

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen verschiedene Schwingungen in ihre Fourierkomponenten zerlegt werden. Im zweiten Teil des Versuches sollen eben diese Funktionen durch ihre Fourierkomponenten wieder zusammen gesetzt werden.

2 Theorie

Periodische Funktionen sind diejenigen Funktionen, die sich nach einem bestimmten Zeitraum T oder einer bestimmten Distanz D wiederholen. Es muss also

$$f(t + T) = f(t) \quad (1)$$

$$\text{bzw. } f(x + D) = f(x) \quad (2)$$

gelten. Die beiden am häufigsten vorkommenden periodischen Funktionen sind die Cosinus- und Sinusfunktionen. Die allgemeine Form der beiden Funktionen, mit den Amplituden a und b und der jeweiligen Periodendauer T , ist:

$$f(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (3)$$

$$\text{bzw. } f(t) = b \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (4)$$

Mit ihnen ist es möglich fast alle anderen in der Natur vorkommenden, also alle stetigen, periodischen Vorgänge darzustellen. Erfüllt eine Funktion $f(t)$ diese Forderung der Periodizität, so gilt:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right), \quad (5)$$

sofern diese Reihe konvergiert. Diese Gleichung ist das Fouriersche Theorem. Die Koeffizienten a_n und b_n berechnen sich dabei nach:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad (6)$$

$$\text{und } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt. \quad (7)$$

Es lässt sich erkennen, dass nur ganzzahlige Vielfache von einer Grundfrequenz ν_1 auftreten.

Werden die zur jeweiligen Oberwelle gehörigen Amplituden gegen die Frequenz abgetragen, ergibt sich dementsprechend ein Linienspektrum, wie in Abbildung 1 zu sehen. Auch periodische aber nicht stetige Funktionen lassen sich durch eine Fourierreihe nähern. An den Stellen, an denen die Funktion springt, lässt sich ein Überspringen der Reihe beobachten. Selbst wenn n gegen ∞ wächst, bleibt die Größe des Überspringens konstant. Dies wird als Gibbsches Phänomen bezeichnet.

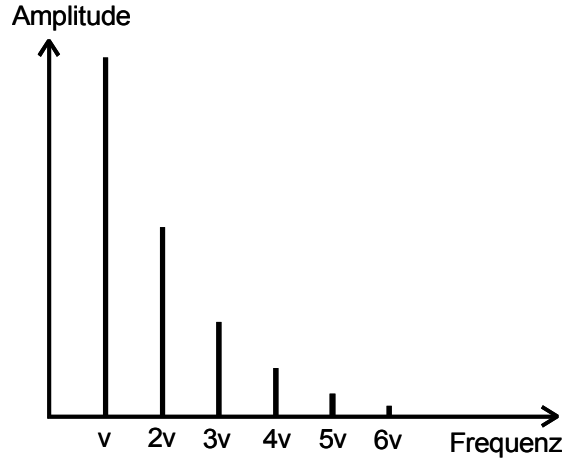


Abbildung 1: Linienspektrum einer periodischen Funktion[1, S. 271].

Mit Hilfe der Fourier-Transformation:

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\nu t} dt \quad (8)$$

lässt sich auch das gesamte Frequenzspektrum bestimmen. Bei periodischen Funktionen muss sich das oben bereits genannte Linienspektrum ergeben. Bei nichtperiodischen Funktionen ergibt sich hingegen ein kontinuierliches Spektrum. Da bei der Fourier-Analyse jedoch nicht ein unendlich langer Zeitraum betrachtet werden kann, ist jede Funktion nichtperiodisch. Es werden sich also auch Nebenmaxima ausbilden, die bei der Analyse erkannt und im weiteren Verlauf allerdings ignoriert werden müssen.

