

# Diskrétní matematika

## Projekt 1

Příklad	Poznámky
1	
2	

# 1 Kombinatorika

Babička peče sušenky. Když se je pokusila vyskládat na plech v řadách po čtyřech kusech, tak jí nějaké zbyly. Když se je pokusila vyskládat na plech v řadách po pěti kusech, tak jí jich zbylo dvakrát tolik. Babička si poté všimla, že pokud připeče šest sušenek navíc, tak jí ani v jednom z předchozích vyskládání nezbude žádná sušenka navíc.

- a) Najděte všechna přípustná množství sušenek, které odpovídají zadání.
- b) Kolik sušenek mohla mít původně napečených, pokud víme, že těsta měla maximálně na 50.
- c) Kolik nejméně jich mohlo původně při vyskládání po čtyřech zbýt?

---

## Poznámky:

*Úlohu řešte jako soustavu kongruencí.*

V textu je zmíněno, že *babička peče sušenky*, tedy budeme počítat, že jich je více než 0.

Po vyskládání původního množství po 4 sušenkách jí zbylo neznámo sušenek:

$$s \equiv X \pmod{4}$$

Po vyskládání původního množství po 5 sušenkách jí zbylo 2x tolik sušenek:

$$s \equiv 2X \pmod{5}$$

Když připeče 6 navíc, v obou situacích ji nebude přebývat žádná sušenka:

$$s + 6 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$s + 6 \equiv 0 \pmod{5}$$

**Výpočet a)**

Najděte všechna přípustná množství sušenek, které odpovídají zadání.

$$s + 6 \equiv 0 \pmod{4} \quad / - 6$$

$$s + 6 \equiv 0 \pmod{5} \quad / - 6$$

$$s \equiv -6 \pmod{4} \Rightarrow s \equiv 4n - 6 \quad / \text{ toto následně dosadíme do } s \equiv -6 \pmod{5}$$

$$s \equiv -6 \pmod{5}$$

$$4n - 6 \equiv -6 \pmod{5}$$

$$4n \equiv 0 \pmod{5} \quad / \text{ přičteme mod}$$

$$4n \equiv 5 \pmod{5} \quad / \text{ přičteme mod}$$

$$4n \equiv 10 \pmod{5} \quad / \text{ přičteme mod}$$

$$4n \equiv 15 \pmod{5} \quad / \text{ přičteme mod}$$

$$4n \equiv 20 \pmod{5}$$

$$n \equiv 5 \pmod{5}$$

$$n = 5m + 5 \quad / \text{ toto dosadíme do rovnice } s \equiv 4n - 6$$

$$s \equiv 4 * (5m + 5) - 6$$

$$s \equiv 20m + 14$$

**Výpočet b)**

Kolik sušenek mohla mít původně napečených, pokud víme, že těsta měla maximálně na 50.

Abychom dostali konkrétní čísla, musíme za  $m$  dosadit  $\mathbb{N}_0$

$$20 * 0 + 14 = 14 \quad (\text{výsledek 1})$$

$$20 * 1 + 14 = 34 \quad (\text{výsledek 2})$$

Další výpočty by už přesahovali množství 50 sušenek.

**Možné množství sušenek je tedy 14 a 34.**

**Výpočet c)**

*Kolik nejméně jich mohlo původně při vyskládání po čtyřech zbýt?*

Z výpočtu, kdy se vždy k dělitelnému násobku 20 přičte 14 a zbytek po dělení 14 číslem 4 je 2, plyne, že nejméně mohly zbýt **2** sušenky po původním vykládání.

## 2 Teorie grafů

Mějme libovolný souvislý graf se stupňovou posloupností  $(3,3,2,2,2,2,2,2,2)$ , o kterém navíc víme, že mezi každou dvojicí vrcholů ve vzdálenosti 3 a více existuje právě jedna cesta.

- a) Může být takový graf hamiltonovský? Pokud ano, nakreslete jej. Pokud ne, pečlivě zdůvodněte proč.  
b) Nakreslete graf se stejnou stupňovou posloupností, který Hamiltonovský je.

---

**Zadání a)**

*Může být takový graf hamiltonovský? Pokud ano, nakreslete jej. Pokud ne, pečlivě zdůvodněte proč.*

Podmínka hamiltonovského grafu zní: *graf musí mít takovou strukturu, ve které existuje cesta, která prochází všemi vrcholy grafu právě jednou, aniž by se vrátila do vrcholu, kde začala (hamiltonovský cyklus).*

Vzhledem k zadání, kdy je podmínkou, že *mezi každou dvojicí vrcholů ve vzdálenosti 3 a více existuje právě jedna cesta*, není možné vytvořit v zadaném grafu hamiltonovský cyklus, protože se cesta *vrací* do prvního vrcholu a to znamená, že do něj musí vést více než 1 cesta.

**Zadání b)**