Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll der Elastizitätsmodul verschiedener Legierungen und Metallen bestimmt werden. Zusätzlich werden die gemessenen Daten mit Literaturdaten verglichen.

2 Theorie

Der Elastizitätsmodul E ist in der Werkstofftechnik eine wichtige Größe. Er beschreibt die Gestaltsänderung eines Körpers unter Wirkung einer Normalspannung σ. Die Normalspannung ist dabei die senkrecht zur Oberfläche wirkende Kraft. Die dabei entstehende relative Längenänderung ist proportional zur Kraft mit dem Elastizitätsmodul als Proportionalitätsfaktor. Dies wird Hooksches Gesetz gennant:

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L}. \tag{1}$$

In diesem Versuch wird die Messung des Elastizitätsmoduls über die Biegung der Metallstäbe realisiert. Dabei wird benutzt, dass die wirkende Kraft ein äußeres Drehmoment auf den Körper ausübt. Dieses Drehmoment sorgt dafür, dass die oberen Schichten gedehnt und die unteren Schichten gestaucht werden. In der Mitte liegt entsprechend eine sogenannte neutrale Faser, deren Länge unverändert bleibt. Dadurch treten innere Normalspannungen auf, die oberhalb der neutralen Faser in entgegengesetzter Richtung zu den Spannungen unterhalb der neutralen Faser wirken. Der Stab biegt sich dann so weit, bis das äußere und innere Drehmoment gleich groß sind.

$$M_{\text{außen}} = F(L-x) \qquad M_{\text{innen}} = \int_Q y\sigma(y)dq \tag{2}$$

Dabei ist Q ein Querschnitt des Stabes und y der Abstand des Flächenelements dq von der neutralen Faser x.

Wird der Stab an einem Ende eingespannt, ergibt sich die Formel

$$D(x) = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \tag{3}$$

für die Auslenkung, wobei L die Länge vom Ort der Kraftwirkung bis zum Einspannpunkt, x die Entfernung vom Messpunkt zum Einspannpunkt und I das Flächenträgheitsmoment ist. Ist die Befestigung alternativ an beiden Seiten und wirkt die Kraft in der Mitte des Stabes, so ergeben sich die Formeln

$$D(x) = \frac{F}{48 \cdot E \cdot I} \cdot (3L^2x - 4x^3), \qquad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \tag{4}$$

$$D(x) = \frac{F}{48 \cdot E \cdot I} \cdot (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3), \qquad \text{für} \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L. \tag{5}$$

