UNIVERSIDADE VILA VELHA
ESPÍRITO SANTO

Álgebra para Computação

Relações

Erlon Pinheiro

Ciência da Computação

Relações

Relações Binárias

Se ouvirmos que duas pessoas, Henriqueta e Horácio, se relacionam, entenderemos que existe algum laço afetivo entre eles — que (Henriqueta, Horácio) distinguem-se dos demais pares ordenados de pessoas por haver uma relação (são parentes, namorados, amigos etc.) que Henriqueta e Horácio verificam.

O análogo matemático é distinguir determinados pares ordenados de objetos dos demais porque seus elementos satisfazem alguma relação que os componentes dos demais pares, em geral, não satisfazem.

Relações

Relações Binárias

EXEMPLO 1

Sejam S = {1, 2} e T = {2, 3}; então temos S X T = {(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2,3)}. Se estivermos interessados na relação de igualdade, então (2, 2) será o único par que se distinguirá no produto S X T, isto é, o único par ordenado cujas componentes são iguais.

Se estivermos interessados na propriedade do primeiro número ser menor do que o segundo, escolheremos os pares (1, 2), (1, 3) e (2, 3) como os pares ordenados de S X T que se distinguem dos demais por apresentarem tal propriedade.

Poderíamos selecionar os pares ordenados (x, y) dizendo que x = y ou que x < y. Analogamente, a notação indica que o par ordenado (x, y) satisfaz à relação ρ. A relação ρ pode ser descrita com palavras ou simplesmente pela enumeração dos pares ordenados que a satisfazem.

Relações

Relações Binárias

EXEMPLO 2

Sejam S= {1,2} e T = {2, 3, 4}. Uma relação no conjunto S X T= {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2,4)} pode ser definida por x ρ y se, e somente se, x= (½)y. Portanto (1, 2) e (2, 4) satisfazem ρ. Opcionalmente, poderíamos ter definido a mesma ρ dizendo que {(1, 2), (2, 4)} é o conjunto de pares ordenados que satisfazem ρ.

Definição: Relação Binária

Dados os conjuntos *S* e *T*, uma relação binária *em S x T é* um subconjunto de *S* X *T*.

Agora que sabemos que uma relação binária ρ é um subconjunto, vemos que

$x \rho y \leftrightarrow (x, y) \in \rho.$

Relações

Relações Binárias

EXEMPLO 3

Sejam $S = \{1, 2\}$ e $T = \{2, 3, 4\}$. Seja ρ dada pela descrição $x \rho y \leftrightarrow x + y$ for ímpar. Então $(1, 2) \in \rho$, $(1,4) \in \rho$ e $(2, 3) \in \rho$. •

EXEMPLO 4

Sejam $S = \{1,2\}$ e $T = \{2,3,4\}$. Se p for definida em $S \times T$ por $\rho = \{(2, 3), (2, 4)\}$, então $2 \rho 3$ e $2 \rho 4$ são verdadeiras, mas, por exemplo, $1 \rho 4$ não o é. Neste caso p não tem uma descrição verbal óbvia. •

Relações

Relações Binárias

PRÁTICA 1

Para cada uma das seguintes relações binárias ρ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, determine quais dos pares ordenados apresentados pertencem a ρ:

a. $x \rho y \leftrightarrow x = y + 1$; (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)
b. $x \rho y \leftrightarrow x$ divide y; (2, 4), (2, 5), (2, 6)
c. $x \rho y \leftrightarrow x$ é ímpar; (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)
d. $x \rho y \leftrightarrow x > y^2$; (1, 2), (2, 1), (5, 2), (6, 4), (4, 3)

1. **a.** $(3, 2) \in \rho$ **b.** $(2, 4), (2, 6) \in \rho$ **c.** $(3, 4), (5, 6) \in \rho$
d. $(2, 1), (5, 2) \in \rho$

Relações

Relações N-árias

Definição: Relação n-ária
Dados os conjuntos $S_1, S_2, \ldots, S_n$, uma **relação n-ária em** $S_1, S_2, \ldots, S_n$, é um subconjunto de $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$. Um caso especial de relação n-ária é uma **relação unária** p em um conjunto S, que é apenas um subconjunto particular de S. Um elemento $x \in S$ satisfaz ρ se e somente se x pertencer ao subconjunto.

Freqüentemente estaremos interessados em relações binárias ou n-árias onde todos os conjuntos dados são o mesmo conjunto S. Essas relações são chamadas de relações *no conjunto* S, como definimos a seguir.

Definição: Relações em um conjunto S
Uma **relação binária em um conjunto** S é um subconjunto de S^2 (o conjunto de pares ordenados de elementos de S). Analogamente, uma **relação n-ária em um conjunto S** é um subconjunto de S'' (um conjunto de n-uplas ordenadas de elementos de S).

