

Versuch M1: Das Trägheitsmoment

Ziel: Es soll das Trägheitsmoment verschiedener Körper gemessen werden und der Steiner'sche Satz verifiziert werden.

Stichworte: Drehimpuls, Drehmoment, Drehschwingungen, kinetische Energie, Rotationsenergie, Trägheitsmoment, Trägheitstensor, Schwingungsdauer, starrer Körper, Steinerscher Satz, Winkelrichtgröße

Motivation: In der Biomechanik wird unter Anderem die Wirkung von Kräften auf den Körper untersucht. Bei Rotationsbewegungen ist eine dynamische Meßgröße das Trägheitsmoment.

Theoretische Grundlagen

Die Dynamik von Rotationsbewegungen läßt sich durch das Drehmoment M , das Trägheitsmoment I und die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ charakterisieren. Das Trägheitsmoment einer punktförmigen Masse m im Abstand r von einer Drehachse ist dabei durch $I = mr^2$ gegeben. Dreht sich ein ausgedehnter Körper um eine feste Achse, so bewegen sich alle Masselemente mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um diese Achse. Für das Gesamtträgheitsmoment gilt dann

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i \quad (1)$$

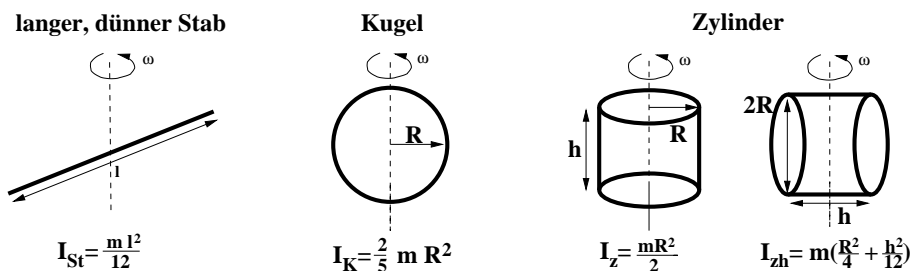
wobei r_i der Abstand der Masselemente m_i von der Drehachse ist. Für infinitesimale Massen dm gilt entsprechend:

$$I = \int r^2 dm \quad (2)$$

Im allgemeinen hängt das Drehmoment von der Lage der Drehachse ab. Bei geometrisch einfachen Körpern (z.B. Scheibe, Kugel, Zylinder) ist die Berechnung des Trägheitsmomentes einfach und häufig sogar tabelliert. Bei komplexeren Körpern ist es hilfreich, diese in einfache Formen aufzuteilen und die berechneten Trägheitsmomente zu addieren, sofern sie sich auf eine Achse beziehen.

Fällt die Drehachse nicht mit einer durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden Achse zusammen, sondern ist parallel um einen Abstand a verschoben, so kann man das Trägheitsmoment I bezüglich dieser Achse mit dem Steinerschen Satz berechnen:

$$I = I_s + m \cdot a^2 \quad (3)$$



Dabei ist I_s das Trägheitsmoment bzgl. der Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers, m ist die Gesamtmasse des Körpers und a der Abstand beider Achsen.

Greift an einen drehbaren Körper die Kraft \vec{F} im Abstand \vec{r} von der Achse an, so wirkt auf ihn das Drehmoment $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$. Bei einem schwingungsfähigen System, wie bei dem hier durchzuführendem Versuch, wirkt der Drehung des Körpers um den Winkel φ aus seiner Ruhelage ein rücktreibendes Drehmoment durch eine Feder entgegen. Das System führt beim Loslassen des ausgelenkten Körpers harmonische Schwingungen aus, wobei sich die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (4)$$

durch die Winkelrichtgröße D und das Trägheitsmoment I bestimmen läßt¹. Dabei ist die Winkelrichtgröße D mit dem Drehmoment über

$$M = D \cdot \varphi \quad (5)$$

verknüpft. Bei Drehschwingungen ist das harmonische Verhalten und damit die Gültigkeit von Gl. 4 auf kleine Winkel φ beschränkt.

Die Winkelrichtgröße D kann aus Gl.5 durch Messung der Auslenkung φ als Funktion der Kraft F (statische Methode) oder alternativ (bei bekanntem I) aus Gl.4 durch Messung der Schwingungsdauer (dynamische Methode) bestimmt werden. Durch Kombination beider Methoden ist auch eine gleichzeitige Bestimmung von D und I möglich.

Vorbereitung

Berechnen Sie das Drehmoment M als Funktion des Abstandes r , wenn an eine Stange eine Kraft von $F = 0.1\text{N}$ senkrecht und im Winkel von $\varphi = 45$ Grad angreift. Berechnen Sie M für mindestens 10 Abstände r im Bereich von 5 cm bis 25 cm.

