

## Versuch Nr. 27

# Der Zeeman-Effekt

## 1. Einleitung

Unter dem Zeeman-Effekt versteht man die Aufspaltung und Polarisierung von Spektrallinien, die von Atomen, welche dem Einfluss eines Magnetfeldes unterworfen sind, emittiert werden. Die Erscheinung wurde erstmalig im Jahre 1896 von dem Holländer P. Zeeman (1865 - 1945) am Licht einer Na-Lampe beobachtet und nach ihm benannt. Im Sinne der Quantentheorie, die den Elektronen in einem Atom diskrete Energieniveaus zuordnet und die Lichtemission durch Übergänge zwischen diesen Niveaus erklärt, ist der Zeeman-Effekt auf eine Aufspaltung der Energieniveaus im Magnetfeld zurückzuführen. In den folgenden Kapiteln sollen nun die Größe und die Vielfalt dieser Aufspaltung berechnet werden. Daraus lassen sich dann mit Hilfe der sogenannten "Auswahlregeln" der Strahlungsemission Aussagen über die Energien und die Polarisierung der beim Zeeman-Effekt emittierten Spektrallinien ableiten. Zum Abschluß wird eine optische Apparatur beschrieben, die es erlaubt, die (sehr geringen) Wellenlängenänderungen, die durch den Zeeman-Effekt erzeugt werden, zu messen.

## 2. Berechnung des magnetischen Momentes eines Elektrons aus seinen Drehimpulsquantenzahlen

Bekanntlich unterscheidet man bei einem Hüllenelektron zwei Drehimpulse: den Bahndrehimpuls  $\vec{\ell}$  und den Eigendrehimpuls oder Spin  $\vec{s}$ . Die Beträge der Drehimpulse bekommt man, wie beispielsweise in V606, Kap.2 angegeben, aus den Quantenzahlen  $\ell$  und  $s$ . Es ist nach Lösung der Eigenwertgleichungen

$$(1) \quad |\vec{\ell}| = \sqrt{\ell(\ell + 1)} \hbar \quad \text{mit } \ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

(n Hauptquantenzahl)

$$(2) \quad |\vec{s}| = \sqrt{s(s + 1)} \hbar \quad \text{mit } s = \frac{1}{2}.$$

Wegen der Ladung  $e_0$  des Elektrons sind die Drehimpulse mit magnetischen Momenten verknüpft. Die Größe des aus dem Bahndrehimpuls resultierenden magnetischen Momentes  $\vec{\mu}_\ell$  wurde bereits in V505, Kap. 2 berechnet. Man erhielt für das auf die Drehimpulseinheit  $\hbar$  ( $m = 1$ ) bezogene magnetische Moment

$$(3) \quad \mu_z = -\frac{1}{2} e_0 \frac{\hbar}{m_0} =: \mu_B.$$

Die durch (3) definierte Größe nennt man das Bohrsche Magneton  $\mu_B$ . Für das magnetische Moment, das zum Drehimpuls  $\vec{\ell}$  gehört, gilt dann nach (1) und (3)

$$(4) \quad \vec{\mu}_\ell = -\mu_B \frac{\vec{\ell}}{\hbar} = -\mu_B \sqrt{\ell(\ell + 1)} \vec{\ell}_e$$

( $\vec{\ell}_e$  = Einheitsvektor in Richtung  $\vec{\ell}$ )

Aus dem Ergebnis des sogenannten Stern-Gerlach-Experimentes (siehe V505, Kap.4) folgt, dass auch zum Spin des Elektrons ein magnetisches Moment gehört. Es hat den Wert

$$(5) \quad \vec{\mu}_S = -g_S \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{s} = -g_S \mu_B \sqrt{s(s+1)} \vec{s}_e$$

( $\vec{s}_e$  = Einheitsvektor in Richtung  $\vec{s}$ )

Die in (5) eingeführte Größe  $g_S$  nennt man den Landé-Faktor des Elektrons. Er hat etwa den Wert 2. Damit ist das auf die Spinquantenzahl  $s = \frac{1}{2}$  bezogene magnetische Moment etwa doppelt so groß wie das zur Bahndrehimpulsquantenzahl  $\ell = 1$  gehörende. Man bezeichnet diese Tatsache als die **magnetomechanische Anomalie des Elektrons**. Sie folgt aus der relativistischen Theorie des Elektrons nach Dirac.

### 3. Wechselwirkung der Drehimpulse und magnetischen Momente untereinander

In einem Mehrelektronenatom hat man zu unterscheiden zwischen den Wechselwirkungen der beiden Drehimpulse und den beiden magnetischen Momenten eines Einzelelektrons und den Wechselwirkungen dieser Größen zwischen den verschiedenen Elektronen in der Hülle. Im allgemeinen Fall sind die Zusammenhänge sehr kompliziert und unübersichtlich. Daher sollen hier nur zwei in der Natur häufig realisierte Grenzfälle betrachtet werden, die relativ einfach zu behandeln sind. Bei Atomen mit niedriger Kernladungszahl ist die Wechselwirkung zwischen den Bahndrehimpulsen  $\vec{\ell}_i$  so groß, dass sich diese vektoriell zu einem Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  der Hülle zusammensetzen:

$$(6) \quad \vec{L} = \sum \vec{\ell}_i \quad \text{mit} \quad (7) \quad |\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)} \hbar$$

In (6) brauchen nur die Elektronen unabgeschlossener Schalen berücksichtigt zu werden, da der resultierende Bahndrehimpuls einer abgeschlossenen Schale stets null ist. Wegen der vektoriellen Addition bekommt man bei gegebenen  $\ell_i$  verschiedene Gesamtdrehimpulse  $\vec{L}$ ; jedoch treten nur solche  $\vec{L}$  auf, bei denen die Gesamt-drehimpulsquantenzahl ganzzahlig ist. Jenachdem, ob die Quantenzahl  $L$  die Werte 0, 1, 2 oder 3 annimmt, unterscheidet man zwischen S, P, D und F-Termen. Ein Beispiel dafür ist in Abb.1 wiedergegeben.

