

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	1
2 Theorie	1
2.1 Gedämpfte Schwingungen	1
2.2 Erzwungene Schwingungen	3
3 Aufbau und Durchführung	5
4 Auswertung	7
4.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude(Aufgabe a)	7
4.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstands (Aufgabe b)	10
4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung (Aufgabe c)	11
4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung (Aufgabe d)	13
5 Diskussion	14

1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es den Dämpfungswiderstand zu ermitteln. Dies erfolgt über die zeitabhängige Amplitude eines gedämpften Schwingkreises und über den aperiodischen Grenzfall. Des Weiteren soll die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Kondensator- und Erregerspannung ermittelt werden.

2 Theorie

2.1 Gedämpfte Schwingungen

In einem Stromkreis mit einem Kondensator der Kapazität C und einer Spule der Induktivität L kann es zu ungedämpften Schwingungen des Stroms I, der Spannung U und der Energie kommen. Wird ein Widerstand R in den Stromkreis eingesetzt, werden aus den ungedämpften Schwingungen gedämpfte Schwingungen. Der Widerstand entfernt fortlaufend mit der Zeit Energie aus dem Stromkreis und die Amplituden der Schwingungen nehmen ab, bis sie nach einer gewissen Zeit gänzlich abgeklungen sind. Das zweite Kirchhoffsche Gesetz ergibt für diesen Schaltkreis folgende Gleichung:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0. \quad (1)$$

Mit den Beziehungen

$$U_R(t) = R \cdot I(t),$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C},$$

$$U_L(t) = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

wird aus Formel (1):

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = 0. \quad (2)$$

Dabei ist Q die Ladung.

Die DGL (2) wird nun zeitlich abgeleitet und man erhält die DGL der gedämpften Schwingung:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (3)$$

Die Lösung der DGL (3) lautet:

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (U_1 e^{i2\pi\nu t} + U_2 e^{-i2\pi\nu t}) \quad (4)$$

mit den Substitutionen

$$\mu = \frac{R}{4\pi L} \Leftrightarrow R_{eff} = 4\pi L \mu \quad (5)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Für $1/LC > R^2/4L^2$ ist reell und aus Formel (4) ergibt sich:

$$I(t) = A_0 \cdot e^{-2\pi\mu t} \cdot \cos(2\pi\nu t + n).$$

Dazu wird die Abklingdauer

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R} \quad (6)$$

definiert, nach der die Amplitude auf den $1/e$ -ten Teil abgesunken ist.

Für $1/LC < R^2/4L^2$ ist komplexwertig und aus Formel (4) ergibt sich:

$$I(t) \propto e^{-(2\pi\mu-i2\pi\nu)t}.$$

Der aperiodische Grenzfall ist ein wichtiger Spezialfall. Dabei gilt

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}^2}{4L^2} \Leftrightarrow R_{ap} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7)$$

mit $\nu = 0$.

2.2 Erzwungene Schwingungen

Der zuvor beschriebene Stromkreis wird nun um eine Erregerspannung

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad (8)$$

erweitert. Dabei ist die Kreisfrequenz oder auch Winkelgeschwindigkeit und U_0 ist die Amplitude der Erregerspannung.

Die DGL (2) wird nun zu

$$LC \cdot \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \cdot \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{i\omega t}. \quad (9)$$

Die Lösung der DGL (9) lautet:

$$U(t) = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}.$$

Die Phasenverschiebung kann dann durch

$$\varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{-\omega RC}{1 - \omega^2 LC} \right) \quad (10)$$

beschrieben werden.

Die Kondensatorspannung U_C in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit wird auch Resonanzkurve genannt und kann wie folgt angegeben werden:

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Unter Beachtung der Beziehung $\omega = 2\pi\nu$ lautet die Resonanzfrequenz ν_{res} dann

$$\nu_{res} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (11)$$

Bei schwachen Dämpfungen gibt es eine auffällige Resonanzüberhöhung, die bis zur Resonanzkatastrophe reichen kann. Die Resonanzüberhöhung q wird durch die Halbwertsbreite der Resonanzkurve charakterisiert. Die Halbwertsbreite b ist hier der Abstand der Werte an denen die Funktion auf den $1/\sqrt{2}$ -ten Teil des Maximums gewachsen bzw. abgefallen ist:

$$b = \omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L}. \quad (12)$$

Die Resonanzüberhöhung wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}. \quad (13)$$

