# Statistik Formelsammlung

Katharina Ring

18. Juni 2019

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Deskriptive Statistik

## 1.1 Kenngrößen (Parameter): Stichprobe

### 1.1.1 Lagemaße

**Modus** Häufigster Wert von $x_i$. Auch zwei oder mehr Modi sind möglich (bimodal).

**Median**

$$\tilde{x}_{0.5} = \begin{cases} x_{((n+1)/2)} & \text{falls n ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)} & \text{falls n gerade} \end{cases}$$

**Quantile**

$$\tilde{x}_\alpha = \begin{cases} x_{(k)} & \text{falls n}\alpha \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}(x_{(n\alpha)} + x_{(n\alpha+1)}) & \text{falls n}\alpha \text{ ganzzahlig} \end{cases}$$

mit

k=min x $\in \mathbb{N}$, x > n$\alpha$

**Minimum/Maximum**

$$x_{\min} = \min_{i\in\{1,\dots,N\}}(x_i) \qquad x_{\max} = \max_{i\in\{1,\dots,N\}}(x_i)$$

**Arithmetisches Mittel**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Schätzer für den Erwartungswert $\mu = E[X]$ (erstes Verteilungsmoment)

*Rechenregeln:*

- ⋆ $E(a + b \cdot X) = a + b \cdot E(X)$
- ⋆ $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

**Geometrisches Mittel**

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Für Wachstumsfaktoren: $\bar{x}_G = \sqrt[n]{\frac{B_n}{B_0}}$

**Harmonisches Mittel**

$$\bar{x}_H = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i}}$$

### 1.1.2 Streuungsmaße

**Spannweite**

$$R = x_{(n)} - x_{(1)}$$

**Quartilsabstand**

$$d_Q = \tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25}$$

**(Empirische) Varianz**

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

Schätzer für das zweite zentrierte Moment, inkl. Varianzverschiebungssatz

*Rechenregeln:*

- ⋆ $Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$
- ⋆ $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$

**(Empirische) Standardabweichung**

$$s = \sqrt{s^2}$$

**Variationskoeffizient**

$$\nu = \frac{s}{\bar{x}}$$

**Mittlere absolute Abweichung**

$$e = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$$

Schätzer für das erste absolute zentrierte Moment

### 1.1.3 Konzentrationsmaße

**Gini-Koeffizient**

$$G = \frac{2\sum_{i=1}^{n} i x_{(i)} - (n+1)\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}}{n\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}} = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_{i-1} + v_i)$$

mit

$$u_i = \frac{i}{n}, \quad v_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} x_{(j)}}{\sum_{j=1}^{i} x_{(j)}} \qquad (u_0 = 0, \quad v_0 = 0)$$

Dies sind auch die Werte für die Lorenzkurve.

Wertebereich: $0 \leq G \leq \frac{n-1}{n}$

**Lorenz-Münzner-Koeffizient ($G$ normiert)**

$$G^+ = \frac{n}{n-1} G$$

Wertebereich: $0 \leq G^+ \leq 1$

### 1.1.4 Gestaltmaße

**(Empirische) Schiefe**

$$\nu = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3$$

Schätzer für das dritte zentrierte Moment, normiert durch $(\sigma^2)^{\frac{2}{3}}$

**(Empirische) Wölbung/Kurtosis**

$$k = \left[ n(n+1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4 - 3(n-1) \right] \cdot \frac{n-1}{(n-2)(n-3)} + 3$$

Schätzer für das vierte zentrierte Moment, normiert durch $(\sigma^2)^2$

**Exzess**

$$\gamma = k - 3$$

### 1.1.5 Zusammenhangsmaße

## *Für zwei nominale Variablen*

**$\chi^2$-Statistik**

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i+} n_{+j}}{n})^2}{\frac{n_{i+} n_{+j}}{n}} = n \left( \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{n_{ij}^2}{n_{i+} n_{+j}} - 1 \right)$$

Wertebereich: $0 \leq \chi^2 \leq n(\min(k,l) - 1)$

**Phi-Koeffizient**

$$\Phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

Wertebereich: $0 \leq \Phi \leq \sqrt{\min(k,l) - 1}$

**Cramérs $V$**

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{\min(k,l) - 1}}$$

Wertebereich: $0 \leq V \leq 1$

**Kontingenzkoeffizient $C$**

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

Wertebereich: $0 \leq C \leq \sqrt{\frac{\min(k,l)-1}{\min(k,l)}}$

**Korrigierter Kontingenzkoeffizient $C_{korr}$**

$$C_{korr} = \sqrt{\frac{\min(k,l)}{\min(k,l) - 1}} \cdot \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$$

Wertebereich: $0 \leq C_{korr} \leq 1$

**Odds-Ratio**

$$OR = \frac{ad}{bc} = \frac{n_{ii} n_{jj}}{n_{ij} n_{ji}}$$

Wertebereich: $0 \leq OR < \infty$

## *Für zwei ordinale Variablen*

**Gamma nach Goodman und Kruskal**

$$\gamma = \frac{K - D}{K + D}$$

| | |
|---|---|
| $K = \sum_{i<m} \sum_{j<n} n_{ij} n_{mn}$ | Anzahl konkordanter Paare |
| $D = \sum_{i<m} \sum_{j>n} n_{ij} n_{mn}$ | Anzahl diskordanter Paare |

Wertebereich: $-1 \leq \gamma \leq 1$

**Kendalls $\tau_b$**

$$\tau_b = \frac{K - D}{\sqrt{(K + D + T_X)(K + D + T_Y)}}$$

mit

| | |
|---|---|
| $T_X = \sum_{i=m} \sum_{j<n} n_{ij} n_{mn}$ | Anzahl Bindungen bzgl. $X$ |
| $T_Y = \sum_{i<m} \sum_{j=n} n_{ij} n_{mn}$ | Anzahl Bindungen bzgl. $Y$ |

