Vstupní signály pro identifikaci systémů

Ing. Petr Blaha, PhD.

16. prosince 2017

Komplexní inovace studijních programů a zvyšování kvality výuky na FEKT VUT v Brně
OP VK CZ.1.07/2.2.00/28.0193

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Používané typy vstupních signálů

- skoková změna
- pseudonáhodná binární posloupnost
- součet harmonických průběhů

Neparametrické metody - skoková změna, puls
Korelační analýza - PRBS

Výběr vhodného vstupního signálu a jeho nastavení významnou měrou ovlivňuje kvalitu identifikace.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Motivační příklad

Uvažujme systém popsaný rovnicí

$$y(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k)$$

Odhadovaný výstup z modelu je roven

$$\hat{y}(k+1) = -\hat{a}_1 y(k) + \hat{b}_1 u(k)$$

Uvažujme konstantní vstupní signál $u(t) =$ konst. a že parametry vyhovují následující rovnici

$$\frac{b_1}{1+a_1} = \frac{\hat{b}_1}{1+\hat{a}_1}$$

Tato rovnice znamená, že systém a model mají shodné statické zesílení.

Motivační příklad-pokračování

Chyba mezi skutečným a odhadovaným výstupem

$$\varepsilon(k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1) = 0$$

ikdyž se parametry vzájemně nerovnají ($\hat{a}_1 \neq a_1$ a $\hat{b}_1 \neq b_1$)

Z toho plyne závěr, že pomocí konstantního vstupního signálu nelze identifikovat parametry systému.

Otázka: Dá se tento systém identifikovat pomocí jednoho harmonického průběhu?

Skoková změna

Skoková změna

Skoková změna se dá popsat rovnicí

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Jediný volitelný parametr je amplituda skoku u_0. Volí se s ohledem na

- odstup signálu a šumu
- linearitu systému
- možnost vybuzení

Skoková změna

Skoková změna se dá popsat rovnicí

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Jediný volitelný parametr je amplituda skoku u_0. Volí se s ohledem na

- odstup signálu a šumu
- linearitu systému
- možnost vybuzení

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Skoková změna

Skoková změna se dá popsat rovnicí

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Jediný volitelný parametr je amplituda skoku u_0. Volí se s ohledem na

- odstup signálu a šumu
- linearitu systému
- možnost vybuzení

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Skoková změna

Skoková změna se dá popsat rovnicí

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Jediný volitelný parametr je amplituda skoku u_0. Volí se s ohledem na

- odstup signálu a šumu
- linearitu systému
- možnost vybuzení

Použití

Umožňuje nám jednoduše zjistit

- statické zesílení
- dobu náběhu (dominantní časová konstanta)
- překmit (rezonance)

Použití

Umožňuje nám jednoduše zjistit

- statické zesílení
- dobu náběhu (dominantní časová konstanta)
- překmit (rezonance)

Použití

Umožňuje nám jednoduše zjistit

- statické zesílení
- dobu náběhu (dominantní časová konstanta)
- překmit (rezonance)

Použití

Umožňuje nám jednoduše zjistit

- statické zesílení
- dobu náběhu (dominantní časová konstanta)
- překmit (rezonance)

Binární pseudonáhodná posloupnost

Pseudo Random Binary Sequence - PRBS

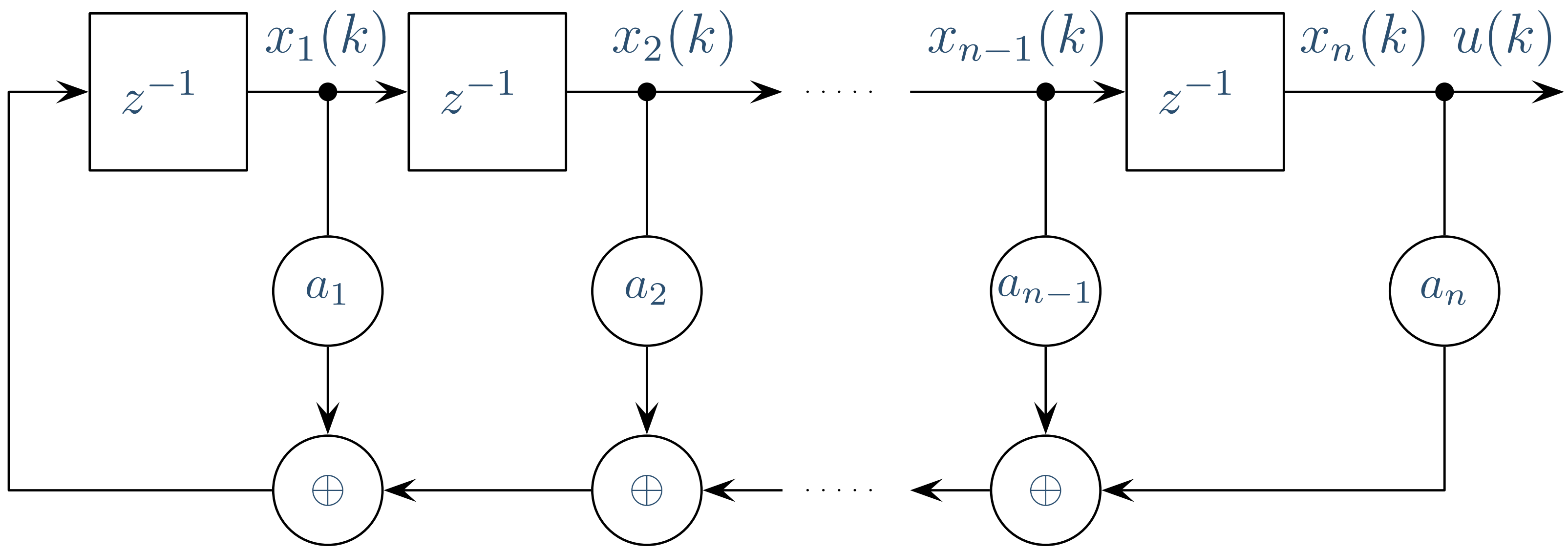
Binární (nabývá pouze dvou hodnot) **pseudonáhodná** (kovarianční funkce obdobná jako u bílého šumu, přesto se dá vždy určit následující prvek) **posloupnost**.