3 Fehlerrechnung

Im Folgenden werden alle Mittelwerte mit folgender Formel bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (9)$$

Der zugehörige Fehler des Mittelwertes berechnet sich mit

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (10)$$

Werden fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel benutzt, so wird der neue Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung angegeben:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \quad (11)$$

Eventuelle Ausgleichsgeraden berechnen sich über

$$y = a \cdot x + b \quad (12a)$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (12b)$$

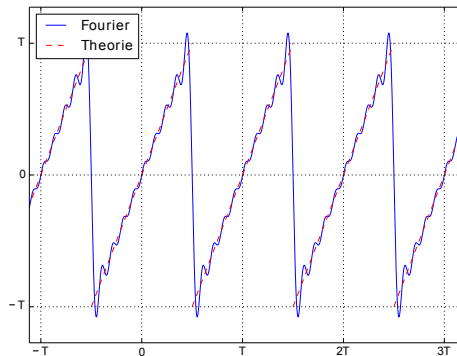
$$b = \frac{\overline{x^2 y} - \bar{x} \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (12c)$$

Die Regression sowohl von Ausgleichsgeraden als auch von anderen Polynomen, sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler, wird mit iPython 2.1.0 durchgeführt.

4 Durchführung

4.1 Vorbereitung

Zur Vorbereitung auf den Versuch wurden für drei verschiedene periodische Funktionen die jeweiligen Fourier-Koeffizienten berechnet. Dabei wurden zur Vereinfachung die gewählten Funktionen (Sägezahn, Rechteck, Dreieck) so parametrisiert, dass sie entweder gerade oder ungerade waren. Dies vereinfacht die Berechnung insofern, dass bei geraden Funktionen $b_n = 0$ und bei ungeraden Funktionen $a_n = 0$ für jeweils alle n gilt. Die berechneten Koeffizienten beziehungsweise Funktionen lauten:

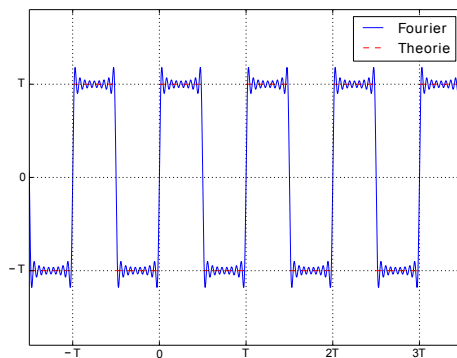


Sägezahn:

$$a_n = 0$$

$$b_n = -\frac{T}{n\pi}(-1)^n$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{T}{n\pi}(-1)^n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

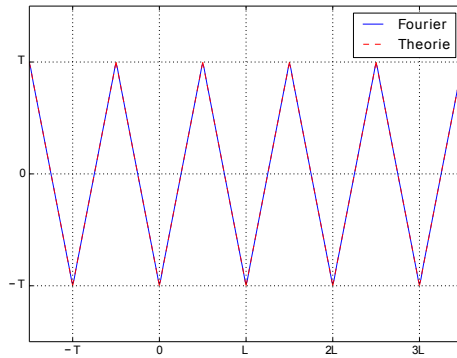


Rechteck:

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2T}{n\pi} - \frac{2T}{n\pi}(-1)^n$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4T}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{2\pi(2n-1)}{T}t\right)$$



Dreieck:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{4T}{n^2\pi^2}(-1)^n - \frac{4T}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = 0$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8T}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi(2n-1)}{T}t\right)$$

4.2 Fourier-Analyse

Für die Fourier-Analyse wird ein Funktionsgenerator an ein Oszilloskop angeschlossen. Das Oszilloskop führt automatisch die Fourier-Transformation durch. Es müssen ausreichend Perioden angezeigt werden, so dass auch genügend Peaks des Linienspektrums zu sehen sind. Von den angezeigten Peaks werden, nach Kalibrierung mit einer Sinusspannung, sowohl die Frequenz als auch die Amplitude notiert. Wie in der Theorie erwähnt, bilden sich auch Nebenmaxima aus, die nicht beachtet werden. Diese Messung wird mit den drei oben genannten Funktionen durchgeführt.

