

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
1.1	Allgemeine Relaxationsgleichung	2
1.2	Entladekurve eines Kondensators	2
1.3	Relaxationsverhalten bei angelegten Wechselspannungen	3
1.4	Integrationsverhalten des RC-Kreises	3
2	Aufbau und Durchführung	4
2.1	Messreihe zur Bestimmung der Zeitkonstanten im RC-Kreis	4
2.2	Messreihe zur Bestimmung der Spannungsamplitude des Kondensators im RC-Kreis	4
2.3	Messreihe zur Bestimmung der Phasenverschiebung im RC-Kreis	4
2.4	Messreihe zur Bestätigung der Integratorfunktion des RC-Kreises	5
3	Auswertung	6
4	Diskussion	12

1 Theorie

1.1 Allgemeine Relaxationsgleichung

Eine Relaxationszeit ist die Zeit, die zwischen dem Auslenken eines Systems aus einem Ausgangszustand und dem Zurückkehren in den Ausgangszustand vergeht. Dies gilt jedoch nicht für schwingende Systeme. In diesem Versuch wird die Entladung eines Kondensators über einen Widerstand als Beispiel für ein Relaxationsphänomen gewählt. Nun wird zunächst allgemein die Änderungsgeschwindigkeit einer Größe A betrachtet. Sie ist abhängig vom Grenzwert der Größe $A(\infty)$.

Aus

$$\frac{dA}{dt} = c[A' - A(\infty)] \quad (1)$$

folgt

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] \cdot e^{ct} \quad (2)$$

Dabei muss $c < 0$ sein, da $A(t)$ sonst nicht beschränkt ist.

1.2 Entladekurve eines Kondensators

Auf einem Kondensator mit der Kapazität C und der Ladung Q liegt eine Spannung U_C an:

$$U_C = \frac{Q}{C}.$$

Die Spannung führt zu dem Strom I durch den Widerstand R (Ohm'sches Gesetz):

$$I = \frac{U_C}{R}.$$

Auf dem Kondensator verändert sich die Ladung Q pro Zeiteinheit um

$$dQ = -Idt.$$

Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q(t)}{RC}, \quad (3)$$

die eine ähnliche Form wie Formel (1) hat.

Daraus ergibt sich unter Beachtung des nicht erreichbaren Grenzwerts $Q(\infty)$

$$Q(t) = Q(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4)$$

1.3 Relaxationsverhalten bei angelegten Wechselspannungen

Allgemein kann eine Wechselspannung durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t). \quad (5)$$

Es bildet sich eine Phasenverschiebung zwischen der eingehenden Wechselspannung und der vom Kondensator verzögerten ausgehenden Wechselspannung aus.

Damit kann man die ausgehende Wechselspannung als

$$U_C(t) = A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \phi(\omega)) \quad (6)$$

beschrieben werden, mit der Kondensatorspannungsamplitude A.

Des weiteren gilt

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \quad (7)$$

Aus den Kirchhoff'schen Gesetzen, der Formel (3), Formel (7) und weiteren Überlegungen folgt dann

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (8)$$

1.4 Integrationsverhalten des RC-Kreises

Ein RC-Kreis kann unter gewissen Voraussetzungen als Integrator dienen. Hierfür muss $\omega \gg \frac{1}{RC}$ sein. Folgende Gleichung

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = R \cdot I(t) + U_C(t)$$

führt zu

$$U(t) = RC \cdot \frac{dU_C(t)}{dt} + U_C(t).$$

Unter der Voraussetzung $\omega \gg \frac{1}{RC}$ folgt dann:

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' \quad (9)$$

2 Aufbau und Durchführung

2.1 Messreihe zur Bestimmung der Zeitkonstanten im RC-Kreis

In der ersten Messreihe die Zeitkonstante gemessen. Die aufgebaute Schaltung wird durch Abbildung 1 beschrieben. Es ist ein Kondensator mit der Kapazität C und ein Widerstand mit dem Ohm'schen Widerstand R zu sehen. Diese sind an einen Spannungsgenerator und ein Oszilloskop angeschlossen. Am Spannungsgenerator wird eine Rechteckspannung $U_0(t)$ eingestellt. Auf dem Oszilloskop sind die Auflade- und Entladevorgänge im Spannungsverlauf des Kondensators $U_C(t)$ zu sehen. Mit der Cursorfunktion des Oszilloskops werden 30 Werte für $U_C(t)$ abgelesen.

