UVV

Melhor Universidade Particular do Brasil *(MEC)*

THE Times Higher Education

Pacto Nacional pela Primeira Infância

universidades empreendedoras

QS WORLD UNIVERSITY RANKINGS

AD Scientific Index

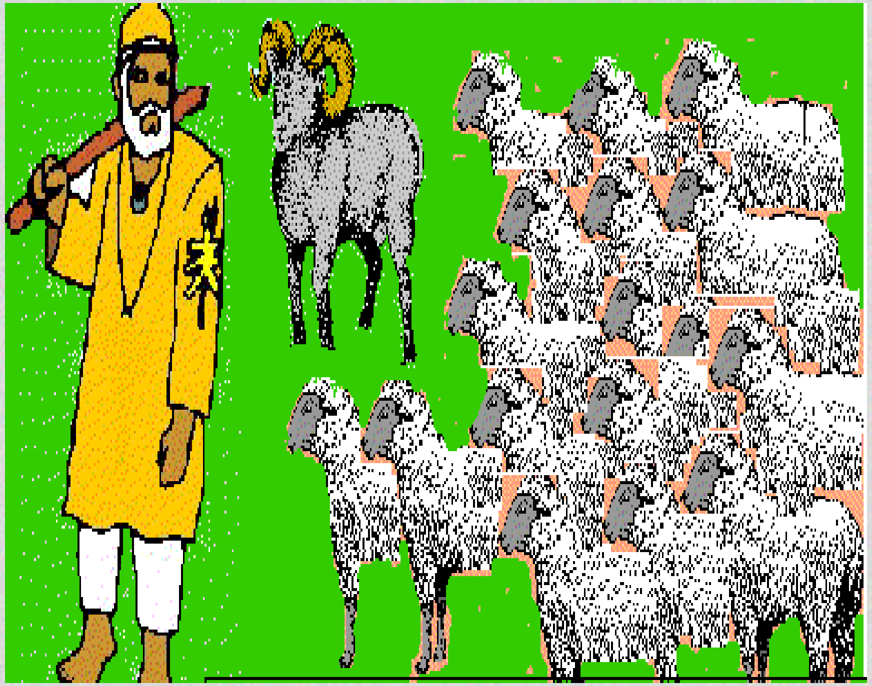
Prêmio Sebrae de Educação Empreendedora

CENTELHA

QS

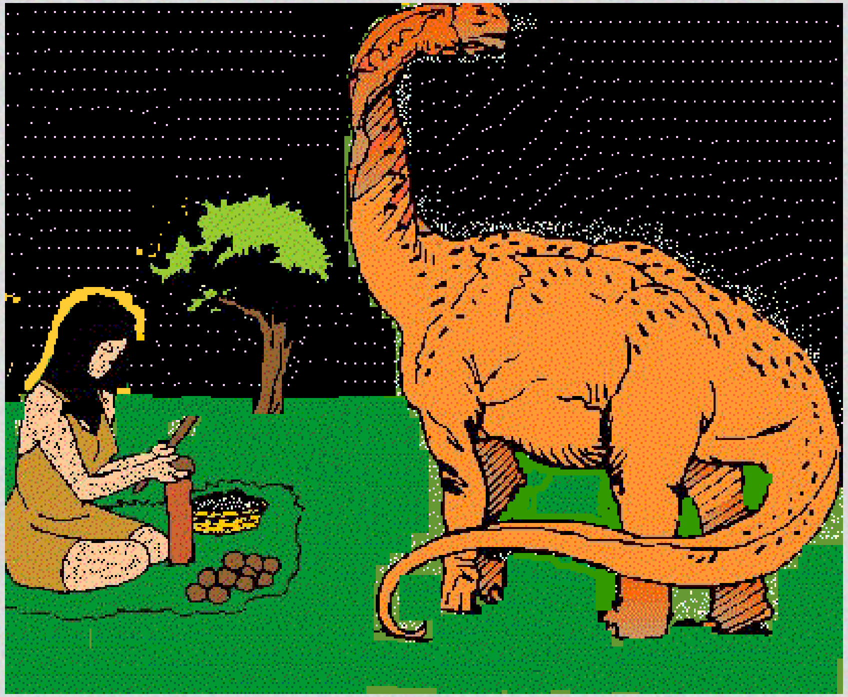