4.3 Fourier-Synthese

Zunächst werden immer zwei Ausgänge eines Oberwellengenerators an das Oszilloskop angeschlossen. Dieses wird in den X-Y-Betrieb geschaltet, um alle Ausgänge des Generators in Phase zu schalten. Dazu werden die Amplituden der einzelnen Oberwellen maximal eingestellt, um eine optimale Genauigkeit zu erlangen. Die Phasen werden dann solange variiert, bis sich Lissajous-Figuren ausbilden. Wie es sich in der Vorbereitung herausgestellt hat, fallen die Koeffizienten der Funktionen der Sägezahn- und Rechteckspannung mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{n}$ ab. Die Ausgänge des Oberwellengenerators werden nacheinander an ein Voltmeter angeschlossen und die Amplituden der einzelnen Oberwellen werden entsprechend eingestellt. Danach wird der Generator an das Oszilloskop angeschlossen und dieses wird wieder in den normal X-T-Betrieb geschaltet. Zuletzt werden die einzelnen Oberwellen aufaddiert und gegebenenfalls um 180° in der Phase verschoben, bis die angezeigte Schwingung möglichst genau eine Sägezahnspannung approximiert.

Für die Rechteckspannung werden, wie an den berechneten Koeffizienten zu sehen, nur die ungeraden Oberwellen benutzt. Die Phasen werden erneut um 180° variiert, bis die angezeigte Schwingung möglichst genau genähert ist.

Bei der Dreieckspannung müssen zunächst die Amplituden neu mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{n^2}$, analog wie zuvor, eingestellt werden. Wie bei der Rechteckspannung, werden auch hier nur die ungeraden Oberwellen genutzt. Durch eventuelle Phasenverschiebungen um erneut 180° wird die Dreieckspannung möglichst genau zusammengesetzt.

5 Auswertung

5.1 Fourier-Analyse

Die gemessenen Daten der Amplituden werden auf die Amplitude der ersten Oberwelle normiert. Diese Normierung wird dann doppeltlogarithmisch gegen die Nummer der Oberwelle aufgetragen. Als Steigung sollte sich für die Sägezahn- und Rechteckspannung -1 , für die Dreieckspannung -2 , ergeben. Bei der Dreieckspannung war es nur möglich

Tabelle 1: Gemessene Daten für die Sägezahn- und Rechteckspannung.

| Sägezahn | | | Rechteck | | |
|---------------|---------------|-------------------|---------------|---------------|-------------------|
| $\nu/10^3$ Hz | $U/10^{-3}$ V | $\frac{U_n}{U_1}$ | $\nu/10^3$ Hz | $U/10^{-3}$ V | $\frac{U_n}{U_1}$ |
| 10 | 246 | 1,00 | 10 | 492 | 1,00 |
| 20 | 122 | 0,50 | 30 | 160 | 0,33 |
| 30 | 82 | 0,33 | 50 | 92 | 0,19 |
| 40 | 62,0 | 0,25 | 70 | 64 | 0,13 |
| 50 | 50,4 | 0,20 | 90 | 48 | 0,10 |
| 60 | 41,6 | 0,17 | 110 | 40 | 0,08 |
| 70 | 36,8 | 0,15 | 130 | 37,0 | 0,08 |
| 80 | 33,2 | 0,13 | 150 | 30,8 | 0,06 |
| 90 | 30,4 | 0,12 | 170 | 24,0 | 0,05 |

Tabelle 2: Gemessene Daten für die Dreieckspannung.

| Dreieck | | |
|---------------|---------------|-------------------|
| $\nu/10^3$ Hz | $U/10^{-3}$ V | $\frac{U_n}{U_1}$ |
| 10 | 308 | 1,000 |
| 30 | 33,2 | 0,108 |
| 50 | 12,2 | 0,040 |
| 70 | 5,28 | 0,017 |
| 90 | 3,12 | 0,010 |

für die ersten fünf von Null verschiedenen Maxima die Werte zu entnehmen. Dies liegt daran, dass diese Funktion sich bereits mit sehr wenigen Koeffizienten sehr genau approximieren lässt und diese auch mit $\frac{1}{n^2}$ abfallen. Dadurch war bereits der Wert bei der Frequenz $110 \cdot 10^3$ Hz nicht mehr verlässlich ablesbar. Die Steigungen a der Graphen in