Wertebereich: $-1 \leq \tau_b \leq 1$

**Kendalls/Stuarts $\tau_c$**

$$\tau_c = \frac{2 \min(k,l)(K - D)}{n^2(\min(k,l) - 1)}$$

Wertebereich: $-1 \leq \tau_c \leq 1$

**Spearmans Rangkorrelationskoeffizient**

$$\rho = \frac{n(n^2-1) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J} b_j(b_j^2 - 1) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} c_k(c_k^2 - 1) - 6 \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{\sqrt{n(n^2-1) - \sum_{j=1}^{J} b_j(b_j^2 - 1)} \sqrt{n(n^2-1) - \sum_{k=1}^{K} c_k(c_k^2 - 1)}}$$

oder

$$\rho = \frac{s_{rg_x rg_y}}{\sqrt{s_{rg_x rg_x} s_{rg_y rg_y}}}$$

Entspricht ohne Bindungen:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$$

mit

$d_i = R(x_i) - R(y_i)$ Rangdifferenz

Wertebereich: $-1 \leq \rho \leq 1$

### *Für zwei metrische Variablen*

**Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson**

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx}s_{yy}}}$$

mit

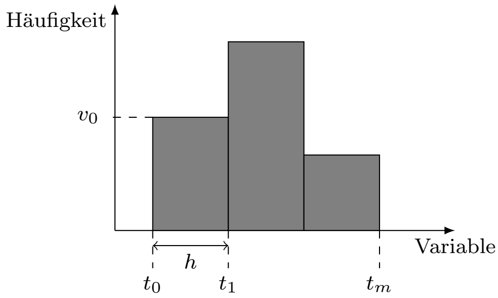
$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2(y_i - \bar{y})^2 \qquad \text{bzw. } s_{xy} = \frac{S_{xy}}{n}$$
$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad \text{bzw. } s_{xx} = \frac{S_{xx}}{n}$$
$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \qquad \text{bzw. } s_{yy} = \frac{S_{yy}}{n}$$

Wertebereich: $-1 \leq r \leq 1$

## 1.2 Tabellen

## 1.3 Diagramme

### 1.3.1 Histogramm




Stichprobe: $X = \{x_1, x_2, ...; x_n\}$
$k$-te Klasse: $B_k = [t_k, t_{k+1})\,, k = \{0, 1, ..., m-1\}$
Anzahl Beobachtungen in der $k$-ten Klasse: $v_k$
Klassenbreite: $h = t_{k+1} - t_k, \forall k$

**Scotts Regel**

$$h^* \approx 3.5\sigma n^{-\frac{1}{3}}$$

Für annähernd normalverteilte Daten (min MSE)

### 1.3.2 QQ-Plot

### 1.3.3 Plot der Realisationen

### 1.3.4 Scatterplot

# 2 Wahrscheinlichkeit

## 2.1 Kombinatorik

| | | ohne Wiederholung | mit Wiederholung |
|---|---|---|---|
| Permutationen | | $n!$ | $\frac{n!}{n_1! \cdots n_s!}$ |
| Kombinationen: | ohne Reihenfolge | $\binom{n}{m}$ | $\binom{n+m-1}{m}$ |
| | mit Reihenfolge | $\binom{n}{m}m!$ | $n^m$ |

Dabei gilt:
$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1$
$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

## 2.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

**Laplace-Wahrscheinlichkeit**

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

**Axiome von Kolmogorov**
mathematische Definition von Wahrscheinlichkeit

(1) $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
(2) $P(\Omega) = 1$
(3) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
$\forall A_i \in \mathcal{A}, i = 1, ..., \infty$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$

Folgerungen:

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$, für $A_i, ..., A_n$ vollständige Zerlegung von $\Omega$ in paarweise disjunkte Ereignisse

**Mises' Wahrscheinlichtkeitsbegriff**
frequentistische Definition von Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A(n))}{n}$$

mit $n$ Anzahl der Wiederholungen eines Zufallsexperiments und $n_A(n)$ Anzahl an Ereignissen $A$

**Bedingte Wahrscheinlichkeit**

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad \text{für } P(B) > 0$$

**Multiplikationssatz**

$$P(A\cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

**Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit**

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

**Satz von Bayes**

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \qquad \text{für } P(A), P(B) > 0$$

**Stochastische Unabhängigkeit**

A, B unabhängig $\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A) + P(B)$

X, Y unabhängig $\Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \qquad \forall x, y$

## 2.3 Zufallsvariablen

**Definition**

$$Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

Die Untermenge möglicher Werte von $\mathbb{R}$ heißt Träger
Notation: Realisationen von $Y$ werden als Kleinbuchstaben dargestellt. $Y = y$ bedeutet, dass $Y$ die Realisation $y$ angenommen hat.

**Stetige und diskrete Zufallsvariablen**
Ist der Träger überabzählbar unendlich, so heißt die Zufallsvariable *stetig*, sonst heißt sie *diskret*.

- **Dichte $f(\cdot)$:**
  Für stetige Variablen: $P(Y \in [a,b]) = \int_a^b f_Y(y)dy$
  Für diskrete Variablen lässt sich die Dichte (und andere Funktionen) wie die gleichen Funktionen für den stetigen Fall aufschreiben, wenn man $\int_{-\infty}^{y} f_Y(\tilde{y})d\tilde{y} := \sum_{k:k\leq y} P(Y = k)$ definiert. Diese Notation wird hier verwendet.
- **Verteilungsfunktion $F(\cdot)$:** $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

Zusammenhang:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(\tilde{y})d\tilde{y}$$

Ist der Träger endlich oder abzählbar unendlich, so heißt die Zufallsvariable *diskret*.

