1 Обязательная часть

1. ***Грид.***

   Представляем наше поле графом. Клетка = вершина. Если две клетки смежны - проводим между ними ребро. Заметим, что мы получили двудольный граф. Хотим макс. количество попарно несмежных клеток. В треминах графа... хотим максимальное Independent Set. В двудольном графе умеем решать задачу $\mathcal{O}(V + E + T(maxMatching)) = \mathcal{O}(VE)$.

2. ***Ребра обязаны.***

   Находим макс. парсоч. Как это делать быстро на произвольном графе? Куном, но запускать не свою функцию вероятностную, а данный с небес поиск дчц за $\mathcal{O}(E)$. Теперь перебираем все ребра парсоча. Каждое пытаемся удалить, а затем найти дчц. Если нашли, то ребро не обязано лежать. Не нашли — обязано (док-но на лекции).

3. ***Лексикографички.***

   Находим minVertexCover. Запоминаем его размер C. Теперь пытаемся брать в ответ вершинки. Берем первую. Удаляем ее саму и ее ребра из графа. Ищем в остатке minVertexCover. Если его размер оказался равен $C - 1$, то мы можем взять первую вершину в ответ спокойно, запускаемся от остатка, пытаемся брать 2 и тд. Если же размер больше $C-1$ (а меньше он быть не может, иначе в начале взяли не минимальное), то 1 взять в ответ не можем. Возвращаем ее, удаляем 2, продолжаем пати. Работает за полилог.

4. ***Избиение.***

   Сделаем из этого чуда двудольный граф: продублируем каждую вершину и запишем дубли в разные доли. Получится две равные доли. И каждое ребро записываем так, что его "исток"в левой доле. Утверждение: если макс. парсоч на таком графе - полный, то вершины можно разбить на циклы. Иначе нельзя.

   Почему это так. Мы можем проследить по этим долям путь. Выходим из вершины v левой доли, идем в u' правой. Теперь прыгаем в левую долю в вершину u, ходим из нее и тд. Заметим, что если парсоч полный, то в каждую вершину мы зашли и вышли ровно один раз, то есть все вершины ровно на одном цикле. Если же не полный, то мы в какую-то вершину либо зайти вообще не смогли, тогда все плохо, либо зашли и не вышли, то есть в ней закончился путь (причем не цикл, иначе в ней мы уже были бы), тогда тоже все плохо.

5. ***D-Регулярный.***

   Выберем из левой доли n вершин. Возьмем все смежные им из правой, пусть их m. Заметим, что степени вершин в левой доле все D. В правой же $\leq D$. Количество ребер между ними — nD, тк они все выходят из левой доли и больше нет. Из правой же доли (если смотреть на полную картину) выходит ребер точно не меньше. Получаем: $nD \leq mD$. Откуда вывод $n \leq m$. То есть для любого подмножества из левой соответствующее ему из правой не меньше. Это теорема Холла, получаем наше чтд.

6. ***Степень не более двух.***

    Берем наш граф и удваиваем его. Оригиналы в левую долю, жалкие пародии в правую. Проводим между вершинами соответстующие ребра (неор). Теперь ищем парсоч. Нашли парсоч — нашли ответ. Почему? По свойствам парсоча в нашем двудольнике из каждой вершнины будет выходить не более одного ребра. А так как у каждой вершины изначального графа есть дуль в двудольнике, то степень каждой вершины при таком множестве ребер будет не более двух.

    Почему такое множество максимально? Ну пусть не максимально. То есть есть какое-то множество, в котором ребер больше. Сделаем опять тот же двудольник и отметим ребра из этого множества в нем. Степень каждой врешины не более двух, значит в двудольнике у каждой вершины степень не более одного. То есть мы получили паросоч. Но размер этого парсоча больше выбранного нами. То есть мы выбрали не максимальный. Противоречие.

7. ***Множество прямых.***

    Заметим, что любая прямая однозачно задается парой (k, b). Воспользуемся этим. Наберем классы. Первый класс эквивалентности — прямые с одинаковыми коэффами (то есть они параллельны), второй — одинаковыми константами (то есть пересекаются в $x = 0$). Первый класс будет левой долей графа, второй будет правой. Теперь задача свелась к поиску максимального паросочетания.