Aus Gleichung (10) kann für eine Verschiebung von $\pi/4$ und $3\pi/4$ folgende Beziehung entnommen werden:

$$\nu_{1,2} = \pm \frac{R}{4\pi L} + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}. \quad (14)$$

3 Aufbau und Durchführung

Für spätere Rechnungen werden die bauteilspezifischen Werte notiert.

$$R = (48,1 \pm 0,1) \Omega$$

$$C = (2,098 \pm 0,006) \text{ nF}$$

$$L = (10,00 \pm 0,03) \text{ mH}$$

Mit der in Abbildung 1 dargestellten Schaltung wird die Amplitudenabnahme eines RCL-Schwingkreises ermittelt.

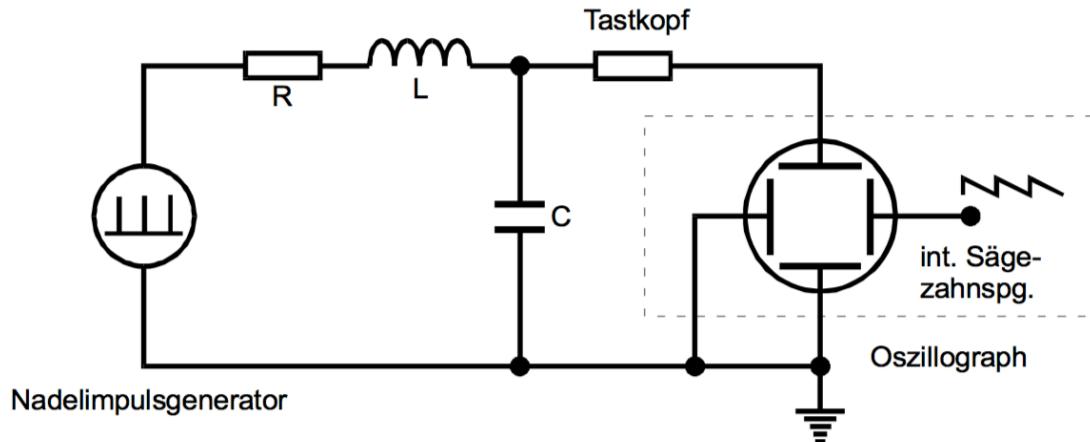


Abbildung 1: Schaltung zur Untersuchung der Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung [1]

Daraus lässt sich die Abklingdauer T_{ex} und der Dämpfungswiderstand R_{eff} bestimmen. Am Oszilloskop wird die Spannung gegen die Zeit aufgetragen und Wertepaare entnommen. Im angefertigten Thermodruck wird die einhüllende e-Funktion hinzugefügt.

Nun wird der Widerstand für den aperiodischen Grenzfall ermittelt. Dazu wird der Widerstand durch ein Potentiometer ersetzt. Der Widerstand wird nun so variiert das sich ein Graph ergibt, der eben keine Überschwingungen besitzt. Der zugehörige Wert für R_{ap} wird notiert. Mit dem Versuchsaufbau aus der Abbildung 2 wird die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung untersucht.

