

FP

# Quanten-Analogien

Katharina Brägelmann  
Tobias Janßen

katharina.braegelmann@tu-dortmund.de, tobias2.janssen@tu-dortmund.de  
Durchführung: ?? . Dezember 2018, Abgabe: ?? . Januar 2019

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Stehende Schallwellen . . . . .	3
2.2	Das quantenmechanische Teilchen . . . . .	4
2.3	Vergleich von stehenden Schallwellen und Teilchen im Potenzialtopf . . .	4
2.4	Eindimensionaler Festkörper . . . . .	5
2.5	Superstrukturen . . . . .	7
2.6	Defekte . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Aufbau und Durchführung</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>11</b>
4.1	Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit . . . . .	12
4.2	Aufgabe 2? . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>17</b>

## 1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden akustische stehende Schallwellen in einem Rohr aufgebaut, die anschließend unter gewissen Einschränkungen als Analogon zum quantenmechanischen Teilchen im Potenzialtopf betrachtet werden.

## 2 Theorie

Im Versuch werden in verschiedenen Aufbauten Röhren benutzt, in denen sich unter Verwendung von Lautsprechern akustische stehende Wellen ausbilden. Die Röhre wird mit dem Mikrofon verschlossen.

### 2.1 Stehende Schallwellen

In der Röhre bildet sich bei bestimmten Frequenzen das Phänomen der Resonanz. Die Resonanzfrequenz ist diejenige Frequenz, bei der materialgegeben der Energieübertrag die geringsten Verluste hat. Ein Objekt kann mehrere Resonanzfrequenzen haben. Die Bedingung für Resonanz in einer Röhre mit geschlossenen Enden lautet

$$n\lambda = 2L = \frac{nc}{f} \Leftrightarrow f(n) = \frac{c}{2L}n \Leftrightarrow f(k) = \frac{c}{2\pi}k. \quad (1)$$

Hierbei ist  $\lambda$  die Wellenlänge,  $L$  die Länge der Röhre,  $c$  die Schallgeschwindigkeit,  $f$  die Schallfrequenz und  $n$  die Angabe, um welches ganzzahlige Vielfache der Resonanz es sich handelt.

In der letzten Umformung wird die Gleichung

$$k = \frac{\pi}{L}n \quad (2)$$

verwendet.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \vec{u} \quad (4)$$

Die Wellengleichung für Schallwellen lässt sich über die linearisierte Eulergleichung (Gleichung (3)) und die Kontinuitätsgleichung (Gleichung (4)) herleiten:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho \kappa} \Delta p \quad (5)$$

Für den Vergleich zum quantenmechanischen Teilchen sind die Randbedingungen wichtig. Auch wenn es aus der Wellengleichung nicht direkt ersichtlich ist, ist die Schallgeschwindigkeit am Rand bzw. an der Wand am Ende der Röhre null. Damit ist auch die Ableitung des Schalldrucks senkrecht zur Wand verschwindet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Die Wellengleichung lässt sich hier auf ein eindimensionales Problem reduzieren. So lässt sich der Ansatz

$$p(x) = p_0 \cos(kx + \alpha) \cos(\omega t)$$

verwenden. Mit den Randbedingungen ergibt sich, dass  $\alpha = 0$  und  $k = \frac{n\pi}{L}$ .

## 2.2 Das quantenmechanische Teilchen

Die zeitabhängige Schrödingergleichung ist bekannt als

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi(r, t) + V(r, t)\psi(r, t) = i\hbar\psi(r, t).$$

Die eindimensionale, zeitunabhängige Schrödingergleichung reicht aus, um den eindimensionalen, unendlich tiefen Potenzialtopf zu berechnen. Der Potenzialtopf wird hier mit einer Wand an der Stelle  $x = 0$  und der zweiten Wand bei  $x = L$  gewählt. Da im Topf  $V(x) = 0$  gilt, ergibt sich:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi(x) = E\psi(x). \quad (6)$$

Der passende Ansatz für diese Gleichung ist

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha). \quad (7)$$

Die Randbedingungen des Potenzialtopfs belaufen sich auf

$$\psi(0) = 0 \qquad \psi(L) = 0.$$

Damit ergibt sich nach Einsetzen der Randbedingungen in den Ansatz in Gleichung (7) und Einsetzen des Ansatzes in die Schrödingergleichung (6) folgendes:

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}. \quad (8)$$

Dies ist die Dispersionsrelation des quantenmechanischen Teilchens im Potenzialtopf.

