

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen die Leerlaufspannungen und die Innenwiderstände von verschiedenen Spannungsquellen gemessen werden.

2 Theorie

Als Leerlaufspannung U_0 wird diejenige Spannung bezeichnet, die an den Anschlüssen einer Spannungsquelle gemessen werden kann, wenn kein Strom I fließt. Sobald eine Spannungsquelle an einen Stromkreis angeschlossen wird, fließt Strom. Die Spannung U_k , die nun über die Spannungsquelle abfällt, wird Klemmenspannung genannt. Diese Spannung ist geringer als die Leerlaufspannung, was sich mit Hilfe der Zweiten Kirchhoffschen Regel erklären lässt. Diese wird auch als Maschenregel bezeichnet und besagt, dass die Summe aller Spannungen in einer Masche gleich Null ist:

$$\sum_i U_i = 0. \quad (1)$$

Für einen einfachen Stromkreis wie in Abbildung 1 zu sehen und mit

$$U = R \cdot I \quad (2)$$

ergibt sich, wenn die Stromrichtungen beachtet werden, die Formel

$$U_0 = I \cdot R_i + I \cdot R_a \quad \text{bzw.} \quad U_k = I \cdot R_a = U_0 - I \cdot R_i. \quad (3)$$

Dabei ist R_i der Innenwiderstand der Spannungsquelle und R_a der Lastwiderstand im

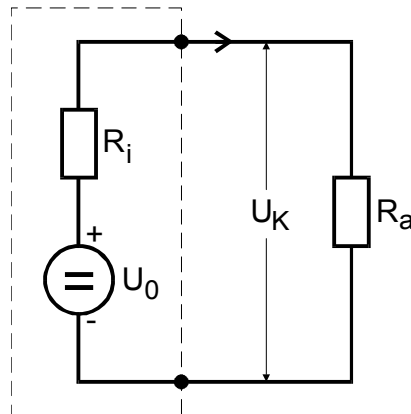


Abbildung 1: Einfacher Stromkreis einer realen Spannungsquelle[1, S. 213].

Stromkreis. In Schaltbildern wird durch die Reihenschaltung des Widerstandes R_i und der idealen Spannungsquelle eine reale Spannungsquelle mit ihrem zugehörigen Innenwiderstand dargestellt. An Formel (3) wird zudem ersichtlich, dass zur Messung der Leerlaufspannung ein möglichst hochohmiges Voltmeter verwendet werden sollte, damit

nur möglichst kleine Ströme fließen und somit $IR_i \rightarrow 0 \Rightarrow U_k = U_0$ gilt. Da bei anderen Spannungsquellen der Innenwiderstand über Rückkopplungen durch den sich ändernden Strom im Stromkreis bestimmt wird, kann es notwendig sein den Innenwiderstand differentiell darzustellen.

Durch den Innenwiderstand ist es nicht möglich Spannungsquellen eine beliebig hohe Leistung zu entnehmen. Dies liegt daran, dass die am Lastwiderstand erzielte elektrische Leistung durch die Formel

$$N = I^2 R_a = N(R_a) \quad (4)$$

gegeben ist. Bei $R_a = R_i$ wird die Funktion maximal. Wird R_a genau so gewählt, wird von Leistungsanpassung gesprochen. Diese Methode wird unter anderem in der Nachrichten- und Messtechnik angewendet, hat in der Starkstromtechnik jedoch keine Relevanz, da die Umsetzung nur sehr schwer zu realisieren wäre.

3 Fehlerrechnung

Im Folgenden werden alle Mittelwerte mit folgender Formel bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (5)$$

Der zugehörige Fehler des Mittelwertes berechnet sich mit

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (6)$$

Werden fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel benutzt, so wird der neue Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung angegeben:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \quad (7)$$

Eventuelle Ausgleichsgeraden berechnen sich über

$$y = a \cdot x + b \quad (8a)$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (8b)$$

$$b = \frac{\overline{x^2 \bar{y}} - \bar{x} \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (8c)$$

Die Regression sowohl von Ausgleichsgeraden als auch von anderen Polynomen, sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler, wird mit iPython 2.1.0 durchgeführt.

