastwiderstand R_a maximal. Es folgt:

$$P_{\text{umges}} = U_k * I \overset{(1)}{=} I^2 R_a = N(R_a) = P_{\max} \tag{4}$$

Damit wird deutlich, dass die Leistung maximal wird, wenn $R_i = R_a$ gilt.

Der Innenwiderstand mancher Quellen, wie dem elektrischen Generator, ist beispielsweise durch einen Rückkopplungsmechanismus festgelegt, nicht etwa durch einen ohmschen Widerstand. Dadurch haben Änderungen des Belastungsstromes Auswirkungen auf das elektrische Verhalten der Quelle. Der Innenwiderstand wird zu differentiellen Größe des Ohm'schen Gesetzes:

$$R_a = \frac{dU_k}{dI} \tag{5}$$

Es wird das Ersatzschaltbild 1 (vgl. Kapitel 3) betrachtet. Der schwarz-gestrichelte Bereich ist dabei das so genannte „Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle“. Dieses Ersatzschaltbild besteht aus idealisierten Spannungsquelle und einem in Reihe geschalteten ohmschen Widerstand R_i. Jene Spannungsquelle hat einen Innenwiderstand und eine von äußeren Einflüssen unabhängige Spannung U_0.

Da bei Parallelschaltung die Spannung gleich bleibt, muss das Voltmeter parallel zum Widerstand geschaltet sein [1]. Eine Analogie ergibt sich beim Ampèremeter, das in

Reihe geschaltet sein muss.

Nach dem Zweiten Kirchhoffschen Gesetz – der Maschenregel – folgt die Gleichung

$$U_{0,\text{Quelle}} = \sum_{i=0}^{\infty} U_{o,i} = \sum_{k=0}^{\infty} R_k I_k \tag{6}$$

mit k = 1,2.

Für das Experiment werden gemäß Abb. 1 mit $U_{o,i} \overset{i=1}{=} U_o$, $I_1, 2$ und $R_1 = R_i$ und $R_2 = R_a$ zu:

$$U_0 = I_1 R_i + I_2 R_a \tag{7}$$

Für die Klemmenspannung U_k mit Gegenspannung ergibt sich analog zu (3):

$$U_k = U_0 - I R_i \tag{8}$$

3 Versuchsdurchführung

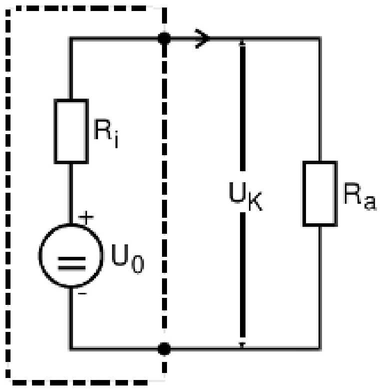
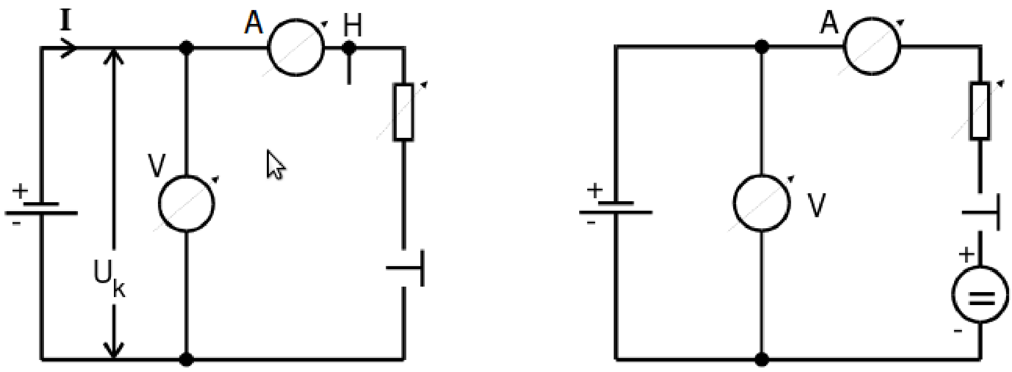