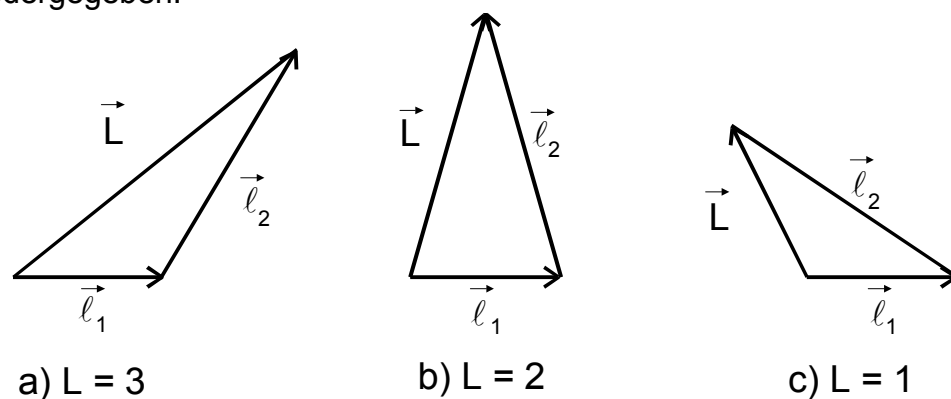


Abb.1: Vektorielle Zusammensetzung 2er Drehimpulse mit  $\ell_1 = 1$  und  $\ell_2 = 2$  zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$

Zu  $\vec{L}$  gehört ein magnetisches Moment  $\vec{\mu}_L$ , das sich gemäß (4) zu

$$(8) \quad |\vec{\mu}_L| = \mu_B \sqrt{L(L+1)}$$

errechnet. Für den Gesamtspin der Elektronenhülle lässt sich bei Kombination zweier Drehimpulse mit Atomen mit nicht zu hoher Ordnungszahl ebenfalls eine Gleichung analog zu (6) aufstellen. Auch hier setzen sich die Einzelspins  $\vec{s}_i$  vektoriell zum Gesamtspin  $\vec{S}$  zusammen

$$\vec{S} = \sum \vec{s}_i,$$

wobei die Gesamtspinquantenzahl  $S$  die Werte  $\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, \frac{1}{2}, 0$  annehmen kann ( $N$  = Gesamtzahl der Elektronen in den unabgeschlossenen Schalen). Auch hier ist analog zu (7)

$$(9) \quad |\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)} \hbar.$$

Das zu  $S$  gehörende magnetische Moment  $\mu_S$  hat den Betrag

$$(10) \quad |\vec{\mu}_S| = g_S \mu_B \sqrt{S(S+1)}.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Atome keinen zu hohen Magnetfeldern unterworfen sind, setzen sich die Summendrehimpulse  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  der Elektronenhülle zusammen

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Man bezeichnet diese Art der Drehimpulskombination als **LS-Kopplung** oder **Russell-Saunders-Kopplung**. Sie wird im Folgenden bei der Beschreibung des Zeeman-Effektes zugrundegelegt. Zu  $\vec{J}$  gehört die Drehimpulsquantenzahl  $J$ , die entweder ganz- oder halbzahlig ist, je nachdem ob  $S$  ganz- oder halbzahlig ist. Der Betrag des Gesamtdrehimpulses errechnet sich zu

$$(11) \quad |\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)} \hbar.$$

Die Quantenzahl  $J$  wird als unterer Index an die Drehimpulssymbole S,P,D,F,.. geschrieben. Die Gesamtspinquantenzahl  $S$  kann man aus einem Index  $M$  entnehmen, der links oben neben den Drehimpulssymbolen steht. Er wird als Multiplizität des Terms bezeichnet, und es gilt

$$M = 2S + 1.$$

Der zweite zuvor erwähnte Grenzfall, der bei den schwersten Atomen zu beobachten ist, wird als **j-j-Kopplung** bezeichnet. Hier ist die Wechselwirkung zwischen Spin und Bahndrehimpuls des Einzelelektrons groß gegenüber der Wechselwirkung der  $\vec{\ell}_i$  bzw.  $\vec{s}_i$  untereinander. Daher setzen sich in diesem Falle die  $\vec{\ell}_i$  und  $\vec{s}_i$  zu den Gesamtdrehimpulsen

$$\vec{j}_i = \vec{\ell}_i + \vec{s}_i$$

der Einzelelektronen zusammen, sodass kein Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}$  bzw. Gesamtspin  $\vec{S}$  mehr definiert ist. Es existiert nur noch ein Gesamtdrehimpuls

$$\vec{J} = \sum \vec{J}_i$$

der Hülle. Zwischen diesen beiden Grenzfällen besteht ein fließender Übergang bei Atomen mit mittlerer Kernladungszahl.

#### 4. Aufspaltung der Energieniveaus eines Atoms im homogenen Magnetfeld

Um dieses Problem zu lösen, muss zunächst das zum Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  gehörende magnetische Moment  $\vec{\mu}$  der Elektronenhülle errechnet werden. Es setzt sich vektoriell aus  $\vec{\mu}_L$  und  $\vec{\mu}_S$  zusammen:

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$$

Die Richtungen von  $\vec{\mu}$  und  $\vec{J}$  fallen im allgemeinen nicht zusammen. Es existieren daher eine zu  $\vec{J}$  parallele Komponente  $\mu_{||}$  und eine dazu senkrechte  $\mu_{\perp}$ . Die Quantenmechanik kann nun zeigen, dass der Erwartungswert der Komponente  $\mu_{\perp}$  verschwindet.<sup>1</sup> Für den Betrag von  $\vec{\mu}$  ergibt sich gemäß der in V606, Kap. 2 durchgeführten Rechnung unter Benutzung der Gleichungen (7), (8), (9) (10) und (11)

$$|\vec{\mu}_J| \approx \mu_B \sqrt{J(J+1)} \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

oder

$$(12) \quad |\vec{\mu}_J| = \mu_B g_J \sqrt{J(J+1)}$$

mit

$$(13) \quad g_J := \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} .$$

Die durch (13) definierte Größe nennt man den **Landé-Faktor** des betreffenden Atoms. Für die weiteren Rechenschritte ist wiederum ein Resultat der Quantenmechanik zu berücksichtigen, und zwar die sogenannte **Richtungsquantelung**. Sie besagt, dass nach Einschalten eines äußeren Magnetfeldes  $\vec{B}$  nur solche Winkel zwischen  $\vec{\mu}$  und  $\vec{B}$  auftreten können, bei denen die Komponente  $\mu_{J_z}$  in Feldrichtung ein ganzzahliges Vielfaches von  $g_J \mu_B$  darstellt. Man drückt diesen Tatbestand aus durch

$$(14) \quad \mu_{J_z} = -m g_J \mu_B ,$$

hierin bedeutet die ganzzahlige Größe  $m$  die sogenannte **Orientierungsquantenzahl**. Da eine Komponente eines Vektors nie größer sein Betrag ist, kann  $m$  gemäß (14) nur die Werte

$$-J, -J+1, \dots, 0, 1, \dots, J$$

<sup>1</sup> Klassisch gesehen führt das mit dem Drehimpuls  $\vec{J}$  gekoppelte  $\vec{\mu}$  eine Präzessionsbewegung um die von außen vorgegebene Feldrichtung aus. Daher verschwindet  $\mu_{\perp}$  im zeitlichen Mittel.

annehmen. Es gibt also genau  $2J + 1$  Einstellmöglichkeiten eines atomaren magnetischen Momentes relativ zu einer äußeren Feldrichtung.