3 Durchführung

3.1 Einseitige Einspannung

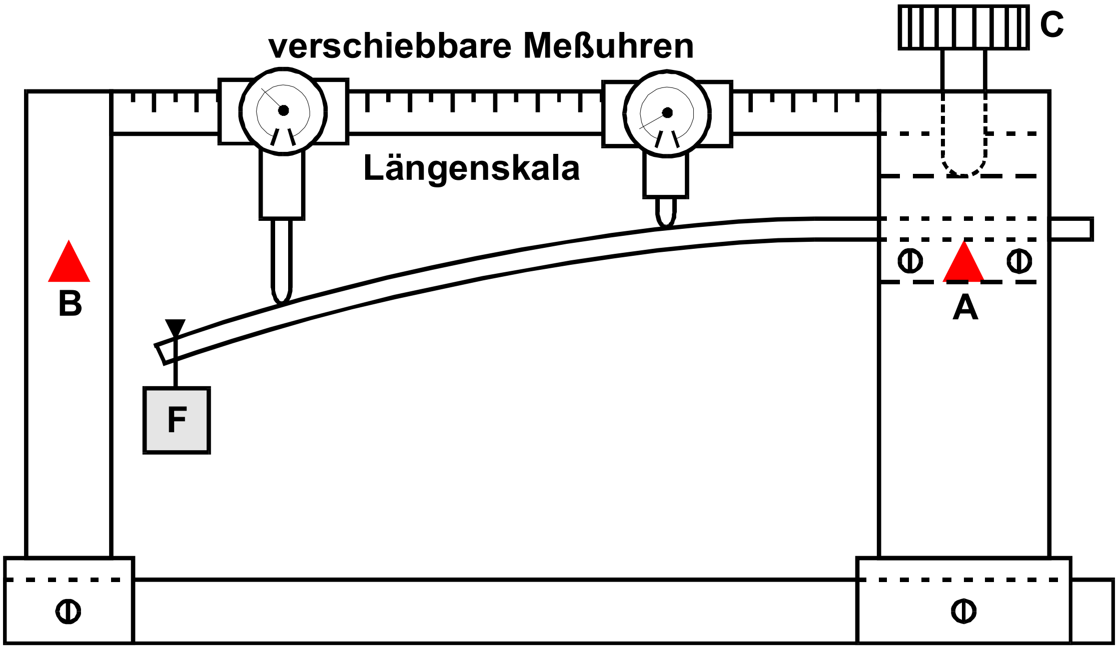

Abbildung 1: Schematischer Aufbau[1].

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls E wird ein Metallstab, wie in Abbildung 1 zu sehen, eingespannt. Da nicht davon ausgegangen werden kann, dass der Stab perfekt gerade ist, wird vor dem Anhängen des Gewichtes eine Nullmessung durchgeführt. Dazu wird die Messuhr über den Stab geschoben und in regelmäßigen Abständen x werden die Auslenkungen $D_0(x)$ abgelesen. Dabei bedeutet ein negativer Wert eine Auslenkung nach oben. Anschließend wird ein Gewicht ans Ende des Stabes angehängt. Die Messuhr wird erneut über den Stab geschoben und die Auslenkungen $D_m(x)$ werden an den selben Stellen wie zuvor abgelesen.

Für die spätere Berechnung des Elastizitätsmoduls wird zusätzlich die Masse m des angehängten Gewichtes gewogen und die Länge L gemessen. Bei der Bestimmung der Länge ist anzumerken, dass der Einspannpunkt der Ort ist, an dem der Stab die Einspannungsvorrichtung verlässt. Zusätzlich wird die Höhe h des Stabes 5 mal gemessen. Der Versuch wird für einen Stab mit rundem und einen Stab mit quadratischem Querschnitt durchgeführt. Bei dem rundem Stab entspricht die Höhe $h = 2 \cdot R$.

3.2 Beidseitige Einspannung

Der Stab wird erneut wie in Abbildung 1 an der Stelle A eingespannt und diesmal zusätzlich bei B aufgelegt. Es wird erneut eine Nullmessung durchgeführt, wobei diesmal zu beachten ist, dass die Messuhr nur bis zur Mitte des Stabes geschoben werden darf.

Dabei ist es zunächst egal in welcher Hälfe gemessen wird. In dieser Versuchsdurchführung wurde sich für die Seite bei Einspannpunkt A entschieden. Anschließend wird in der Mitte des Stabes ein Gewicht eingehängt. Die Auslenkungen werden erneut an den selben Punkten wie bei der Nullmessung entnommen.

Anschließend wird die Masse m des Gewichtes und die Entfernung L vom Gewicht zum Einspannpunkt ermittelt. Zuletzt wird der Durchmesser $2 \cdot R$ des Stabes 5 mal gemessen.

4 Auswertung

4.1 Eckiger Stab, einseitige Einspannung

Die Gesamtauslenkung $D(x)$ des Stabes ergibt sich durch Subtraktion von $D_0(x)$ von $D_m(x)$. Die entnommenen Daten für die Länge L des Stabes und die Masse m des