Abbildung 1: Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle mit Lasterwiderstand R_a

Zu Beginn des Experimentes wird die Leerlaufspannung gemessen. Dazu wird die Monozelle in einen Stromkreis mit einem Voltmeter gebracht. Damit die Spannung abgelesen werden kann, wird die Skala des Voltmeters auf 3V gestellt. Auf der Rückseite des Voltmeters finden sich Angaben zum Eingangswiderstand $R_v \geq 10$ M Ω bei 1,5% Messungenauigkeit. Bei den Berechnungen wird diese Tatsache dadurch berücksichtigt, dass der gemessene Wert mit 1,5% multipliziert wird.

Danach wird die folgende Schaltung realisiert:



(a) Messschaltung zur Bestimmung von U_0 und R_i

(b) Wie 2a, jedoch mit Verwendung einer Gegenspannung

Abbildung 2: Zwei Messschaltungen, Abbildung b: mit Gegenspannung.

Nach Schaltung 2a wird nun ein regelbarer Widerstand mit Taster mit bis zu 50 Ω dazugeschaltet. Ebenso wird das Ampèremeter in Reihe geschaltet. Bei der nächsten Messung wird nach 2b eine Gegenspannung hinter das Ampèremeter parallel geschaltet. Sodann werden die Klemmenspannung und die Stromstärken bei einer Skala von 100mA und einer Spannungsskala von 3V, bzw. 1V bei Gegenspannung notiert.

Danach wird die Monozelle entfernt und in je einer Messung der Sinus-,bzw. Rechteckausgang des LC-Generators genutzt. Dabei müssen die Lastwiderstände R_a von 0,1-5kΩ (Sinusausgang), bzw. 20-250Ω (Rechteckausgang) regelbar sein. Zusätzlich müssen durch die Schwingungen der Spannungskurven das Volt- und Ampèremeter auf Wechselspannung gestellt werden.

Bei allen drei Messungen werden jeweils 15 Messungen zu steigenden Widerständen durchgeführt und die Klemmenspannung U_k, bzw. die Stromstärke I notiert.

4 Ergebnisse

Es soll die Leerlaufspannung einer Monozelle mit einem Voltmeter gemessen und der Eingangswiderstand R_v notiert werden. Diese ergibt sich mit einer Abweichung von 0,022, die von der Multiplikation der Leerlaufspannung mit einer 1,5 prozentigen Messgeräteungenauigkeit herrührt, zu:

Tabelle 1: Leerlaufspannung U_0 und Eingangswiderstand R_v in $[U_0]$=V, $[R_v] = \Omega$

Leerlaufspannung in [U]=V	Eingangswiderstand in $[R_v] = \mathrm{M}\Omega$
1,44±0,022	≥10

Aus 2a wird die Klemmenspannung U_k in Abhängigkeit des Belastungsstroms I aufgenommen. Dabei soll der Belastungswiderstand in einem Variationsbereich von 0-50 Ω liegen.

Sodann soll eine etwa 2V als U_0 größere Gegenspannung an die Monozelle angelegt werden (vgl. 2b). Dadurch wird der Strom in umgekehrter Richtung fließen. Nach (8) soll nun U_k in Abhängigkeit von I gemessen werden.

Letztlich soll noch das Messobjekt des LC-Generator auf den Sinus- und Rechteck-Ausgang geändert und erneut die Klemmenspannung gemessen werden. Dabei soll der 1V-Rechteckausgang eine Variationsbereich von R_a: 20-250 Ω und der 1V-Sinusausgang von $R_a : 0,1 - 5 \cdot 10^3 \Omega$ haben. Dabei bleibt zu beachten, dass die Eichung der Messgeräte nur für einen engen Frequenzbereich gültig ist. Die Messwerte befinden sich im Anhang.