Generuje se pomocí posuvného registru a sčítaček modulo 2. Jsou povoleny všechny stavy, kromě samých nul. Pokud se vystřídají všechny povolené stavy, hovoříme o **PRBS maximální délky** M

$$M = 2^N - 1$$

kde N je počet posuvných registrů.

Blokové schéma generátoru PRBS



Sčítačka modulo 2 se chová podle tabulky

u_1	u_2	$u_1 \oplus u_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Zpětnovazební koeficienty $a_1, a_2, \ldots a_n$ jsou rovny 0 nebo 1.

Vzorkování generátoru se může lišit od vzorkování systému.

Maticový zápis generátoru PRBS

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(k)$$

$$u(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(k)$$

Všechny operace sčítání jsou prováděny v modulo 2.
Jedná se o konečný automat - konečný počet stavů.

Posunutí PRBS

Vytvoření PRBS, kde se střídají na výstupu hodnoty a a b

$$u'(k) = a + (b - a)u(k)$$

Příklad: Vygenerujte PRBS signál střídající hodnoty ± 1 ($a = -1$ a $b = 1$)

$$u'(k) = -1 + 2u(k)$$

Vytvoření PRBS maximální délky M závisí na použitých zpětných vazbách

Příklady

Uvažujme generátor se třemi posuvnými registry $(n = 3)$ a počátečním stavem $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

Zpětná vazba od stavů 1 a 2 $(a_1 = 1, a_2 = 1$ a $a_3 = 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Zpětná vazba od stavů 1 a 3 $(a_1 = 1, a_2 = 0$ a $a_3 = 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Cvičně zpětná vazba od všech stavů.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRBS maximální délky

- její korelační funkce se podobá korelační funkci bílého šumu (není zajištěno u PRBS s kratší délkou než maximální)

Zpětné vazby zajišťující maximální délku PRBS

Počet registrů n	Délka periody M	Vazby od
2	3	a_1 a a_2
3	7	a_1 a a_3
4	15	a_3 a a_4
5	31	a_3 a a_5
6	63	a_5 a a_6
7	127	a_4 a a_7
8	255	a_2, a_3, a_4 a a_8
9	511	a_5 a a_9
10	1023	a_7 a a_{10}

Střední hodnota PRBS

Pro PRBS maximální délky platí, že během jedné periody $M = 2^n - 1$ je zde $(M+1)/2 = 2^{n-1}$ jedniček a $(M-1)/2 = 2^{n-1} - 1$ nul. Odtud vychází střední hodnota

$$m = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} y(k) = \frac{1}{M}\frac{M+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2M}$$

Střední hodnota je o něco málo větší než 0.5.

Rozptyl PRBS

Pro rozptyl platí

$$R(0) = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}[y(k) - m]^2 =$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}[y^2(k) - 2y(k)m + m^2] =$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}y^2(k) - \frac{2m}{M}\sum_{k=1}^{M}y(k) + m^2$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}y^2(k) - 2m^2 + m^2 = m(1-m) = \frac{M^2-1}{4M^2}$$

Rozptyl je o něco menší než 0.25.

Kovariance PRBS pro $\tau \neq 0$ a $|\tau| < M$

$$r(\tau) = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}[y(k+\tau)-m][y(k)-m] =$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} y(k+\tau)y(k) - m^2 =$$

$$= \ldots = \frac{m}{2} - m^2 = -\frac{M+1}{4M^2}$$

Je vidět, že pro velké M jsou hodnoty kovariancí pro $\tau \neq 0$ a a $|\tau| < M$ přibližně rovny nule.