Tabelle 1: Eckiger Stab, einseitige Einspannung

x / 10^{-3} m	$D_0(x)$ / 10^{-3} m	$D_m(x)$ / 10^{-3} m	$D(x)$ / 10^{-3} m	$(Lx^2 - \frac{x^3}{3})$ / 10^{-3} m
50	0,00	0,16	0,16	1,20
80	−0,23	0,08	0,31	3,00
110	−0,46	0,08	0,54	5,56
140	−0,67	0,15	0,82	8,81
170	−0,82	0,31	1,13	12,70
200	−0,91	0,54	1,45	17,17
230	−0,95	0,92	1,87	22,18
260	−0,99	1,34	2,33	27,76
290	−1,09	1,70	2,79	33,58
320	−1,19	2,06	3,25	39,87
350	−1,31	2,45	3,76	46,47
380	−1,46	2,77	4,23	53,33
410	−1,59	3,21	4,80	60,40
440	−1,66	3,64	5,30	67,63
470	−1,66	4,09	5,75	74,96

Gewichtes lauten:

$$L = 0{,}496\,\mathrm{m}$$
$$m = 1{,}1893\,\mathrm{kg}.$$

Die Höhe h wird nach

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{6}$$

gemittelt. Der zugehörige Fehler ergibt sich durch

$$\Delta\overline{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{\frac{1}{N{-}1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}. \tag{7}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= 10{,}11 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \\ h_2 &= 10{,}18 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \\ h_3 &= 10{,}36 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \\ h_4 &= 10{,}14 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \\ h_5 &= 10{,}14 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \\ h &= (10{,}19 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Die Berechnung des Elastizitätsmoduls E erfolgt dann über lineare Regression (Abbildung 2). Diese wurde mit ipython durchgeführt, wobei der Fehler direkt mitbestimmt wird. Dazu wird $D(x)$ gegen $(Lx^2 - \frac{x^3}{3})$ abgetragen. Bei der vorliegenden Ausgleichsge-

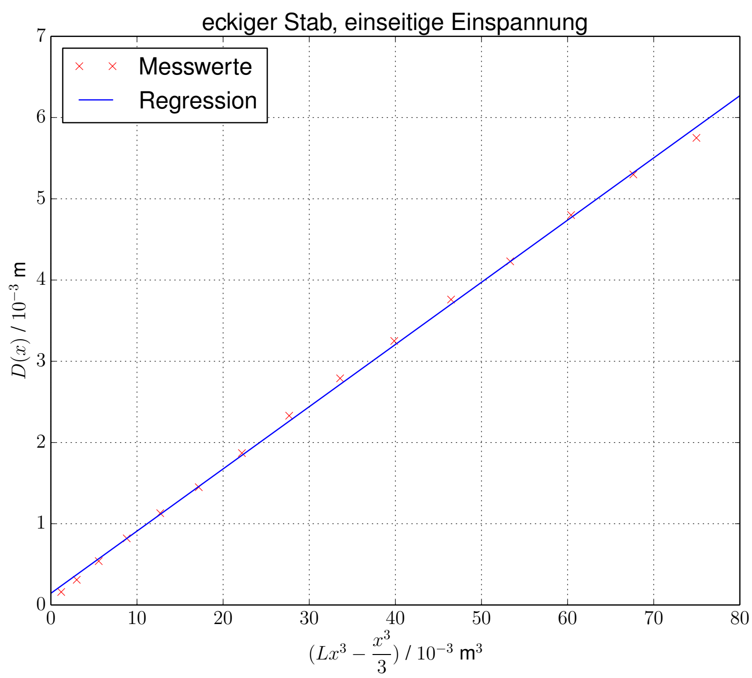

Abbildung 2: Eckiger Stab, einseitige Einspannung.

raden lauten die Werte für die Parameter a und b:

$$\begin{aligned} a &= (0{,}0766 \pm 0{,}0007)\,\frac{1}{\mathrm{m}^2} \\ b &= (0{,}14 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Mit Vergleich von Gleichung (3) und der allgemeinen Geradengleichung

$$y = a \cdot x + b \tag{8}$$

lässt sich der Elastizitätsmodul als

$$E = \frac{m \cdot g}{2 \cdot I \cdot a} \tag{9}$$

bestimmen. Dabei berechnet sich das Flächenträgheitsmoment I[3] durch

$$I_{\text{quadratisch}} = \frac{h^4}{12} = (898{,}0 \pm 1{,}4) \cdot 10^{-12}\,\text{m}^4. \tag{10}$$