Wenn das reale Ampèremeter vor dem Voltmeter geschaltet würde, so würde die Differenz aus Klemmenspannung und Spannung am Voltmeter gemessen, nicht etwa die Klemmenspannung selbst. Diese Tatsache folgt aus den Innenwiderstand des realen Ampèremeters. (3) würde entsprechend zu:

$$U_0 = U_k + I(R_i + R_{\mathrm{Amp}}) \tag{9}$$

Ein systematischer Fehler ergibt sich durch die Annäherung aus Kapitel 2 mit Gleichung (3), bei dem der Term „$-IR_i$“ durch geringe Ströme vernachlässigt wurde. Wird dieser berücksichtigt, ergibt sich nach dem Ohm'schen Gesetz (1) :

$$I = \frac{U_k}{R_v} \tag{10}$$

Dies wird nun in (3) eingesetzt, sodass sich folgende Gleichung ergibt:

$$U_k = U_0 - IR_i \overset{(1)}{\leftrightarrow} U_k = U_0 - \frac{U_k R_i}{R_v} \leftrightarrow U_0 = U_k \left(\frac{R_i}{R_v} + 1 \right) \tag{11}$$

Dabei beschreibt das Verhältnis $\frac{R_i}{R_v}$ den in Kapitel 2, Gleichung (3) vernachlässigten Term „$-IR_i$". Diese wird nun bestimmt zu:

$$\mathit{\Delta}U_0 = \frac{R_i}{R_v} = -0,000000168 \tag{12}$$

für die erste Messung ohne Gegenspannung.

$$\mathit{\Delta}U_0 = -0,000000156 \tag{13}$$

für die dritte Messung mit Rechteckspannung.

$$\mathit{\Delta}U_0 = -0,000000596 \tag{14}$$

für die vierte Messung mit Sinusspannung.

Es fällt auf, dass der systematische Fehler gering ist. Dies bestätigt die gemachte Annahme.

4.1 Auswertung

Nun sollen die Kurven U_k = f(I) für die 4 Spannungsquellen gezeichnet werden. Diese finden sich im Anhang.

Der Innenwiderstand und die Klemmenspannung der drei Spannungsquellen berechnen sich durch eine lineare Ausgleichsrechnung mittels [3] zu:

für Abb. 2a

$$U_k(I) = -16.7687I + 1.4758 \pm (0.3202I + 0.0172) \tag{15}$$

,für Abb. 2b

$$U_k(I) = -15.6412I + 1.4879 \pm (0.1998I + 0.0139) \tag{16}$$

,sowie bei Rechteckspannung:

$$U_k(I) = -65.5535I + 0.6776 \pm (4.5237I + 0.02292) \tag{17}$$

und Sinusspannung

$$U_k(I) = -596.2848I + 2.0206 \pm (10.1162I + 0.0078) \tag{18}$$

Die Steigung der jeweiligen linearen Funktionen entspricht dem Widerstand R_a. Der Fehler errechnet sich mit der „RGP-Funktion" mit Hilfe von Mircosoft Excel [3].

Die umgesetzte Leistung des Belastungswiderstandes, sowie der Belastungswiderstand der Monozelle berechnen sich nach (4), bzw. (5) zu:

Tabelle 2: Belastungswiderstand R_a, umgesetzte Leistung N der Monozelle und als Funktion des Belastungswiderstandes N(R_a)

R_a in [R_a]=Ω	N in [N]=W	N(R_a)
0,8333	0,0059	0,0059
1,7522	0,0112	0,0111
2,1739	0,0133	0,0132
4,2857	0,0210	0,0211
6,8690	0,0269	0,0268
7,8464	0,0282	0,0282
8,9317	0,0291	0,0295
10,7078	0,0325	0,0309
11,9608	0,0311	0,0316
13,7500	0,0317	0,0322
14,9351	0,0319	0,0324
16,0356	0,0323	0,0325
18,4211	0,0322	0,0324
20,0501	0,0319	0,0322
21,7848	0,0316	0,0319
30,3333	0,0273	0,0298
35,4839	0,0276	0,0283
43,4263	0,0274	0,0261
50,4386	0,0262	0,0243