**Momente**

- **Erwartungswert (1. Moment)**: $\mu = E(Y) = \int y f_Y(y)dy$
- **Varianz (2. zentriertes Moment)**:
  $\sigma^2 = Var(Y) = E(\{Y - E(Y)\}^2) = \int (y - E(Y))^2 f(y)dy$
  Varianzverschiebungssatz: $E(\{Y - \mu\}^2) = E(Y^2) - \mu^2$

Beweis:
$E(\{Y-\mu\}^2) = E(Y^2-2Y\mu+\mu^2) = E(Y^2)-2\mu^2+\mu^2 = E(Y^2) - \mu^2$

- **k. Moment**: $E(Y^k) = \int y^k f_Y(y)dy$,
  **k. zentrales Moment**: $E(\{Y - E(Y)\}^k)$

**Momenterzeugende Funktion**

$$M_Y(t) = \mathrm{E}(e^{tY})$$

mit $\left.\frac{\partial^k M_Y(t)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \mathrm{E}(Y^k)$
kumulanterzeugende Funktion $K_Y(t) = \log M_Y(t)$
Eine Zufallsvariable ist durch ihre momenterzeugende Funktion eindeutig definiert und andersherum (solange die Momente und Kumulanten endlich sind).

## 2.4 Zufallsvektoren

**Dichte und Verteilungsfunktion**

$$F(y_1,...,y_q) = P(Y_1 \leq y_1,...,Y_q \leq y_q)$$

$$P(a_1 \leq Y_1 \leq b_1,...,a_q \leq Y_q \leq b_q) = \int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_q}^{b_q} f(y_1,..,y_q)dy_1...dy_q$$

**Marginale Dichte**

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1,...,y_k)dy_2...dy_k$$

**Bedingte Dichte**

$$f_{Y_1|Y_2}(y_1|y_2) = \frac{f(y_1,...,y_2)}{f(y_2)} \text{ für } f(y_2) > 0$$

**Iterierter Erwartungswert**

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}_X(\mathrm{E}(Y|X))$$

Beweis:

$$\mathrm{E}(Y) = \int yf(y)dy = \int\int yf(y|x)dyf_X(x)dx = \mathrm{E}_X(\mathrm{E}(Y|X))$$

$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}_X(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}_X(\mathrm{E}(Y|X))$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= \int (y-\mu_Y)^2 f(y)dy \\
&= \int (y-\mu_Y)^2 f(y|x)f(x)dydx \\
&= \int (y-\mu_{Y|x}+\mu_{Y|x}-\mu_Y)^2 f(y|x)f(x)dydx \\
&= \int (y-\mu_{Y|x})^2 f(y|x)f(x)dydx + \\
&\int (\mu_{Y|x}-\mu_Y)^2 f(y|x)f(x)dydx + \\
&2\int (y-\mu_{Y|x})(\mu_{Y|x}-\mu_Y) f(y|x)f(x)dydx \\
&= \int \mathrm{Var}(Y|x)f(x)dx + \int (\mu_{Y|x}-\mu_Y)^2 f(x)dx \\
&= \mathrm{E}_X(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}_X(\mathrm{E}(Y|X))
\end{aligned}$$

## 2.5 Verteilungen

### 2.5.1 Diskrete Verteilungen

**Diskrete Gleichverteilung**

$$\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{U}(\{y_1,...,y_k\}),\ y \in \{y_1,...,y_k\} \\
&P(Y=y_i) = \frac{1}{k},\ i=1,...,k \\
&\mathrm{E}(Y) = \frac{k+1}{2},\ \mathrm{Var}(Y) = \frac{k^2-1}{12}
\end{aligned}$$

**Binomialverteilung** Erfolge in unabhängigen Versuchen

$$\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{Bin}(n,\pi) \text{ mit } n \in \mathbb{N}, \pi \in [0,1],\ y \in \{0,...,n\} \\
&P(Y=y|\lambda) = \binom{n}{y}\pi^k(1-\pi)^{n-y} \\
&\mathrm{E}(Y|\pi,n) = n\pi,\ \mathrm{Var}(Y|\pi,n) = n\pi(1-\pi)
\end{aligned}$$

**Poissonverteilung** Zählmodelle für seltene Ereignisse

Immer nur ein Ereignis pro Zeitpunkt, Eintreten der Ereignisse ist unabhängig von bisheriger Geschichte, mittlere Anzahl der Ereignisse pro Zeit ist konstant und proportional zur Länge des betrachteten Zeitintervalls.

$$\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{Po}(\lambda) \text{ mit } \lambda \in [0,+\infty],\ y \in \mathbb{N}_0 \\
&P(Y=y|\lambda) = \frac{\lambda^y exp^{-\lambda}}{y!} \\
&\mathrm{E}(Y|p) = \lambda,\ \mathrm{Var}(Y|p) = \lambda
\end{aligned}$$

Häufig wird die Varianz durchdas Poisson-Modell unterschätzt, es liegt Überdispersion vor.
*Approximation* der Binomialverteilung für kleine p

**Geometrische Verteilung**

$$\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{Geom}(\pi) \text{ mit } \pi \in [0,1],\ y \in \mathbb{N}_0 \\
&P(Y=y|\pi) = \pi(1-\pi)^{y-1} \\
&\mathrm{E}(Y|\pi) = \frac{1}{\pi},\ \mathrm{Var}(Y|\pi) = \frac{1-\pi}{\pi^2}
\end{aligned}$$

