

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	2
2 Theorie	2
3 Aufbau und Durchführung	3
3.1 Vorbereitungsaufgabe	3
3.2 Fourieranalyse	3
3.3 Fouriersynthese	3
4 Auswertung	4
4.1 Vorbereitungsaufgabe	4
4.1.1 Rechteckspannung	4
4.1.2 Dreieckspannung	4
4.1.3 Sägezahnspannung	5
4.2 Fourieranalyse	6
4.3 Fouriersynthese	7
5 Diskussion	9

1 Zielsetzung

Der Versuch hat einerseits das Ziel verschiedene Spannungsformen in Fourierkomponenten zu zerlegen, andererseits verschiedene Spannungsformen aus Fourierkomponenten zusammenzusetzen.

2 Theorie

Periodische Vorgänge sind in der Physik beinahe allgegenwärtig. Typische periodische Funktionen sind

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 \sin(\omega t) \\ f(t) &= c_2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

mit den Amplituden c_1 und c_2 und der Kreisfrequenz ω . Letztere lässt sich auch als $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ schreiben, wobei ν die Frequenz des Vorgangs ist und T die Periodendauer. Aus diesen beiden Funktionen lassen sich fast alle periodischen Vorgänge zusammensetzen. Das Fourier'sche Theorem wird nun ausgenutzt um einen periodischen Vorgang in sinus- oder cosinusförmige Einzelvorgänge zu zerlegen. Wenn die Reihe

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

absolut konvergiert, dann lassen sich die Koeffizienten a_0 , a_n und b_n errechnen durch:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt. \end{aligned}$$

Dabei ist $\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ die Grundfrequenz und die auftretenden ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz werden 'harmonische Oberschwingungen' genannt. Ist $f(t)$ eine zu y-Achse symmetrische Funktion, so sind alle $b_n = 0$. Dies wird auch 'gerade' Funktion genannt. Wenn $f(t)$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist, dann sind alle $a_0 = a_n = 0$. Dies ist eine 'ungerade' Funktion. Es ergibt sich ein Linienspektrum im sogenannten 'Fourierraum' oder 'Frequenzraum', wenn die Amplitude der Schwingungsfunktion A gegen die Kreisfrequenz ω aufgetragen wird. An den Stellen, wo die Funktion unstetig ist, entsteht eine Überschwingung. Dies wird das Gibb'sche Phänomen genannt.

Durch eine Fouriertransformation lässt sich das Frequenzspektrum $g(\omega)$ einer beliebigen Schwingungsfunktion bestimmten:

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i\omega t} dt.$$

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Vorbereitungsaufgabe

Zunächst werden die Fourierkoeffizienten der Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnspannung berechnet.

3.2 Fourieranalyse

Die Schaltung wird wie folgt aufgebaut: Der Analog-Digital-Konverter, der Rechner

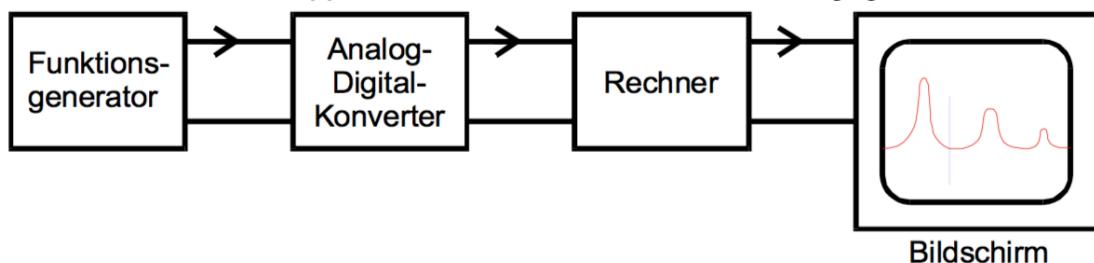


Abbildung 1: Schema des Versuchsaufbaus zur Fourieranalyse [1]

und der Bildschirm sind im Oszilloskop integriert. Als erstes wird mit dem Spannungs- generator eine periodische Spannung eingespeist. Am Oszilloskop wird die Spannung sichtbar gemacht. Mit der Math-Funktion des Oszilloskops wird das Linienspektrum dargestellt. Mithilfe des Cursors werden möglichst viele Amplituden des Linienspektrums abgemessen. Die Messung wird für eine Rechteckspannung, eine Dreieckspannung und eine Sägezahnspannung durchgeführt. Bei der Rechteckspannung werden neun Werte gemessen, bei der Dreieckspannung wird die Messung ab dem achten Peak sehr ungenau. Für die Sägezahnspannung werden neun Werte abgelesen.

