

FP

Quanten-Analogien

Katharina Brägelmann
Tobias Janßen

katharina.braegelmann@tu-dortmund.de, tobias2.janssen@tu-dortmund.de
Durchführung: 19. Dezember 2018, Abgabe: 28. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Stehende Schallwellen	3
2.2	Das quantenmechanische Teilchen	4
2.3	Vergleich von stehenden Schallwellen und Teilchen im Potenzialtopf . . .	5
2.4	Eindimensionaler Festkörper	5
2.5	Superstrukturen	7
2.6	Defekte	7
3	Aufbau und Durchführung	8
3.1	Aufbau	8
3.2	Durchführung	8
4	Auswertung	11
4.1	Aufgabe 1: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit	12
4.2	Aufgabe 2: Dispersion	15
4.3	Aufgabe 3: Bandstrukturen	16
4.4	Aufgabe 4: Bandstrukturen	17
4.5	Aufgabe 5	18
4.6	Aufgabe 6 und 7	20
4.7	Aufgabe 8	21
4.8	Aufgabe 9	22
4.9	Aufgabe 10	23
4.10	Aufgabe 11	24
4.11	Aufgabe 12	25
5	Diskussion	27

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden akustische stehende Schallwellen in einem Rohr aufgebaut, die anschließend unter gewissen Einschränkungen als Analogon zum quantenmechanischen Teilchen im Potenzialtopf betrachtet werden.

2 Theorie

Im Versuch werden in verschiedenen Aufbauten Röhren benutzt, in denen sich unter Verwendung von Lautsprechern akustische stehende Wellen ausbilden. Die Röhre wird mit dem Mikrofon verschlossen.

2.1 Stehende Schallwellen

In der Röhre bildet sich bei bestimmten Frequenzen das Phänomen der Resonanz. Resonanz bedeutet, dass die Amplitude der Welle periodisch verstärkt wird und bei passender Resonanzfrequenz sich deutlich mehr erhöht als bei anderen Frequenzen. Ein Objekt kann mehrere Resonanzfrequenzen haben. In diesen Versuch werden eine Röhre und Schallwellen verwendet. Resonanz entsteht hier also, wenn die ausgesendete Welle am Ende der Röhre reflektiert wurde, zurück zum Mikrofon kommt und zum Zeitpunkt der erneuten Reflexion am Mikrofon mit einer neuen, gleichen Welle überlagert wird. Die Amplituden addieren sich. Dabei muss aber der passende Zeitpunkt getroffen werden - dies ist die Bedingung für die Resonanzfrequenzen. Die Bedingung für Resonanz in einer Röhre mit geschlossenen Enden lautet

$$n\lambda = 2L = \frac{nc}{f} \Leftrightarrow f(n) = \frac{c}{2L}n \Leftrightarrow f(k) = \frac{c}{2\pi}k. \quad (1)$$

Hierbei ist λ die Wellenlänge, L die Länge der Röhre, c die Schallgeschwindigkeit, f die Schallfrequenz und n die Angabe, um welches ganzzahlige Vielfache der Resonanz es sich handelt.

In der letzten Umformung wird die Gleichung

$$k = \frac{\pi}{L}n \quad (2)$$

verwendet.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} \quad (4)$$

Die Wellengleichung für Schallwellen lässt sich über die linearisierte Eulergleichung (Gleichung (3)) und die Kontinuitätsgleichung (Gleichung (4)) herleiten:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho \kappa} \Delta p \quad (5)$$

Für den Vergleich zum quantenmechanischen Teilchen sind die Randbedingungen wichtig. Auch wenn es aus der Wellengleichung nicht direkt ersichtlich ist, ist die Schallgeschwindigkeit am Rand bzw. an der Wand am Ende der Röhre null. Damit auch die Ableitung des Schalldrucks senkrecht zur Wand:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Die Wellengleichung lässt sich hier auf ein eindimensionales Problem reduzieren. So lässt sich der Ansatz

$$p(x) = p_0 \cos(kx + \alpha) \cos(\omega t)$$

verwenden. Mit den Randbedingungen ergibt sich, dass $\alpha = 0$ und $k = \frac{n\pi}{L}$.

2.2 Das quantenmechanische Teilchen

Die zeitabhängige Schrödingergleichung ist bekannt als

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi(r, t) + V(r, t)\psi(r, t) = i\hbar\psi(r, t).$$

Die eindimensionale, zeitunabhängige Schrödingergleichung reicht aus, um den eindimensionalen, unendlich tiefen Potenzialtopf zu berechnen. Der Potenzialtopf wird hier mit einer Wand an der Stelle $x = 0$ und der zweiten Wand bei $x = L$ gewählt. Da im Topf $V(x) = 0$ gilt, ergibt sich:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi(x) = E\psi(x). \tag{6}$$

Der passende Ansatz für diese Gleichung ist

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha). \tag{7}$$

Die Randbedingungen des Potenzialtopfs belaufen sich auf

$$\psi(0) = 0 \qquad \psi(L) = 0.$$

Damit ergibt sich nach Einsetzen der Randbedingungen in den Ansatz in Gleichung (7) und Einsetzen des Ansatzes in die Schrödingergleichung (6) folgendes:

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}. \tag{8}$$

Dies ist die Dispersionsrelation des quantenmechanischen Teilchens im Potenzialtopf.

2.3 Vergleich von stehenden Schallwellen und Teilchen im Potenzialtopf

Während die Schallwellen mechanische Phänomene sind, ist das Teilchen im Potenzialtopf ein quantenmechanisches Problem. Die Schallwellen sind damit genau lokalisierbar. Beim quantenmechanischen Teilchen im Potenzialtopf hingegen lässt sich nur eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi^2|$ formulieren.

Auch die Randbedingungen sind unterschiedlich. Während bei dem quantenmechanischen Teilchen die Wellenfunktion an den Rändern null sein muss, ist dies bei den stehenden Schallwellen nicht der Fall. Zwar ist bei den Schallwellen die Geschwindigkeit \vec{u} an den Rändern null, aber die vektorielle Geschwindigkeit entspricht nicht der skalaren quantenmechanischen Wellenfunktion. Obwohl der Schalldruck p an den Rändern maximal ist, trifft er das quantenmechanische Teilchen besser, da es eine skalare Größe ist.

Die Dispersionsrelation der Schallwellen $\omega(k)$ entspricht nicht der Dispersionsrelation des quantenmechanischen Teilchens $E(k)$, schon da $\omega \propto k^2 \neq k$. Dennoch lassen sich die beiden Dispersionen vergleichen, da sich in beiden Phänomenen diskrete Niveaus ergeben. Auch die Grundzustände unterscheiden sich. In der Quantenmechanik hat der Grundzustand immer eine Energie $E > 0$, während es in der Mechanik auch Grundzustände mit $E = 0$ geben kann. Es ergibt sich ein Spektrum der quantenmechanischen Eigenfrequenzen, beschrieben durch folgende Gleichung:

$$|A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2}}. \quad (9)$$

Für die mechanischen Eigenzustände ergibt sich das folgende Spektrum:

$$|A(\omega)| = \frac{2\omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad (10)$$

2.4 Eindimensionaler Festkörper

Der eindimensionale Festkörper lässt sich auf zwei Arten modellieren.

Bändermodell Die Energieniveaus eines einzelnen Atoms sind diskret, aber werden Atome nah aneinander gebracht und gekoppelt, verschmelzen die höheren Niveaus zu den sogenannten Energiebändern. Dabei gibt es Energiebänder, in denen sich Elektronen befinden, und Bandlücken, in denen keine Zustände möglich sind. Die Energieniveaus in der Quantenmechanik sind äquidistant. In der Messung der Resonanzen der stehenden Schallwellen in Abhängigkeit der Rohrlänge sind die Resonanzstellen nicht äquidistant verteilt. Die Rohrlänge lässt sich jedoch in den Wellenvektor umrechnen, und es kann die Dispersionsrelation $f(k)$ nach Gleichung (1) berechnet werden. Die quantenmechanischen Teilchen, Elektronen, im Bändermodell zeigen Dispersion. Für die Schallwellen lässt sich ein Analogon bilden:

$$a = \frac{\lambda}{2}. \quad (11)$$

Die Anzahl der zusammengebrachten Atome wird mit j abgekürzt, die Gitterkonstante mit a . Der reziproke Gittervektor wird im eindimensionalen Festkörper beschrieben durch

$$G = \frac{2\pi}{a}n \quad (12)$$

mit der natürlichen Zahl n . Die Brillouin-Zone ist das Äquivalent zur Wigner-Seiz-Einheitszelle im reziproken Raum. Die Dimension des reziproken Raums ist $1/m$. Für $n = 1$ ergibt sich also nach Gleichung (12) und nach Gleichung (2):

$$G = \frac{2\pi}{a} \quad k = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{ja}. \quad (13)$$

Das Verhältnis der beiden Größen beläuft sich auf

$$\frac{G}{k} = 2j.$$

Im jeder Brillouin-Zone sind entsprechend doppelt so viele k -Punkte, wie es Einheitszellen im System gibt. Für $n = 0$ gibt es keine Resonanz.

In der Festkörperphysik ist die Zustandsdichte ρ ein wichtiger Faktor. In diesem Versuch wird sie durch

$$\rho(f) = \frac{1}{f_{i+1} - f_i} \quad (14)$$

genähert.