**Negative Binomialverteilung**

$$\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{NegBin}(\alpha,\beta) \text{ mit } \alpha,\beta \geq 0,\ y \in \mathbb{N}_0 \\
&P(Y=y|\alpha,\beta) = \binom{\alpha+y-1}{\alpha-1}\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{y} \\
&\mathrm{E}(Y|\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\beta},\ \mathrm{Var}(Y|\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2}(\beta+1)
\end{aligned}$$

### 2.5.2 Stetige Verteilungen

**Stetige Gleichverteilung**

$$\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{U}(a,b) \text{ mit } \alpha,\beta \in \mathbb{R}, a \leq b,\ y \in [a,b] \\
&p(y|a,b) = \frac{1}{b-a} \\
&\mathrm{E}(Y|a,b) = \frac{a+b}{2},\ \mathrm{Var}(Y|a,b) = \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

**Univariate Normalverteilung** symmetrisch mit $\mu$ und $\sigma^2$

$$\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0,\ y \in \mathbb{R} \\
&p(y|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&\mathrm{E}(Y|\mu,\sigma^2) = \mu,\ \mathrm{Var}(Y|\mu,\sigma^2) = \sigma^2
\end{aligned}$$

**Multivariate Normalverteilung** symmetrisch mit $\mu$ und $\Sigma$

$$
\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{N}(\mu, \Sigma) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}^d, \Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d} s.p.d.,\ y \in \mathbb{R}^d \\
&p(y|\mu,\Sigma) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \det(\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\mu)^T\Sigma^{-1}(y-\mu)\right) \\
&\mathrm{E}(Y|\mu,\Sigma) = \mu,\ \mathrm{Var}(Y|\mu,\Sigma) = \Sigma
\end{aligned}
$$

**Log-Normalverteilung**

$$
\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{LogN}(\mu,\sigma^2) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0,\ y > 0 \\
&p(y|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y}} \exp\left(-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&\mathrm{E}(Y|\mu,\sigma^2) = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2}), \\
&\mathrm{Var}(Y|\mu,\sigma^2) = \exp(2\mu+\sigma^2)(\exp(\sigma^2)-1)
\end{aligned}
$$

Zusammenhang: $\log(Y) \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow Y \sim \mathrm{LogN}(\mu,\sigma^2)$

**Nichtzentrale Studentverteilung** statistische Tests für $\mu$ mit unbekannter (geschätzter) Varianz und $\nu$ Freiheitsgraden

$$
\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{t}_\nu(\mu,\sigma) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2, \nu > 0,\ y \in \mathbb{R} \\
&p(y|\mu,\sigma^2,\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\Gamma(\sqrt{\nu\pi}\sigma)} \left(1 + \frac{(y-\mu)^2}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \\
&\mathrm{E}(Y|\mu,\sigma^2,\nu) = \mu \text{ für } \nu > 1, \\
&\mathrm{Var}(Y|\mu,\sigma^2,\nu) = \sigma^2 \frac{\nu}{\nu-2} \text{ für } \nu > 2
\end{aligned}
$$

Zusammenhang: $Y|\theta \sim \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{\theta}),\ \theta \sim \mathrm{Ga}(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}) \Rightarrow Y \sim \mathrm{t}_\nu(\mu,\sigma)$

**Betaverteilung**

$$
\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{Be}(a,b) \text{ mit } a,b > 0,\ y \in [0,1] \\
&p(y|a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} y^{a-1}(1-y)^{b-1} \\
&\mathrm{E}(Y|a,b) = \frac{a}{a+b}, \\
&\mathrm{Var}(Y|a,b) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}, \\
&\mathrm{mod}(Y|a,b) = \frac{a-1}{a+b-2} \text{ für } a,b > 1
\end{aligned}
$$

**Gammaverteilung**

$$
\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{Ga}(a,b) \text{ mit } a,b > 0,\ y > 0 \\
&p(y|a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} \exp(-by) \\
&\mathrm{E}(Y|a,b) = \frac{a}{b}, \\
&\mathrm{Var}(Y|a,b) = \frac{a}{b^a}, \\
&\mathrm{mod}(Y|a,b) = \frac{a-1}{b} \text{ für } a \geq 1
\end{aligned}
$$

**Invers-Gammaverteilung**

$$
\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{IG}(a,b) \text{ mit } a,b > 0,\ y > 0 \\
&p(y|a,b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{-a-1} \exp(-\frac{b}{y}) \\
&\mathrm{E}(Y|a,b) = \frac{b}{a-1} \text{ für } a > 1, \\
&\mathrm{Var}(Y|a,b) = \frac{b^2}{(a-1)^2(a-2)} \text{ für } a \geq 2, \\
&\mathrm{mod}(Y|a,b) = \frac{b}{a+1}
\end{aligned}
$$

Zusammenhang: $Y^{-1} \sim \mathrm{Ga}(a,b) \Leftrightarrow Y \sim \mathrm{IG}(a,b)$

**Exponentialverteilung** Zeit zwischen Poisson-Ereignissen

$$
\begin{aligned}
&Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \text{ mit } \lambda > 0,\ y \geq 0 \\
&p(y|\lambda) = \lambda \exp(-\lambda y) \\
&\mathrm{E}(Y|\lambda) = \frac{1}{\lambda},\ \mathrm{Var}(Y|\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

**Chi-Quadrat-Verteilung** quadrierte standardnormalverteilte Zufallsvariablen mit $\nu$ Freiheitsgraden

$$
\begin{aligned}
&Y \sim \chi^2(\nu) \text{ mit } \nu > 0,,\ y \in \mathbb{R} \\
&p(y|\nu) = \frac{y^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \\
&\mathrm{E}(Y|\nu) = \nu,\ \mathrm{Var}(Y|\nu) = 2\nu
\end{aligned}
$$

### 2.5.3 Exponentialfamilie

**Definition**
Zur Exponentialfamilie gehören alle Verteilungen, deren Dichte wie folgt geschrieben werden kann:

$$f_Y(y,\theta) = \exp^{t^T(y)\theta - \kappa(\theta)} h(y)$$

mit $h(y) \geq 0$, $t(y)$ Vektor der kanonischen Statistiken, $\theta$ Parametervektor und $\kappa(\theta)$ Normalisationskonstante.