Dabei wurde der Fehler mit Gauß'scher Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 \cdot (\Delta x_i)^2} \tag{11}$$

bestimmt. Der Fehler für E errechnet sich erneut mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung. Damit ergibt sich dann als Elastizitätsmodul

$$E = (85{,}0 \pm 0{,}2) \cdot 10^9\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Es wird davon ausgegangen, dass der Stab aus Messing war. Der zugehörige Literaturwerte[2, S. 624] beträgt $E_{\text{Literatur, Messing}} = 105 \cdot 10^9\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Dies entspricht einer Abweichung von 19.05%.

4.2 Runder Stab, einseitige Einspannung

In der nachfolgenden Tabelle finden sich die verschiedenen Auslenkungen $D(x)$. Die entnommenen Daten für die Länge L des Stabes und die Masse m des Gewichtes lauten:

$$L = 0{,}497\,\text{m}$$
$$m = 0{,}5212\,\text{kg}.$$

Der Radius R wird erneut nach Gleichung (6) gemittelt und der Fehler wird nach Gleichung (7) angegeben.

$$R_1 = 5{,}00 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$
$$R_2 = 4{,}96 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$
$$R_3 = 4{,}97 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$
$$R_4 = 5{,}03 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$
$$R_5 = 4{,}99 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$
$$R = (4{,}99 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

Tabelle 2: Runder Stab, einseitige Einspannung

x / 10^{-3} m	$D_0(x)$ / 10^{-3} m	$D_m(x)$ / 10^{-3} m	$D(x)$ / 10^{-3} m	$(Lx^2 - \frac{x^3}{3})$ / 10^{-3} m
50	0,00	0,11	0,11	1,20
80	−0,17	0,09	0,26	3,01
110	−0,26	0,13	0,39	5,57
140	−0,37	0,25	0,62	8,83
170	−0,44	0,43	0,87	12,73
200	−0,45	0,69	1,14	17,21
230	−0,42	1,06	1,48	22,24
260	−0,39	1,40	1,79	27,74
290	−0,39	1,75	2,14	33,67
320	−0,37	2,17	2,54	39,97
350	−0,34	2,62	2,96	46,59
380	−0,33	3,05	3,38	53,48
410	−0,25	3,54	3,79	60,57
440	−0,17	4,03	4,20	67,82
470	−0,07	4,58	4,65	75,18

Zur Berechnung des Elastizitätsmoduls E wird erneut eine lineare Regression, wobei $D(x)$ gegen $(Lx^2 - \frac{x^3}{3})$ abgetragen wird, durchgeführt. Die Steigung a und der Ordinatenabschnitt b der Ausgleichsgerade sind

$$a = (0{,}0612 \pm 0{,}0003)\,\frac{1}{\mathrm{m}^2}$$
$$b = (0{,}08 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

Die Berechnung erfolgt analog zum eckigen Stab, wobei das Flächenträgheitsmoment I[3] nun durch

$$I_{\text{rund}} = \frac{\pi}{4} \cdot R^4 = (487{,}0 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^4 \tag{12}$$

berechnet wird. Dabei wurde der Fehler nach (11) bestimmt. Mit Hilfe von Gleichung (9) und (11) kann für den runden Stab der Elastizitätsmodul als

$$E = (85{,}7 \pm 0{,}8) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

angegeben werden. Der ermittelte Wert lässt verglichen mit dem Wert vom eckigen Stab auf das gleiche Material schließen[2, S. 624]:

$$E_{\text{Literatur, Messing}} = 105 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