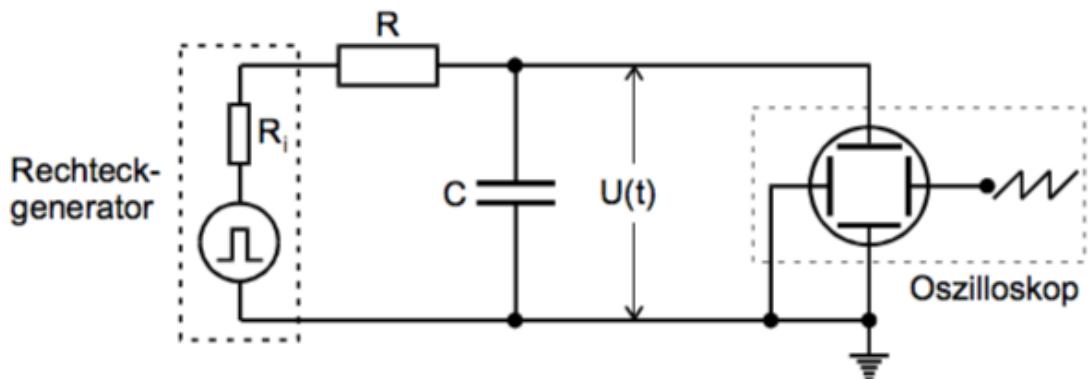


Abbildung 1: Aufbau der Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten [1]

2.2 Messreihe zur Bestimmung der Spannungsamplitude des Kondensators im RC-Kreis

In der zweiten Messreihe wird die Spannungsamplitude der Kondensatorspannung gemessen. Für diese Messreihe bleibt die Schaltung unverändert. Der Spannungsgenerator wird auf Sinusspannungen $U_0(t)$ eingestellt. Die Frequenz f der Spannung wird logarithmisch gesteigert. Die jeweiligen Amplituden A werden mit dem dazugehörigen Frequenzwert notiert. Insgesamt werden 30 Werte gemessen.

2.3 Messreihe zur Bestimmung der Phasenverschiebung im RC-Kreis

Die dritte Messreihe beschäftigt sich mit der Phasenverschiebung der Spannung am Kondensator und der generierten Spannung. Die Schaltung wird zur Schaltung in Abbildung 2 geändert. Nun werden weiterhin Sinusspannungen generiert. Auf dem Oszilloskop sind nun zwei Spannungsverläufe zu sehen: der Spannungsverlauf am Kondensator $U_C(t)$ und der Spannungsverlauf der generierten Spannung $U_G(t)$. Wie in Abbildung 3 beschrieben, wird die Differenz der Nullstellen a beider Kurven und die Wellenlänge b der Kurve $U_0(t)$ gemessen. Die Messung wird für 28 verschiedene Frequenzen gemacht. Die Frequenzen werden logarithmisch gesteigert.

