

V402 Dispersionsmessung am Glasprisma

Katharina Brägelmann Tobias Janßen
katharina.braegelmann@tu-dortmund.de
tobias2.janssen@tu-dortmund.de

Durchführung: 12. Juni 2018, Abgabe: 19. Juni 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
3	Aufbau und Durchführung	8
4	Auswertung	11
5	Diskussion	15

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Dispersion in einem Glasprisma untersucht, indem der Brechungsindex gemessen wird.

2 Theorie

Licht bewegt sich im Vakuum mit der bekannten Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c_0 . In Medien kommt es zu einer Wechselwirkung des Lichts mit dem Material und die Ausbreitungsgeschwindigkeit c verringert sich. Trifft eine Lichtwelle in einem Winkel auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien, dann kommt es zur Lichtbrechung, also einer Änderung der Ausbreitungsrichtung. An dieser Grenzfläche ist die Richtungsänderung abhängig von den Lichtgeschwindigkeiten in den jeweiligen Medien. Dies lässt sich im Brechungsindex n zusammenfassen:

$$n = \frac{c_1}{c_2}. \quad (1)$$

Das Huygens'sche Prinzip sagt nun, dass jeder einzelne Oszillator einer Welle der Ausgangspunkt einer neuen Welle sein kann. Beim schrägen Auftreffen auf eine Grenzfläche kommen nun mehrere Oszillatoren leicht zeitversetzt an der Grenzfläche an (Abb. 1). Im ersten Medium benötigt die Welle die Zeit T um die Strecke \overline{BC} zurückzulegen:

$$\overline{BC} = c_1 T.$$

Außerdem lässt sich die Winkelbeziehung

$$\overline{BC} = \overline{AC} \sin(\alpha) = c_1 T \Leftrightarrow c_1 = \sin(\alpha) \frac{\overline{AC}}{T}$$

aufstellen. Wenn die Welle im Punkt C angekommen ist, ist im Punkt A bereits eine neue Welle im zweiten Medium entstanden und hat sich bis zum Punkt A' fortbewegt. Für die Strecke $\overline{AA'}$ im zweiten Medium braucht die Welle ebenfalls die Zeit T :

$$\overline{AA'} = c_2 T.$$

Erneut lässt sich eine Winkelbeziehung aufstellen:

$$\overline{AA'} = \overline{AC} \sin(\beta) = c_2 T \Leftrightarrow c_2 = \sin(\beta) \frac{\overline{AC}}{T}.$$

Das Verhältnis beider Lichtgeschwindigkeiten beschreibt nach Gleichung (1) den Brechungsindex n :

$$n = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}. \quad (2)$$

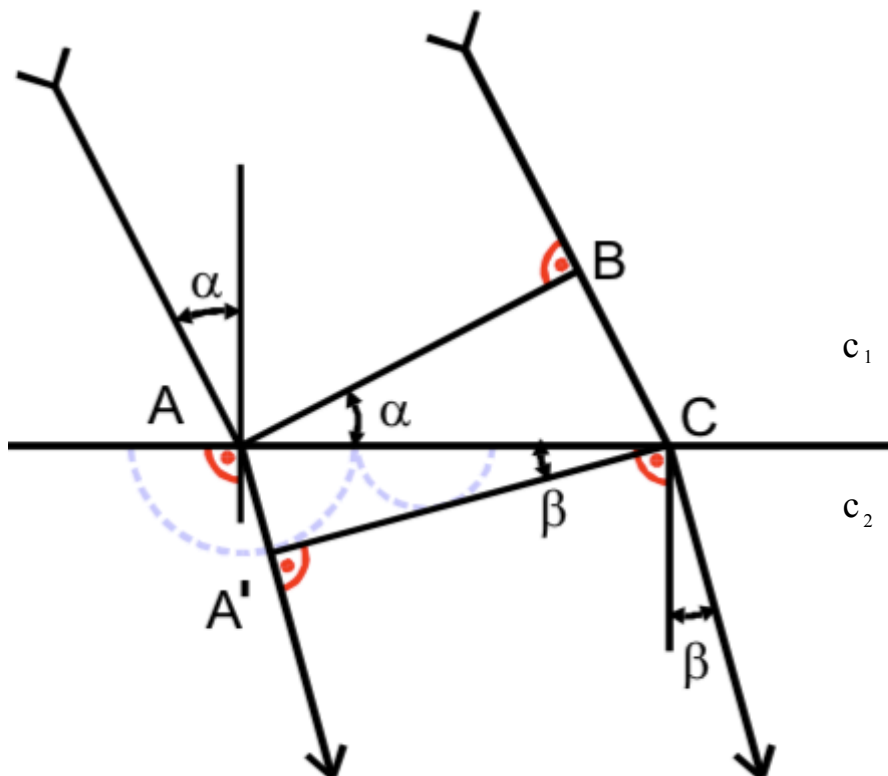


Abbildung 1: Lichtbrechung durch das Huygens'sche Prinzip [1]