Diese Größen trägt man nun entweder gegeneinander auf und erhält die Leistungskurve (blau), oder arbeitet mittels folgender Gleichung, nachdem mit (3) in „$P = U_k I \stackrel{(1)}{=} I^2 R_a$“ umgestellt wurde (grün):

$$P = \frac{U_0^2 R_a}{(R_i + R_a)^2} \tag{19}$$

Das Maximum der Leistung liegt dann vor, wenn R_a sein Maximum erreicht. Dies ist die so genannte „Leistungsanpassung“, vgl. 2.

Der Graph P gegen R_a inklusive der gerechneten Kurve N $= f(R_a)$ aus R_i und U_0 ergibt sich nach 2 und (19):

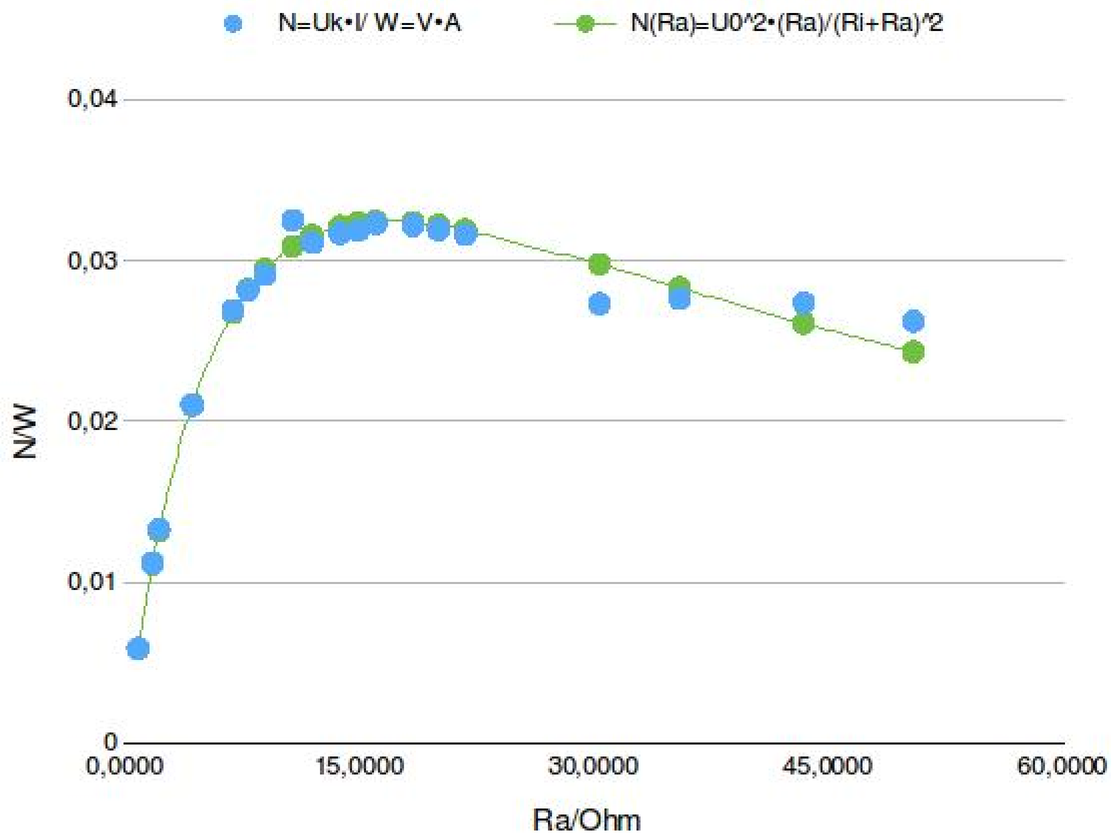


Abbildung 3: Graph P gegen R_a und N $= f(R_a)$

5 Fehlerrechnung

Der Mittelwert errechnet sich nach:

$$\overline{v_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{20}$$

Analog die Standardabweichung:

$$s_i = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} (v_j - \overline{v_i})^2} \tag{21}$$