Příklad

Příklad: Určete střední hodnotu, rozptyl a kovarianční funkci posunuté PRBS

$$u'(k) = -1 + 2u(k)$$

Střední hodnota je $m_{y'} = \frac{1}{M} \approx 0$, rozptyl $r_{y'}(0) = 1 - \frac{1}{M^2} \approx 1$ a kovariance $r_{y'} = -\frac{1}{M} - \frac{1}{M^2} \approx -\frac{1}{M}$ pro $\tau \neq 0$ a $|\tau| < M$.

Je vidět že kovariance této PRBS se přibližně shodují s kovariancemi **bílého šumu** s rozptylem rovným 1.

Vhodné nastavení PRBS pro identifikaci

Pro správnou identifikaci statického zesílení je třeba, aby délka nejdelšího impulsu T_{max} byla větší než doba náběhu t_n $T_{max} = n \cdot T_{vz} > t_n$.

Na základě této rovnice určíme n a tím i délku PRBS $M = 2^n - 1$.

Pokud je n příliš velké, dá se nastavit perioda vzorkování PRBS jako p násobek periody vzorkování T_{vz}, kde $p = 1, 2, \ldots$. Potom platí rovnice $T_{max} = p \cdot n \cdot T_{vz} > t_n$

Další podmínkou je, abychom postihli co nejvíce frekvencí, t.j. volíme délku experimentu L delší nebo rovnu maximální délce PRBS M. Pokud je délka experimentu zadaná, musí platit podmínka $M = 2^n - 1 < L$

Výběr vhodné amplitudy

Výběr vhodné amplitudy se řídí stejnými pravidly jako výběr amplitudy u signálu se skokovou změnou

- úroveň PRBS by měla převyšovat úroveň šumu
- při identifikaci nelineárního systému nesmí být úroveň PRBS příliš velká, abychom dostali správný linearizovaný model kolem pracovního bodu

V případě nízkého poměru signál/šum lze prodloužením délky trvání experimentu zvýšit přesnost identifikovaných parametrů (když nemůžeme zvýšit amplitudu PRBS).

Součet harmonických signálů

Součet harmonických signálů

Vstupní signál je určen

$$u(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j)$$

kde $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_m \leq \pi$ Musí se zvolit amplitudy, frekvence a fáze.

$\omega_1 = 0$ - odpovídá stejnosměrné složce

$\omega_m = \pi$ - odpovídá složce, která v každém kroku mění své znaménko

Určení nutného počtu harmonických

Uvažujme identifikaci parametrů systému

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i)$$

Neznámých parametrů je $n = n_a + n_b$.

Pokud je n sudé, potřebujeme $m \geq \frac{n}{2}$.
Pokud je n liché, potřebujeme $m \geq \frac{n+1}{2}$.

Jinými slovy, čím je bohatší spektrum signálu, tím je identifikace snazší (bílý šum, PRBS).

Stupeň persistentního buzení

Signál $u(t)$ je **persistentně budicí stupně n**, pokud současně platí

1. existuje limita

$$r_u(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} u(t+\tau)u^T(t)$$

2. následující matice je positivně definitní

$$R_u(n) = \begin{pmatrix} r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & \cdots & r_u(n-1) \\ r_u(-1) & r_u(0) & r_u(1) & \cdots & r_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_u(1-n) & r_u(2-n) & r_u(3-n) & \cdots & r_u(0) \end{pmatrix}$$

Příklady

Příklad: Určete stupeň persistentního vybuzení bílého šumu $u(t)$ s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ^2.

$$r_u(\tau) = \sigma^2 \delta_{0,\tau}$$

$$R_u(n) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$$

kde $R_u(n)$ je vždycky positivně definitní $\rightarrow$ persistentní vybuzení všech řádů.

Příklad: Určete stupeň persistentního vybuzení skokové změny $u(t)$ o hodnotu σ.

$$r_u(\tau) = \sigma^2 \text{ pro všechna } \tau$$

Proto je $R_u(n)$ nesingulární jen pro $n = 1$

Příklad: Určete stupeň persistentního vybuzení impulsu $u(t) = 1$ pro $t = 0$, jinak $u(t) = 0$.

$$r_u(\tau) = 0 \text{ pro všechna } \tau$$

Proto je $R_u(n) = 0$. Impuls není persistentně budícím signálem žádného řádu.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Poznámky

Nutnou podmínkou pro správnou identifikaci systému n-tého řádu je budicí signál se stupněm persistentního vybuzení rovným $2 \cdot n$. Při použití metody nejmenších čtverců je postačující stupeň n.

Podmínka pro persistentní vybuzení platí u systémů, které jsou zašuměné. To vyžaduje zpracovávat $N \to \infty$ dat. U systémů bez šumu lze provést identifikaci z konečného množství dat i z odezvy na impuls případně na skokovou změnu vstupního signálu.