THE IMPACT RANKINGS

Uma breve história

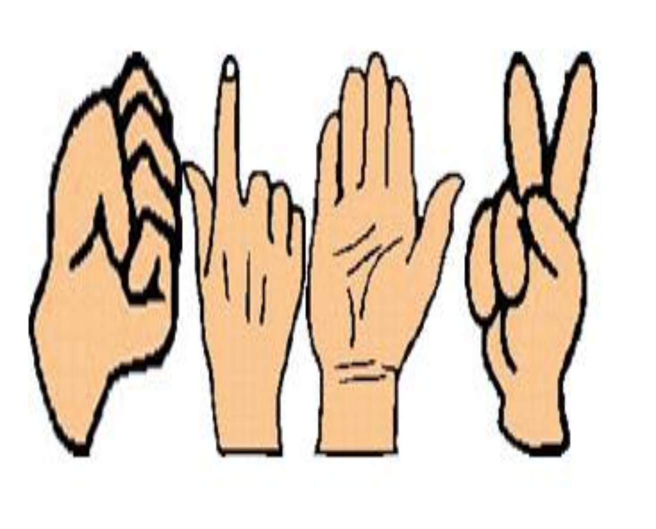


e administrar os seus bens
de forma
a não ser enganado.

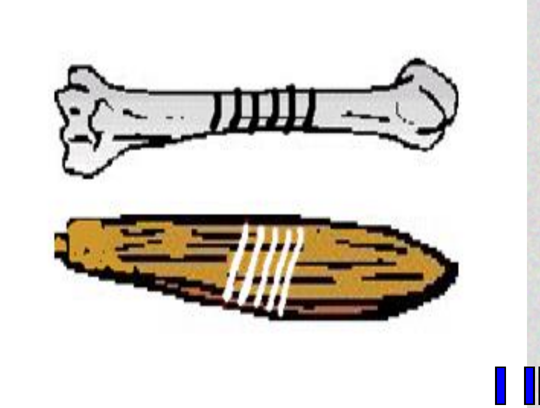
O homem sempre teve a
necessidade de se
organizar



Uma breve história

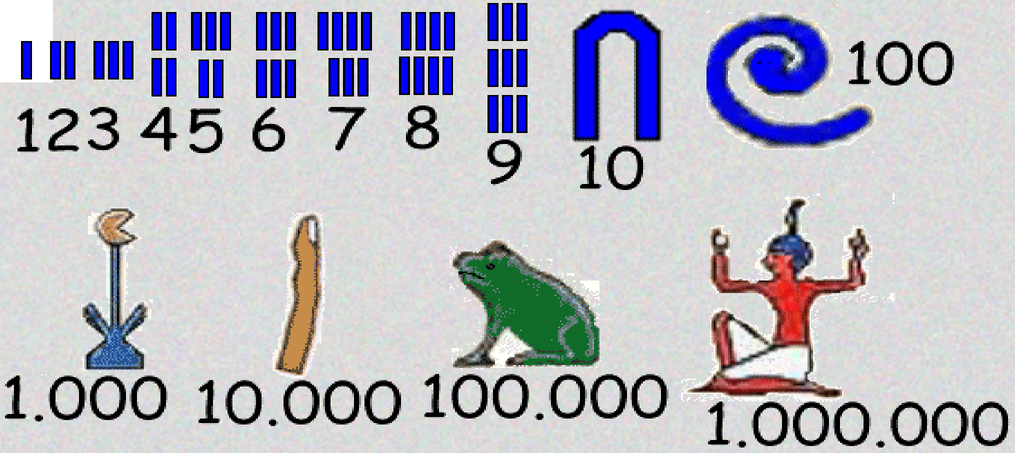


O primeiro sistema de contagem foi as mãos.



