





Neparametrické metody identifikace

doc. Ing. Petr Blaha, PhD.

16. září 2024



Úvod

Rozdělení

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Úvod





Úvod

Rozdělení

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

- impulzová nebo přechodová charakteristika
- korelační metody
- frekvenční analýza
- spektrální analýza





Úvod

Rozdělení

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

- impulzová nebo přechodová charakteristika
- korelační metody
- frekvenční analýza
- spektrální analýza





Úvod

Rozdělení

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

- impulzová nebo přechodová charakteristika
- korelační metody
- frekvenční analýza
- spektrální analýza





Úvod

Rozdělení

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

- impulzová nebo přechodová charakteristika
- korelační metody
- frekvenční analýza
- spektrální analýza



Úvod

lmpulzová charakteristika

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Impulzová charakteristika





Impulzová charakteristika

Úvod

Impulzová charakteristika

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Ideální Dirakův impuls $\delta(t)$ je nerealizovatelný. Používá se aproximace

$$u(t) = \begin{cases} 1/\alpha & 0 \le t < \alpha \\ 0 & \alpha \le t \end{cases}$$





Impulzová charakteristika

Úvod

Impulzová charakteristika

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Ideální Dirakův impuls $\delta(t)$ je nerealizovatelný. Používá se aproximace

$$u(t) = \begin{cases} 1/\alpha & 0 \le t < \alpha \\ 0 & \alpha \le t \end{cases}$$

Je zde splněna podmínka $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt = 1$.





Impulzová charakteristika

Úvod

Impulzová charakteristika

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Ideální Dirakův impuls $\delta(t)$ je nerealizovatelný. Používá se aproximace

$$u(t) = \begin{cases} 1/\alpha & 0 \le t < \alpha \\ 0 & \alpha \le t \end{cases}$$

Je zde splněna podmínka $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt = 1$. Snahou je zajistit, aby α bylo mnohem menší než dominantní časové konstanty zkoumaného systému. Potom

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} g(s)u(t-s)ds = \frac{1}{\alpha} \int_{\max(0,t-\alpha)}^{t} g(s)ds \approx g(t)$$

(g(s)) se v rámci integračních mezí **nemění**).



Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád Druhý řád Vysvětlení konstant Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové konstanty Systémy s astatizmem Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Přechodová charakteristika





Systém prvního řádu

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2

Stejné časové konstanty

Systémy s

astatizmem

Průběhy pro různé

tlumení ξ

Průběhy pro různé

tlumení ξ

Kmitavá odezva

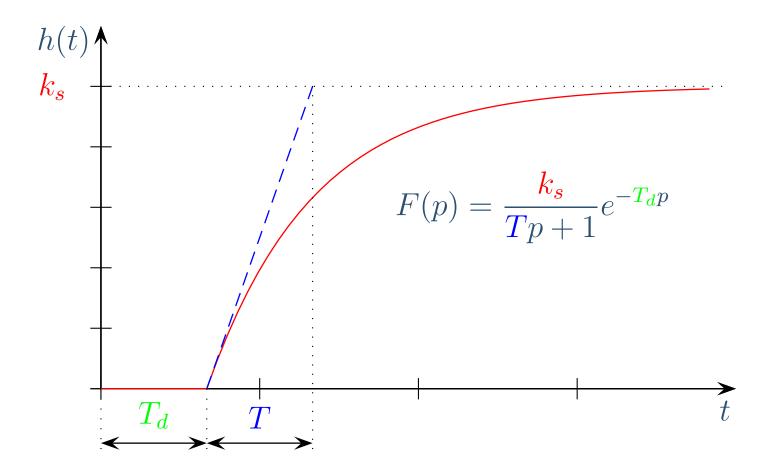
Identifikace pomocí

korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Přechodová charakteristika systému prvního řádu (statická, s dopravním zpožděním).







Systém druhého řádu

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové konstanty Systémy s astatizmem Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ

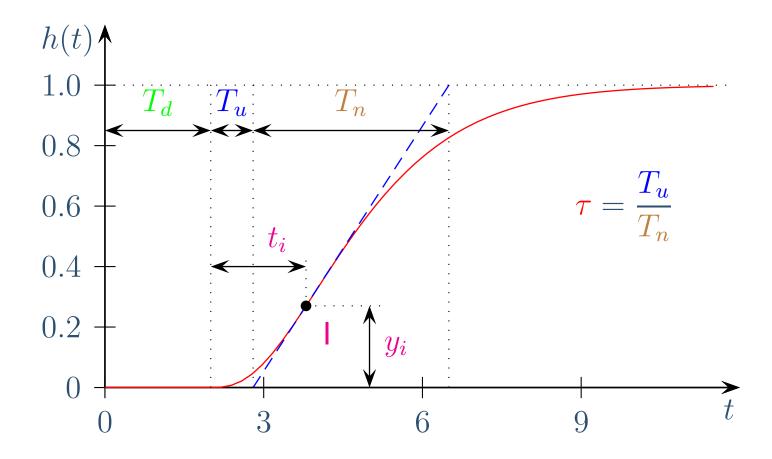
Identifikace pomocí korelačních metod

Kmitavá odezva

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Přechodová charakteristika systému druhého řádu (normalizovaná v amplitudě, statická, nekmitavá, s dopravním zpožděním).







Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové konstanty Systémy s astatizmem Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ

Identifikace pomocí korelačních metod

Kmitavá odezva

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

- \blacksquare T_d je dopravní zpoždění
- lacktriangle T_u je doba průtahu
- lacksquare T_n je doba náběhu
- lacksquare lacksquare je inflexní bod o souřadnicích $[t_i,y_i]$





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové konstanty Systémy s astatizmem Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

- \blacksquare T_d je dopravní zpoždění
- lacktriangle T_u je doba průtahu
- lacksquare T_n je doba náběhu
- lacksquare I je inflexní bod o souřadnicích $[t_i,y_i]$





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové konstanty Systémy s astatizmem Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ

Identifikace pomocí korelačních metod

Kmitavá odezva

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

- lacktriangle T_d je dopravní zpoždění
- lacktriangle T_u je doba průtahu
- lacktriangle T_n je doba náběhu
- lacksquare I je inflexní bod o souřadnicích $[t_i,y_i]$