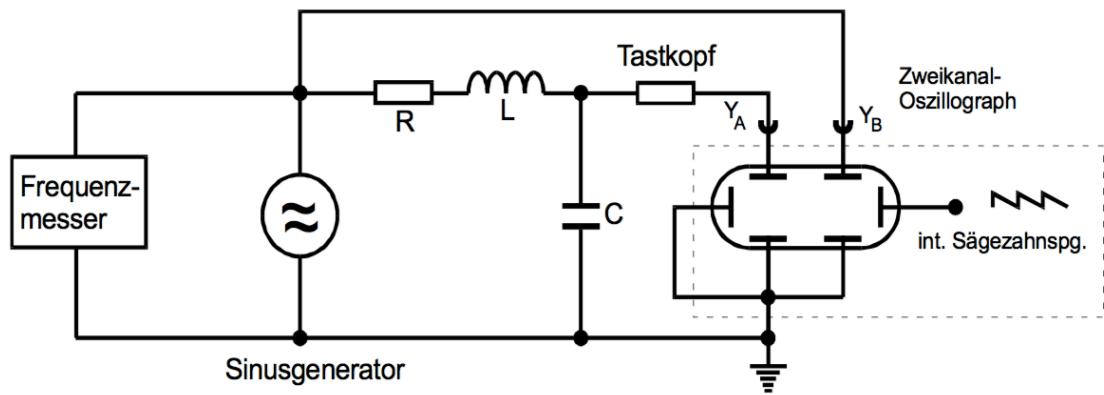


Abbildung 2: Schaltung zur Messung der Frequenzabhängigkeit der Phase Zwischen Erreger- und Kondensatorspannung bei einem RLC-Kreis [1]

Als erstes wird die Erregerspannung U_0 ermittelt. Anschließend wird am Sinusgenerator die Frequenz verändert und die dazu gehörige Spannung gemessen.

Im letzten Versuchsteil wird in Abhängigkeit von der Frequenz die Phasenverschiebung zwischen der Kondensatorspannung U_c und der Erregerspannung U_0 gemessen. Wie in der Abbildung 3 zu sehen werden die Werte für a und b gemessen.

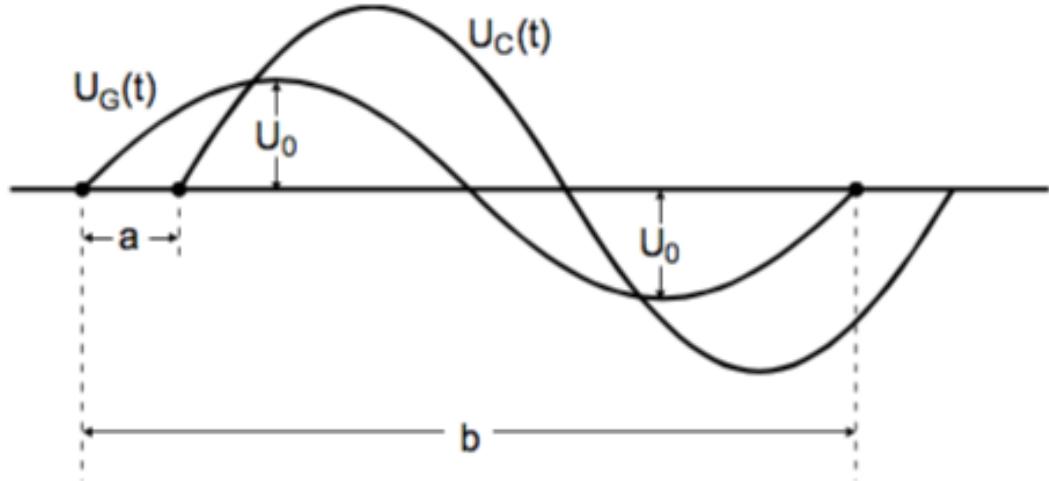


Abbildung 3: Phasenverschiebung [2]

4 Auswertung

4.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude(Aufgabe a)

Der Thermo druck mit der eingezeichneten einhüllenden Funktion der abklingenden Amplituden ist in Abbildung 4 zu sehen. Die gemessenen Minima und Maxima sind in Tabelle 1 eingetragen. Für die Ausgleichsrechnung werden die Beträge der Messwerte

Tabelle 1: Messdaten: Minima und Maxima der Amplitude

U/V	t/10 ⁻⁶ s	U/V	t/10 ⁻⁶ s
-17,2	-12	-8	108
14,4	8	8	122
-14,4	22	-7,2	138
13,2	36	6,8	152
-12	50	-6	166
10,8	64	6	180
-10,4	80	-5,2	196
8,8	94	-	-

verwendet. Die exponentielle Ausgleichsrechnung in Abbildung 5 mit der Funktion

$$A = A_0 \cdot e^{-2\pi\mu t}$$

mittels Python ergibt

$$A_0 = (15,845 \pm 0,038) \text{ V}$$
$$\mu = (910,581 \pm 672,139) \frac{1}{\text{s}}$$