Depois riscos em madeiras e ossos.

Alguns utilizavam símbolos
para representar quantidades.



Uma breve história

- Desde muito tempo o homem sempre teve a preocupação em contar objetos e ter registros numéricos. Desta preocupação sugiram os *Conjuntos Numéricos*

Conjuntos numéricos

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS – N

Tem como elementos números inteiros e positivos.

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS – Z

Tem como elementos números inteiros positivos e negativos.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS - Q

Tem como elementos números inteiros positivos e negativos, decimal finito e disma periódica.

CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS - I

Tem como elementos decimais infinitos sem período.

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS -   R

Tem como elementos os números que compõem o conjunto. Racional e Irracional simultaneamente.

Relação de conjuntos

Diagrama numérico

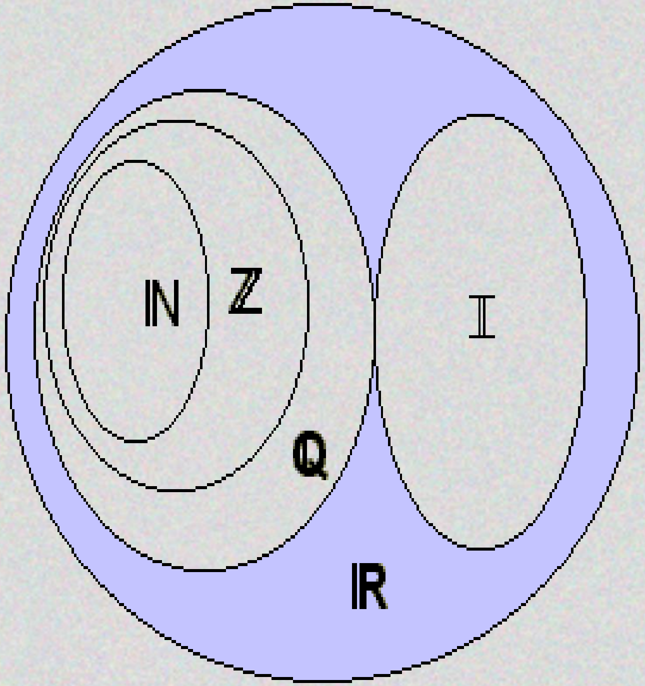
Os elementos do Conjunto N pertence aos demais conjuntos exceto o conjunto irracional

O conjunto Z pertence aos conjuntos Q e R

O conjunto Q engloba os elementos do conjunto N e Z simultaneamente

Os elementos do conjunto I não se associam com os demais conjuntos

O conjunto R é resultado da união entre os demais conjuntos, ou seja, conjuntos N, Z, Q e I



Teoria de Conjuntos

Definição: Um conjunto é uma coleção de objetos, sem repetição e não ordenada.

Exemplos:

a) A={5,6,8,9}
b) B= { violeta, rosa, margarida}
c) C ={ $x \in$ N / x < 9 }

Notação:

Usamos letras maiúsculas para denotarem conjuntos e o símbolo $\in$ para denotar que um elemento pertence ao conjunto.

Portanto, a $\in$ A significa que a é um elemento, ou membro, do conjunto A e b $\notin$ A significa que o objeto b não é um elemento do conjunto A. Usamos chaves para indicar conjuntos.

Teoria de Conjuntos

Definição: Igualdade de conjuntos: Dois conjuntos A e B são iguais se e somente se, eles contêm os mesmos elementos.

$$A = B \text{ significa } \quad (\forall x)[(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)]$$

Mais exemplos: Como definir o conjunto de todos inteiros positivos pares?