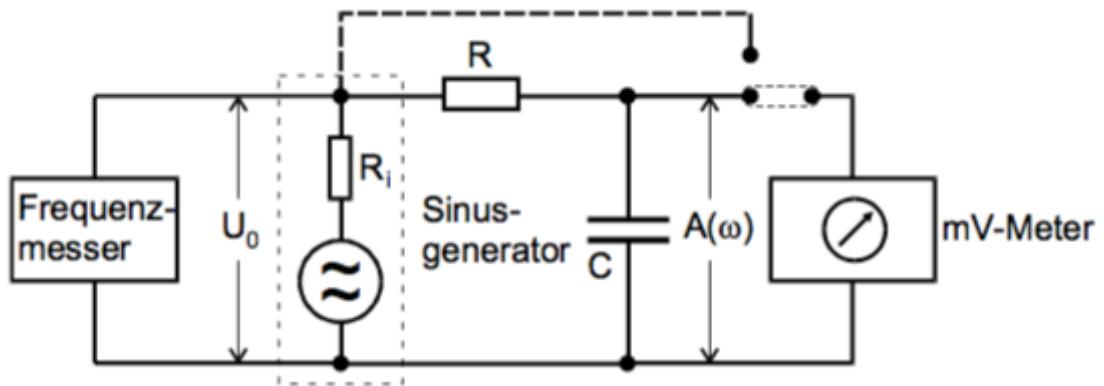


Abbildung 2: Aufbau der Schaltung zur Bestimmung der Phasenverschiebung [1]

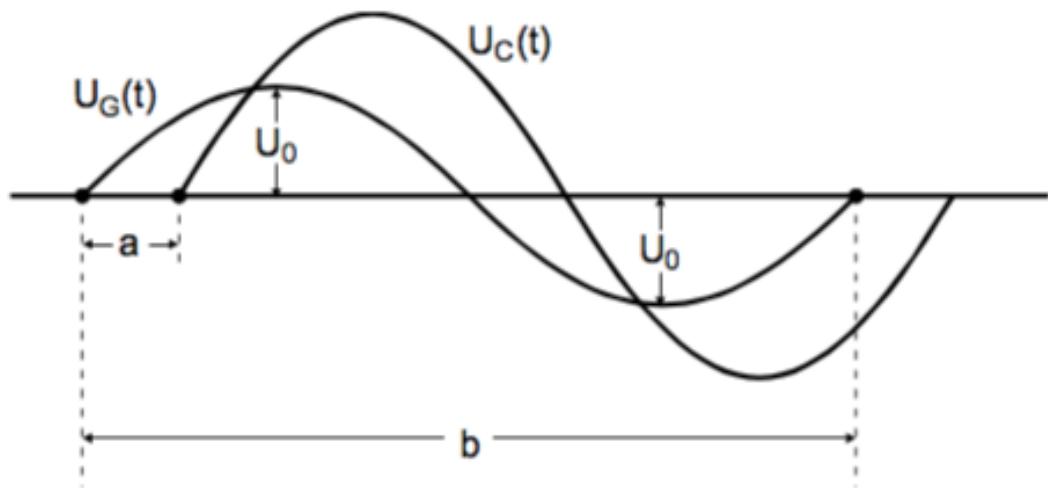


Abbildung 3: Skizze zur Bestimmung der Phasenverschiebung [1]

Aus dem Abstand der Nullstellen a und der Wellenlänge b berechnet sich die Phasenverschiebung über

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi. \quad (10)$$

2.4 Messreihe zur Bestätigung der Integratorfunktion des RC-Kreises

Für die vierte Messreihe wird der Aufbau abgeändert zur Schaltung in Abbildung 4. Auf dem Oszilloskop sind nun der generierte Spannungsverlauf $U_0(t)$ und der integrierte Spannungsverlauf $U_C(t)$ zu sehen. Zunächst wird eine Rechteckspannung am Spannungsgenerator eingestellt. Als zweites wird eine Dreieckspannung generiert. Die letzte Einstellung ist eine Sinusspannung. Von allen drei Bildern auf dem Oszilloskop werden Thermodrücke angefertigt.

