

FP

# Käsekuchenmuffins

Katharina Brägelmann  
Tobias Janßen

katharina.braegelmann@tu-dortmund.de, tobias2.janssen@tu-dortmund.de  
Durchführung: 09. November 2018, Abgabe: 10. November 2018

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Aufbau und Durchführung</b>	<b>9</b>
3.1	Aufbau der Messapparatur . . . . .	9
3.2	Vorbereitung . . . . .	10
3.3	Messung der Resonanzstellen . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>12</b>

## 1 Zielsetzung

Hier könnte Ihre Werbung stehen.

## 2 Theorie

Ein Atom hat diskrete Energieniveaus, auf denen sich die Hüllenelektronen befinden. Die Verteilung der Elektronen erfolgt bei den äußeren Hüllenelektronen statistisch nach Boltzmann. Die Besetzungszahlen  $N_1, N_2$  zweier Niveaus mit der statistischen Gewichtung  $g_1, g_2$  liegen in folgendem Zusammenhang:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2 \exp\left(-\frac{W_2}{k_B}\right)}{g_1 \exp\left(-\frac{W_1}{k_B}\right)}.$$

Das Prinzip des optischen Pumpens besetzt die Niveaus entgegen dieser thermischen Verteilung.

Der Landé-Faktor  $g$  ist eine Materialeigenschaft, die zur Stoff- und Isotopenbestimmung benutzt werden kann. Das Bohr'sche Magneton ist der Betrag des magnetischen Momentes  $\vec{\mu}$  eines Elektrons mit Bahndrehimpuls  $L = 1$ . Der Landé-Faktor ist ein Verhältnisfaktor für die magnetischen Momente des Spins  $\vec{S}$ , des Bahndrehimpulses  $\vec{L}$ , des Gesamtdrehimpulses  $\vec{J}$ , etc. zum Bohr'schen Magneton  $\mu_B$ : Das magnetische Moment zu dem Spin  $\vec{S}$  sieht wie folgt aus:

$$\vec{\mu}_S = -g_S \mu_B \vec{S} \quad \text{mit} \quad |\vec{\mu}_S| = g_S \mu_B \sqrt{S(S+1)}.$$

Entsprechend ist das magnetische Moment des Bahndrehimpuls  $\vec{L}$

$$\vec{\mu}_L = -\mu_B \vec{L} \quad \text{mit} \quad |\vec{\mu}_L| = \mu_B \sqrt{L(L+1)}.$$

Die Kopplung von Spin und Bahndrehimpuls ergibt den Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  und das zugehörige magnetische Moment  $\vec{\mu}_J$ :

$$\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_S + \vec{\mu}_L = -g_J \mu_B \vec{J} \quad \text{mit} \quad |\vec{\mu}_J| = g_J \mu_B \sqrt{J(J+1)}.$$

Nur das magnetische Moment  $|\vec{\mu}_J|$  in Richtung von  $\vec{J}$  hat schlussendlich einen Effekt, da  $\vec{J}$  eine Präzessionsbewegung vollführt (Abb. 1). Die Winkelbeziehung in  $|\vec{\mu}_J|$  lässt sich aus Abbildung 1 erkennen. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} |\vec{\mu}_J| &= |\mu_S| \cos(\alpha) + |\mu_L| \cos(\beta) \\ \Leftrightarrow g_J \mu_B \sqrt{J(J+1)} &= g_S \mu_B \sqrt{S(S+1)} \cos(\alpha) + \mu_B \sqrt{L(L+1)} \cos(\beta) \end{aligned}$$

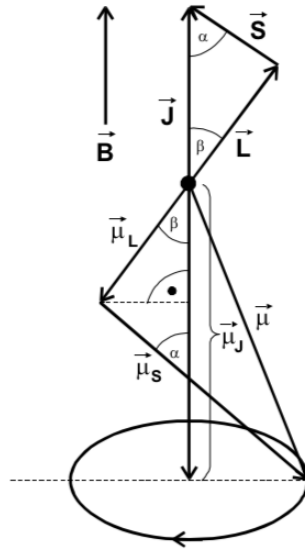


Abbildung 1: Darstellung der verschiedenen magnetischen Momente von Spin, Bahndrehimpuls und Gesamtdrehimpuls [1]