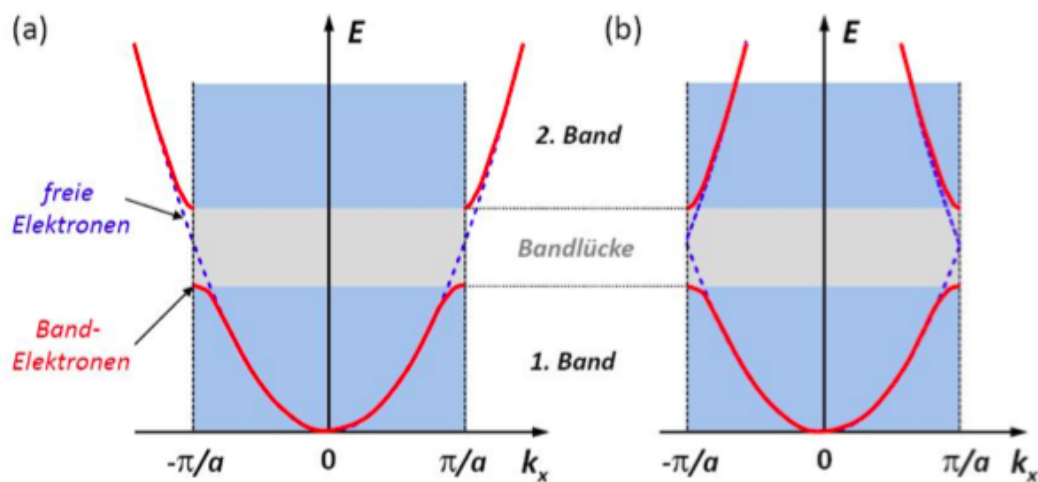


Abbildung 1: Bändermodell, a) ausgedehntes Zonenschema, b) reduziertes Zonenschema [3]

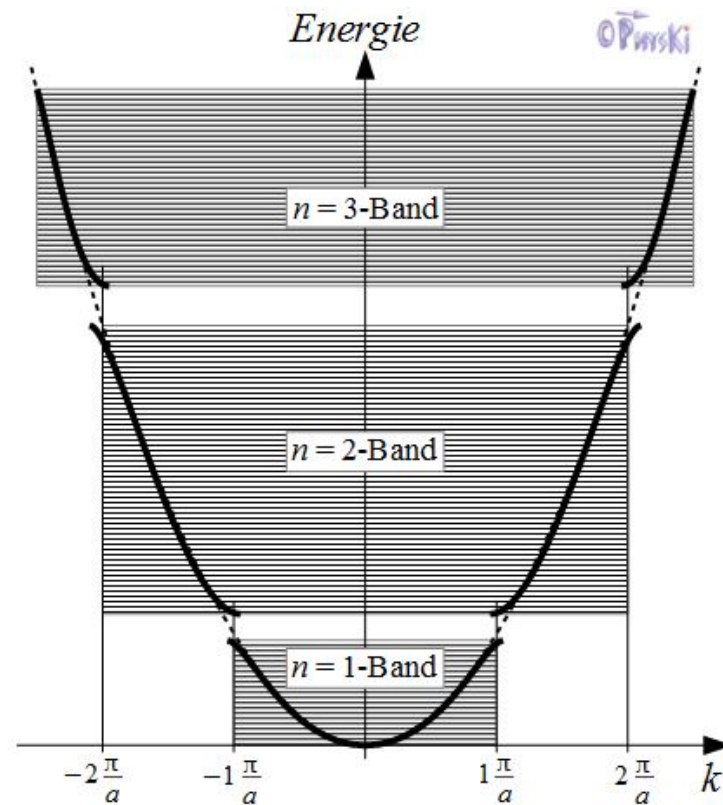


Abbildung 2: Bändermodell, [4]

Lineare Teilchenkette Nun werden einzelne Atome betrachtet, die wir zu einem Molekül verbinden und diese Moleküle aufsummieren. Dieses Verfahren wird 'tight-binding-Methode' genannt.

2.5 Superstrukturen

Als Superstrukturen werden hier Festkörper bezeichnet, die periodische Änderungen haben. So kann ein eindimensionaler Festkörper zum Beispiel aus zwei verschiedenen Sorten Atomen bestehen. Dies kann Folgen auf die Bandstrukturen des Festkörpers haben.

2.6 Defekte

Sind die andersartigen Atome im Festkörper nicht periodisch verteilt, so sind es reguläre Defekte. Die Defekte verändern die Bandstrukturen auf multiple Weisen. In der Halbleitertechnik werden Defekte bewusst in Materialien eingebracht, um optimale Leitereigenschaften zu kreieren. Dieser Vorgang nennt sich 'Dotierung'.

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

Der Aufbau setzt sich zusammen aus einer Schiene mit einem Lautsprecher und einem Mikrofon, zwischen denen die Röhren eingeklemmt werden. Lautsprecher und Mikrofon schließen dicht mit den Röhren ab. Die Röhren bestehen aus Aluminium und sind in drei verschiedenen Ausführungen vorhanden. Während der Durchmesser jeweils gleich ist, gibt es drei verschiedene Längen mit $L_{75} = 75$ mm, $L_{50} = 50$ mm und für die letzten Versuchsteile $L_{12,5} = 12,5$ mm. Außerdem gibt es drei verschiedene Arten Blenden, Scheiben mit einem Loch in der Mitte, nämlich die Lochdurchmesser $d_{10} = 10$ mm, $d_{13} = 13$ mm und $d_{16} = 16$ mm. Die initiale Datenaufnahme und -verarbeitung wird mit einem Rechner gemacht, an den sowohl Mikrofon als auch Lautsprecher angeschlossen sind.

3.2 Durchführung

In der Durchführung des Versuchs werden immer Frequenzspektren aufgenommen. Dies wird vom Rechner gesteuert. Dabei können verschiedene Parameter vorgegeben werden, darunter die Größe des aufgenommenen Frequenzbereiches, die Messzeit pro Schritt und die Schrittgröße s . Wenn nicht weiter angegeben, wird die Messung mit den Schritten $s = 10$ Hz durchgeführt.

Aufgabe 1 In der ersten Messung wird als Einleitung die Schallgeschwindigkeit in Luft gemessen. Dazu werden acht Frequenzspektren mit den L_{75} -Röhren mit der Schrittgröße $s = 10$ Hz und dem Frequenzbereich 6000 Hz – 9000 Hz aufgenommen. Nach jeder Messung wird die Anzahl der Röhren um eine erhöht, bis acht Röhren erreicht sind. Aus den verschiedenen Frequenzspektren werden die jeweiligen Resonanzfrequenzen notiert. Außerdem wird ein größeres Frequenzspektrum (5000 Hz – 14 000 Hz) mit kleiner Schrittgröße ($s = 2$ Hz) für eine einzelne L_{50} -Röhre aufgenommen.

Aufgabe 2 Der zweite Versuchsteil beschäftigt sich mit dem eindimensionalen Festkörper. Zur Messung der Dispersionsrelation $\omega(k)$ in diesem wird ein Frequenzspektrum von 12 L_{50} -Röhren mit einem großen Frequenzbereich (0 Hz – 12 000 Hz) aufgenommen.

Aufgabe 3 Danach werden in eine zusammengesetzte Röhre aus 12 L_{50} -Röhren je 11 Blenden eingefügt um die Bandlücken zu veranschaulichen. Die Messung wird für die drei verschiedenen Durchmesser der Blenden in einem Frequenzbereich von 0 Hz – 12 000 Hz durchgeführt.

Aufgabe 4 Zur Vermessung der Einheitszellen im eindimensionalen Festkörper werden 10 L_{50} –Röhren mit entsprechender Anzahl von d_{16} –Blenden mit dem Frequenzbereich 0 Hz – 12 000 Hz vermessen.

Aufgabe 5 Nun werden 8 L_{50} –Röhren mit d_{16} –Blenden und 8 L_{75} –Röhren mit d_{16} –Blenden mit dem Frequenzbereich 0 Hz – 12 000 Hz vermessen, um die Gitterkonstante des eindimensionalen Festkörpers zu bestimmen.

Aufgabe 6 Der dritte Versuchsteil behandelt eine Molekülkette, die aus einzelnen Atomen aufgebaut wird. Hier wird zunächst das Frequenzspektrum einer einzelnen L_{50} –Röhre in einem großen Frequenzbereich von 0 Hz – 22 000 Hz gemessen.

Aufgabe 7 Anschließend wird eine einzelne L_{75} –Röhre mit dem selben Frequenzbereich aufgenommen.

Aufgabe 8 Zur Simulation eines einzelnen Atoms werden nun zwei L_{50} –Röhren durch eine Blende getrennt. Die Messung wird mit allen drei Blendenvarianten mit jeweils dem Frequenzbereich 0 Hz – 12 000 Hz durchgeführt.

Aufgabe 9 Danach wird die "Atomanzahl" erhöht, indem weitere Blenden und Röhren in den Aufbau eingefügt werden. Dazu werden weiterhin abwechselnd L_{50} –Röhren und Blenden aufgebaut. Die Messung wird mit den folgenden Konstellationen durchgeführt:

Einheitszellen	Anzahl Röhren	Blenden	Anzahl Blenden	Frequenzbereich
3	6	d_{10}	5	0 Hz – 12 000 Hz
3	6	d_{13}	5	0 Hz – 12 000 Hz
3	6	d_{16}	5	0 Hz – 12 000 Hz
4	8	d_{10}	7	0 Hz – 12 000 Hz
4	8	d_{13}	7	0 Hz – 12 000 Hz
4	8	d_{16}	7	0 Hz – 12 000 Hz
6	12	d_{10}	11	0 Hz – 12 000 Hz
6	12	d_{13}	11	0 Hz – 12 000 Hz
6	12	d_{16}	11	0 Hz – 12 000 Hz.