## 2.3 Vergleich von stehenden Schallwellen und Teilchen im Potenzialtopf

Während die Schallwellen mechanische Phänomene sind, ist das Teilchen im Potenzialtopf ein quantenmechanisches Problem. Die Schallwellen sind damit genau lokalisierbar. Beim quantenmechanischen Teilchen im Potenzialtopf hingegen lässt sich nur eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $|\psi^2|$  formulieren.

Auch die Randbedingungen sind unterschiedlich. Während bei dem quantenmechanischen Teilchen die Wellenfunktion an den Rändern null sein muss, ist dies bei den stehenden Schallwellen nicht der Fall. Zwar ist bei den Schallwellen die Geschwindigkeit  $\vec{u}$  an den Rändern null, aber die vektorielle Geschwindigkeit entspricht nicht der skalaren quantenmechanischen Wellenfunktion. Obwohl der Schalldruck  $p$  an den Rändern maximal ist,

trifft er das quantenmechanische Teilchen besser, da es eine skalare Größe ist. Die Dispersionsrelation der Schallwellen  $\omega(k)$  entspricht nicht der Dispersionsrelation des quantenmechanischen Teilchens  $E(k)$ , schon da  $\omega \neq k$ . Dennoch lassen sich die beiden Dispersionen vergleichen, da sich in beiden Phänomenen diskrete Niveaus ergeben. Auch die Eigenzustände unterscheiden sich. Zeitunabhängige quantenmechanische Eigenzustände sind dauerhaft, während mechanische Eigenzustände instabil sind. Zeitabhängige Eigenzustände in der Quantenmechanik sind wiederum nicht beständig. Es ergibt sich ein Spektrum der quantenmechanischen Eigenfrequenzen, beschrieben durch folgende Gleichung:

$$|A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2}}. \quad (9)$$

Für die mechanischen Eigenzustände ergibt sich das folgende Spektrum:

$$|A(\omega)| = \frac{2\omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad (10)$$

## 2.4 Eindimensionaler Festkörper

Der eindimensionale Festkörper lässt sich auf zwei Arten modellieren.

**Bändermodell** Die Energieniveaus eines einzelnen Atoms sind diskret, aber werden Atome nah aneinander gebracht, verschmelzen die höheren Niveaus zu den sogenannten Energiebändern. Dabei gibt es Energiebänder, in denen sich Elektronen befinden, und Bandlücken, in denen keine Zustände möglich sind. Die Energieniveaus in der Quantenmechanik sind äquidistant. In der Messung der Resonanzen der stehenden Schallwellen in Abhängigkeit der Rohrlänge sind die Resonanzstellen nicht äquidistant verteilt. Die Rohrlänge lässt sich jedoch in den Wellenvektor umrechnen, und es kann die Dispersionsrelation  $f(k)$  nach Gleichung (1) berechnet werden. Die quantenmechanischen Teilchen, Elektronen, im Bändermodell zeigen Dispersion, wenn die Wellenlänge  $\lambda$  in etwa der Gitterkonstante  $a$  entspricht. Für die Schallwellen lässt sich ein Analogon bilden:

$$a = \frac{\lambda}{2}. \quad (11)$$

Die Barrierenhöhe  $d$  der einzelnen Potenziale spielt dabei folgende Rolle:

$$d.\text{FORMEL} \quad (12)$$

Wiederum die Anzahl der zusammengebrachten Atome  $j$  äußert sich über:

$$j.\text{FORMEL} \quad (13)$$

Die Gitterkonstante  $a$  ändert das Spektrum und die Bänder mit

$$a.\text{FORMEL} \quad (14)$$

Der reziproke Gittervektor wird im eindimensionalen Festkörper beschrieben durch

$$G = \frac{2\pi}{a}n \quad (15)$$

mit der natürlichen Zahl  $n$ . Die Brillouin-Zone ist das Äquivalent zur Wigner-Seiz-Einheitszelle im reziproken Raum. Die Dimension des reziproken Raums ist  $1/m$ . Für  $n = 1$  ergibt sich also nach Gleichung (15) und nach Gleichung (2):

$$G = \frac{2\pi}{a} \quad k = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{ja}. \quad (16)$$

Das Verhältnis der beiden Größen beläuft sich auf

$$\frac{G}{k} = 2j.$$

Im jeder Brillouin-Zone sind entsprechend doppelt so viele  $k$ -Punkte, wie es Einheitszellen im System gibt. Für  $n = 0$  gibt es keine Resonanz.

In der Festkörperphysik ist die Zustandsdichte  $\rho$  ein wichtiger Faktor. In diesem Versuch wird sie durch

$$\rho(f) = \frac{1}{f_{i+1} - f_i} \quad (17)$$

genähert.