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové konstanty Systémy s astatizmem Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ

Identifikace pomocí korelačních metod

Kmitavá odezva

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

- \blacksquare T_d je dopravní zpoždění
- lacktriangle T_u je doba průtahu
- lacktriangle T_n je doba náběhu
- \blacksquare I je inflexní bod o souřadnicích $[t_i, y_i]$





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové konstanty Systémy s astatizmem Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

- \blacksquare T_d je dopravní zpoždění
- lacktriangle T_u je doba průtahu
- lacktriangle T_n je doba náběhu
- lacksquare lacksquare je inflexní bod o souřadnicích $[t_i,y_i]$
- $-\tau$ lze použít k určení vhodného typu modelu

$$\tau \begin{cases} < 0.1 & F_1(p) = \frac{k_s}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \\ > 0.1 & F_2(p) = \frac{k_s}{(T_2 p + 1)^n} \end{cases}$$



cAk

Dvě různé T_1 a T_2

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2

Stejné časové konstanty
Systémy s astatizmem
Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Pro $y_1 = 0.720$ odečteme t_1 . Součet časových konstant je

$$T_1 + T_2 = \frac{t_1}{1.2564}$$





Dvě různé T_1 a T_2

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2

Stejné časové konstanty Systémy s astatizmem Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Pro $y_1 = 0.720$ odečteme t_1 . Součet časových konstant je

$$T_1 + T_2 = \frac{t_1}{1.2564}$$

Vypočítáme $t_2=0.3574(T_1+T_2)$ a určíme y_2 . Tuto hodnotu dosadíme do rovnice

$$y_2 = 1 + \frac{1}{\tau_2 - 1} e^{-0.3574(1+\tau_2)} + \frac{1}{\frac{1}{\tau_2} - 1} e^{-0.3574(1+\frac{1}{\tau_2})}$$

odkud určíme $\tau_2 = \frac{T_2}{T_1}$ (třeba graficky nebo z tabulky)





Dvě různé T_1 a T_2

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2

Stejné časové konstanty
Systémy s astatizmem
Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Pro $y_1 = 0.720$ odečteme t_1 . Součet časových konstant je

$$T_1 + T_2 = \frac{t_1}{1.2564}$$

Vypočítáme $t_2 = 0.3574(T_1 + T_2)$ a určíme y_2 . Tuto hodnotu dosadíme do rovnice

$$y_2 = 1 + \frac{1}{\tau_2 - 1} e^{-0.3574(1+\tau_2)} + \frac{1}{\frac{1}{\tau_2} - 1} e^{-0.3574(1+\frac{1}{\tau_2})}$$

odkud určíme $au_2 = rac{T_2}{T_1}$ (třeba graficky nebo z tabulky)

								0.1611
$ au_2$	0.0	0.0435	0.0837	0.128	0.1838	0.2639	0.4031	1.0





Dvě různé T_1 a T_2

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2

Stejné časové konstanty Systémy s astatizmem Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Pro $y_1 = 0.720$ odečteme t_1 . Součet časových konstant je

$$T_1 + T_2 = \frac{t_1}{1.2564}$$

Vypočítáme $t_2=0.3574(T_1+T_2)$ a určíme y_2 . Tuto hodnotu dosadíme do rovnice

$$y_2 = 1 + \frac{1}{\tau_2 - 1} e^{-0.3574(1+\tau_2)} + \frac{1}{\frac{1}{\tau_2} - 1} e^{-0.3574(1+\frac{1}{\tau_2})}$$

odkud určíme $au_2 = rac{T_2}{T_1}$ (třeba graficky nebo z tabulky)

								0.1611
$ au_2$	0.0	0.0435	0.0837	0.128	0.1838	0.2639	0.4031	1.0

Ze znalosti poměru a součtu časových konstant lze určit T_1 a T_2 .





Stejné časové konstanty

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2

Stejné časové konstanty

Systémy s astatizmem Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Na základě hodnoty τ určíme z tabulky řád systému n a souřadnici inflexního bodu y_i .

	2							_	10
au	0.104	0.218	0.319	0.410	0.493	0.570	0.642	0.709	0.773
y_i	0.264	0.327	0.353	0.371	0.384	0.394	0.401	0.407	0.413





Stejné časové konstanty

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2

Stejné časové konstanty

Systémy s astatizmem Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Na základě hodnoty τ určíme z tabulky řád systému n a souřadnici inflexního bodu y_i .

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
au	0.104	0.218	0.319	0.410	0.493	0.570	0.642	0.709	0.773
y_i	0.264	0.327	0.353	0.371	0.384	0.394	0.401	0.407	0.413

Dále určíme z průběhu druhou souřadnici inflexního bodu t_i a vypočítáme časovou konstantu T

$$T = \frac{t_i}{n-1}$$





Systémy s astatizmem

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové konstanty

Systémy s astatizmem

Průběhy pro různé tlumení ξ Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Provede se derivace a převede se na problém určení přenosu systému bez astatizmu a výsledek se podělí operátorem p.