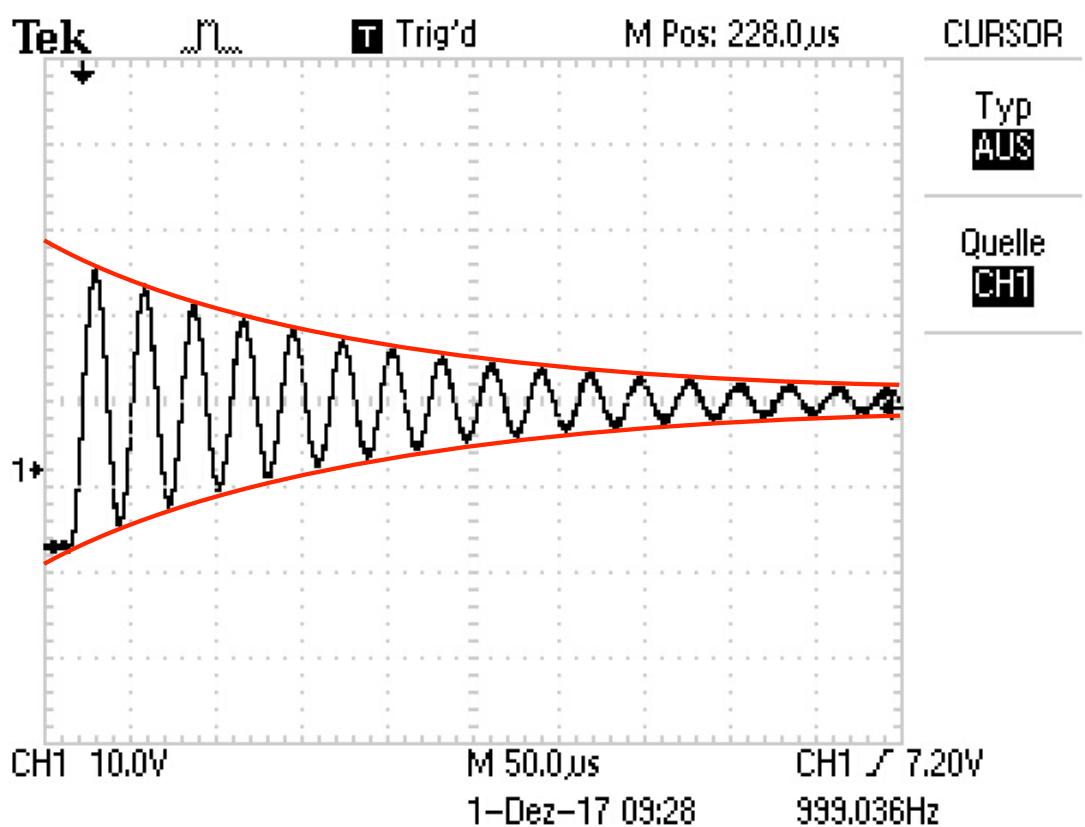


Abbildung 4: Thermodruck mit der einhüllenden Funktion

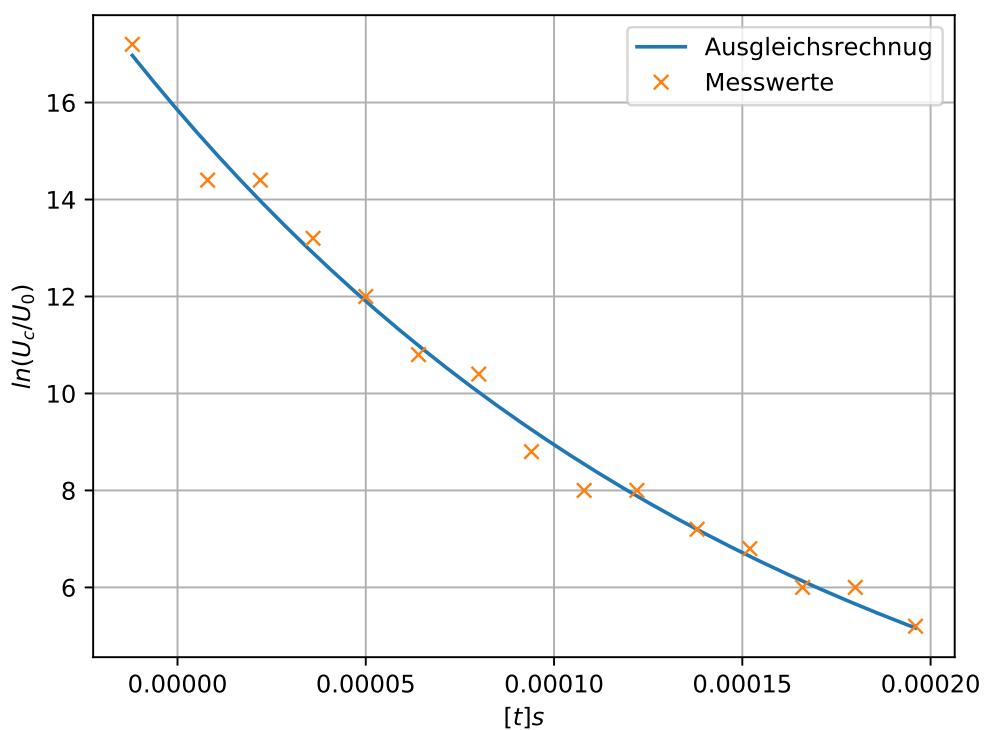


Abbildung 5: Exponentielle Regression der Amplitude

Mit Formel (5) wird der effektive Widerstand ermittelt. Der Fehler ergibt sich über eine Gauß'sche Fehlerfortpflanzung.

$$\Delta R_{eff} = \sqrt{\left(\frac{dR_{eff}}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{dR_{eff}}{d\mu}\right)^2 \cdot (\Delta \mu)^2}$$

Damit ist der experimentelle effektive Dämpfungswiderstand

$$R_{eff} = (115,686 \pm 85,393) \Omega.$$

Der theoretische Wert des effektiven Dämpfungswiderstands kann nicht genau bestimmt werden, da der Innenwiderstand des Oszilloskops nicht bekannt ist. Die Abklingdauer wird über Formel (6) berechnet. Der zugehörige Fehler wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung errechnet:

$$\Delta T_{ex,ex} = \sqrt{\left(\frac{dT_{ex}}{d\mu}\right)^2 \cdot (\Delta \mu)^2}$$

Somit wird die experimentelle Abklingdauer als

$$T_{ex,ex} = (0,000\,17 \pm 0,000\,13) \text{ s}$$

bestimmt. Der theoretische Wert der Abklingdauer errechnet sich über Formel (6). Der Fehler errechnet sich über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta T_{ex,theo} = \sqrt{\left(\frac{dT_{ex}}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{dT_{ex}}{dR}\right)^2 \cdot (\Delta R)^2}$$