Aufgabe 10 In der darauffolgenden Messung werden Defekte in die Atomkette eingebracht, indem in einem Aufbau aus 12 L_{50} –Röhren abwechselnd d_{13} – und d_{16} –Blenden eingefügt werden.

Aufgabe 11 Danach werden statt unterschiedlichen Blenden unterschiedlich lange Röhren abwechselnd in den Aufbau gebracht. Somit sind dann 5 L_{50} – und 5 L_{75} – Röhren durch d_{16} –Blenden getrennt.

Aufgabe 12 In der letzten Messreihe werden einzelne Röhren als Defekte in die 12 L_{50} –Röhren mit d_{16} –Blenden eingebracht:

Defektstelle	Defektart
3	12,5 mm
3	75 mm
8	12,5 mm
8	75 mm.

4 Auswertung

In der Messung werden für den Frequenzbereich von 6000 bis 9000 Hz Rohrlängen von 75 mm bis 600 mm vermessen. Bei bestimmten Frequenzen bildet sich eine stehende Welle aus. Das hat Resonanz zur Folge, so dass die Schallwelle eine höhere Intensität hat. In den folgenden Abbildungen wird die Intensität gegen die Wellenlänge aufgetragen. In der Abbildung 3 sind die Messwerte für die Rohrlängen: 75 mm, 150 mm, 225 mm, 300 mm abgebildet. In der Abbildung 4 sind die Messwerte für die Rohrlängen: 375 mm, 450 mm, 525 mm, 600 mm

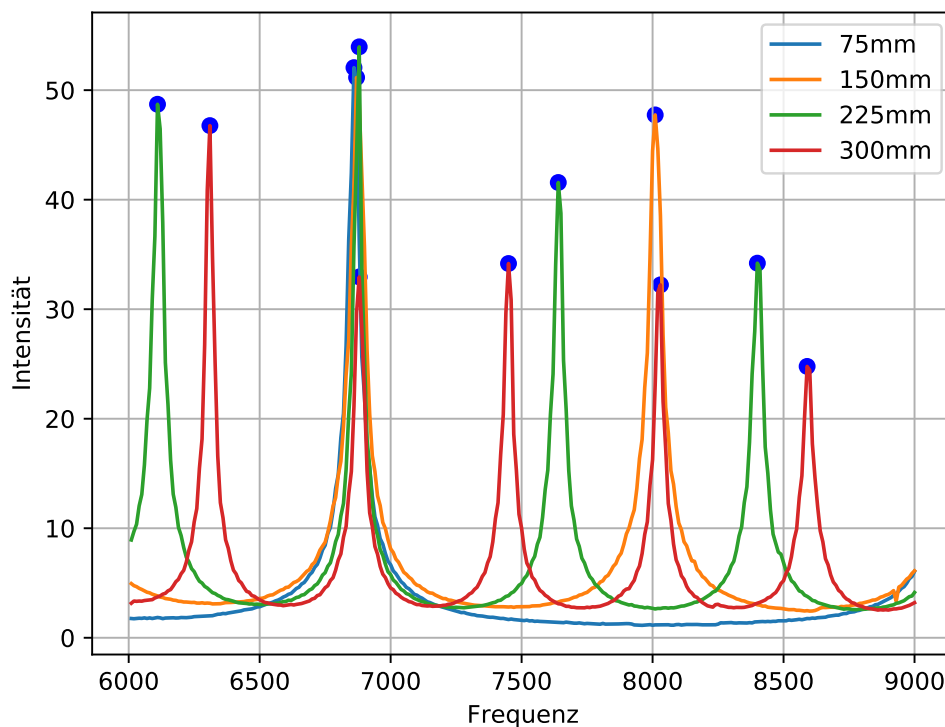


Abbildung 3: Intensität der Schallwelle im Bereich von 6000 bis 9000 Hz für die Rohrlängen 75 mm, 150 mm, 225 mm, 300 mm

dargestellt. Die Intensitätsmaxima sind mit einem blauen Punkt gekennzeichnet.

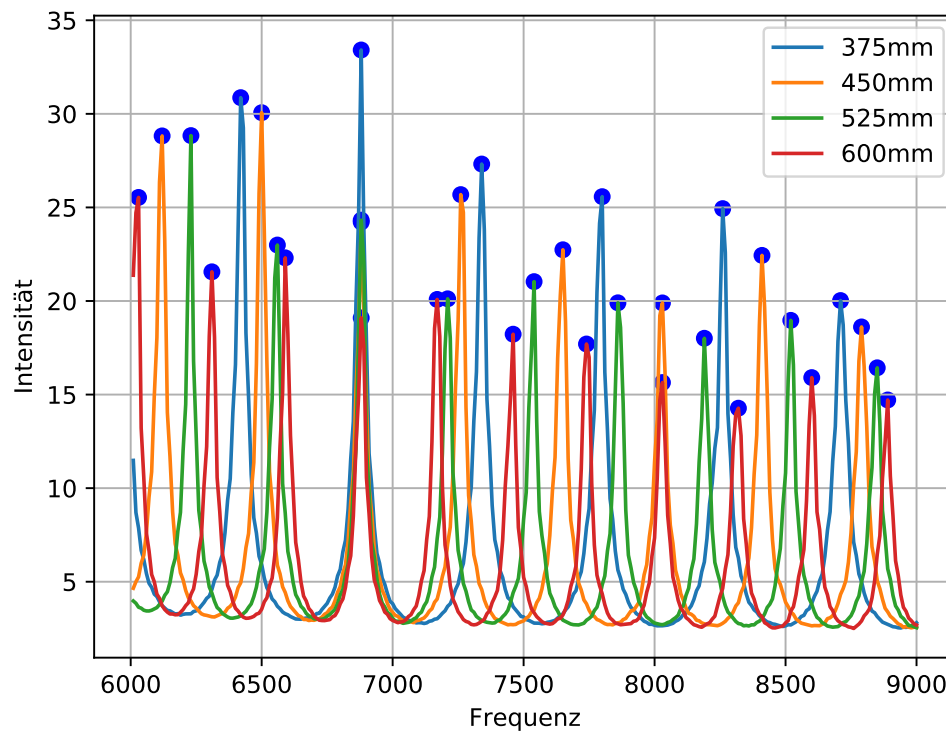


Abbildung 4: Intensität der Schallwelle im Bereich von 6000 bis 9000 Hz für die Rohrlängen 375 mm, 450 mm, 525 mm, 600 mm

4.1 Aufgabe 1: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

In den Graphen 3 und 4 werden die Resonanzfrequenzen einer jeden Messreihe von 1 bis n nummeriert und anschließend gegen die Frequenz aufgetragen. Die Resonanzfrequenzabstände sind konstant für eine Messreihe, daher ergeben sich Geraden der Form:

$$y = ax + b,$$

welche mit Python 3.6.3 und `curve_fit` an die Messwerte gefittet werden. Für die Bestimmung der Steigung der Geraden ist die richtige Nummerierung der Resonanzfrequenzen nicht von Bedeutung. Es genügt wenn in einer Messung vortlaufend nummeriert wird. In der Abb. 5 sind die Messwerte mit den Fitfunktionen abgebildet. Mit Hilfe der Steigung a kann die Schallgeschwindigkeit c berechnet werden.

$$c = a \cdot 2d$$

Für die Schallgeschwindigkeit ergeben sich so Werte von: Der Mittelwert ergibt:

$$c = (343,28 \pm 1,63) \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tabelle 1: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

Steigung a	Rohrlänge d	Schallgeschwindigkeit c
$\frac{1}{s}$	m	$\frac{m}{s}$
1140.0	2·0,075 m	342,0 $\frac{m}{s}$
763.0	3·0,075 m	343,3 $\frac{m}{s}$
571.0	4·0,075 m	342,6 $\frac{m}{s}$
458.6	5·0,075 m	343,9 $\frac{m}{s}$
381.9	6·0,075 m	343,7 $\frac{m}{s}$
327.2	7·0,075 m	343,5 $\frac{m}{s}$
286.5	8·0,075 m	343,8 $\frac{m}{s}$

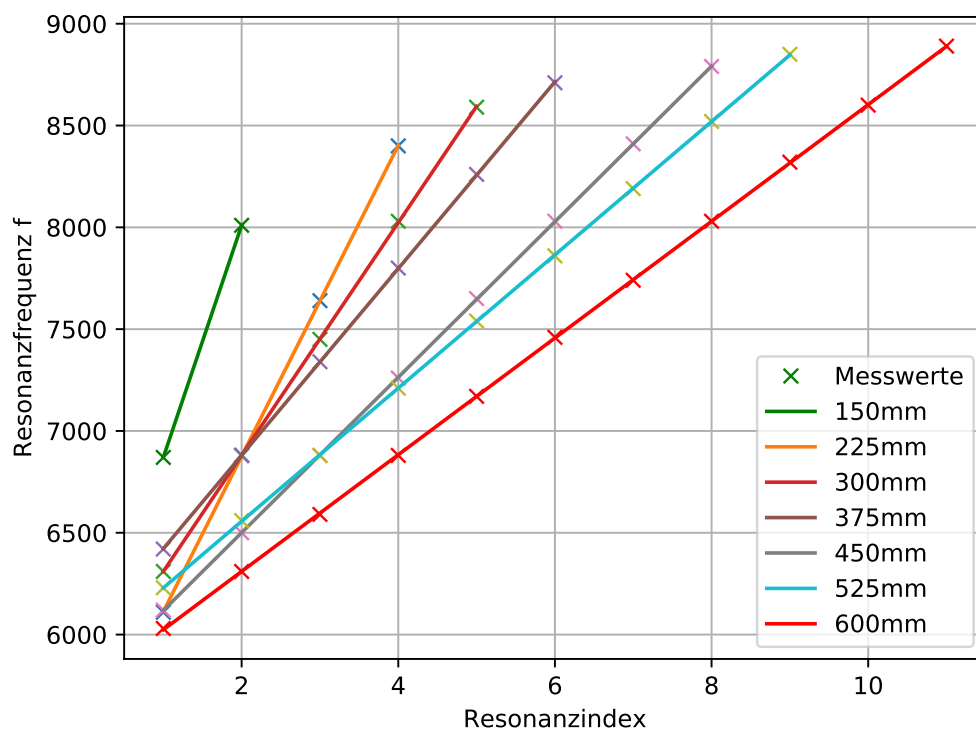


Abbildung 5: Die Intensitätsmaxima werden nummeriert und die Nummer gegen die Frequenz aufgetragen.