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové

konstanty

Systémy s

astatizmem

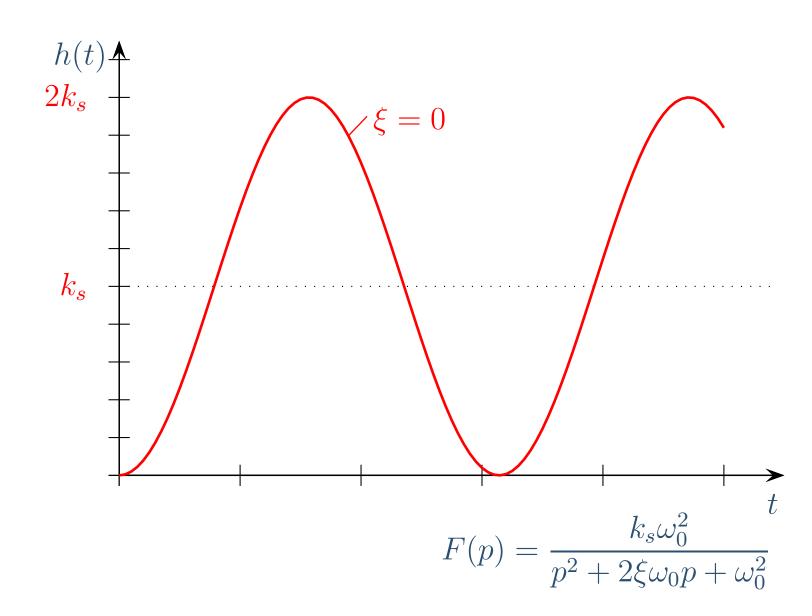
Průběhy pro různé tlumení ξ

Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza







Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové

konstanty

Systémy s

astatizmem

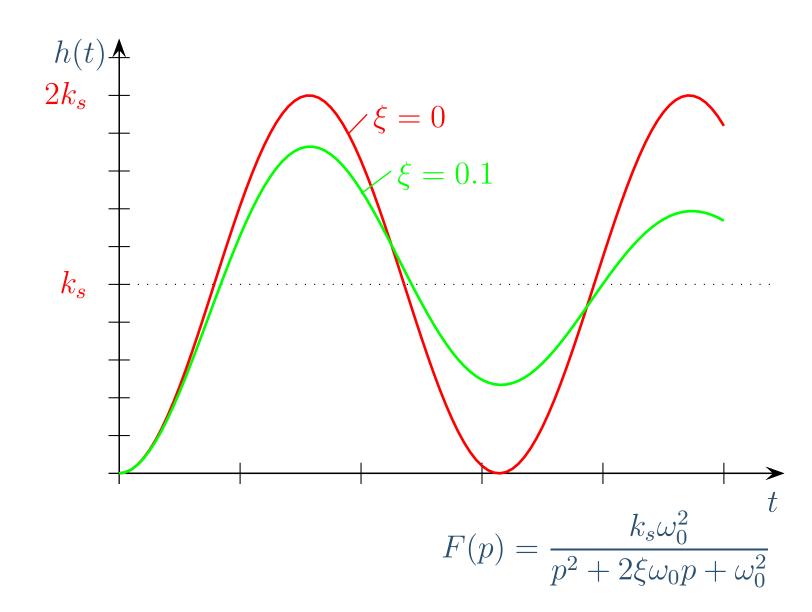
Průběhy pro různé tlumení ξ

Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza







Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2

Stejné časové konstanty

Systémy s

astatizmem

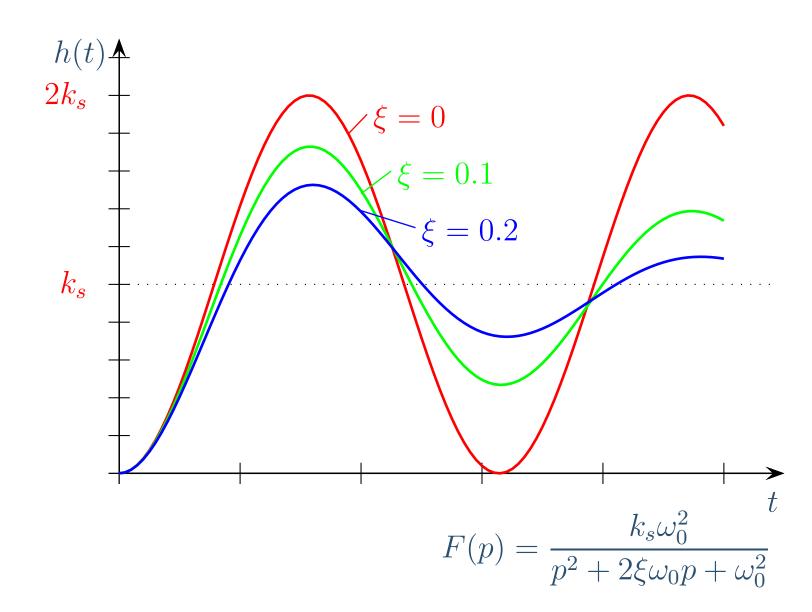
Průběhy pro různé tlumení ξ

Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza







Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2

Stejné časové konstanty

Systémy s

astatizmem

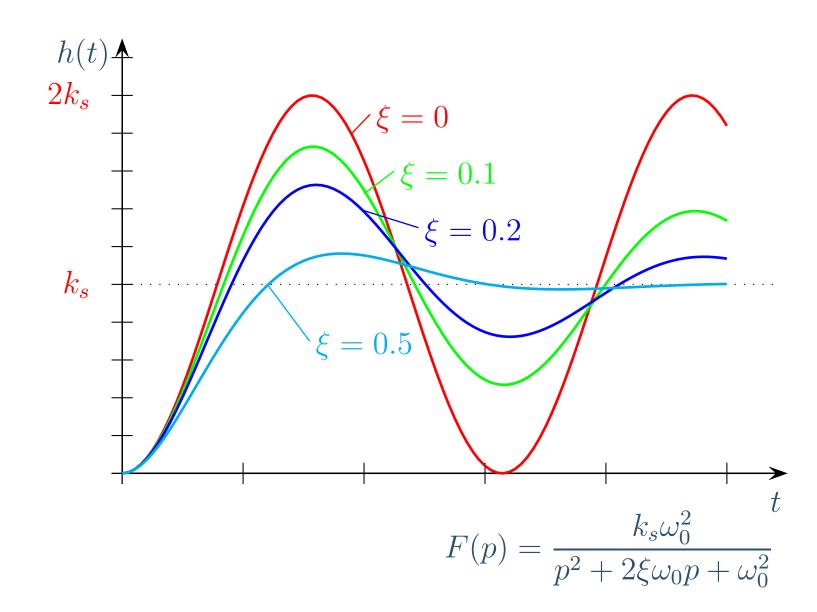
Průběhy pro různé tlumení ξ

Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza







Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové

konstanty

Systémy s

astatizmem

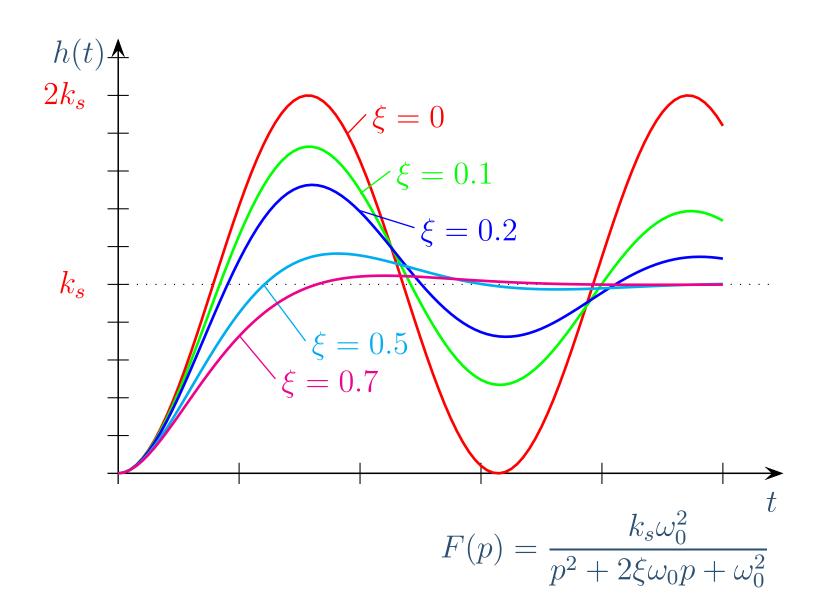
Průběhy pro různé tlumení ξ

Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza







Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové

konstanty

Systémy s

astatizmem

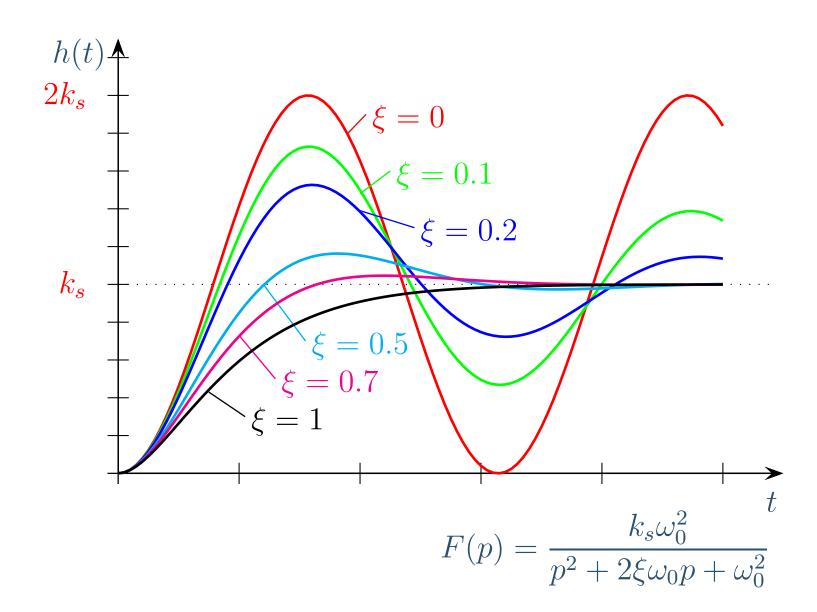
Průběhy pro různé tlumení ξ

Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza







Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové

konstanty

Systémy s

astatizmem Průběhy pro různé

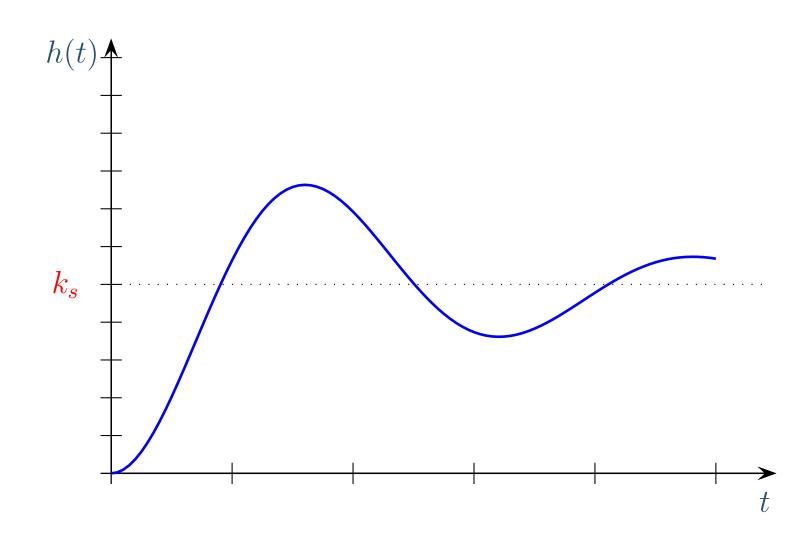
tlumení ξ

Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza







Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové

konstanty

Systémy s

astatizmem

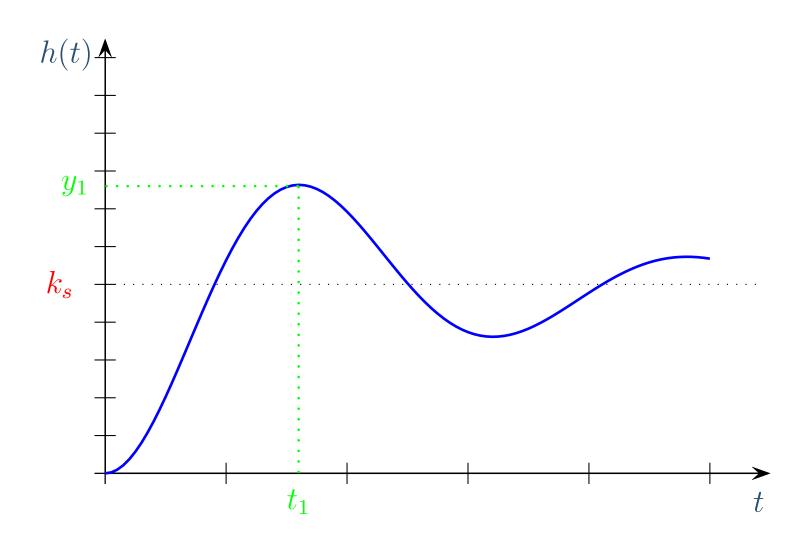
Průběhy pro různé tlumení ξ

Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza







Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové

konstanty

Systémy s

astatizmem

Průběhy pro různé

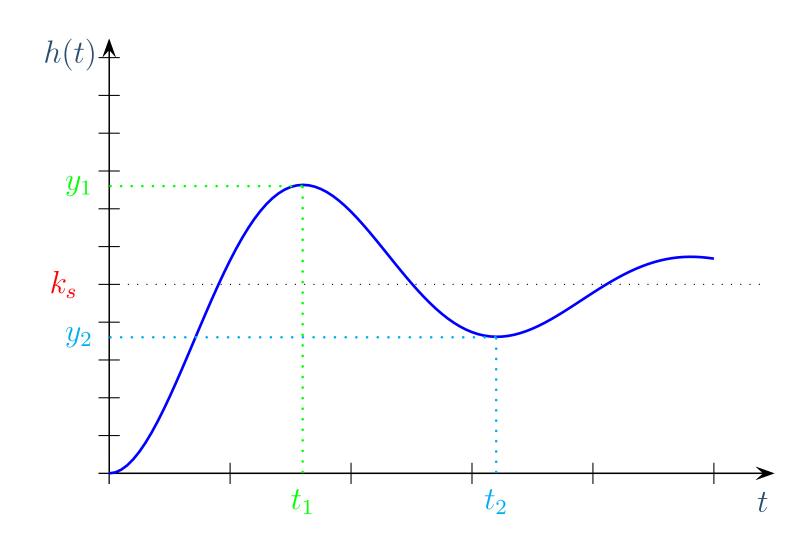
tlumení ξ

Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza







Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2

Stejné časové konstanty

Systémy s

astatizmem

Průběhy pro různé

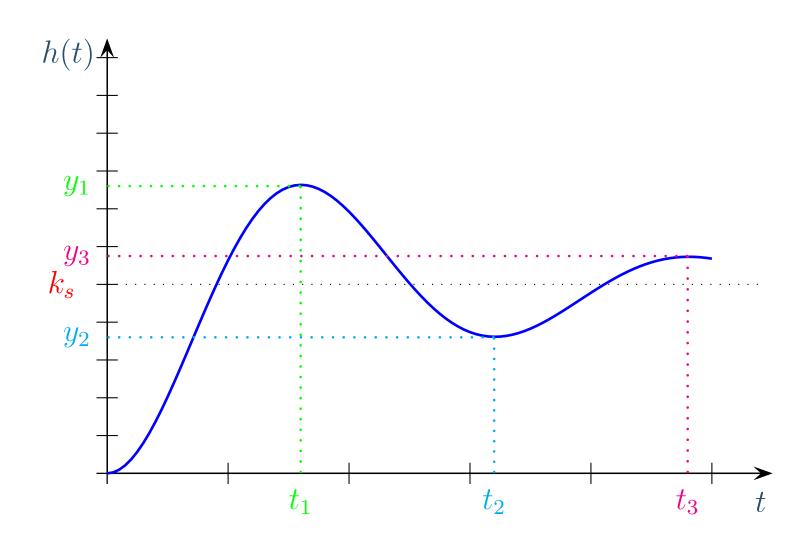
tlumení ξ

Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza







Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2

Stejné časové

konstanty

Systémy s astatizmem

Průběhy pro různé

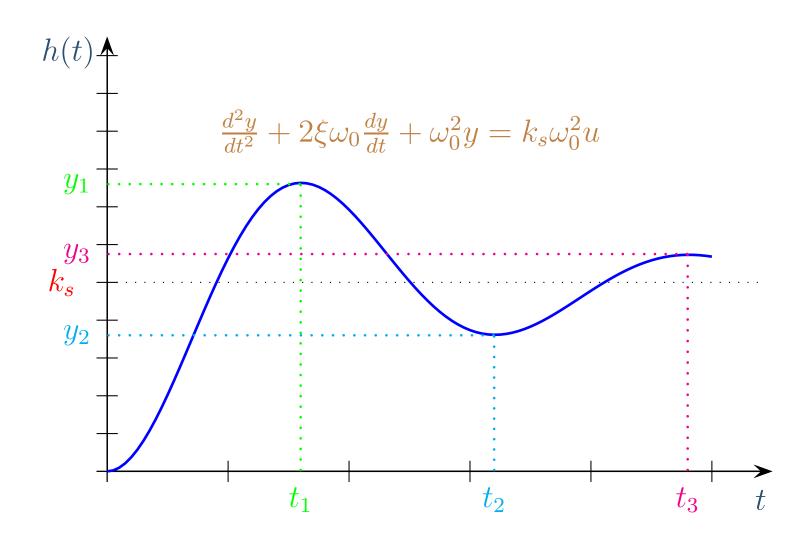
tlumení ξ

Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza







Průběhy pro různé tlumení ξ

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2

Stejné časové konstanty

Systémy s

astatizmem

Průběhy pro různé

tlumení ξ

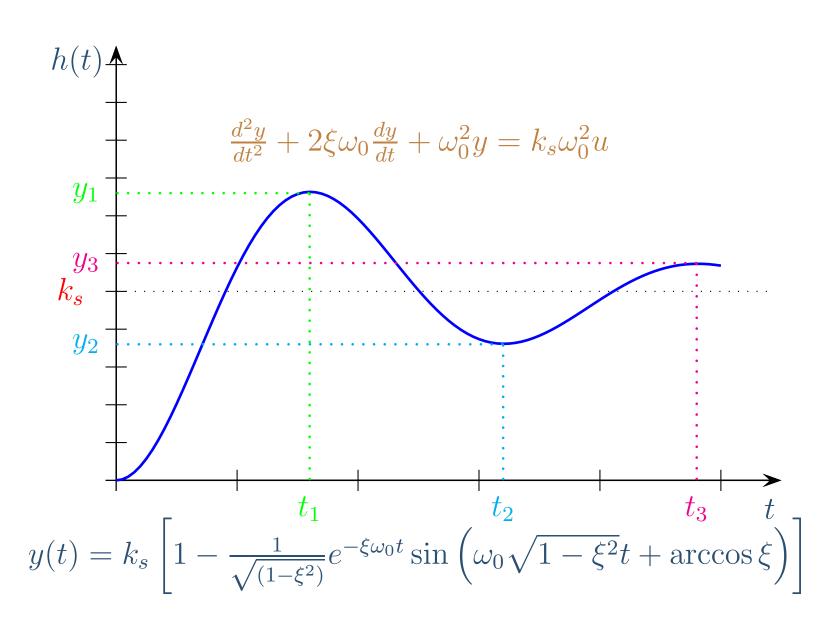
Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza







Systém druhého řádu - kmitavá odezva

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

První řád

Druhý řád

Vysvětlení konstant

Dvě různé T_1 a T_2 Stejné časové

konstanty

Systémy s

astatizmem

Průběhy pro různé

tlumení ξ

Průběhy pro různé tlumení ξ

Kmitavá odezva

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Vychází se z polohy lokálních maxim a minim.

$$t_1 \dots y_1 = K(1+M)$$

$$t_2 \dots y_2 = K(1 - M^2)$$

Po zjištění M spočítáme tlumení

$$\xi = \frac{-\ln M}{\sqrt{4\pi^2 + (\ln M)^2}}$$

Z periody oscilací $T=t_2-t_1=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ určíme

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2}{T}\sqrt{\pi^2 + (\ln M)^2}$$



Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Formulace problému

Odvození I

Odvození II Wiener-Hopfova rovnice

Diskrétní tvar

Praktický výpočet

Maticový zápis

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Identifikace pomocí korelačních metod



Formulace problému

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Formulace problému

Odvození I

Odvození II Wiener-Hopfova rovnice

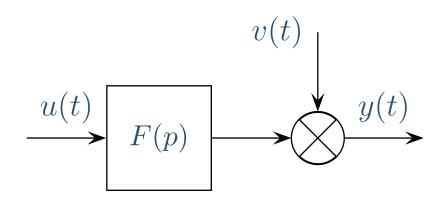
Diskrétní tvar

Praktický výpočet

Maticový zápis

Frekvenční analýza

Spektrální analýza



Výstup systému v Laplaceově transformaci

$$Y(p) = F(p)U(p) + V(p)$$
(1)

V časové oblasti to odpovídá konvolutornímu integrálu

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau + v(t) \tag{2}$$

kde g(t) je **hledaná** impulsová charakteristika.





Odvození korelační metody

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Formulace problému

Odvození I

Odvození II Wiener-Hopfova rovnice

Diskrétní tvar

Praktický výpočet

Maticový zápis

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Vynásobením rovnice (2) výrazem $u(t-\tau')$ dostaneme

$$u(t-\tau')y(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau')u(t-\tau)d\tau + u(t-\tau')v(t)$$
 (3)

Nyní určíme střední hodnotu pravé i levé strany

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t - \tau') y(t) dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} g(\tau) \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t - \tau') u(t - \tau) dt d\tau +$$

$$+ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t - \tau') v(t) dt \quad (4)$$



Pokračování odvození korelační metody

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Formulace problému Odvození I

Odvození II

Wiener-Hopfova rovnice

Diskrétní tvar

Praktický výpočet

Maticový zápis

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Pomocí definičních vztahů autokorelační $R_{xx}(\tau)$ a vzájemné korelační funkce $R_{xy}(\tau)$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$
 (5)

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)dt$$
 (6)

dostáváme z rovnice (4)

$$R_{uy}(\tau') = \int_0^\infty g(\tau) R_{uu}(\tau' - \tau) d\tau + R_{uv}(\tau') \tag{7}$$

(bylo použito rovnice $R_{uy}(\tau') = R_{yu}(-\tau')$)





Wiener-Hopfova rovnice

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Formulace problému

Odvození I

Odvození II

Wiener-Hopfova rovnice

Diskrétní tvar Praktický výpočet Maticový zápis

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Většinou šum v(t) nezávisí na vstupu u(t). Potom dostáváme Wiener-Hopfovu rovnici

$$R_{uy}(\tau') = \int_{0}^{\infty} g(\tau) R_{uu}(\tau' - \tau) d\tau$$
 (8)

Při použití vstupního signálu ve tvaru bílého šumu (autokorelační funkce odpovídá Dirakovu impulsu) se rovnice zjednoduší na

$$R_{uy}(t) = g(t)S (9)$$

kde $S = \int_0^\infty R_{uu}(\tau) d\tau$. Snadno lze spočítat hodnoty impulsové charakteristiky g(t).





Diskrétní tvar Wiener-Hopfovy rovnice

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Formulace problému

Odvození I

Odvození II Wiener-Hopfova rovnice

Diskrétní tvar

Praktický výpočet Maticový zápis

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Uvažujeme model

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i)u(k-i) + v(k)$$
 (10)

Podobně jako v předchozím případě lze odvodit diskrétní tvar Wiener-Hopfovy rovnice

$$R_{uy}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i) R_{uu}(k-i)$$
 (11)

kde $R_{uy}(k)=Eu(\kappa)y(\kappa+k)$, $R_{uu}(k)=Eu(\kappa)u(\kappa+k)$ a g(i) je impulzová charakteristika.





Praktický výpočet

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Formulace problému

Odvození I

Odvození II Wiener-Hopfova rovnice

Diskrétní tvar

Praktický výpočet

Maticový zápis

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Korelace se počítají podle vzorců

$$\hat{R}_{uy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1-\min(k,0)}^{N-\max(k,0)} u(i)y(i+k)$$
(12)

$$\hat{R}_{uu}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} u(i)u(i+k)$$
(13)

Rovnice (12) se počítá pro $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ a rovnice (13) pro $k=0,1,2,\ldots$ (protože $\hat{R}_{uu}(k)=\hat{R}_{uu}(-k)$).

$$\hat{R}_{uy}(k) = \sum_{i=0}^{M-1} \hat{g}(i)\hat{R}_{uu}(k-i)$$
(14)





Maticový zápis

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Formulace problému

Odvození I

Odvození II Wiener-Hopfova rovnice

Diskrétní tvar

Praktický výpočet

Maticový zápis

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Kde M je počet koeficientů, které chceme spočítat. Maticový zápis

$$\begin{pmatrix}
\hat{R}_{uy}(0) \\
\vdots \\
\hat{R}_{uy}(M-1)
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\hat{R}_{uu}(0) & \cdots & \hat{R}_{uu}(M-1) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\hat{R}_{uu}(M-1) & \cdots & \hat{R}_{uu}(0)
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
\hat{g}(0) \\
\vdots \\
\hat{g}(M-1)
\end{pmatrix}$$
(15)