Pode ser assim:

$$\{2,4,6,\ldots\}$$

Ou ainda: Este conjunto S pode ser definido, definindo explicitamente um de seus elementos e, então, definindo os demais elementos de S em termos dos elementos já conhecidos. Por exemplo:

1. $2 \in S$
2. Se $n \in S$, então $(n + 2) \in S$

Teoria de Conjuntos

PRÁTICA 1 Descreva cada um dos seguintes conjuntos, listando seus elementos.

a. $\{x \mid x$ é um inteiro e $3 < x \leq 7\}$
b. $\{x \mid x$ é um mês com exatamente 30 dias$\}$
c. $\{x \mid x$ é a capital do Brasil$\}$

É conveniente dar nomes a alguns conjuntos-padrão a fim de referirmo-nos a eles mais facilmente. Usaremos

$\mathbb{N}$ = conjunto de todos os inteiros não-negativos (perceba que $0 \in \mathbb{N}$)
$\mathbb{Z}$ = conjunto de todos os inteiros
$\mathbb{Q}$ = conjunto de todos os números racionais
$\mathbb{R}$ = conjunto de todos os números reais
$\mathbb{C}$ = conjunto de todos os números complexos

Algumas vezes também falaremos no conjunto sem qualquer elemento (o **conjunto vazio** ou **conjunto nulo**), denotado por $\emptyset$ ou $\{\}$.

Teoria de Conjuntos

EXEMPLO 2 Se $S = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 0\}$, então $S = \{\ \}$.

Suponhamos agora que o conjunto A é descrito como

$A = \{x \mid (\exists y)(y \in \{0, 1, 2\} \text{ e } x = y^3)\}$ Logo $A = \{0, 1, 8\}$

Se seguirmos o mesmo processo com o conjunto B

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq y)\}$$

$$B = \mathbb{N}$$

Mas para o conjunto C,

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \in \mathbb{N} \rightarrow x \leq y)\}$ $C = \{0\}$

Teoria de Conjuntos

PRÁTICA 3 Descreva cada um dos conjuntos definidos abaixo.

a. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \in \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow x \geq y)\}$
b. $B = \{x \mid (\exists y)(\exists z)(y \in \{1, 2\} \text{ e } z \in \{2, 3\} \text{ e } x = y + z)\}$

Respostas:

a. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geq 5\}$
b. $B = \{3, 4, 5\}$

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

- Para A = {2, 3, 5, 12} e B = {2, 3,4, 5, 9, 12}, todo elemento de A é também um elemento de B. Quando isto acontece, dizemos que A é um subconjunto de B.

Complete a definição: A é um **subconjunto** de B se

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow \underline{\hspace{3cm}}).$$

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

Se A é um subconjunto de B, escrevemos, $A \subseteq B$. Se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$ (existe pelo menos um elemento de B que não é elemento de A), então A é dito um **subconjunto próprio** de B e denotado por $A \subset B$.

EXEMPLO 3 Seja

$$A = \{1, 7, 9, 15\}$$
$$B = \{7, 9\}$$
$$C = \{7, 9, 15, 20\}$$

Então as seguintes sentenças (dentre outras) são todas verdadeiras:

$B \subseteq C$ $\quad 15 \in C$
$B \subseteq A$ $\quad \{7, 9\} \subseteq B$
$B \subset A$ $\quad \{7\} \subset A$
$A \not\subset C$ $\quad \varnothing \subset C$

Esta última sentença é verdadeira, porque a sentença $(\forall x)(x \in \varnothing \rightarrow x \in C)$ é verdadeira, uma vez que $x \in \varnothing$ é sempre falsa.