Die Schallgeschwindigkeit kann auch mit Hilfe einer anderen Methode bestimmt werden.

Dazu betrachten wir ein Rohr der Länge 75 mm für die Frequenzen von 6000 bis 9000 Hz. Da die Rohrlänge d ein Vielfaches n der halben Wellenlänge λ ist gilt:

$$\lambda = \frac{2d}{n}.$$

Die Schallgeschwindigkeit ist gegeben durch:

$$c = f \cdot \lambda.$$

Daraus ergibt sich :

$$\begin{array}{ll} n = 1 & c = 1032 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ n = 2 & c = 516 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \\ n = 3 & c = 344 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \\ n = 4 & c = 258 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{array} \quad (15)$$

Die Frequenz ist dabei gegeben als $6880 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Diese Frequenz ist die einzige Frequenz im Frequenzbereich, welche bei allen Vielfachen der Rohrlänge von 75 mm vertreten ist, zusehen ist dies in den Abb. 3 und 4. Den Ergebnissen aus 15 ist zu entnehmen, dass die Wellenlänge bei $\frac{3}{2}\lambda$ liegt, da die dazugehörige Schallgeschwindigkeit von $344 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gut zum den bereits berechneten Wert von $343,28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ passt.

Desweiteren soll die Schallgeschwindigkeit mithilfe des Verhältnisses von Frequenzübergängen zu Rohrlänge bestimmt werden. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 6 dargestellt. An die Messwerte wird eine Funktion der Form $a \cdot \frac{1}{x} + b$ gefittet. Für a und b ergeben sich die Werte:

$$\begin{aligned} a &= (168\,692,913 \pm 253,977) \text{ Hz} \cdot \text{mm} \\ b &= (8,566 \pm 1,995) \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Durch umstellen der Gleichung 1 zu:

$$nc = 2Lf + b = 2a + b$$

ergibt sich für die Schallgeschwindigkeit ein Wert von: $c = 345,95 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

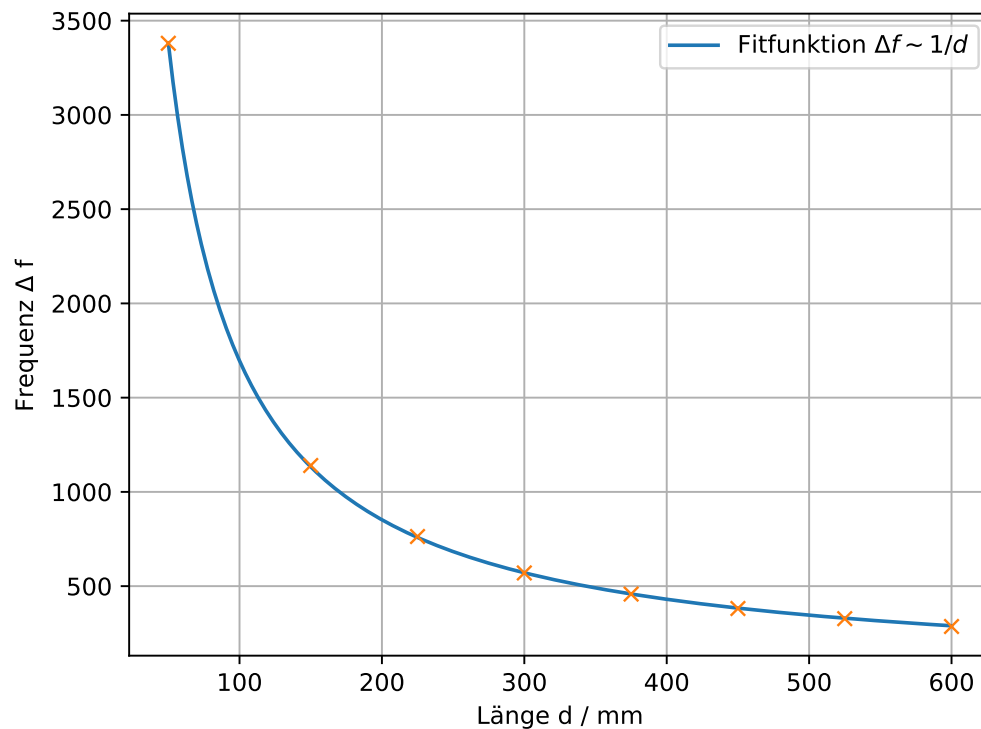


Abbildung 6: Der Abstand der Frequenzen wird gegen die Rohrlänge aufgetragen.

4.2 Aufgabe 2: Dispersion

In dieser Aufgabe soll als Grundlage zu den späteren Versuchsteilen gezeigt werden, wie die Dispersionsrelation $f(k)$ des akustischen Aufbaus im Gegensatz zur Dispersionsrelation des quantenmechanischen Teilchens im Potenzialtopf verläuft. Aus der Messung mit einer Rohrlänge von $12 \cdot 50$ mm und einem Frequenzbereich von $400 - 12000$ Hz werden die Maximalstellen mit Hilfe einer Peak-Picking-Funktion ermittelt. Die Maximalstellen werden nummeriert und die dazugehörige Frequenz in $f(k)$ umgerechnet.

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad (16)$$

L ist dabei die gesammte Rohrlänge.

In der Abbildung 7 ist k gegen $f(k)$ aufgetragen. Dargestellt ist zum einen die Dispersionsrelation von Schallwellen und zum anderen die Dispersionsrelation eines quantenmechanischen Teilchens im Potenzialtopf nach der Funktion 8. Es ist zu erkennen, dass die Dispersion von Schallwellen linear verläuft, wohingegen die Dispersion eines quantenmechanischen Teilchens im Potenzialtopf quadratisch ist. Aus der linearen Dispersion der Schallwelle folgt, dass wenn für ein kleines Rohr die Resonanzbedingung erfüllt ist gilt

dies auch für vielfache der Rohrlänge. Auf diese Weise lassen sich die Eigenheiten der Abbildungen 3 und 4 erklären.

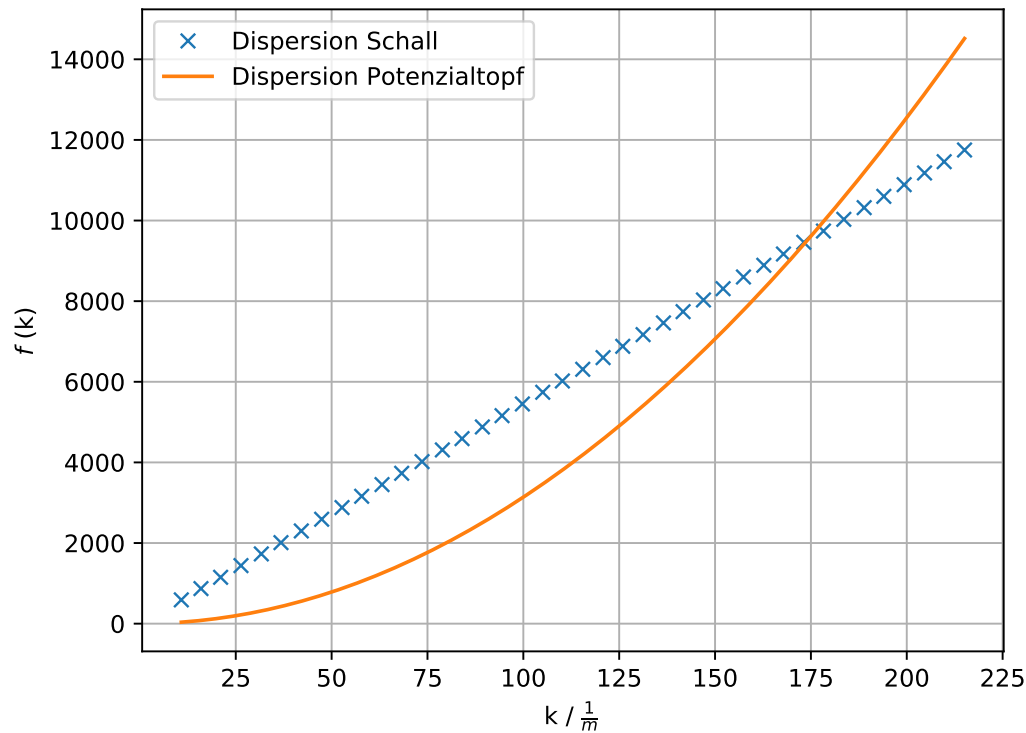


Abbildung 7: Dispersionsrelation für Schallwellen und die Theorie Funktion eines quantenmechanischen Teilchens im Potenzialtopf

