# Лабораторная работа №1

# Решение уравнения c одной переменной

Рассмотрим уравнение относительно переменной



|  |  |
| --- | --- |
| , | (1.1) |

где функция  определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале .

Всякое значение переменной , обращающее функцию  в нуль, , называется корнем уравнения (1.1), а способ нахождения этого значения  ‑ способом решения данного уравнения.

**Задание 1**

Сделать отделение корней: графически и по программе (точность ). Индивидуальные задания приведены в таблице 1.

**Задание 2**

2. Провести уточнение корней методом половинного деления.

В качестве начального приближения выберем значение , являющееся серединой указанного интервала. Затем проводим исследование функции  на концах отрезков  и . Выбирается тот отрезок, у которого значение функции на концах имеет противоположные знаки. Обозначим выбранный отрезок . Далее аналогично выполняются следующие шаги итерационного процесса, в результате которых последовательно формируются отрезки разбиения ,  При этом выполняется условие . Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие . Точность  принять равной .

**Задание 3**

3. Сделать уточнение корней методом простой итерации.

Пусть корни уравнения  отделены и отрезок  содержит единственный корень уравнения. Для построения итерационной процедуры приведем уравнение (1.1) к следующему виду:

|  |  |
| --- | --- |
| , | (1.2) |

где функция  является дифференцируемой на всем отрезке , и для любого значения  такого, что , модуль производной . Графически решение уравнения (1.2) соответствует пересечению двух линий – прямой  и некоторой в общем случае кривой . Функцию  можно подобрать различным образом, в частности, в виде

|  |  |
| --- | --- |
| , | (1.3) |

где коэффициент  находится из следующего условия , которое должно выполняться для всех , то есть . В простейшем случае выбирают  Последнее условие гарантирует сходимость итерационной последовательности  к корню . Условием окончания итерационной процедуры будем считать выполнение неравенства

|  |  |
| --- | --- |
| , | (1.4) |

где .

Сделать уточнение корней методом хорд (X) или касательных (K) в таблице 1) с заданной точностью .

Расчетная формула для уточнения корней в методе хорд имеет следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

для метода касательных расчетная формула записывается следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Значение  для метода хорд и начальная точка для метода касательных выбираются из условия одинакового знака функции и ее второй производной в этой точке, что определяется выполнением неравенства .

В результате выполнения итерационной процедуры с использованием приведенных формул может быть получена последовательность приближенных значений корня. Процесс вычислений заканчивается при выполнении условия  (). В каждом из рассмотренных выше случаев требуется вывести на печать количество итераций, необходимых для достижения заданной точности.

Примерный вариант выполнения лабораторной работы № 1 на MathCad

Задание 1. Определение, построение таблиц значений и графиков функций и отделение корней уравнения .

Отделяем корни графически. Для этого по графику функции, определяем приближенные значения аргумента , при которых график пересекает линию  (рисунок 1.1).

|  |
| --- |
|  |
| Рисунок 1.1 |

Как следует из рисунка 1.1, график функции три раза пересекает линию . Приближенные значения корней составляют , , .

Задание 1. Вычисление корней методом половинного деления.

Для нахождения первого корня задаем в соответствии с рисунком 1.1 интервал , который содержит корень . Далее выполняем последовательность операций, определенных заданием 1 лабораторной работы. Получаем последовательность значений

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -2,125 |
|  | -2,1875 |
|  | -2,21875 |
|  | -2,203125 |
|  | -2,1953125 |
|  | -2,19140625 |
|  | -2,1894531255 |
|  | -2,1904296875 |
|  | -2,19091796875 |
|  | -2,191162109375 |
|  | -2,1910400390625 |
|  | -2,19110107421875 |
|  | -2,191131591796875 |
|  | -2,19111633300778125 |
|  | -2,1911087036132812 |
|  | -2,1911048889160156 |

Для нахождения второго корня задаем в соответствии с рисунком 1.1 интервал , который содержит корень . Далее выполняем последовательность операций, определенных заданием 1 лабораторной работы. Получаем последовательность значений

