Проект по курсу сложности вычислений. Задача о рюкзаке

Прохорчук Екатерина Б05-151

27 ноября 2023 г.

Аннотация

Задача о рюкзаке (Knapsack Problem) является одной из классических задач комбинаторной оптимизации, где требуется выбрать определенное подмножество предметов с заданными весами и стоимостями так, чтобы суммарная стоимость была максимальной, а суммарный вес не превышал заданную вместимость рюкзака. В данном проекте исследуется полиномиальная схема приближения для этой задачи, представляющая собой алгоритм, который находит $(1+\epsilon)$-приближенное решение задачи о рюкзаке с заданным параметром ϵ. В рамках проекта будет представлен алгоритм приближения, его анализ и доказательство эффективности приближения.

План

1. Введение

    - Введение в задачу о рюкзаке и ее важность в различных областях.
    - Обзор определений и формулировок задачи о рюкзаке.

2. Обзор существующих решений

    - Подробное рассмотрение жадных алгоритмов для задачи о рюкзаке.
    - Указание на недостатки жадных алгоритмов в достижении точных решений.
    - Введение понятия $(1+\epsilon)$-приближенного решения.

3. Полиномиальный алгоритм приближения

    - Описание полиномиальной схемы приближения для задачи о рюкзаке.
    - Подробное описание алгоритма, включая шаги и процедуры.
    - Расчет временной сложности алгоритма.

4. Доказательство эффективности приближения

    - Доказательство того, что найденное решение близко к оптимальному $(1+\epsilon)$-приближение.

5. Реализация алгоритма

6. Литература

1 Введение

Задача о рюкзаке (Knapsack Problem) является одной из классических задач комбинаторной оптимизации, где требуется выбрать определенное подмножество предметов с заданными весами и стоимостями так, чтобы суммарная стоимость была максимальной, а суммарный вес не превышал заданную вместимость рюкзака.

В данном проекте будут разобраны различные определения и формулировки задачи о рюкзаке, включая варианты с несколькими рюкзаками, а так же с различными ограничениями на предметы. Будет рассмотрена классическая формулировка задачи, которая является фундаментом для множества вариаций.

Целью данного проекта является исследование и разработка полиномиальной схемы приближения для задачи о рюкзаке. Необходимо найти эффективный алгоритм, который может находить $(1+\epsilon)$-приближенное решение задачи, где ϵ - произвольное (рациональное) положительное число, и $\epsilon > 0$. Для достижения этой цели будет разработан алгоритм, проведен анализ его эффективности и представлено доказательство того, что он обеспечивает необходимую точность приближения.Будут включены как теоретические аспекты задачи о рюкзаке, так и практическую реализацию алгоритма.

2 Обзор существующих решений

Формулировка задачи: Имеется набор из n предметов. У каждого предмета есть положительный вес w и стоимость c. Также дано неотрицательное число W — вместимость рюкзака. Требуется найти такое множество предметов M, чтобы оно помещалось в рюкзак, и суммарная стоимость предметов была максимальна. То есть:

$$\sum_{x \in M} c(x) \to max$$

$$s.t. \sum_{x \in M} w(x) \leqslant W$$

Варианты решения:

- Перебирать все подмножества набора из N предметов. Сложность такого решения O($2n$)
- Методом Meet-in-the-middle. Сложность решения O($2^n/2n$)
- Метод динамического программирования. Сложность — O(nW)
- Жадный алгоритм. Сложность $O(nlog(n))$

Жадный алгоритм для задачи о рюкзаке состоит в следующем (считаем, что все предметы помещаются в рюкзак):

1. Выбрать максимально дорогой предмет, стоимости C_{max}
2. Упорядочить предметы по «удельной стоимости» (стоимости деленной на вес), и набивать рюкзак наиболее «удельно дорогими» предметами, пока они влезают. Пусть стоимость этого решения C_{greedy}
3. В зависимости от того, что больше, C_{max} или C_{greedy}, выбрать первое или второе решение.