Man ist jetzt in der Lage, die Zusatzenergie  $E_{\text{mag}}$  zu berechnen, die ein Moment  $\vec{\mu}$  im äußeren Feld  $\vec{B}$  erhält. Allgemein gilt

$$E_{\text{mag}} = -\vec{\mu}_J \cdot \vec{B}$$

Mit (14) folgt daraus

$$(15) \quad E_{\text{mag}} = m g_J \mu_B \quad \text{für } -J \leq m \leq +J \quad .$$

Das bedeutet: Das Energieniveau  $E_0$  eines Atoms im feldfreien Raum spaltet bei  $B \neq 0$  gemäß (15) in  $2J + 1$  äquidistante Niveaus auf. In Abb.2 ist diese Aufspaltung für das Beispiel  $J=2$  dargestellt.

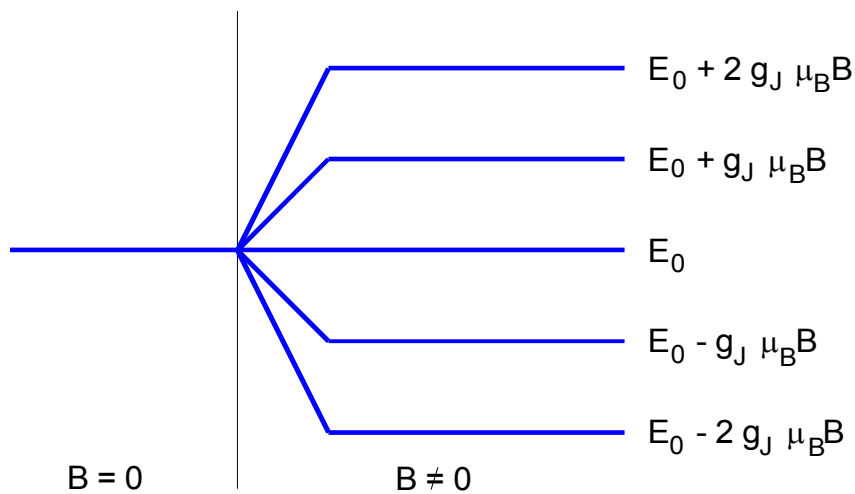


Abb. 2: Aufspaltung eines Energieniveaus eines Atoms mit der Gesamtdrehimpulsquantenzahl  $J = 2$

Die Aufspaltung tritt natürlich auch bei angeregten Zuständen auf. Es ist daher zu erwarten, dass bei eingeschaltetem Feld zusätzliche Übergänge zwischen den neu entstandenen Energieniveaus auftreten. Eine zuvor einfache Spektrallinie wird daher in mehrere Linien aufspalten. Diese Erscheinung wird, wie zuvor in Kap.1 erwähnt, als Zeeman-Effekt bezeichnet.

Die Anzahl der neu entstehenden Linien hängt davon ab, zwischen welchen Energieniveaus Übergänge möglich sind. Das wird durch die sogenannten Auswahlregeln festgelegt, welche Gegenstand des folgenden Kapitels sein sollen.

## 5. Auswahlregeln für Übergänge zwischen zeemanaufgespaltenen Energieniveaus

Zur Festlegung der Auswahlregeln geht man zunächst aus von der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$(16) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + U \psi(\vec{r}, t) + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad .$$

Sie möge die Lösungen

$$(17) \quad \psi_{\alpha}(\vec{r}, t) = \psi_{\alpha}(\vec{r}) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} E_{\alpha} t \right\}$$

besitzen, die dem Energieeigenwert  $E_{\alpha}$  zugeordnet ist.  $\psi_{\alpha}$  hängt von den Quantenzahlen  $n_{\alpha}$ ,  $\ell_{\alpha}$ , und  $m_{\alpha}$  ab, was durch den Index  $\alpha$  angedeutet werden soll. Es werde nun noch eine zweite Lösung von (16) betrachtet; sie möge durch die Quantenzahlen  $n_{\beta}$ ,  $\ell_{\beta}$ , und  $m_{\beta}$  gekennzeichnet werden. Der Strahlungsübergang zwischen den durch  $\alpha$  und  $\beta$  gekennzeichneten Zuständen soll im Folgenden näher untersucht werden. Dazu bildet man eine Linearkombination der beiden Lösungen von der Gestalt:

$$\psi_{\text{ges}}(\vec{r}, t) = C_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{r}) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} E_{\alpha} t \right) + C_{\beta} \psi_{\beta}(\vec{r}) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} E_{\beta} t \right)$$

$\psi_{\text{ges}}$  ist bekanntlich ebenfalls eine Lösung von (16). Die Koeffizienten  $C_{\alpha}$  und  $C_{\beta}$  sind durch Normierungsbedingungen festgelegt. Für die Dichteverteilung von  $\psi_{\text{ges}}$  bekommt man dann

$$\begin{aligned} (18) \quad \int \psi_{\text{ges}}^* \psi_{\text{ges}} dV &= \int \left\{ C_{\alpha} \psi_{\alpha}^*(\vec{r}) \exp \left( \frac{i}{\hbar} E_{\alpha} t \right) + C_{\beta} \psi_{\beta}^*(\vec{r}) \exp \left( \frac{i}{\hbar} E_{\beta} t \right) \right\} \cdot \\ &\quad \left\{ C_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{r}) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} E_{\alpha} t \right) + C_{\beta} \psi_{\beta}(\vec{r}) \exp \left( -\frac{i}{\hbar} E_{\beta} t \right) \right\} dV \\ &= \int \left\{ C_{\alpha}^2 \psi_{\alpha}^* \psi_{\alpha} + C_{\beta}^2 \psi_{\beta}^* \psi_{\beta} + C_{\alpha} C_{\beta} \psi_{\alpha}^* \psi_{\beta} \exp \left( \frac{i}{\hbar} (E_{\alpha} - E_{\beta}) t \right) \right. \\ &\quad \left. + C_{\beta} C_{\alpha} \psi_{\beta}^* \psi_{\alpha} \exp \left( -\frac{i}{\hbar} (E_{\alpha} - E_{\beta}) t \right) \right\} dV \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Dichteverteilung (18) eine zeitabhängige Größe ist. Sie beschreibt Schwingungen des Elektrons mit der Frequenz

$$(19) \quad \nu_{\alpha\beta} := \frac{E_{\alpha} - E_{\beta}}{h},$$

welche durch den Energieunterschied der beiden Zustände festgelegt ist.