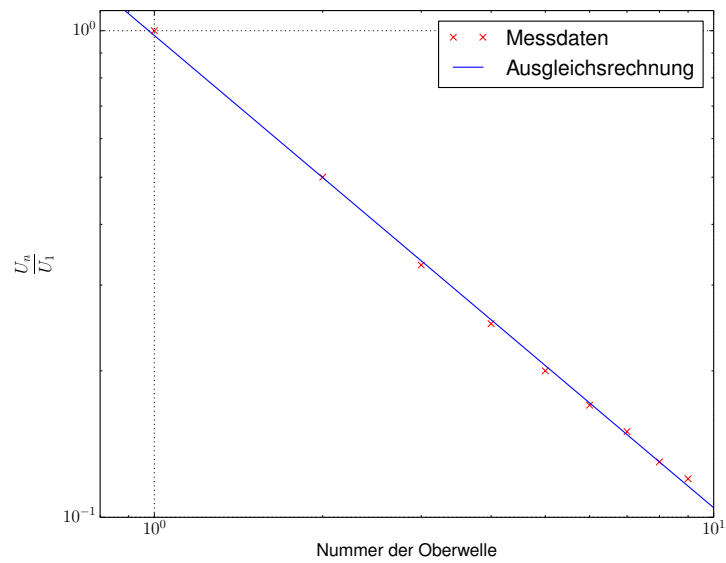


Abbildung 2: Überprüfung des Abfalls der Koeffizienten bei der Sägezahnspannung.

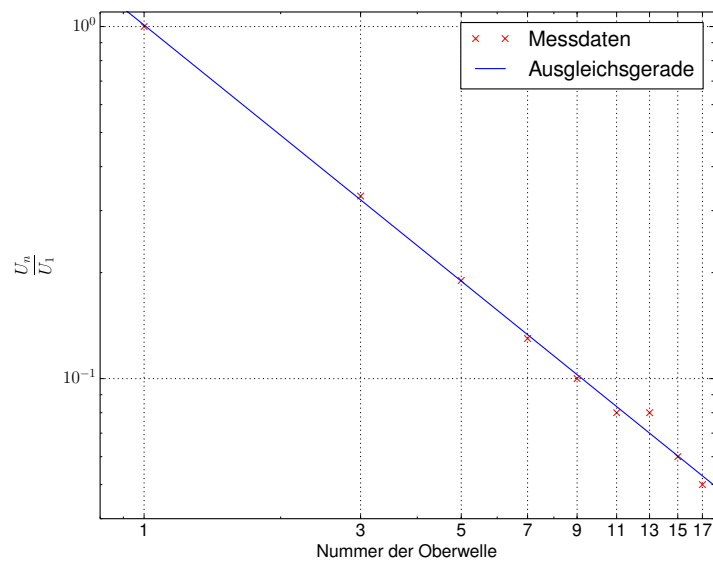


Abbildung 3: Überprüfung des Abfalls der Koeffizienten bei der Rechteckspannung.

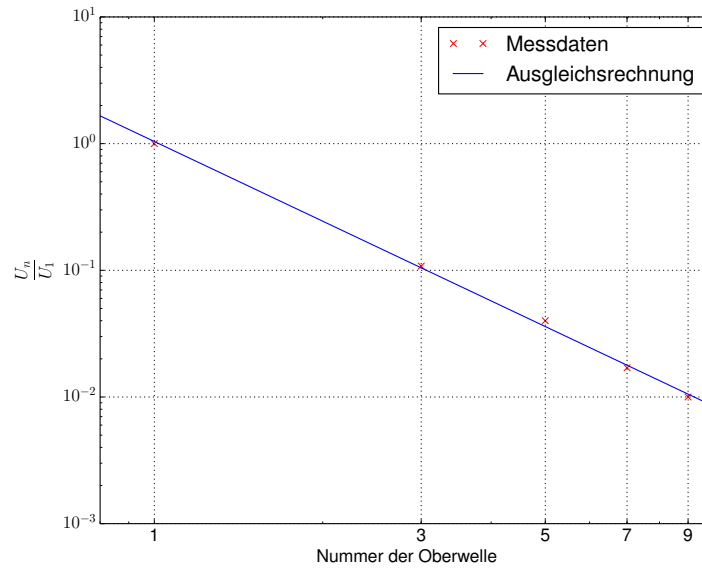


Abbildung 4: Überprüfung des Abfalls der Koeffizienten bei der Dreieckspannung.