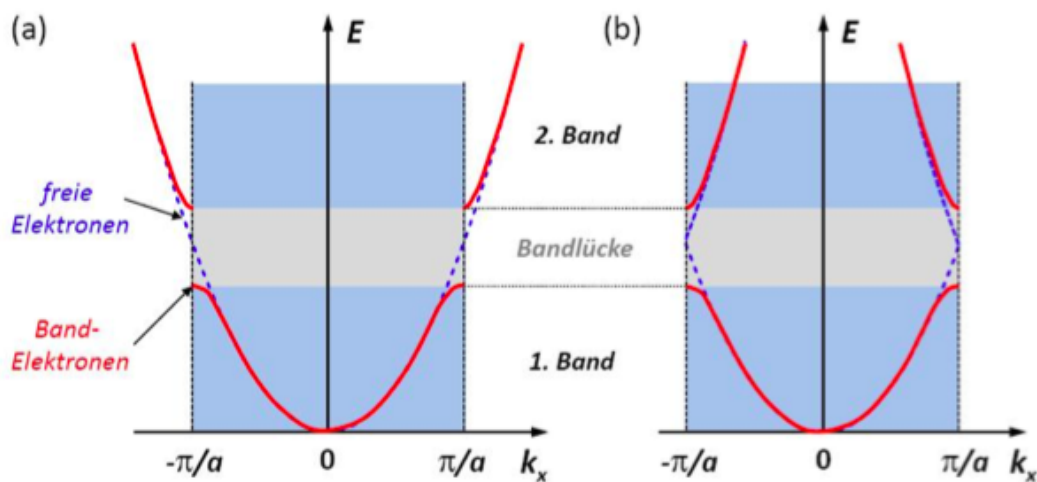


Abbildung 1: Bändermodell, a) ausgedehntes Zonenschema, b) reduziertes Zonenschema [bändermodell]

