1 Обязательная часть

1. **Сумма $\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$.**
$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}+\ldots < \frac{1}{1}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{4\cdot\sqrt{4}}+\frac{1}{4\cdot\sqrt{4}}+\frac{1}{4\cdot\sqrt{4}}+\frac{1}{4\cdot\sqrt{4}}\ldots = \frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$
Заметим, что это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}} = \mathcal{O}(1)$

2. **for с удвоением**
Какие значения принимает $i : 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{\lfloor \log N \rfloor}$
Какие значения принимает $j : 0, 1, 2, \ldots, i-1$
Получаем, что программа совершит операций:
$(2^0-1)+(2^1-1)+\ldots+(2^{\lfloor \log N\rfloor}-1) = 2^{\lfloor \log N\rfloor+1}-1-\log N = \Theta(2^{\lfloor \log N\rfloor}) = \Theta(N)$

3. **for с +3**
Какие значения принимает $i : 0, 3, 6, 9, \ldots, 3\cdot\lfloor\frac{N}{3}\rfloor$
Какие значения принимает $j : 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{\lfloor \log i\rfloor}$
Получаем, что программа совершит операций:
$\lceil\log 3\rceil+\lceil\log 6\rceil+\lceil\log 9\rceil+\ldots+\lceil\log\frac{N}{3}\rceil = \lceil\log 3\rceil+\lceil\log 3+\log 2\rceil+\lceil\log 3+\log 3\rceil+\ldots+$
$+\lceil\log 3+\log\frac{N}{3}\rceil = \frac{N}{3}\cdot\log 3+log(\frac{N}{3})! = \Theta(log(\frac{N}{3})!) = \Theta(\frac{N}{3}\cdot\log\frac{N}{3}) = \Theta(N\cdot\log N)$

4. **Подотрезок с заданной суммой**
Алгоритм
Пусть l и r изначально указывают на первый элемент последовательности. Если сумма элементов между этими указателями равна S - мы нашли ответ. Если меньше - двигаем указатель r на один элемент вправо. Меньше - двигаем l на один вправо. Если в какой-то момент l оказался правее r или l добежал до конца последовательности, а S так и не нашел - не существует подпоследовательности с суммой элементов S.
Чтобы каждый раз не считать сумму элементов между указателями, в начале программы построим массив частичных сумм. Тогда сумма между l и r будет равна

$$partsum[r]-partsum[l-1].$$

Программа работает за $\mathcal{O}(n)$. Тратим n операций на построение массива частичных сумм, а затем за n операций пробегаем указателями l/r по последовательности.

Доказательство корректности.
В последовательности только натуральные числа. Следовательно, если двигать только указатель r, а l оставить на первом элементе, то чем правее r, тем больше сумма подпоследовательности. Но что делать, когда мы набрали сумму больше искомого S. Передвинув l на один вправо, избавляемся от "лишнего груза". Мы можем убрать элемент из рассмотрения, ведь уже были перебраны все возможные подпоследовательности с его участием, суммы не больше S. Ни одна не подошла, значит, этот элемент нам неважен.

2 Дополнительная часть.

1. **Маленький холодильник.**
   Какие значения принимает $a : 1, 2, 3, \ldots, \sqrt[3]{N}$
   Какие значения принимает $j : (1..\sqrt{N}), (2..\sqrt{\frac{N}{2}}), (3..\sqrt{\frac{N}{3}}), \ldots, \sqrt[3]{N}$
   Получаем, что программа совершит операций:
   $\sqrt{N} + (\sqrt{\frac{N}{2}} - 1) + (\sqrt{\frac{N}{3}} - 2) + \ldots + (\sqrt{\frac{N}{\sqrt[3]{N}}} - (\sqrt[3]{N} - 1)) = (1 + 2 + 3 + \ldots + (\sqrt[3]{N} - 1)) +$
   $+ (N^{\frac{1}{2}} + \frac{N^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{N^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{N}^{\frac{1}{2}}}) = \frac{\sqrt[3]{N} \cdot (\sqrt[3]{N} - 1)}{2} + N^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{\sqrt[3]{N}} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} < \sqrt[3]{N} \cdot \sqrt[3]{N} + \sqrt{N} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{N}} =$
   $= \mathcal{O}(\sqrt[3]{N} \cdot \sqrt[3]{N}) = \mathcal{O}(N^{\frac{2}{3}})$