Für die Winkel lässt sich aufstellen:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{S}|^2 - |\vec{L}|^2 + |\vec{J}|^2}{2|\vec{L}||\vec{J}|^2}$$

$$\cos(\beta) = \frac{-|\vec{S}|^2 + |\vec{L}|^2 + |\vec{J}|^2}{2|\vec{S}||\vec{J}|^2}.$$

Schlussendlich ergibt sich:

$$g_J = \frac{(g_S + 1)J(J + 1) + (g_S - 1)[S(S + 1) - L(L - 1)]}{2J(J + 1)}. \quad (1)$$

Der Zeemaneffekt beschreibt die Aufspaltung der vorhandenen Energieniveaus durch ein äußeres Magnetfeld. Die magnetischen Momente wechselwirken mit dem äußeren Magnetfeld  $\vec{B}$  und es haben nur die Beiträge entlang der  $\vec{J}$ -Achse einen Effekt. Durch die Richtungsquantelung ist die Wechselwirkungsenergie  $E_{\text{mag}}$  ein ganzzahliges Vielfaches  $M_J$  von  $g_J\mu_B B$ :

$$E_{\text{Zeeman}} = -\vec{\mu}_J \vec{B} \Rightarrow E_{\text{Zeeman}} = g_J\mu_B M_J B. \quad (2)$$

Der Kernspin  $\vec{I}$  entspricht dem Eigendrehimpuls des Atomkerns und führt zur Aufspaltung der Energieniveaus im Rahmen der Hyperfeinstruktur. Die Hyperfeinstruktur wird durch den Zeemaneffekt weiter aufgespalten (Abb. 2). Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  des Elektrons

