Versuch Nr. 351

Fourier-Analyse und Synthese

1. Einleitung

Periodische Vorgänge in Raum und Zeit spielen in der Physik eine entscheidende Rolle. Man denke beispielsweise an ungedämpfte Schwingungen oder an die Ausbreitung einer Welle in einem Medium. Sie lassen sich sämtlich durch Funktionen beschreiben, die die Eigenschaft

$$f(t + T) = f(t)$$

bei einem zeitlich periodischen und

$$f(x + D) = f(x)$$

bei einem räumlich periodischen Vorgang haben. Die physikalische Größe, die durch f beschrieben wird, kehrt also nach dem Zeitraum T oder nach der Distanz D wieder auf ihren Ausgangswert zurück, den sie zum Zeitpunkt t bzw. am Ort x eingenommen hatte. Man nennt T die **Periodendauer** des Vorganges.
Die beiden wichtigsten periodischen Funktionen sind die Sinus- und die Cosinusfunktion. Sie haben beide die Periode 2π und einen Wertevorrat, der von –1 bis +1 reicht. Eine zeitabhängige Sinusfunktion mit der Periodendauer T und der Amplitude a lässt sich somit darstellen als

$$f(t) = a \sin \frac{2\pi}{T} t \quad .$$

Für eine Cosinusfunktion mit der Amplitude b gilt entsprechend

$$f(t) = b \cos \frac{2\pi}{T} t \quad .$$

Die große Bedeutung dieser beiden Funktionen besteht nun darin, dass man sämtliche anderen periodischen Vorgänge in der Natur (bis auf ganz bestimmte Ausnahmen) mit Hilfe dieser beiden Funktionen beschreiben kann. Das ist eine Konsequenz des berühmten Fourierschen Theorems[1], das im Folgenden formuliert werden soll.

2. Das Fouriersche Theorem

Das bereits im 1. Kapitel erwähnte Fouriersche Theorem besagt: Ist die Reihe

(1) $$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t \right)$$

gleichmäßig konvergent, so stellt sie eine periodische Funktion f(t) mit der Periode T dar, und für die Koeffizienten a_n und b_n gilt

---

[1] *benannt nach dem französischen Mathematiker und Physiker Josef Baron de Fourier, der von 1768 bis 1830 lebte.*

(2) $$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathbf{cos}\,n\frac{2\pi}{T}t\,dt \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathbf{sin}\,n\frac{2\pi}{T}t\,dt \qquad , n = 1, 2, ...$$

Außer der Grundfrequenz $\nu_1 = 1/T$, die gleich der Frequenz des periodischen Vorganges ist, treten in der Fourier-Entwicklung (1) im allgemeinen nur ganzzahlige Vielfache von ν_1, die sogenannten harmonischen **Oberschwingungen**, auf. Außerdem kommen in (1) nur die Phasen 0, $\pi/2$, π und $3\pi/2$ vor.
Die Ermittlung ihrer Amplituden, also der Größen a_n und b_n, bezeichnet man als harmonische (oder Fourier-) Analyse. In speziellen Fällen können einige der Koeffizienten 0 sein. Ist z.B. f(t) eine gerade Funktion, gilt also f(t) = f(-t), so verschwinden alle b_n. Ist dagegen f(t) ungerade, d.h. f(t) = -f(-t), sind alle a_n gleich 0. Stellt man die Amplituden der Teilschwingungen als Funktion der Frequenz dar, so erhält man das Spektrum der Schwingung. Nach (1) muss dieses ein Linienspektrum sein, wobei außerdem die Amplituden a_n und b_n für $n\to\infty$ gegen 0 gehen müssen, da sonst die Reihe (1) nicht konvergieren würde.Ein Beispiel für ein Linienspektrum ist in Abb. 1 wiedergegeben. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass nicht-periodische Vorgänge ein kontinuierliches Spektrum besitzen.