3.3 Fouriersynthese

Für die Fouriersynthese werden ein Oberwellengenerator und ein Voltmeter zur Schaltung hinzugefügt.

Mithilfe der Lissajousfiguren wird die Amplitude und Phasenverschiebung der einzelnen Oberwellen angepasst. Dazu wird das Oszilloskop auf den X-Y-Modus ungeschaltet.

Es wird stets die erste Oberwelle mit einer höheren Oberwelle auf dem Oszilloskop dargestellt. Mit der richtigen Phasenverschiebung bilden sich die Lissajousfiguren aus. Damit sind die Ausgänge alle in der richtigen Phase für die Fouriersynthese.

Mit dem Voltmeter und dem Spannungsgenerator werden nun die in der Vorbereitungsaufgabe berechneten Spannungen möglichst genau eingeregelt. Für die Synthesierung der Rechteckspannung und der Dreieckspannung werden nur die ungeraden Oberwellen benötigt. Somit werden für die Rechteckspannung und für die Dreieckspannung fünf Werte aufgenommen, für die Sägezahnspannung zehn Werte.

4 Auswertung

4.1 Vorbereitungsaufgabe

4.1.1 Rechteckspannung

Die Rechteckspannung kann als

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & \pi < x < 2\pi \\ 0, & x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

geschrieben werden. Für die Koeffizienten a_0 und a_n gilt $a_0 = a_n = 0$, da die Rechteckspannung ungerade ist und somit keine Cosinusanteile enthält.

Für b_n ergibt sich

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi (+1) \sin(nx) dx + \int_\pi^{2\pi} (-1) \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^\pi + \left[\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_\pi^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi n} (-\cos(n\pi) + \cos(0) + \cos(n2\pi) - \cos(n\pi)) = \frac{1}{\pi n} (2 - 2\cos(n\pi)) \\ &= \frac{2}{\pi n} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} (1 - 1) = 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)) = \frac{4}{\pi n}, & n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit fällt die Amplitude A der Peaks im Linienspektrum der Rechteckspannung mit

$$A_n \propto \frac{A_1}{n}, \quad n = 3, 5, 9, \dots \quad (1)$$

ab.

4.1.2 Dreieckspannung

Die Dreieckspannung wird durch

$$f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

beschrieben. Die Koeffizienten b_n sind immer 0, da die Funktion gerade ist.

Die Koeffizienten a_n berechnen sich durch

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} (\cos(nx) + nx \sin(nx)) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2} (\cos(n\pi) + n\pi \sin(n\pi) - \cos(0) - 0) = \frac{2}{\pi n^2} (\cos(n\pi) + n\pi \sin(n\pi) - 1) \\ &= \begin{cases} = \frac{2}{\pi n^2} (1 + 0 - 1) = 0, & n \text{ gerade} \\ = \frac{2}{\pi n^2} (-1 + 0 - 1) = -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Der Koeffizient a_0 berechnet sich durch

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi.$$

Die Amplitude der Dreiecksspannung fällt also mit

$$A_n \propto -\frac{A_1}{n^2}, \quad n = 3, 5, 9, \dots \quad (2)$$

ab.

4.1.3 SägezahnsSpannung

Eine SägezahnsSpannung wird durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = \pm\pi \end{cases}$$

charakterisiert. Die Koeffizienten a_n sind durch die Punktsymmetrie der Funktion immer gleich 0.

Die Koeffizienten b_n berechnen sich durch

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} (\sin(nx) - nx \cos(nx)) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2} (\sin(n\pi) - n\pi \cos(n\pi) - 0 + 0) = \begin{cases} = \frac{2}{\pi n^2} (0 - \pi n - 0 + 0) = -\frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \\ = \frac{2}{\pi n^2} (0 - (-\pi n) - 0 + 0) = \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Amplituden der SägezahnsSpannung fallen mit folgender Proportionalität ab:

$$A_n \propto \begin{cases} -\frac{A_1}{n}, & n = 2, 4, 6, 8, 10\dots \\ \frac{A_1}{n}, & n = 3, 5, 7, 9\dots \end{cases} \quad (3)$$

4.2 Fourieranalyse

Für die Fourier-Analyse wird das Linienspektrum einer einfachen periodischen Schwingung gemessen. Die Amplituden der Maxima sind in den Tabellen 1, 2 und 3 aufgeführt. Die drei Messungen für Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnspannungen werden alle mit einer Frequenz von $f = 100 \cdot 10^3$ Hz durchgeführt.

