

V408 Geometrische Optik

Katharina Brägelmann Tobias Janßen
katharina.braegelmann@tu-dortmund.de
tobias2.janssen@tu-dortmund.de

Durchführung: 03. Juli 2018, Abgabe: 10. Juli 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Aufbau und Durchführung	4
3.1 Messung der Gegenstandsweite und der Bildweite	4
3.2 Methode von Bessel	4
3.3 Methode von Abbe	5
4 Auswertung	7
4.1 Messung der Brennweite über die Linsengleichung	7
4.2 Messung der Brennweite nach Bessel	10
4.3 Untersuchung der chromatischen Abberation	10
4.4 Messung der Brennweite und Hauptebenen nach Abbe	11
5 Diskussion	14

1 Zielsetzung

Es wird die Brennweite von Einzellinsen und Linsensystemen bestimmt. Die Bestimmung wird auf drei unterschiedliche Arten durchgeführt.

2 Theorie

Linsen bestehen in der Regel aus einem optisch dichterem Medium als die umgebende Luft. An den Grenzflächen wird das Licht gebrochen. Zur Vereinfachung wird nun die gesamte Brechung der Linse, für achsennahe Strahlen, in der Mittelebene zusammengefasst. Bei dickeren Linsen oder Linsensystemen ist dies nicht möglich und es müssen Hauptebenen eingeführt werden um die Brechung zu veranschaulichen. Achsenferne Strahlen werden stärker gebrochen und führen so zu Abbildungsfehlern. Dieser Vorgang wird sphärische Abberation genannt. Mit einer Blende können die achsenfernen Strahlen ausgeblendet werden. Die chromatische Abberation beschreibt die Brechung für unterschiedliche Wellenlängen, so wird blaues Licht zum Beispiel stärker gebrochen als rote Licht. Es gibt zwei zu unterscheidende Linsarten. Die konvexe Linse (Sammellinse, Abb. 1a) und die konkave Linse (Zerstreuungslinse, Abb. 1b).

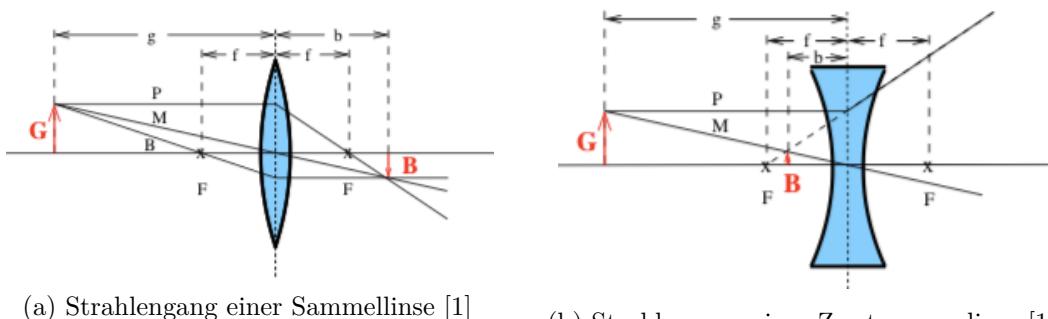


Abbildung 1: Verschiedene Linsen

Parallel einfallendes Licht wird von der Sammellinse im Brennpunkt F gebündelt. Bei nicht-parallelem Licht wird dieses wie in der Abbildung 1a gebrochen. Vom Gegenstand, der sich im Abstand g vor der Linse befindet, werden zur Vereinfachung nur drei Strahlengänge betrachtet. Der Strahl P verläuft vom Gegenstand aus parallel zur optischen Achse und wird an der Mittelebene der Linse gebrochen und verläuft nun durch den Brennpunkt F, der sich in der Entfernung f von der Mittelebene befindet. Der Brennpunktstrahl B läuft zuerst durch den Brennpunkt F und wird durch die Brechung an der Linse zum parallelen Strahl. Der Mittelstrahl M geht durch den Schnittpunkt von der optischen Achse und der Mittelebene. Der Mittelstrahl wird von der Linse nicht gebrochen. Hinter der Linse gibt es einen Schnittpunkt in dem sich alle Strahlen kreuzen. An dieser Stelle, mit dem Abstand b , kann mit einem Schirm ein scharfes Bild B abgebildet werden. Durch die Zerstreuungslinse wird das einfallende Licht gestreut. Der Strahl P wird nach oben gebrochen. Verlängert man den gebrochenen Strahl in Richtung des Gegenstands

G fällt auf, dass dieser den Brennpunkt F vor der Linse schneidet. Der Mittelpunktstrahl wird auch durch diese Linse nicht gebrochen. Sie besitzt jedoch eine Schnittstelle mit dem verlängerten gebrochenen Strahl. Auf diese Weise entsteht ein virtuelles Bild B , im Abstand b , welches sich auf der Gegenstandsseite befindet.