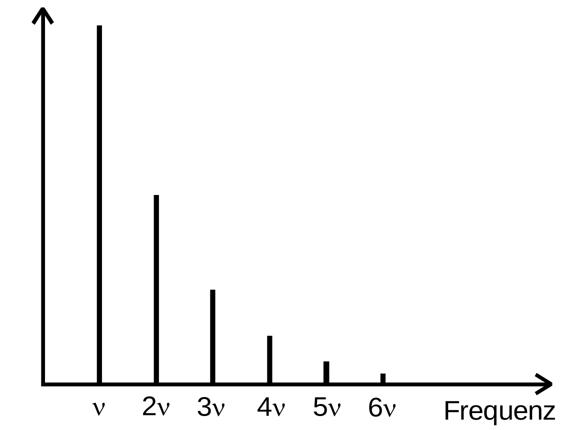

Abb.1: Beispiel für ein Frequenzspektrum einer periodischen Schwingung mit der Grundfrequenz ν

Zum Abschluss dieses Kapitels soll noch kurz die Forderung der gleichmäßigen Konvergenz, diskutiert werden. Sie ist immer dann erfüllt, wenn f(t) überall stetig ist[2]. Existiert jedoch eine Stelle t_0, an der f unstetig ist, so kann die Fourier-Reihe (1) die Funktion f an dieser Stelle nicht approximieren. Es tritt hier vielmehr eine **endliche** Abweichung der Reihe von $f(t_0)$ auf. Diese Erscheinung wird in der Literatur als **Gibbsches** Phänomen[3] bezeichnet. Sie lässt sich im nachfolgend beschriebenen Experiment recht gut beobachten; denn sie ist bei endlichem n (Fourier-Summe) auch in der Umgebung der Stelle t_0 zu sehen. Sie wird mit wachsendem n nicht kleiner im Gegensatz zu allen anderen Abweichungen.

[2] *Es ist jedoch nicht notwendig, dass f differenzierbar ist. f(t) kann also „Knickstellen" enthalten.*
[3] *benannt nach dem amerik. Physiker und Mathematiker Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903)*

3. Die Fourier-Transformation

Während man mit Hilfe von (2) die einzelnen Komponenten einer periodischen Funktion f(t) errechnen kann, ist es mit Hilfe der sogenannten Fourier-Transformation möglich das **gesamte** Frequenzspektrum einer zeitabhängigen Funktion zu bestimmen. Dabei ist es gleichgültig, ob f periodisch ist oder nicht. Die Fourier-Transformation hat die Gestalt

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathbf{e}^{i\nu t}\, dt \quad , \tag{3}$$

darin stellt die Funktion $g(\nu)$ das Frequenzspektrum der Funktion f dar. Ist f periodisch, dann besteht g aus einer (konvergierenden) Reihe von δ-Funktionen etwa so, wie es in Abb.1 angedeutet ist, während nicht-periodische Funktionen, wie zuvor angedeutet, ein kontinuierliches Frequenzspektrum besitzen.

Die Fourier-Transformation ist auch umkehrbar; das bedeutet: Die Fourier-Transformierte der Spektralfunktion g ist gleich der Zeitabhängigkeit des Vorganges

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)\, \mathbf{e}^{-i\nu t}\, d\nu \quad .$$

Nachteilig für die praktische Anwendung der Fourier-Transformation bei der Fourier-Analyse ist, dass man im Prinzip über einen unendlich langen Zeitraum integrieren muss, um exakte Ergebnisse zu erhalten. Da dies in der Praxis nicht möglich ist, werden Abweichungen von den erwarteten Ergebnissen auftreten. Durch die Begrenzung der Integration auf einen endlichen Zeitraum ist die Periodizität von f aufgehoben. Als Ergebnis bekommt man für g keine δ-Funktionen mehr sondern überall stetige und differenzierbare Funktionen, also ein Linienspektrum mit Linien endlicher Breite. Außerdem werden durch das „Abschneiden“ Nebenmaxima neben den Hauptmaxima, den ursprünglichen δ-Funktionen, erzeugt, deren Amplitude jedoch schnell abnimmt[4].

3. Aufgabe

a) Man zerlege einfache periodische elektrische Schwingungen in ihre Fourier-Komponenten und vergleiche die Ergebnisse mit den aus Fourierschen Theorem errechneten Werten.

b) Man setze einfache periodische Schwingungen aus ihren Fourier-Komponenten zusammen und dokumentiere die Ergebnisse durch einen Ausdruck des zeitlichen Verlaufs der Summenspannung.

4. Beschreibung einer einfachen Messvorrichtung zur Fourier-Analyse

Im Experiment soll eine Fourier-Analyse periodischer elektrischer Schwingungen durchgeführt werden. Als Signalquelle dient ein Funktionsgenerator. Ist dieser durch-

---

[4] *Ein vergleichbarer Effekt ist bei der Anwendung der Fourier-Transformation auf die Fraunhofersche Beugung zu beobachten. (Näheres siehe V406, Kap.3)*

stimmbar, so kann man mit der primitiven, in Abb.2 skizzierten Apparatur bereits eine solche Analyse ausführen.