4 Durchführung

Zunächst wird die Leerlaufspannung der vorliegenden Monozelle U_0 gemessen. Dazu wird das Voltmeter direkt mit den beiden Anschlüssen verbunden. Die angezeigte Spannung sowie der Innenwiderstand R_V des Voltmeters werden notiert.

Daraufhin werden ein Amperemeter und ein regelbarer Widerstand R_a , wie in Schaltbild 2a zu sehen, mit der Monozelle in Reihe geschaltet. Das Voltmeter bleibt parallel geschaltet und soll weiterhin den Spannungsabfall über die Monozelle messen. Der Wi-

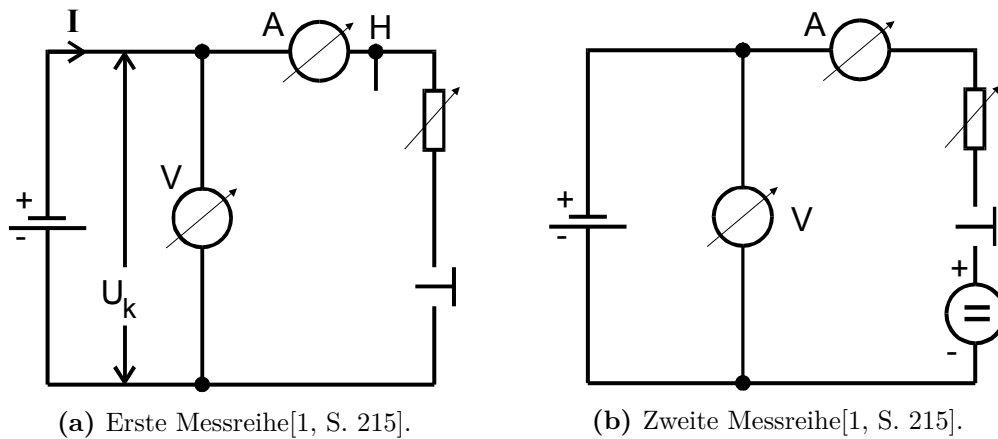


Abbildung 2: Schaltbilder.

derstand wird dabei von $(0-50) \Omega$ variiert und mindestens 20 Wertepaare von Spannung U_k und Strom I werden aufgenommen.

Nach abgeschlossener Messung wird eine zusätzliche Spannungsquelle in entgegengesetzter Stromrichtung in Reihe geschaltet. Diese sollte etwa 2 V mehr haben als die Monozelle, so dass der Strom nun in die entgegengesetzte Richtung fließt. Der Aufbau ist in Abbildung 2b zu sehen. Der Widerstand wird erneut von $(0-50) \Omega$ variiert und mindestens 20 Wertepaare von Spannung und Strom werden notiert.

Nach dieser Messung wird die zweite Spannungsquelle wieder ausgebaut, es wird also wieder die Schaltung, die in Abbildung 2a zu sehen ist, verwendet. Zusätzlich wird die Monozelle mit einem RC-Generator ausgetauscht. Dieser soll zuerst eine Rechteckspannung liefern. Der Widerstand wird nun von $(20-250) \Omega$ variiert, während weiterhin die Wertepaare am Ampere- und Voltmeter abgelesen werden.

Die Messung wird mit einer Sinusspannung wiederholt. Auch hier werden die Wertepaare für Spannung und Stromstärke notiert, der Widerstand wird von $(0,1-5) 10^3 \Omega$ variiert.

5 Auswertung

Die direkt gemessene Leerlaufspannung U_0 der Monozelle und der notierte Innenwiderstand R_V des Voltmeters lauten:

$$U_0 = 1,6 \text{ V}$$
$$R_V \approx 10 \cdot 10^6 \Omega.$$

Zur Bestimmung des Innenwiderstandes R_i und der Leerlaufspannung der Monozelle werden die gemessenen Daten von U_k gegen I abgetragen. Mit Gleichung (3) errechnet sich dann mit Hilfe der lineare Regression, wie unter den Gleichungen bei (8) zu sehen,

$$-a = R_i = (9,6 \pm 0,2) \Omega$$
$$b = U_0 = (1,53 \pm 0,02) \text{ V}.$$

Die hierfür verwendeten Daten so wie die Ausgleichsgerade finden sich in Tabelle 1

Tabelle 1: Messdaten für die Klemmenspannung U_k in Abhängigkeit des Stroms I der Monozelle.

