Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Der Versuch hat das Ziel, das magnetische Moment eines Stabmagneten auf drei unterschiedliche Weisen zu messen: über die Ausnutzung der Gravitation, über das Trägheitsmoment mit der daraus resultierenden Schwingungsdauer und über die Präzessionsbewegung.

2 Theorie

2.1 Allgemeine Theorie

Die kleinste Einheit, die ein magnetisches Moment erzeugen kann, ist ein magnetischer Dipol. Magnetische Monopole gibt es nicht. Magnetische Dipole können Permanentmagneten oder von Strom I durchflossene Leiter sein. Letztere haben ein magnetisches Moment mit der Fläche A

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A}.$$

Auch Permanentmagneten haben ein magnetisches Moment, welches aber nicht so einfach zu berechnen ist, sondern wie in diesem Versuch gemessen werden muss. Mithilfe von geeigneten Spulen oder sehr großen Permanentmagneten lässt sich ein homogenes Magnetfeld schaffen. Geeignete Spulen können hier sogenannte Helmholtzspulen sein. Das sind zwei große, hintereinander stehende, ringförmige Spulen, zwischen denen sich ein nahezu homogenes Magnetfeld bildet. Das Magnetfeld in der Mitte der beiden Spulen berechnet sich aus der magnetischen Feldkonstante μ_0, dem Radius R der Helmholtzspulen und dem Abstand d zwischen den beiden Spulen.

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{(R^2 + (\frac{d}{2})^2)^{3/2}}. \tag{1}$$

2.2 Bestimmung des magnetischen Momentes unter Ausnutzung der Gravitation

Wenn eine Masse m über einen Arm r an einen Drehpunkt befestigt wird, dann bewirkt die Gravitation g ein Drehmoment D_g

$$\vec{D}_g = m \cdot (\vec{r} \times \vec{g}).$$

Ein Magnet in einem homogenen Magnetfeld hat das Drehmoment D_B

$$\vec{D}_B = \vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B}.$$

Dabei ist μ das magnetische Moment und B die Magnetfeldstärke.
Diese Methode nutzt aus, dass das Drehmoment D_g über die Gravitation und das magnetische Drehmoment D_B Magneten im Gleichgewicht liegen. Dabei haben $\vec{g}$ und $\vec{B}$ die selbe Richtung und die Äquivalenz kann beschreiben werden als:

$$\vec{\mu}_{Dipol} = m \cdot g \frac{r}{B}. \tag{2}$$

2.3 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer eines Magneten

Die Schwingung eines Magneten in einem magnetischen Feld kann durch die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators beschrieben werden als:

$$-|\vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B}| = J_K \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Hier ist J_K das Trägheitsmoment des Körpers und θ der Winkel.
Eine Lösung der Differentialgleichung liefert

$$\vec{\mu}_{Dipol} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot J_K}{B \cdot T^2}. \tag{3}$$

2.4 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Präzession einer Kugel

Eine Präzessionsbewegung entsteht, wenn die Drehachse eines rotierenden Körpers um eine andere, zweite Achse rotiert. Die Präzession ist abhängig vom Drehimpuls L_K, der sich durch

$$L_k = J_k \cdot 2\pi\nu. \tag{4}$$

berechnen lässt. Der Drehimpuls ist wiederum abhängig von der Frequenz ν.
Das Magnetfeld wirkt als äußere Kraft auf die Präzessionsbewegung, die durch die Differentialgleichung

$$\vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}_K}{dt}$$

beschrieben werden kann. Eine Lösung der Differentialgleichung ist

$$\Omega_p = \frac{\mu B}{|\vec{L_K}|}.$$

Mit der Formel für das Trägheitsmoment und der Kreisfrequenz folgt

$$\vec{\mu}_{Dipol} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L_K}{B \cdot T_p}, \tag{5}$$

wobei T_p die Umlaufdauer der Präzessionsbewegung ist.

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

Der Aufbau des Experiments ist in folgender Abbildung dargestellt:

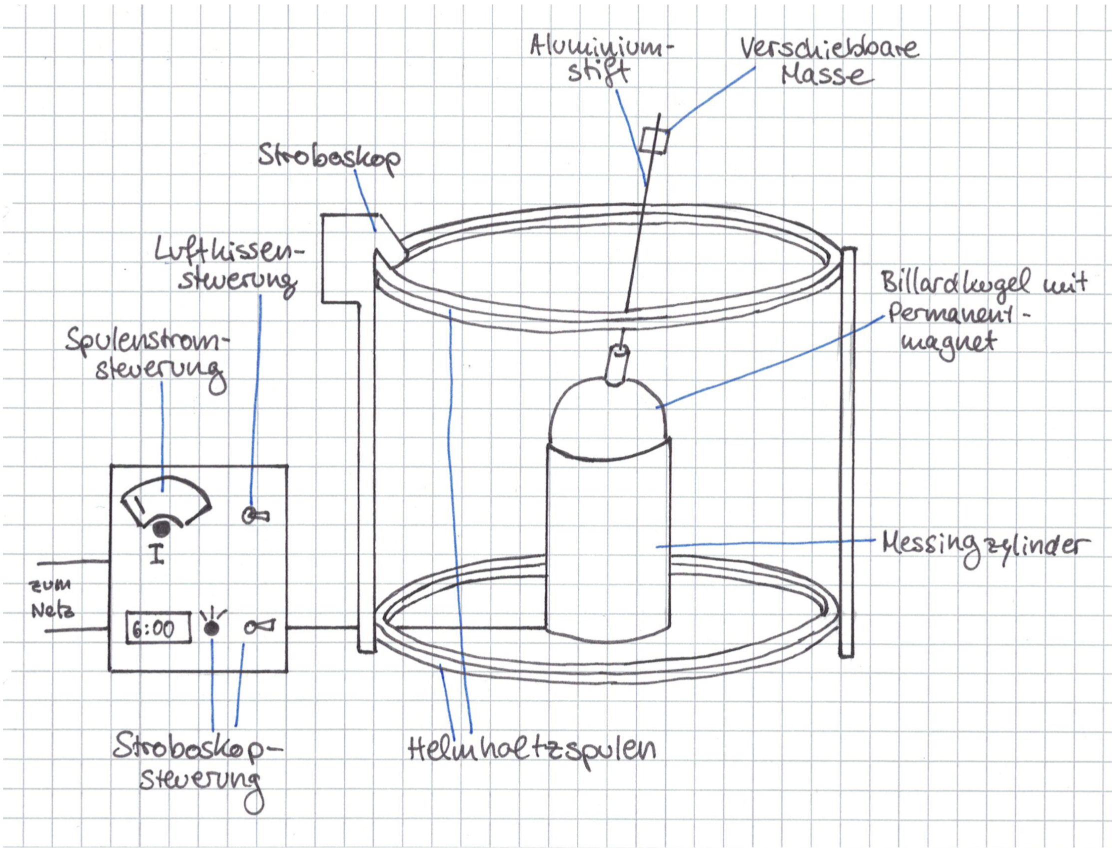


Abbildung 1: Schematischer Aufbau der Messapparatur

Ein Permanentmagnet ist in eine Kugel eingelassen, hier Billardkugel genannt. Ein Messingzylinder steht in der Mitte eines Helmholtzspulenpaars mit den Abmessungen $N = 195$, $d = 0{,}138\,\mathrm{m}$ und $R = 0{,}109\,\mathrm{m}$. Die Billardkugel wird auf ein Luftkissen auf dem Messingzylinder gelegt. Am Rand der oberen Helmholtzspule ist ein Stroboskoplicht angebracht. An dem Steuergerät können die Magnetfeld-erzeugende Stromstärke an den Spulen und das Stroboskop eingestellt werden. Außerdem wird das Luftkissen über das Steuergerät ein- und ausgeschaltet.

3.2 Durchführung der Bestimmung des magnetischen Momentes unter Ausnutzung der Gravitation

Für diese Methode wird eine verschiebbare Masse an einem dünnen Aluminiumstift in die Billardkugel gesteckt. Die Masse wird als Punktmasse angesehen und die Masse des Aluminiumstiftes wird vernachlässigt. Das Luftkissen wird eingeschaltet und die Richtung des Magnetfelds so eingestellt, dass es nach oben wirkt. Der Radius der Masse vom Mittelpunkt der Billardkugel wird mithilfe einer Schieblehre festgelegt und die Billardkugel auf das Luftkissen gesetzt. Dann wird der Spulenstrom so weit hochgedreht, bis die Kräfte in einem Gleichgewicht sind und die Billardkugel nicht mehr umkippt. Der gesetzte Radius der Masse zum Mittelpunkt der Billardkugel und die Spulenstromstärke werden notiert. Aus der Stromstärke wird das entsprechende Magnetfeld berechnet. Die Messung wird für insgesamt 14 Radien durchgeführt.

3.3 Durchführung der Bestimmung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer des Magneten

Bei dieser Methode wird zunächst das Luftkissen angestellt. Die Richtung des Magnetfelds ist nach oben gehend. Die Spulenstromstärke wird eingestellt und die Billardkugel wird auf dem Luftkissen vorsichtig ausgelenkt. Die Schwingungsdauer von zehn Schwingungen wird gemesssen. Daraus wird die Dauer einer Schwingung gemittelt. Es werden die Spulenstromstärke und die gemittelte Schwingungsdauer notiert. Die Messung wird mit 13 weiteren Stromstärken durchgeführt.