Um die Intensität der emittierten Strahlung zu berechnen, muss man das elektrische Dipolmoment kennen, das das Elektron bei seiner Schwingung erzeugt. Das Volumenelement  $dV$  besitzt die Ladung

$$-e_0 \psi^* \psi dV$$

und leistet damit zur X-Komponente des Dipolmomentes den Beitrag

$$-e_0 x \psi^* \psi dV,$$

sofern die gesamte positive Ladung im Ursprung des Koordinatensystems lokalisiert ist. Für die Y- und Z-Komponenten gilt entsprechendes. Das gesamte Dipolmoment (in X-Richtung) erhält man durch Integration von (18) über den ganzen Raum

$$\begin{aligned} (20) D_x &= -e_0 \int x \psi_{\text{ges}}^* \psi_{\text{ges}} dV = -e_0 \left\{ C_{\alpha}^2 \int x \psi_{\alpha}^* \psi_{\alpha} dV + C_{\beta}^2 \int x \psi_{\beta}^* \psi_{\beta} dV + \right. \\ &\quad \left. C_{\alpha} C_{\beta} \exp(2\pi i \nu_{\alpha,\beta} t) \int x \psi_{\alpha}^* \psi_{\beta} dV + C_{\beta} C_{\alpha} \exp(-2\pi i \nu_{\alpha,\beta} t) \int x \psi_{\beta}^* \psi_{\alpha} dV \right\} \end{aligned}$$

Da  $\psi_\alpha^* \psi_\alpha$  und  $\psi_\beta^* \psi_\beta$  bezüglich  $x$  gerade Funktionen sind, müssen die Integranden  $x \psi_\alpha^* \psi_\alpha$  und  $x \psi_\beta^* \psi_\beta$  ungerade Funktionen sein. Daher verschwinden diese Integrale in (20) bei der Integration von  $-\infty$  bis  $+\infty$ . Die übriggebleibenden Summanden verhalten sich abgesehen von den Faktoren  $C_\alpha$  und  $C_\beta$  konjugiert komplex zu einander, sodass sich (20) auch schreiben lässt.

$$(21) \quad D_x = -e_0 \text{ const } 2 \Re \left( \int x \psi_\beta^* \psi_\alpha dV \exp(2\pi i \nu_{\alpha,\beta} t) \right) .$$

Gleichung (21) beschreibt die  $x$ -Komponente eines beliebig im Raum orientierten Dipols. Dieser schwingt mit der durch (19) gegebenen Frequenz  $\nu_{\alpha\beta}$  und strahlt dabei Quanten entsprechender Energie ab. Für die beiden anderen Raumrichtungen lassen sich analoge Gleichungen für  $D_y$  und  $D_z$  formulieren. Die darin auftretenden Integrale

$$x_{\alpha\beta} := \int x \psi_\alpha^* \psi_\beta dV ,$$

$$y_{\alpha\beta} := \int y \psi_\alpha^* \psi_\beta dV$$

und

$$z_{\alpha\beta} := \int z \psi_\alpha^* \psi_\beta dV$$

stellen dann die sogenannten Matrixelemente dar, die für die Berechnung der Strahlungsemission über den Poynting-Vektor  $\vec{S}_{\alpha\beta}$  eine entscheidende Rolle spielen. Es gilt nämlich

$$(22) \quad |\vec{S}_{\alpha\beta}| \sim \left\{ |x_{\alpha\beta}|^2 + |y_{\alpha\beta}|^2 + |z_{\alpha\beta}|^2 \right\} \sin^2 \gamma .$$

( $\gamma$  = Winkel zwischen Dipolmoment und Ausbreitungsrichtung der Strahlung)

Sie sollen im Folgenden berechnet werden. Für die Wellenfunktion des Atoms im Magnetfeld werde wie in V505, Kap.2 der Ansatz

$$(23) \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} R(r) \theta(\vartheta) e^{im\varphi}$$

gemacht. Das Magnetfeld  $\vec{B}$  möge die Richtung der  $Z$ -Achse haben, dann gilt

$$(24) \quad z = r \cos \vartheta ,$$

und für  $z_{\alpha\beta}$  folgt aus (23) und (24) nach Integration über den gesamten Raum unter Berücksichtigung von

$$dV = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$(25) \quad z_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int z \psi_\alpha^* \psi_\beta dV = \int_0^\infty R_\alpha(r) R_\beta(r) r^3 dr \int_0^\pi \theta_\alpha \theta_\beta \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} e^{i(m_\beta - m_\alpha)\varphi} d\varphi .$$

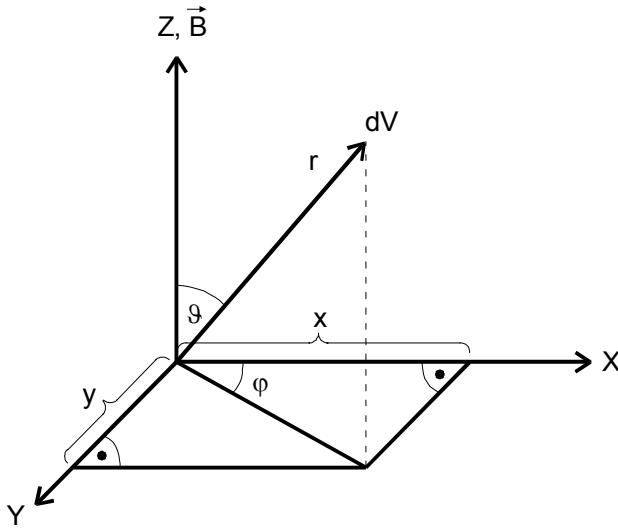


Abb.3: Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  und den Polarkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$

Wegen des dritten Integrals in (25) verschwindet  $z_{\alpha\beta}$  außer, wenn

$$m_{\alpha} = m_{\beta}$$

ist. Es folgt also die Auswahlregel, dass die Orientierungsquantenzahlen der beteiligten Zustände  $E_{\alpha}$  und  $E_{\beta}$  gleich sein müssen, wenn das Dipolmoment eine Komponente in Feldrichtung besitzen soll, die mit der Frequenz  $\nu_{\alpha\beta}$  schwingt.

