Statistik Formelsammlung

Katharina Ring

31. März 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Deskriptive Statistik

1.1 Kenngrößen (Parameter): Stichprobe

1.1.1 Lagemaße

Modus Häufigster Wert von x_i. Auch zwei oder mehr Modi sind möglich (bimodal).

Median

$$\tilde{x}_{0.5} = \begin{cases} x_{((n+1)/2)} & \text{falls n ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)} & \text{falls n gerade} \end{cases}$$

Quantile

$$\tilde{x}_\alpha = \begin{cases} x_{(k)} & \text{falls n}\alpha \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{(n\alpha)} + x_{(n\alpha+1)}) & \text{falls n}\alpha \text{ ganzzahlig} \end{cases}$$

mit

k=min x $\in \mathbb{N}$, x > nα

Minimum/Maximum

$$x_{\min} = \min_{i\in\{1,\dots,N\}}(x_i) \qquad x_{\max} = \max_{i\in\{1,\dots,N\}}(x_i)$$

Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Schätzer für den Erwartungswert $\mu = E[X]$
(erstes Verteilungsmoment)
Rechenregeln:

- $E(a + b \cdot X) = a + b \cdot E(X)$
- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

Geometrisches Mittel

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Für Wachstumsfaktoren: $\bar{x}_G = \sqrt[n]{\frac{B_n}{B_0}}$

Harmonisches Mittel

$$\bar{x}_H = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i}}$$

1.1.2 Streuungsmaße

Spannweite

$$R = x_{(n)} - x_{(1)}$$

Quartilsabstand

$$d_Q = \tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25}$$

(Empirische) Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

Schätzer für das zweite zentrierte Moment, inkl. Varianzverschiebungssatz
Rechenregeln:

- $Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$
- $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$

(Empirische) Standardabweichung

$$s = \sqrt{s^2}$$

Variationskoeffizient

$$\nu = \frac{s}{\bar{x}}$$

Mittlere absolute Abweichung

$$e = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$$

Schätzer für das erste absolute zentrierte Moment

1.1.3 Konzentrationsmaße

Gini-Koeffizient

$$G = \frac{2\sum_{i=1}^{n} i x_{(i)} - (n+1)\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}}{n\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}} = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_{i-1} + v_i)$$

mit

$$u_i = \frac{i}{n}, \quad v_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} x_{(j)}}{\sum_{j=1}^{i} x_{(j)}} \qquad (u_0 = 0, \quad v_0 = 0)$$

Dies sind auch die Werte für die Lorenzkurve.

Wertebereich: $0 \le G \le \frac{n-1}{n}$

Lorenz-Münzner-Koeffizient (G normiert)

$$G^+ = \frac{n}{n-1}G$$

Wertebereich: $0 \leq G^+ \leq 1$

1.1.4 Gestaltmaße

(Empirische) Schiefe

$$\nu = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3$$

Schätzer für das dritte zentrierte Moment, normiert durch $(\sigma^2)^{\frac{2}{3}}$

(Empirische) Wölbung/Kurtosis

$$k = \left[n(n+1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4 - 3(n-1) \right] \cdot \frac{n-1}{(n-2)(n-3)} + 3$$

Schätzer für das vierte zentrierte Moment, normiert durch $(\sigma^2)^2$

Exzess

$$\gamma = k - 3$$

1.1.5 Zusammenhangsmaße

Für zwei nominale Variablen

χ^2-Statistik

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i+}n_{+j}}{n})^2}{\frac{n_{i+}n_{+j}}{n}} = n \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{n_{ij}^2}{n_{i+}n_{+j}} - 1 \right)$$

Wertebereich: $0 \leq \chi^2 \leq n(\min(k,l) - 1)$

Phi-Koeffizient

$$\Phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

Wertebereich: $0 \leq \Phi \leq \sqrt{\min(k,l) - 1}$

Cramérs V

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{\min(k,l) - 1}}$$

Wertebereich: $0 \leq V \leq 1$

Kontingenzkoeffizient C

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

Wertebereich: $0 \leq C \leq \sqrt{\frac{\min(k,l)-1}{\min(k,l)}}$

Korrigierter Kontingenzkoeffizient C_{korr}

$$C_{korr} = \sqrt{\frac{\min(k,l)}{\min(k,l) - 1}} \cdot \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

Wertebereich: $0 \leq C_{korr} \leq 1$

Odds-Ratio

$$OR = \frac{ad}{bc} = \frac{n_{ii}n_{jj}}{n_{ij}n_{ji}}$$

Wertebereich: $0 \leq OR < \infty$

Für zwei ordinale Variablen

Gamma nach Goodman und Kruskal

$$\gamma = \frac{K - D}{K + D}$$

$K = \sum_{i<m} \sum_{j<n} n_{ij}n_{mn}$ Anzahl konkordanter Paare
$D = \sum_{i<m} \sum_{j>n} n_{ij}n_{mn}$ Anzahl diskordanter Paare