Das Abbildungsgesetz folgt aus den Bildkonstruktionen.

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (1)$$

V beschreibt den Abbildungsmaßstab der sich für das Verhältnis von Bildgröße B zu Gegenstandsgröße G und Bildweite b zu Gegenstandsweite g gleich verhält. Aus dem Abbildungsgesetz und der Bildkonstruktion lässt sich für dünne Linsen die Linsengleichung herleiten.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (2)$$

Die Brechkraft D wird in Dioptrie ($dpt = \frac{1}{f}$) angegeben. Bei einem System welches aus mehreren dünnen Linsen zusammengesetzt ist kann die Brechkraft D_i aus den einzelnen Brechkräften zusammen gesetzt werden.

$$D = \sum_i^N D_i$$

$$D_i = \frac{1}{f_i} dpt$$

3 Aufbau und Durchführung

Für die Messung der Brennweite werden drei unterschiedliche Verfahren benutzt. Für alle Messungen wird eine optische Bank verwendet, auf der die optischen Elemente in eine Richtung frei verschiebbar sind. Als Bild wird ein L aus Perlen verwendet, welches scharf abgebildet werden soll. Für die Messungen stehen verschiedene Linsen zu Verfügung, die eine unterschiedliche Brennweite besitzen.

3.1 Messung der Gegenstandsweite und der Bildweite

Auf der optischen Bank wird eine Sammellinse in einen festen Abstand g vom Gegenstand platziert. Durch das Verschieben der Bildebene wird eine scharfe Abbildung gesucht. Diese befindet sich im Abstand b . Nun wird g variiert und das dazugehörige b aufgenommen. Die Wertepaare werden in einem Graphen geplottet.

3.2 Methode von Bessel

Bei dieser Methode wird der Abstand zwischen Gegenstand und Bild konstant gehalten. Durch das Verschieben der Sammellinse wird ein scharfes Bild erzeugt. Dabei gibt es zwei

mögliche Stellungen für ein scharfes Bild. Für die beiden Linsenpositionen muss gelten:

$$\begin{aligned} b_1 &= g_2 \\ b_2 &= g_1 \end{aligned}$$

Es werden die Linsenpositionen für 9 unterschiedliche Abstände e bestimmt. Für $g > b$ wird das Bild verkleinert abgebildet. Ist die Gegenstandsweite $g < b$ kleiner als die Bildweite wird das Bild vergrößert dargestellt. In der Abbildung 2 ist der Versuchsaufbau dargestellt. Für den Abstand e zwischen Gegenstand und Bild gilt:

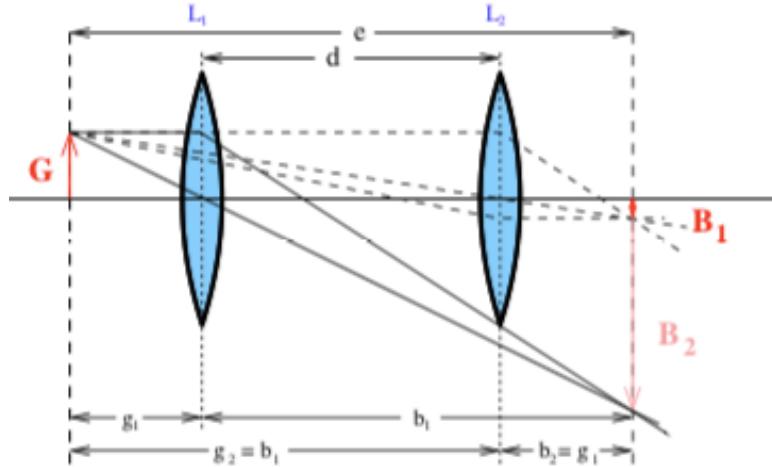


Abbildung 2: Schematischer Aufbau der Messapparatur zur Messung der Brennweite nach Bessel [1]

$$e = g_1 + b_1 = g_2 + b_2.$$

Der Abstand zwischen den beiden möglichen Linsenpositionen wird als d bezeichnet. Für d gilt:

$$d = g_1 - b_1 = g_2 - b_2$$

Die Brennweite der Linse lässt sich dann bestimmen als:

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e}. \quad (3)$$

Nun wird noch die chromatische Abberation mit Hilfe der Methode nach Bessel untersucht. Dafür wird der Brennpunkt für rotes und blaues Licht bestimmt.