, bzw.

$$s_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{2} (v_j - \overline{v_i})^2} \tag{22}$$

mit zufälligen Fehlern behafteten Werten v_j mit j = 1,..,N

Ferner die Unsicherheiten σ_i mit i = 1,..,N:

$$\sigma_i = \frac{s_i}{\sqrt{N}} \tag{23}$$

$$\sigma_{U_k} = \frac{s_{U_k}}{\sqrt{2}} \tag{24}$$

$$\sigma_I = \frac{s_I}{\sqrt{2}} \tag{25}$$

und der Gauß-Fehler für die fehlerbehafteten Größen U_k und I:

$$\sigma_{f(U_k,I)} = \sqrt{\left(\frac{df(U_k,I)}{dU_k}\right)^2 \sigma_{U_k}^2 + \left(\frac{df(U_k,I)}{dI}\right)^2 \sigma_I^2} \tag{26}$$

mit den partiellen Ableitungen für den Lastwiderstand $R_a = \frac{U_k}{I}$:

$$\frac{df(U_k,I)}{U_k} = \left(\frac{1}{I}\right)^2 \tag{27}$$

$$\frac{df(U_k, I)}{I} = \left(\frac{-U_k}{I^2}\right)^2 \tag{28}$$

und den partiellen Ableitungen für die Leistung $N = U_k I$:

$$\frac{df(U_k, I)}{U_k} = I \tag{29}$$

$$\frac{df(U_k, I)}{I} = U_k \tag{30}$$

Die lineare Regression berechnet sich nach [4] zu:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{N} \left[y_k - \left(\overline{B}x_k + \overline{A}\right)\right]^2 \tag{31}$$

, wobei $\overline{B} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}$ die Steigung der Geraden und $\overline{A} = \overline{y} - \overline{B}\overline{x}$ $\overline{B}$ den Schnittpunkt mit der Ordinate beschreibt. Bei einer linearen Funktion

$$y = mx + b \tag{32}$$

ist $\overline{B} := m$ und $\overline{A} := b$. σ^2 beschreibt somit die mittlere quadratische Abweichung der Messwerte von der Geradengleichung. Damit folgt der Fehler von m mit N:=Anzahl der Messwerte:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{N\left(\overline{y}^2 - \overline{x}^2\right)} \tag{33}$$

6 Diskussion

Wie in der Versuchsanleitung [2, S. 2] beschrieben, arbeitet ein besseres Verfahren nach der Nullmethode. Dabei wird „eine variable Referenzspannung an die Ausgangsklemmen der zu untersuchenden Quelle [gelegt] und [..] die Referenz solange [variiert], bis ein als Nulldetektor geschaltetes (ungeeichtes) Ampèremeter keinen Strom mehr anzeigt“. Dann ist die Spannung an Referenzquelle gleich der gesuchten Leerlaufspannung.

Aus dem Diagramm wird ersichtlich, dass es zu Abweichungen gekommen ist. Weitere Ungenauigkeiten folgen durch die Pendelbewegungen der Zeiger an den Messgeräten durch Spannungsschwankungen oder Fehlfunktionen der Messgeräte, fehlender Eichung des LC-Genetators und verbogene Kontakte an den Kabeln, bzw. ausgeschlagenen Ausgängen am LC-Generator, wodurch es zu Ausfällen bei der Messung kam. Diese Probleme wurden instantan behoben. Dies wurde dadurch beungünstigt, dass der Schalter der Widerstände auf kleinste Bewegungen mit sichtbaren Spannungs- und Stromstärkeschwankungen reagierte. Außerdem können Schwankungen im Stromnetz vorliegen. Weitere systematische Fehler liegen in den prozentualen Fehler der Messgeräte, die bei den obigen Rechnungen berücksichtigt wurden.