4.3 Aufgabe 3: Bandstrukturen

In dieser Aufgabe werden Atome in einer Kette simuliert um Bandlücken in dem akustischen System zu veranschaulichen. Dazu wird ein Rohr der Länge $12 \cdot 50$ mm mit einheitlichen Blenden unterteilt. Die Blendengrößen werden zwischen 10, 13 und 16 mm variiert. In der Abbildung 8 werden die Bandlücken in Relation zu der Blendengröße dargestellt. Für alle drei Messung mit den drei Blenden bilden sich drei Bandlücken aus, diese sind in der Abbildung jeweils übereinander. Die untere Gerade stellt den Verlauf der ersten Bandlücke dar, die mittlere den Verlauf der zweiten Bandlücke und die obere den Verlauf der dritten Bandlücke. Die zueinander gehörenden Bandlücken der unterschiedlichen Messungen sind jeweils mit einer Ausgleichsgeraden verbunden. Es wird deutlich, dass die Bandlücken mit zunehmender Blendengröße kleiner werden. Anders beschrieben wird die Kopplung zwischen einzelnen Rohren mit zunehmender Blendengröße größer wodurch sich das Spektrum einem Spektrum ohne Blenden annähert.

Die Bandlücken werden bestimmt, indem die Differenz vom Anfangs- und Endpunkt der Bandlücke betrachtet wird. Die Bandlücken bei höherer Frequenz sind größer.

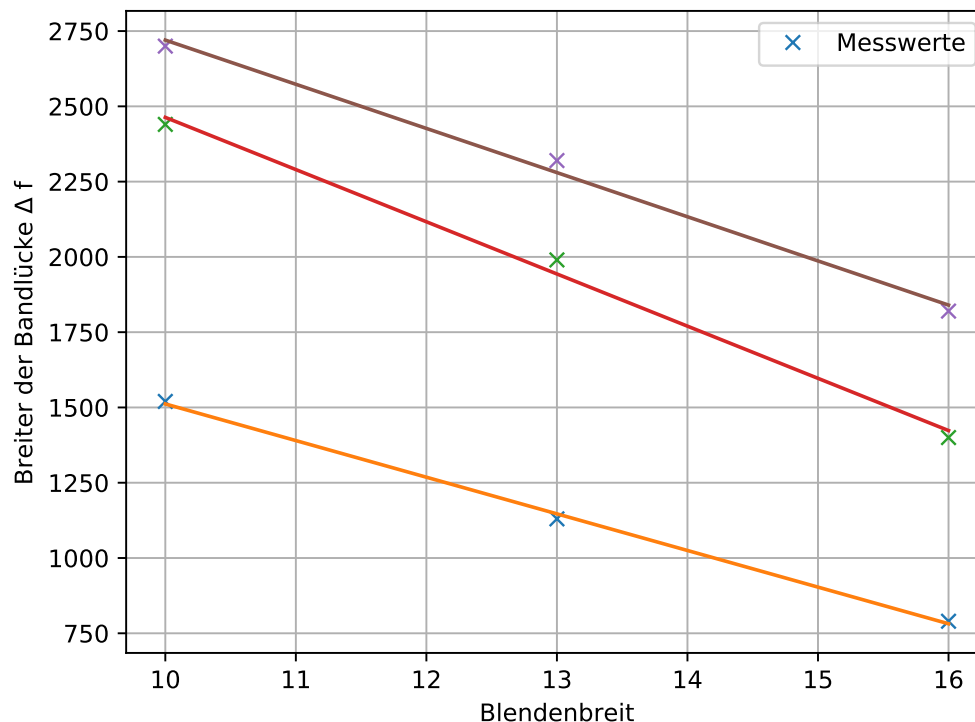


Abbildung 8: Größe der Bandlücken aufgetragen gegen die Blendengröße. Übereinander stehen jeweils die Messwerte einer Messung. Die zusammengehörigen Bandlücken werden über alle drei Messungen miteinander verbunden.

4.4 Aufgabe 4: Bandstrukturen

In dieser Aufgabe und der folgenden geht es um die Vermessung der Einheitszellen des Systems. Zunächst wird der Zusammenhang der Bandlücken und der Größe der gesamten Rohrlänge untersucht. Hier werden wie bei der vorherigen Aufgabe die Bandlücken betrachtet, jedoch im Verhältnis zur Rohrlänge statt zur Blendengröße. Dementsprechend sind in der Abbildung 9 die Bandlücken gegen die Rohrlängen aufgetragen. Die Rohrlänge wird zwischen $8 \cdot 50$ mm, $10 \cdot 50$ mm und $12 \cdot 50$ mm variiert. Wieder beschreibt die untere Gerade den Verlauf der ersten Bandlücke, die mittlere den Verlauf der zweiten Bandlücke und die obere den Verlauf der dritten Bandlücke. Es ist zu erkennen, dass die Bandlücken unabhängig von der gesamten Rohrlänge sind. Im übertragendem Sinn hängt die Bandlückenbreite nicht von der Größe des Kristalls ab.

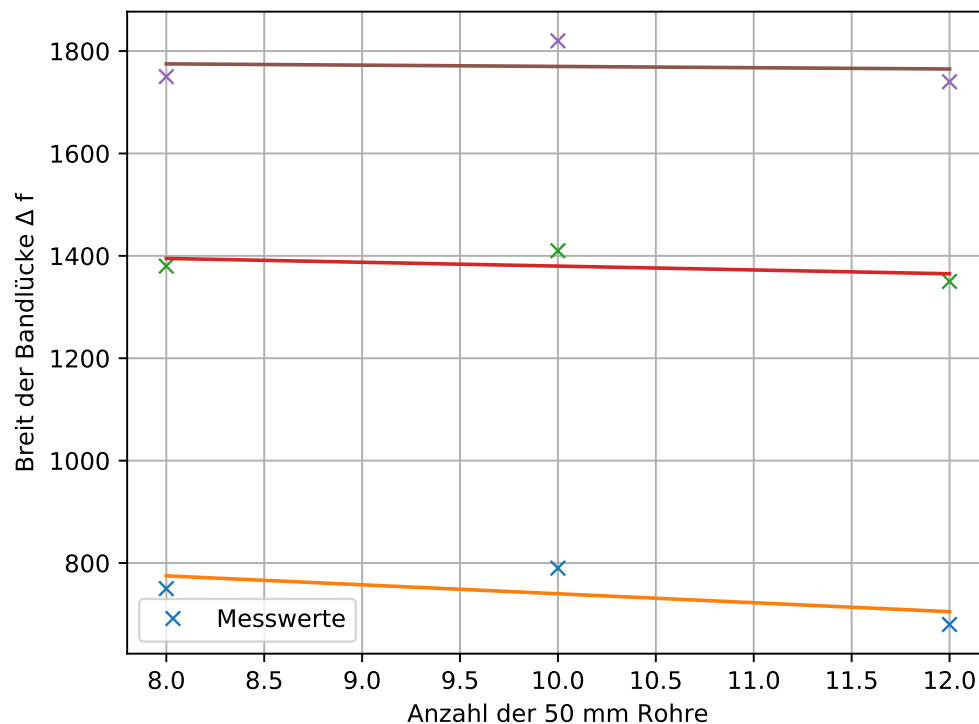


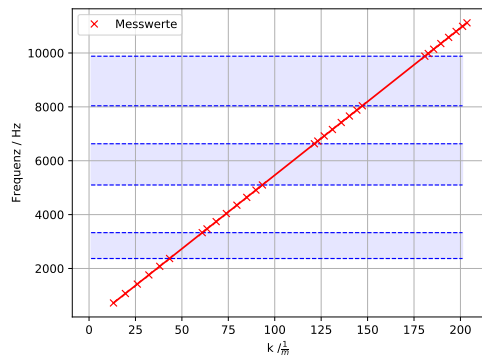
Abbildung 9: Größe der Bandlücken aufgetragen gegen die Rohrlänge. Übereinander stehen jeweils die Messwerte einer Messung. Die zusammengehörigen Bandlücken werden über alle drei Messungen miteinander verbunden.

4.5 Aufgabe 5

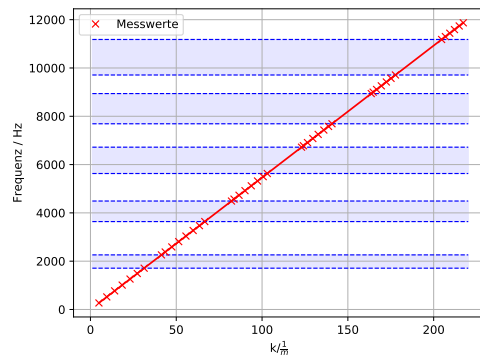
In dieser Aufgabe wird der Zusammenhang der Bandlücken und der Größe der Einheitszellen gesetzt. Dabei wird zwischen $8 \cdot 75$ mm und $8 \cdot 50$ mm gewechselt. In den Abbildungen 10a und 10b sind die Maxima gegen k geplottet. Anhand der hinterlegten Bandlücken wird deutlich, dass die Bandlücken für größere Rohrabschnitte kleiner werden.