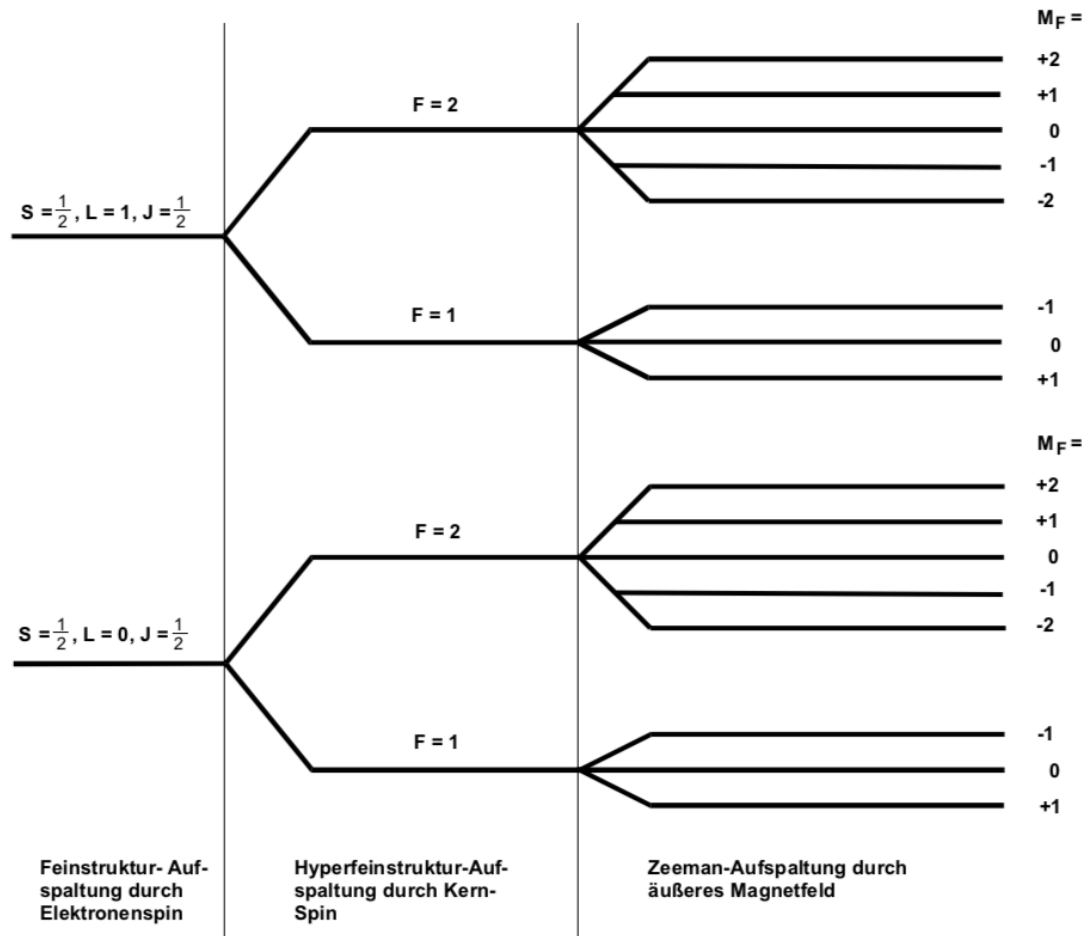


Abbildung 2: Darstellung der Aufspaltung der Energieniveaus durch die Hyperfeinstruktur und den Zeemaneffekt [1]

und der Kernspin  $\vec{I}$  koppeln zu dem Gesamtdrehimpuls  $\vec{F}$  des Atoms:

$$\vec{F} = \vec{J} + \vec{I} \quad \text{mit} \quad |\vec{\mu}_F| = g_F \mu_B \sqrt{F(F+1)}.$$

Der Kernspin beeinflusst auch den Landé-Faktor  $g_F$ , der sich nun wie folgt berechnet:

$$\mu_F = g_F \mu_B \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2\sqrt{F(F+1)}} \quad (3)$$

Das optische Pumpen basiert nun auf der Idee, die Elektronen aus ihrer thermischen Verteilung auf den Hüllen zu bringen. Der Einfachheit halber wird zunächst mit der Annahme gearbeitet, dass das Atom einen Kernspin mit  $I = 0$  besitzt. Die verwendeten Stoffe entstammen der Alkali-Gruppe, also haben die Atome immer nur ein Elektron auf

der äußersten Schale. Als Grundzustand eines Alkali-Atoms ergibt sich  $^2S_{\frac{1}{2}}$ . Die angeregten Zustände sind  $^2P_{\frac{1}{2}}$  und  $^2P_{\frac{3}{2}}$ . Die Energieniveaus sind in Abbildung 3a dargestellt. Die beiden Übergänge in Abbildung 3a werden  $D_1$ - $D_2$ -Doublett genannt. Wird ein äußeres Magnetfeld angelegt, entsteht eine Zeeman-Aufspaltung. Die Zeeman-Aufspaltung des  $D_1$ -Übergangs ist in Abbildung 3b abgebildet. Bei der Zeeman-Aufspaltung unterscheiden sich die Übergänge durch die Polarisation (Tab. 1). Wird nun der Stoff

Tabelle 1: Übergänge der Zeeman-Aufspaltung

$\sigma^+$	rechtszirkular	$\Delta M_J = +1 :$	$^2P_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = -\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	$^2S_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = +\frac{1}{2}$
$\sigma^-$	linkszirkular	$\Delta M_J = -1 :$	$^2P_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = +\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	$^2S_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = -\frac{1}{2}$
$\pi$	linear	$\Delta M_J = 0 :$	$^2P_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = +\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	$^2S_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = +\frac{1}{2}$
$\pi$	linear	$\Delta M_J = 0 :$	$^2P_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = -\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	$^2S_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = -\frac{1}{2}$