Der theoretische Wert der Abklingdauer beläuft sich somit zu

$$T_{ex,theo} = (0,000\,420\,4 \pm 0,000\,001\,5) \cdot 10^{-7} \text{ s.}$$

4.2 Bestimmung des Dämpfungswiderstands (Aufgabe b)

Der Dämpfungswiderstand bei dem aperiodischen Grenzfall wird als

$$R_{ap,ex} = 3470 \Omega$$

gemessen. Der theoretische Wert des Dämpfungswiderstandes wird mit Formel (7) errechnet. Der Fehler berechnet sich über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta R_{ap,theo} = \sqrt{\left(\frac{dR_{ap}}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{dR_{ap}}{dC}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2}$$

So ergibt sich der theoretische Dämpfungswiderstand

$$R_{ap,theo} = (4390,387 \pm 9,047) \Omega.$$

Tabelle 2: Messdaten: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

U_C/V	$\frac{U_C}{U}$	ν/Hz	U_C/V	$\frac{U_C}{U}$	ν/Hz
10	1,25	15000	78	9,75	36000
12	1,5	20000	52	6,5	37000
16,8	2,1	25000	36,8	4,6	38000
32	4	30000	28,8	3,6	39000
42	5,25	31000	23,2	2,9	40000
54	6,75	32000	11,2	1,4	45000
82	10,25	33000	7	0,875	50000
138	17,25	34000	5	0,625	55000
130	16,25	35000	3,6	0,45	60000