den Abbildungen 2, 3 und 4 liegen sehr nah an den erwarteten Werten:

Sägezahn:

$$a_{\text{Messdaten}} = -0,971 \pm 0,011$$

$$a_{\text{Theorie}} = -1$$

$$\text{Abweichung: } \left| \frac{a_{\text{Theorie}} - a_{\text{Messdaten}}}{a_{\text{Theorie}}} \right| = 2,9 \%$$

Rechteck:

$$a_{\text{Messdaten}} = -1,04 \pm 0,02$$

$$a_{\text{Theorie}} = -1$$

Abweichung: 4,1 %

Dreieck:

$$a_{\text{Messdaten}} = -2,09 \pm 0,05$$

$$a_{\text{Theorie}} = -2$$

Abweichung: 4,5 %.

5.2 Fourier-Synthese

In den Abbildungen 5, 6 und 7 sind die synthetisierten Funktionen zu finden. Die dafür eingestellten Spannungsamplituden der einzelnen Oberwellen befinden sich in den Tabellen 3 und 4.

Die synthetisierten Funktionen sind, unter Anbetracht der wenigen Oberwellen, relativ gut dargestellt. Auffällig sind lediglich die hohen Sprünge bei den Unstetigkeitsstellen

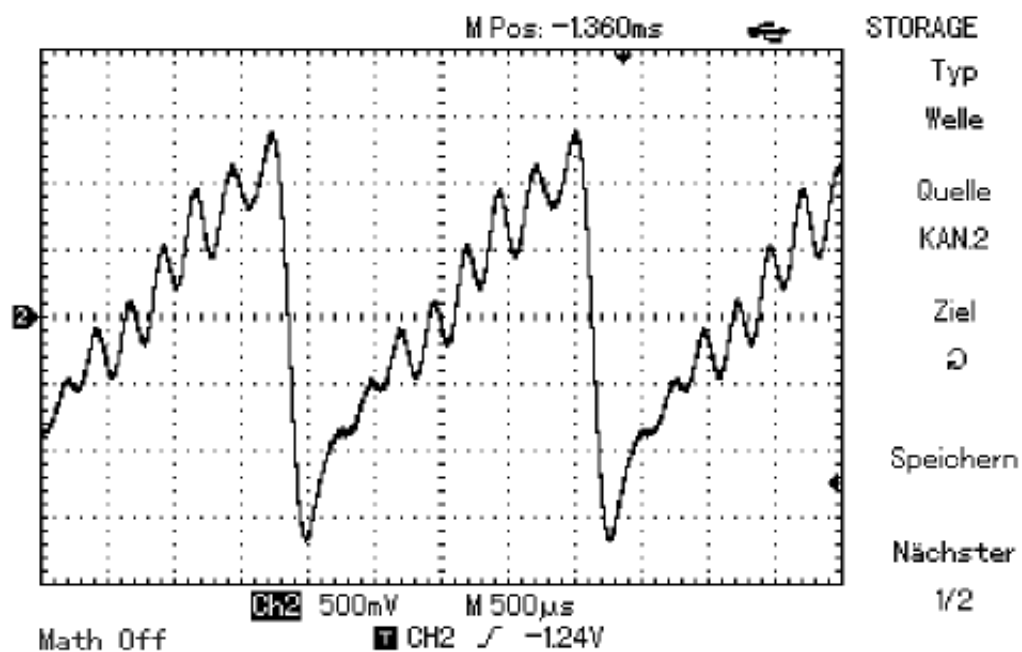


Abbildung 5: Synthetisierte Sägezahnspannung.