3.3 Methode von Abbe

Bei der Methode von Abbe wird die Brennweite eines Linsensystems bestimmt. Die Mitte des Abstandes zwischen den beiden Linsen wird als A Punkt definiert. A muss dabei

nicht zwangsläufig in der Hauptebene H liegen. Relativ zu A werden nun die Längen g' und b' bestimmt bei der ein scharfes Bild abbgebildet wird. Für die beiden Abstände gilt:

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h$$
$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h'$$

Durch das Messen von B und G kann über die Formel 1 der Abbildungsmaßstab V bestimmt werden. Aus dem Abbildungsmaßstab V und den Längen g' und b' lässt sich die Lage der Hauptebenen und die Brennweite f bestimmen.

4 Auswertung

4.1 Messung der Brennweite über die Linsengleichung

Die Messwerte der Gegenstandsweite g und der Bildweite b zu beiden verwendeten Linsen sind in Tabelle 1 notiert. Die Brennweiten werden mithilfe von Gleichung (2) berechnet.

Tabelle 1: Messdaten zu den Brennweiten $f_{1, \text{theo}} = 0,1 \text{ m}$ und $f_{2, \text{theo}} = 0,05 \text{ m}$

g/m	b/m	$f_{1, \text{theo}} = 0,1 \text{ m}$	g/m	$f_{2, \text{theo}} = 0,05 \text{ m}$	b/m
		f_1/m		f_2/m	
0,15	0,294	0,0993	0,08	0,136	0,0504
0,12	0,620	0,1005	0,10	0,095	0,0487
0,18	0,224	0,0998	0,12	0,085	0,0498
0,20	0,195	0,0987	0,13	0,083	0,0507
0,22	0,180	0,0990	0,15	0,076	0,0504
0,25	0,163	0,0987	0,18	0,070	0,0504
0,28	0,153	0,0989	0,20	0,068	0,0508
0,30	0,145	0,0978	0,22	0,066	0,0508
0,32	0,142	0,0984	0,25	0,062	0,0497
0,35	0,137	0,0985			

Der Mittelwert μ berechnet sich allgemein über

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n. \quad (4)$$

Der Fehler, der durch das Mitteln gemacht wird, entspricht der Standardabweichung σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2}. \quad (5)$$

Die gemittelten Brennweiten ergeben sich dann zu:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= (0,098\,96 \pm 0,000\,76) \text{ m} \\ \bar{f}_2 &= (0,050\,19 \pm 0,000\,69) \text{ m}. \end{aligned}$$

Des Weiteren werden die Werte der Bildweite b gegen die Gegenstandsweiten g aufgetragen (Abb. 3, 4). Die Wertepaare werden durch eine Gerade verbunden um die Messgenauigkeit graphisch darzustellen. In beiden Abbildungen entspricht jeweils g - und b -Koordinate des Schnittpunkts aller Geraden der Brennweite. So liegt in Abbildung 3 der Schnittpunkt etwa bei $g = b = 0,1 \text{ m}$, was zu der Brennweite $f_{1, \text{theo}} = 0,1 \text{ m}$ passt. In Abbildung 4 liegt der Schnittpunkt bei $g = b = 0,05 \text{ m}$. Diese Werte entsprechen ebenfalls zu der angegebenen Brennweite $f_{2, \text{theo}} = 0,05 \text{ m}$ der Linse.