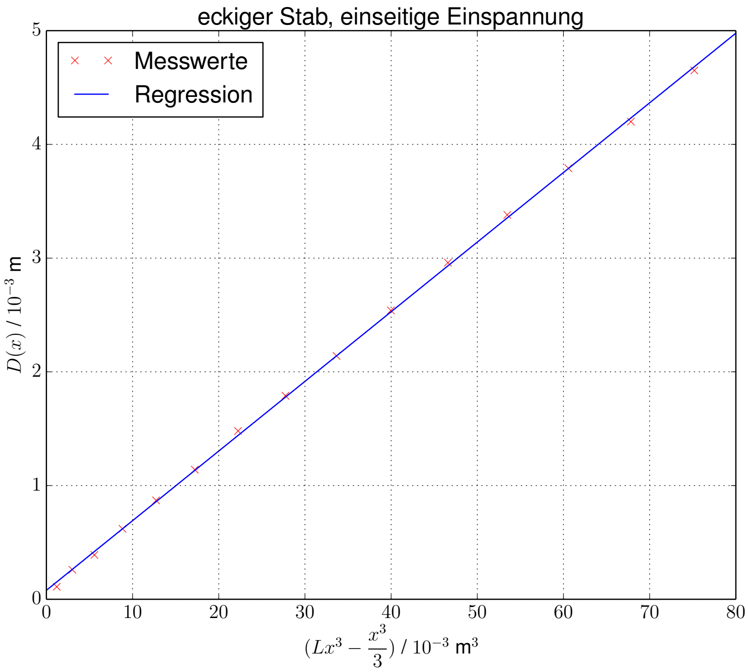

Abbildung 3: Runder Stab, einseitige Einspannung.

4.3 Runder Stab, beidseitige Einspannung

Die für die Berechnung notwendigen Auslenkungen $D(x)$ finden sich in Tabelle 3. Die Länge L des Stabes und die Masse m des Gewichtes wurden auf

$$L = 0{,}555\,\mathrm{m}$$
$$m = 3{,}5221\,\mathrm{kg}$$

bestimmt. Die Daten für den Radius R lauten:

$$R_1 = 5{,}07 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$
$$R_2 = 4{,}98 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$
$$R_3 = 5{,}02 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$
$$R_4 = 5{,}03 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$
$$R_5 = 4{,}99 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$
$$R = (5{,}02 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

Dabei wurde nach Formel (6) der Mittelwert und nach Formel (7) der Fehler bestimmt. Bei der beidseitigen Einspannung wird für die lineare Regression $D(x)$ gegen $(3L^2x–4x^3)$ abgetragen. Für die Steigung a und den Ordinatenabschnitt b der Ausgleichsgeraden

Tabelle 3: runder Stab, beidseitige Einspannung

x / 10^{-3} m	$D_0(x)$ / 10^{-3} m	$D_m(x)$ / 10^{-3} m	$D(x)$ / 10^{-3} m	$(3L^2x - 4x^3)$ / 10^{-3} m
40	0,00	0,19	0,19	36,71
60	−0,10	0,17	0,27	54,58
80	−0,17	0,22	0,39	71,88
100	−0,25	0,28	0,53	88,41
120	−0,31	0,36	0,67	103,98
140	−0,37	0,45	0,82	118,39
160	−0,41	0,56	0,97	131,47
180	−0,41	0,73	1,14	143,01
200	−0,42	0,85	1,27	152,82
220	−0,41	1,01	1,42	160,70
240	−0,40	1,11	1,51	166,48
260	−0,39	1,21	1,60	169,96