Der Brechungsindex n ist aber auch von der Energie E des Lichts abhängig. Die Energie lässt sich mit dem Planck'schen Wirkungsquantum h und der Frequenz ν als

$$E = h\nu = \frac{hc_0}{\lambda}$$

schreiben. Mit der Beziehung $c_0 = \nu/\lambda$ wird die Wellenlängenabhängigkeit des Energie deutlich. Damit ist der Brechungsindex n abhängig von der Wellenlänge des Lichts λ : $n(\lambda)$. Diese Abhängigkeit wird Dispersion genannt. Die Dispersion lässt sich allgemeiner über die Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c(\nu)$ definieren.

Wie bereits anfänglich beschrieben, gibt es eine Wechselwirkung des Lichts mit der Materie beim Durchlaufen eines Mediums. Diese Wechselwirkung wird nun genauer betrachtet um die Dispersionsgleichung herzuleiten. Das Licht setzt sich aus einem elektrischen und einem magnetischen Feld zusammen. Fällt also eine Lichtwelle durch ein Material, wirkt auf das Material die resultierende Kraft F_E durch das elektrische Feld E :

$$\vec{F}_E = qE = q\vec{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Allgemein erfährt ein Teilchen im Medium bei der Beschleunigung a die Kraft F_a :

$$F_a = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Auf dasselbe Teilchen wirkt eine rücktreibende Kraft $F_{\text{rücktreibend}}$:

$$F_{\text{rücktreibend}} = bx.$$

Außerdem wirkt die Reibungskraft F_{Reibung} :

$$F_{\text{Reibung}} = f \frac{dx}{dt}.$$

Die Summe der Kräfte dann zur Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + bx = q \vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (3)$$

Die Bewegungsgleichung lässt sich auch durch die Polarisierung ausdrücken. Die Polarisierung beschreibt die Verschiebung der Teilchen in der Materie durch das magnetische Feld der Lichtwelle. Die Polarisierung ergibt sich dann als Summe P aller Dipolmomente $d = qx$:

$$P = \sum N_h q_h x_h.$$

Damit lässt sich die Bewegungsgleichung (3) umschreiben zu

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + \frac{f}{m} \frac{dP}{dt} + \frac{b}{m} P = \frac{N q^2 E_0}{m} e^{i\omega t}.$$

Die Lösung der obigen Dispersionsgleichung lautet

$$P = \frac{N q^2}{m (\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f}{m} \omega)} E_0 e^{i\omega t}.$$

Dies beschreibt die Polarisierung pro Teilchen. Die gesamte Polarisierung ist also die Summe aller Polarisierungen. Wird die Polarisierung P durch die dielektrische Verschiebung $P = (\epsilon - 1) \epsilon_0 \vec{E}$ ersetzt, lässt sich mithilfe der Maxwell'schen Relation $n^2 = \epsilon$ schreiben:

$$n^2 = \epsilon = 1 + \sum_h \frac{N_h q_h^2}{m \epsilon_0 (\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega)}.$$

Es wird angenommen, dass außerhalb der Resonanzbereiche gemessen wird: $n^2 k = 0$. Dadurch folgt mit $\omega = \frac{\nu}{2\pi} = \frac{c}{2\pi \lambda}$:

$$\begin{aligned} n^2(\omega) &= 1 + \sum_h \frac{N_h q_h^2}{m \epsilon_0 (\omega^2 - \omega_h^2)} \\ \Leftrightarrow n^2(\lambda) &= 1 + \sum_h \frac{N_h q_h^2 \lambda^2 \lambda_h^2}{4\pi^2 c^2 m \epsilon_0 (\lambda^2 - \lambda_h^2)}. \end{aligned}$$

Die Entwicklung der Potenzen ergibt für $\lambda_1 \ll \lambda$ und für $\lambda \ll \lambda_1$ unterschiedliche Gleichungen. Für $\lambda_1 \ll \lambda$ (Abb. 2) ergibt sich:

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{N_1 q_1^2 \lambda_1^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_1} \left(1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^4 + \dots \right) \quad (4)$$

$$= A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \dots \quad (5)$$

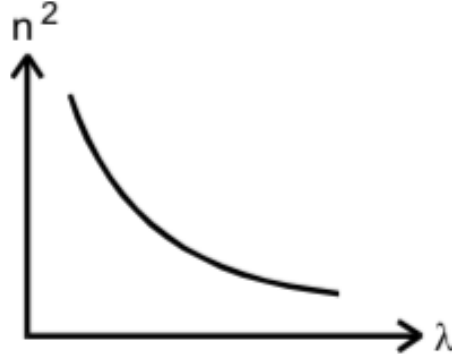


Abbildung 2: Kurvenverlauf für $\lambda_1 \ll \lambda$ [1]

Für $\lambda \ll \lambda_1$ (Abb. 3) gilt:

$$n^2(\lambda) = 1 - A_2 \lambda^2 - A_4 \lambda^4 - \dots \quad (6)$$

Das monoton fallende Verhalten der Kurven beschreibt die normale Dispersion. In der

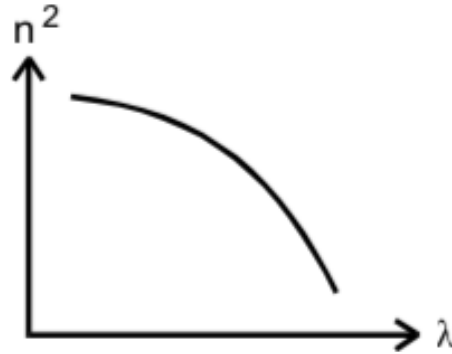


Abbildung 3: Kurvenverlauf für $\lambda \ll \lambda_1$ [1]

Nähe der Resonanzfrequenz ist auch ein monoton steigendes Verhalten möglich. Dies wird anormale Dispersion genannt.

Betrachtet wird nun der symmetrische Strahlengang durch ein Glasprisma: Die Strahlen werden zwei Mal gebrochen. Aus den Winkelbeziehungen folgt, dass

$$\beta = \frac{\varphi}{2}$$

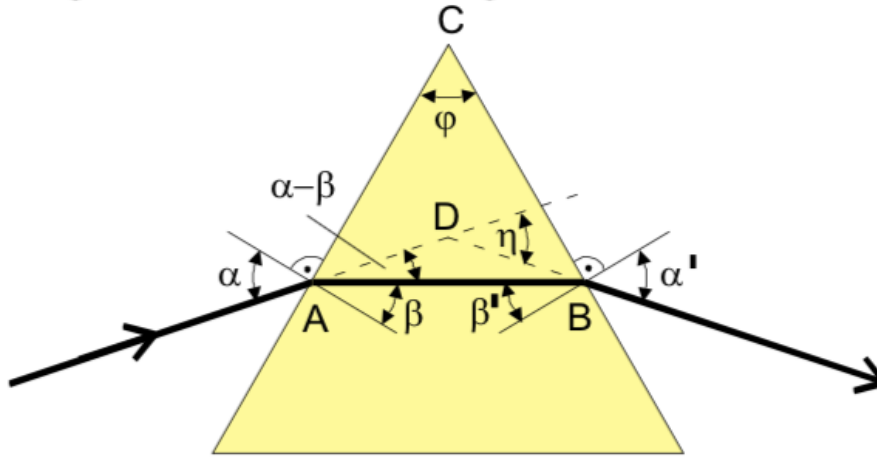


Abbildung 4: Strahlengang im Prisma [1]

ist und dass

$$\eta = 2(\alpha - \beta) \Leftrightarrow \alpha = \frac{\eta}{2} + \beta = \frac{\eta + \varphi}{2}$$

gilt. Mit Gleichung (2) ergibt sich

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\eta + \varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \quad (7)$$