Literatur

[1] Chemgapedia. *Parallelschaltung von Voltmeter*. Aufruf vom 14.11.2014. URL: `http://www.chemgapedia.de/vsengine/vlu/vsc/de/ph/14/ep/einfuehrung/elstromkreis/widerstand.vlu/Page/vsc/de/ph/14/ep/einfuehrung/elstromkreis/parallelschaltung2.vscml.html`.

[2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Experiment V301 - Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen*. 2014.

[3] Microsoft Excel. *lineare Ausgleichsrechnung*. Aufruf vom 10.11.2014. URL: `http://office.microsoft.com/de-de/excel-help/rgp-HP005209155.aspx`.

[4] Uni Magdeburg. *lineare Regression*. Aufruf vom 14.11.2014. URL: `http://www.uni-magdeburg.de/exph/mathe_gl/regression.pdf`.

Tabelle 3: Messwerte der Stromstärke I und der Klemmenspannung U_k

Stromstärke I in $[I]= A$	Klemmenspannung U_k in $[U_k]$=V
0,0840	0,07
0,0799	0,14
0,0782	0,17
0,0700	0,30
0,0626	0,43
0,0599	0,47
0,0571	0,51
0,0551	0,59
0,0510	0,61
0,0480	0,66
0,0462	0,69
0,0449	0,72
0,0418	0,77
0,0399	0,80
0,0381	0,83
0,0300	0,91
0,0279	0,99
0,0251	1,09
0,0228	1,15

Tabelle 4: Messwerte der Stromstärke I und der Klemmenspannung U_k mit Gegenspannung

Stromstärke I in $[I]= A$	Klemmenspannung U_k in $[U_k]$=V
0,0990	3,04
0,0941	2,92
0,0915	2,91
0,0909	2,90
0,0870	2,85
0,0840	2,81
0,0805	2,75
0,0761	2,69
0,0720	2,61
0,0680	2,60
0,0631	2,48
0,0605	2,44
0,0501	2,29
0,0475	2,25
0,0440	2,16
0,0400	2,11
0,0379	2,06
0,0339	2,01
0,0330	1,99

Tabelle 5: Messwerte der Stromstärke I und der Klemmenspannung U_k am Rechteckausgang

Stromstärke I in $[I]=A$	Klemmenspannung U_k in $[U_k]$=V
0,0080	0,17
0,0077	0,18
0,0075	0,20
0,0070	0,22
0,0061	0,24
0,0045	0,26
0,0055	0,30
0,0055	0,35
0,0045	0,36
0,0046	0,40
0,0043	0,43
0,0039	0,45
0,0034	0,47
0,0030	0,49
0,0026	0,51
0,0025	0,53
0,0019	0,55
0,0018	0,56

Tabelle 6: Messwerte der Stromstärke I und der Klemmenspannung U_k am Sinusausgang

Stromstärke I in $[I]= A$	Klemmenspannung U_k in $[U_k]$=V
0,00030	1,83
0,00035	1,81
0,00040	1,79
0,00045	1,75
0,00050	1,72
0,00055	1,69
0,00060	1,66
0,00065	1,64
0,00070	1,61
0,00075	1,57
0,00080	1,55
0,00085	1,52
0,00090	1,49
0,00095	1,45
0,00100	1,43
0,00105	1,40
0,00110	1,38
0,00115	1,30