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

PRÁTICA 6 Seja

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \geq 5\}$$
$$B = \{10, 12, 16, 20\}$$
$$C = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 2y)\}$$

Quais das seguintes sentenças são verdadeiras?

a. $B \subseteq C$
b. $B \subset A$
c. $A \subseteq C$
d. $26 \in C$
e. $\{11, 12, 13\} \subseteq A$
f. $\{11, 12, 13\} \subset C$
g. $\{12\} \in B$
h. $\{12\} \subseteq B$
i. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 20\} \not\subseteq B$
j. $5 \subseteq A$
k. $\{\emptyset\} \subseteq B$
l. $\emptyset \notin A$

Resposta:

6. a, b, d, e, h, i, 1

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

Suponha que $B = \{x \mid P(x)\}$ e que $A \subseteq B$. Como cada elemento de A também é um elemento de B e P é a propriedade que caracteriza todos os elementos de B, então todos os elementos de A também gozam da propriedade $P(x)$. Os elementos de A "herdam" a propriedade P. De fato, para *provar* que $A \subseteq B$, tomamos um x e A arbitrário e mostramos que $P(x)$ é verdadeira. Se A for um subconjunto próprio de B, os elementos de A terão, normalmente, alguma propriedade característica que nem todos os elementos de B têm.

EXEMPLO 4 Seja

$$B = \{x \mid x \text{ é múltiplo de } 4\}$$

e seja

$$A = \{x \mid x \text{ é múltiplo de } 8\}$$

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

EXEMPLO 4 Seja

$$B = \{x \mid x \text{ é múltiplo de } 4\}$$

e seja

$$A = \{x \mid x \text{ é múltiplo de } 8\}$$

Então temos $A \subseteq B$. Para provar este resultado, seja $x \in A$; perceba que x é um elemento de A completamente arbitrário. Precisamos mostrar que x satisfaz a propriedade característica de B; isto significa que precisamos mostrar que x é um múltiplo de 4. Como temos x e A, x satisfaz à propriedade característica de A; isto é, x é um múltiplo de 8 e, como tal, pode ser escrito na for∈a $x = m \cdot 8$, para algum inteiro m. Esta equação pode ser escrita como $x = m.2\ .4$ *ou* $x = k.4$, onde $k = 2m$, de forma que k *é* também um inteiro. Isto mostra que x *é* um múltiplo de 4 e, portanto x e B.

Existem números (como 12∈que são múltiplos de 4, mas não são múltiplos de 8; portanto, $A \subset B$. Outra forma de descrever A é

$$A = \{x \mid x = k \cdot 4 \text{ e } k \text{ é um número par}\}$$

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

PRÁTICA 7

Seja

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

e

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq x \leq 4\}$$

Prove que $A \subset B$.

Prova: Seja $x \in A$. Então $x \in \mathbb{R}$ e $x^2 - 4x + 3 = 0$, ou $(x - 1)\ (x + 3) = 0$, o que nos dá $x = 1$ ou $x = 3$. Em ambos os casos, $x \in \mathbb{N}$ e $1 \leq x \leq 4$, logo $x \in B$. Portanto, $A \subseteq B$. O valor 4 pertence a B, mas A não; logo $A \subset B$.

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

Sabemos que A e B são iguais se contêm os mesmos elementos. Podemos reescrever esta igualdade em termos de subconjuntos: A = B se, e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Provar a inclusão em ambas as direções é a forma normal de estabelecer a igualdade entre dois conjuntos.

EXEMPLO 5 Provaremos que $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 < 15\} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2x < 7\}$.

Seja $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 < 15\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2x < 7\}$. Para mostrar que $A = B$, mostraremos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Para $A \subseteq B$ precisamos escolher um elemento arbitrário de A, isto é, qualquer número que satisfaça sua propriedade característica e mostrar que ele também satisfaz a propriedade característica de B. Seja $x \in A$. Então x é um inteiro não-negativo que satisfaz a desigualdade $x^2 < 15$. Os inteiros não-negativos com quadrado menor que 15 são 0, 1, 2 e 3, portanto esses são os elementos de A. O dobro de cada um desses inteiros é um número menor que 7. Portanto, cada elemento de A é um elemento de B e $A \subseteq B$.