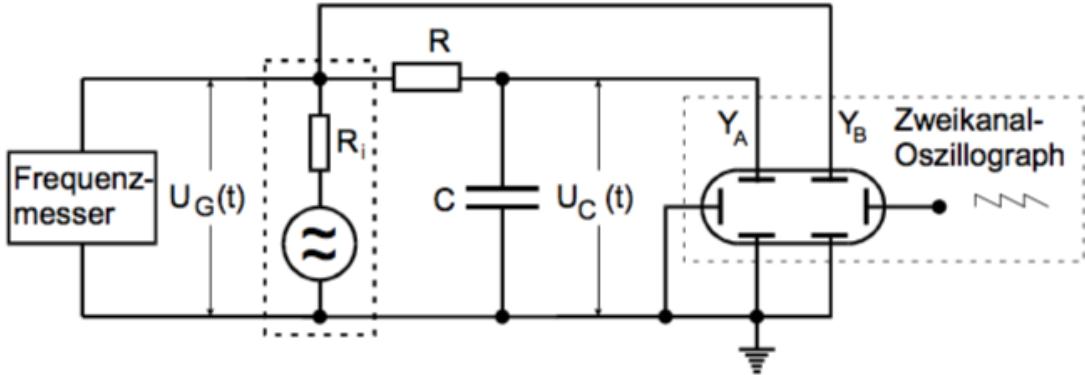


Abbildung 4: Aufbau der dritten Schaltung [1]

3 Auswertung

Bei einem Spannungsabfall eines Kondensators werden Wertepaare genommen. Diese sind in der Tabelle 1 aufgelistet. In einem halblogarithmischen Diagramm werden die Wertepaare dargestellt. Durch eine lineare Ausgleichsgerade kann in der Abbildung 5 die Steigung ermittelt werden. Über die Gleichung (4) lässt sich RC bestimmen. Die entsprechende Ausgleichsrechnung hat die Form:

$$\ln\left(\frac{U_c}{U_0}\right) = -\frac{1}{RC} \cdot t + b.$$

Die Parameter ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} RC &= (1,57 \pm 0,60) \cdot 10^{-3} \text{ s} \\ b &= (2,780\,000\,00 \pm 3,533\,238\,39) \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Die nächste Methode zur Bestimmung der Zeitkonstanten erfolgt mit Hilfe der Frequenz und der anliegenden Spannung der Wechselspannungsquelle. Die Werte sind in der Tabelle 2 aufgeführt. Über die Abbildung 6 und einer Ausgleichsrechnung, mit Hilfe von Gleichung (8) lässt sich der Wert für die Zeitkonstante bestimmen.

Die Ausgleichsrechnung hat die Form:

$$U_c = \exp(-af + b).$$

Als Parameter ergeben sich:

$$\begin{aligned} a &= 0,003\,09 \pm 0,000\,14 \\ b &= 2,291\,20 \pm 0,015\,29. \end{aligned}$$

Tabelle 1: Messdaten zur Entladekurve

U_c/V	$\ln\left(\frac{U_c}{U_0}\right)$	T/s	U_c/V	$\ln\left(\frac{U_c}{U_0}\right)$	T/s
19,2	-0,0408	0,0045	3,6	-1,7148	0,0069
17,2	-0,1508	0,0047	3,4	-1,7719	0,0071
15,2	-0,2744	0,0048	3,0	-1,8971	0,0072
13,6	-0,3857	0,0050	2,8	-1,9661	0,0074
12,2	-0,4943	0,0052	2,4	-2,1203	0,0076
11,0	-0,5978	0,0053	2,2	-2,2073	0,0077
9,8	-0,7133	0,0055	2,0	-2,3026	0,0079
8,6	-0,8440	0,0056	2,0	-2,3026	0,0080
7,8	-0,9416	0,0058	1,8	-2,4079	0,0082
7,0	-1,0498	0,0059	1,8	-2,4079	0,0084
6,4	-1,1394	0,0061	1,6	-2,5257	0,0085
5,6	-1,2730	0,0063	1,4	-2,6593	0,0087
5,2	-1,3471	0,0064	1,0	-2,9957	0,0088
4,6	-1,4697	0,0066	1,0	-2,9957	0,0090
4,2	-1,5606	0,0068	1,0	-2,9957	0,0092

Tabelle 2: Messdaten zur Frequenz

U_c/V	f/Hz	U_c/V	f/Hz
9,2	10	1,72	600
9,4	20	1,48	700
9,2	30	1,32	800
9,0	40	1,18	900
8,6	50	1,06	1000
8,2	60	0,536	2000
8,2	70	0,360	3000
8,0	80	0,264	4000
7,44	90	0,212	5000
7,12	100	0,176	6000
4,64	200	0,152	7000
3,32	300	0,134	8000
2,60	400	0,120	9000
2,12	500	0,106	10000
1,72	600	0,0544	20000
1,48	700	0,0368	30000