3 Aufbau und Durchführung

Zur Messung der Dispersion wird folgender Versuchsaufbau verwendet: Eine Hg-Cd-

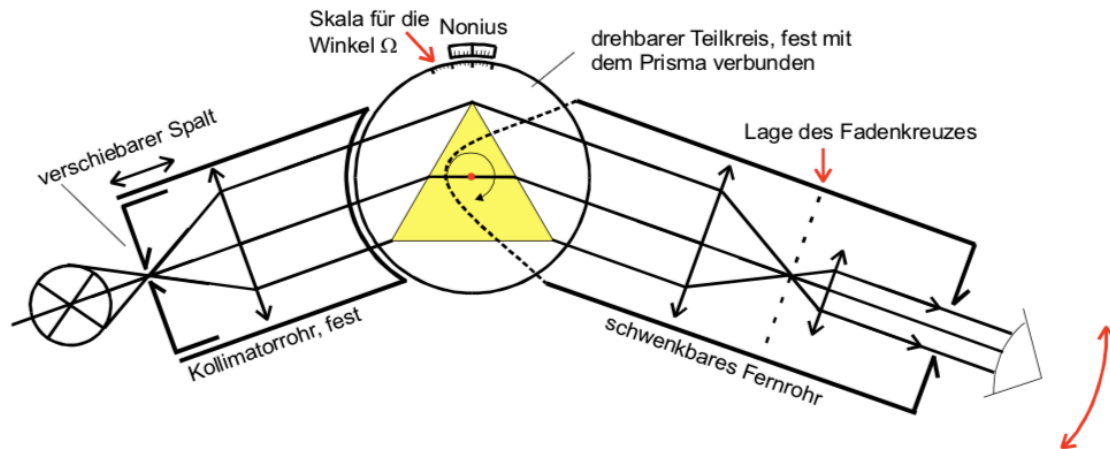


Abbildung 5: Versuchsaufbau [1]

Spektrallampe wirft ihr Licht durch einen Spalt in ein Kollimatorrohr. Das Kollimatorrohr macht aus den Lichtstrahlen parallele Strahlen. Die Strahlen treffen dann auf das Glasprisma auf einer drehbaren Scheibe (Goniometerscheibe) mit einer Skala zum Ablesen des Winkels. Daraufhin treffen die Strahlen auf ein Fernglas mit Fadenkreuz, welches schwenkbar an der Aufhängung des Prismas montiert ist. So kann jeder Winkel um das Prisma auf Lichtstrahlen untersucht werden.

Zur Messung des Winkels φ wird das Prisma mit der markierten Ecke in Richtung der Lichtquelle gestellt. Die Null-Markierung der Winkelskala wird in einem 45° -Winkel links zum Kollimatorrohr gelegt (Abb. 6). Der Strahl wird auf beiden Seiten des Prismas reflektiert. Da die Strahlen parallel sind, ergibt sich folgende Gleichung für φ :

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_l). \quad (8)$$

Die beiden Winkel φ_l und φ_r werden gemessen.

Der η -Messung liegt folgende Abbildung (Abb. 7) zugrunde: Der Lichtstrahl wird einerseits reflektiert (unterer Strahl), andererseits gebrochen (oberer Strahl). Wenn der Strahlengang symmetrisch ist, sind auch die ausfallenden Strahlen parallel. Der symmetrische Strahlengang ergibt sich, wenn die reflektierten und die gebrochenen Strahlenanteile aufeinanderfallen. Dazu wird die Goniometerscheibe beim Betrachten des Spektrums gedreht, bis sich die reflektierte, weiße Linie mit den jeweiligen Linien des Spektrums überlagert. Die Messung wird für beide Seiten des Prismas durchgeführt: Aus den Winkelbeziehungen der Abbildungen 7 und 8 folgt die Gleichung für den Winkel η :

$$\eta = 180 - (\Omega_r - \Omega_l). \quad (9)$$

Die gemessenen Winkel sind in Abbildung 9 zu sehen: Dazu wird das Prisma zunächst