spezifisch mit  $D_1$ -Licht angeregt, fällt er nur über den  $D_1$ -Übergang aus dem angeregten  $^2P_{\frac{1}{2}}$ -Zustand zurück in seinen Grundzustand  $^2S_{\frac{1}{2}}$ . Wird der Stoff weiterhin mit  $\sigma^+$ -polarisiertem  $D_1$ -Licht angeregt, werden die Elektronen vom  $^2S_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = -\frac{1}{2}$ -Zustand in den  $^2P_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = +\frac{1}{2}$ -Zustand gebracht. Von dort fallen sie aber in beide Grundzustände  $^2S_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = \pm\frac{1}{2}$  zurück. Mit diesem Prinzip gelingt es, den  $^2S_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = -\frac{1}{2}$ -Zustand (energieärmer) leer zu pumpen und den  $^2S_{\frac{1}{2}}, \Delta M_J = +\frac{1}{2}$ -Zustand (energiereicher) voll zu pumpen. Damit ist das Atom nicht mehr in seiner thermischen Verteilung.

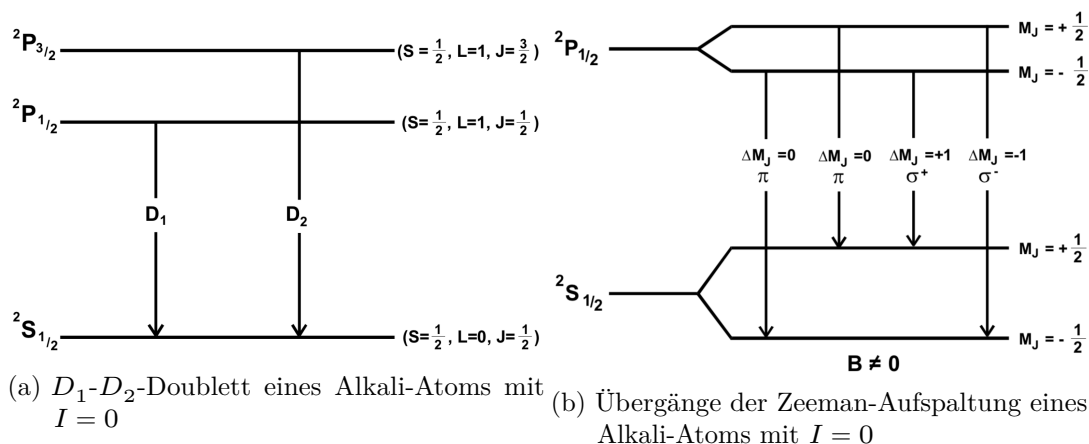


Abbildung 3: Übergänge eines Alkali-Atoms

Um das optische Pumpen zu messen, lässt sich die Transparenz des verdampften Stoffs beobachten. Das  $\sigma^+$ -polarisierte  $D_1$ -Licht wird eingestrahlt und trifft auf das Gas. Initial bei Einschalten des Magnetfelds sind noch viele Anregungen im Gas möglich, da alle Zeeman-Niveaus gleichmäßig besetzt sind. Bei der Anregung wird das Licht der Spektrallampe absorbiert, es ist also wenig transparent. Mit fortlaufender Zeit werden

durch das optische Pumpen die Elektronen aus dem energieärmeren Grundzustand in den energiereicheren Grundzustand gepumpt. Von dort aus können keine weiteren Anregungen ausgehen, und es wird kaum Licht der Spektrallampe absorbiert, das Gas ist also zunehmend transparent.

Für die Messung der Hyperfeinstruktur und der Zeeman-Aufspaltung werden zwei weitere Phänomene vorgestellt. Die spontane Emission bedeutet, dass das Elektron ohne weitere äußere Einwirkung nach gewisser Zeit zurück auf den Grundzustand fällt. Die induzierte Emission entsteht, wenn die Anregungsenergie als Quanten eingestrahlt wird. Dann fällt das Elektron unter Emission der Anregungsenergie bzw. der Quanten auf den Grundzustand zurück. Die induzierte und die spontane Emission können parallel ablaufen. Parallel wird die Anregungsenergie auch rückabsorbiert. Durch ein hochfrequentes veränderliches Magnetfeld (RF-Feld) wird bei diesem Versuch die Anregungsenergie bzw. die sogenannten RF-Quanten eingebracht. Das Verhältnis der beiden Emissionsarten wird über die Anregungsenergie  $h\nu$  bestimmt. Die Anzahlen  $n$  der verschiedenen Emissionen pro Zeiteinheit lauten:

$$\begin{aligned}n_{\text{spon}} &= N_2 A_{21} \\n_{\text{ind}} &= N_2 B_{21} u(\nu) \\n_{\text{abs}} &= N_1 B_{12} u(\nu).\end{aligned}$$