U_k/V	$I/10^{-3} \text{ A}$
1,30	26,0
1,30	27,1
1,28	28,2
1,27	29,4
1,25	30,8
1,24	32,2
1,21	34,1
1,20	35,9
1,18	37,6
1,15	39,2
1,11	43,0
1,09	44,9
1,04	49,0
1,01	52,1
0,94	57,6
0,90	62,0
0,78	72,2
0,68	80,8
0,52	95,0
0,41	120
0,27	135
0,09	155

beziehungsweise in Abbildung 3.

Die Bestimmung von R_i und U_0 der Monozelle wird mit den Messdaten aus der Messreihe mit Gegenspannung wiederholt. Da die Stromrichtung nun umgekehrt ist, ändert sich Gleichung (3) zu

$$U_k = U_0 + IR_i. \quad (9)$$

Aus den Messdaten in Tabelle 2 und der Darstellung 4 der linearen Ausgleichsrechnung ergibt sich

$$a = R_i = (8,8 \pm 0,2) \Omega$$

$$b = U_0 = (1,67 \pm 0,02) \text{ V}.$$

Tabelle 2: Messdaten für die Klemmenspannung U_k in Abhängigkeit des Stroms I der Monozelle mit angelegter Gegenspannung.

U_k/V	$I/10^{-3} \text{ A}$
1,95	35,5
1,96	36,5
1,97	38,0
1,99	40,0
2,01	41,5
2,03	43,0
2,06	45,5
2,09	48,0
2,11	51,0
2,15	53,5
2,18	57,0
2,23	61,0
2,28	65,5
2,34	71,0
2,40	77,0
2,49	85,0
2,60	96,5
2,80	130
3,03	150
3,09	165
3,25	185
3,55	215

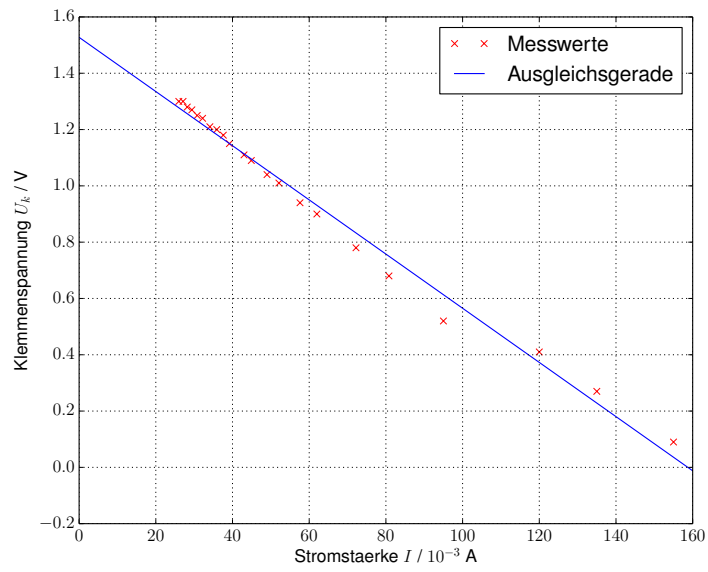


Abbildung 3: Lineare Regression zu der ersten Messreihe, Monozelle ohne Gegen-spannung.

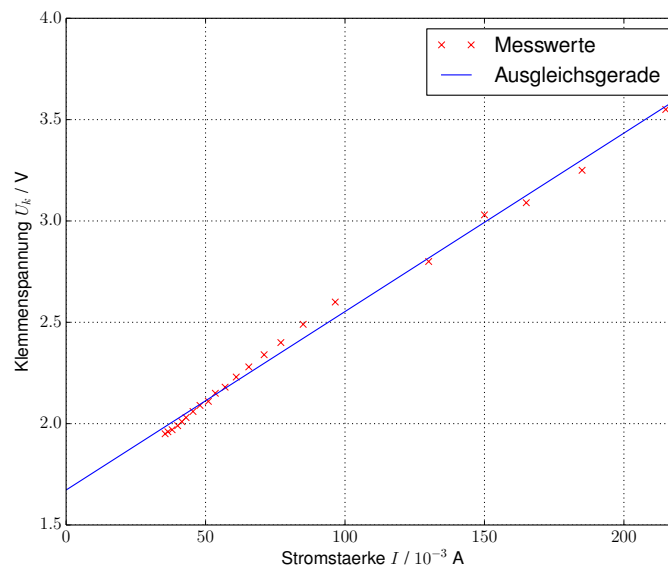


Abbildung 4: Lineare Regression zu der zweiten Messreihe, Monozelle mit Gegen-spannung.