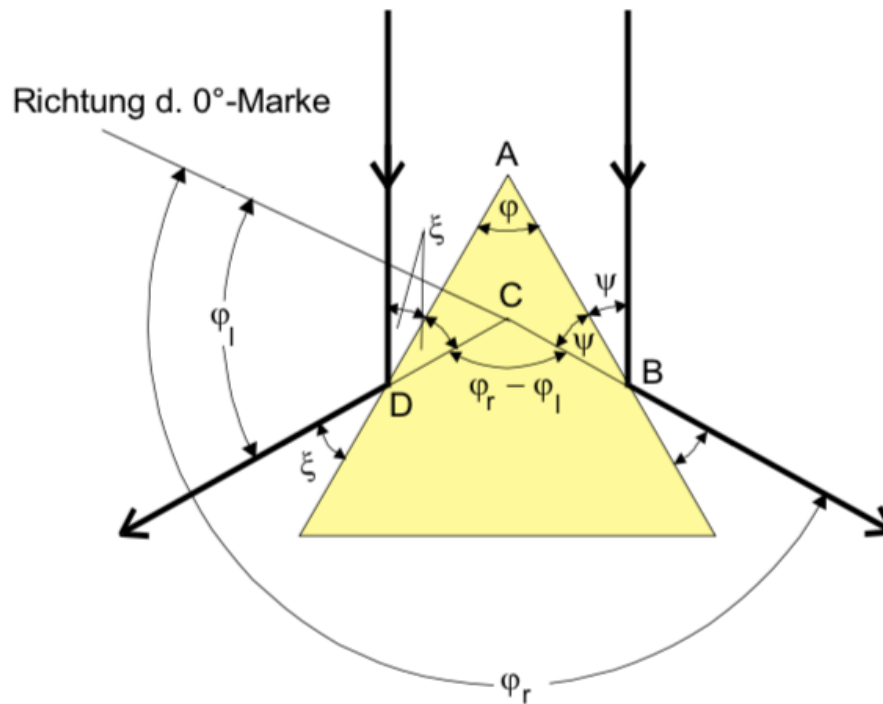


Abbildung 6: Strahlengang zur φ -Messung [1]

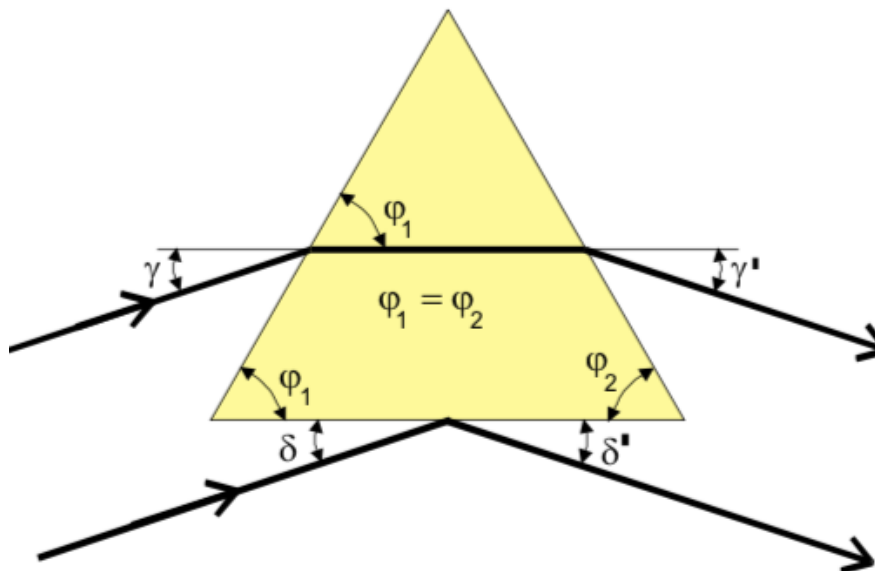


Abbildung 7: Strahlengang zur η -Messung [1]

mit der markierten Ecke in einen 135° -Winkel rechts zur Lichtquelle gedreht, so dass das Licht zuerst durch die rückwärtige Seite des Prismas fällt. Dann wird der Winkel Ω_r abgelesen für die jeweiligen Spektrallinien. Anschließend wird die Goniometerscheibe