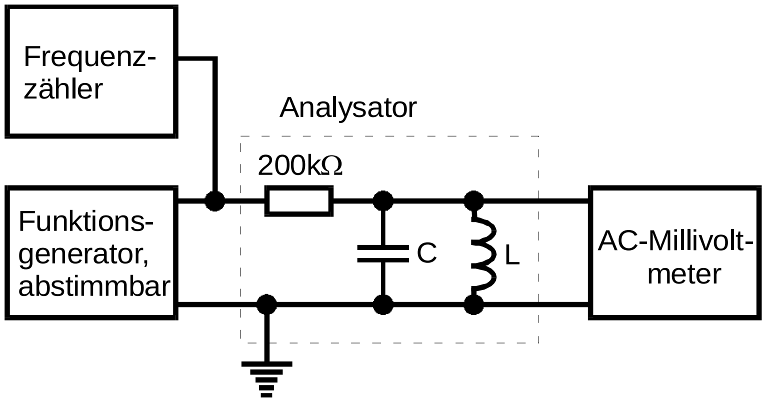

Abb.2: Schaltung zur Fourier-Analyse einer durchstimmbaren Signalquelle

Die vom Generator erzeugte Signalspannung wird über einen hochohmigen Widerstand auf einen Parallelresonanzkreis gegeben, welcher damit zu erzwungenen Schwingungen angeregt wird (siehe V354). Ist nun eine der Frequenzen des Schwingungsspektrums gleich der Resonanzfrequenz

$$\nu_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

des Schwingkreises, so beobachtet man einen Resonanzeffekt, der sich durch eine starke Zunahme der Spannung am Schwingkreis äußert. Da die Höhe der Resonanzspannung proportional zur Amplitude der anregenden Oberwelle ist, kann man das Amplitudenverhältnis der Fourierkomponenten bestimmen, indem man den LC-Kreis der Reihe nach mit sämtlichen Oberwellen anregt. Zur Untersuchung der Amplitude der n-ten Oberwelle muss man also den Signalgenerator auf die Frequenz ν_R/n einstellen und die Höhe der Resonanzspannung messen; denn die n-te Oberwelle besitzt dann die Frequenz

$$n\,\frac{\nu_R}{n} = \nu_R$$

und bringt damit den Schwingkreis zur Resonanz. Wichtig ist dabei, dass während des gesamten Messvorganges die Ausgangsamplitude des Generators konstant bleibt. Um auch sehr kleine Fourier-Komponenten und insbesondere den Wert 0 korrekt messen zu können, benötigt man bei diesem Verfahren eine Resonanzkurve mit steil abfallenden Flanken. Bei einem einfachen Schwingkreis, so wie er in Abb.2 dargestellt ist, erreicht man prinzipiell nur eine Abnahme der Schwingungsamplitude mit ν^2 (siehe V354). Besser wäre eine Abhängigkeit von ν^n $(n > 2)$. Diese kann mit einer Kombination von mehreren Schwingkreisen realisiert werden.

5. Beschreibung der Fourier-Synthese

Umgekehrt kann man nun, wenn man die Fourier-Komponenten einer bestimmten Schwingung kennt, dieselbe schrittweise aus ihren Komponenten zusammensetzen und beobachten, wie gut bereits die endliche Fourier-Summe den gewünschten Kurvenverlauf approximiert. Hierzu benötigt man einen Signalgenerator, der Sinusschwingungen der Frequenzen ν, 2ν, 3ν, ... mit beliebig einstellbaren Amplituden liefert. Die Phasen zwischen den einzelnen Spannungen müssen zeitlich konstant sein und dürfen nur die Werte 0 , $\pi/2$, π und $3\pi/2$ annehmen, sofern f(t) weder gerade noch ungerade ist. Andernfalls genügen 0 und π.

Die einzelnen Fourier-Komponenten können schrittweise addiert und das Ergebnis – die Summenschwingung – auf dem Bildschirm eines Oszilloskops sichtbar gemacht werden.

6. Fourier-Analyse mittels Fourier-Transformation

Als Signalquelle wiederum ein Funktionsgenerator benutzt, dessen Frequenz während des Messvorgang im Gegensatz zu dem in Kap. 4 beschriebenen Verfahren konstant bleiben kann. Seine Ausgangsspannung gibt man auf den Eingang eines Analog-Digital-Konverters[5], da die Fourier-Transformation von einem Rechner ausgeführt wird. Das Blockschaltbild der Messapparatur hat somit die in Abb.3 wiedergegebene Gestalt.