Für die Rechteck- und Sinusspannungsquelle wird wieder Gleichung (3) verwendet. Die Messdaten hierfür sind in Tabelle 3 und die lineare Regressionen in Abbildungen 5 beziehungsweise 6 zu sehen. Damit ergeben sich für die Innenwiderstände und die Leerlaufspannung die Werte:

$$\text{Rechteckspannung: } -a = R_i = (54,8 \pm 0,6) \Omega$$

$$b = U_0 = (0,606 \pm 0,002) \text{ V}$$

$$\text{Sinusspannung: } -a = R_i = (570 \pm 10) \Omega$$

$$b = U_0 = (2,29 \pm 0,01) \text{ V}.$$

Tabelle 3: Messdaten für die Klemmenspannung U_k in Abhängigkeit des Stroms I bei einer Rechteck- bzw. Sinusspannung.

Rechteckspannung		Sinusspannung	
U_k/V	$I/10^{-3} \text{ A}$	U_k/V	$I/10^{-3} \text{ A}$
0,19	7,5	0,75	2,65
0,25	6,6	1,00	2,25
0,30	5,7	1,31	1,78
0,33	4,9	1,58	1,43
0,36	4,4	1,61	1,10
0,38	4,1	1,71	0,95
0,40	3,7	1,80	0,84
0,42	3,4	1,85	0,76
0,43	3,2	1,88	0,69
0,44	3,0	1,92	0,64
0,45	2,9	1,94	0,60
0,46	2,7	1,96	0,56
0,46	2,6	1,99	0,53
0,47	2,4	2,00	0,50
0,48	2,4	2,01	0,48
0,48	2,2	2,03	0,46
0,49	2,2	2,05	0,44
0,49	2,1	2,06	0,42
0,49	2,0	2,06	0,41
0,50	2,0	2,07	0,40
0,50	2,0	2,07	0,39
0,50	1,9	2,07	0,39

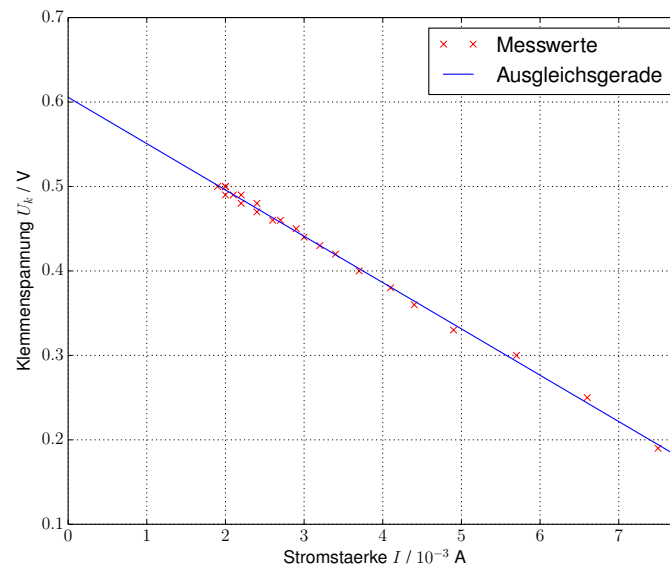


Abbildung 5: Lineare Regression zu der dritten Messreihe, Rechteckspannungsquelle.