**Normalisierungskonstante**

$$
\begin{aligned}
1 &= \int \exp^{t^T(y)\theta} h(y)dy \exp^{-\kappa(\theta)} \\
\Leftrightarrow \kappa(\theta) &= \log \int \exp^{t^T(y)\theta} h(y)dy
\end{aligned}
$$

$\kappa(\theta)$ ist die kumulanterzeugende Funktion, somit $\frac{\partial\kappa(\theta)}{\partial\theta} = \mathrm{E}(t(Y))$ und $\frac{\partial^2\kappa(\theta)}{\partial\theta^2} = \mathrm{Var}(t(Y))$

**Mitglieder**

- **Poissonverteilung**
- **Geometrische Verteilung**
- **Exponentialverteilung**
- **Normalverteilung** $t(y) = \left(-\frac{y^2}{2}, y\right)^T$, $\theta = \left(\frac{1}{\sigma^2}, \frac{\mu}{\sigma^2}\right)^T$, $h(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\kappa(\theta) = \frac{1}{2}\left(-\log\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)$
- **Gammaverteilung**
- **Chi-Quadrat-Verteilung**
- **Betaverteilung**

## 2.6 Grenzwertsätze

**Gesetz der großen Zahlen**

**Zentraler Grenzwertsatz**

$$Z_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

mit $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{\sqrt{n}}$ und $Y_i$ i.i.d. mit $\mu = 0$ und Varianz $\sigma^2$

Beweis:
Für eine normalverteilte Zufallsvariable $Z \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt $K_Z(t) = \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2$. Die ersten beiden Ableitungen $\left.\frac{\partial^k K_Z(t)}{\partial t^k}\right|_{t=0}$ entsprechen $\mu$ und $\sigma$. Alle anderen Momente sind null.
Für $Z_n = (Y_1 + Y_2 + ... + Y_n)/\sqrt{n}$ gilt:

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= \mathrm{E}\left(e^{t(Y_1+Y_2+...+Y_n)/\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(e^{tY_1/\sqrt{n}} \cdot e^{tY_2/\sqrt{n}} \cdot ... \cdot e^{tY_n/\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(e^{tY_1/\sqrt{n}}\right) \mathrm{E}\left(e^{tY_2/\sqrt{n}}\right) ... \mathrm{E}\left(e^{tY_n/\sqrt{n}}\right) \\ &= M_Y^n(t/\sqrt{n}) \end{aligned}$$

Analog gilt: $K_{Z_n}(t) = nK_Y(t/\sqrt{n})$.

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial K_{Z_n}(t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= \frac{n}{\sqrt{n}} \left.\frac{\partial K_Y(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sqrt{n}\mu \\ \left.\frac{\partial^2 K_{Z_n}(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} &= \frac{n}{n} \left.\frac{\partial^2 K_Y(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \sigma^2 \end{aligned}$$

Mithilfe der Taylorreihe können wir $K_{Z_n}(t) = 0 + \sqrt{n}\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + ...$ schreiben, wobei die Terme in ... alle für $n \to \infty$ gegen 0 gehen.
Damit gilt $K_{Z_n}(t) \xrightarrow{n\to\infty} K_Z(t)$ mit $Z \sim \mathrm{N}(\sqrt{n}\mu, \sigma^2)$.

# 3 Inferenz

## 3.1 Methode der Momente

Die theoretischen Momente werden durch die empirischen geschätzt:

$$\mathrm{E}_{\hat{\theta}_{MM}}(Y^k) = m_k(y_1, ..., y_n)$$

Für die Exponentialfamilie gilt: $\hat{\theta}_{MM} = \hat{\theta}_{ML}$

## 3.2 Verlustfunktionen

**Verlust**

$$\mathcal{L} : \mathcal{T} \times \Theta \to \mathbb{R}^+$$

mit Parameterraum $\Theta \subset \mathbb{R}$, $t \in \mathcal{T}$ mit $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Statistik, die den Parameter $\theta$ schätzt. Es gilt: $\mathcal{L}(\theta, \theta) = 0$

- **absoluter Verlust (L1)**: $\mathcal{L}(t, \theta) = |t - \theta|$
- **quadratischer Verlust (L2)**: $\mathcal{L}(t, \theta) = (t - \theta)^2$

Da $\theta$ unbekannt ist, ist der Verlust eine theoretische Größe. Zudem ist er die Realisation einer Zufallsvariable, da er von einer konkreten Stichprobe abhängt.

**Risiko**

$$\begin{aligned} R(t(.), \theta) &= \mathrm{E}_\theta\left(\mathcal{L}(t(Y_1, ..., Y_n), \theta)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(t(Y_1, ..., Y_n), \theta) \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta) dy_i \end{aligned}$$

**Minimax-Regel**

Das Risiko beruht immer noch auf dem wahren Parameter $\theta$. Vorsichtige Schätzung: Wähle $\theta$ so, dass das Risiko maximal wird, und danach $t(.)$ so, dass das Risiko minimiert wird:

$$\hat{\theta}_{minimax} = \arg\min_{t(.)} \left(\max_{\theta \in \Theta} R(t(.); \theta)\right)$$

Es wird der Worst Case minimiert.