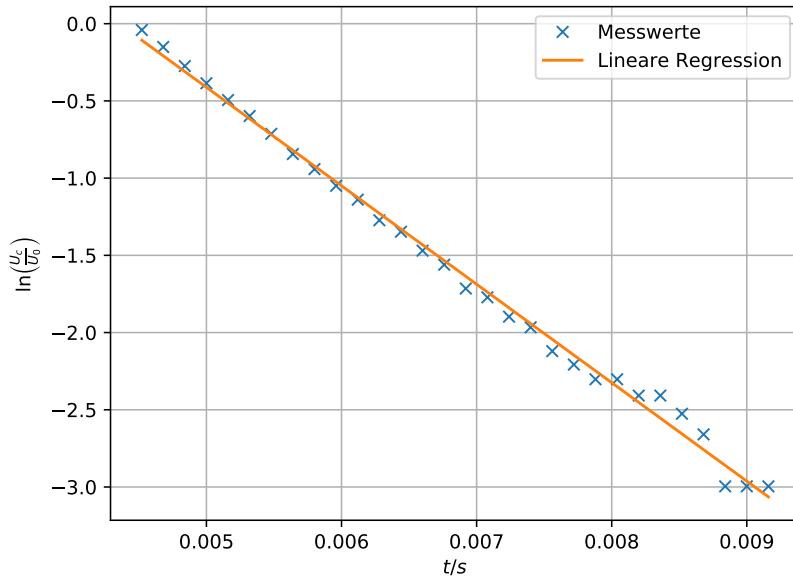


Abbildung 5: Lineare Regression zur Bestimmung der Zeitkonstanten mithilfe der Entladekurve

Damit ergibt sich

$$RC = (3,09 \pm 0,14) \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

In einer dritten Methode wird die Zeitkonstante mit Hilfe der Phasenverschiebung zwischen Generatorenspannung und Kondensatorspannung ermittelt. Die bestimmung der Phasenverschiebung ϕ erfolgt über die Formel (10). Die Werte sind in der Tabelle 3 aufgeführt. Die Ausgleichsrechnung hat die Form

$$\phi = a \arctan(bx).$$

Als Parameter ergeben sich:

$$\begin{aligned} a &= 0,999\,911\,520\,000 \pm 0,015\,781\,563\,484 \\ b &= 0,008\,163\,720\,000 \pm 0,000\,586\,744\,095. \end{aligned}$$

Für RC ergibt sich ein Wert von

$$RC = (8,163\,72 \pm 0,586\,74) \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

Über die Tabelle 4 lässt sich ein Polarplot (Abb. ??) erstellen.

Um die Integrierbarkeit der RC-Spannung zu zeigen wird der Erwartungswert mit dem Realwert vom Oszilloskop verglichen. Da sich Erwartungs- und Realwert decken ist gezeigt das die RC Spannung integriabel ist.