Tabelle 1: Messdaten zur Zerlegung einer Rechteckspannung

n	A_n	$\frac{A_n}{A_1}$	$\frac{A_1}{n}$	Abweichung
	V			
1	334	1,000	334,0	0,00
3	110	0,329	111,3	1,21
5	70	0,209	66,8	4,79
7	46	0,138	47,7	3,73
9	38	0,114	37,1	2,39
11	26	0,078	30,4	16,78
13	26	0,078	25,7	1,20
15	20	0,060	22,3	11,33
17	18	0,054	19,7	9,15

Tabelle 2: Messdaten zur Zerlegung einer Dreieckspannung

n	A_n	$\frac{A_n}{A_1}$	$\frac{A_1}{n}$	Abweichung
	V			
1	220,00	1,000	220,0	0,00
2	23,60	0,117	24,4	3,58
3	8,80	0,040	8,8	0,00
4	4,00	0,018	4,5	12,24
5	2,80	0,013	2,7	3,09
6	1,52	0,007	1,8	19,62
7	1,36	0,006	1,3	4,47
8	0,80	0,004	0,98	22,22

Tabelle 3: Messdaten zur Zerlegung einer Sägezahnspannung

n	A_n	$\frac{A_n}{A_1}$	$\frac{A_1}{n}$	Abweichung
	V			
1	174,0	1,000	174,0	0,0
2	76,8	0,441	87,0	13,28
3	55,2	0,317	58,0	5,07
4	44,8	0,257	43,5	2,99
5	35,2	0,202	34,8	1,15
6	26,4	0,152	29,0	9,85
7	23,2	0,133	24,91	7,14
8	22,0	0,126	21,8	1,15
9	19,6	0,113	19,3	1,38

4.3 Fouriersynthese

Die theoretischen Amplituden sind zusammen mit den experimentellen Amplituden und mit der Normierung auf den Anfangswert in den Tabellen 4, 5 und 6 eingetragen. Die synthetisierten Graphen sind außerdem in Abbildung 2, 3 und 4 aufgeführt.

Tabelle 4: Messdaten zur synthetisierten Rechteckspannung

n	$A_{n,\text{theo}}$	$A_{n,\text{exp}}$
	V	V
1	0,572	0,572
3	0,1906	0,1907
5	0,1144	0,1144
7	0,0817	0,0817
9	0,0635	0,0635

Tabelle 5: Messdaten zur synthetisierten Dreieckspannung

n	$A_{n,\text{theo}}$	$A_{n,\text{exp}}$
	V	V
1	0,571	0,571
3	0,0634	0,0634
5	0,0228	0,0229
7	0,0117	0,0118
9	0,0071	0,0072