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -0,125 |
|  | -0,1875 |
|  | -0,15625 |
|  | -0,140625 |
|  | -0,1328125 |
|  | -0,12890625 |
|  | -0,126953125 |
|  | -0,1259765625 |
|  | -0,12548828125 |
|  | -0,125732421875 |
|  | -0,1256103515625 |
|  | -0,12554931640625 |
|  | -0,125518798828125 |
|  | -0,1255035400390625 |
|  | -0,12549591064453125 |
|  | -0,12549209594726562 |

Для нахождения третьего корня задаем в соответствии с рисунком 1.1 интервал , который содержит корень . Далее выполняем последовательность операций, определенных заданием 1 лабораторной работы. Получаем последовательность значений

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | 2,375 |
|  | 2,3125 |
|  | 2,34375 |
|  | 2,359375 |
|  | 2,3671875 |
|  | 2,36328125 |
|  | 2,361328125 |
|  | 2,3603515625 |
|  | 2,36083984375 |
|  | 2,361083984375 |
|  | 2,3609619140625 |
|  | 2,36102294921875 |
|  | 2,361053466796875 |
|  | 2,3610382080078125 |
|  | 2,3610305786132812 |
|  | 2,361034393310547 |

Задание 2. Решение с использованием операторов ***Given*, *Find***.

Вычисление корня .

Задать начальное значение переменной , например, . Набрать ключевое слово ***Given***. На следующей строке записать уравнение , используя знак  из опции «Булева алгебра». Ниже с использованием символа  определить оператор, например, в виде  и выполнить вычисление. Результат будет представлен в виде .

Вычисление корня .

Задать начальное значение переменной , например, . Далее повторить выполнение всех операций. Результат будет представлен в виде .

Вычисление корня .

Задать начальное значение переменной , например, . Далее повторить выполнение всех операций. Результат будет представлен в виде .

Задание 3. Символьное решение.

Определить правую часть уравнения как функцию . Вызвать на панели инструментов опцию «Символьные преобразования с ключевыми словами» и вызвать оператор **solve.** Слева от оператора набрать . Провести вычисление. Результат будет представлен в виде .

Задание 3.

3.1. Решение уравнения методом итераций

Задаем начальное значение переменной , например, . Определяем цикл переменной  в виде . Значения в последующих итерациях определяются в виде

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

где в простейшем случае .

Нахождение первого корня.

Задаем начальное значение переменной , например, . Определяем цикл переменной  в виде . Получаем следующие значения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -2,5 |
|  | -2,2195231486397593 |
|  | -2,1963223954888482 |
|  | -2,192104070421848 |
|  | -2,1912959674142773 |
|  | -2,191397049595025 |
|  | -2,191109434543963 |
|  | -2,191103568678981 |
|  | -2,191102431903273 |
|  | -2,1911022115988916 |
|  | -2,1911021689043286 |

Нахождение второго корня. Задаем начальное значение переменной , например, . Далее повторяем все операции. Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -0,5 |
|  | -0,07845500449770815 |
|  | -0,13561715524872475 |
|  | -0,12337501838300889 |
|  | -0,1259401537446686 |
|  | -0,12539975441324874 |
|  | -0,12551347558843193 |
|  | -0,125489538616165 |
|  | -0,1254945768207251 |
|  | -0,1254935163788699 |
|  | -0,12549373958030427 |

Нахождение третьего корня. Задаем начальное значение переменной , например, . Далее повторяем все операции. Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | 2,5 |
|  | 2,3664337287336752 |
|  | 2,36145549551998176 |
|  | 2,3610662172725605 |
|  | 2,3610352191507564 |
|  | 2,36103274331328 |
|  | 2,3610325455410415 |
|  | 2,361032529742644 |
|  | 2,3610325284806395 |
|  | 2,361032528379828 |
|  | 2,361032528371775 |

3.2. Решение уравнения методом хорд

Нахождение первого корня.