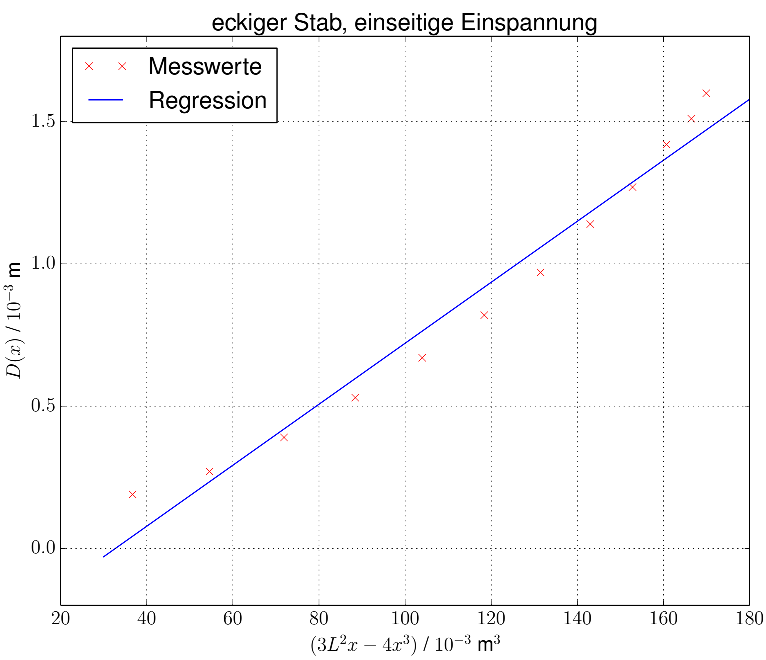

Abbildung 4: runder Stab, beidseitige Einspannung.

ergeben sich die Werte

$$a = (0{,}0107 \pm 0{,}0006)\,\frac{1}{\mathrm{m}^2}$$
$$b = (-0{,}35 \pm 0{,}07) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

Der Elastizitätsmodul E berechnet sich in dem hier betrachteten Fall durch

$$E = \frac{m \cdot g}{48 \cdot I \cdot a} \tag{13}$$

Es wird das Flächenträgheitsmoment I wie in Formel (12) benutzt:

$$I = (499{,}0 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^4$$

Der Fehler wird mit Gauß'scher Fehlerfortpflanzung (11) ermittelt.

$$E = (135{,}0 \pm 0{,}8) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Anhand der Farbe und der Beschaffenheit des Materials wird davon ausgegangen, dass es sich um Aluminium handelt. Der Literaturwert[4] beträgt:

$$E_{\text{Literatur, Aluminium}} = 70 \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

Dies entspricht einer Abweichung von 92.86%.

5 Diskussion

Die Abweichung von circa 20% bei den ersten beiden Stäben liegt innerhalb der Toleranz der Messgenauigkeit. Da mit zwei Stäben, von unterschiedlichem Querschnitt, jedoch innerhalb der Fehlertoleranz das gleiche Ergebnis für E erhalten wurde, sind statistische Fehler unwahrscheinlich. Ein systematischer Fehler könnte an der Kalibrierung der Messuhr gelegen haben, weshalb eine weitere Überprüfung der Daten mit einer anderen Messuhr notwendig ist.

Unter Berücksichtigung des oben genannten vermuteten systematischen Fehler, muss auch der dritte Stab neu überprüft werden. Wird dabei bedacht, dass die Ausgleichsgerade bei dieser Messung zum Teil weit von den Messdaten abweicht, so lässt sich auch die große Abweichung von 92.86% erklären. Die Bestimmung des Materials als Aluminium kann anhand dieses Experimentes nicht mit zufriedenstellender Genauigkeit bestätigt werden.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 103, Biegung elastischer Stäbe*. 2014.

[2] Horst Kuchling. „Tabelle 9“. In: *Taschenbuch der Phyik* 20. Auflage (2011).

[3] Universität Siegen. *Flächenträgheitsmomente einiger Querschnitte*. 27. Okt. 2014. eprint: `http://www.bau.uni-siegen.de/subdomains/bauinformatik/lehre/tm2/arbeitsblaetter/arbeitsblatt_08_flaechentraegheitsmomente_bsp.pdf`.

[4] Universität Würzburg. *Elastizitätsmodul*. 9. Nov. 2014. eprint: `http://www.physik.uni-wuerzburg.de/~praktiku/Anleitung/V23.pdf`.