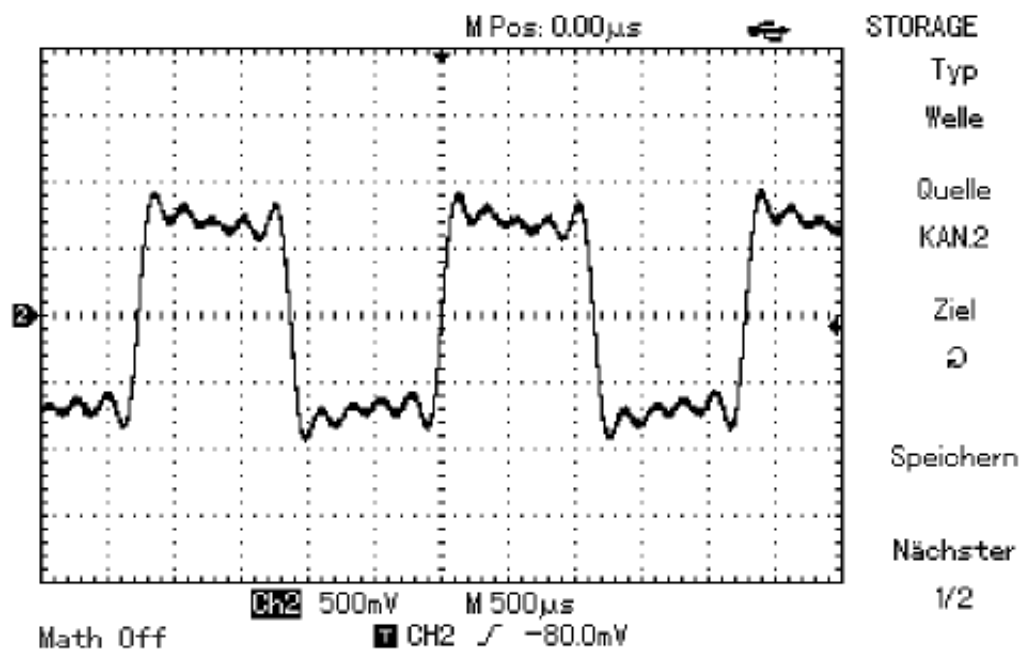


Abbildung 6: Synthetisierte Rechteckspannung.