3.4 Durchführung der Bestimmung des magnetischen Momentes über die Präzession der Billardkugel

Es wird das Luftkissen eingeschaltet. Das Stroboskoplicht wird auf eine Frequenz von 6Hz geregelt. Anschließend wird die Billardkugel auf dem Luftkissen in Rotation versetzt und das Stroboskoplicht angestellt. Sobald der weiße Punkt auf der Billardkugel als konstant, nicht mehr blinkend, wahrgenommen wird, wird die Billardkugel vorsichtig ausgelenkt und die Spulenstromstärke aufgedreht. Die Umlaufdauer der Präzessionsbewegung wird gemessen und gemeinsam mit der Spulenstromstärke notiert. Die Messung wird für die selbe Stromstärke drei mal wiederholt und die Umlaufzeiten gemittelt. Die Messung wird für insgesamt zehn verschiedene Spulenstromstärken durchgeführt.

4 Auswertung

4.1 Methode über die Gravitation

Das B-Feld wird über die Formel (1) bestimmt. μ_0 wird dabei als

$$\mu_0 = 6{,}954\,318\,602 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$$

angenommen. In der Anleitung werden die Windungszahl

$$N = 195$$

und der Radius

$$R = 0{,}109\,\mathrm{m}$$

der Spule vorgegeben. Die Stromstärke und das dazu ausgerechnete B-Feld sind in der Tabelle 1 nachzulesen.
$\vec{\mu}_{Dipol}$ wird über die Formel (2) berechnet. Dabei wurde m als

$$m = 0{,}0014\,\mathrm{kg}$$

gemessen und

$$g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

angenommen. $\frac{r}{B}$ ist die Steigung der Ausgleichsgeraden der Form

$$y = a \cdot x + b.$$

Die Ausgleichsgrade ist in Abbildung 2 zu sehen. Die Steigung beträgt

$$a = (29{,}673\,220 \pm 0{,}079\,128)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{T}}.$$

Daraus ergibt sich ein $\vec{\mu}_{Dipol}$ von

$$\vec{\mu}_{Dipol} = (0{,}407\,53 \pm 0{,}001\,09)\,\mathrm{Am}^2.$$

Der Fehler wird mit Gauß berechnet:

$$\Delta\vec{\mu}_{Dipol} = \sqrt{m^2 \cdot g^2 \cdot \Delta a^2}.$$

Tabelle 1: Gravitation

I/A	B/mT	r/m
1,45	1,9663	0,4894
1,6	2,1697	0,8394
1,85	2,5088	1,9894
2,1	2,8478	2,4894
2,1	2,8478	2,9894
2,2	2,9834	3,4894
2,4	3,2546	3,9894
2,5	3,3902	4,4894
2,5	3,3902	4,9894
2,7	3,6614	5,4894
2,85	3,8649	5,9894
2,9	3,9327	6,4894
3,1	4,2039	6,9894
3,3	4,4751	7,4894

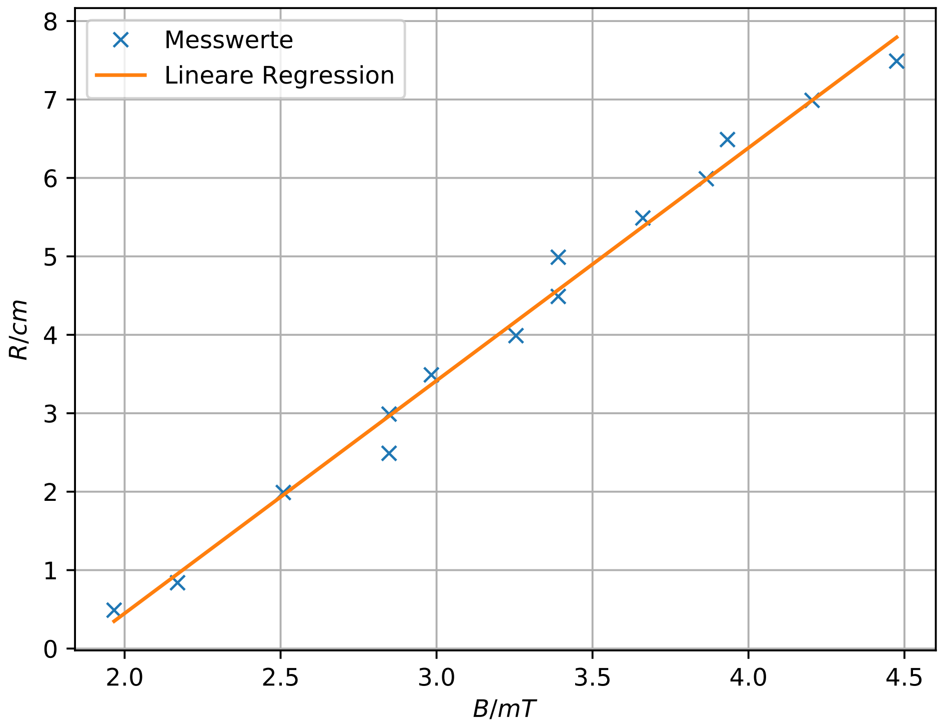


Abbildung 2: Gravitation

4.2 Methode über die Schwingungsdauer

$\vec{\mu}_{Dipol}$ wird für die Schwingung mit der Formel (3) bestimmt. J_k ist dabei