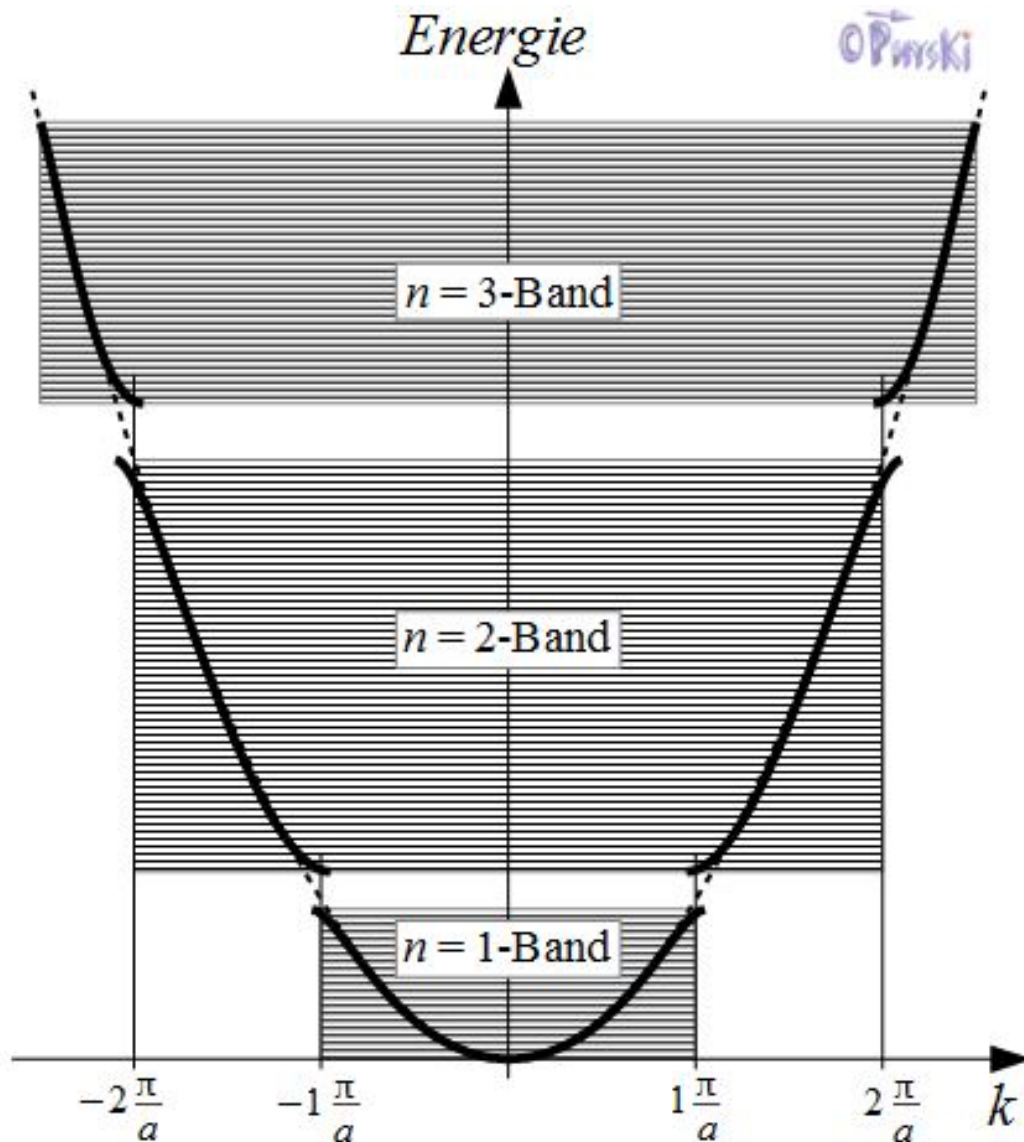


Abbildung 2: Bändermodell, [bändermodell2]

**Lineare Teilchenkette** Nun werden einzelne Atome betrachtet, die wir zu einem Molekül verbinden und diese Moleküle aufsummieren. Dieses Verfahren wird 'tight-binding-Methode' genannt.

## 2.5 Superstrukturen

Als Superstrukturen werden hier Festkörper bezeichnet, die periodische Änderungen haben. So kann ein eindimensionaler Festkörper zum Beispiel aus zwei verschiedenen Sorten Atomen bestehen. Dies kann Folgen auf die Bandstrukturen des Festkörpers

haben.

## 2.6 Defekte

Sind die andersartigen Atome im Festkörper nicht periodisch verteilt, so sind es reguläre Defekte. Die Defekte verändern die Bandstrukturen auf multiple Weisen. In der Halbleitertechnik werden Defekte bewusst in Materialien eingebracht, um optimale Leitereigenschaften zu kreieren. Dieser Vorgang nennt sich 'Dotierung'.



### 3 Aufbau und Durchführung

Der Aufbau setzt sich zusammen aus einer Schiene mit einem Lautsprecher und einem Mikrofon, zwischen denen die Röhren eingeklemmt werden. Lautsprecher und Mikrofon schließen dicht mit den Röhren ab. Die Röhren bestehen aus Aluminium und sind in drei verschiedenen Ausführungen vorhanden. Während der Durchmesser jeweils gleich ist, gibt es drei verschiedene Längen mit  $L_{75} = 75$  mm,  $L_{50} = 50$  mm und für die letzten Versuchsteile  $L_{12.5} = 12,5$  mm. Außerdem gibt es drei verschiedene Arten Blenden, Scheiben mit einem Loch in der Mitte, nämlich die Lochdurchmesser  $d_{10} = 10$  mm,  $d_{13} = 13$  mm und  $d_{16} = 16$  mm. Die initiale Datenaufnahme und -verarbeitung wird mit einem Rechner gemacht, an den sowohl Mikrofon als auch Lautsprecher angeschlossen sind.

In der Durchführung des Versuchs werden immer Frequenzspektren aufgenommen. Dies wird vom Rechner gesteuert. Dabei können verschiedene Parameter vorgegeben werden, darunter die Größe des aufgenommenen Frequenzbereiches, die Messzeit pro Schritt und die Schrittgröße  $s$ . Wenn nicht weiter angegeben, wird die Messung mit den Schritten  $s = 10$  Hz durchgeführt.

In der ersten Messung wird als Einleitung die Schallgeschwindigkeit in Luft gemessen. Dazu werden acht Frequenzspektren mit den  $L_{75}$ -Röhren mit der Schrittlänge  $s = 10$  Hz und dem Frequenzbereich 6000 Hz – 9000 Hz aufgenommen. Nach jeder Messung wird die Anzahl der Röhren um eine erhöht, bis acht Röhren erreicht sind. Aus den verschiedenen Frequenzspektren werden die jeweiligen Resonanzfrequenzen notiert. Außerdem wird ein größeres Frequenzspektrum (5000 Hz – 14 000 Hz) mit kleiner Schrittlänge ( $s = 2$  Hz) für eine einzelne  $L_{50}$ -Röhre aufgenommen.

Der zweite Versuchsteil beschäftigt sich mit dem eindimensionalen Festkörper. Zur Messung der Dispersionsrelation  $\omega(k)$  in diesem wird ein Frequenzspektrum von 12  $L_{50}$ -Röhren mit einem großen Frequenzbereich (0 Hz – 12 000 Hz) aufgenommen.