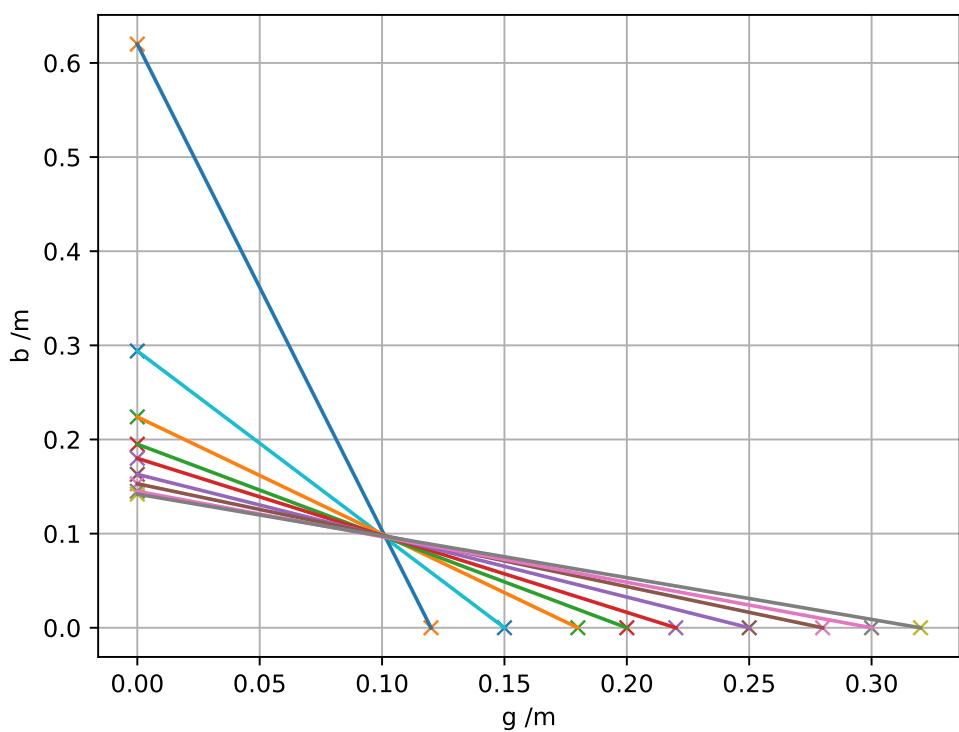


Abbildung 3: Darstellung der Messgenauigkeit für $f_{1,\text{theo}} = 0,1 \text{ m}$

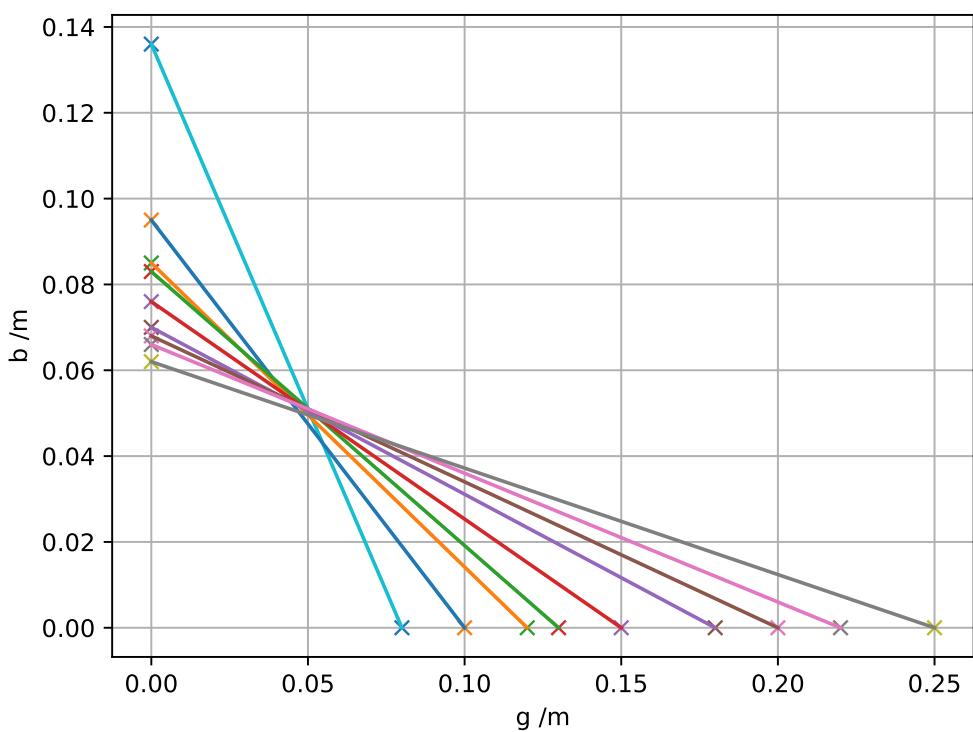


Abbildung 4: Darstellung der Messgenauigkeit für $f_2, \text{theo} = 0,05 \text{ m}$

4.2 Messung der Brennweite nach Bessel

Die gemessenen Brennweiten und Gegenstandsweiten sind in Tabelle 2 notiert.