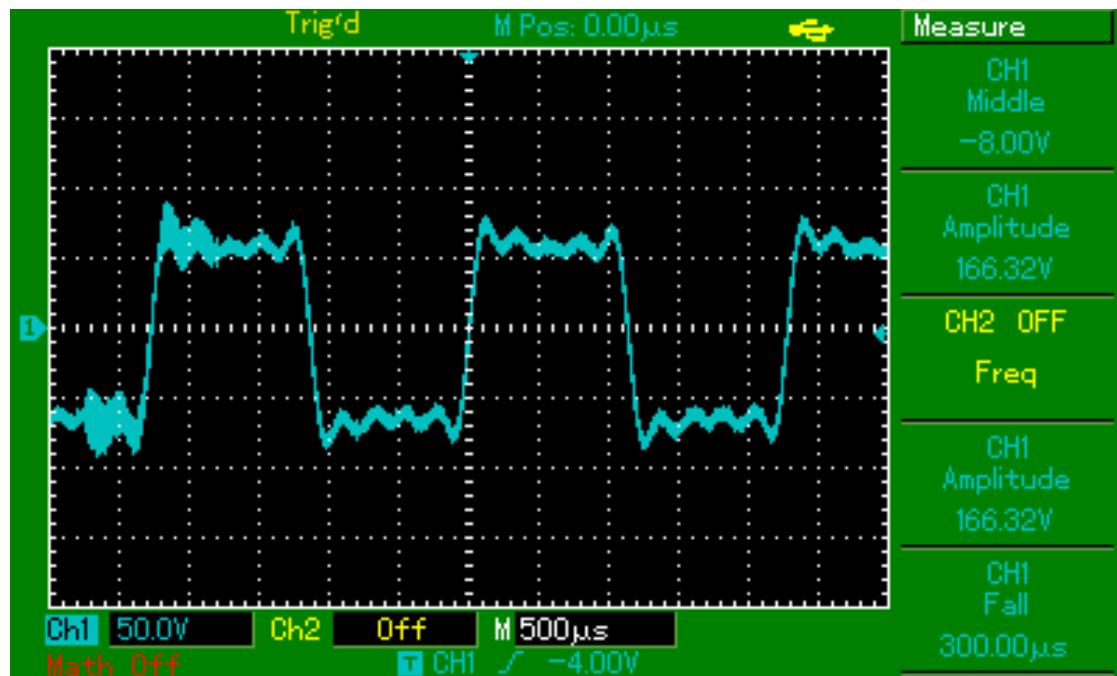


Abbildung 2: Thermodruck der synthetisierten Rechteckspannung

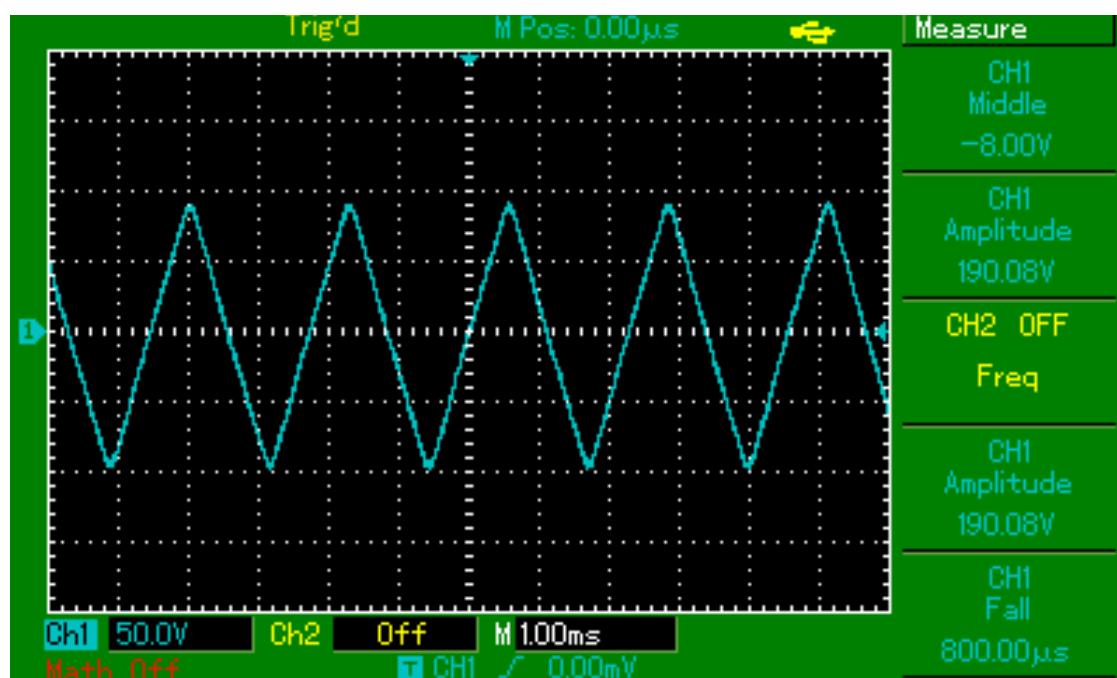


Abbildung 3: Thermodruck der synthetisierten Dreieckspannung

Tabelle 6: Messdaten zur synthetisierten Rechteckspannung

n	$A_{n,\text{theo}}$ V	$A_{n,\text{exp}}$ V
1	0,571	0,571
2	0,2855	0,2855
3	0,1903	0,1902
4	0,1426	0,1456
5	0,1142	0,1143
6	0,0952	0,0952
7	0,0816	0,0816
8	0,0714	0,0714
9	0,0634	0,0634
10	0,0571	0,0571