Этот алгоритм имеет сложность $O(nlog(n))$, и гарантирует нахождение решения, не хуже чем в два раза от оптимального. Основной недостаток жадных алгоритмов заключается в том, что они не гарантируют нахождение оптимального решения. На практике они могут давать приближенные решения, но их точность зависит от конкретных данных.

Опредление 1 ϵ-оптимальные алгоритмы для задачи о рюкзаке с выбираемой точностью и временем выполнения, полиномиальным по n и $\frac{1}{\epsilon}$ (FPTAS — Fully Polynomial Time Approximation Scheme)

Одним из общих подходов к решению переборных задач является разработка приближенных алгоритмов с гарантированными оценками качества получаемого решения. Особую роль среди приближенных алгоритмов играют те, которые способны находить решения с любой, заданной как параметр, точностью.

Алгоритм с мультипликативной ошибкой не более $(1+\epsilon)$, где $\epsilon>0$, называется ϵ-оптимальным. Тот же термин ϵ-оптимальное используется для обозначения допустимого решения со значением целевой функции, отличающимся от оптимума не более чем в $(1+\epsilon)$ раз (таким образом, задача, стоящая перед ϵ-оптимальным алгоритмом, состоит в отыскании какого-либо ϵ-оптимального решения)

3 Полиномиальный алгоритм приближения

Опредление 2 Полностью полиномиальной аппроксимационной схемой (FPTAS) называется приближенный алгоритм, в котором уровень точности ϵ выступает в качестве нового параметра, и алгоритм находит ϵ-оптимальное решение за время, ограниченное полиномом от длины входа и величины ϵ^{-1}

Лемма

Сложность алгоритма с отбором "легких"решенией $O(nf^*)$ где f^* - максимальное значение $\sum_{x \in M} c(x)$

Пояснение:

Будем округлять $c_i \leftarrow [c_i/scale]\dot{s}cale$ т.е $c_i = 0(mod\ scale)$

c_i можно поделить на scale, от этого оптимальный выбор не меняется

время работы $O(\frac{nf^*}{scale})$

веса a_i - остались без измерений, следовательно любое допустимое решение округленной задачи является допустимым для исходной

присутствуют потери при округлении, значит наилучшее решение задачи будет меньше исходной

пусть $\overline{c_i} = [c_i/scale]\dot{s}cale$ - стоимости

$\overline{x_i} \in \{0, 1\}$ - берем или нет i-й предмет

$\overline{f} = \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i}(x)\overline{x_i}$ - наилучшее решение задачи

Если округляем только j-й предмет, то

$\overline{x_i} = 1$ j-й предмет берем в рюкзак. Теряем $c_j - \overline{c_j} \leq scale$

$\overline{x_i} = 0$ j-й предмет берем не берем в рюкзак, то есть нашли что-то подороже. Теряем $\leq c_j - \overline{c_j} \leq scale$

Если округляем все предметы то $f^* - \overline{f} \leq n * scale$

4 Доказательство эффективности приближения

f^* - наилучшее решение

f' - стоимость аппроксимации. $f' = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{x_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_i \overline{x}_i = \overline{f}$

Абсолютная погрешность $f^* - f' \leq f^* - \overline{f} \leq n * scale$

Погрешность $\leq \frac{\epsilon}{\epsilon+1} f^*$

Значит решение ϵ- приближенное

$f' \geq f^* - \frac{\epsilon}{\epsilon+1} f^* = \frac{f^*}{\epsilon+1}$

$scale \to max$

$scale \leq \frac{\epsilon f^*}{n(\epsilon+1)}$

Нижняя оценка наилучшего решения $f_{best} \leq f^*$

$scale = max(1, \frac{\epsilon f_{best}}{n(\epsilon+1)})$

5 Литература

1. Н.Н.Кузюрин, С.А. Фомин "Эффективные алгоритмы и сложность вычислений"

2. https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=