Tabelle 2: Messdaten zu den Gegenstandsweiten g_1 und g_2 und den Bildweiten b_1 und b_2 bei einer Linse mit $f_{\text{theo}} = 0,1 \text{ m}$

g_1/m	b_1/m	g_2/m	b_2/m	e	d_1	d_2	d	f/m
0,678	0,122	0,115	0,685	0,800	0,570	0,556	$0,563 \pm 0,010$	$0,101 \pm 0,004$
0,735	0,115	0,121	0,729	0,850	0,608	0,620	$0,614 \pm 0,009$	$0,102 \pm 0,003$
0,788	0,112	0,118	0,782	0,900	0,664	0,676	$0,670 \pm 0,009$	$0,100 \pm 0,003$
0,838	0,112	0,116	0,834	0,950	0,718	0,726	$0,722 \pm 0,006$	$0,100 \pm 0,002$
0,889	0,111	0,116	0,884	1,000	0,768	0,778	$0,773 \pm 0,007$	$0,101 \pm 0,003$
0,937	0,113	0,115	0,935	1,050	0,820	0,824	$0,822 \pm 0,003$	$0,102 \pm 0,001$
0,989	0,111	0,115	0,985	1,100	0,870	0,878	$0,874 \pm 0,006$	$0,101 \pm 0,002$
1,040	0,110	0,115	1,035	1,150	0,920	0,930	$0,925 \pm 0,007$	$0,102 \pm 0,003$
1,090	0,110	0,114	1,086	1,200	0,972	0,980	$0,976 \pm 0,006$	$0,102 \pm 0,002$
1,139	0,111	0,114	1,136	1,250	1,022	1,028	$1,025 \pm 0,004$	$0,102 \pm 0,002$

Für die Bestimmung des Abstands d zwischen den Linsen werden die Abstände d_1 und d_2 nach Gleichung (4) gemittelt. Der Fehler der Messung ergibt sich über die Standardabweichung nach Gleichung (5). Die Brennweite wird über Gleichung (3) berechnet. Die Fehler berechnen sich nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta f_1 = \sqrt{\left(\frac{df}{dd}\right)^2 \Delta d^2} = \sqrt{\left(-\frac{d}{2e}\right)^2 \Delta d^2}.$$

Die einzelnen Brennweiten werden nun nach Gleichung (4) gemittelt und der Fehler über die Standardabweichung nach Gleichung (5) ermittelt:

$$\overline{f_1} = (0,1013 \pm 0,0008) \text{ m}.$$

4.3 Untersuchung der chromatischen Abberation

Die Messdaten zur Untersuchung der chromatischen Abberation sind in Tabelle 3 aufgetragen.

Die Rechnungen werden analog zu Kapitel 4.2 durchgeführt. Die Brennweiten f werden nach Gleichung (4) ermittelt. Es ergeben sich die Brennweiten

$$\begin{aligned} \overline{f_{\text{blau}}} &= (0,1012 \pm 0,0008) \text{ m} \\ \overline{f_{\text{rot}}} &= (0,1022 \pm 0,0008) \text{ m}. \end{aligned}$$

Tabelle 3: Messdaten zur chromatischen Abberation bei einem roten Filter und einem blauen Filter

Blauer Filter								
g_1/m	b_1/m	g_2/m	b_2/m	e	d_1	d_2	d	f/m
0,686	0,114	0,120	0,680	0,800	0,572	0,560	$0,566 \pm 0,009$	$0,100 \pm 0,003$
0,736	0,114	0,121	0,729	0,850	0,622	0,608	$0,615 \pm 0,010$	$0,101 \pm 0,004$
0,785	0,115	0,120	0,780	0,900	0,670	0,660	$0,665 \pm 0,007$	$0,102 \pm 0,003$
0,837	0,113	0,118	0,832	0,950	0,724	0,714	$0,719 \pm 0,007$	$0,102 \pm 0,003$
0,887	0,113	0,116	0,884	1,000	0,774	0,768	$0,771 \pm 0,004$	$0,101 \pm 0,002$
Roter Filter								
g_1/m	b_1/m	g_2/m	b_2/m	e	d_1	d_2	d	f/m
0,684	0,116	0,121	0,679	0,80	0,568	0,558	$0,563 \pm 0,007$	$0,101 \pm 0,003$
0,735	0,115	0,121	0,729	0,85	0,620	0,608	$0,614 \pm 0,009$	$0,102 \pm 0,003$
0,784	0,116	0,121	0,779	0,90	0,668	0,658	$0,663 \pm 0,007$	$0,103 \pm 0,003$
0,837	0,113	0,119	0,831	0,95	0,724	0,712	$0,718 \pm 0,009$	$0,102 \pm 0,003$
0,886	0,114	0,118	0,882	1,00	0,772	0,764	$0,768 \pm 0,006$	$0,103 \pm 0,002$

4.4 Messung der Brennweite und Hauptebenen nach Abbe

Die Messdaten sind in Tabelle 4 notiert.