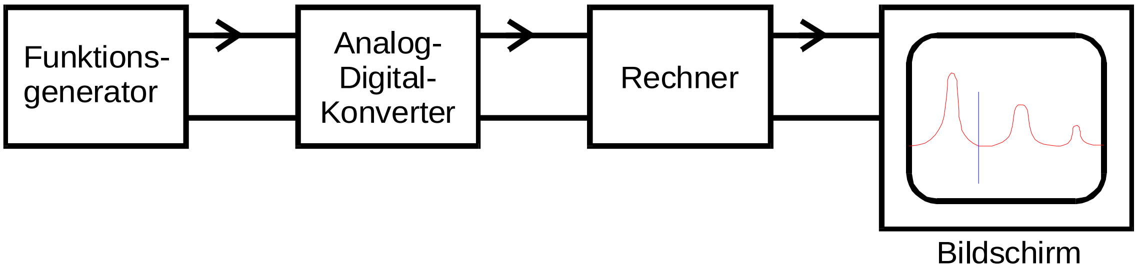

Abb.3: Schematische Darstellung der auf der Grundlage der Fourier-Transformation arbeitenden Messapparatur

Bei diesem Messverfahren kann die Funktion f(t) nicht kontinuierlich aufgezeichnet sondern nur durch diskrete Messpunkte dargestellt werden, da der Analog-Digital-Konverter nur in endlichen Zeitabständen einen Spannungsmesswert nehmen kann. Sind diese Zeitabstände im Vergleich zur Periodendauer von f zu groß, kann die Funktion aus den wenigen Stützpunkten pro Periode nicht mehr rekonstruiert werden, und es treten bei der Fourier-Transformation gewaltige Fehler auf. Man kann jedoch zeigen, dass der Fehler vernachlässigbar klein wird, wenn die Abtastfrequenz ν_A größer als die doppelte der höchsten im Spektrum von f vorkommenden Frequenz ist also

$$\nu_A > 2\,\nu_{max} \quad . \tag{4}$$

Die Ungleichung (4) bezeichnet man auch als **Abtasttheorem**.

Zur Fourier-Analyse schaltet man für eine Zeit, die groß gegen die Periodendauer des Signals ist, den Speicher des Rechners ein, um die Signalspannung in Abhängigkeit von der Zeit aufzuzeichnen. Sodann lässt man den Rechner die Fouriertransformation gemäß (3) ausführen. Die Integration wird dabei nach der Simpson-Regel ausgeführt, und es wird der Betrag von g als

$$|g| = \sqrt{\mathfrak{Re}^2(g) + \mathfrak{Im}^2(g)}$$

---

[5] *Näheres hierzu siehe z.B. Kap. „Arbeitsmethoden in der Experimentellen Physik“ Kap. c „Messgeräte“*

ausgerechnet. Anschließend kann man $|g|$ in Abhängigkeit von der Frequenz auf dem Bildschirm sowohl für einzelne Komponenten als auch für mehrere Oberwellen gleichzeitig darstellen. Mit Hilfe eines Cursors lassen sich die Frequenzen ν_i der Oberwellen und ihre Amplituden $|g(\nu_i)|$ bestimmen.

7. Mess- und Auswerteprogramm

a) Man berechne zur Vorbereitung auf das Experiment die Fourier-Koeffizienten von 3 verschiedenen periodischen Schwingungsformen (Vorschläge: Rechteck, Dreieck, Sägezahn, Sinushalbwelle, Nadelimpuls[6]). Zur Vereinfachung der Rechnung wird vorgeschlagen, diese entweder als gerade oder als ungerade Funktionen zu definieren.

b) Man messe die ersten 9 von null verschiedenen Fourier-Amplituden der in 7a berechneten Schwingungen und vergleiche die Messergebnisse mit den Rechnungen. Wie kann man eventuell auftretende systematische Abweichungen erklären?

c) Man setze 3 verschiedene Schwingungsformen sukzessive aus ihren Komponenten bis n = 9 oder 10 zusammen. Dabei lege man die Ergebnisse der Rechnungen aus 7a zugrunde. Die Summenschwingung beobachte man auf dem Oszillographenschirm. Zur Dokumentation fertige man Thermodrucke der Schwingungsbilder an.