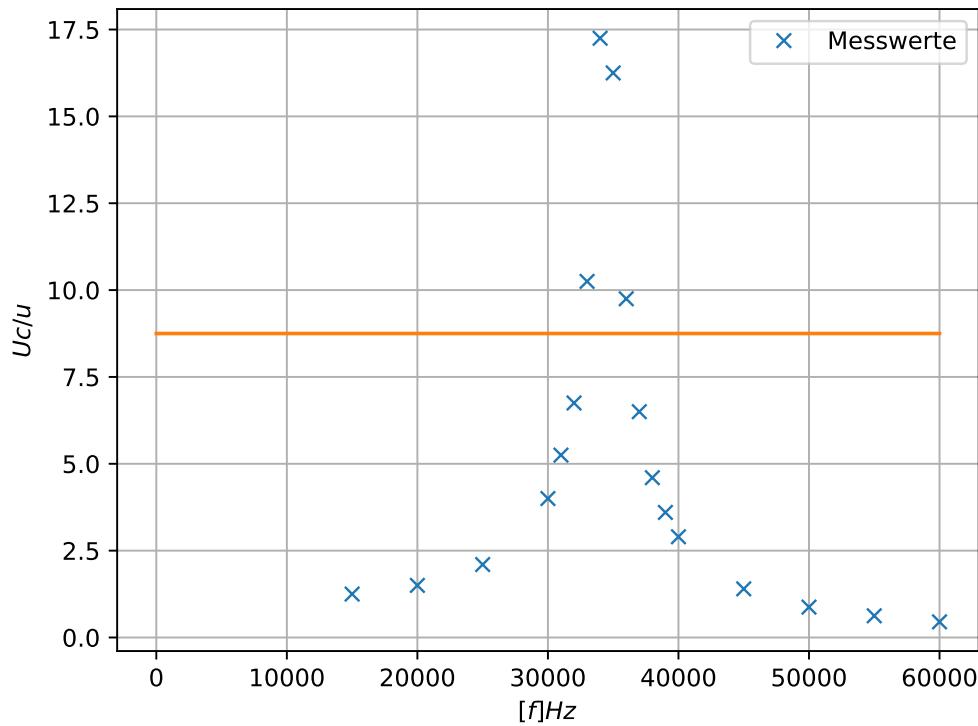


Abbildung 6: Resonanzkurve

4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung (Aufgabe c)

Die gemessene Kondensatorspannung und die Frequenz sind in Tabelle 2 notiert.
Die gemessene Erregerspannung U_0 beträgt dabei $U_0 = 84V$. U_C/U_0 wird in Abbildung

?? gegen die Frequenz aufgetragen. Die experimentelle Resonanzüberhöhung wird aus der Abbildung als

$$q_{ex} = 17,5$$

abgelesen. Der theoretische Wert der Resonanzüberhöhung berechnet sich über Formel (13). Der Fehler wird über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\Delta q_{theo} = \sqrt{\left(\frac{dq}{dR}\right)^2 \cdot (\Delta R)^2 + \left(\frac{dq}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \left(\frac{dq}{dC}\right)^2 \cdot (\Delta C)^2}$$

Die Resonanzüberhöhung ergibt sich zu

$$q_{theo} = (45,638 \pm 0,134)$$

Der experimentelle Wert der Halbwertsbreite b wird aus der Abbildung als

$$b_{ex} = \omega_+ - \omega_- = 36\,428,571 \frac{1}{s}$$

abgelesen. Die theoretische Halbwertsbreite wird durch die Formel (12) errechnet. Der Fehler wird über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung ermittelt:

$$\Delta b_{theo} = \sqrt{\left(\frac{db}{dR}\right)^2 \cdot (\Delta R)^2 + \left(\frac{db}{dL}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2}.$$

Somit ist der theoretische Wert der Halbwertsbreite

$$b_{theo} = (47\,576,66 \pm 172,34) \frac{1}{s}$$

4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung (Aufgabe d)

In der Tabelle 3 werden alle wichtigen Messgrößen zur bestimmung von der Resonanzfrequenz ν_{res} aufgeführt. Desweiteren lässt sich ν_1 und ν_2 für die Phase $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ bestimmen. In der Graphik 7 wird die Phase gegen die Frequenz aufgetragen. Mit der Formel (11) wird ν_{res} bestimmt. ν_1 und ν_2 werden nach Formel (14) berechnet und mir den abgelesenen werten verglichen.