Tabelle 4: Messdaten zur Brennweite eines Linsensystems mit $f_{1,\text{theo}} = 0,1\text{ m}$ und $f_{3,\text{theo}} = -0,1\text{ m}$ bei der Gegenstandsgröße $G = 0,03\text{ m}$

g'/m	b'/m	B/m	V	$1 + \frac{1}{V}$	$1 + V$
0,45	0,235	0,0260	0,867	2,1534	1,867
0,50	0,195	0,0200	0,667	2,4993	1,667
0,55	0,175	0,0160	0,533	2,8762	1,533
0,60	0,165	0,0140	0,467	3,1413	1,467
0,65	0,154	0,0120	0,400	3,5000	1,400
0,70	0,146	0,0100	0,333	4,0030	1,333
0,75	0,136	0,0090	0,300	4,3333	1,300
0,80	0,135	0,0085	0,283	4,5336	1,283
0,85	0,131	0,0080	0,267	4,7453	1,267
0,90	0,125	0,0070	0,233	5,2918	1,233

Der Abbildungsmaßstab V wird nach Gleichung (1) errechnet.

In Abbildung 5 ist die Gegenstandsweite g' gegen $1 + \frac{1}{V}$ aufgetragen. Die Gegenstandsweite

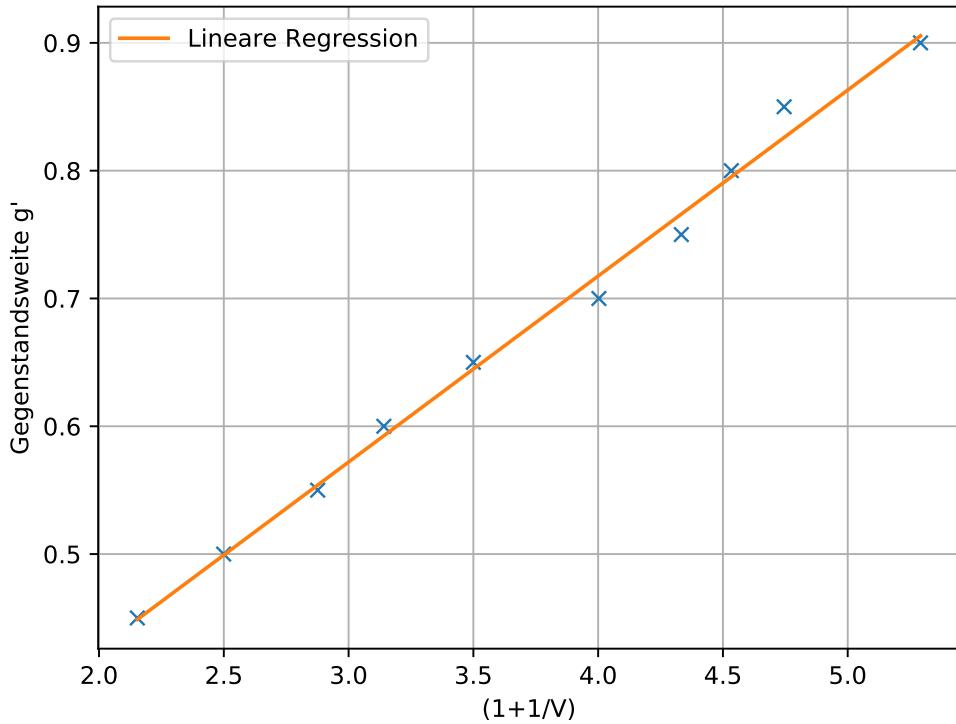


Abbildung 5: g' gegen $1 + \frac{1}{V}$ zur Bestimmung der Brennweite f und der Hauptebene h

g' hat einen linearen Zusammenhang zur Brennweite f :

$$\begin{array}{llll} g' = & f & \left(1 + \frac{1}{V}\right) & + h \\ y = & a & x & + b. \end{array}$$

Die lineare Regression der Form mithilfe von Python ergibt die Parameter:

$$\begin{array}{ll} a = f = & (0,1455 \pm 0,0041) \text{ m} \\ b = h = & (0,1355 \pm 0,0158) \text{ m.} \end{array}$$

Zur Bestimmung der zweiten Hauptebene h' und der Brennweite f wird der lineare

Zusammenhang dieser Größen zur Bildweite b' genutzt:

$$\begin{array}{llll} b' = & f & (1 + V) & +h' \\ y = & c & x & +d. \end{array}$$