8. Messtechnische Hinweise

zu 7b): Bei der Messung nach dem Fourier-Transformationsverfahren muss auf die Einhaltung des Abtasttheorems (4) geachtet werden. Soll beispielsweise die n-te Oberwelle untersucht werden, so muss

$$\nu_A > 2\,n\,\nu_1 \tag{5}$$

sein. Die Abtastfrequenz kann am Rechner durch Eingabe einer natürlichen Zahl Z vorgewählt werden. Werte bis etwa 300 Hz sind möglich. Gemäß der Beziehung (5) muss auch die Frequenz ν_1 der Grundschwingung am Signalgenerator eingestellt werden. Der ADC kann Spannungen zwischen –2 und +2V konvertieren. Diese Werte sollten ebenfalls am Signalgenerator nicht überschritten aber auch nicht wesentlich unterschritten werden. Man gebe die gewählten Werte von ν_A und ν_1 an, um zu zeigen, dass (5) auch noch für n = 10 erfüllt ist.

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, bei der Auswertung nur einzelne Komponenten und nicht das Gesamtspektrum zu betrachten. Man beginne daher bei der Auswertung bei einer Frequenz

$$\nu_{Start} < \nu_n \quad (n = 1, 2, ...)$$

und stoppe die Berechnung, wenn die Oberwelle dargestellt ist.

zu 7c): Zur Synthese periodischer Schwingungen benutzt man einen sogenannten Oberwellengenerator. Dieses Gerät liefert eine Reihe von Sinusschwingungen, die pha-

---

[6] *Ein Nadelimpuls hat die Darstellung f(t) = 1 für $-T/2K \le t \le +T/2K$ und f(t) = 0 für $T/2K \le t \le T(1-½K)$; K>>1, fest.*

senstarr miteinander gekoppelt sind und deren Frequenzen sich wie ganze Zahlen verhalten.

Zunächst kontrolliere man die Phasenbeziehungen der Fourier-Komponenten untereinander. Hierzu gebe man die Grundschwingung (1. Oberwelle) auf den X-Eingang und die n-te Oberwelle auf den Y-Eingang eines Oszillographen und schalte das Gerät auf XY-Betrieb um. Auf dem Bildschirm erscheint dann zumeist eine in sich geschlossene Kurve, die man als **Lissajous-Figur**[7] bezeichnet. Beim Frequenzverhältnis 1:3 hat sie zum Beispiel die in Abb.3b wiedergegebene Gestalt. Durch vorsichtiges Drehen am "Phase"-Knopf der n-ten Oberwelle kann man nun erreichen, dass bei **ungeradem** n die Lissajous-Figur in eine geschwungene Linie mit zwei Endpunkten entartet (wie in Abb.3a angedeutet). In diesem Falle hat man die Phase 0 oder π eingestellt. Bei **geradem** n und Sinusfunktionen liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt. Hier bekommt man bei der Phase 0 oder π eine **geschlossene** Kurve, die symmetrisch zur X-Achse liegt. So erhält man zum Beispiel beim Frequenzverhältnis 1:2 eine Lemniskate, welche die Gestalt einer "liegenden Acht" hat. Neben der kontinuierlichen Änderung der Phase ist auch eine Phasenänderung um die Beträge $\pi/2$ oder π möglich, wenn man die entsprechenden Kippschalter des Oberwellengenerators betätigt.

Abb.3: Lissajous-Figuren aus 2 Schwingungen mit dem Frequenzverhältnis 1:3 (Die Figur zur Phase $\varphi=\pi$ erhält man durch Spiegelung von 3a an der x-Achse.)

Bei geraden Oberwellen kann aus der Gestalt der Lissajous-Figuren nicht eindeutig auf die Phase geschlossen werden; denn die Phasen 0 und π ergeben die gleiche Figur. Hier muss die richtige Phaseneinstellung durch Probieren (Umschalten des 180°-Phasenschalters) während der einzelnen Syntheseschritte gefunden werden.

Im darauffolgenden Schritt müssen die Amplituden gemäß den Beträgen der Fourier-Koeffizienten eingeregelt werden. Hierzu dienen die "Amplitude"-Drehknöpfe und ein AC-Millivoltmeter, das man an den Ausgang "Summenschwingung" anschließt. Nach diesen Vorbereitungen ist der Oberwellengenerator komplett justiert. Man schließe nun den Y-Eingang des Oszillographen - nachdem man seine interne Zeitablenkung wieder eingeschaltet hat - an den Ausgang "Summenschwingung" an. Sodann schalte man die einzelnen Oberwellen mit Hilfe der "Summationsschalter" der Reihe nach ein und beobachte die Überlagerungsfigur auf dem Bildschirm. Insbesondere achte man dabei auf die Unstetigkeitsstellen von f(t).

[7] *benannt nach dem französischen Physiker J. A. Lissajous (1822 – 1880)*