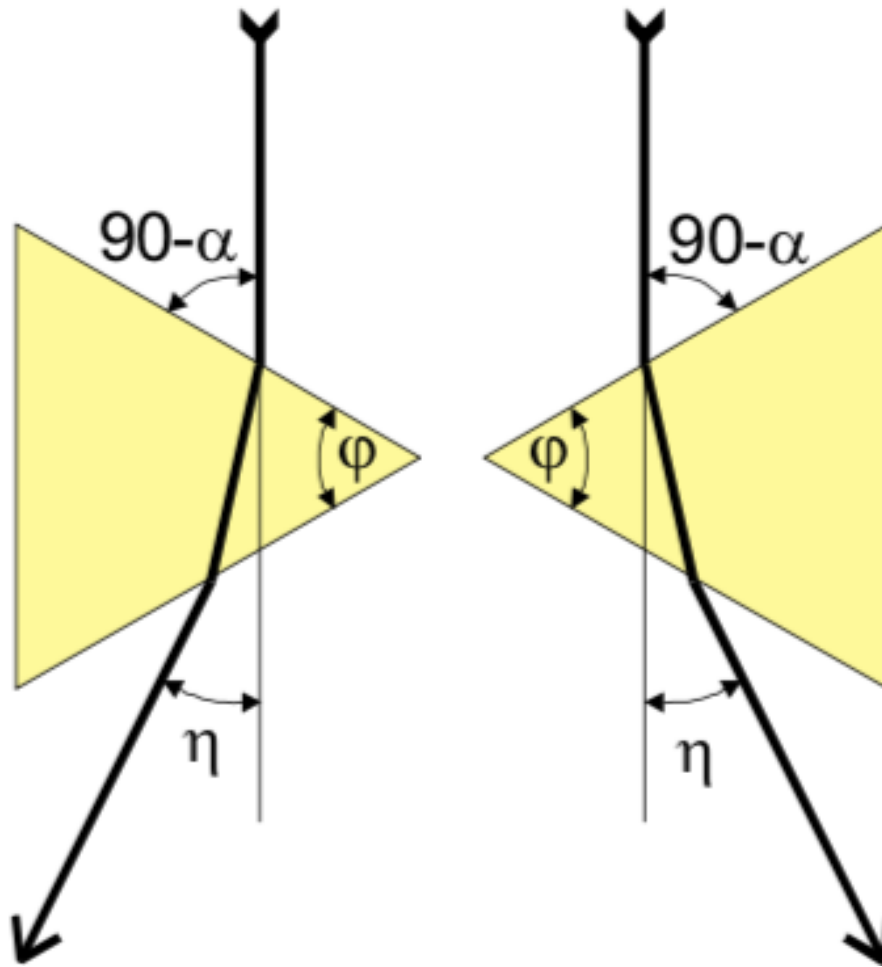


Abbildung 8: Symmetrischer Strahlengang der η -Messung [1]

gedreht, bis das Prisma in einem Winkel von ca. 135° links zur Lichtquelle steht. Es wird der Winkel Ω_1 für alle Spektrallinien gemessen.

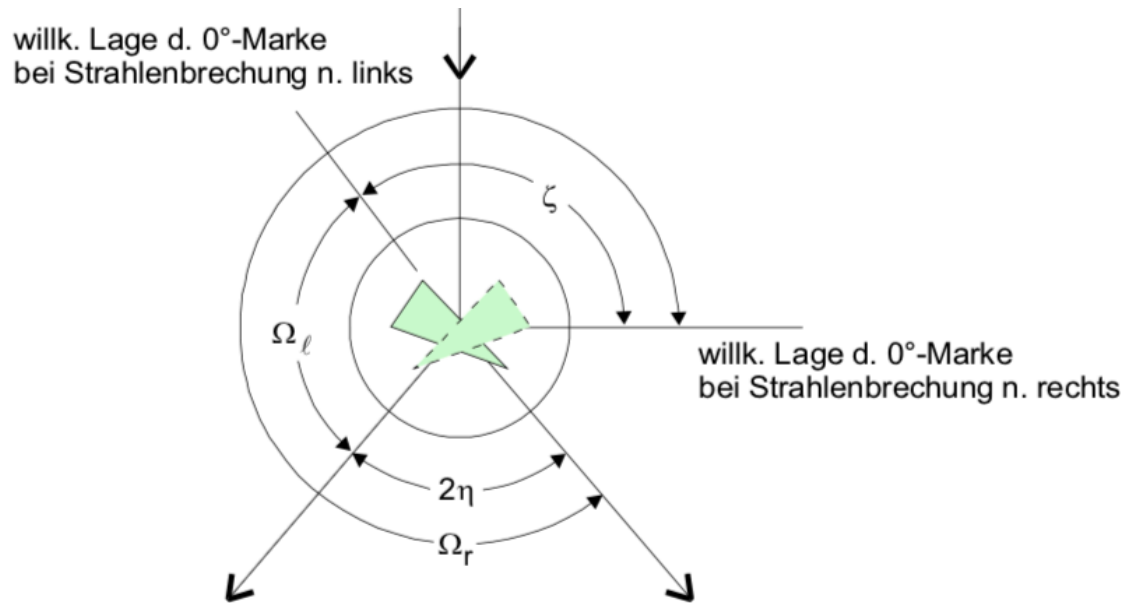


Abbildung 9: Gemessene Winkel der η -Messung [1]