Relações

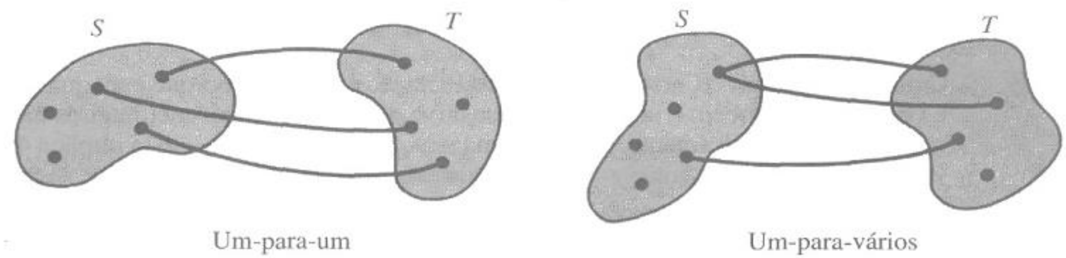
PRÁTICA 2:

Identifique cada uma das relações em S X T apresentadas abaixo como sendo um-para-um, um-para-vários, vários-para-um e vários-para-vários, onde S = {2, 5, 7, 9} e T = {3, 4, 5}.

a. {(5, 3), (7, 5), (9, 3)}

b. {(2,4), (5,5), (7, 3)}

c. {(7, 4), (2, 5), (9, 4), (2, 3)}



2. **a.** Vários-para-um **b.** Um-para-um **c.** Vários-para-vários

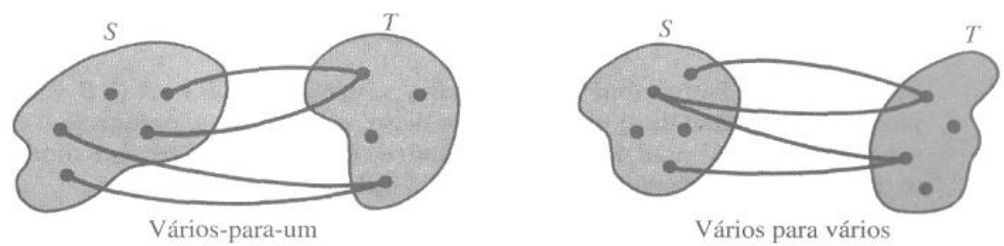


Figura 4.1

Relações

Suponha que B é o conjunto de todas as relações binárias em um dado conjunto S. Se ρ e σ pertencerem a B, então elas são subconjuntos de S X S. Como tal, podemos realizar as operações de união, interseção, e complemento de conjuntos que resultam em novos subconjuntos de S X S, isto é, novas relações binárias, que denotaremos por $\rho \cup \sigma$, $\rho \cap \sigma$ e ρ', respectivamente. Desta forma,

$$x\,(\rho \cup \sigma)\,y \leftrightarrow x\,\rho\,y \text{ ou } x\,\sigma\,y$$

$$x\,(\rho \cap \sigma)\,y \leftrightarrow x\,\rho\,y \text{ e } x\,\sigma\,y$$

$$x\,\rho'\,y \leftrightarrow \text{não } x\,\rho\,y$$

Relações

Prática 3:

Sejam ρ e σ duas relações binárias em $\mathbb{N}$ definidas por $x\,\rho\,y \leftrightarrow x = y$ e $x\,\sigma\,y \leftrightarrow x < y$.

Forneça descrições verbais para (a), (b) e (c); apresente o conjunto definido em (d).

a. Qual é a relação $\rho \cup \sigma$?

b. Qual é relação ρ'?

c. Qual é a relação σ'?

d. Qual é a relação $\rho \cap \sigma$?

3. a. $x(\rho \cup \sigma)y \leftrightarrow x \leq y$ b. $x\rho' y \leftrightarrow x \neq y$ c. $x\sigma' y \leftrightarrow x \geq y$

d. $\rho \cap \sigma = \emptyset$

Relações

Exercício:

★7. Sejam ρ e σ relações binárias em $\mathbb{N}$ definidas por $x \, \rho \, y \leftrightarrow$ "x divide y", $x \, \sigma \, y \leftrightarrow 5x \leq y$. Determine quais dos pares ordenados satisfazem às relações dadas:

a. $\rho \cup \sigma$; (2, 6), (3, 17), (2, 1), (0, 0)

b. $\rho \cap \sigma$; (3, 6), (1, 2), (2, 12)

c. ρ'; (1, 5), (2, 8), (3, 15)

d. σ'; (1, 1), (2, 10), (4, 8)

Relações

Relações Binárias:

Os fatos que apresentamos a seguir sobre as operações de $\cup$, $\cap$ e $'$ de relações são conseqüências imediatas das identidades de conjuntos encontradas na Seção 3.1. O conjunto S^2 (que é ele próprio um subconjunto de S^2) é entendido aqui como uma relação binária em S.

1a. $\rho \cup \sigma = \sigma \cup \rho$
2a. $(\rho \cup \sigma) \cup \gamma = \rho \cup (\sigma \cup \gamma)$
3a. $\rho \cup (\sigma \cap \gamma) = (\rho \cup \sigma) \cap (\rho \cup \gamma)$
4a. $\rho \cup \varnothing = \rho$
5a. $\rho \cup \rho' = S^2$

1b. $\rho \cap \sigma = \sigma \cap \rho$
2b. $(\rho \cap \sigma) \cap \gamma = \rho \cap (\sigma \cap \gamma)$
3b. $\rho \cap (\sigma \cup \gamma) = (\rho \cap \sigma) \cup (\rho \cap \gamma)$
4b. $\rho \cap S^2 = \rho$
5b. $\rho \cap \rho' = \varnothing$

Relações

Propriedade das Relações:

Uma relação binária em um conjunto S pode ter certas propriedades. Por exemplo, a relação ρ da igualdade em S, $(x, y) \in \rho \leftrightarrow x = y$, tem três propriedades: (1) para qualquer $x \in S$, $x = x$, isto é, $(x, x) \in \rho$; (2) para quaisquer $x, y \in S$, se $x = y$, então $y = x$, isto é, $(x, y) \in \rho \; \mathrm{R} \; (y, x) \in \rho$; e (3) para quaisquer $x, y, z \in S$, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$, isto é, $[(x, y) \in \rho$ e $(y, z) \in \rho] \; \mathrm{R} \; (x, z) \in \rho$. Estas três propriedades fazem da igualdade uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Definição: Relações Reflexivas, Simétricas e Transitivas