$$J_k = \frac{2}{5} \cdot m_k \cdot r_k^2. \tag{6}$$

m_k ist als

$$m = 0{,}124\,\mathrm{kg}$$

gemessen worden. r_k beträgt

$$r_k = 0{,}0269\,\mathrm{m}.$$

Für J_k ergibt sich daraus ein Trägheitsmoment von

$$J_k = 4{,}11 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kgm}^2.$$

Die Steigung der Ausgleichsgeraden zu Tabelle 2 in Abbildung 3 ist T^2B und hat den Wert

$$a = (3{,}910\,311\,08 \pm 0{,}003\,908\,43) \cdot 10^{-3}\mathrm{Ts}^2.$$

In die Formel (3) eingesetzt ergibt sich für $\vec{\mu}_{Dipol}$ ein Wert von

$$\vec{\mu}_{Dipol} = (0{,}414\,945\,7 \pm 0{,}000\,000\,1)\,\mathrm{Am}^2$$

Der Fehler wird mit Gauß berechnet:

$$\Delta\vec{\mu}_{Dipol} = \sqrt{\frac{(2\pi)^4 J_K^2}{a^4} \cdot \Delta a^2}.$$

Tabelle 2: Schwingung

I/A	B/mT	$\frac{1}{B}/\frac{1}{mT}$	T/s	T^2/s^2
0,3	0,4068	2,4580	3,088	9,5357
0,5	0,6780	1,4748	2,438	5,9438
0,8	1,0849	0,9218	2,007	4,0280
1,0	1,3561	0,7374	1,784	3,1827
1,3	1,7629	0,5672	1,575	2,4806
1,5	2,0341	0,4916	1,431	2,0478
1,8	2,4410	0,4097	1,281	1,6410
2,0	2,7122	0,3687	1,257	1,5800
2,3	3,1190	0,3206	1,134	1,2860
2,5	3,3902	0,2950	1,09	1,1881
2,8	3,7971	0,2634	1,044	1,0899
3,0	4,0683	0,2458	0,991	0,9821
3,5	4,7463	0,2107	0,943	0,8892
4,0	5,4244	0,1844	0,841	0,7073