In den Abbildungen 11a und 11b werden die Abbildungen 10a und 10b als reduziertes Bandschema dargestellt. Die Darstellung im reduzierten Bandschema hat den Vorteil, dass die erlaubten Übergänge für Energie und Impuls senkrecht übereinander liegen.

Anhand der Abbildung 10a wird die Zustandsdichte mit Hilfe der Formel 14 berechnet. Die Zustandsdichte wird aus dem reziproken Frequenzabstand bestimmt. Das Ergebnis wird in der Abbildung 12 graphisch dargestellt. Auffällig ist dass am Rand einer Bandlücke die Zustandsdichte zunimmt.

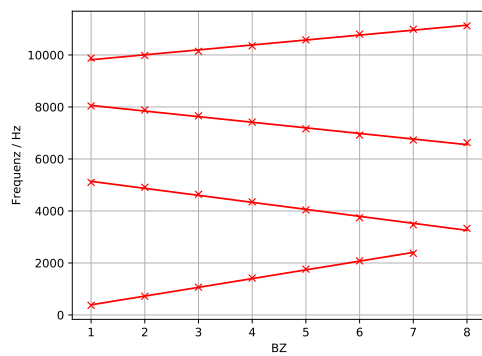


(a) 8 50 mm

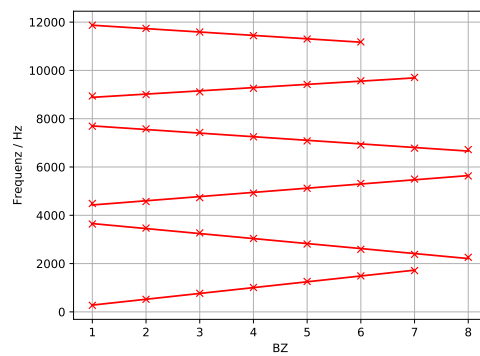


(b) 8 75 mm

Abbildung 10: Bandlücken für unterschiedliche Rohrlängen

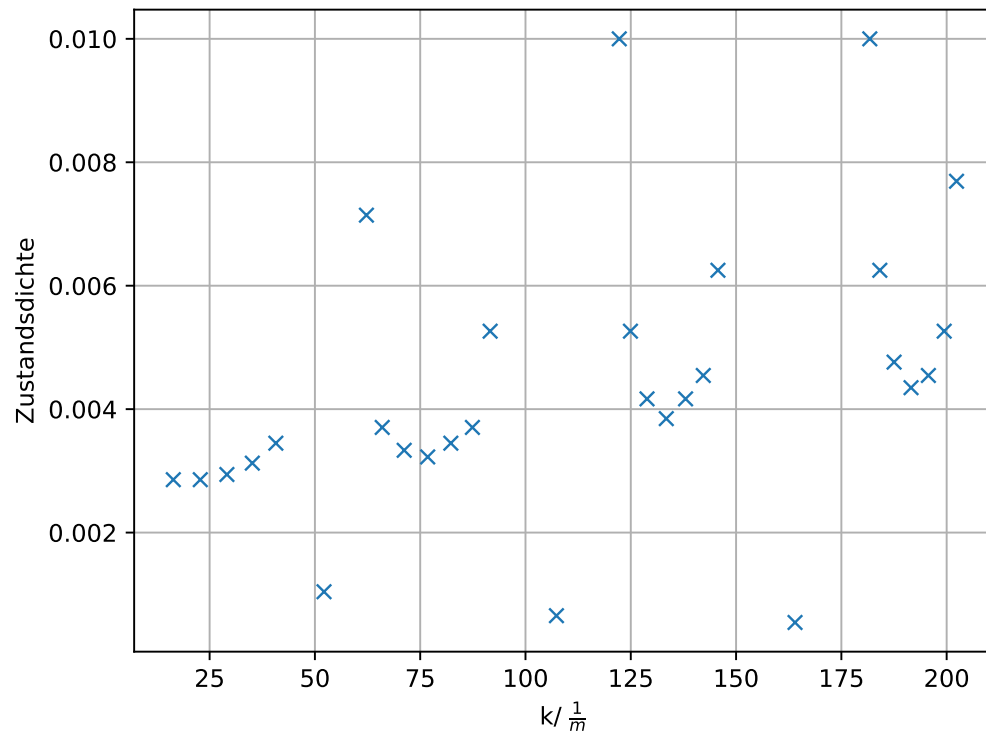


(a) 8 50 mm



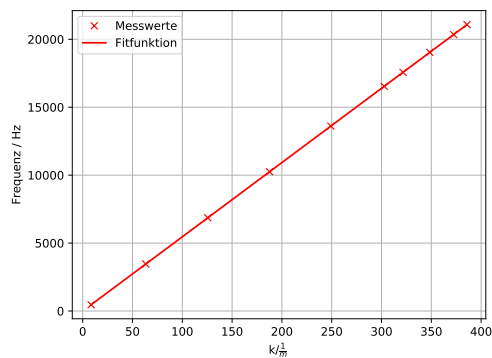
(b) 8 75 mm

Abbildung 11: Reduziertes Bandlückenschema

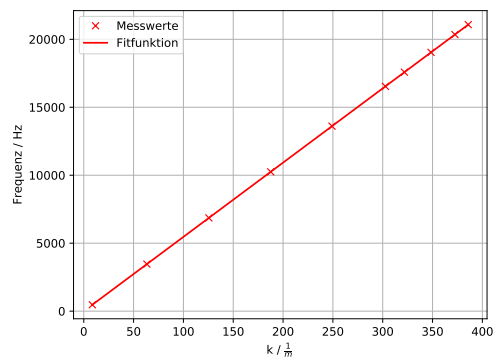
Abbildung 12: Zustandsdichte aufgetragen gegen k

4.6 Aufgabe 6 und 7

Nun wird eine Molekülkette behandelt. Als Grundlage für die nächsten Aufgaben werden zwei einzelne Röhren vermessen und verglichen. In dieser Aufgabe werden wieder die Maxima gegen k geplottet. Es entsteht wie erwartet eine Gerade welche in Abbildung 13a und 13b zu sehen ist. Anhand der Abbildungen ist zu sagen, dass sich die beiden Messungen nicht viel unterscheiden.



(a) 1 mal 50 mm



(b) 1 mal 75 mm

Abbildung 13: Maxima gegen k

4.7 Aufgabe 8

Die Molekülkette besteht nun aus einem Atom. Es wird die Struktur der Bandlücken im Verhältnis zur Bindungsstärke der Atome untersucht. Es werden für $2 \cdot 50 \text{ mm}$ Rohrlänge unterschiedliche Blendendurchmesser untersucht. Der Blendendurchmesser soll die Stärke der Bindungen zwischen den Atomen symbolisieren. Für die unterschiedlichen Blendendurchmesser entstehen unterschiedlich breite Bandlücken. In der Abbildung 14 ist der Zusammenhang zwischen Blendendurchmesser und Bandlücke dargestellt. Es wird deutlich, dass bei größeren Blendendurchmessern die Bandlücken kleiner werden.

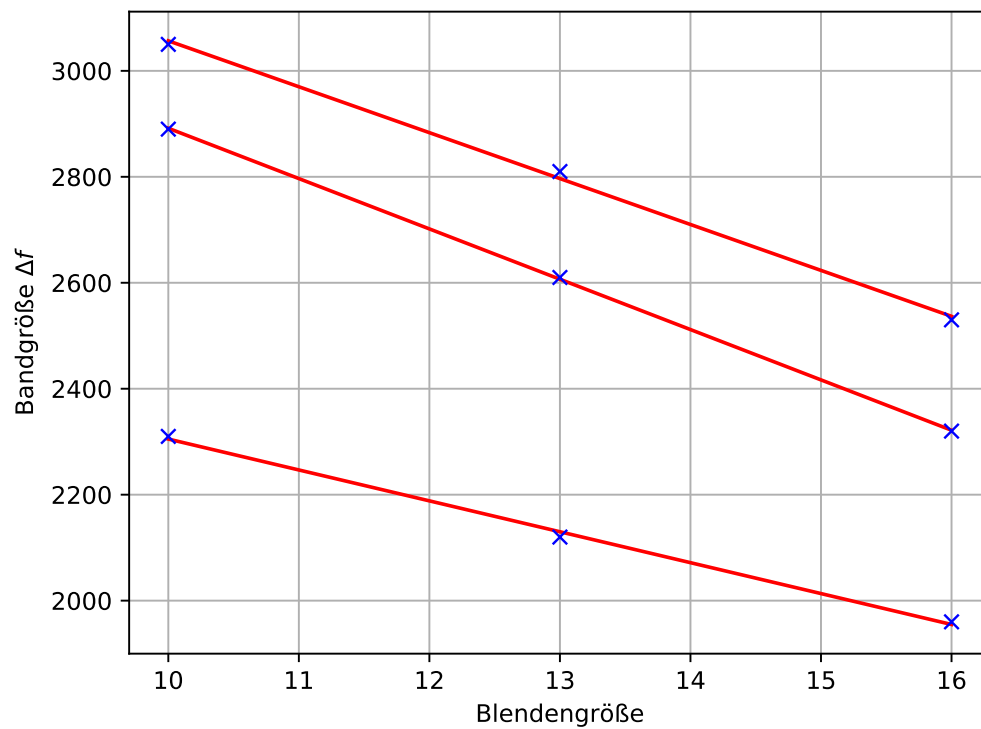


Abbildung 14: Bandlücke in Abhängigkeit von dem Blendendurchmesser

4.8 Aufgabe 9

In dem Aufgabenteil werden die Bandlücken in Abhängigkeit der Bindungsstärke und der Anzahl der Einheitszellen dargestellt. Für die Blendengrößen von 10, 13 und 16 mm werden jeweils 3, 4 und 6 Einheitszellen vermessen. Die gemessenen Abhängigkeiten sind in den Abbildungen 15a, 15b und 16 abgebildet. Die Bandlückenbreite bleibt mit steigender Zahl von Einheitszellen im wesentlichen konstant.