Seja p uma relação binária em S. Então

ρ **reflexiva** significa:	$(\forall x)\,(x \in S \; \mathrm{R} \; (x, x) \in \rho)$
ρ **simétrica** significa:	$(\forall x)\,(\forall y)\,(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \; \mathrm{R} \; (y, x) \in \rho)$
ρ **transitiva** significa:	$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z)\,(x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \; \mathrm{R} \; (x, z) \in \rho)$

Relações

Relações Binárias

EXEMPLO 5

Considere a relação $\leq$ no conjunto $\mathbb{N}$. Esta relação é reflexiva porque para qualquer inteiro não-negativo x, $x \leq x$ é verdadeira. Também é uma relação transitiva porque para quaisquer inteiros não-negativos x, y e z, se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$. No entanto, $\leq$ não é uma relação simétrica; $3 \leq 4$ não implica $4 \leq 3$. De fato, para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $y = x$. Esta característica é descrita dizendo-se que $\leq$ é uma relação anti-simétrica. ♦

Definição: Relação Anti-simétrica

Seja p uma relação binária no conjunto S. Então p é dita **anti-simétrica** se, e somente se,

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho \;\mathrm{R}\; x = y)$$

Relações

Relações Binárias

EXEMPLO 6

Seja $S = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Defina uma relação binária ρ em S por $A \rho B \leftrightarrow A \subseteq B$. Então p é reflexiva porque todo conjunto é subconjunto de si próprio. Além disso, p é transitiva, porque se A é um subconjunto de B e B é um subconjunto de C, então A é um subconjunto de C. Finalmente, p é anti-simétrica porque se A é um subconjunto de B e B é um subconjunto de A, então A e B são iguais. •

Relações

Prática 4:

Seja $S = \{1,2,3\}$

a. Se uma relação ρ em S é reflexiva, quais pares ordenados devem pertencer a ρ?

b. Se uma relação ρ em S é simétrica, quais pares ordenados devem pertencer a ρ? (Esta pergunta é uma armadilha — veja a resposta ao final do livro.)

c. Se uma relação ρ em S é simétrica e se $(a, b) \in \rho$, então quais outros pares ordenados devem pertencer a ρ?

d. Se uma relação ρ em S é anti-simétrica e se (a, b) e (b, a) pertencem a ρ, o que podemos afirmar? •

4. a. (1, 1), (2, 2), (3, 3)

b. Saber que uma relação é simétrica não nos dá qualquer informação sobre que pares ordenados pertencem a **ρ**. Se soubermos que uma relação é simétrica e conhecermos alguns de seus pares ordenados, então alguns outros pares também devem pertencer à relação (veja o item (c)). •

c. (b, a)

d. $a = b$

Relações

Simétrica e Anti-simétrica

As propriedades de simetria e anti-simetria de relações binárias não são exatamente opostas. *Anti-simétrica* não significa "não-simétrica". Uma relação não é simétrica se algum *(x,* v) pertencer à relação de forma que *(y, x)* não pertença. Mais formalmente, a "não-simetria" significa

$$((\forall x)(\forall y)[x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \; \mathrm{R} \; (y, x) \in \rho])'$$

$$\leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho \; \mathrm{R} \; (y, x) \in \rho]'$$

$$\leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho)' \vee (y, x) \in \rho]'$$

$$\leftrightarrow (\exists x)(\exists y)[(x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in \rho) \wedge (y, x) \notin \rho]$$

Relações

Prática 5:

Verifique se as relações binárias nos conjuntos abaixo são reflexivas, simétricas, anti-simétricas e transitivas:

a. $S = \mathbb{N}$; $x \rho y \leftrightarrow x + y$ é par a. Reflexiva, simétrica, transitiva

b. $S = \mathbb{N}$; $x \rho y \leftrightarrow x$ divide y **b. Reflexiva, anti-simétrica, transitiva**

c. S = conjunto de todas as linhas do plano; $x \rho y \leftrightarrow x$ é paralela a y ou x coincide com y

d. $S = \mathbb{N}$; $x \rho y \leftrightarrow x = y^2$ **d. Anti-simétrica** **c. Reflexiva, simétrica, transitiva**

e. $S = \{0, 1\}$; $x \rho y \leftrightarrow x = y^2$ **e. Reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva**

f. $S = \{x \mid x$ é uma pessoa que mora na Bahia$\}$; $x \rho y \leftrightarrow x$ é mais velho que y

g. $S = \{x \mid x$ é um aluno da sua sala$\}$; $x \rho y \leftrightarrow x$ senta na mesma fileira que y

h. $S = \{1, 2, 3\}$; $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ **h. Reflexiva, simétrica, transitiva**

f. Anti-simétrica (lembre-se da tabela-verdade da implicação), transitiva

g. Reflexiva, simétrica, transitiva

Relações

EXEMPLO 7

A discussão sobre recursão em Prolog (Seção 1.5) mostrou que podemos usar uma regra recursiva quando o predicado a ser descrito é herdado de um objeto para o próximo. O predicado na-cadeia-alimentar descrito naquela seção tem essa propriedade.

$$\textit{na-cadeia-alimentar}(x, y) \wedge \textit{na-cadeia-alimentar}(y, z) \; \mathrm{R} \; \textit{na-cadeia-alimentar}(x, z)$$

Agora constatamos que isto é apenas a propriedade transitiva.