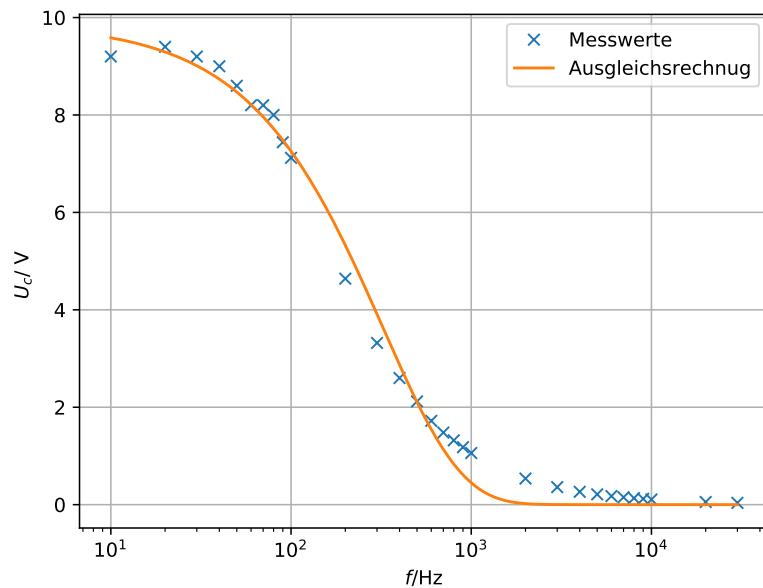


Abbildung 6: Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Zeitkonstanten mithilfe der Messung der Frequenz

Tabelle 3: Messdaten zur Phasenverschiebung

ϕ/rad	f/Hz	ϕ/rad	f/Hz
0,1309	10	1,3792	600
0,2094	20	1,4362	700
0,3142	30	1,4420	800
0,3142	40	1,5126	900
0,2618	50	1,5387	1000
0,4712	60	1,7511	2000
0,5544	70	1,5708	3000
0,6283	80	1,4661	4000
0,6981	90	1,4105	5000
0,6545	100	1,4137	6000
0,9425	200	1,5259	7000
1,0996	300	1,6480	8000
1,2360	400	1,5126	9000
1,2823	500	1,5387	10000

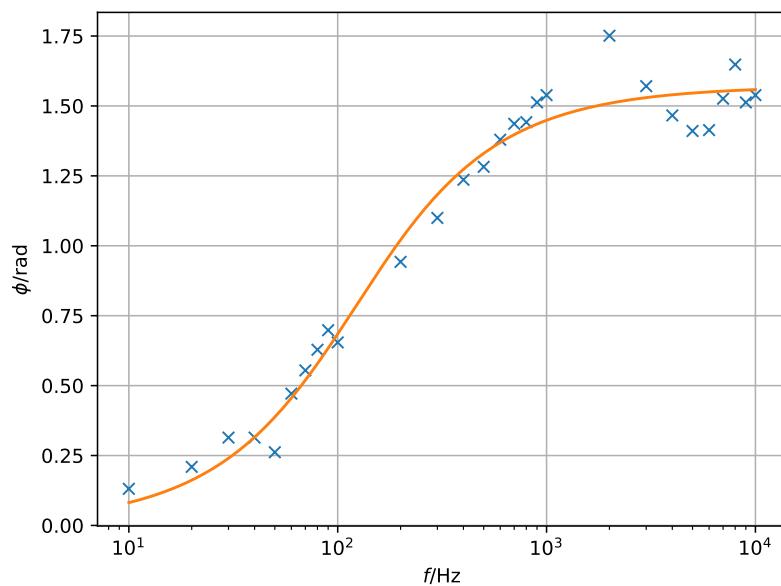


Abbildung 7: Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Zeitkonstanten mithilfe der Phasenverschiebung

Tabelle 4: Messdaten zur Phasenverschiebung für den Polarplot

U_c/V	ϕ/rad	U_c/V	ϕ/rad
0,92	0,1301	0,172	1,3792
0,94	0,2094	0,148	1,4362
0,92	0,3142	0,132	1,4420
0,9	0,3142	0,118	1,5126
0,86	0,2618	0,106	1,5387
0,82	0,4712	0,0536	1,7511
0,82	0,5544	0,036	1,5708
0,8	0,6283	0,0264	1,4661
0,744	0,6981	0,0212	1,4105
0,712	0,6545	0,0176	1,4137
0,464	0,9425	0,0152	1,5259
0,332	1,0996	0,0134	1,6480
0,26	1,2360	0,012	1,5126
0,212	1,2823	0,0106	1,5387