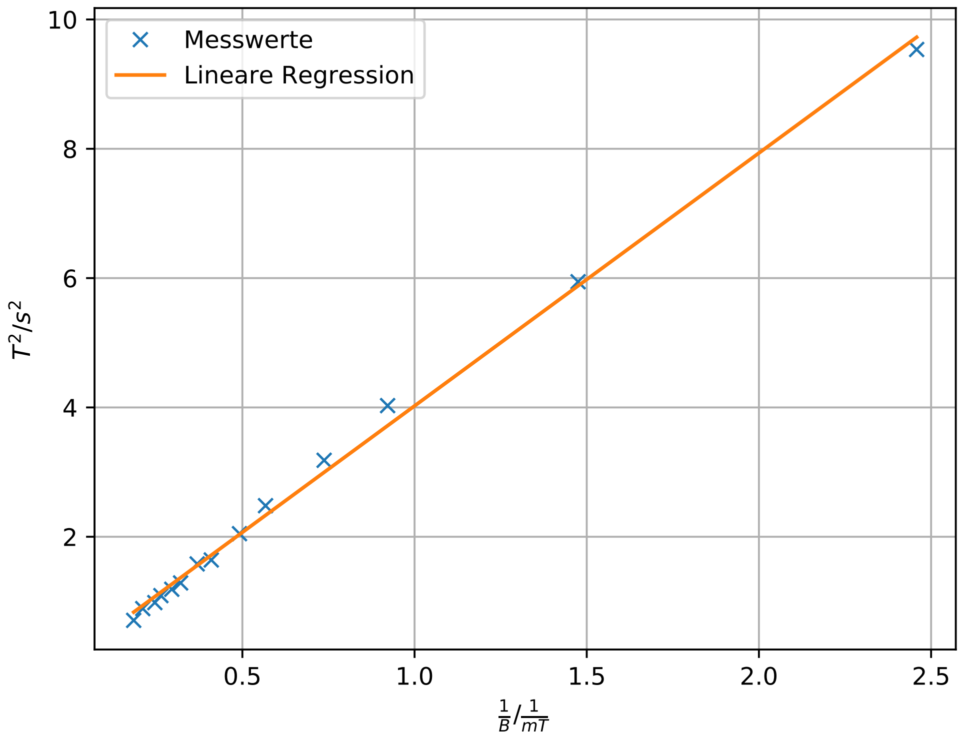


Abbildung 3: Schwingung

4.3 Methode über die Präzession

Mit der Formel (5) lässt sich $\vec{\mu}_{Dipol}$ für die Präzession bestimmen. Der Drehimpuls wird berechnet durch (4). ν ist hierbei $\nu = 6\,\mathrm{Hz}$. J_k kann aus dem Aufgabenteil der Schwingung entnommen werden.
Für L_k ergibt sich ein Wert von

$$L_k = 1{,}5494 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}}.$$

Die Steigung der Ausgleichsgeraden zu Tabelle 3 in Abbildung 4 beträgt

$$m = (43{,}672\,14 \pm 0{,}000\,93)\,\frac{1}{\mathrm{sT}}.$$

$\vec{\mu}_{Dipol}$ kann somit auf

$$\vec{\mu}_{Dipol} = (0{,}425\,155\,590 \pm 0{,}000\,000\,009)\,\mathrm{Am}^2$$

bestimmt werden. Der Fehler wird mit Gauß berechnet.

$$\Delta\vec{\mu}_{Dipol} = \sqrt{(2\pi)^2 {L_K}^2 \cdot \Delta a^2}.$$

Tabelle 3: Präzession

I/A	B/mT	$\frac{1}{T1}/\frac{1}{s}$	$\frac{1}{T2}/\frac{1}{s}$	$\frac{1}{T3}/\frac{1}{s}$
0,3	0,4068	0,0238	0,0218	0,02690
0,5	0,6780	0,0375	0,0340	0,03419
0,8	1,0849	0,0476	0,0489	0,06105
1,0	1,3561	0,0612	0,0702	0,06072
1,3	1,7629	0,0896	0,0845	0,07728
1,5	2,0341	0,0864	0,0930	0,09814
1,8	2,4410	0,1135	0,1104	0,11299
2,0	2,7122	0,1152	0,1134	0,12626
2,3	3,1190	0,1379	0,1391	0,13850
2,5	3,3902	0,1600	0,1634	0,15674

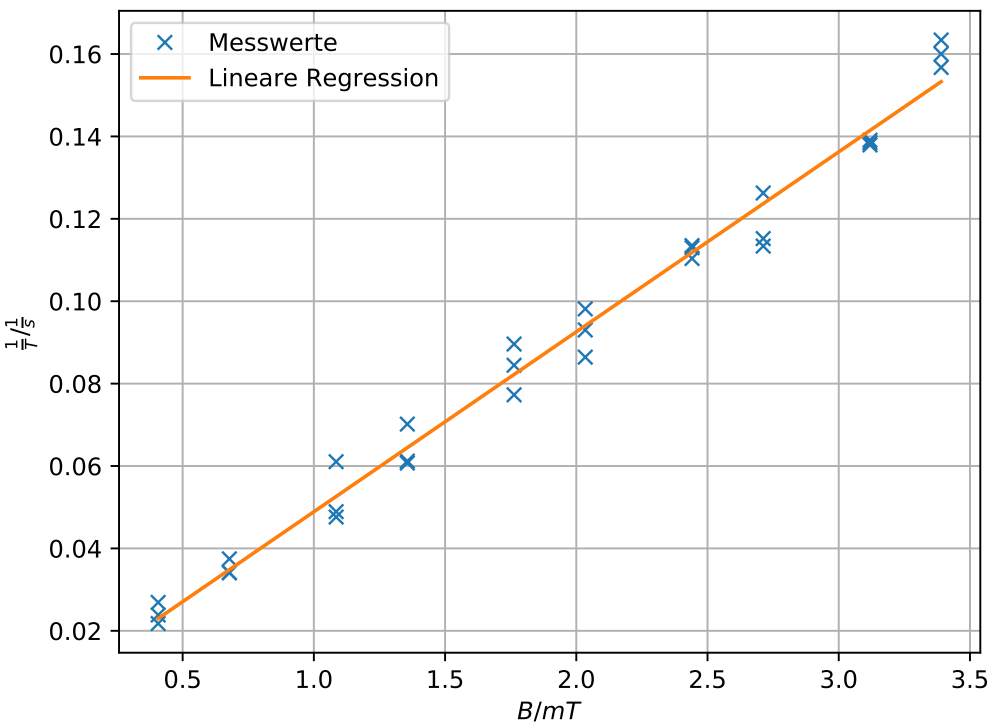


Abbildung 4: Präzession

5 Diskussion

In diesem Experiment geht es darum das magnetische Moment eines Permanentmagneten durch drei verschiedene Methoden zu messen.