**Mean Squared Error (MSE)**

$$\begin{aligned} MSE(t(.), \theta) &= \mathrm{E}_\theta\left(\{t(Y) - \theta\}^2\right) \\ &= \mathrm{Var}_\theta\left(t(Y_1, ..., Y_n)\right) + Bias^2((t(.); \theta) \end{aligned}$$

mit $Bias(t(.); \theta) = \mathrm{E}_\theta\left(t(Y_1, ..., Y_n)\right) - \theta$

Beweis:
Sei $\mathcal{L}(t,\theta) = (t-\theta)^2$

$$\begin{aligned} R(t(.),\theta) &= \mathrm{E}_\theta(\{t(Y)-\theta\}^2) \\ &= \mathrm{E}_\theta(\{t(Y)-\mathrm{E}_\theta(t(Y))+\mathrm{E}_\theta(t(Y))-\theta\}^2) \\ &= \mathrm{E}_\theta(\{t(Y)-\mathrm{E}_\theta(t(Y))\}^2)+\mathrm{E}_\theta(\{\mathrm{E}_\theta(t(Y))-\theta\}^2) \\ &\quad + 2\mathrm{E}_\theta(\{t(Y)-\mathrm{E}_\theta\,(t(Y))\}\{\mathrm{E}_\theta(t(Y))-\theta\}) \\ &= \mathrm{Var}_\theta(t(Y_1,...,Y_n)) + Bias^2((t(.);\theta)+0 \end{aligned}$$

**Cramér-Rao-Ungleichung**

$$MSE(\hat\theta,\theta) \geq Bias^2(\hat\theta,\theta) + \frac{\left(1+\frac{\partial Bias(\hat\theta,\theta)}{partial\theta}\right)^2}{I(\theta)}$$

Beweis:
Für ungebiaste Schätzer: $\theta = \mathrm{E}_\theta(\hat\theta) = \int t(y)f(y;\theta)dy$

$$\begin{aligned} 1 &= \int t(y)\frac{\partial f(y;\theta)}{\partial\theta}dy \\ &= \int t(y)\frac{\partial \log f(y;\theta)}{\partial\theta}f(y;\theta)dy \\ &= \int t(y)s(y;\theta)f(y;\theta)dy \\ &= \int (t(y)-\theta)\,(s(\theta;y)-0)\,f(y;\theta)dy && \text{1. Bartlett-Gleichung } \mathrm{E}_\theta\,(s(\theta;y))=0 \\ &= \mathrm{Cov}_\theta\,(t(Y);s(\theta;Y)) \\ &\geq \sqrt{\mathrm{Var}_\theta(t(Y))}\sqrt{\mathrm{Var}_\theta(s(\theta;Y))} && \text{Cauchy-Schwarz} \\ &= \sqrt{MSE(t(Y);\theta)}\sqrt{I(\theta)} \end{aligned}$$

**Kullback-Leibler-Divergenz** Vergleich von Verteilungen

$$KL(t,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \log\frac{f(\tilde y;\theta)}{f(\tilde y;t)}f(\tilde y;\theta)d\tilde y$$

Die KL-Divergenz ist keine Distanz, da sie nicht symmetrisch ist. Sie ist 0 für $t=\theta$ und größer/gleich 0 sonst.

Beweis:
Folgt aus $\log(x) \leq x-1 \forall x \geq 0$, mit Gleichheit für $x=1$.

$R_{KL}(t(.),\theta)$ wird durch den MSE approximiert.

Beweis:

$$\begin{aligned} &R_{KL}(t(.),\theta) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{KL}(t(Y_1,...,Y_n),\theta)\prod_{i=1}^n f(y_i;\theta)dy_i \\ &= \int\int \log\frac{f(\tilde y;\theta)}{f(\tilde y;t)}f(\tilde y;\theta)d\tilde y\prod_{i=1}^n f(y_i;\theta)dy_i \\ &= \int\int (\log f(\tilde y;\theta)-\log f(\tilde y;t))\,f(\tilde y;\theta)d\tilde y - \prod_{i=1}^n f(y_i;\theta)dy_i \\ &\approx -\int \underbrace{\left(\int\frac{\partial \log f(\tilde y;\theta)}{\partial\theta}f(\tilde y;\theta)d\tilde y\right)}_{0}(t-\theta)\prod_{i=1}^n f(y_i;\theta)dy_i \\ &+\frac{1}{2}\int \underbrace{\left(-\int\frac{\partial^2 \log f(\tilde y;\theta)}{\partial\theta^2}f(\tilde y;\theta)d\tilde y\right)}_{I(\theta)}(t-\theta)^2\prod_{i=1}^n f(y_i;\theta)dy_i \end{aligned}$$

Wobei der letzte Schritt durch die Taylorreihe approximiert wurde: $\log f(\tilde y,t) \approx \log f(\tilde y,\theta) + \frac{\partial \log f(\tilde y,\theta)}{\partial\theta}(t-\theta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log f(\tilde y,\theta)}{\partial\theta^2}(t-\theta)^2$

## 3.3 Maximum Likelihood (ML)

**Voraussetzungen**

- $Y_i \sim f(y;\theta)\ i.i.d.$
- $\theta \in \mathbb{R}^p$
- $f(.;\theta)$ Fisher-regulär:
  - $\{y : f(y;\theta > 0)\}$ unabhängig von $\theta$
  - Möglicher Parameterraum $\Theta$ ist offen
  - $f(y;\theta)$ zweimal differenzierbar
  - $\int \frac{\partial}{\partial\theta}f(y;\theta)dy = \frac{\partial}{\partial\theta}\int f(y;\theta)dy$