Danach werden in eine zusammengesetzte Röhre aus 12  $L_{50}$ -Röhren je 11 Blenden eingefügt um die Bandlücken zu veranschaulichen. Die Messung wird für die drei verschiedenen Durchmesser der Blenden in einem Frequenzbereich von 0 Hz – 12 000 Hz durchgeführt. Zur Vermessung der Einheitszellen im eindimensionalen Festkörper werden 10  $L_{50}$ -Röhren mit entsprechender Anzahl von  $d_{16}$ -Blenden mit dem Frequenzbereich 0 Hz – 12 000 Hz vermessen.

Nun werden 8  $L_{50}$ -Röhren mit  $d_{16}$ -Blenden und 8  $L_{75}$ -Röhren mit  $d_{16}$ -Blenden mit dem Frequenzbereich 0 Hz – 12 000 Hz vermessen, um die Gitterkonstante des eindimensionalen Festkörpers zu bestimmen.

Der dritte Versuchsteil behandelt eine Molekülkette, die aus einzelnen Atomen aufgebaut wird. Hier wird zunächst das Frequenzspektrum einer einzelnen  $L_{50}$ -Röhre in einem großen Frequenzbereich von 0 Hz – 22 000 Hz gemessen.

Anschließend wird eine einzelne  $L_{75}$ -Röhre mit dem selben Frequenzbereich aufgenommen.

Zur Simulation eines einzelnen Atoms werden nun zwei  $L_{50}$ -Röhren durch eine Blende getrennt. Die Messung wird mit allen drei Blendenvarianten mit jeweils dem Frequenzbereich 0 Hz – 12 000 Hz durchgeführt.

Danach wird die "Atomanzahl" erhöht, indem weitere Blenden und Röhren in den Auf-

bau eingefügt werden. Dazu werden weiterhin abwechselnd  $L_{50}$ –Röhren und Blenden aufgebaut. Die Messung wird mit den folgenden Konstellationen durchgeführt:

Einheitszellen	Anzahl Röhren	Blenden	Anzahl Blenden	Frequenzbereich
3	6	$d_{10}$	5	0 Hz – 12 000 Hz
3	6	$d_{13}$	5	0 Hz – 12 000 Hz
3	6	$d_{16}$	5	0 Hz – 12 000 Hz
4	8	$d_{10}$	7	0 Hz – 12 000 Hz
4	8	$d_{13}$	7	0 Hz – 12 000 Hz
4	8	$d_{16}$	7	0 Hz – 12 000 Hz
6	12	$d_{10}$	11	0 Hz – 12 000 Hz
6	12	$d_{13}$	11	0 Hz – 12 000 Hz
6	12	$d_{16}$	11	0 Hz – 12 000 Hz.

In der darauffolgenden Messung werden Defekte in die Atomkette eingebracht, indem in einem Aufbau aus 12  $L_{50}$ –Röhren abwechselnd  $d_{13}$ – und  $d_{16}$ –Blenden eingefügt werden. Danach werden statt unterschiedlichen Blenden unterschiedlich lange Röhren abwechselnd in den Aufbau gebracht. Somit sind dann 5  $L_{50}$ – und 5  $L_{75}$ – Röhren durch  $d_{16}$ –Blenden getrennt. In der letzten Messreihe werden einzelne Röhren als Defekte in die 12  $L_{50}$ –Röhren mit  $d_{16}$ –Blenden eingebracht:

Defektstelle	Defektart
3	12,5 mm
3	75 mm
8	12,5 mm
8	75 mm.

## 4 Auswertung

In der Messung werden für den Frequenzbereich von 6000 bis 9000 Hz Rohrlängen von 75 mm bis 600 mm vermessen. Bei bestimmten Frequenzen bildet sich eine stehende Welle aus. Das hat Resonanz zur Folge, so dass die Schallwelle eine höhere Intensität hat. In den folgenden 2 Abbildungen wird die Intensität gegen die Wellenlänge aufgetragen. In der Abbildung 3 sind die Messwerte für die Rohrlängen : 75 mm, 150 mm, 225 mm, 300 mm abgebildet. In der Abbildung 4 sind die Messwerte für