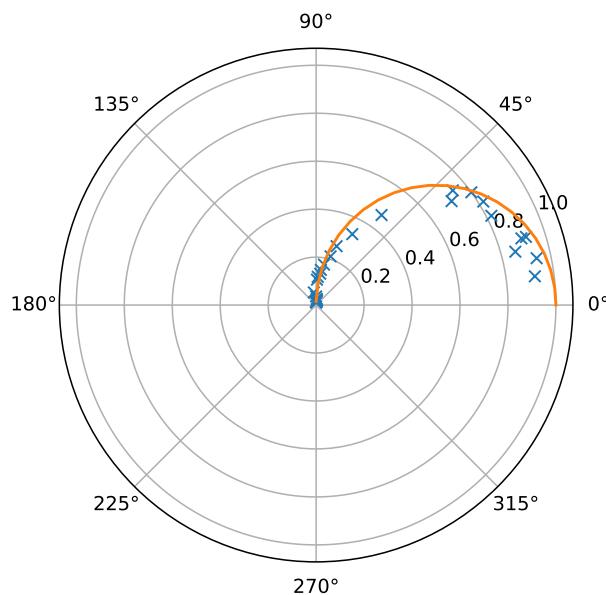
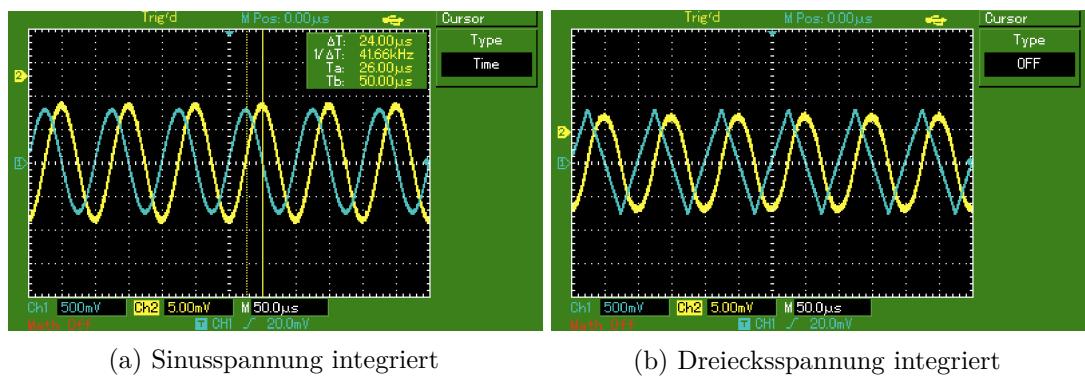


Abbildung 8: Polarplot zur Beobachtung der Phasenverschiebung zwischen der Generator- und Kondensatorspannung.



(a) Sinusspannung integriert

(b) Dreiecksspannung integriert

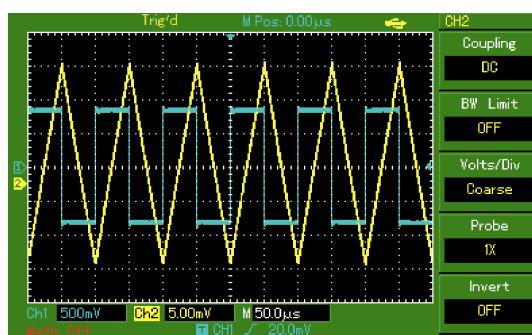


Abbildung 10: Rechteckspannung integriert

4 Diskussion

Auffällig ist, dass die Werte der Zeitkonstanten nah bei einander liegen und generell die experimentellen Graphen meist den theoretischen, erwarteten Graphen sehr ähnlich sind. Die Entladekurve des Kondensators entspricht einem erwarteten exponentiellen Abfall der Spannung. Die Amplitude der Kondensatorspannung sinkt mit zunehmender Frequenz ebenfalls wie erwartet exponentiell. Auch die Phasenverschiebung bleibt wie erwartet zwischen 0 und $\pi/2$. Die Zeitkonstante kann über die drei Messreihen ausgerechnet werden. Der genauen Wert für der Zeitkonstante kann nicht weiter berechnet werden, da der Ohm'sche Widerstand R des Widerstand und die Kapazität C des Kondensators nicht gegeben sind und keine Messgeräte vorhanden sind. Die gemessene Zeitkonstante über die Methode der Entladung des Kondensators ist 1.98 mal kleiner als die Zeitkonstante aus der Messreihe zur Methode der Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz. Die Zeitkonstante aus der Messung der Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz ist 2.64 mal kleiner als der Wert aus der Methode über die Phasenverschiebung zwischen Generator- und Kondensatorspannung. Diese Abweichungen können unter anderem daher kommen, dass eine geringer Ablesefehler auf dem Oszilloskop nicht ausgeschlossen werden kann.