4 Auswertung

Zu erst wird der Winkel ϕ ermittelt. Mit der Gleichung:

$$\phi = \frac{1}{2}(\phi_R - \phi_L)$$

lässt sich aus den Messwerten ϕ berechnen. Die Messwerte und die jeweiligen ϕ sind in der Tabelle 1 aufgeführt. Der Mittelwert von ϕ ergibt sich zu:

$$\phi_m = (60,02 \pm 0,04)^\circ$$

Tabelle 1: Messung zur Bestimmung von ϕ

$\phi_L/^\circ$	$\phi_R/^\circ$	$\phi/^\circ$
90,9	211,0	60,05
93,4	213,4	60,00
95,9	216,1	60,10
92,7	212,7	60,00
95,3	215,4	60,05
95,7	215,7	60,00
95,3	215,2	59,95

Berechnung des Brechungsindex n aus ϕ und η in Abhängigkeit von der Wellenlänge. η berechnet sich wie folgt:

$$\eta = 180 - (\Omega_R - \Omega_L)$$

Mit der Formel:

$$n = \frac{\sin \frac{\eta + \phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}}$$

wird der Brechungsindex n berechnet. In der Tabelle 2 sind die Messwerte und die errechneten Ergebnisse aufgeführt.

Tabelle 2: Messung zur Bestimmung von n

λ	λ/nm	$\Omega_R/^\circ$	$\Omega_L/^\circ$	$\eta/^\circ$	$n(\lambda_i)$
Rot	643.84	215,5	94,5	59,0	1,722
Orange	576.96	215,8	94,8	59,0	1,722
Gelb	546.07	215,7	95,0	59,3	1,725
Grün	508.58	215,3	95,5	60,2	1,733
Blau	479.99	214,9	96,0	61,1	1,741
Dunkelblau	467.81	214,7	96,2	61,5	1,744
Lila	453.83	214,2	96,8	62,6	1,753

Die Wertepaare (n^2, λ) werden in der Graphik 10 aufgetragen. Es werden die beiden Funktionen:

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} \quad (10)$$

und

$$n^2(\lambda) = A'_0 - A'_2 \cdot \lambda^2$$

an die Wertepaare gefittet.

Daraus ergeben sich die Werte:

$$A_0 = (2,8414 \pm 0,0006)$$

$$A_2 = (4,4716 \pm 4342,2614) \cdot 10^4$$

$$A'_0 = (3,1471 \pm 0,0013)$$

$$A'_2 = (4,8921 \pm 0,0000001) \cdot 10^{-7}$$

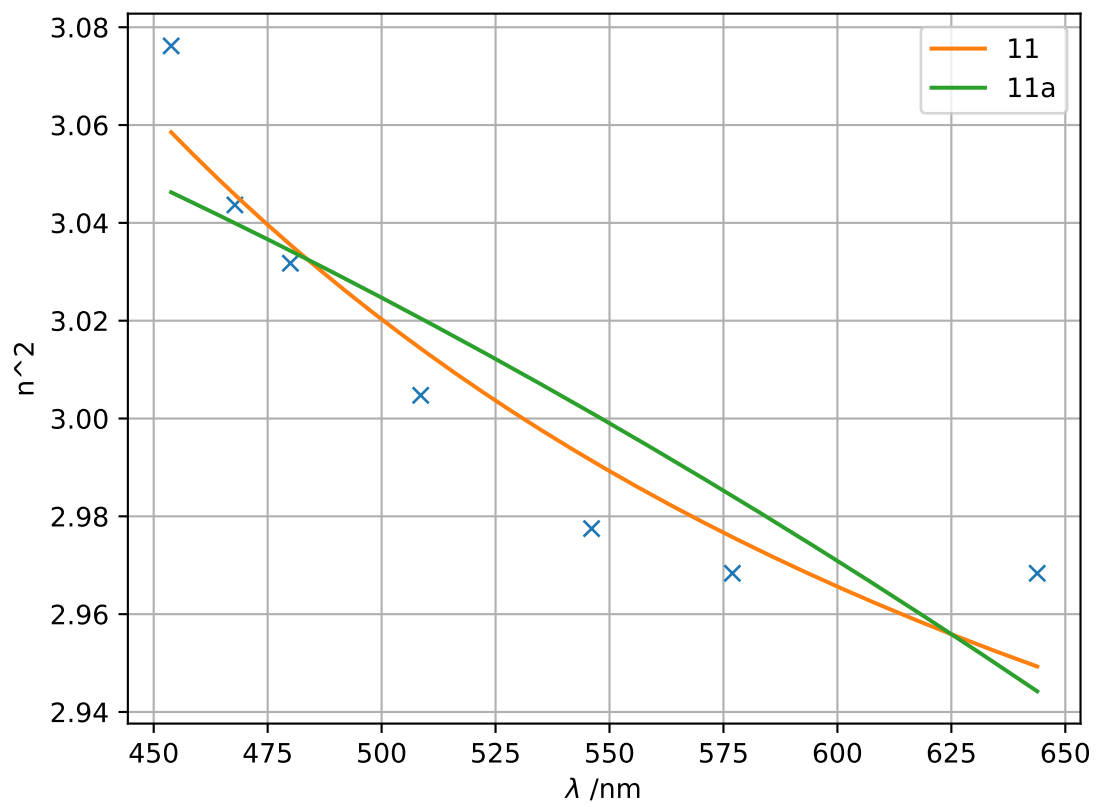


Abbildung 10: Dispersionskurve

Über die Formeln:

$$s_n^2 = \frac{1}{z-2} \sum_{i=1}^z \left(n^2(\lambda_i) - A_0 - \frac{A_2}{(\lambda_i)^2} \right)^2 \quad (11)$$

$$s_{n'}^2 = \frac{1}{z-2} \sum_{i=1}^z \left(n^2(\lambda_i) - A'_0 + A'_2 \cdot (\lambda_i)^2 \right)^2$$

kann die Summe der jeweiligen Abweichungsquadrate bestimmt werden um die geeignetere Formel zu ermitteln. Die Abweichungsquadrate berechnen sich zu:

$$s_n^2 = 0,0002$$

$$s_{n'}^2 = 0,0005$$

Das Abweichungsquadrat der Formel 11 ist geringer daher wird die Funktion 10 verwendet. Schon in der Graphik 10 ist zu erkennen, dass die Funktion 10 besser zu den Messwerten passt.

Nun wird die Abersche Zahl bestimmt. Diese lässt sich berechnen durch:

$$v := \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

n_D, n_F, n_C sind die Brechungsindices für bestimmte Wellenlängen die sich aus der Funktion 10 ergeben.

$n_C = 1,716$	$\lambda_C = 656$
$n_D = 1,723$	$\lambda_D = 589$
$n_F = 1,741$	$\lambda_F = 486$

Mit den Werten lässt sich v berechnen zu:

$$v = 29,28$$

Das Auflösungsvermögen lässt sich mit

$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} = b \frac{A_2}{\lambda^3 \cdot \sqrt{A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2}}}$$

bestimmen zu:

$$A := 0,0005 \text{ nm}$$

λ ist dabei die mittlere Wellenlänge.

Die Absorptionsstelle λ_1 wird aus der Formel 5 hergeleitet und berechnet sich nach

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{A_2}{A_0 - 1}}.$$

Die Absorptionsstelle liegt bei:

$$\lambda_1 = 125,44 \text{ nm}$$

5 Diskussion

Das Experiment kann von vielen Störfaktoren beeinflusst werden. Während der Durchführung des Experimentes war es im Versuchsraum nie ganz dunkel, sodass immer etwas Falschlicht auf den Prisma fällt. Eine etwas unreine Oberfläche könnte zu einem leicht veränderten Brechungsindex geführt haben. Es sind Ablesefehler möglich. Der ermittelte Wert für den Winkel ϕ_e mit $\phi_e = (60,02 \pm 0,04)^\circ$ ist nah an dem theoretischen Wert von $\phi_t = 60^\circ$. Mangels Theoriewerte können die übrigen Ergebnisse nicht verglichen werden.

Literatur

[1] TU Dortmund. In: *Versuchsanleitung V402*.

φ -Messung

	φ_L	φ_R	φ
1	80,9	211	60,5
2	93,4	213,4	60,0
3	95,9	216,1	60,1
4	92,7	212,7	60,0
5	95,3	215,4	60,05
6	95,7	215,7	60
7	95,3	215,2	59,95

 η -Messung

Farbe	λ	φ_L	φ_R	η
rot		96,4	214,4	62
orange		96,0	214,8	61,2
gelb		95,6	215,3	60,3
grün		95,2	215,6	59,6
blau		94,9	216,0	58,9
dunkelblau		94,7	216,1	58,5
lila		94,2	216,8	57,4
<hr/>				
rot		215,5	94,5	59
orange		215,8	94,8	59
gelb		215,7	95,0	59,3
grün		215,3	95,5	59,8
blau		214,9	96,0	61,2
dunkelblau		214,7	96,2	61,1
lila		214,2	96,8	62,6

Abbildung 11: Originale Messdaten