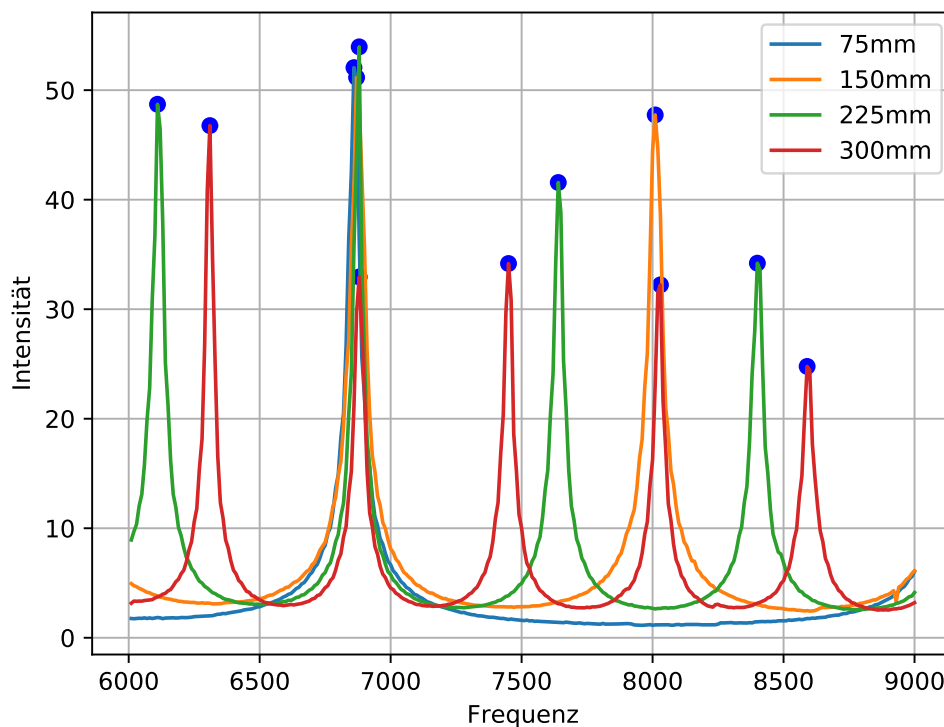


Abbildung 3: Intensität der Schallwelle im Bereich von 6000 bis 9000 Hz für die Rohrlängen 75 mm, 150 mm, 225 mm, 300 mm

die Rohrlängen : 375 mm, 450 mm, 525 mm, 600 mm abgebildet. Die Intensitätsmaxima sind mit einem blauen Punkt gekennzeichnet. Auffällig ist, dass sich für alle Rohrlängen Intensitätsmaxima an der Stelle von 6880 Hz bilden. Das heißt, dass bei dieser Frequenz eine stehende Welle entsteht die eine Wellenlänge von  $\lambda = \frac{1}{2n}d$  besitzt.  $d$  ist dabei die Länge des Rohres und  $n$  die Anzahl der Knotenpunkte. Desweiteren ist auffällig, dass für eine Rohrlänge die Abstand zwischen zwei Maxima immer konstant ist.