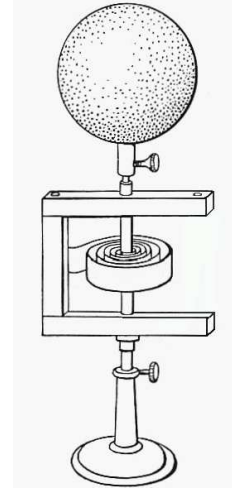
Aufgaben

- Bestimmen Sie die Winkelrichtgröße D und das Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse mit Hilfe des Steinerschen Satzes.
- Bestimmen Sie das Trägheitsmoment I von zwei verschiedenen Körpern (Kugel, Scheibe, Zylinder) bezüglich einer durch den Massenschwerpunkt gehenden Drehachse. Vergleichen sie die experimentellen Daten mit den theoretisch berechneten Werten.
- Bestimmen sie das Trägheitsmoment I_p einer Modellpuppe für zwei verschiedene Körperhaltungen und vergleichen Sie die gemessenen Daten mit einer einfachen Modellrechnung.
- *Für Interessenten:* Versuchen Sie das Trägheitsmoment eines Menschen abzuschätzen und vergleichen Sie dieses mit dem Trägheitsmoment der Puppe. Wie realistisch ist der Vergleich Puppe-Mensch?

¹Beachten Sie, daß sich das Trägheitsmoment I in den Versuchen aus dem Trägheitsmoment I_D der Drillachse und aus dem Trägheitsmoment des Körpers zusammensetzt.

Versuchsaufbau

Für die Bestimmung des Trägheitsmomentes I verschiedener Körper wird in diesem Versuch eine Drillachse (Abb.2) verwendet. Hierzu wird der Körper auf eine zweifach in einem Rahmen drehbar gelagerte Achse befestigt, die über eine Spiralfeder mit dem Rahmen verbunden ist (Abb. 2). Auf der Achse können die verschiedenen Körper angebracht werden. Sind Winkelrichtgröße D und Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse bekannt, so läßt sich das Trägheitsmoment I aus der Schwingungsdauer T bestimmen. Hierzu wird der Körper in Schwingungen versetzt; die Periodendauer T kann dann mit einer Stoppuhr gemessen werden. **Um eine inelastische Verformung der Spiralfeder zu vermeiden, darf die Feder nur maximal um 360 Grad ausgelenkt werden!!!**

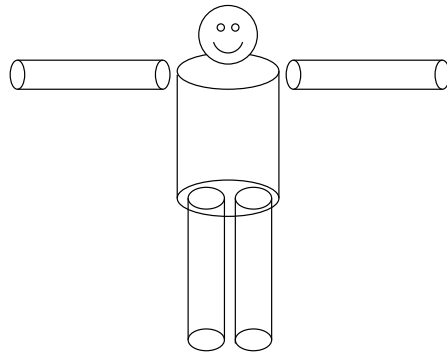
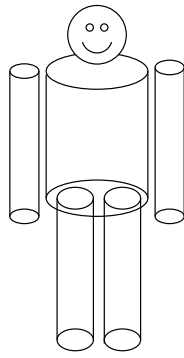


Versuchsdurchführung und Auswertung

- Zuerst müssen die Apparatkonstanten D und I_D der Drillachse bestimmt werden. Für die Bestimmung der Winkelrichtgröße D wird eine Federwaage in einen Haken eingehängt und um einen Winkel φ ausgelenkt. Dabei sollte die Federwaage senkrecht zum Radius der vom Körper beschriebenen Kreisbahn gehalten werden (warum?). Die Winkelrichtgröße $D = \frac{F \cdot r}{\varphi}$ kann dann aus der Federkraft F , dem Abstand r der Federwaage zur Drehachse und dem Drehwinkel φ bestimmt werden. Führen Sie diese Messung mindestens 10 mal für verschiedene Auslenkwinkel durch und mitteln sie das Ergebnis.

Für die Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_D der Drillachse wird eine nahezu masselose Metallstange mit zwei Gewichten senkrecht auf die Drehachse gesteckt. Das System wird zum Schwingen gebracht und die Schwingungsdauer T gemessen. Führen sie die Messung für mindestens 10 verschiedene Abstände a durch. Tragen Sie T^2 gegen a^2 auf und bestimmen Sie das Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse durch lineare Regression.

- Das Trägheitsmoment zweier verschiedener Körper soll über die Schwingungsdauer T bestimmt werden. Befestigen Sie hierzu einen Körper auf der Drillachse, lenken Sie ihn aus der Ruhelage aus und messen Sie die Periodendauer T mit einer Stoppuhr. Führen sie diese Messung mindestens 5 mal durch und mitteln sie das Ergebnis.
- Als nächstes soll das Trägheitsmoment einer Holzpuppe für zwei verschiedene Stellungen bestimmt werden. Spannen Sie hierzu den Stab, an dem sich die Puppe befindet, auf die Drillachse und messen Sie für mindestens 2 Körperhaltungen die Schwingungsdauer T und berechnen sie daraus das Trägheitsmoment. Verfahren Sie analog zu den vorherigen Körpern. Vergleichen Sie die experimentellen Werte mit einer Modellpuppe, die aus verschiedenen Zylindern aufgebaut ist (Abb.3). In erster Näherung kann man den Rumpf, die Arme und die Beine einzeln als Zylinder und den Kopf als Vollkugel annehmen. (Für Ehrgeizige: Die Massen der Modellpuppe können auch feiner eingeteilt



werden, jedoch kann dies die Berechnung des Gesamtträgheitsmomentes aufwendig und kompliziert machen).