$\nu_{res,exp} =$	$34 \cdot 10^3 \text{ Hz}$
$\nu_{res,theo} =$	$34,1 \cdot 10^3 \text{ Hz}$
$\nu_{1,exp} =$	$36,5 \cdot 10^3 \text{ Hz}$
$\nu_{1,theo} =$	$(34,36 \pm 5,24) \cdot 10^3 \text{ Hz}$
$\nu_{2,exp} =$	$32,50 \cdot 10^3 \text{ Hz}$
$\nu_{2,theo} =$	$(33,88 \pm 5,02) \cdot 10^3 \text{ Hz}$

Tabelle 3: Messdaten: Frequenzabhängigkeit der Phase

f/10 ³ Hz	a/10 ⁶ s	ϕ /rad	f/10 ³ Hz	a/10 ⁶ s	ϕ /rad
15000	0	0,0	36000	12,8	2,8723
20000	0	0,0	37000	13,2	3,14169
25000	0	0,0	38000	13,6	3,2368
30000	0,8	0,1514	39000	16,4	4,0252
31000	1,6	0,3103	40000	16,4	4,2231
32000	1,6	0,3222	45000	13,6	3,8841
33000	2	0,4189	50000	10,4	3,2673
34000	4	0,8607	55000	9,6	3,2782
35000	10,8	2,3562	60000	9,2	3,4408

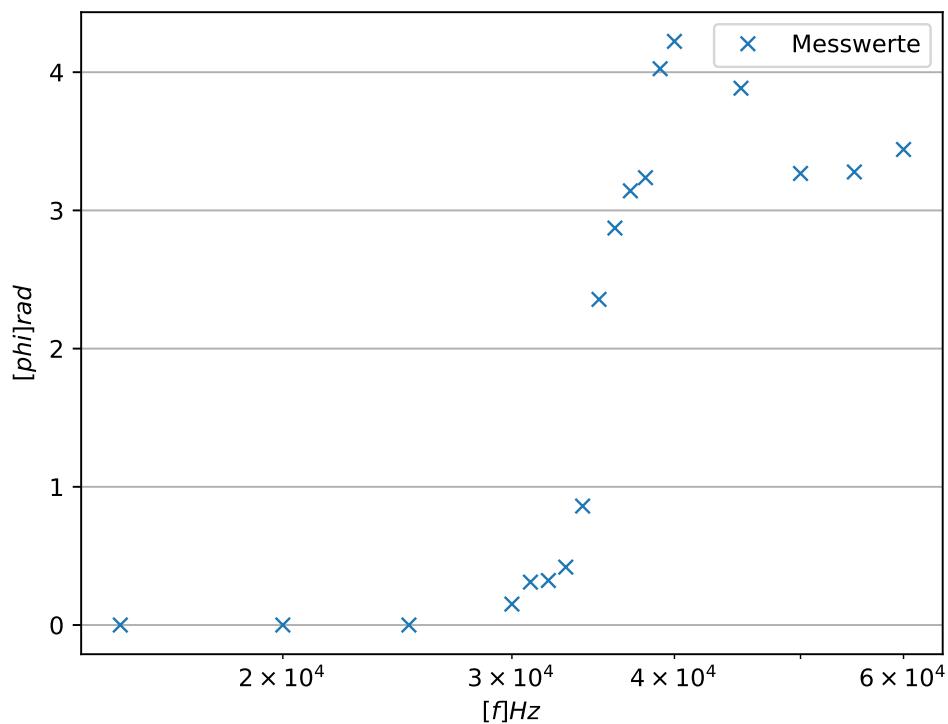


Abbildung 7: Phasenverschiebung

5 Diskussion

Initial ist auffällig, dass die theoretischen Werte generell größer als die experimentellen Werte sind.

Der experimentelle Wert des effektiven Dämpfungswiderstands R_{eff} kann nicht gut verglichen werden, da kein genauer theoretischer Wert gegeben ist. Es kann aber davon ausgegangen werden, dass zu dem Widerstand R ein Innenwiderstand des Oszilloskops und ein Innenwiderstand des Generators hinzukommt.

Der theoretische Wert der Abklingdauer T_{ex} ist 140,51% größer als der experimentell gemessene Wert.