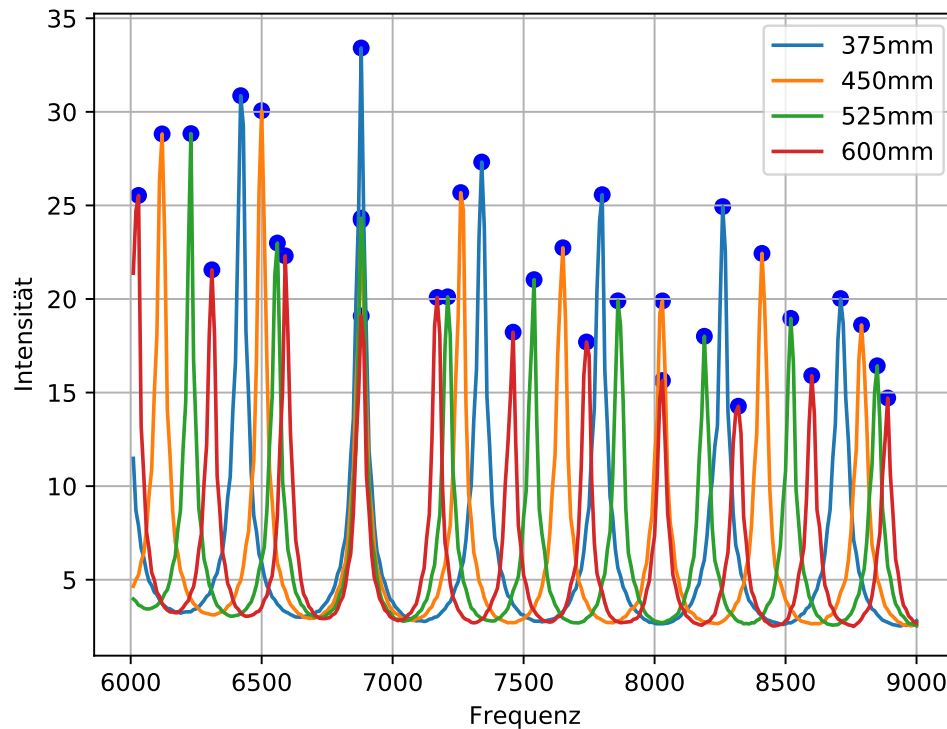


Abbildung 4: Intensität der Schallwelle im Bereich von 6000 bis 9000 Hz für die Rohrlängen 375 mm, 450 mm, 525 mm, 600 mm

#### 4.1 Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

In den Graphen 4 und 4 werden die Resonanzfrequenzen einer jeden Messreihe von 1 bis  $n$  nummeriert und anschließend gegen die Frequenz aufgetragen. Die Resonanzfrequenzabstände sind konstant für eine Messreihe, daher ergeben sich Geraden der Form:  $y = ax + b$  welche an die Messwerte gefittet werden. In der Abb. 5 sind die Messwerte mit den Fitfunktionen abgebildet. Mit Hilfe der Steigung  $a$  kann die Schallgeschwindigkeit  $c$  berechnet werden.

$$c = a \cdot 2d$$

Für die Schallgeschwindigkeit ergeben sich so Werte von:

$a = 1140.0$	$d = 2 \cdot 0,075 \text{ m}$	$c = 342,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$a = 763.0$	$d = 3 \cdot 0,075 \text{ m}$	$c = 343,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$a = 571.0$	$d = 4 \cdot 0,075 \text{ m}$	$c = 342,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$a = 458.6$	$d = 5 \cdot 0,075 \text{ m}$	$c = 343,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$a = 381.9$	$d = 6 \cdot 0,075 \text{ m}$	$c = 343,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$a = 327.2$	$d = 7 \cdot 0,075 \text{ m}$	$c = 343,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$a = 286.5$	$d = 8 \cdot 0,075 \text{ m}$	$c = 343,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Der Mittelwert ergibt:

$$c = (343,28 \pm 1,63) \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

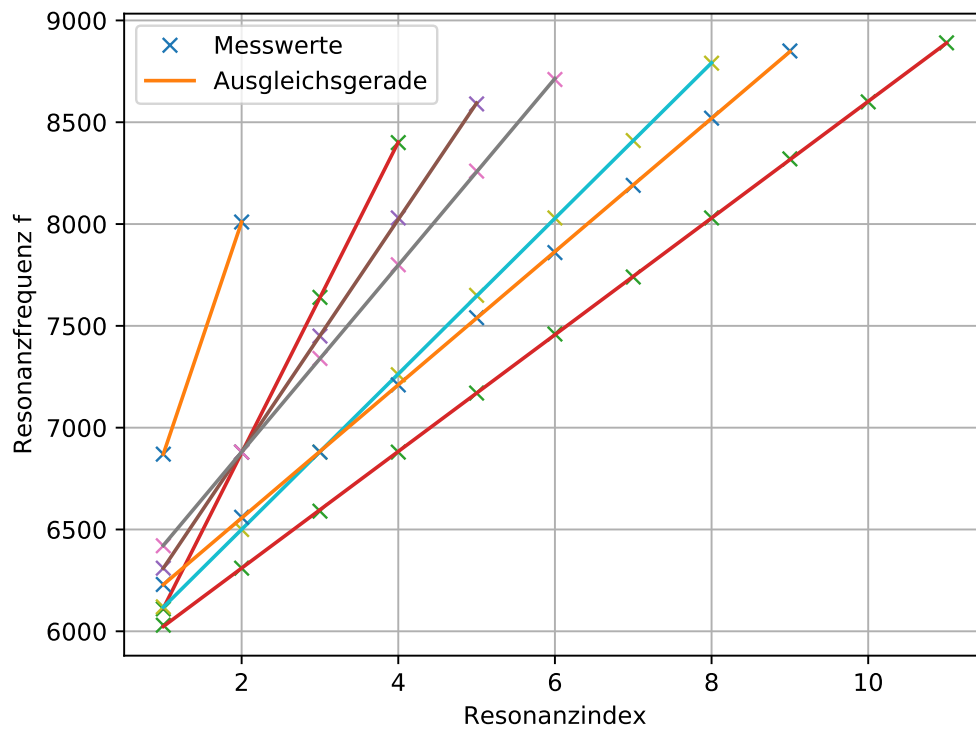


Abbildung 5: Die Intensitätsmaxima werden nummeriert und die Nummer gegen die Frequenz aufgetragen.