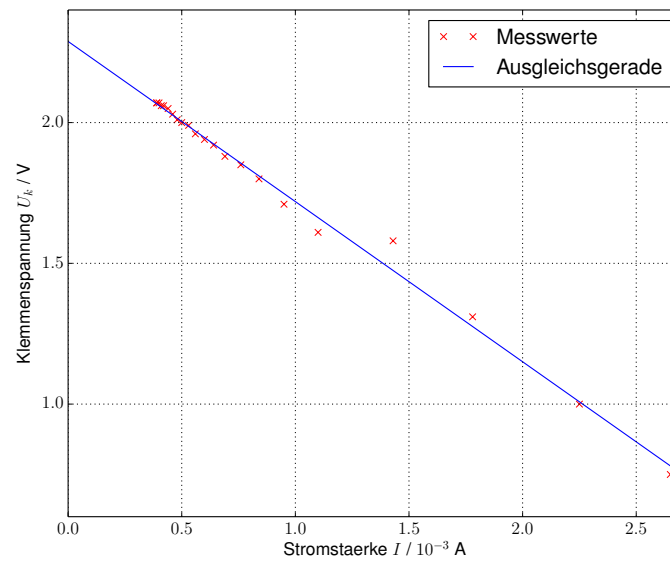


Abbildung 6: Lineare Regression zu der vierten Messreihe, Sinusspannungsquelle.

Zu beachten ist, dass der Innenwiderstand des Voltmeters nicht unendlich groß sein kann. Dadurch ist ein systematischer Fehler bei der direkten Leerlaufspannungsmessung zu berechnen. Dieser ergibt sich indem Gleichung (3) zu

$$U_0 = U_k + U_k \frac{R_i}{R_a} \quad (10)$$

umgestellt wird. U_k entspricht dann dem anfangs direkt gemessenen U_0 und R_a entspricht dem notierten Wert von $R_V = 10 \cdot 10^6 \Omega$. Der Fehler beträgt damit

$$\begin{aligned} \Delta U_0 &= U_0 - U_k = 1,5 \cdot 10^{-6} \Omega \\ \frac{\Delta U_0}{U_k} &= 9,6 \cdot 10^{-5} \%. \end{aligned}$$

Da dieser so klein ist, wird er im Folgenden nicht weiter beachtet.

Ein weiterer systematischer Fehler würde gemacht werden, wenn das Voltmeter hinter das Amperemeter, also wie in Abbildung 2a zu sehen, an Punkt "H" angeschlossen würde. Dieser wäre, dass nicht mehr nur der Spannungsabfall über die Spannungsquelle gemessen wird, sondern auch das Amperemeter mitbetrachtet würde. Dieses ist nicht mehr die reine Klemmenspannung.

Zuletzt werden die Messdaten aus der ersten Messreihe mit Hilfe der Leistung überprüft. Dazu wird $U_k \cdot I$ gegen $\frac{U_k}{I}$ abgetragen und mit einer Theoriekurve:

$$N = I^2 R_a = \frac{U_0^2}{(R_a + R_i)^2} R_a \quad (11)$$

verglichen. Die benötigten Werte finden sich in Tabelle 4 und der Vergleich in Abbildung 7. Die Messdaten liegen im Allgemeinen sehr nah an der Theoriekurve, was die Vermutung bestätigt, dass der oben beschriebene systematische Fehler von der direkten Leerlaufspannungsmessung klein genug ist, um ihn vernachlässigen zu können. Lediglich in der Umgebung des Leistungsmaximums ist eine Diskrepanz zu erkennen. Da allerdings sowohl die anderen Werte bei höheren Widerständen als auch die bei kleineren Widerständen sehr gut passen, ist auf einen zufälligen Fehler innerhalb der Messungenauigkeit zu schließen.

Tabelle 4: Messdaten für die Klemmenspannung U_k in Abhängigkeit des Stroms I der Monozelle, sowie die berechneten Werte für die Leistung und den Widerstand.

U_k/V	$I/10^{-3}\text{ A}$	$U_k \cdot I/10^{-3}\text{ W}$	$\frac{U_{t\text{extk}}}{I}/\Omega$
1,30	26,0	33,8	50,0
1,30	27,1	35,2	48,0
1,28	28,2	36,1	45,4
1,27	29,4	37,3	43,2
1,25	30,8	38,5	40,6
1,24	32,2	39,9	38,5
1,21	34,1	41,3	35,5
1,20	35,9	43,1	33,4
1,18	37,6	44,4	31,2
1,15	39,2	45,1	29,3
1,11	43,0	47,7	25,8
1,09	44,9	48,9	24,3
1,04	49,0	51,0	21,2
1,01	52,1	52,6	19,4
0,94	57,6	54,1	16,3
0,90	62,0	55,8	14,5
0,78	72,2	56,3	10,8
0,68	80,8	54,9	8,4
0,52	95,0	49,4	5,5
0,41	120	49,2	3,4
0,27	135	36,5	2,0
0,09	155	14,0	0,6