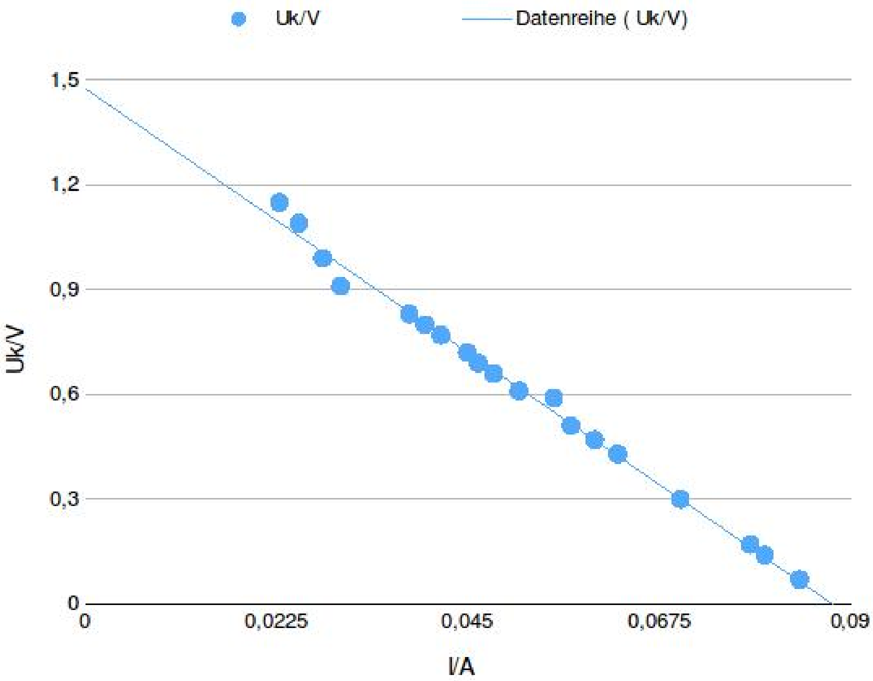


Abbildung 4: Graph von 3: Klemmenspannung

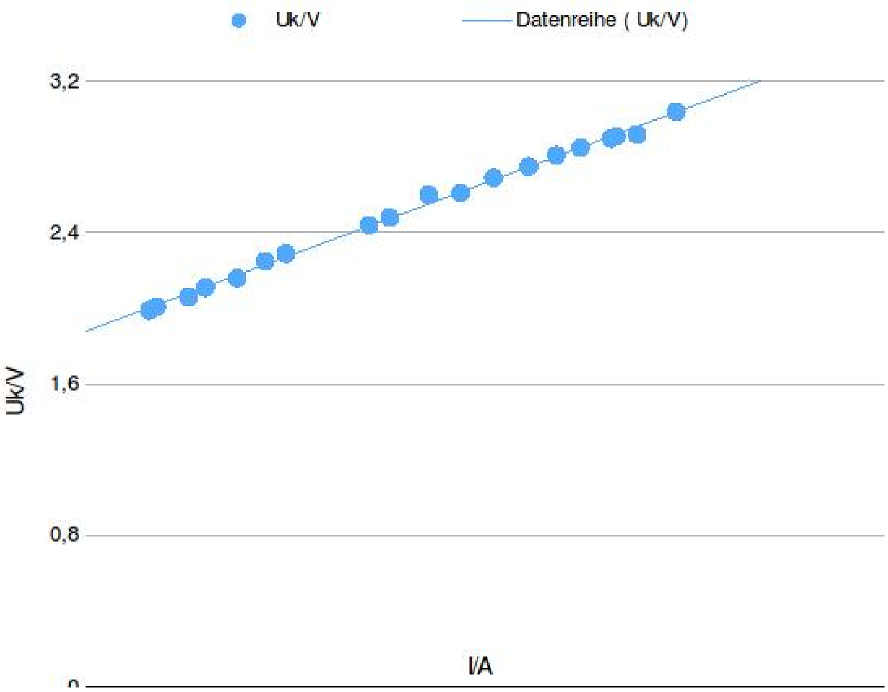


Abbildung 5: Graph von 4: Klemmenspannung mit Gegenspannung