Задаем начальное значение переменной , например, . Определяем цикл переменной  в виде . Значения в последующих итерациях определяются в виде

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -2,5 |
|  | 0 |
|  | -0,8870487883371184 |
|  | -6,904932451101041 |
|  | -1,555716403755966 |
|  | -2,0804576825020002 |
|  | -2,1777676128742627 |
|  | -2,189594290126664 |
|  | -2,1909329536186384 |
|  | -2,1910831878338706 |
|  | -2,1911000318931557 |

Нахождение второго корня. Задаем начальное значение переменной , например, . Далее повторяем все операции. Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -0,5 |
|  | 0 |
|  | -0,13322297272829486 |
|  | -0,12490401177193457 |
|  | -0,12553812746852155 |
|  | -0,12549035047614265 |
|  | -0,1254939534028401 |
|  | -0,12549368171953773 |
|  | -0,12549370220626868 |
|  | -0,12549370066143321 |
|  | -0,1254937007779241 |

Нахождение третьего корня. Задаем начальное значение переменной , например, . Далее повторяем все операции. Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | 2,5 |
|  | 0 |
|  | 0,8870487883371184 |
|  | 2,157879663208658 |
|  | 2,3510869949338793 |
|  | 2,360605266079522 |
|  | 2,3610142902331575 |
|  | 2,3610317500712155 |
|  | 2,361032495158061 |
|  | 2,3610325269537507 |
|  | 2,361025283684945 |

3.3. Решение уравнения методом касательных

Для нахождения первого корня задаем начальное значение, например, . Определяем цикл переменной  в виде . Значения в последующих итерациях определяются в виде



Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -3,0 |
|  | -2,2879959689741596 |
|  | -2,1947712333977556 |
|  | -2.1911081170993763 |
|  | -2.191102158641231 |
|  | -2.191102158641231 |
|  | -2.191102158641231 |
|  | -2.191102158641231 |
|  | -2.191102158641231 |
|  | -2.191102158641231 |
|  | -2.191102158641231 |

Для нахождения второго корня задаем начальное значение . Далее повторяем все операции. Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | -0,5 |
|  | -0,07845500449770815 |
|  | -0.125337003812367 |
|  | -0,12549369843928063 |
|  | -0,1254937006975586 |
|  | -0,1254937006975586 |
|  | -0,1254937006975586 |
|  | -0,1254937006975586 |
|  | -0,1254937006975586 |
|  | -0,1254937006975586 |
|  | -0,1254937006975586 |

Для нахождения третьего корня задаем начальное значение . Далее повторяем все операции. Получаемые значения переменной  представлены ниже

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *x*= |  | 1,5 |
|  | 3,711869292412005 |
|  | 2.2704234639701384 |
|  | 2,364162395033791 |
|  | 2,364103581632058 |
|  | 2,3610325283747198 |
|  | 2,361032528371076 |
|  | 2,361032528371076 |
|  | 2,361032528371076 |
|  | 2,361032528371076 |
|  | 2,361032528371076 |

Таблица 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| N | Метод | Уравнение |
| 1 | K |  |
| 2 | К |  |
| 3 | Х |  |
| 4 | К |  |
| 5 | Х |  |
| 6 | К |  |
| 7 | Х |  |
| 8 | K |  |
| 9 | X |  |
| 10 | K |  |

**Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте этапы решения уравнения с одной неизвестной.

2. Приведите способы отделения корней.

3. Каким образом графическое отделение корней уточняется с помощью вычислений?

4. Дайте словесное описание алгоритма метода половинного деления при решении уравнения.

5. Необходимые условия сходимости метода половинного деления при решении уравнения.

6. Сформулируйте условие окончания счета метода простой итерации. Какова погрешность метода.

7. Дайте словесное описание алгоритма метода хорд. Графическое представление метода. Как производится вычисление погрешности.

8. Дайте словесное описание алгоритма метода касательных (Ньютона). Графическое представление метода. Сформулируйте условие выбора начальной точки.