ДОМАШНЯЯ РАБОТА 4

Срок сдачи: 23 ноября, 14.40

1. Вычислите:

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда совпадают середины отрезков AD и BC.

3. Даны четыре вектора: $\vec{a} = (2,1,0)$, $\vec{b} = (1,-1,2)$, $\vec{c} = (2,2,-1)$ и $\vec{d} = (3,7,-7)$. Убедитесь, что каждые три из них некомпланарны. Определите разложение каждого из этих четырех векторов, принимая в качестве базиса три остальных.

4. Проверьте, что точки $(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$, $D(3,-5,3)$ являются вершинами трапеции.

5. В произвольном базисе заданы три последовательные вершины параллелограмма: $A(-2,1)$, $B(1,3)$, $C(4,0)$. Найти координаты вершины D.

6. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Вычислите

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}.$$

7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{c} = 8$, вычислить:

а) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$,

б) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

8. Три ненулевых вектора связаны соотношениями $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$, $\vec{b} = [\vec{c}, \vec{a}]$, $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Найдите длины векторов и углы между ними.

9. Вычислите площадь треугольника ABC, если известны координаты вершин: $A(-1,0,1)$, $B(0,2,-3)$, $C(4,4,1)$.

10. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его вершины имеют координаты $A(1,2,3)$, $B(9,6,4)$, $D(3,0,4)$, $A_1(5,2,6)$. Вычислить:

а) объем параллелепипеда;

б) угол между диагональю AC_1 и плоскостью основания $ABCD$.

11. Решите систему линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$. Выпишите два произвольных частных решения.

$$\begin{cases} 2x_1 - x - 2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

12. Существует ли в пространстве куб, расстояния от вершин которого до данной плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?