Maticový zápis

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Formulace problému

Odvození I

Odvození II Wiener-Hopfova rovnice

Diskrétní tvar

Praktický výpočet

Maticový zápis

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Kde M je počet koeficientů, které chceme spočítat. Maticový zápis

$$\begin{pmatrix}
\hat{R}_{uy}(0) \\
\vdots \\
\hat{R}_{uy}(M-1)
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\hat{R}_{uu}(0) & \cdots & \hat{R}_{uu}(M-1) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\hat{R}_{uu}(M-1) & \cdots & \hat{R}_{uu}(0)
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
\hat{g}(0) \\
\vdots \\
\hat{g}(M-1)
\end{pmatrix}$$
(15)

Pro vstup ve tvaru bílého šumu lze jednoduše počítat prvky impulsové charakteristiky

$$\hat{g}(k) = \frac{\hat{R}_{uy}(k)}{\hat{R}_{uu}(0)} \tag{16}$$



Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Základní frekvenční analýza

Odvození Vylepšená frekvenční analýza

Odvození

Odvození pokr.

Shrnutí výsledků

Spektrální analýza

Frekvenční analýza





Základní frekvenční analýza

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Základní frekvenční analýza

Odvození Vylepšená frekvenční analýza

Odvození

Odvození pokr.

Shrnutí výsledků

Spektrální analýza

Uvažujme vstupní signál

$$u(t) = A\sin(\omega t)$$

po ustálení přechodného děje je na výstupu

$$y(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$$

kde

$$B = A|G(\jmath\omega)|$$
$$\varphi = \arg[G(\jmath\omega)]$$

(17)





Odvození

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Základní frekvenční analýza

Odvození

Vylepšená frekvenční analýza

Odvození

Odvození pokr.

Shrnutí výsledků

Spektrální analýza

Platí $y(t)=\int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$, $G(\jmath\omega)=\int_{-\infty}^\infty g(t)e^{-\jmath\omega t}dt$ a $\sin\omega t=\frac{1}{2\jmath}(e^{\jmath\omega t}-e^{-\jmath\omega t})$. Sloučením těchto rovnic dostaneme

$$y(t) = \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) [e^{j\omega(t-\tau)} - e^{-j\omega(t-\tau)}] d\tau =$$

$$= \frac{A}{2j} \int_{0}^{t} g(\tau) [e^{j\omega(t-\tau)} - e^{-j\omega(t-\tau)}] d\tau =$$

$$= \frac{A}{2j} [e^{j\omega(t)} G(j\omega) - e^{-j\omega(t)} G(-j\omega)] =$$

$$= \frac{A}{2j} |G(j\omega)| [e^{j\omega(t)} e^{j\arg G(j\omega)} - e^{-j\omega(t)} e^{-j\arg G(j\omega)}]$$

$$= A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G(j\omega))$$
(18)





Vylepšená frekvenční analýza

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Základní frekvenční analýza

Odvození

Vylepšená frekvenční analýza

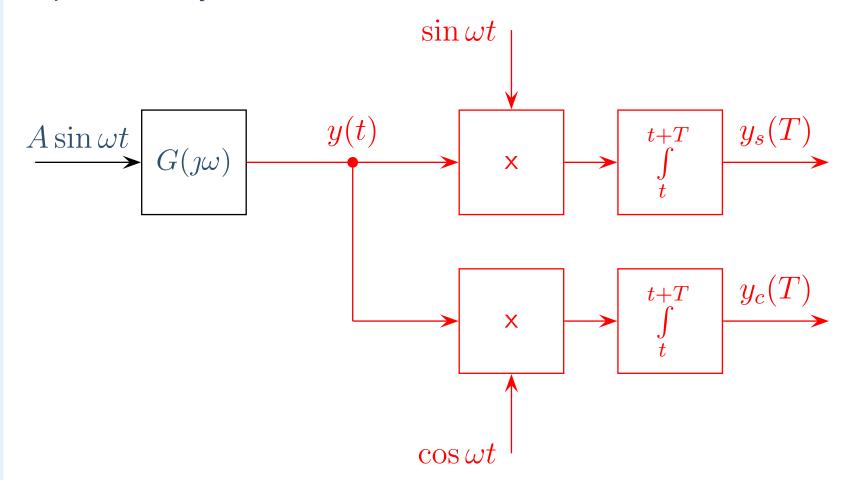
Odvození

Odvození pokr.

Shrnutí výsledků

Spektrální analýza

Spočívá ve využití korelace







Odvození

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Základní frekvenční analýza

Odvození Vylepšená frekvenční analýza

Odvození

Odvození pokr. Shrnutí výsledků

Spektrální analýza

Naměřený výstupní signál y(t) je násobený $\sin \omega t$ a je provedena integrace přes jednu periodu y(t) T.

$$y_s(T) = \int_0^T y(t) \sin \omega t dt =$$

$$= \int_0^T B \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t dt + \int_0^T e(t) \sin \omega t dt =$$

$$= \left(\frac{BT}{2} \cos \varphi\right) - \frac{B}{2} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt + \int_0^T e(t) \sin \omega t dt$$

$$(\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \ \alpha = 2\omega t + \varphi, \ \beta = \varphi)$$





Odvození pokr.

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Základní frekvenční analýza

Odvození Vylepšená frekvenční analýza

Odvození

Odvození pokr.

Shrnutí výsledků

Spektrální analýza

Podobně pro výstupní signál násobený $\cos \omega t$

$$y_c(T) = \int_0^T y(t) \cos \omega t dt =$$

$$= \int_0^T B \sin(\omega t + \varphi) \cos \omega t dt + \int_0^T e(t) \cos \omega t dt =$$

$$= \left(\frac{BT}{2} \sin \varphi\right) - \frac{B}{2} \int_0^T \sin(2\omega t + \varphi) dt + \int_0^T e(t) \cos \omega t dt$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta = 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2}\sin \frac{\alpha-\beta}{2}, \beta = 2\omega t + \varphi, \alpha = \varphi)$$





Shrnutí výsledků

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Základní frekvenční analýza

Odvození

Vylepšená frekvenční analýza

Odvození

Odvození pokr.