Für die beiden anderen Matrixelemente ergeben sich wegen der aus Abb.3 zu entnehmenden Beziehungen

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

und

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

die Ausdrücke

$$x_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} R_{\alpha} R_{\beta} r^3 dr \int_0^{\pi} \theta_{\alpha} \theta_{\beta} \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} e^{i(m_{\beta} - m_{\alpha})\varphi} \cos \varphi d\varphi$$

und

$$y_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} R_{\alpha} R_{\beta} r^3 dr \int_0^{\pi} \theta_{\alpha} \theta_{\beta} \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} e^{i(m_{\beta} - m_{\alpha})\varphi} \sin \varphi d\varphi .$$

Daraus erhält man

$$(26) \quad x_{\alpha\beta} + i y_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} R_{\alpha} R_{\beta} r^3 dr \int_0^{\pi} \theta_{\alpha} \theta_{\beta} \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} e^{i(m_{\beta} - m_{\alpha} + 1)\varphi} d\varphi$$

und

$$(27) \quad x_{\alpha\beta} - i y_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} R_{\alpha} R_{\beta} r^3 dr \int_0^{\pi} \theta_{\alpha} \theta_{\beta} \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} e^{i(m_{\beta} - m_{\alpha} - 1)\varphi} d\varphi .$$

Die Ausdrücke (26) und (27) verschwinden nur dann nicht, wenn

$$m_{\beta} = m_{\alpha} + 1$$

oder

$$m_{\beta} = m_{\alpha} - 1$$



ist. Zusammenfassend kann man sagen, dass beim Zeeman-Effekt nur dann Spektrallinien emittiert werden, wenn sich die Orientierungsquantenzahlen  $m_\alpha$  und  $m_\beta$  der zum Übergang gehörenden Energieniveaus entweder gar nicht oder um  $\pm 1$  unterscheiden.

Die Eigenschaften der bei  $\Delta m = 0$ ,  $+1$  und  $-1$  emittierten Strahlung sollen nun untersucht werden. Aus (25), (26) und (27) geht hervor, dass bei  $\Delta m = 0$  nur das Matrixelement  $z_{\alpha\beta}$  von 0 verschieden ist. Die Richtung des schwingenden Dipols ist somit parallel zur Magnetfeldrichtung. Aufgrund der Winkelabhängigkeit der Strahlungsintensität (22) strahlt dieser Dipol nicht in Feldrichtung. Seine stärkste Emission ist senkrecht zur Feldrichtung. Das bedeutet: die emittierte Strahlung ist bei  $\Delta m = 0$  linear-polarisiert und zwar parallel zu  $\vec{B}$ .

Im Falle  $\Delta m = -1$  (d.h.  $m_\beta = m_\alpha + 1$ ) sind

$$(28) \quad z_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{und} \quad x_{\alpha\beta} = -i y_{\alpha\beta} \neq 0$$

Da sich die negative imaginäre Einheit darstellen lässt als

$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

folgt aus (28), dass  $x_{\alpha\beta}$  und  $y_{\alpha\beta}$  dem Betrage nach gleich, jedoch in der Phase um  $\frac{\pi}{2}$  verschoben sind. Bei  $\Delta m = -1$  erzeugt also der Dipol eine um die Z-Achse zirkularpolarisierte Schwingung. Entsprechende Ergebnisse bekommt man auch für den Fall  $\Delta m = +1$ . Hier ist

$$z_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{und} \quad x_{\alpha\beta} = i y_{\alpha\beta} \quad .$$

Es tritt ebenfalls eine zirkular-polarisierte Schwingung auf jedoch mit entgegengesetzter Drehrichtung.

## 6. Der normale Zeeman-Effekt

Mit diesen Überlegungen ist man jetzt in der Lage, die Aufspaltung der Spektrallinien und deren Polarisation darzustellen. Einschränkend muss jedoch bemerkt werden, dass in der Ausgangsgleichung (16) der Elektronenspin nicht vorkommt. Die Ergebnisse gelten also zunächst nur für den Fall  $S = 0$ . Man bezeichnet diesen Spezialfall, bei dem besonders einfache Verhältnisse vorliegen, als **normalen Zeeman-Effekt**. Es ist nämlich, wie aus (13) hervorgeht, bei  $S = 0$  für alle  $J$ :  $g_j = 1$ . Das bedeutet, dass die Verschiebung der Energieniveaus gemäß (15) unabhängig von den Quantenzahlen ist. Es gilt für alle  $L$  und  $J$

$$(29) \quad \Delta E = m \mu_B B \quad \text{für} \quad -J \leq m \leq J.$$

In Abb.4 sind die Aufspaltung und die Emissionslinien mit ihrer Polarisation am Beispiel  $J = 1$  und  $J = 2$  dargestellt.

Es treten insgesamt 3 Liniengruppen auf, die den Übergängen mit  $\Delta m = -1$ ,  $\Delta m = 0$  und  $\Delta m = +1$  zuzuordnen sind. Die Energiedifferenzen sind wegen (29) innerhalb einer Gruppe mit konstantem  $\Delta m$  alle gleich. Man beobachtet daher beim normalen Zeeman-Effekt grundsätzlich eine Aufspaltung der Spektrallinien in 3 Komponenten ("**Zeeman-**

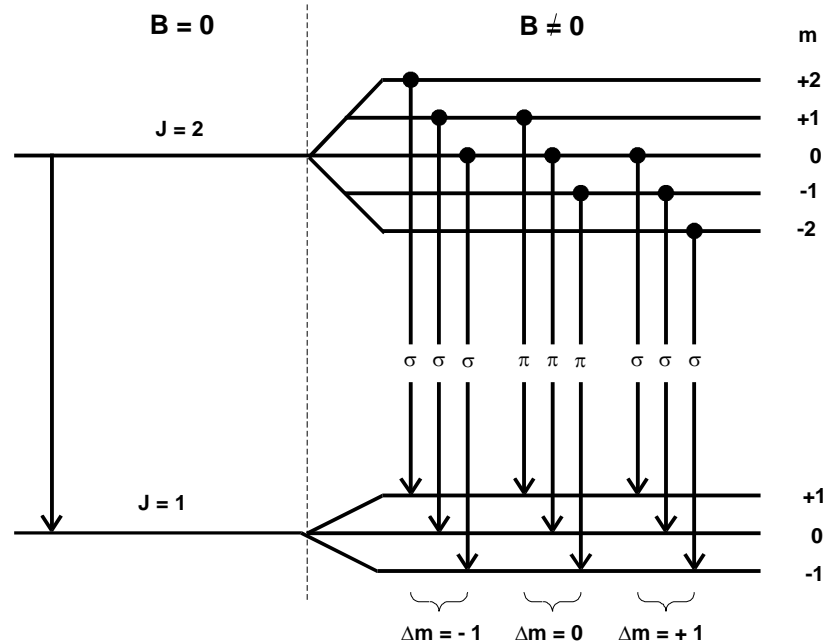


Abb. 4: Aufspaltung und Polarisation der Spektrallinien beim normalen Zeeman-Effekt ( $S = 0$ )