Fechos de uma Relação

Se uma relação ρ em um conjunto S não tem uma certa propriedade, podemos tentar estender ρ a fim de obter uma relação ρ* em S que tenha a propriedade. Por "estender" devemos entender que a nova relação ρ* conterá todos os pares ordenados que ρ contém mais os pares ordenados adicionais necessários para que a propriedade desejada se verifique. Portanto, $\rho \subseteq \rho^*$. Se ρ* for o menor desses conjuntos, então ρ* é chamado de fecho de ρ em relação à propriedade em questão.

Definição: Fecho de uma Relação

Uma relação binária ρ* em um conjunto S é o fecho de uma relação ρ em S com respeito à propriedade P se

1. ρ* tem a propriedade P

2. $\rho \subseteq \rho^*$

3. ρ * é um subconjunto de qualquer outra relação em S que inclui ρ e tem a propriedade P.

Relações

Fechos de uma Relação

Podemos considerar o fecho reflexivo, o fecho simétrico e o fecho transitivo de uma relação em um conjunto. Naturalmente, se a relação já realiza uma propriedade, ela é seu próprio fecho com respeito a esta propriedade.

Exemplo 8 - Seja S = {1, 2, 3} e ρ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3)}. Então ρ não é reflexiva, não é simétrica e não é transitiva. O fecho de ρ com relação à simetria é {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (2, 1), (3, 2)}. Neste caso também está claro que incluímos apenas os pares necessários — (2, 1) e (3,2) — para que a relação seja simétrica.

Para os fechos reflexivo e simétrico, temos apenas que verificar os pares já em ρ a fim de encontrar quais pares precisamos incluir (partindo da premissa de que sabemos qual o conjunto S). Os fechos que podem ser encontrados em um único passo são os fechos reflexivo e simétrico.

Relações

Fechos de uma Relação

EXEMPLO 8

O fecho transitivo demanda uma série de passos para ser encontrado. Verificando os pares ordenados de nosso exemplo, vemos que precisamos incluir (3, 2) (devido aos pares (3, 1) e (1, 2)), (3, 3) (devido aos pares (3, 1) e (1, 3)) e (2, 1) (devido a (2, 3) e (3, 1)). Isto nos dá a relação {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 1)}
No entanto, esta relação ainda não é transitiva.

Pois, devido ao novo par (2, 1) e ao par original (1,2), devemos incluir o par (2, 2).

Isto nos dá a relação
{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 2)}
que é transitiva e é também a menor relação transitiva que contém ρ . •

Relações

Fechos de uma Relação

Como mostramos no Exemplo 8, uma maneira de determinar o fecho transitivo de uma relação é verificar os pares ordenados na relação original, incluir novos pares se necessário, verificar a relação obtida, incluindo novos pares se necessário e assim por diante, até que tenhamos obtido uma relação transitiva.

Este é um método de força bruta e veremos um algoritmo menor no Cap. 5, onde entenderemos o fecho transitividade de uma relação binária como a "alcançabilidade" em um grafo direcionado, o que tem diversas aplicações.

Relações

Prática 6: **Faz sentido pensarmos no fecho anti-simétrico de uma relação em um conjunto? Justifique.**

Se a relação tem a propriedade anti-simétrica, então ela é seu próprio fecho anti-simétrico. Se a relação não é anti-simétrica, então deve haver dois pares ordenados (x, y) e (y, x) na relação com $x \neq y$. Estendendo a relação através da inclusão de pares ordenados, não muda essa situação; portanto, não faz sentido falarmos de fecho anti-simétrico de uma relação.

Relações

Prática 7: **Encontre os fechos reflexivo, simétrico e transitivo da relação {(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a)} no conjunto S = {a, b, c, d}.**

Fecho reflexivo: {(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a), (d, d)}

Fecho simétrico: {(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a), (d, b)}

Fecho transitivo: {(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (a, d), (b, d), (c, a), (d, a), (d, d), (d, c), (b, a), (b, c)}

No restante desta seção estaremos interessados em dois tipos de relação binária que são caracterizadas por quais propriedades (reflexividade, [illegible], anti-simetria e transitividade) elas satisfazem.

Relações

Ordenação Parcial

Definição: Ordenação Parcial

Uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, anti-simétrica e transitiva é chamada de **ordenação parcial em** S.

Nos exemplos anteriores e da Prática 5, já vimos os seguintes casos de ordenações parciais:

Em $\mathbb{N}$, $x \ \rho \ y \leftrightarrow x \leq y$.
Em $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $A \ \rho \ B \leftrightarrow A \subseteq B$.
Em $\mathbb{N}$, $x \ \rho \ y \leftrightarrow x$ divide y.
Em $\{0, 1\}$, $x \ \rho \ y \leftrightarrow x = y^2$.

Relações

Ordenação Parcial

Definição: Ordenação Parcial

Uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, anti-simétrica e transitiva é chamada de **ordenação parcial em** S.

Se p é uma ordenação parcial em S, então o par ordenado (S, p) é chamado de um conjunto **parcialmente ordenado** (também conhecido como **poset).** Denotaremos um conjunto arbitrário parcialmente ordenado por $(S, \leq)$. Em qualquer caso particular, $\leq$ tem um significado parecido com "menor ou igual a", "é subconjunto de", "divide" ou coisa parecida.