Shrnutí výsledků

Spektrální analýza

$$y_s(T) = \frac{BT}{2}\cos\varphi$$

$$y_c(T) = \frac{BT}{2}\sin\varphi$$

Zároveň platí (použitím (17))

$$y_s(T) = \frac{AT}{2} \Re \left[G(\jmath \omega) \right]$$

$$y_c(T) = \frac{AT}{2} \Im \left[G(\jmath \omega) \right]$$

Výrazným způsobem je snížena citlivost na šum měření e(t).



Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

Spektrální analýza





Spektrální hustota

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

Pomocí diskrétní Fourierovy transformace vzájemné korelační funkce $R_{uy}(\tau)$ dostaneme spektrální hustotu

$$\phi_{uy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau = -\infty}^{\infty} R_{uy}(\tau) e^{-\jmath\tau\omega} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau = -\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g(j) e^{-\jmath j\omega} R_{uu}(\tau - j) e^{-\jmath(\tau - j)\omega} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} g(j) e^{-\jmath j\omega} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{\tau' = -\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau') e^{-\jmath(\tau')\omega} \right] =$$

$$= G(e^{-\jmath\omega}) \phi_{uu}(\omega)$$





Přenosová funkce

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

Z předchozího vztahu lze vyjádřit $G(e^{-j\omega})$

$$\phi_{uy}(\omega) = G(e^{-\jmath\omega})\phi_{uu}(\omega) \to G(e^{-\jmath\omega}) = \frac{\phi_{uy}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)}$$

kde

$$\phi_{uy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{uy}(\tau) e^{-\jmath\tau\omega}$$

$$\phi_{uu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau = -\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) e^{-\jmath \tau \omega}$$
$$G(e^{-\jmath \omega}) = \sum_{\tau = -\infty}^{\infty} g(k) e^{-\jmath k\omega}$$

$$G(e^{-j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{-jk\omega}$$





Praktický výpočet

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

Způsob určení spektrální hustoty

$$\hat{\phi}_{uy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-N}^{N} \hat{R}_{uy}(\tau) e^{-\jmath \tau \omega}$$

dosazením za $\hat{R}_{uy}(au)$

$$\hat{\phi}_{uy}(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{\tau=-N}^{N} \sum_{k=1-\min(\tau,0)}^{N-\max(\tau,0)} u(k) y(k+\tau) e^{-\jmath\tau\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi N} \sum_{s=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} y(s) u(k) e^{-\jmath s\omega} e^{\jmath k\omega} =$$

$$= \frac{1}{2\pi N} Y_N(\omega) U_N(-\omega) \quad \text{substituce } (s = k + \tau)$$





Pokračování praktického výpočtu

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

kde $Y_N(\omega)$ a $U_N(\omega)$ je DFT posloupností y(k) a u(k).

Pro $\omega=0,2\pi/N,4\pi/N,...,\pi$ může být pro výpočet použita FFT (posloupnosti doplněné nulami).

$$\hat{\phi}_{uu}(\omega) = \frac{1}{2\pi N} U_N(\omega) U_N(-\omega) = \frac{1}{2\pi N} |U_N(\omega)|^2$$

$$\frac{1}{2\pi N}Y_N(\omega)U_N(-\omega) = \hat{G}(e^{-j\omega})\frac{1}{2\pi N}U_N(\omega)U_N(-\omega)$$

Výsledný přenos

$$Y_N(\omega) = \hat{G}(e^{-j\omega})U_N(\omega) \rightarrow \hat{G}(e^{-j\omega}) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$





Zlepšení výsledků

Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken Shrnutí Výsledný odhad spektra nemusí pro $N \to \infty$ konvergovat ke skutečnému spektru.

Pro reálné N jsou odhady $\hat{R}_{uy}(\tau)$ a $\hat{R}_{uu}(\tau)$ nepřesné, protože se počítají z málo hodnot (vzájemné posunutí).

Proto se používají vzorce obsahující okna

$$\hat{\phi}_{uy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-N}^{N} \hat{R}_{uy}(\tau) w(\tau) e^{-\jmath \tau \omega}$$

Požadavky na okno $w(\tau)$: $w(\tau)=1$ pro $\tau=0$, se zvyšujícím se τ hodnota $w(\tau)$ klesá k nule a od určité hodnoty $\tau=M$ je nulová.





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

Obdélníkové okno

$$w_1(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \le M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

Obdélníkové okno

$$w_1(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \le M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$

Bartlettovo okno

$$w_2(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/M & |\tau| \le M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

Obdélníkové okno

$$w_1(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \le M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$

Bartlettovo okno

$$w_2(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/M & |\tau| \le M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$

Okno Hamming-Tukey

$$w_3(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{\pi \tau}{M}) & |\tau| \le M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

Obdélníkové okno

$$w_1(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \le M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$

Bartlettovo okno

$$w_2(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/M & |\tau| \le M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$

Okno Hamming-Tukey

$$w_3(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{\pi \tau}{M}) & |\tau| \le M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$

Volba parametru M není snadná. Většinou se volí v rozsahu $M \in <\frac{N}{6},\frac{N}{5}>$





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

- je důležité pro dosažení požadované přesnosti
- omezuje frekvenční rozlišení
- může roztáhnout ostré spektrální čáry
- může způsobit, že nerozlišíme blízké ostré spektrální čáry





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

- je důležité pro dosažení požadované přesnosti
- omezuje frekvenční rozlišení
- může roztáhnout ostré spektrální čáry
- může způsobit, že nerozlišíme blízké ostré spektrální čáry





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

- je důležité pro dosažení požadované přesnosti
- omezuje frekvenční rozlišení
- může roztáhnout ostré spektrální čáry
- může způsobit, že nerozlišíme blízké ostré spektrální čáry





Úvod

Impulzová charakteristika

Přechodová charakteristika

Identifikace pomocí korelačních metod

Frekvenční analýza

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Přenos

Výpočet

Pokračování

Zlepšení výsledků

Typy oken

Shrnutí

- je důležité pro dosažení požadované přesnosti
- omezuje frekvenční rozlišení
- může roztáhnout ostré spektrální čáry
- může způsobit, že nerozlišíme blízké ostré spektrální čáry