**Zentrale Funktionen**

- **Likelihood** $L(\theta;y_1,...,y_n)$: $\prod_{i=1}^n f(y_i;\theta)$
- **log-Likelihood** $l(\theta;y_1,..y_n)$: $\log L(\theta;y_1,...,y_n) = \sum_{i=1}^n \log f(y_i;\theta)$
- **Score** $s(\theta;y_1,...,y_n)$: $\frac{\partial l(\theta;y_1,..y_n)}{\partial\theta}$
- **Fisher-Information** $I(\theta)$: $-\mathrm{E}_\theta\left(\frac{\partial s(\theta;Y)}{\partial\theta}\right)$
- **beobachtete Fisher-Information** $I_{obs}(\theta)$: $-\mathrm{E}_\theta\left(\frac{\partial s(\theta;y)}{\partial\theta}\right)$

**Eigenschaften der Score-Funktion**

erste Bartlett-Gleichung:

$$\mathrm{E}\,(s(\theta;Y)) = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 1 &= \int f(y;\theta)dy \\ 0 = \frac{\partial 1}{\partial\theta} &= \int\frac{\partial f(y;\theta)}{\partial\theta}dy = \int\frac{\partial f(y;\theta)/\partial\theta}{f(y;\theta)}f(y;\theta)dy \\ &= \int\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(y;\theta)f(y;\theta)dy = \int s(\theta;y)f(y;\theta)dy \end{aligned}$$

zweite Bartlett-Gleichung:

$$\mathrm{Var}_\theta\,(s(Y;\theta)) = \mathrm{E}_\theta\left(-\frac{\partial^2 logf(Y;\theta)}{\partial\theta^2}\right) = I(\theta)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial 0}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \int \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(y;\theta) f(y;\theta) dy \qquad \text{siehe oben}\\
&= \int \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(y;\theta) \right) f(y;\theta) dy\\
&\quad + \int \frac{\partial \log f(y;\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial f(y;\theta)}{\partial \theta} dy\\
&= \mathrm{E}_\theta \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(Y;\theta) \right)\\
&\quad + \int \frac{\partial \log f(y;\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log f(y;\theta)}{\partial \theta} f(y;\theta) dy\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{E}_\theta \left( s(\theta;Y) s(\theta;Y) \right) = \mathrm{E}_\theta \left( -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(Y;\theta) \right)$$

Bartletts zweite Gleichung gilt dann, weil $\mathrm{E}\left(s(\theta;Y)\right) = 0$

**ML-Schätzer**

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg\max\, l(\theta; y_1, ... y_n)$$

für Fisher-reguläre Verteilungen: $\hat{\theta}_{ML}$ hat asymptotisch die kleinstmögliche Varianz, gegeben durch die Cramér-Rao-Ungleichung, $s\left(\hat{\theta}_{ML}; y_1, ..., y_n\right) = 0$

$\hat{\theta} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(\theta, I^{-1}(\theta)\right)$

Der ML-Schätzer ist invariant: $\hat{\gamma} = g(\hat{\theta})$ wenn $\gamma = g(\theta)$.

Beweis:
$\gamma = g(\theta) \Leftrightarrow \theta = g^{-1}(\gamma)$
Für die Loglikelihood von $\gamma$ an der Stelle $\hat{\theta}$ gilt:

$$\frac{\partial l(g^{-1}(\hat{\gamma}))}{\partial \gamma} = \frac{\partial g^{-1}(\gamma)}{\partial \gamma} \underbrace{\frac{\partial l(\hat{\theta})}{\partial \theta}}_{=0} = 0$$

Die Fisher-Information ist dann $\frac{\partial \theta}{\partial \gamma} I(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}$

Beweis:

$$\begin{aligned}I_\gamma(\gamma) &= -\mathrm{E}\left( \frac{\partial^2 l(g^{-1}(\hat{\gamma}))}{\partial \gamma^2} \right) = -\mathrm{E}\left( \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{\partial g^{-1}(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} \right) \right)\\
&= -\mathrm{E}\left( \underbrace{\frac{\partial^2 g^{-1}(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta}}_{\text{Erwartungswert } 0} + \frac{\partial g^{-1}(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} \frac{\partial g^{-1}(\gamma)}{\partial \gamma} \right)\\
&= \frac{\partial g^{-1}(\gamma)}{\partial \gamma} I(\theta) \frac{\partial g^{-1}(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} I(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}\end{aligned}$$

Delta-Regel: $\gamma \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(\hat{\gamma}, \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} I^{-1}(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \gamma}$

**Numerische Berechnung des ML-Schätzers** Fisher-scoring als statistische Version des Newton-Raphson-Verfahrens

## 3.4 Suffizienz und Konsistenz

**Suffizienz**
Eine Statistik $t(y_1, ..., y_n)$ ist suffizient für $\theta$, wenn die bedingte Verteilung $f(y_1, ..., y_n | t_0 = t(y_1, ..., y_n); \theta)$ unabhängig von $\theta$ ist.