Dabei ist  $N$  die Atomzahl,  $A_{21}$  die Übergangswahrscheinlichkeit der spontanen Emission und  $B$  der Einstein-Koeffizient (Proportionalitätsfaktor).  $u(\nu)$  ist die Dichte der eingestrahlten Quanten. Die drei Gleichungen lassen sich durch eine Erhaltung der Übergangszahlen verbinden und durch weitere Überlegungen und das Einbringen der Planckschen Gleichung für schwarze Strahler schreiben als:

$$n_{\text{spon}} + n_{\text{ind}} = n_{\text{abs}} \Rightarrow A_{21} = \frac{8\pi h}{c^3} B_{12} \nu^3.$$

Bei höheren Frequenzen des RF-Felds kommt hauptsächlich die spontane Emission vor, bei den niedrigeren Frequenzen vornehmlich die induzierte Emission. Erreicht das RF-Feld eine passende Frequenz, setzt also die induzierte Emission ein. Hier bedeutet dies, dass die Elektronen entlang der induzierten Emission wieder aus der aufgebauten, nicht-thermischen Verteilung gelangen, wenn das RF-Feld die passende Frequenz hat (Abb. 4). Dies ist mit Gleichung (2) der Fall bei:

$$h\nu = g_J \mu_B \Delta M_J B_m \Leftrightarrow B_m = \frac{4\pi m_0}{e_0 g_J} \nu. \quad (4)$$

$B_m$  wird auch Resonanzstelle genannt.

Nun wird wieder der Kernspin  $I \neq 0$  in die Theorie gebracht. Die Energie des  $D_1$ -Lichts überdeckt alle möglichen Übergänge der Hyperfeinstruktur und des Zeemaneffekts (Abb. 5). In blau gekennzeichnet sind die Übergänge, die durch die Auswahlregel  $\Delta M_F = +1$  möglich sind. Aus dem Grundzustandsniveau mit  $F = 2$  und  $M_F = +2$  ist kein Übergang

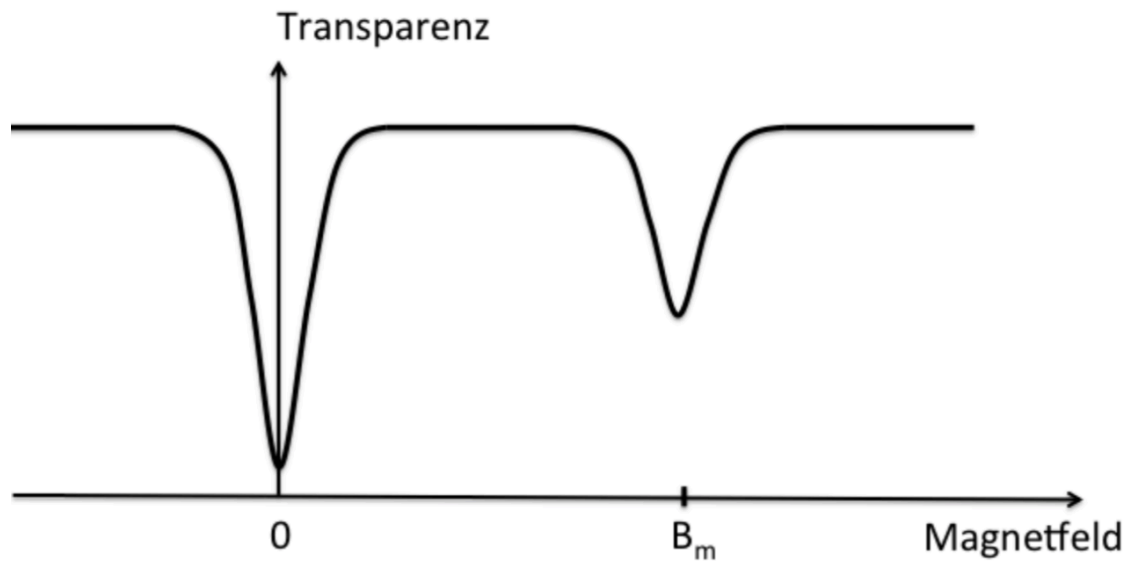


Abbildung 4: Transparenz des Gases mit angelegtem RF-Feld und Resonanzstelle [1]