Wertebereich: $-1 \leq \gamma \leq 1$

Kendalls τ_b

$$\tau_b = \frac{K - D}{\sqrt{(K + D + T_X)(K + D + T_Y)}}$$

mit
$T_X = \sum_{i=m} \sum_{j<n} n_{ij}n_{mn}$ Anzahl Bindungen bzgl. X
$T_Y = \sum_{i<m} \sum_{j=n} n_{ij}n_{mn}$ Anzahl Bindungen bzgl. Y

Wertebereich: $-1 \leq \tau_b \leq 1$

Kendalls/Stuarts τ_c

$$\tau_c = \frac{2\min(k,l)(K - D)}{n^2(\min(k,l) - 1)}$$

Wertebereich: $-1 \leq \tau_c \leq 1$

Spearmans Rangkorrelationskoeffizient

$$\rho = \frac{n(n^2-1) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J} b_j(b_j^2 - 1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} c_k(c_k^2 - 1) - 6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{\sqrt{n(n^2-1) - \sum_{j=1}^{J} b_j(b_j^2 - 1)}\sqrt{n(n^2-1) - \sum_{k=1}^{K} c_k(c_k^2 - 1)}}$$

oder

$$\rho = \frac{s_{rg_x rg_y}}{\sqrt{s_{rg_x rg_x} s_{rg_y rg_y}}}$$

Entspricht ohne Bindungen:

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

mit
$d_i = R(x_i) - R(y_i)$ Rangdifferenz

Wertebereich: $-1 \leq \rho \leq 1$

Für zwei metrische Variablen

Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}s_{yy}}}$$

mit

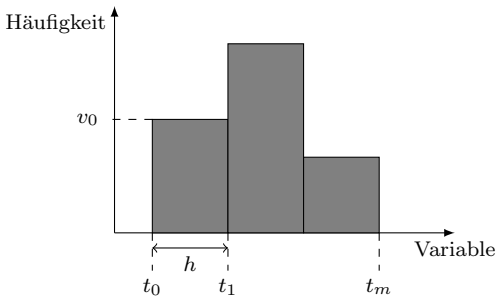
$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2(y_i - \bar{y})^2 \quad \text{bzw. } s_{xy} = \frac{S_{xy}}{n}$$
$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{bzw. } s_{xx} = \frac{S_{xx}}{n}$$
$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \quad \text{bzw. } s_{yy} = \frac{S_{yy}}{n}$$

Wertebereich: $-1 \leq r \leq 1$

1.2 Tabellen

1.3 Diagramme

1.3.1 Histogramm



Stichprobe: $X = \{x_1, x_2, ...; x_n\}$
k-te Klasse: $B_k = [t_k, t_{k+1}), k = \{0, 1, ..., m-1\}$
Anzahl Beobachtungen in der k-ten Klasse: v_k
Klassenbreite: $h = t_{k+1} - t_k, \forall k$

Scotts Regel

$$h^* \approx 3.5\sigma n^{-\frac{1}{3}}$$

Für annähernd normalverteilte Daten (min MSE)

1.3.2 QQ-Plot

1.3.3 Plot der Realisationen

1.3.4 Scatterplot

2 Wahrscheinlichkeit

2.1 Kombinatorik

		ohne Wiederholung	mit Wiederholung
Permutationen		$n!$	$\frac{n!}{n_1!\cdots n_s!}$
Kombinationen:	ohne Reihenfolge	$\binom{n}{m}$	$\binom{n+m-1}{m}$
	mit Reihenfolge	$\binom{n}{m}m!$	n^m

Dabei gilt:
$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1$
$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

2.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Laplace-Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Axiome von Kolmogorov

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$
(2) $P(\Omega) = 1$
(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (für A und B disjunkt)

Folgerungen:

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$, für $A_i, ..., A_n$ vollständige Zerlegung von Ω in paarweise disjunkte Ereignisse

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{für } P(B) > 0$$

Multiplikationssatz

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \qquad \text{für } P(A), P(B) > 0$$

Stochastische Unabhängigkeit

A, B unabhängig $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

X, Y unabhängig $\Leftrightarrow f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad \forall x, y$

2.3 Zufallsvariablen

2.4 Verteilungen

Diskrete Zufallsvariablen

2.4.1 Diskrete Verteilungen

Diskrete Gleichverteilung

Poisson Zählmodelle für seltene Ereignisse

Immer nur ein Ereignis pro Zeitpunkt, Eintreten der Ereignisse ist unabhängig von bisheriger Geschichte, mittlere Anzahl der Ereignisse pro Zeit ist konstant und proportional zur Länge des betrachteten Zeitintervalls.