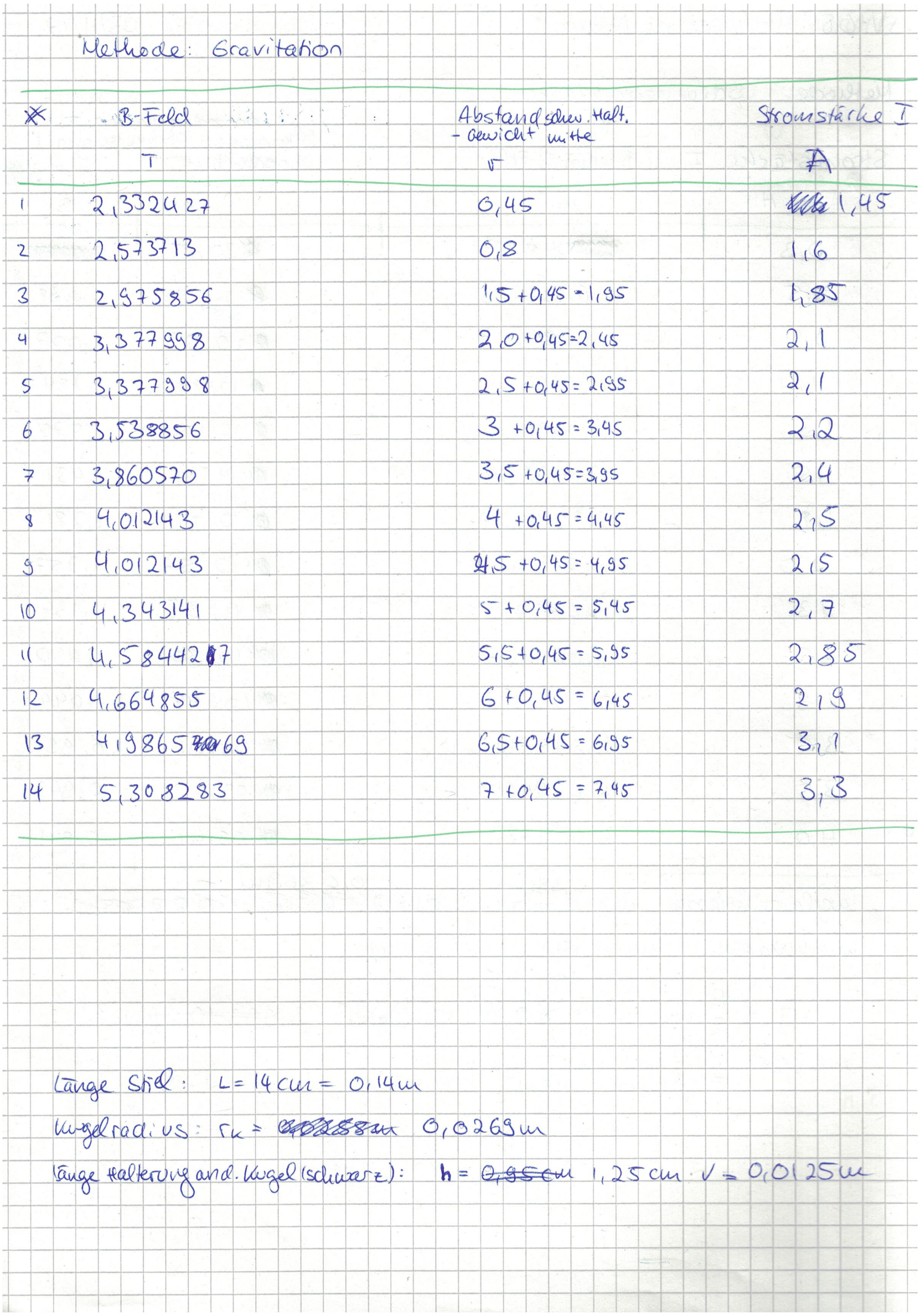
$$\vec{\mu}_{\text{Gravitation}} = (0{,}407\,53 \pm 0{,}001\,09)\,\text{Am}^2$$
$$\vec{\mu}_{\text{Schwingung}} = (0{,}414\,945\,7 \pm 0{,}000\,000\,1)\,\text{Am}^2$$
$$\vec{\mu}_{\text{Präzession}} = (0{,}425\,155\,590 \pm 0{,}000\,000\,009)\,\text{Am}^2$$

Die relative Abweichung berechnet sich über

$$f_{1,2} = \frac{x_1 - x_2}{x_2}.$$

$$f_{\text{Grav,Schwing}} = 1{,}79\,\%$$
$$f_{\text{Grav,Präz}} = 4{,}15\,\%$$
$$f_{\text{Schwing,Präz}} = 2{,}40\,\%$$