in das angeregte Niveau möglich. Durch spontane Emission (grün gekennzeichnet) können aber Elektronen von den Niveaus  $M_J = +1$  und  $M_J = 0$  in das Niveau  $M_F = +2$  übergehen. So lässt sich dennoch mittels des optischen Pumpens eine nicht-thermische Verteilung erzeugen.

Bei starken Magnetfeldern entstehen weitere Effekte, die sich aus der Wechselwirkung des Spins und dem Bahndrehimpuls und der Wechselwirkung der magnetischen Momente ergeben. Die Wechselwirkungsenergie der Hyperfeinstruktur berechnet sich dann über:

$$U_{\text{HF}} = g_F \mu_B B + g_F^2 \mu_B^2 B^2 \frac{(1 - 2M_F)}{\Delta E_{\text{HF}}} \quad (5)$$

und wird quadratischer Zeemaneffekt genannt.



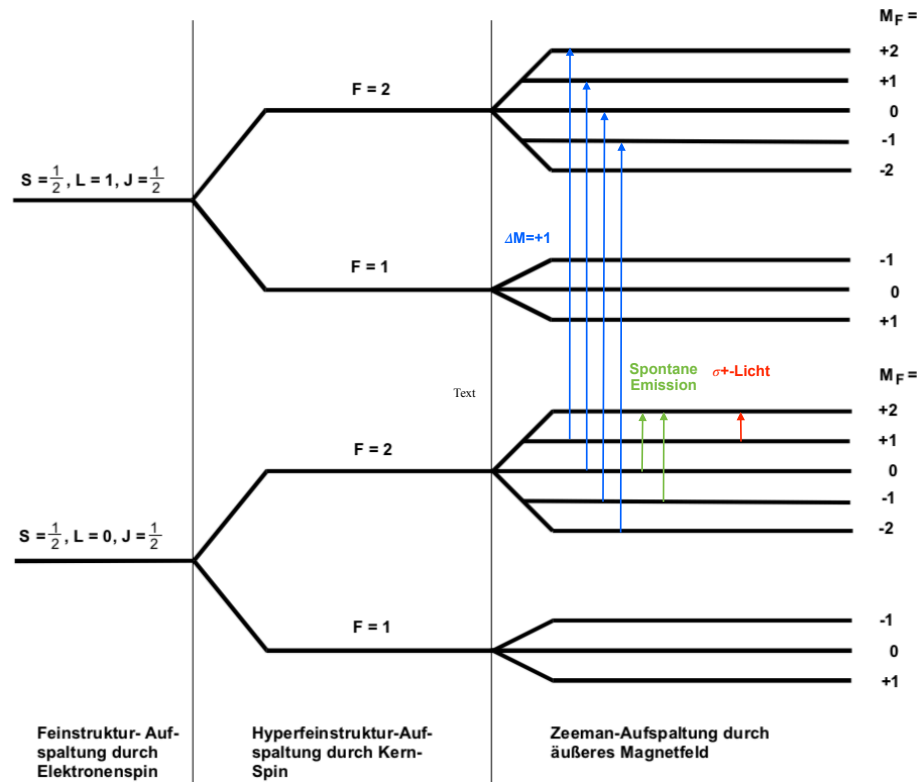


Abbildung 5: Übergänge des  $D_1$ -Lichts mit Betrachtung eines Kernspin  $I \neq 0$  [1], bearbeitet

### 3 Aufbau und Durchführung

#### 3.1 Aufbau der Messapparatur

Der Aufbau setzt sich zusammen aus Spektrallampe, Kollimator (Sammellinse),  $D_1$ -Interferenzfilter, Polarisationsfilter und  $\lambda/4$ -Platte, Dampfzelle mit Heizer, drei Helmholtzspulenpaare (Vertikalfeld, Horizontalfeld, Sweepfeld), das RF-Feld mit Frequenzgenerator (Sinusspannung), Kollimator, Photodiode, Verstärker, Oszilloskop.

