基于倒立摆的 LQR 控制器设计与仿真

1　倒立摆的数学模型

对倒立摆进行数学建模，设其质量为 m, 杆长为 l, 与铅垂面夹角为 ϕ, 杆的末端水平移动速度为 δ。则其数学模型为：

$$\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\phi - \frac{1}{l}\ddot{\delta} \tag{1}$$

另 $x_1 = \phi$，$x_2 = \dot{\phi}$，$u = \frac{1}{l}\ddot{\delta}$，将其写出状态方程的形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \tag{2}$$

不妨设 $l = 1m, g = 10m/s^2$，则上式变为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \tag{3}$$

2　LQR 控制器

我们知道对于一个开环系统，其状态方程为 $\dot{x} = Ax$; 为使其稳定我们引入一个状态负反馈：$u = -kx$, 此时形成一个闭环系统，其状态方程为 $\dot{x} = A_{cl}x$, 其中 $A_{cl} = A - Bk$。显然，我们可以选择不同的 k 值来改变闭环系统的特征值，从而控制系统的表现。LQR 控制器就提供了一种确定特征值的方法，用于帮助我们选择合适的特征值，从而控制系统满足我们的设计需求。LQR 控制器引入了一个能量函数：

$$J = \int_0^t \left(x^\top Q x + u^\top R u \right) dt \tag{4}$$

其中，可以选择 Q 矩阵为对角矩阵：$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$, 此时 $x^\top Q x = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots$,
若 a_{11} 远大于其他值，则此时 x_1 对于 J 有较大影响。下面考虑输入，同样的，如果 R 越大，则 J 的值对于输入越敏感。我们期望的就是找到 J 的最小值，这样的好处在于既满足了被控制量的快速收敛（可以给定被控量所对应的系数以较大的 a)，也考虑了输入对于 J 的影响。相比于在传统控制中的偏差积分，偏差平方积分等方法，考虑了系统对于输入的敏感性。对于输出有限

制的系统（比如电机扭矩较小），可以调大 R 的大小，从而设计符合要求的控制器，使其同时满足控制要求又满足系统的输出要求。

3 Simulink 仿真

设计负反馈系统，使 $u = -kx$, 先通过 MATLAB 计算符合系统要求的 k 值：

- 系统 1：对于系统输出无要求，希望倒立摆快速稳定。
- 系统 2：对于系统输出有要求，期望输出不太大的同时可以使倒立摆快速稳定。

对于系统 1：

```
clear;
A = [0 1; 10 0];
B = [0; -1];
Q = [100 0; 0 1];
R = 0.01;
K = lqr(A,B,Q,R)
```

得到此时的 K 为 $[-110.4988, -17.9164]$。同样我们可以计算得到系统 2 的 K 为：$[-20.0050 - 6.3261]$。

simulink 模型如下：

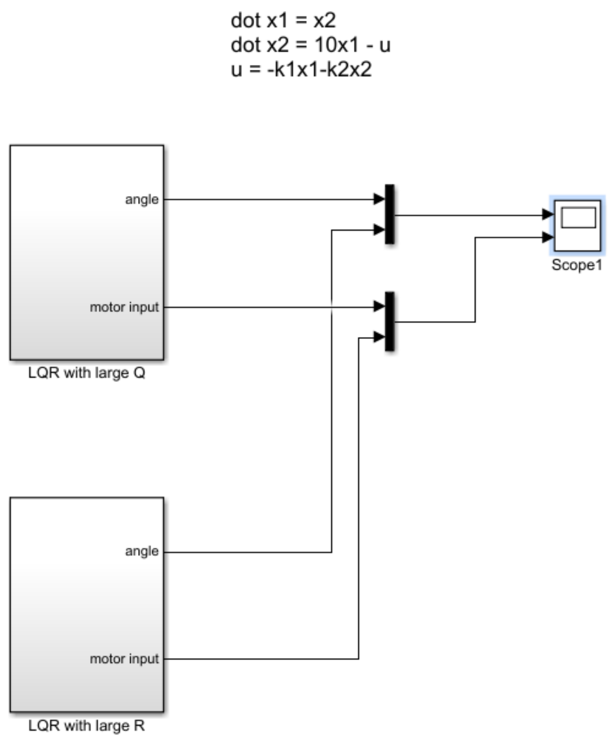

图 1: simulink 模型

仿真结果如下：

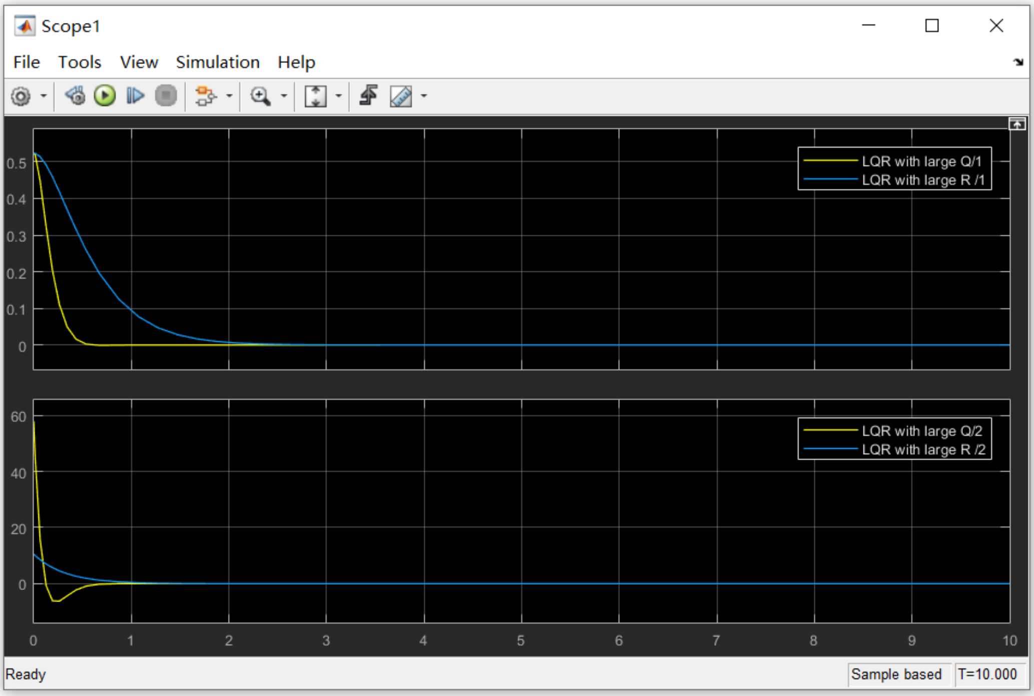

图 2: 仿真结果