**Triplet**). Wegen der Polarisation der emittierten Strahlung kann man die Linien jedoch nicht in jeder Beobachtungsrichtung erkennen. Die Linie mit  $\Delta m = 0$  ändert beim normalen Zeeman-Effekt ihre Energie gegenüber dem feldfreien Fall nicht. Sie ist nach den Ergebnissen des vorherigen Kapitels linear in Feldrichtung polarisiert und wird deshalb als  $\pi$ -Komponente bezeichnet. Man sieht sie nur dann mit voller Intensität, wenn man senkrecht zur Feldrichtung ("transversal") beobachtet. Blickt man in Feldrichtung auf die Lichtquelle ("longitudinal"), ist diese Strahlung verschwunden. Die beiden Linien mit  $\Delta m \pm 1$  unterscheiden sich in ihrer Energie um jeweils  $\mu_B B$  von der unverschobenen. Sie sind beide um die Feldachse zirkular polarisiert und erscheinen daher bei transversaler Beobachtung linear polarisiert. Man bezeichnet sie als  $\sigma$ -Komponenten. Man sieht daher beim normalen Zeeman-Effekt folgendes Aufspaltungsbild:

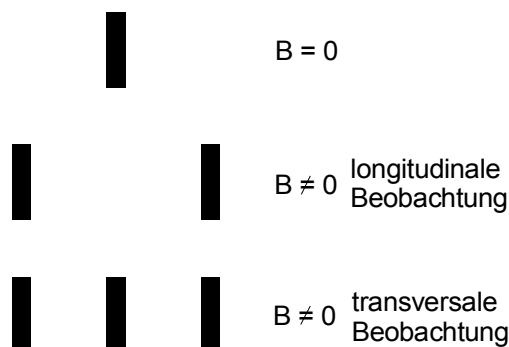


Abb. 5: Aufspaltungsbild einer Spektrallinie beim normalen Zeeman-Effekt

## 7. Der anomale Zeeman-Effekt

Unter dem anomalen Zeeman-Effekt versteht man die Aufspaltung von Spektrallinien im Magnetfeld, bei denen Terme mit  $S \neq 0$  beteiligt sind. Die Bezeichnung ist historisch zu verstehen; denn der anomale Zeeman-Effekt tritt weitaus häufiger als der normale auf. Man kann mit Hilfe der spinabhängigen Schrödinger-Gleichung zeigen, dass die

Auswahlregeln  $\Delta m = 0, \pm 1$  auch beim Gesamtspin  $S \neq 0$  gültig sind. Die aufwendige Rechnung soll hier nicht durchgeführt werden. Bei einem Übergang zwischen den Termen mit den Quantenzahlen  $L_1, S_1, J_1, m_1$  sowie  $L_2, S_2, J_2$  und  $m_2$  wird jetzt eine Spektrallinie mit der Energie

$$E = \{m_1 g(L_1, S_1, J_1) - m_2 g(L_2, S_2, J_2)\} \mu_B B + E_0$$

emittiert ( $E_0$  Energie bei  $B=0$ ). Da  $g$  hier von  $L, S$  und  $J$  abhängt, wird die Aufspaltung linienreicher. In Abb.6 ist dazu ein Beispiel, und zwar die Aufspaltung eines Alkali-Dubletts (Näheres siehe V605), dargestellt.

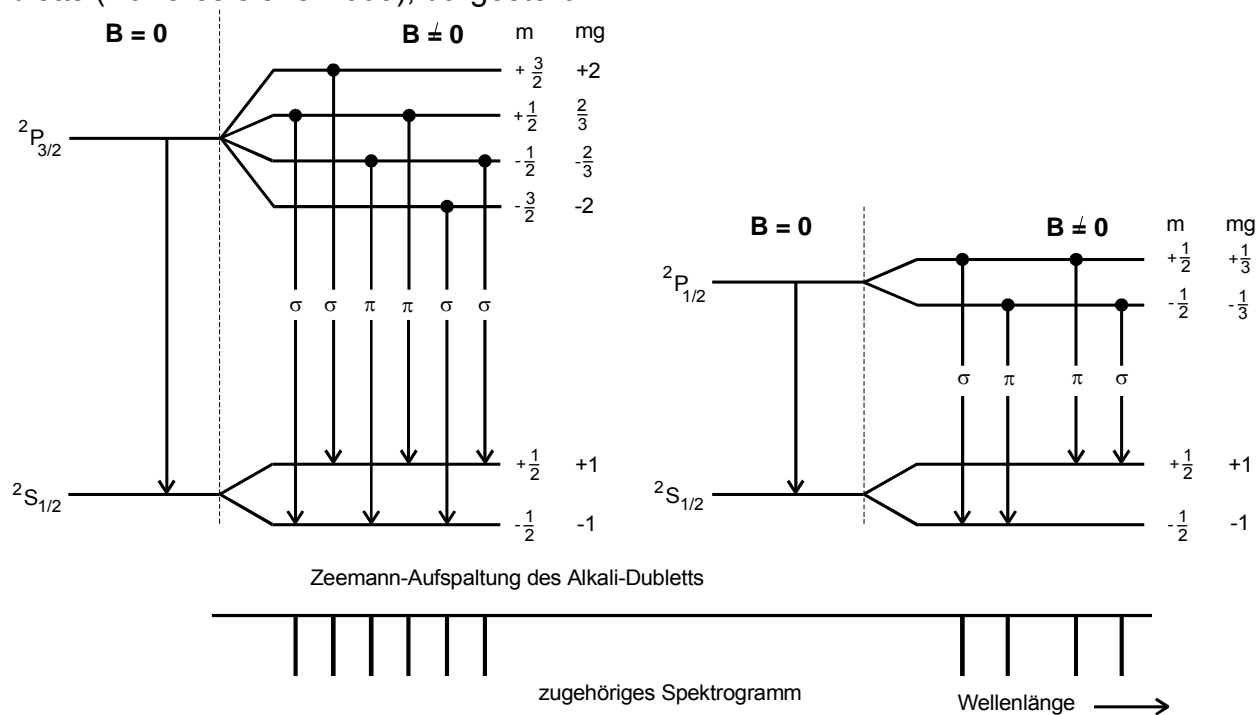


Abb.6: Beispiel einer Linienaufspaltung beim anomalen Zeeman-Effekt. Dargestellt ist die Aufspaltung eines Alkali-Dubletts