(**poset**, em inglês ***p**artially **o**rdered **set***)

Relações

Ordenação Parcial

Definição: Ordenação Parcial
Uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, anti-simétrica e transitiva é chamada de **ordenação parcial em S**.

Seja $(S, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, e seja $A \subseteq S$. Então $\leq$ é um conjunto de pares ordenados de S, alguns dos quais podem ser pares ordenados de A. Se tomarmos de $\leq$ os pares ordenados de elementos de A, este novo conjunto é chamado de **restrição** de $\leq$ a A e constitui uma ordenação parcial em A. (Você percebe por que as três propriedades necessárias continuam a valer?) Por exemplo, uma vez que sabemos que a relação "x divide y" é uma ordenação parcial em $\mathbb{N}$, automaticamente sabemos que "x divide y" é uma ordenação parcial de $\{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$.

Relações

Ordenação Parcial

Definição: Ordenação Parcial
Uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, anti-simétrica e transitiva é chamada de **ordenação parcial em** S.

Agora é interessante que se introduza alguma terminologia referente aos conjuntos parcialmente ordenados. Seja $(S, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se $x \leq y$, então ou $x = y$ ou $x \pm y$; se $x \leq y$ e $x \pm y$, escrevemos $x < y$ e dizemos que x é um **predecessor** de y ou que y **é** um **sucessor** de x. Um dado y pode ter diversos predecessores, mas, se $x < y$ e não há z tal que $x < z < y$, então dizemos que x é um **predecessor imediato** de y.

Relações

Prática 8: **Considere a relação "x divide y" em {1, 2, 3, 6, 12, 18}.**

a. Escreva os pares ordenados (x, y) desta relação.

b. Escreva todos os predecessores de 6.

c. Escreva todos os predecessores imediatos de 6.

a) (1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (1,12), (1,18), (2,2), (2,6), (2,12), (2,18), (3,3), (3,6), (3,12)
(3,18), (6,6), (6,12), (6,18), (12,12), (18,18)

b. 1, 2, 3

c. 2,3

Relações

Se S é finito, então podemos descrever um conjunto parcialmente ordenado $(S, \leq)$ visualmente através de um *grafo*. Cada elemento de S é representado por um ponto, chamado de nó, **nodo** ou **vértice** do grafo. Se x é um predecessor imediato de y, então o nó para y é desenhado acima do nó para x e os dois nós são ligados por um segmento de linha.

EXEMPLO 9

Considere $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ com respeito à relação de inclusão em conjuntos. Este é um conjunto parcialmente ordenado. (Já sabemos que $(\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.) Os elementos de $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ são $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{1, 2\}$. A relação binária $\subseteq$ consiste nos seguintes pares ordenados:

$$(\emptyset, \emptyset), (\{1\}, \{1\}), (\{2\}, \{2\}), (\{1, 2\}, \{1, 2\}), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}),$$
$$(\emptyset, \{1, 2\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{1, 2\})$$

Relações

EXEMPLO 9

O grafo deste conjunto parcialmente ordenado é mostrado na Fig. 4.2. Perceba que, apesar de $\emptyset$ não ser um predecessor imediato de $\{1, 2\}$, ele é um predecessor (o que é mostrado no grafo pela cadeia de segmentos de linhas que ligam estes dois vértices).

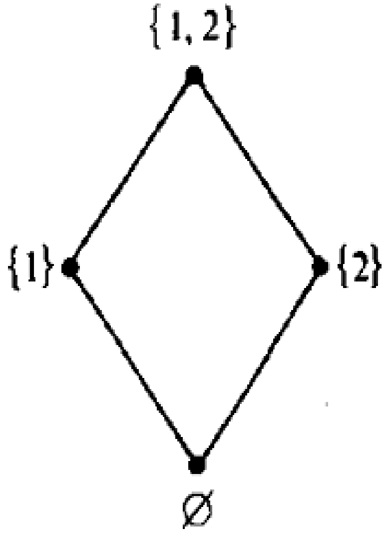
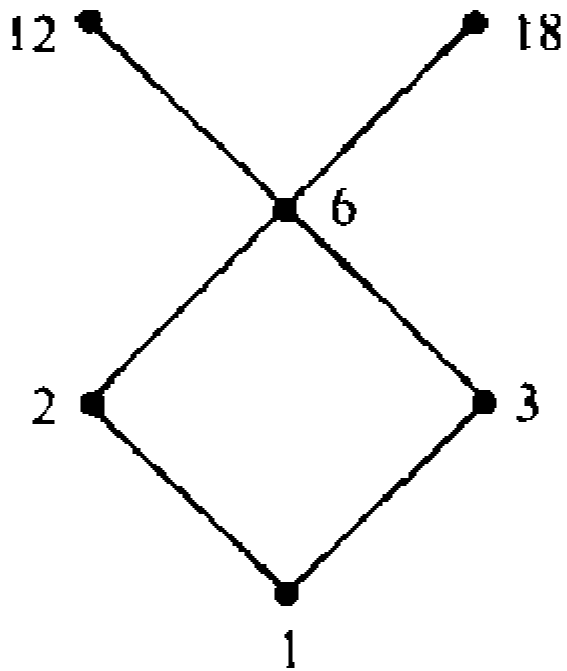