Die Abweichung der drei gemessenen Ergebnisse kann verschiedene Gründe haben.
Bei der Bestimmung des magnetischen Momentes unter Ausnutzung der Gravitation kommen mehrere Probleme zusammen. Der Aluminiumstift war bereits vor Beginn des Versuchs verbogen. Ablesefehler sind nicht auszuschließen.
Die Bestimmung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer des Magneten ist ebenfalls nicht ohne Fehlerquellen. Messfehler sind auch bei der Schwingungszahl und der Schwingungsdauer möglich. Die Auslenkung der Billardkugel ist von Messung zu Messung nicht konstant und möglicherweise zu groß.
Die Bestimmung des magnetischen Momentes über die Präzession der Billardkugel bringt die meisten Fehlerquellen mit sich. Es wird beobachtet, dass die Billardkugel sich initial, bereits vor der Auslenkung, mit einer geringen Präzession dreht. Der Zeitpunkt, an dem die Kugel die richtige Frequenz hat, ist schwierig zu erkennen. Im Laufe der Messungen wird es auch immer schwieriger, da das Stoboskoplicht sehr anstrengend für die Augen ist. Es ist nicht auschließbar, dass es bei dem Starten der Uhr und bei dem Aufdrehen der Spulenstromstärke durch Verzögerungen zu fehlerhaften Werten kommt. Desweiteren gestaltete es sich schwierig, den genauen Zeitpunkt der Umlaufdauer der Präzessionsbewegung zu messen, da die Präzession bei den Messungen zum Teil recht unterschiedliche Auslenkungswinkel hat.


Methode: Gravitation

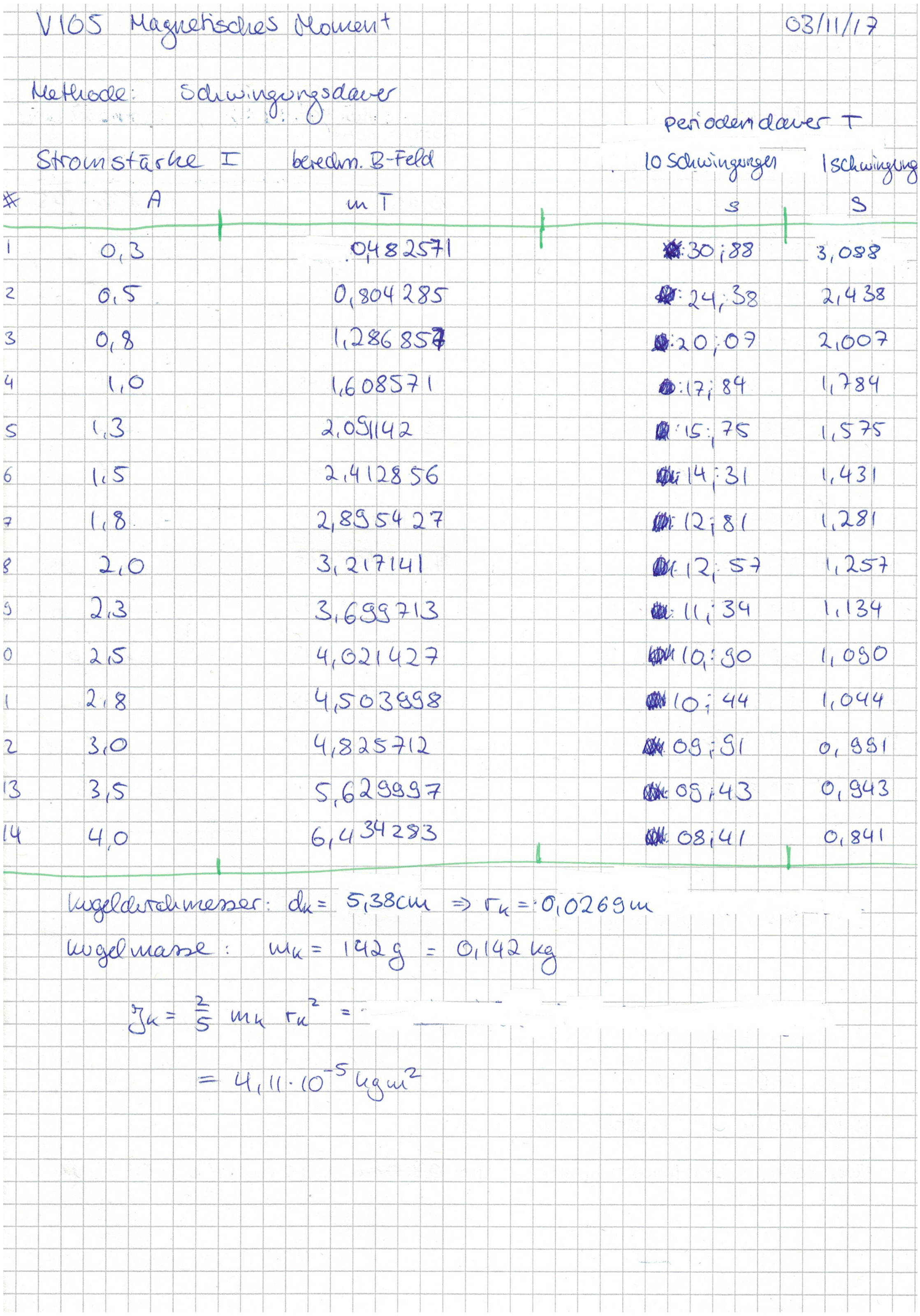
*	B-Feld T	Abstand Schw. Halt. - Gewicht mitte r	Stromstärke I A
1	2,332427	0,45	1,45
2	2,573713	0,8	1,6
3	2,975856	1,5+0,45=1,95	1,85
4	3,377998	2,0+0,45=2,45	2,1
5	3,377998	2,5+0,45=2,95	2,1
6	3,538856	3 +0,45=3,45	2,2
7	3,860570	3,5+0,45=3,95	2,4
8	4,012143	4 +0,45=4,45	2,5
9	4,012143	4,5 +0,45=4,95	2,5
10	4,343141	5+0,45=5,45	2,7
11	4,584427	5,5+0,45=5,95	2,85
12	4,664855	6+0,45=6,45	2,9
13	4,986569	6,5+0,45=6,95	3,1
14	5,308283	7+0,45=7,45	3,3