## 8. Experimenteller Aufbau

Der normale und der anomale Zeemann-Effekt sollen mit der roten (normaler) und der blauen (anomaler) Linie einer Cd-Lampe beobachtet und ausgewertet werden. Hierzu wird eine Cd-Lampe zwischen die Polschuhe eines Elektromagneten gebracht. Transversal zum Magnetfeld werden die Emissionslinien der Cd-Lampe kollimiert und nach ihrer Wellenlänge von einem Gradsichtprisma separiert. Anschließend wird der zu untersuchende Übergang durch einen Polarisationsfilter und einen Spalt nach Wellenlänge und Polarisationsrichtung ausgewählt und auf die Eintrittsfläche einer Lummer-Gehrcke-Platte abgebildet. Das von der Lummer-Gehrcke-Platte erzeugte Interferenzmuster wird mit einer Digitalkamera aufgenommen.

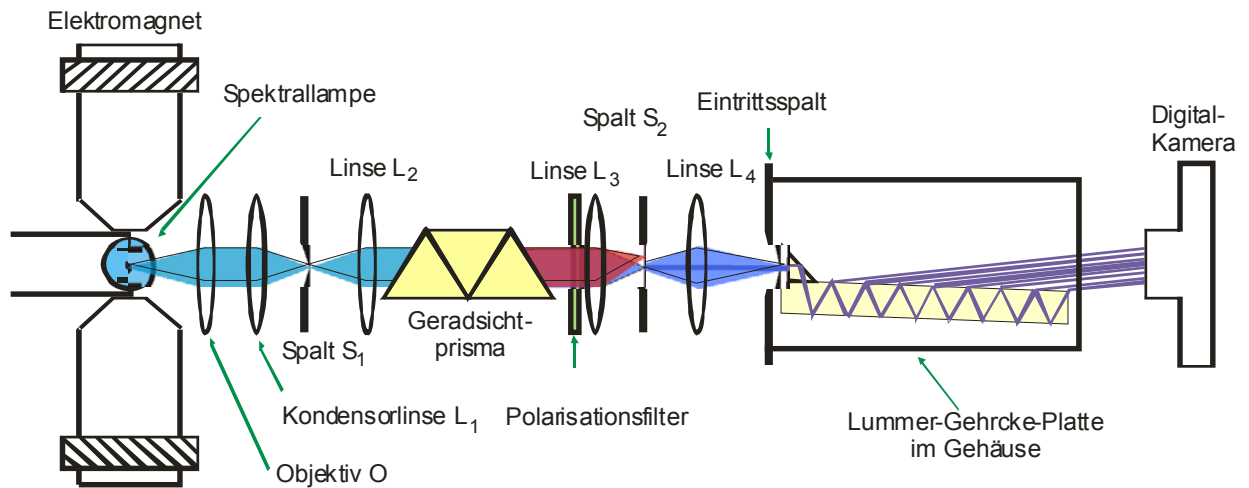


Abb.7: Schematischer Aufbau der Messapparatur

Die Lummer-Gehrcke-Platte benutzt die Interferenz an planparallelen Platten, um ein hohes Auflösungsvermögen ( $10^5$ ) zu erzielen. Über ein Prisma wird das parallel einfallende Licht innerhalb der planparallelen Platte reflektiert. Bei jeder Reflektion tritt ein geringer Teil der Strahlung aus dem Glas aus und kann mit einem anderen Strahlenbündel interferieren, wobei die Bedingung für konstruktive Interferenz

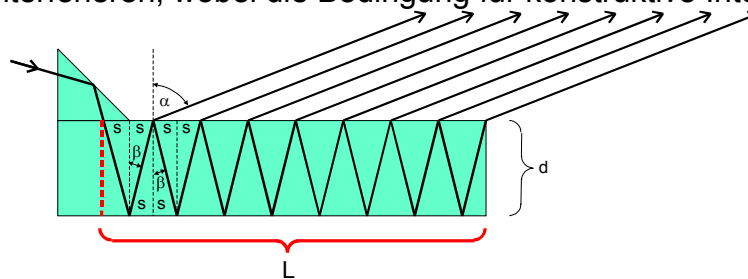


Abb.8: Strahlengang in der Lummer-Gehrcke-Platte

$$2 \cdot d \cdot \cos \theta = n \cdot \lambda$$

durch die Dicke  $d$  der Platte und die eingestrahltene Wellenlänge  $\lambda$  bestimmt wird. Bei monochromatischem Licht, erzeugt die Lummer-Gehrcke Platte Interferenzstreifen, deren Gangunterschied genau die eingestrahlte Wellenlänge  $\lambda$  ist. Bei eingeschaltetem Magnetfeld verändert sich die Wellenlänge um  $\delta\lambda$  und damit verschieben sich die Interferenzstreifen um  $\delta s$ .

Um sich nicht zu überlagern, dürfen zwei Wellenlängen maximal eine Wellenlängendifferenz

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda^2}{2 \cdot d} \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2 - 1}}$$

besitzen (Dispersionsgebiet). Das Auflösungsvermögen  $A$  der Lummer-Gehrcke-Platte hängt von ihrer Länge  $L$ , dem Brechungsindex  $n$  und der Wellenlänge des verwendeten Lichtes

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{L}{\lambda} (n^2 - 1)$$

ab.

## 10. Vorbereitung

- Stellen sie das Termschema für die rote ( $^1P_1 \leftrightarrow ^1D_2$ ) und blaue ( $^3S_1 \leftrightarrow ^3P_1$ ) Linie der Cd-Lampe auf. Berechnen Sie die Landé-Faktoren  $g_i$  und die Aufspaltung  $\Delta E$  der Zeeman-Linien.
- Berechnen Sie für  $\lambda = 643.8 \text{ nm}$  und  $\lambda = 480.0 \text{ nm}$  das Dispersionsgebiet  $\Delta\lambda$  und das Auflösungsvermögen  $A$  der Lummer-Gehrcke-Platte ( $d = 4 \text{ mm}$ ,  $L = 120 \text{ mm}$ ,  $n(644 \text{ nm}) = 1.4567$ ,  $n(480 \text{ nm}) = 1.4635$ ).

