1 Обязательная часть

1.1 Истина или ложь?

1. $n^{\log n} = \mathcal{O}(1.1^n)$
   Решение
   $\log n^{\log n} = \log n \cdot \log n = \log^2 n = \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n \cdot \log 1.1) = \mathcal{O}(\log 1.1^n)$
   $\log n^{\log n} = \mathcal{O}(\log 1.1^n)$
   $\exists c > 0\ \exists N\ \forall n \geq N : \log n^{\log n} \leq c \cdot \log 1.1^n$
   $\exists c > 0\ \exists N\ \forall n \geq N : n^{\log n} \leq 2^c \cdot 1.1^n$
   $n^{\log n} = \mathcal{O}(1.1^n)$

2. $\frac{n^3}{n^2+n\log n} = \mathcal{O}(n \log n)$
   Решение
   $\frac{n^3}{n^2+\log n} = \frac{n}{n+\log n} = \mathcal{O}(\frac{n^2}{n}) = \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n \cdot logn)$

3. $f(n) = \mathcal{O}(f(\frac{n}{2}))$
   Решение
   Это неверно. Пример, когда не работает - функция $f(n) = 2^n$. Докажем, что для любого $c > 0$ существует такое n, что $2^{\frac{n}{2}} < c \cdot 2^n$.
   Прологорифмируем обе части:
   $\frac{n}{2}$? $\log c \cdot n$
   $-\log c$? $\frac{n}{2}$.
   Заметим, что для фиксированной c мы всегда сможем подобрать такой n, чтобы выполнялось $-\log c < \frac{n}{2}$. Таким образом, утверждение из условия неверно.

4. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$
   Решение

   - Верно, что $f(n) \leq f(n) + o(f(n)) \leq f(n) + f(n)$
   - Существуют такие c (из определения $o(f(n))$, что $f(n) + o(f(n)) \leq f(n) + f(n)$
   - Из предыдущих пунктов следует, что
     $f(n) \leq f(n) + o(f(n)) \leq 2 \cdot f(n)$
     $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$

5. $\log n! = \Theta(n \log n)$
   Решение
   $\log n! = \sum\limits_{i=1}^{n} \log i = \Theta(\sum\limits_{i=1}^{n} \log n) = \Theta(n \cdot \log n)$

1.2 Рекуррентность

1. $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + n$
   Решение
   Пусть $\exists c > 0 : T(n) = c \cdot n$. Найдем это c.
   $c \cdot n = c \cdot \frac{n}{2} + c \cdot \frac{n}{3} + n$
   $c \cdot (n - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = n$
   $c = 6 \cdot n = \Theta(n)$

2. $T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + n \cdot \log^2 n$
   Решение
   $\frac{a}{b^c} = \frac{4}{2^1} = 2 > 1$. Следовательно, $T(n) = \Theta(4^{\log n})$

3. $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{3}) + 1$
   Решение
   $\frac{a}{b^c} = \frac{2}{3^0} = 2 > 1$. Следовательно, $T(n) = \Theta(2^{\log_3 n}) = \Theta(n^{log_3 2})$

4. $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$
   Решение
   Пусть $T(n) = a^n$. Тогда $a^n = a^{n-1} + a^{n-2}$
   $1 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$
   $a^2 - a - 1 = 0$
   $T(n) = \Theta((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)$

5. $T(n) = T(n-1) + n$
   Решение
   $T(n) = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n \cdot (n+1)^2}{2} = \Theta(n^2)$

1.3 Заполнить табличку

A	B	O	o	Θ	ω	Ω
n	n^2	+	+	−	−	−
$\lg^k n$	n^ϵ	+	+	−	−	−
n^k	c^n	+	+	−	−	−
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	−	−	−	−	−
2^n	$2^{n/2}$	−	−	−	+	+
$n^{\lg m}$	$m^{\lg n}$	+	−	+	−	+
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$	+	−	+	−	+

1.4 Упорядочить по возрастанию

1. 1

2. $n^{\frac{1}{\lg n}} = \Theta(1)$

3. $\lg(\lg^* n)$

4. $\lg^* \lg n = \Theta(lg^* n)$

5. $\lg^* n$
6. $\ln \ln n$
7. $\sqrt{\lg n}$
8. $\ln n$
9. $2^{\lg^* n}$
10. $2^{\ln n}$
11. $\lg^2 n$
12. $2^{\sqrt{2 \cdot \lg n}} = \Theta(n)$
13. n
14. $\lg n!$
15. $n \cdot \lg n$
16. n^2
17. $4^{\lg n} = \Theta(n^2)$
18. n^3
19. $(\lg n)!$
20. $n^{\lg \lg n}$
21. $\lg n^{\lg n}$
22. $\frac{3}{2}^n$
23. 2^n
24. $n \cdot 2^n$
25. ϵ^n
26. $n!$
27. $(n+1)!$
28. $\sqrt{n}^{\lg n}$
29. 2^{2^n}
30. $2^{2^{n+1}}$

1.5 Посчитать точно

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$
   Решение
   $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots$
   Заметим, что это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с $q = \frac{1}{2}$. Тогда посчитаем ее сумму по формуле:
   $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^0}}{1-\frac{1}{2}} = 2$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$
   Решение
   $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = \frac{1}{2^0} - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} - \cdots =$
   $(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^2} + \cdots) - (\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \cdots)$
   Заметим, что это разность двух бесконечно убывающих геометрических прогрессий с $q_1 = q_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. Тогда посчитаем их суммы, а затем вычтем ту, что с нечетными степенями из той, что с четными.
   $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^0}}{1-\frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{2^1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

2 Дополнительная часть

2.1 Истина или ложь

1. $n^n = \mathcal{O}(n!)$
   Решение
   Утверждение неверно.
   $c \cdot n! = c \cdot \Pi_{i=1}^{n} i \leq \Pi_{i=1}^{n} n = n^n$
   Неравенство выше верно, так как c неизменна, а n можем сделать сколь угодно большой.