**Neyman-Kriterium:**

$$t(Y_1, ..., Y_n) \text{ suffizient } \Leftrightarrow f(y;\theta) = h(y) g\left(t(y);\theta\right)$$

Beweis:
"$\Rightarrow$":

$$f(y;\theta) = \underbrace{f(y|t = t(y);\theta)}_{h(y)} \underbrace{f_t(t|y;\theta)}_{g(t(y);\theta)}$$

"$\Leftarrow$":

$$f_t(t;\theta) = \int_{t=t(y)} f(y;\theta) dy = \int_{t=t(y)} h(y) g(t;\theta) dy$$

Damit:

$$f\left(y | t = t(y);\theta\right) = \frac{f(y, t = t(y);\theta)}{f_t(t,\theta)} = \begin{cases} \frac{h(y) g(t;\theta)}{g(t;\theta)} & t = t(y)\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

**Minimalsuffizienz:**
$t(.)$ ist suffizient und $\forall\, \tilde{t}(.)\, \exists\, h(.)$ s.t. $t(y) = h(\tilde{t}(y))$

**(schwache) Konsistenz**

$$MSE(\hat{\theta}, \theta) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \hat{\theta} \text{ konsistent}$$

## 3.5 Konfidenzintervalle

**Definition**

$$[t_l(Y), t_r(Y)] \text{ Konfidenzintervall}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$P_\theta\left((t_l(Y) \le \theta \le t_r(Y)\right) \ge 1 - \alpha$$

mit $1 - \alpha$ Konfidenzlevel und $\alpha$ Signifikanzlevel

**Pivotale Statistik**

$$g(Y;\theta) \text{ pivotal}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{Verteilung von } g(Y;\theta) \text{ unabhängig von } \theta$$

**Approximativ pivotale Statistik**

$$g(\hat{\theta};\theta) = \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\theta})}} \overset{\alpha}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

mit $\hat{\theta} = t(Y) \overset{\alpha}{\sim} \mathrm{N}(\theta, \mathrm{Var}(\hat{\theta})$

$$KI = \left[\hat{\theta} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\theta})}, \hat{\theta} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\theta})}\right]$$

Beweis:
$1-\alpha \approx P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\theta})}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

# 4 Hypothesentests

**Exakte binomiale Konfidenzintervalle**

## 4.1 Tests für Einstichprobenprobleme

### 4.1.1 Normalverteilung

# 5 Regression

**$\mu$ gesucht, $\sigma^2$ bekannt (Einfacher Gauß-Test)**

## 5.1 Annahmen

## 5.2 Verfahren

### 5.2.1 Kleinste Quadrate (OLS)

**KQ-Schätzer (Einfachregression)**

$$\hat{\beta}_1 = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \cdot \sqrt{\frac{S_{yy}}{S_{xx}}} = r\sqrt{\frac{S_{yy}}{S_{xx}}}$$

Beweis:
$Cov(x,y) = Cov(x, \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}) = \hat{\beta}_1 Var(x)$
$\iff \hat{\beta}_1 = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)}$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}$$

Beweis:
$E[y] = E\left[\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \hat{e}\right] \iff \hat{\beta}_0 = E[y] - \hat{\beta}_1 E[x]$

## 5.3 Modell

### 5.3.1 lineare Einfachregression

**Theoretisches Modell**

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

**Empirisches Modell**

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i + e_i$$

**Eigenschaften der Regressionsgeraden**

$$\begin{aligned}
\hat{y}_i &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i = \bar{y} + \hat{\beta}_1(x_i - \bar{x}) \\
\hat{e}_i &= y_i - \hat{y}_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) \\
&= y_i - (\bar{y} + \hat{\beta}_1(x_i - \bar{x})) \\
\sum_{i=1}^n \hat{e}_i &= \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \bar{y} - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \\
&= n\bar{y} - n\bar{y} - \hat{\beta}_1(n\bar{x} - n\bar{x}) = 0 \\
\bar{\hat{y}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \frac{1}{n}(n\bar{y} + \hat{\beta}_1(n\bar{x} - n\bar{x})) = \bar{y}
\end{aligned}$$

### 5.3.2 Multivariate lineare Regression

## 5.4 ANOVA (Streuungszerlegung)

$$SS_{Total} = SS_{Explained} + SS_{Residual}$$

mit

$$SS_{Total} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$
$$SS_{Explained} = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$
$$SS_{Residual} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = S_{yy} - \hat{\beta}^2 S_{xx}$$

## 5.5 Gütemaße

### 5.5.1 Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = \frac{SS_{Explained}}{SS_{Total}} = 1 - \frac{SS_{Residual}}{SS_{Total}} = r^2$$

Wertebereich: $0 \leq R^2 \leq 1$

# 6 Klassifikation

## 6.1 Diskriminanzanalyse (Bayes)

# 7 Clusteranalyse

# 8 Bayessche Statistik

## 8.1 Grundlagen

**Bayes-Formel**

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \qquad \text{für } P(A), P(B) > 0$$

oder allgemeiner:

$$f(\theta|X) = \frac{f(X|\theta) \cdot f(\theta)}{\int f(X|\tilde{\theta})f(\tilde{\theta})d\tilde{\theta}}$$
$$= C \cdot f(X|\theta) \cdot f(\theta) \quad \text{wähle C so, dass } \int f(\theta|X) = 1$$
$$\propto f(X|\theta) \cdot f(\theta)$$

**Punktschätzer**

**Kredibilitätsintervall**

**Sensitivitätsanalyse**

**Prädiktive Posteriori**

$$f(x_Z|\mathbf{x}) = \int f(x_Z, \lambda|\mathbf{x})d\lambda = \int f(x_Z|\lambda)p(\lambda|\mathbf{x})$$

**Uninformative Priori**

$f(\theta) = const.$ für $\theta > 0$ , damit: $f(\theta|X) = C \cdot f(X|\theta)$

(Da $\int f(\theta) = 1$ so nicht möglich, ist das eigentlich keine Dichte)

**Konjugierte Priori**

Wenn die Priori- und die Posteriori-Verteilung denselben Typ hat für eine gegebene Likelihoodfunktion, so nennt man sie konjugiert.

Binomial-Beta-Modell:

- Priori $\sim Be(\alpha, \beta)$
- $X \sim Binom(n, p, k)$
- Posteriori $\sim Be(\alpha + k, \beta + n - k)$

## 8.2 Markov Chain / Monte Carlo