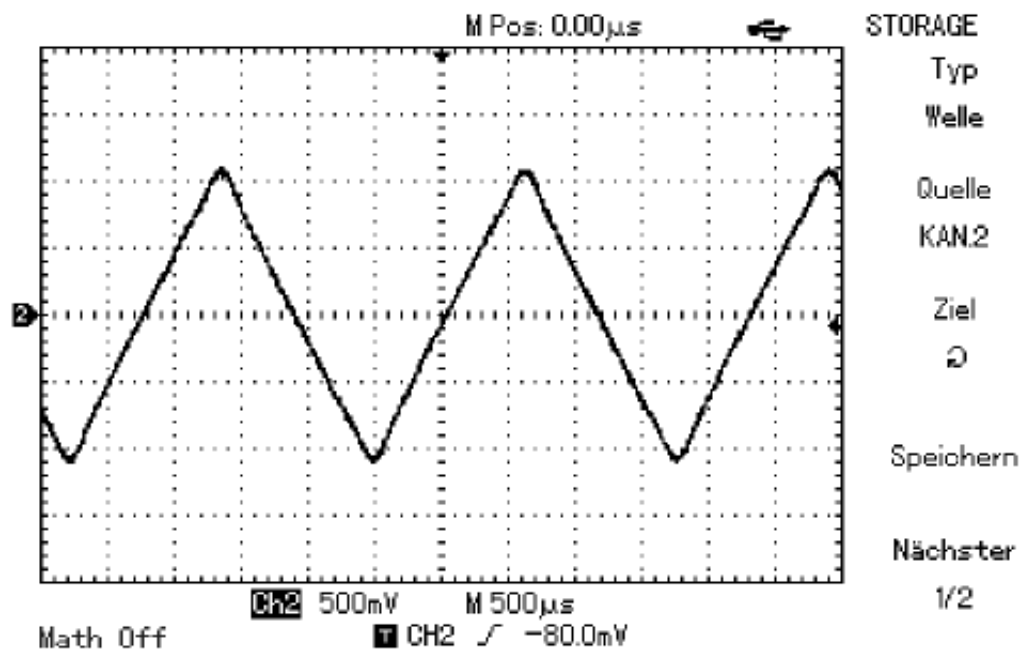


Abbildung 7: Synthetisierte Dreieckspannung.

Tabelle 3: Eingestellte Spannungsamplituden für die Sägezahn- und Rechteckspannung.

| Nummer der Oberwelle | $U_{\text{Theorie}} / \text{V}$ | $U_{\text{eingestellt}} / \text{V}$ | Abweichung / % |
|----------------------|---------------------------------|-------------------------------------|----------------|
| 1 | 0,6531 | 0,6531 | 0,00 |
| 2 | 0,3266 | 0,3264 | 0,06 |
| 3 | 0,2177 | 0,2174 | 0,14 |
| 4 | 0,1632 | 0,1634 | 0,12 |
| 5 | 0,1306 | 0,1307 | 0,08 |
| 6 | 0,1088 | 0,1087 | 0,09 |
| 7 | 0,0933 | 0,0934 | 0,11 |
| 8 | 0,0816 | 0,0813 | 0,37 |
| 9 | 0,0725 | 0,0728 | 0,41 |
| 10 | 0,0653 | 0,0655 | 0,31 |

Tabelle 4: Eingestellte Spannungsamplituden für die Dreiecksspannung.

| Nummer der Oberwelle | $U_{\text{Theorie}} / \text{V}$ | $U_{\text{eingestellt}} / \text{V}$ | Abweichung / % |
|----------------------|---------------------------------|-------------------------------------|----------------|
| 1 | 0,6519 | 0,6519 | 0,00 |
| 2 | 0,1630 | 0,1631 | 0,06 |
| 3 | 0,0724 | 0,0722 | 0,28 |
| 4 | 0,0407 | 0,0407 | 0,00 |
| 5 | 0,0260 | 0,0261 | 0,38 |
| 6 | 0,0181 | 0,0183 | 1,10 |
| 7 | 0,0133 | 0,0132 | 0,75 |
| 8 | 0,0101 | 0,0104 | 2,97 |
| 9 | 0,0080 | 0,0080 | 0,00 |
| 10 | 0,0065 | 0,0063 | 3,08 |

der Sägezahn- und Rechtecksspannung. Damit wurde das in der Theorie beschriebene Gibbsche Phänomen experimentell bestätigt.

6 Diskussion

Bei der Analyse sind nur sehr kleine Abweichungen von maximal 4,5 % von der Theorie aufgetreten. Dies lässt auf eine hohe Qualität der Messgeräte schließen, was allerdings auch zu erwarten war, da nur ein digitales Oszilloskop und ein Funktionsgenerator an der Messung beteiligt waren.

Auch bei der Synthese ließen sich gute Ergebnisse erzielen. Dies liegt daran, dass sich sowohl die Amplituden als auch die Phasen sehr gut einstellen ließen. Auffällig ist, dass die Dreiecksspannung am besten synthetisiert wurde. Neben den fehlenden Unstetigkeitsstellen liegt dies auch an den mit $\frac{1}{n^2}$ abfallenden Koeffizienten, da dadurch weitere Oberwellen keine großen Auswirkungen mehr hätten.

Als eine mögliche Fehlerquelle ist trotzdem der Oberwellengenerator zu nennen, da ein langsames Abfallen der Amplituden während des Betriebes zu erkennen war. Dies scheint aber gleichmäßig an allen Oberwellen geschehen zu sein, da keine damit verbundenen Abweichungen zu bemerken waren.

Quellenverzeichnis

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 351, Fourier-Analyse und Synthese*. 12. Dez. 2014. eprint: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf>.