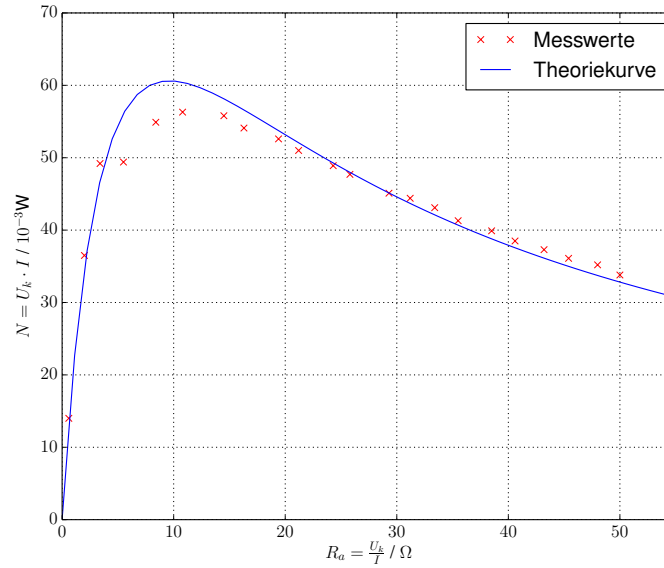


Abbildung 7: Vergleich von Messwerten mit einer Theoriekurve.

6 Diskussion

Bei der direkten Leerlaufspannungsmessung U_0 wurde bereits im Auswertungsteil auf den systematischen Fehler hingewiesen. Weitere Fehler sind unwahrscheinlich, da sich das Voltmeter noch sehr gut ablesen ließ.

Bei den weiteren Messreihen, bei denen auch das Amperemeter verwendet wurde, ist zu bemerken, dass dieses sich nur auf circa $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$ kalibrieren ließ, als noch kein Strom floss. Dieser mögliche systematische Fehler wurde jedoch nicht herausgerechnet, da das Amperemeter keine Skalierung in diesem kleinen Bereich besitzt. Es wurde daher vermutet, dass bei den in den Messreihen vorkommenden größeren Messwerten dieser Fehler nicht ausschlaggebend war. Diese Vermutung hat sich auch an dem Vergleich mit der Theoriekurve im letzten Teil der Auswertung bestärkt. Eine weitere Überprüfung mit einem anderen Amperemeter, die hier nicht möglich war, ist jedoch zu empfehlen.

Die Abweichungen von den Ausgleichsgeraden bei den Graphen 3 und 4 der Monozelle lassen sich dadurch erklären, dass für die erste Messreihe (Abbildung 3) bei den letzten drei Wertepaaren der Messbereich, sowohl am Amperemeter als auch am Voltmeter, geändert wurde. Bei der zweiten Messreihe (Abbildung 4) wurde am Amperemeter für die letzten fünf Werte und am Voltmeter für die letzten drei Werte ein jeweils anderer Messbereich verwendet. Dadurch haben sich jeweils die inneren Widerstände der Messgeräte verändert, die Abweichung liegt aber auch hier im Toleranzbereich.

Bei den Messreihen mit dem RC-Generator als Spannungsquelle ist zu bemerken, dass die analogen Messgeräte teilweise ungenau abzulesen waren, da die Zeiger zum Teil Schwankungen um eine Ruhelage durchgeführt haben. In der Durchführung wurde ver-

sucht diesen Fehler zu minimieren, in dem bei großen Schwankungen länger gewartet wurde und eine Ruhelage abgeschätzt wurde. Da die Abweichungen von der Ausgleichsgerade im Allgemeinen sehr gering sind und die Messung für keine weiteren Rechnungen benötigt wurde, ist der Fehler auch hier im Toleranzbereich.

Quellenverzeichnis

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch 301, Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen*. 2014.