Figura 4.2

◆

Relações

Prática 9: **Desenhe o grafo da relação "x divide y" em {1, 2, 3, 6, 12, 18}.**



UNIVERSIDADE VILA VELHA ESPÍRITO SANTO

Relações

O grafo de um conjunto parcialmente ordenado (também chamado de **diagrama de Hasse**) contém todas as informações sobre uma ordenação parcial. Podemos reconstruir o conjunto de pares ordenados que formam a ordenação parcial com base apenas no grafo. Portanto, dado o grafo da Fig. 4.3 de uma ordenação parcial $\leq$ em um conjunto S $\{a, b, c, d, e, f\}$, podemos concluir que $\leq$ é o conjunto

{(a, a), {b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f,f), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (d, e)}

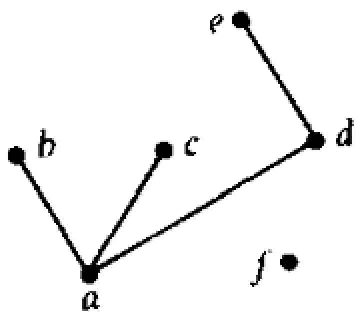


Figura 4.3

Relações

Ordenação Total

Uma ordenação parcial na qual todo elemento do conjunto está relacionado com todos os demais elementos é chamada de ordenação total ou cadeia.

O grafo de uma ordenação total tem a forma do mostrado na Fig. 4.4.

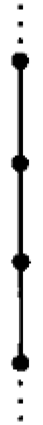


Figura 4.4

A relação $\leq$ em $\mathbb{N}$ é uma ordenação total.

Relações

Novamente, seja $(S, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se houver um $y \in S$ com $y \leq x$ para todo x $\in S$, então y é um **elemento mínimo** do conjunto parcialmente ordenado. Um elemento mínimo, quando houver, é único. Se y e z forem ambos elementos mínimos, então $y \leq z$, pois y é elemento mínimo e $z \leq y$, pois z é elemento mínimo. Da propriedade anti-simétrica decorre que $y = z$. Um elemento $y \in S$ é **minimal** se não houver outro $x \in S$ com $x \leq y$. No diagrama de Hasse um elemento mínimo se encontra abaixo de todos os outros, enquanto que um elemento minimal é aquele que não tem elementos abaixo dele com os quais se relacione. Definições análogas aplicam-se a elementos máximo e maximal.

Prática 10: Defina elemento máximo e elemento maximal em um conjunto parcialmente ordenado $(S, \leq)$.

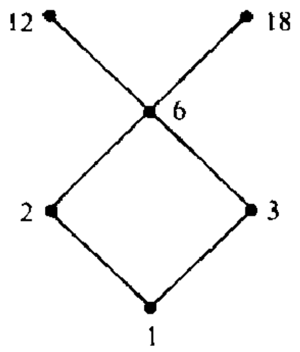
$y \in S$ é um elemento máximo se $x \leq y$ para todo $x \in S$.

$y \in S$ é um elemento maximal se não houver $x \in S$ com $y \leq x$.

Relações

EXEMPLO 10

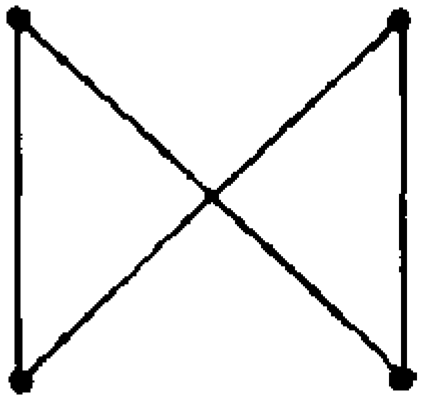
No conjunto parcialmente ordenado da Prática 9, 1 é tanto mínimo como minimal. Doze e dezoito são ambos maximais, mas não há elemento máximo.



Um elemento mínimo é sempre minimal e um elemento máximo é sempre maximal, mas as recíprocas não são verdadeiras (veja o Exemplo 10). Em um conjunto totalmente ordenado, no entanto, um elemento minimal é um elemento mínimo e um elemento maximal é um elemento máximo.

Relações

Prática 12: **Desenhe o grafo de um conjunto parcialmente ordenado com quatro elementos no qual haja dois elementos minimais, mas não haja elemento mínimo, e dois elementos maximais, mas não haja elemento máximo, e onde todos os elementos se relacionem com outros dois elementos.**



Relações

Relações de Equivalência

Definição: Relação de Equivalência

Uma relação binária em um conjunto S que seja reflexiva, simétrica e transitiva é chamada de uma **relação de equivalência** em S.

Já vimos os seguintes exemplos de relações de equivalência:

Em qualquer conjunto S, $x \rho y \leftrightarrow x = y$.
Em $\mathbb{N}$, $x \rho y \leftrightarrow x + y$ é par.
No conjunto de todas as linhas do plano, $x \rho y \leftrightarrow x$ é paralela a y, ou x coincide com y.
Em $\{0,1\}$, $x \rho y \leftrightarrow x = y^2$.
Em $\{x \mid x$ é um aluno de sua classe$\}$, $x \rho y \leftrightarrow x$ senta na mesma coluna que y.
Em $\{1, 2, 3\}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$.

Relações

Definição: Partição de um Conjunto

Uma **partição** de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos disjuntos não vazios de S cuja união resulte S.

Podemos ilustrar um aspecto importante de uma relação de equivalência em um conjunto, se observarmos o exemplo $S = \{x \mid x \text{ é um aluno de sua classe}\}$, $x \, \rho \, y \leftrightarrow$ "x senta na mesma coluna que y". Vamos indicar todos os alunos de S que se relacionam uns com os outros. Chegaremos à Fig. 4.5. Particionamos o conjunto S em subconjuntos de tal forma que todo aluno da turma pertence a um, e apenas a um, subconjunto.