$$X \sim Po(\lambda) \text{ mit } \lambda \in [0, +\infty]$$

$$P(X = x|\lambda) = \frac{\lambda^x exp^{-\lambda}}{x!}$$

$$E(X|p) = \lambda, Var(X|p) = \lambda$$

Häufig wird die Varianz durchdas Poisson-Modell unterschätzt, es liegt Überdispersion vor.
Approximation der Binomialverteilung für kleine p

2.4.2 Stetige Verteilungen

Stetige Gleichverteilung

2.4.3 Grenzwertsätze und Approximationen

Gesetz der großen Zahlen

3 Hypothesentests

3.1 Tests für Einstichprobenprobleme

3.1.1 Normalverteilung

4 Regression

μ gesucht, σ^2 bekannt (Einfacher Gauß-Test)

4.1 Annahmen

4.2 Verfahren

4.2.1 Kleinste Quadrate (OLS)

KQ-Schätzer (Einfachregression)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \cdot \sqrt{\frac{S_{yy}}{S_{xx}}} = r\sqrt{\frac{S_{yy}}{S_{xx}}}$$

Beweis:
$Cov(x,y) = Cov(x, \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}) = \hat{\beta}_1 Var(x)$
$\iff \hat{\beta}_1 = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)}$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}$$

Beweis:
$E[y] = E\left[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \hat{e}\right] \iff \hat{\beta}_0 = E[y] - \hat{\beta}_1 E[x]$

4.2.2 Maximum Likelihood

4.3 Modell

4.3.1 lineare Einfachregression

Theoretisches Modell

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

Empirisches Modell

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + e_i$$

Eigenschaften der Regressionsgeraden

$$\begin{aligned}
\hat{y}_i &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i = \bar{y} + \hat{\beta}_1(x_i - \bar{x}) \\
\hat{e}_i &= y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) \\
&= y_i - (\bar{y} + \hat{\beta}_1(x_i - \bar{x})) \\
\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{y} - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \\
&= n\bar{y} - n\bar{y} - \hat{\beta}_1(n\bar{x} - n\bar{x}) = 0 \\
\bar{\hat{y}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i = \frac{1}{n}(n\bar{y} + \hat{\beta}_1(n\bar{x} - n\bar{x})) = \bar{y}
\end{aligned}$$

4.3.2 Multivariate lineare Regression

4.4 ANOVA (Streuungszerlegung)

$$SS_{Total} = SS_{Explained} + SS_{Residual}$$

mit

$$\begin{aligned}
SS_{Total} &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \\
SS_{Explained} &= \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \\
SS_{Residual} &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = S_{yy} - \hat{\beta}^2 S_{xx}
\end{aligned}$$

4.5 Gütemaße

4.5.1 Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = \frac{SS_{Explained}}{SS_{Total}} = 1 - \frac{SS_{Residual}}{SS_{Total}} = r^2$$

Wertebereich: $0 \leq R^2 \leq 1$

5 Klassifikation

5.1 Diskriminanzanalyse (Bayes)

6 Clusteranalyse

7 Bayessche Statistik

7.0.1 Grundlagen

Bayes-Formel

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \qquad \text{für } P(A), P(B) > 0$$

oder allgemeiner:

$$\begin{aligned} f(\theta|X) &= \frac{f(X|\theta) \cdot f(\theta)}{\int f(X|\tilde{\theta}) f(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta}} \\ &= C \cdot f(X|\theta) \cdot f(\theta) \quad \text{wähle C so, dass } \int f(\theta|X) = 1 \\ &\propto f(X|\theta) \cdot f(\theta) \end{aligned}$$

Punktschätzer

Kredibilitätsintervall

Sensitivitätsanalyse

Prädiktive Posteriori

$$f(x_Z|\mathbf{x}) = \int f(x_Z, \lambda|\mathbf{x}) d\lambda = \int f(x_Z|\lambda) p(\lambda|\mathbf{x})$$

Uninformative Priori

$f(\theta) = const.$ für $\theta > 0$, damit: $f(\theta|X) = C \cdot f(X|\theta)$
(Da $\int f(\theta) = 1$ so nicht möglich, ist das eigentlich keine Dichte)

Konjugierte Priori
Wenn die Priori- und die Posteriori-Verteilung denselben Typ hat für eine gegebene Likelihoodfunktion, so nennt man sie konjugiert.

Binomial-Beta-Modell:

- Priori $\sim Be(\alpha, \beta)$
- $X \sim Binom(n, p, k)$
- Posteriori $\sim Be(\alpha + k, \beta + n - k)$

7.0.2 Markov Chain / Monte Carlo