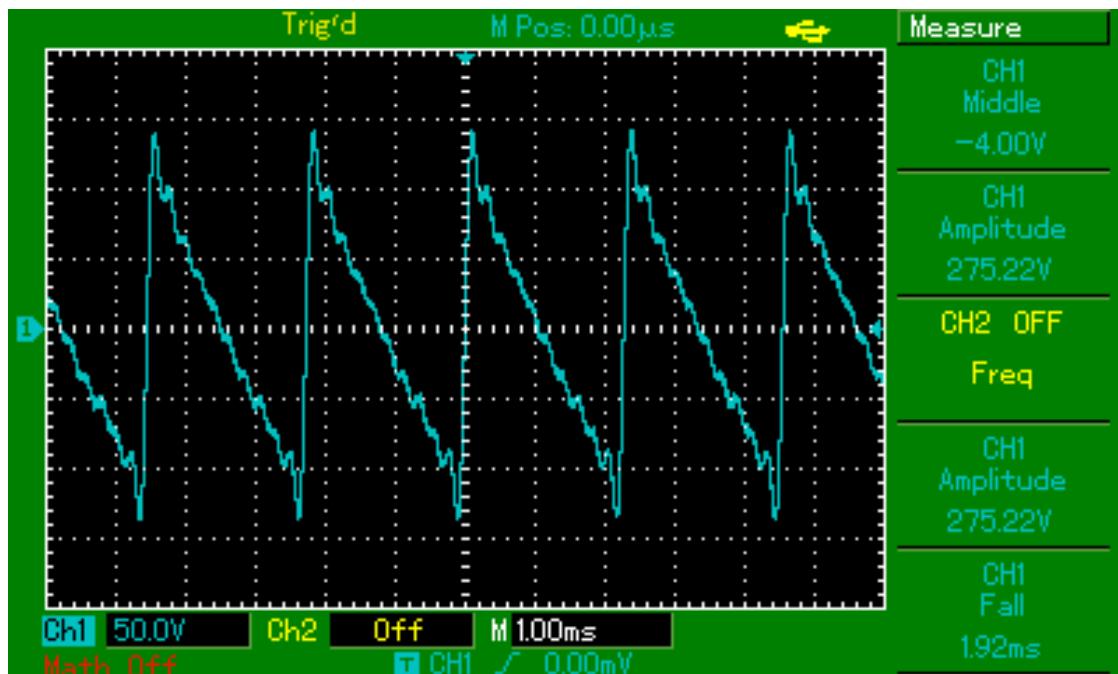


Abbildung 4: Thermodruck der synthetisierten Sägezahnspannung

5 Diskussion

Auffällig ist, dass die Abweichung der experimentellen Werte zu den theoretischen Werten in diesem Experiment gering ist. Die größte prozentuale Abweichung im gesamten Experiment liegt bei 0,0138% und beschreibt die Abweichung der theoretischen und der experimentellen Amplitude der neunten Oberwelle der Dreiecksspannung. Die weiteren

Verhältnisse sind in den Tabellen 4, 5 und 6 angegeben. Durch den Versuchsaufbau sind wenige Messunsicherheiten gegeben. Das Oszilloskop, der Funktionsgenerator, der Oberwellengenerator und das Voltmeter sind genaue digitale Geräte, die nur äußerst geringe Messunsicherheiten verursachen.

10 Fourier-analyse

Rechteck		$\nu = 100 \text{ kHz}$	Dreieck		$\nu = 100 \text{ kHz}$
#	U_b / V		#	U_b / V	
1	3,44		1	220	
2	110		2	23,6 V	
3	70		3	8,8	
4	46		4	4,0	
5	3,8		5	2,18	
6	2,6		6	1,52	
7	2,6		7	1,36	
8	2,0		8	800mV	✓
9	1,8				

$U_0 = 5 \text{ V} \text{ (vom Generator)}$

✓

Abbildung 5: Originale Messdaten

Sägezahn $f_1 = 100 \text{ kHz}$

#	U_b/V
1	174
2	76,8
3	55,2
4	44,8
5	35,2
6	26,4
7	23,2
8	22,0
9	19,6

Fourier Synthese

- Lissa jaus figuren \Rightarrow ✓

Rechteck

<u>Index</u>	<u>U_b</u>	<u>$U_{berechnet}$</u>	<u>$U_{eingestellt}$</u>
1		0,5720	0,5720
3		0,1906	0,1907
5		0,1144	0,1144
7		0,0817	0,0817
9		0,0635	0,0635

Dreieck

	<u>U_{err}</u>	<u>U_{eing}</u>
1	0,5710	0,5710
3	0,0634	0,0634
5	0,0228	0,0229
7	0,0117	0,0118
9	0,0071	0,0072
6		

Abbildung 6: Originale Messdaten

<u>Sägezahn</u>	<u>Uscr</u>	<u>Ueng.</u>
1	0,57010	0,5710
2	0,2855	0,2855
3	0,1903	0,1902
4	0,1426	0,1426
5	0,1142	0,1143
6	0,0952	0,0952
7	0,0816	0,0816
8	0,0714	0,0714
9	0,0634	0,0634
10	0,0571	0,0571

Abbildung 7: Originale Messdaten