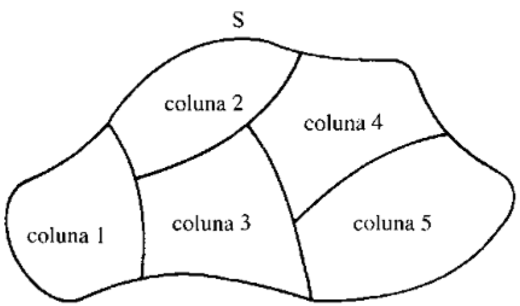


Figura 4.5

Relações

Definição: Partição de um Conjunto

Uma **partição** de um conjunto S é uma coleção de subconjuntos disjuntos não vazios de S cuja união resulte S.

Qualquer relação de equivalência, como veremos, particiona o conjunto no qual é definida. Os subconjuntos que formam a partição, normalmente chamados de **blocos** da partição, são formados pelo grupamento dos elementos que se relacionam, como no caso acima.

Sejam ρ uma relação de equivalência em um conjunto S e $x \in S$, denotamos por $[x]$ o conjunto de todos os elementos de S que se relacionam a x, chamado de **classe de equivalência** de x. Assim

$$[x] = \{y \mid y \in S \land x \rho y\}$$

Relações

EXEMPLO 11

No caso em que $x \rho y \leftrightarrow$ "x senta na mesma coluna que y", suponha que João, Carlos, José, Júlia e Maria sentem todos na coluna 3. Então [João] = {João, Carlos, José, Júlia, Maria}. Além disso, [João] = [José] = [Júlia] = [Maria]. Pode haver mais de um nome para uma dada classe de equivalência. •

Relações

Seja p uma relação de equivalência em S, então as classes de equivalência distintas de S formam uma partição de S. A fim de concordar com a definição de partição, precisamos mostrar que (1) a união das classes distintas resulta em S e (2) as classes distintas são disjuntas. Mostrar que a união das classes resulta em S é fácil, uma vez que é essencialmente uma igualdade de conjuntos; demonstramos a inclusão de conjuntos em ambas as direções. Cada classe de equivalência é um subconjunto de S, portanto, a união das classes também é um subconjunto de S. Para demonstrar a inclusão no outro sentido, seja $x \in S$. Então $x \rho x$ (reflexividade de p); daí $x \in [x]$, e qualquer elemento de S pertence a alguma classe de equivalência e, portanto, à união das classes.

Relações

Agora sejam $[x]$ e $[z]$ duas classes de equivalências distintas isto é, $[x] \neq [z]$. Precisamos mostrar que $[x] \cap [z] = \emptyset$. Faremos uma demonstração por contradição. Assumiremos, portanto, que $[x] \cap [z] \neq \emptyset$ e, neste caso, existe um $y \in S$ tal que $y \in [x] \cap [z]$.

$y \in [x] \cap [z]$	(hipótese)
$y \in [x]$, $y \in [z]$	(definição de $\cap$)
$x \rho y$, $z \rho y$	(definição de $[x]$ e $[z]$)
$x \rho y$, $y \rho z$	(simetria de ρ)
$x \rho z$	(transitividade de ρ)

Relações

O que nos permite mostrar que $[x] = [z]$; demonstraremos a inclusão de conjuntos em ambas as direções. Seja

$q \in [z] \qquad ([z] \neq \emptyset)$

Então

$z \rho q$	(definição de $[z]$)
$x \rho z$	(resultado obtido acima)
$x \rho q$	(transitividade de ρ)
$q \in [x]$	(definição de $[x]$)
$[z] \subseteq [x]$	(definição de $\subseteq$)
$[x] \subseteq [z]$	(Prática 12 abaixo)
$[x] = [z]$	($[z] \subseteq [x]$ e $[x] \subseteq [z]$)

Portanto, $[x] = [z]$, o que é uma contradição pois $[x]$ e $[z]$ são distintas. Portanto, nossa hipótese estava errada; $[x] \cap [z] = \emptyset$ e classes de equivalência distintas são disjuntas.

Relações

Prática 12: Com base no argumento acima, demonstre que $[x] \subseteq [z]$.

12. Seja $q \in [x]$. Então $x \rho q$. Como $x \rho z$, pela simetria, $z \rho x$. Pela transitividade, $z \rho x$ junto com $x \rho q$ nos dá $z \rho q$. Portanto, $q \in [z]$.

UNIVERSIDADE VILA VELHA ESPÍRITO SANTO

Relações

Mostramos que uma relação de equivalência em um conjunto determina uma partição. A recíproca também é verdadeira. Dada uma partição de um conjunto S, definimos uma relação ρ por x "ρ $y \leftrightarrow$ está no mesmo subconjunto da partição que y."

Prática 13:

Mostre que p, como definido acima, é uma relação de equivalência em S; isto é, mostre que ρ é reflexiva, simétrica e transitiva. •

13. Para qualquer $x \in S$, x está no mesmo subconjunto que ele próprio, portanto $x \rho x$. Se $x \rho y$, x está no mesmo subconjunto que y; portanto, y está no mesmo subconjunto de x, isto é, $y \rho x$. Se $x \rho y$ e $y \rho z$, então x está no mesmo subconjunto que y, e y está no mesmo subconjunto de z; logo x está no mesmo subconjunto de z, isto é, $x \rho z$.

Relações

Teorema de Relações de Equivalência e Partições

Uma relação de equivalência em um conjunto S determina uma partição de S, e uma partição de S determina uma relação de equivalência em S.