Es wird also b' gegen $1 + V$ in Abbildung 6 aufgetragen. Es ergeben sich die Parameter

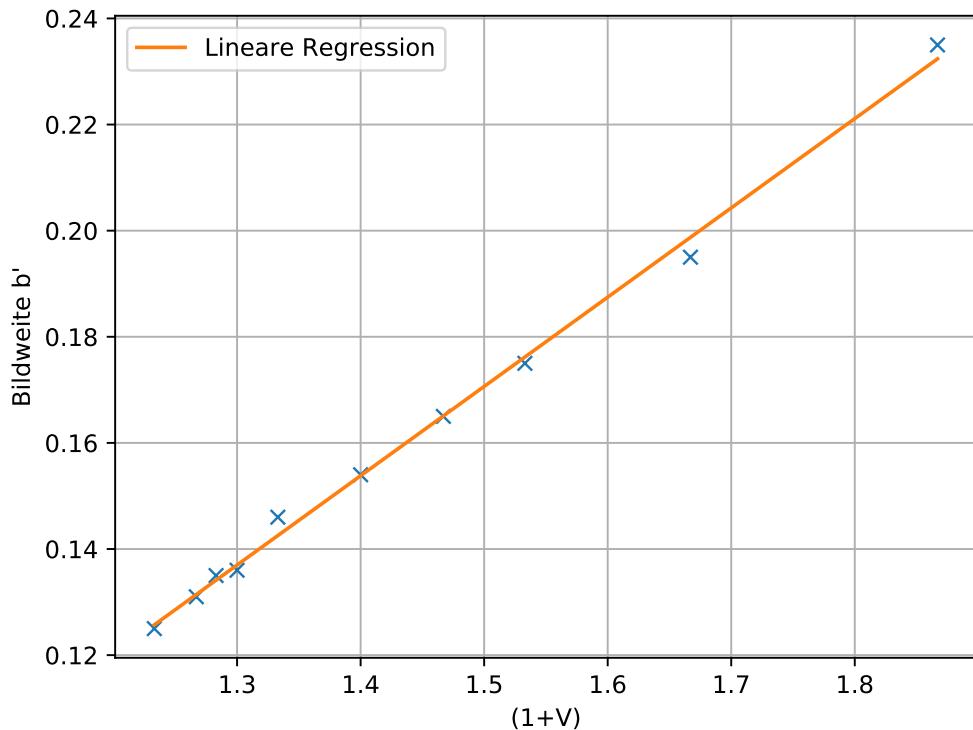


Abbildung 6: b' gegen $1 + V$ zur Bestimmung der Brennweite f und der Hauptebene h'

$$\begin{array}{ll} c = f = & (0,1683 \pm 0,0035) \text{ m} \\ d = h' = & (-0,0818 \pm 0,0051) \text{ m}. \end{array}$$

Die gemittelte Brennweite beläuft sich zu

$$\overline{f_{\text{Abbe}}} = (0,1569 \pm 0,0161) \text{ m.}$$

5 Diskussion

Initial lässt sich sagen, dass der Versuch gut verlaufen ist. Es werden Linsen mit den vom Hersteller angegebenen Brennweiten

$$\begin{aligned} f_{1, \text{theo}} &= 0,1 \text{ m} \\ f_{2, \text{theo}} &= 0,05 \text{ m} \\ f_{3, \text{theo}} &= -0,1 \text{ m} \end{aligned}$$

verwendet. Die Überprüfung der Linsengleichung liefert die gemessenen Brennweiten

$$\begin{aligned} \overline{f_1} &= (0,098\,96 \pm 0,000\,76) \text{ m} \\ \overline{f_2} &= (0,050\,19 \pm 0,000\,69) \text{ m.} \end{aligned}$$

Allgemein berechnet sich eine relative Abweichung q über

$$d = \frac{x_{\text{exp}} - x_{\text{theo}}}{x_{\text{theo}}}.$$

Die Abweichungen der beiden gemessenen Brennweiten zu den vom Hersteller angegebenen Brennweiten liegen bei

$$\begin{aligned} q_{1, \text{Linse}} &= 1,04 \% \\ q_{2, \text{Linse}} &= 0,38 %. \end{aligned}$$

In den beiden Abbildungen 3 und 4 ist die Messgenauigkeit dargestellt. Darin treffen die Graphen alle ungefähr im Punkt (f_1, f_1) (Abb. 3) bzw. im Punkt (f_2, f_2) (Abb. 4) aufeinander.