Länge Stiel: L = 14 cm = 0,14 m

Kugelradius: r_k = ~~[illegible]~~ 0,0269 m

Länge Halterung and. Kugel (schwarz): h = ~~0,95 cm~~ 1,25 cm ✓ = 0,0125 m

Abbildung 5: Originale Messdaten. Messreihe über die Gravitation



V105 Magnetisches Moment 03/11/17

Methode: Schwingungsdauer

#	Stromstärke I	berechn. B-Feld	Periodendauer T: 10 Schwingungen	1 Schwingung
	A	mT	s	s
1	0,3	.0482571	30;88	3,088
2	0,5	0,804285	24;38	2,438
3	0,8	1,286857	20;07	2,007
4	1,0	1,608571	17;84	1,784
5	1,3	2,091142	15;75	1,575
6	1,5	2,412856	14;31	1,431
7	1,8	2,895427	12;81	1,281
8	2,0	3,217141	12;57	1,257
9	2,3	3,699713	11;34	1,134
10	2,5	4,021427	10;90	1,090
11	2,8	4,503998	10;44	1,044
12	3,0	4,825712	09;91	0,991
13	3,5	5,629997	09;43	0,943
14	4,0	6,434283	08;41	0,841

Kugeldurchmesser: $d_K = 5{,}38\,\mathrm{cm} \Rightarrow r_K = 0{,}0269\,\mathrm{m}$

Kugelmasse: $m_K = 142\,\mathrm{g} = 0{,}142\,\mathrm{kg}$

$$J_K = \frac{2}{5} m_K r_K^2 =$$

$$= 4{,}11 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Abbildung 6: Originale Messdaten. Messreihe über die Schwingungsdauer

Methode: Präzession

$f = 6$ Hz

#	B-Feld	Stromstärke I	Umlaufzeit T
	mT	A	s
1.1	0,482571	0,3	41,94
1.2	"	"	45,94
1.3	"	"	37,18
2.1	0,804285	0,5	26,69
2.2	"	"	28,37
2.3	"	"	29,25
3.1	1,286857	0,8	21,00
3.2	"	"	20,44
3.3	"	"	16,38
4.1	1,608571	1,0	16,34
4.2	"	"	14,25
4.3	"	"	16,47
5.1	2,091142	1,3	11,16
5.2	"	"	11,84
5.3	"	"	12,94
6.1	2,412856	1,5	11,57
6.2	"	"	10,75
6.3	"	"	10,19
7.1	2,895427	1,8	~~0,881~~ 8,81
7.2	"	"	9,06
7.3	"	"	8,85
8.1	3,217141	2,0	8,68
8.2	"	"	8,82
8.3	"	"	7,92

Abbildung 7: Originale Messdaten. Messreihe über die Präzession

	B-Feld	Stromstärke	Umlaufdauer
9.1	3,695713	2,3	7,25
9.2	"	"	7,19
9.3	"	"	7,22
10.1	4,563998	2,5	6,25
10.2	"	"	6,12
10.3	"	"	6,38

Abbildung 8: Originale Messdaten. Messreihe über die Präzession, Fortführung