Relações

EXEMPLO 12

A relação de equivalência em $\mathbb{N}$ dada por

$$x \rho y \leftrightarrow x + y \text{ é par}$$

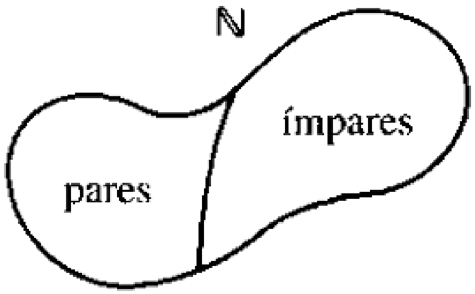


Figura 4.6

particiona $\mathbb{N}$ em duas classes de equivalência. Se x for um número par, então para qualquer número par y, $x + y$ é par e, portanto, $y \in [x]$. Todos os números pares formam uma classe de equivalência. Se x for um número ímpar e y for qualquer número ímpar, $x + y$ é par e $y \in [x]$. Todos os números ímpares formam a segunda classe de equivalência. A partição pode ser representada como na Fig. 4.6. Perceba novamente que uma classe de equivalência pode ter mais de um nome ou elemento representativo. Neste exemplo, $[2] = [8] = [1048] = \ldots$; $[1] = [17] = [947] = \ldots$

Relações

PRÁTICA 14

Descreva as classes de equivalência de cada uma das relações de equivalência a seguir:

a. No conjunto de todas as linhas no plano, $x \rho y \leftrightarrow x$ é paralela a y ou coincide com y.

b. Em $\mathbb{N}$, $x \rho y \leftrightarrow x = y$.

c. No conjunto $\{1, 2, 3\}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$.

14. a. As classes de equivalência são conjuntos que consistem em linhas no plano com a mesma inclinação.

b. $[n] = \{n\}$; as classes de equivalência são todos os conjuntos unitários com os elementos de $\mathbb{N}$.

c. $[1] = [2] = \{1,2\}, [3] = \{3\}$

Relações

EXEMPLO 13

Seja $S = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. S é, portanto, o conjunto de todas as frações. Duas frações tais como $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são ditas equivalentes. Formalmente, a/b é equivalente à c/d, denotado por $a/b \sim c/d$, se, e somente se, $ad = bc$. Mostraremos que a relação binária $\sim$ em S é uma relação de equivalência. Primeiro, $a/b \sim a/b$ porque $ab = ba$. Além disso, se $a/b \sim c/d$, então $ad = bc$ ou $cb = da$ e $c/d \sim a/b$. Portanto, $\sim$ é reflexiva e simétrica. Para mostrar a transitividade de $\sim$, sejam $a/b \sim c/d$ e $c/d \sim e/f$. Então $ad = bc$ e $cf = de$. Multiplicando a primeira equação por f e a segunda por b temos $adf = bcf$ e $bcf = bde$. Portanto, $adf = bde$ ou $af = be$. Portanto, $a/b \sim e/f$ e $\sim$ é transitiva. Alguns exemplos de classes de equivalências de S formadas pela relação $\sim$ são

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\ldots, \frac{-3}{-6}, \frac{-2}{-4}, \frac{-1}{-2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots\right\}$$

$$\left[\frac{3}{10}\right] = \left\{\ldots, \frac{29}{-30}, \frac{-6}{-20}, \frac{-3}{-10}, \frac{3}{10}, \frac{6}{20}, \frac{9}{30}, \ldots\right\}$$

Relações

EXEMPLO 14

Definiremos a relação binária de **congruência módulo 4** no conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Um inteiro x é congruente módulo 4 a y, simbolizado por $x \equiv_4 y$, ou $x \equiv y \pmod 4$, se $x - y$ é um múltiplo exato de 4. A congruência módulo 4 é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$. (Você pode provar isto?) Para construir as classes de equivalência, perceba que [0], por exemplo, conterá os números que diferem por 0 de múltiplos de 4, tais como 4, 8, — 12, etc. As classes de equivalência distintas são

$[0] = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$

$[1] = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$

$[2] = \{..., -6, -2, 2, 6, 10, ...\}$

$[3] = \{..., -5, -1, 3, 7, 11, ...\}$

Não há razão especial para a escolha do número 4 no Exemplo 14; podemos dar uma definição de **congruência módulo** n para qualquer inteiro positivo n. Esta relação binária será sempre uma relação de equivalência.

Relações

PRÁTICA 15

Quais são as classes de equivalência correspondentes à relação de congruência módulo 5 em $\mathbb{Z}$?

15. [0] = {..., -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15,...)
[1] = {...,-14, -9, -4, 1, 6, 11, 16,...}
[2] = {..., -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17,...}
[3] = {..., -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18,...}
[4] = {...,-11, -6, -1, 4, 9, 14, 19,...}

Relações

Trabalho: Pesquisar e montar um trabalho sobre Aplicações de Álgebra para Computação: Congruência Módulo N.

A congruência pode ser usada em Criptografia, Códigos de Identificação tipo ISBN encontrados em livro e Códigos de Barras para Produtos, Desenhos Geométricos e Algoritmo de Conferência de CPF, entre outros.

Montar Slides para Apresentação e um .docx do trabalho;

Participação de Todos os Componentes.

Grupos: 3 a 5 Componentes.

Pontuação: 1 ponto no Bimestre;
Terão as duas aulas desta semana para a pesquisa e desenvolvimento.
Apresentação: Próxima quarta 28/04