Bei der Methode nach Bessel wird die erste Linse ($f_{1, \text{theo}} = 0,1 \text{ m}$) erneut verwendet. Es wird die Brennweite

$$\overline{f_1} = (0,1013 \pm 0,0008) \text{ m.}$$

gemessen. Diese Brennweite weicht um

$$q_{1, \text{Bessel}} = 1,30 \%$$

von dem vom Hersteller angegebenen Wert der Brennweite ab.

Die Abweichung zum angegebenen Herstellerwert ist bei der Methode nach Bessel größer,

als mit der reinen Überprüfung der Linsengleichung.
 Die Untersuchung der chromatischen Abberation ergibt

$$\begin{aligned}\overline{f_{\text{blau}}} &= & (0,1012 \pm 0,0008) \text{ m} \\ \overline{f_{\text{rot}}} &= & (0,1022 \pm 0,0008) \text{ m.}\end{aligned}$$

Die Brennweite des blauen Lichts ist $q_{\text{Abberation}} = 0,99\%$ kleiner als die Brennweite des roten Lichts. Daraus lässt sich schließen, dass das blaue Licht unter einem kleineren Winkel gebrochen wird als das rote Licht.

Bei der Messung nach Abbe werden die Brennweite f eines Linsensystems und die beiden Hauptebenen h und h' bestimmt. Die gemittelte Brennweite wird als

$$\overline{f_{\text{Abbe}}} = (0,1569 \pm 0,0161) \text{ m}$$

bestimmt. Die Hauptebenen liegen bei

$$\begin{aligned}h &= & (0,1355 \pm 0,0158) \text{ m} \\ h' &= & (-0,0818 \pm 0,0051) \text{ m.}\end{aligned}$$

Die Fehlerquellen für diese Messungen sind unter anderem die sphärische Abberation und die systematischen Fehler durch das subjektive Scharfstellen des Bildes. Letzteres ist bereits während der Messungen auffällig, daher werden einzelne Messreihen nur von einem Versuchsdurchführenden durchgeführt.

Literatur

- [1] TU Dortmund. In: *Versuchsanleitung V408*. 4. Juli 2018.

V 408		$f = 100\text{mm} = 10\text{cm}$				$f = -100\text{mm}$			
Messreihe 1		Messreihe 2		Messreihe 2					
g/cm	b/cm	g/cm	b/cm	g_1/cm	b_1/cm	g_2/cm	b_2/cm		
19,2	9,1	15	29,4	73,5	11,5	72,9	12,1		
19,8	20,2	18,2	62	78,1	11,2	11,8	78,2		
20,3	20,2	18	22,4	83,8	11,2	11,6	83,4		
21,5	18	20	19,5	88,9	11,1	11,6	88,4		
20	19,5	22	18	83,7	11,3	11,5	83,5		
19,5	19,5	25	16,3	98,9	11,1	11,5	98,5		
18,7	18,8	28	18,3	104	11	11,5	103,5		
18,8	18,2	30	14,5	109	11	11,4	108,6		
19,1	18,4	32	14,2	113,9	11,1	11,4	113,6		
18,7	18,3	35	13,7	67,8	12,2	11,5	68,5		
18,1	18,4			$f = 10\text{cm}$					
soll: $f = 100\text{mm}$ $= 10\text{cm}$		roter Filter				brauer Filter			
		g_1	b_1	g_2	b_2/cm	g_1	b_1		
		68,4	11,6	12,1	67,9	68,6	11,4		
		73,5	11,5	12,1	72,9	73,6	11,4		
		78,4	11,6	12,1	72,9	78,5	11,5		
		83,7	11,3	11,9	83,1	83,7	11,3		
		88,6	11,4	11,8	88,2	88,7	11,3		
						11,6	88,4		
$f_1 = +100\text{mm}, f_2 = -100\text{mm} \quad G = 3\text{cm}$									
g	b	B	70	14,6	1				
45	23,5	2,6	75	13,6	0,9				
50	19,5	2	80	13,5	0,85				
55	17,5	1,6	85	13,1	0,8				
60	16,5	1,4	90	12,5	0,7				
65	15,4	1,2							

Abbildung 7: Originale Messdaten

$$f = 50 \text{ mm} = 5 \text{ cm}$$

Hessreihe 1

8	6
10	9,5
12	8,5
15	7,6
18	7
20	6,8
22	6,6
25	6,2
8	13,6
3	8,3

Abbildung 8: Originale Messdaten