Literatur

- [1] TU Dortmund. In: *Versuchsanleitung V353*.

V353 Relaxationszeit eines RC-Kreises

24/11/17

~~Zeitkonstante bestimmen~~

Messreihe: Messung der Zeitkonstante

T_a, V_b aufgetragen:

#	V _b / V	$\tau_a \cdot 10^{-3}$ s
1	9,20	4,52
2	7,00	4,68
3	5,20	4,84
4	3,60	5,00
5	2,20	5,16
6	1,00	5,32
7	-0,2	5,48
8	-1,4	5,64
9	-2,2	5,8
10	-3,00	5,96
11	-3,6	6,12
12	-4,4	6,28
13	-4,8	6,44
14	-5,4	6,6
15	-5,8	6,76
16	-6,4	6,92
17	-6,6	7,08
18	-7,0	7,24
19	-7,2	7,4
20	-7,60	7,56
21	-7,8	7,72
22	-8,0	7,88

Abbildung 11: Originale Messdaten

23	-8,0	8,04
24	-8,2	8,20
25	-8,2	8,36
26	-8,40	8,52
27	-8,6	8,68
28	-9,0	8,84
29	-9,0	8,0
30	-9,0	9,16

7

Messreihe: Amplitude der Kondensatorspannung

#	U _o / V	f / Hz
1	9,2	10
2	9,4	20
3	9,2	30
4	9,0	40
5	8,6	50
6	8,2	60
7	8,2	70
8	8,0	80
9	7,44	90
10	7,12	100
11	4,64	200
12	3,32	300
13	2,60	400
14	2,12	500
15	1,72	600
16	1,48	700
17	1,32	800
18		0

Abbildung 12: Originale Messdaten

18	1,18	900	
19	1,06	1000	
20	0,9536	2000	
21	0,1360	3000	
22	0,264	4000	
23	0,1212	5000	
24	0,176	6000	
25	0,1152	7000	
26	0,1134	8000	
27	0,120	9000	
28	0,1106	10000	
29	0,0544	20000	
30	0,0368	30000	

Messreihe	a/ ^{ms}	b/ms	f/Hz
1	20	100	10
2	2,4	48	20
3	2,4	31,2	30
4	2	23,2	40
5	1,6	18,4	50
6	1,6	15,2	60
7	1,6	12,8	70
8		10,8	80
9			90
10			100
11			
12			
13			

Abbildung 13: Originale Messdaten

Messreihe	Phasenverschiebung		
#	a/m/s	b/m/s	f/Hz
1	2	96	10
2	1,6	48	20
3	1,6	32	30
4	1,2	24	40
5	0,8	19,2	50
6	1,2	16	60
7	1,2	13,6	70
8	1,2	12,0	80
9	1,2	10,8	90
10	1,0	9,6	100
11	0,72	4,8	200
12	0,56	3,2	300
13	0,48	2,44	400
14	0,4	1,96	500
15	0,36	1,64	600
16	0,32	1,40	700
17	0,28	1,22	800
18	0,26	1,08	900
19	0,24	0,98	1000
20	0,136	0,488	2000
21	0,08	0,32	3000
22	0,056	0,1924	4000
23	0,044	0,196	5000
24	0,036	0,16	6000
25	0,034	0,14	7000
26	0,032	0,122	8000

Abbildung 14: Originale Messdaten

27	0,026	0,108	8000	79
28	0,024	0,098	10000	

Abbildung 15: Originale Messdaten