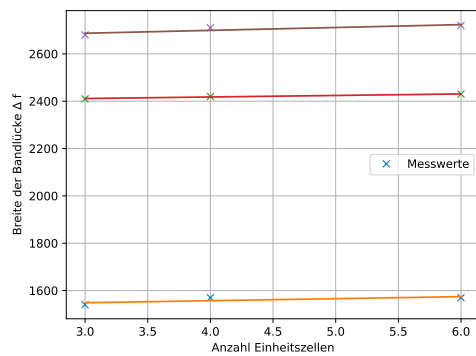
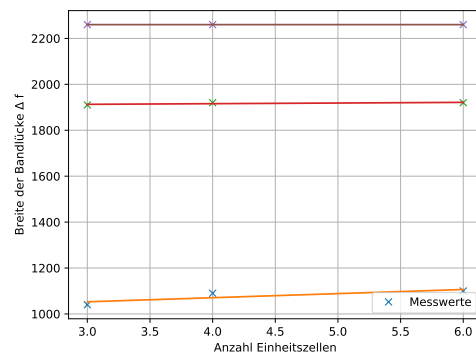
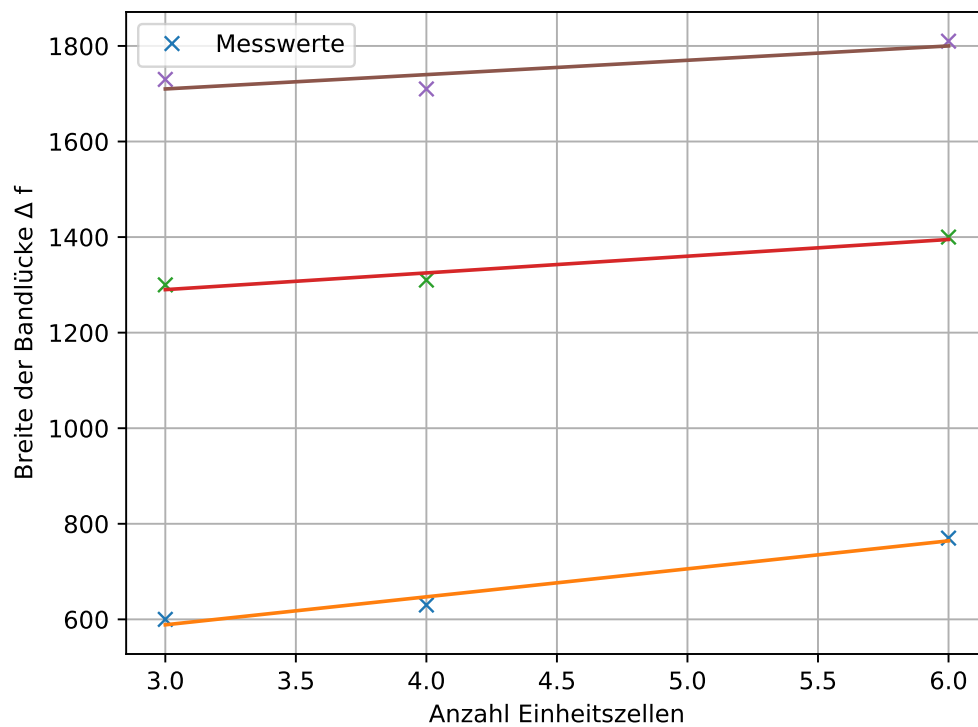
(a) Blendendurchmesser $D = 10 \text{ mm}$ (b) Blendendurchmesser $D = 13 \text{ mm}$

Abbildung 15: Die Bandbreite in Abhängigkeit von der Anzahl der Einheitszellen

Abbildung 16: Blendendurchmesser $D = 16 \text{ mm}$ in Abhängigkeit von der Anzahl der Einheitszellen

4.9 Aufgabe 10

In diesem Aufgabenteil werden die Auswirkungen von periodischen Defekten auf die Bandlücken einer Molekülkette betrachtet. Vermessen wird ein Rohr der Länge $L =$

12 · 50 mm mit abwechselnden Blendengrößen von 16 und 13 mm. Die Frequenz der Maxima wird gegen k geplottet und die Bandlücken farbig markiert. Auf diese Weise lassen sich die periodischen Defekte sehr gut beobachten. Es entstehen kleinere Bandlücken zwischen den 'regulären' Bandlücken.

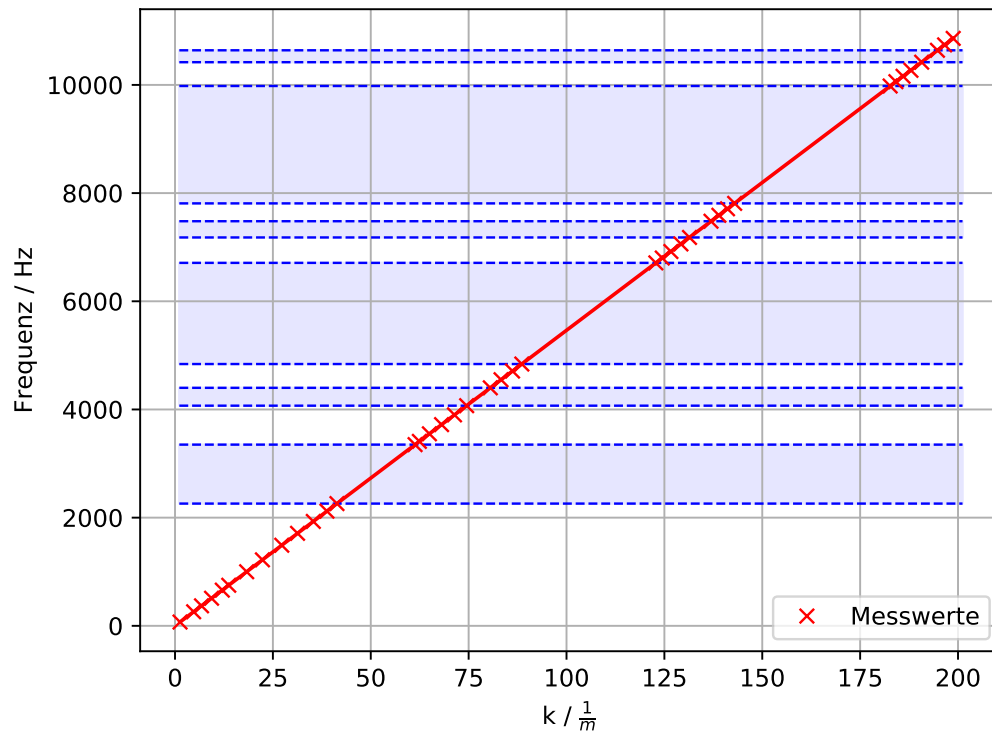


Abbildung 17: Frequenz der Maxima geplottet gegen k mit markierten Bandlücken

4.10 Aufgabe 11

In dieser Aufgabe geht es ebenfalls darum, das Verhalten von Bandlücken unter Verwendung von Defekten zu beobachten. Die Defekte treten hier jedoch nicht wie in der Aufgabe zuvor in Form von der Blendengröße (Bindungsstärke) auf, sondern die Rohrabchnitte (Größe der Einheitszellen) werden verändert. Für die Messung wird eine alternierende Folge von 50 und 75 mm langen Röhren benutzt, welche jeweils mit Blenden vom Durchmesser 16 mm abgetrennt sind. Insgesamt werden 10 Rohrabchnitte verwendet. Auch hier werden zur Veranschaulichung wieder die Frequenzen der Maxima gegen k geplottet. Anhand der farblich markierten Bandlücken wird deutlich, dass die Defekte einen großen Einfluss auf das Verhalten der Kette haben. Es lässt sich kein Muster erkennen, nach dem sich die Bandlücken gebildet haben.

