VERSUCH 64

Moderne Interferometrie

Katharina Brägelmann
katharina.braegelmann@tu-dortmund.de

Lars Kolk
lars.kolk@tu-dortmund.de

Durchführung: 06.01.2020 Abgabe: 13.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuchs ist es, den Zusammenhang der spezifischen Wärmekapazität (C_V) zur Temperatur (T) zu untersuchen. Dabei werden das Einstein-Modell und das Debye-Modell betrachtet.

1.1 Theoretische Grundlagen

1.2 Allgemeines zur Wärmekapazität

Die spezifische Wärmekapazität, oder auch Molwärme, c_m ist nach der Thermodynamik wie folgt über die Wärmekapazität C_V definiert:

$$c_\mathrm{m} = \frac{C_\mathrm{V}}{m} = \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial T}\bigg|_V .$$

$m \mathrel{\widehat{=}}$ Molmasse des Materials, $V \mathrel{\widehat{=}}$ konstantes Volumen

Im Festkörper sind die Atome in gitterförmigen Kristallstrukturen angeordnet. Die Temperatur eines Materials bedeutet mikroskopisch, dass die Atome in der Gitterstruktur schwingen und so Energie speichern. Diese Gitterschwingungen werden *Phononen* genannt. Ein Phonon beschreibt also eine wellenförmige Anregung des Gitters mit einer zugeordeten Energie (eine Mode). Phononen verschiedener Energien (verschiedene Moden) können sich überlagern. Die Energie eines Teilchens beträgt

$$U = \sum_{i=x,y,z} \left(\underbrace{\frac{1}{2} m v_\mathrm{i}^2}_{kin.Energie} + \underbrace{\frac{1}{2} k i^2}_{pot.Energie} \right).$$

$k_\mathrm{B} \mathrel{\widehat{=}}$ Boltzmann-Konstante

Im einfachsten Modell wird die Gesamtenergie der Atome durch das Äquipartitionstheorem statistisch zu gleichen Teilen zu kinetischer und potenzieller Energie aufgeteilt mit je $E_\mathrm{kin} = E_\mathrm{pot} = 1/2 k_\mathrm{B} T$ Die Gesamtenergie beträgt bei je drei Freiheitsgraden pro Teilchen und einer Teilchenanzahl N entsprechend

$$U = 2 \cdot \frac{3}{2} N k_\mathrm{B} T.$$

$k_\mathrm{B} \mathrel{\widehat{=}}$ Boltzmann-Konstante, $T \mathrel{\widehat{=}}$ Temperatur

Somit liegt die Wärmekapazität C_V bei

$$C_\mathrm{V} = \frac{\partial U}{\partial T}\bigg|_V = 3 N k_\mathrm{B} = 3R.$$

$R \mathrel{\widehat{=}}$ Universelle Gaskonstante

Dieser Zusammenhang wird *Dulong-Petit*-Gesetz genannt. Es beschreibt eine klassische Näherung der Schwingungen der Atome mit vielen verschiedenen Moden, also Phononen verschiedener Energien. Bei höheren Temperaturen (je nach Material z.B. $T \gtrapprox 200\,\mathrm{K}$) passt dieses Modell zu den experimentellen Daten, bei niedrigen Temperaturen (je nach Material z.B. $T \lessapprox 200\,\mathrm{K}$) weichen Modell und Messdaten stark voneinander ab.

1.3 Einstein-Modell

Im Einstein-Modell wird angenommen, dass alle Phononen eine Energie (eine Mode) haben, also alle mit einer Frequenz ω schwingen. Alle Teilchen liegen also im gleichen Zustand und die Zustandsdichte $D(\omega)$ ist entsprechend eine δ-Funktion. Die Gesamtenergie der Teilchen im Gitter lässt sich mit einer Planck-Verteilung der Besetzungszahl der Phononen berechnen:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1}.$$

$\hbar \widehat{=}$ reduziertes Planck'sches Wirkungsquantum

Die Wärmekapazität entspricht so

$$C_\mathrm{V} = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = 3R\left(\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}\right)^2 \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1\right]^2} = 3R\left(\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T}\right)^2 \frac{\exp\left(\frac{\Theta_\mathrm{E}}{T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\Theta_\mathrm{E}}{T}\right) - 1\right]^2}$$

mit der sogenannten Einstein-Temperatur

$$\Theta_\mathrm{E} = \frac{\hbar\omega_\mathrm{E}}{k_\mathrm{B}}.$$

Die Einstein-Temperatur ist somit durch die Schwingungsfrequenz ω eine materialabhängige Konstante. Durch die Annahme, dass nur eine Mode vorhanden ist, entspricht das Modell bei sehr tiefen Temperaturen und geringen Frequenzen nicht der Realität. Das Einstein-Modell passt jedoch sehr gut zu Anregungen mit optischen Phononen.

1.4 Debye-Modell

Das Debye-Modell geht von einer linearen Zustandsdichte $D(\omega) \propto \omega$ aus. Die Phononen haben also eine kontinuierliche Energieverteilung. Die Gesamtenergie lässt sich über Integration der Zustandsdichte $D(\omega)$ und der gemittelten Besetzungszahl über die erste Brillouin-Zone zu folgendem berechnen:

$$U = \frac{3V\hbar}{2\pi^2 v_\mathrm{s}^3} \int_0^{\omega_\mathrm{D}} \frac{\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T} - 1\right)}\, d\omega.$$

Hierbei wird die Debye-Temperatur Θ_D in folgender Substitution definiert:

$$x = \frac{\hbar\omega_\mathrm{D}}{k_\mathrm{B}T} = \frac{\Theta_\mathrm{D}}{T} \Leftrightarrow \Theta_\mathrm{D} = \frac{\hbar\omega_\mathrm{D}}{k_\mathrm{B}} = Tx.$$

Die Ableitung der Inneren Energie nach der Temperatur liefert die Wärmekapazität:

$$C_\mathrm{V} = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V = 9Nk_\mathrm{B}\left(\frac{\Theta_\mathrm{D}}{T}\right)^3 \int_0^{x_\mathrm{D}} \frac{x^4 \exp(x)}{[\exp(x) - 1]^2}\, dx$$

Für große T resp. kleine x ergibt sich über die Näherung mit der Taylor-Entwicklung $\exp(x) \approx 1 + x$

$$C_\mathrm{V} \approx 3Nk_\mathrm{B}\left(\frac{\Theta_\mathrm{D}}{T}\right)^3 x_\mathrm{D}^3 = 3Nk_\mathrm{B} = 3R.$$

2 Aufbau und Durchführung des Versuchs

3 Auswertung

4 Diskussion