Der theoretische Dämpfungswiderstand R_{ap} ist 26,52% größer als der gemessene Wert. Die theoretische Resonanzüberhöhung q ist 160,78% größer als der Wert aus der Messung.

Der theoretische Wert der Halbwertsbreite b ist 30,6% größer als der experimentelle.

Die theoretische Resonanzfrequenz ν_{res} ist 0,29% größer als der gemessene Wert der Resonanzfrequenz.

Der Wert der Frequenz ν_1 ist theoretisch errechnet 4,25% größer als der gemessene Wert.

Der theoretische Wert für ν_2 ist 6,23% größer als der aus der Messung abgelesene Wert. Die Abweichungen lassen sich unter anderem damit erklären, dass die Innenwiderstände der Geräte nicht beachtet wurden. Da alle theoretischen Ergebnisse direkt oder indirekt davon betroffen sind, zieht sich die Ungenauigkeit durch alle theoretischen Werte. Außerdem können systematische Ablesefehler mit trotz Nutzung der Cursorfunktion des Oszilloskops nicht ausgeschlossen werden.

Dennoch entsprechen die Verläufe der Messkurven den erwarteten Kurven.

Literatur

- [1] TU Dortmund. In: *Versuchsanleitung V354*.
- [2] TU Dortmund. In: *Versuchsanleitung V353*.

V354 gedämpfte und erzwungene Schwingungen

$$L = 10,11 \pm 0,03 \text{ mH} \quad [10^{-6} \text{ H}]$$

$$C = 2,098 \pm 0,006 \text{ nF} \quad [10^{-9} \text{ F}]$$

$$R_1 = 48,1 \pm 0,1 \Omega$$

$$R_2 = 509,5 \pm 0,5 \Omega$$



Nessreihe a Zeitabhängigkeit der Amplitude $f=100\text{Hz}$

#	Amplitude A	Zeit $\cdot 10^{-6}\text{s}$	$R_1 = 48,1 \pm 0,1 \Omega$
1	8,000V	-3,20V	-12 μs
2	8,980V	2,44V	8 μs
3	8,920V	-6,40V	22 μs
4	8,900V	2,12V	36,0 μs
5		-4,00V	50 μs
6		18,8V	64 μs
7		-2,40V	80 μs
8		16,8V	94 μs
9		0,0V	108 μs
10		16,0V	122 μs
11	0,8000V		138 μs
12	0,7998V	14,8V	152 μs
13	2V		166 μs
14	14V		180 μs
15	2,8V		196 μs

(läuft gegen 8V) \rightarrow Nulllinie

Abbildung 8: Originale Messdaten

Messreihe b Dämpfungswiderstand

$R = 3,47 \text{ k}\Omega$ | $f = 100\text{Hz}$

7

Messreihe c Frequenzabhängigkeit der phasen Serie resonanzkreis

U_c / kV $f / \text{kHz} = 10^3 \text{Hz}$

1	10,8	15
2	12,8	20
3	16,18	25
4	32	30
5	130	35
6	23,2	340
7	11,2	45
8	7,00	50
9	5,00	55
10	3,6V	60

$$U_0 = 840 \\ 84V$$

R_1

U_c / kV $f / \text{kHz} = 10^3 \text{Hz}$

1	32	36
2	42	31
3	54	32
4	82	33
5	138	34
6	130	35
7	80	36
8	52	37
9	36,8	38
10	28,18	39
11	23,3	40

Abbildung 9: Originale Messdaten

Messreihe d		Phasenverschiebung		
R #	Uo = 84 V	a / μ s	b / μ s	f / kHz
1	0	66	15	
2	0	50	20	
3	0	39	25	
4	0,8	33,2	30	
5	1,6	32,4	31	
6	1,6	31,2	32	
7	2	30	33	
8	4	29,2	34	
9	10,8	28,8	28,8	35
10	12,8	28	28	36
11	13,2	26,4	26,4	37
12	13,6	26,4	26,4	38
13	16,4	25,6		39
14	16,4	24,4		40
15	13,6	22		45
16	10,4	20		50
17	9,6	18,4		55
18	9,2	16,8		60

Abbildung 10: Originale Messdaten