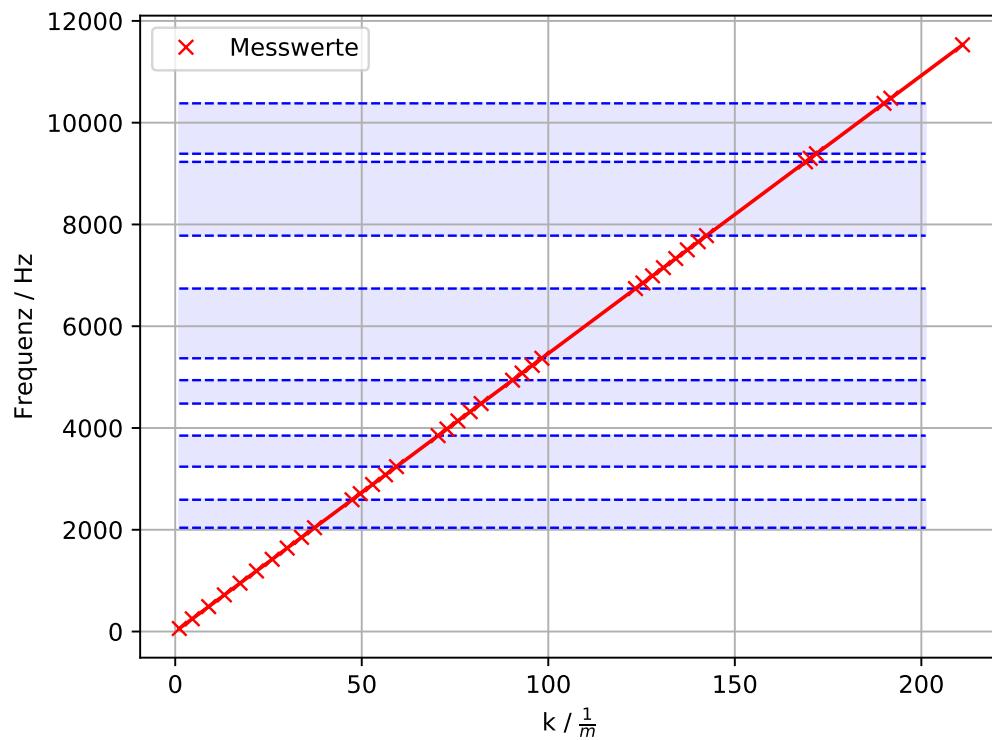
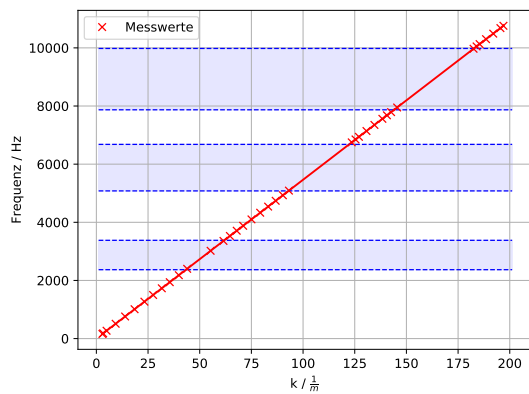


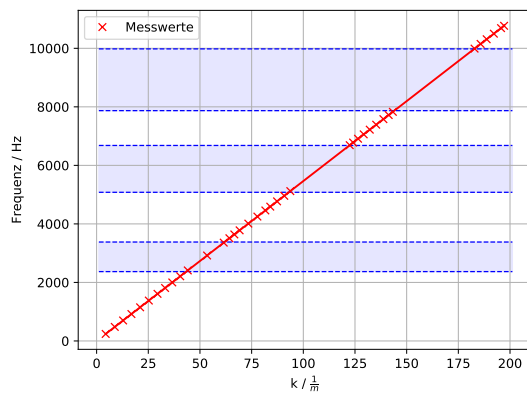
Abbildung 18: Frequenz der Maxima geplottet gegen k mit markierten Bandlücken

4.11 Aufgabe 12

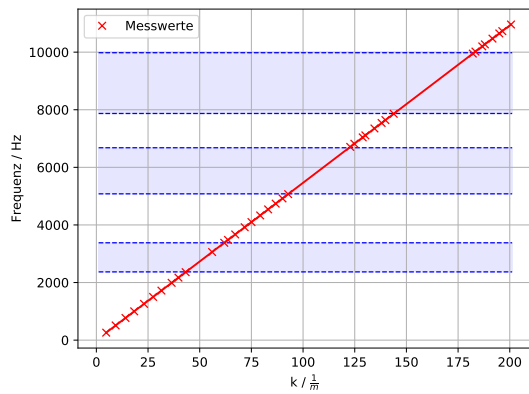
Nun werde vereinzelte, unperiodische Defekte in die Kette eingebaut. Es werden 4 Messungen mit unterschiedlichen Defekten durchgeführt. Die entstehenden Bandlücken sind in den Abbildungen 19 gut zusehen. Durch die Defekte entsteht ein Maximum, oder auch ein zusätzlicher Zustand, innerhalb der ersten Bandlücke.



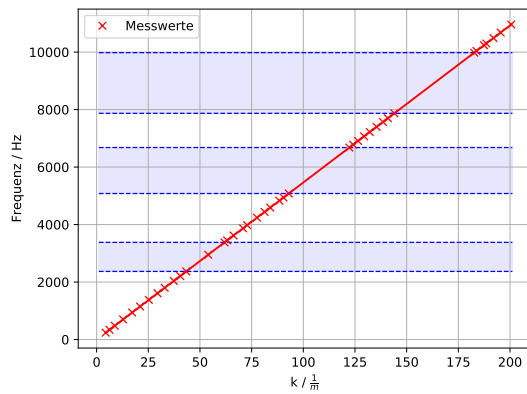
(a) Defekt an dritter Stelle mit 12,5 mm



(b) Defekt an dritter Stelle mit 75 mm



(c) Defekt an achter Stelle mit 12,5 mm



(d) Defekt an achter Stelle mit 75 mm

Abbildung 19: Messung mit einem Rohr der Länge $12 \cdot 50$ mm und einem Blendendurchmesser von 16 mm mit Defekten an bestimmten Stellen.

5 Diskussion

Die berechnete Schallgeschwindigkeit von $(343,28 \pm 1,63) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ weicht nicht signifikant vom Literaturwert $343,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ [2] ab, da die Abweichung innerhalb des 2σ Bereiches liegt.

Da in den übrigen Aufgaben nichts berechnet wird, ist schwer zu sagen, ob die gemessenen Werte zufriedenstellend sind. Die Dispersionsrelationen der stehenden Schallwelle und des quantenmechanischen Teilchen passen wie erwartet nicht zueinander (Abb. 7). Die quantenmechanische Dispersionsrelation steigt mit k^2 , während die akustische mit k ansteigt.

In Aufgabe 3 wird deutlich, dass sich die Breite der Bandlücken Δf mit steigender Blendengröße d wie folgt verhält (Abb. 8):

$$\Delta f \propto -d.$$

Die Blendengröße d stellt hier ein Analogon zur Barrierenhöhe zwischen zwei Atomen dar.

Bei der Untersuchung des Einflusses der Gesamtrohrlänge L auf die Bandlückenbreite Δf lässt sich sagen, dass ein möglicher Einfluss entweder äußerst gering ist, oder die gesamte Rohrlänge hat keinen Einfluss auf die Breite der Bandlücken (Abb. 9).

Bei Aufgabe 5 werden die Wellenzahlen k gegen die Frequenz $f(k)$ geplottet (Abb. 10a, 10b). Hier ist insbesondere die Ähnlichkeit zu den Bildern der Bändern und Bandlücken aus der Theorie (Abb. 1, 2) hervorzuheben. In den Darstellungen sind die auftretenden Bandlücken farbig hinterlegt.

In Aufgabe 8 wird der Verlauf der Bandlückenbreite in Abhängigkeit der Blendenbreite in Verbindung gebracht mit der Bindung zweier Atome in einem Festkörper. Auch hier lässt sich der Zusammenhang

$$\Delta f \propto -w$$

aufstellen, wobei hier w die Stärke der Bindung beschreibt.

Nun wird in Aufgabe 9 die Bandlückenbreite in Abhängigkeit der Anzahl der Einheitszellen betrachtet (Abb. 15a, 15b, 16). Hier wird die Rohrlänge übersetzt in eine Anzahl von Einheitszellen. Es wird deutlich, dass die Bandlückenbreite Δf mit der Anzahl j der betrachteten Einheitszellen ansteigt:

$$\Delta f \propto j.$$

Anschließend wird in Aufgabe 10 der Effekt von periodischen Defekten, hier abwechselnde Blendenbreiten, untersucht (Abb. 17). In dem Graphen ist $f(k)$ geplottet, und es ist deutlich zu erkennen, dass mit einem erkennbaren Muster zwischen den 'regulären' Bandlücken neue, schmale Bandlücken auftauchen.

Danach wird der Effekt von abwechselnden Rohrlängen untersucht (Abb. 18). Hier ist kein Muster erkennbar, nach dem sich die zusätzlichen Bandlücken bilden, aber die Defekte haben einen großen Einfluss auf die Bandstruktur. Die entstehenden Bänder und Lücken entsprechen einer Zusammensetzung der beiden Konfigurationen.

Hingegen bei Aufgabe 12 soll der Einfluss von einzelnen Defekten beleuchtet werden (Abb. 19). Durch das Einbauen eines Defektes entsteht ein Peak in der ersten Bandlücke. Bei der Messung kommt es jedoch zu einigen Ungenauigkeiten. Zum einen hat das Mikrofon auch Geräusche aus der Umgebung aufgenommen, so kann es zu Fehlmessungen gekommen sein. Zum anderen ist die Peak-Picking Funktion nicht fortgeschritten, sodass auch Maximalwerte markiert werden, welche global keine Relevanz haben. Auffällig war auch, dass das Messprogramm veraltet war und nach jeder Messung abgestürzt ist.

Literatur

- [1] TU Dortmund. In: *Versuchsanleitung V23: Quanten-Analogien*.
- [2] Douglas C. Giancoli. *Physik: Lehr- und Übungsbuch*. Pearson Deutschland GmbH. 2010.
- [3] Stephanie Rosker Eva Haas. *Bandstrukturen leicht gemacht*. 2009. URL: http://lamp.tu-graz.ac.at/~hadley/ss1/studentpresentations/Bandstrukturen_Haas_Rosker09.pdf (besucht am 14.01.2019).
- [4] physiki. *Datei:Kristalldispersion.jpg*. 2018. URL: <http://pdg.lbl.gov/2014/listings/rpp2014-list-muon.pdf> (besucht am 14.01.2019).