#### 3.2 Vorbereitung

- Intensitätsmaximum der optischen Elemente auf die Photodiode bringen
- Ausrichten des Tisches mit der Messapparatur
- Vertikalfeld erhöhen bis der Peak auf dem Oszilloskop möglichst schmal ist

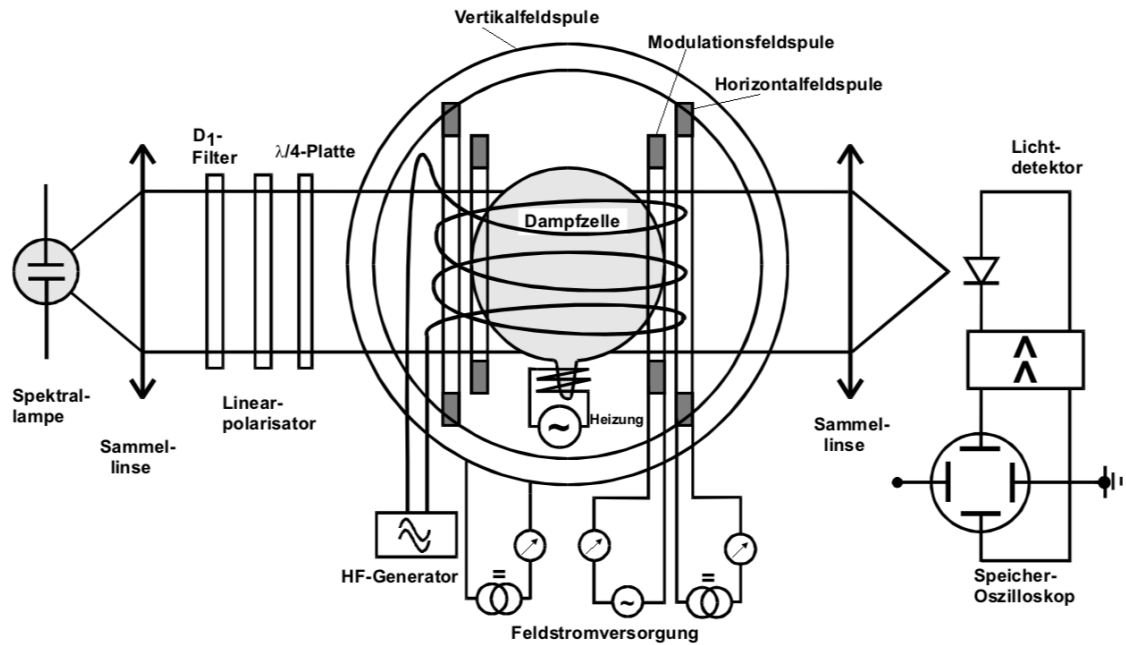


Abbildung 6: Schematischer Aufbau der Messapparatur [1], bearbeitet

### 3.3 Messung der Resonanzstellen

- RF-Frequenz setzen ( $\nu = 100 - 1000 \text{ kHz}$ )
- B-Feld der Sweep-Spule erhöhen, um Resonanzstelle des B-Felds zu finden
- B-Feld proportional zu den Umdrehungen des verwendeten Potentiometers, Strom durch Potentiometerumdrehungen ablesen
- Horizontalfeld ebenfalls erhöhen um Resonanzstellen ins Bild des Oszilloskops zu bringen
- Frequenz, Umdrehung Sweep-Spule für beide Isotope, Umdrehung Horizontalfeldspule für beide Isotope notieren

## **4 Auswertung**

Hier könnte ihre Werbung stehen.

## **5 Diskussion**

Hier könnte Ihre Werbung stehen.