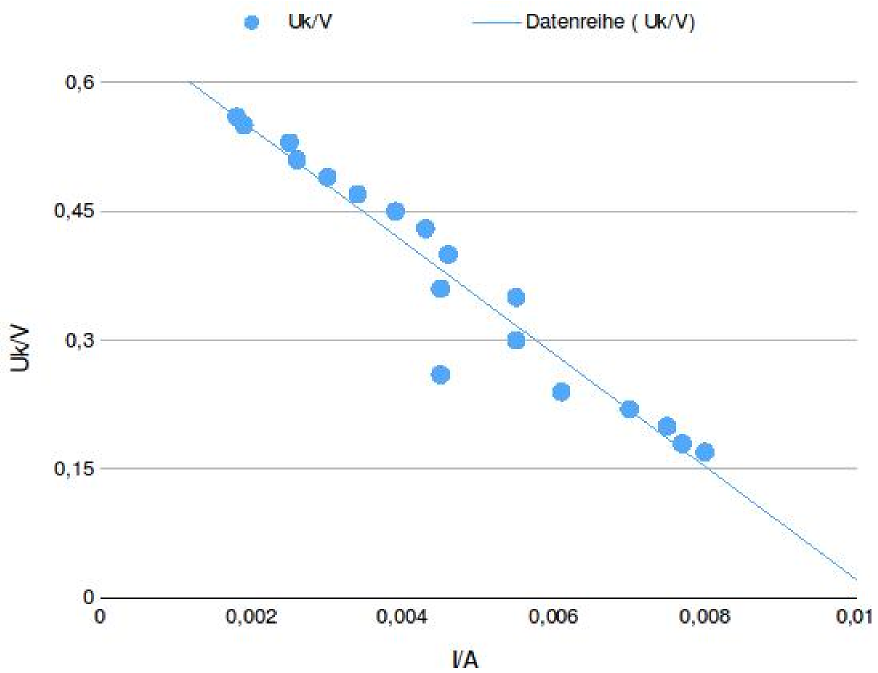


Abbildung 6: Graph von 5: Klemmenspannung am Rechteckausgang

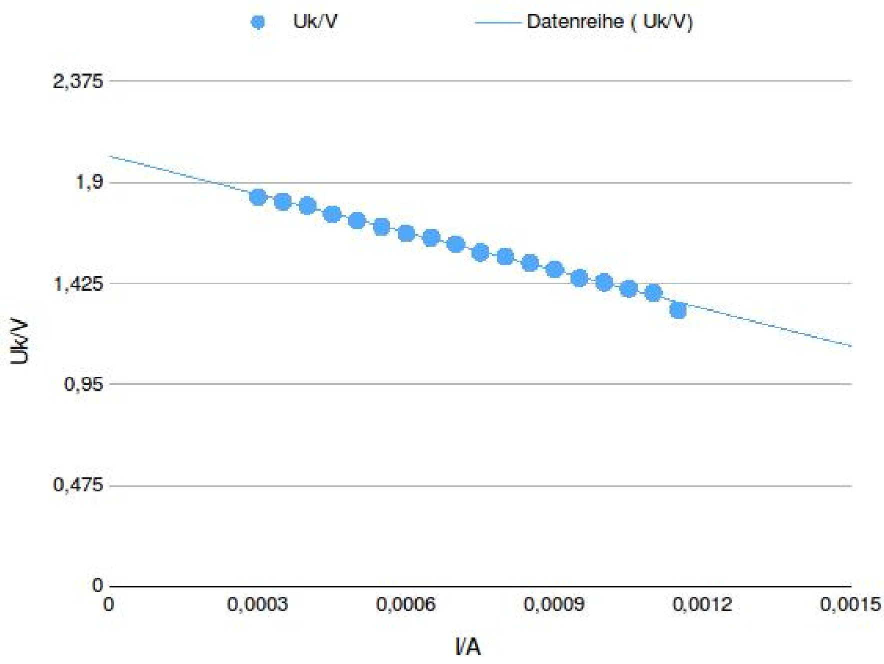


Abbildung 7: Graph von 6: Klemmenspannung am Sinusausgang