## 11. Aufgaben

- Eichen sie den Elektromagneten. Messen sie hierzu das B-Feld in Abhängigkeit vom Feldstrom.
- Messen sie die Wellenlängenaufspaltung für verschiedene Ordnungen der roten ( $\lambda = 643,8 \text{ nm}$ ) und der blauen ( $\lambda = 480,0 \text{ nm}$ ) Spektrallinie des Cd-Spektrums für ein geeignetes Magnetfeld  $B$ .
- Berechnen sie aus  $\Delta\lambda$  und  $B$  die Landé-Faktoren  $g_{ij}$  und vergleiche sie diese mit den berechneten Ergebnissen.

## 12. Versuchsdurchführung

Das Experiment wird gemäß Abb. 7 aufgebaut, dabei darf das Gradsichtprisma und die Lummer-Gehrcke-Platte nicht aus ihrer Halterung genommen werden. Gehen sie wie folgt vor:

- Bilden sie die Cd-Lampe mit einem Objektiv und einer Linse ( $L_1$ ) scharf auf den Spalt  $S_1$  ab.
- Justieren sie die Linse  $L_2$  so ein, dass ein möglichst paralleles Lichtbündel auf das Gradsichtprisma (GP) fällt. Um Strahlungsverluste zu vermeiden, darf der Durchmesser des Lichtbündels nicht größer als das Prisma sein.
- Mit der Linse  $L_3$  wird ein scharfes Bild auf den Spalt  $S_2$  abgebildet. Mit diesem kann jetzt eine Wellenlänge aus dem Spektrum der Cd-Lampe gewählt werden. Tipp: Fangen sie mit der roten Cd-Linie an.
- Mit der Linse  $L_4$  müssen sie ein scharfes Bild auf die Lummer-Gehrcke-Platte (LG) abbilden. Achten sie darauf, daß das Bild die Größe des Eintritts-Prismas an der LG-Platte hat.
- Stellen sie nun den Polarisator in den Strahlengang. Je nach Stellung des Polarisators wird der Übergang  $\Delta m = \pm 1, 0$  ausgeblendet.
- Vergewissern sie sich durch einen Blick durch die LG-Platte, dass sie durch Einschalten des B-Feldes eine Aufspaltung der Zeeman-Linien erkennen (Abb.9).
- Stellen sie die Digital-Kamera ans Ende des Strahlenganges, und nehmen sie die Aufspaltung der Spektrallinie für ein geeignetes B-Feld auf. Die Bilder können als \*.jpg ausgelesen werden. Tipp: Nehmen sie mehrere Bilder mit unterschiedlicher Belichtungszeit auf.
- Verfahren sie mit der blauen Linie der Cd-Lampe analog. Hierzu ist eine neue Justierung ab 3. nötig.
- Nehmen sie die Zeeman-Aufspaltung sowohl für die  $\pi$ - als auch die  $\sigma$ -Linie auf.

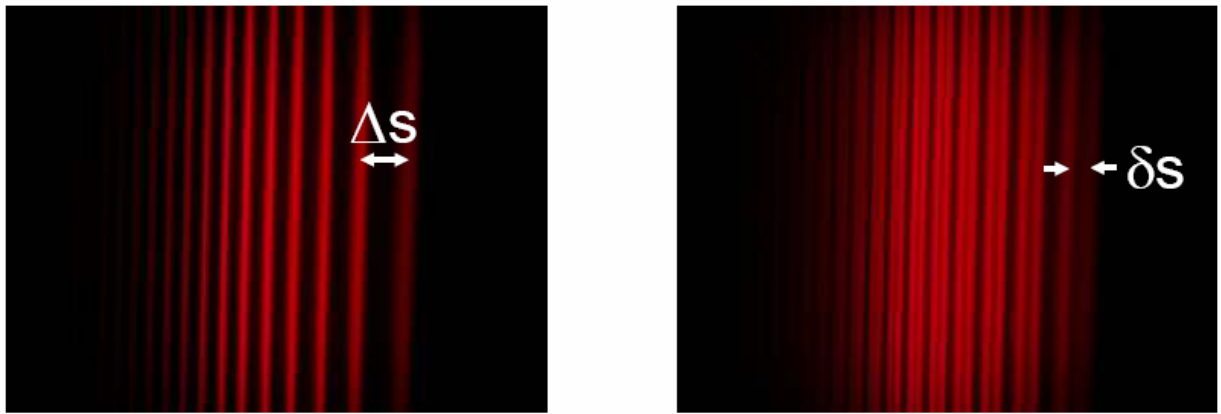


Abb.9: Zeeman-Aufspaltung ohne und mit Magnetfeld

**Es wird darauf hingewiesen, dass man den Feldstrom des Elektromagneten niemals abrupt abschalten darf sondern ihn langsam herunterregeln muss**, da sonst durch die dabei auftretenden hohen Induktionsspannungen die Streuerelektronik zerstört wird.

### 11. Auswertung

Bestimmen sie das Dispersionsgebiet  $\Delta\lambda_D$  der Lummer-Gehrcke-Platte und die Wellenlängenänderung  $\delta\lambda$  der Interferenzspektren für mehrere Ordnungen  $n$  als Verschiebung  $\Delta s$  bzw.  $\delta s$  aus (Abb.9). Die Verschiebung

$$\delta\lambda = \frac{1}{2} \frac{\delta s}{\Delta s} \cdot \Delta\lambda_D$$

in der Wellenlänge entspricht dabei einer Verschiebung der Frequenz  $\Delta\nu$ . Wiederholen sie dieses für mindestens 10-12 Ordnungen und mitteln sie über die erhaltenen Werte (Fußnote: Sie werden bemerken, dass  $\delta\lambda$  nicht linear mit der Ordnung  $n$  geht). Berechnen sie aus der Zeeman-Aufspaltung den Landeschen- Faktor  $g$  und vergleichen sie ihn mit der Theorie. Beachten Sie, dass  $\Delta E$  nicht linear mit  $\lambda$  geht. Bilden Sie hierzu die Ableitung  $\frac{\partial E}{\partial \lambda}$  und setzen diese ein.

### 12. Literaturhinweise

Bergmann Schäfer, Lehrbuch d. Experimentalphysik, Bd.IV, Walter de Gruyter, 1992  
 H. Haken und H.C. Wolf, Atom und Quantenphysik, Springer Berlin 1980  
 O. Lummer, E. Gehrcke, Annalen der Physik, Bd. 10, S457 (1903)