Die Schallgeschwindigkeit kann auch mit Hilfe einer anderen Methode bestimmt werden. dazu betrachten wir ein Rohr der Länge 75 mm für die Frequenzen von 6000 bis 9000 Hz. Da die Rohrlänge  $d$  ein vielfaches  $n$  der halben Wellenlänge  $\lambda$  ist gilt:

$$\lambda = \frac{2d}{n}.$$

Die Schallgeschwindigkeit ist gegeben durch:  $c = f \cdot \lambda$ . Daraus ergibt sich :

$$n = 1c \quad = 1032 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (18)$$

$$n = 2c \quad = 516 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (19)$$

$$n = 3c \quad = 344 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (20)$$

$$n = 4c \quad = 258 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (21)$$

Die Frequenz ist dabei gegeben als  $6880 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Diese Frequenz ist die einzige Frequenz im Frequenzbereich welche bei allen Vielfachen der Rohrlänge von 75 mm vertreten ist,

zusehen ist dies in den Abb. 3 und 4. **Den Ergebnissen aus 21 ist zu entnehmen, dass die Wellenlänge bei  $\frac{3}{2}\lambda$  liegt, da die dazugehörige Schallgeschwindigkeit von  $344 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  gut zum Literaturwert??? von  $343,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  passt.**

Desweiteren soll die Schallgeschwindigkeit mithilfe des Verhältnisses von Frequenzübergang zu Rohrlänge bestimmt werden. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 6 dargestellt. An die Messwerte wird eine Funktion der Form  $a \cdot \frac{1}{x} + b$  gefittet. Für a und b ergeben sich die Werte:

$$a = 1.68692913 \cdot 10^5 \pm 253.97695158$$

$$b = 8.56657992 \pm 1.99530368$$

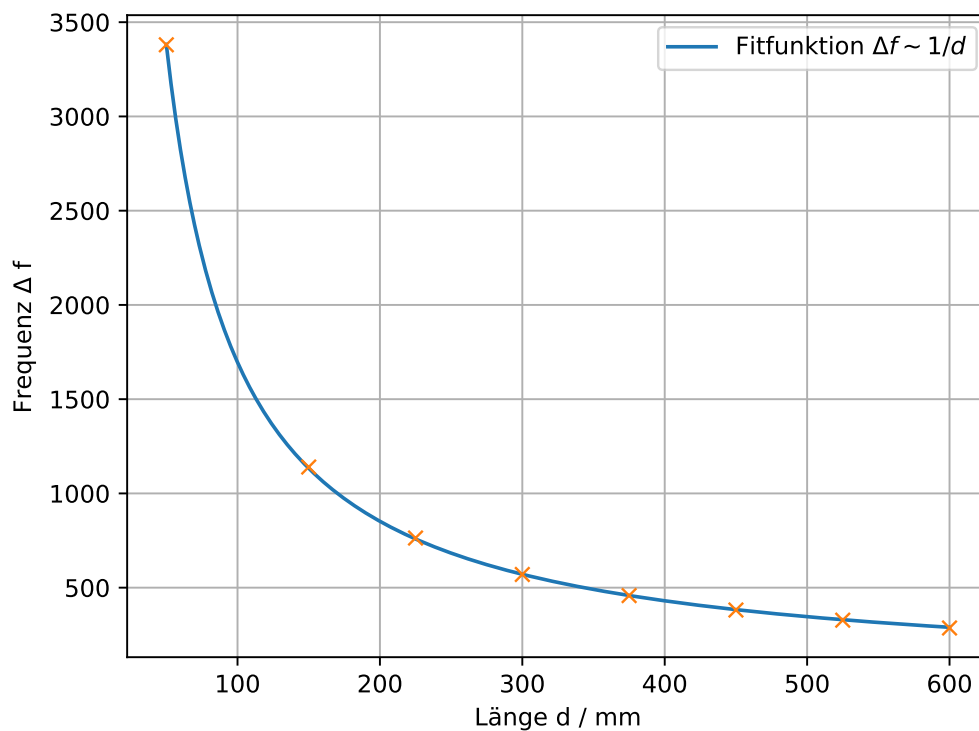


Abbildung 6: Der Abstand der Frequenzen wird gegen die Rohrlänge Aufgetragen.

**4.2 Aufgabe 2?**

bestimmung von  $k$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\omega$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega_k = k\lambda f$$

Linear nochmal mit  $\omega_k$  anstat frequenz oder anders



## 5 Diskussion

Hier könnte Ihre Werbung stehen.