Mostraremos agora que $B \subseteq A$. Qualquer elemento de B é um inteiro não-negativo cujo dobro é menor que 7. Esses números são 0, 1, 2 e 3, que têm, cada qual, um quadrado menor que 15. Portanto, $B \subseteq A$. •

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

•Conjuntos de Conjuntos

Dado um conjunto S, podemos criar um novo conjunto cujos elementos sejam todos os subconjuntos de S.

Este novo conjunto é chamado de conjunto das partes de S, P(S).
P(S) conterá, pelo menos $\varnothing$, e o próprio S, uma vez que $\varnothing \subseteq S$ e $S \subseteq S$ são sempre verdade.

PRÁTICA 8 Para A = {1, 2, 3}, qual $\mathscr{P}(A)$?

$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

- Conjuntos de Conjuntos

Na Prática 8, A tem três elementos e $\mathscr{P}(A)$ tem oito elementos. Experimente achar $\mathscr{P}(S)$ para outros conjuntos S até que você seja capaz de responder ao problema da prática a seguir.

PRÁTICA 9 Se S tem n elementos, então $\mathscr{P}(S)$ tem ___ elementos. (Sua resposta funciona para $n = 0$ também?)

Resposta: 2^n

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

- Operações Binárias e Unárias
- Um conjunto, por si só, não é objeto de muito interesse até que se faça algo com seus elementos.
- Por exemplo, podemos realizar diversas operações aritméticas sobre os elementos do conjunto $\mathbb{Z}$.
- Uma operação binária atua sobre dois números e uma operação unária atua sobre um único número.
- A subtração é uma operação binária em $\mathbb{Z}$.

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

Operações Binárias e Unárias

• Para quaisquer dois inteiros x e y, x - y resultará em uma, e apenas uma resposta, e essa resposta será sempre um inteiro.

Finalmente, a subtração é realizada sobre um par ordenado de números. Por exemplo, 7 - 5 não produz o mesmo resultado que 5 - 7. Um par ordenado é denotado por (x, y), onde x é o primeiro componente do par e y é o segundo.

A ordem é importante em um par ordenado; portanto, os conjuntos {1, 2} e {2, 1} são iguais mas os pares ordenados (1, 2) e (2, 1) não o são.

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

Operações Binárias e Unárias

PRÁTICA 10 Dado que $(2x - y, x + y) = (7, -1)$, ache x e y.

Resolução:

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

Operações Binárias e Unárias

PRÁTICA 11 Seja $S = \{3, 4\}$. Liste todos os pares ordenados (x, y) de elementos de S.

Resolução:

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

Operações Binárias e Unárias

Definição: Operação Binária

$\circ$ **é** uma **operação binária** sobre um conjunto S se para qualquer par ordenado (x, y) de elementos de S, $x \circ y$ existe, é único e é um elemento de S.

O fato do valor $x \circ y$ existir e ser único é descrito ao dizer-se que a operação binária $\circ$ é **bem-definida.** A propriedade de que $x \circ y$ deve sempre pertencer a S é descrita ao dizer-se que S é **fechado** sob a operação $\circ$.

EXEMPLO 6 A adição, subtração e multiplicação são todas operações binárias em $\mathbb{Z}$. Por exemplo, quando realizamos a adição no par ordenado de inteiros (x, y), $x + y$ existe, é único e é inteiro. •

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

Operações Binárias e Unárias

EXEMPLO 7 As operações lógicas de conjunção, disjunção, implicação e equivalência são operações binárias no conjunto das wffs proposicionais. Se P e Q são wffs proposicionais, então $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$ e $P \leftrightarrow Q$ são wffs proposicionais únicas. •

Uma º candidata a uma operação pode não ser uma operação binária em um conjunto S por três motivos:

(1) Existem elementos x,y ∈ S para os quais x º y não existe;

(2) Existem elementos x,y Є S para os quais x º y fornece mais de um resultado; ou

(3) Existem elementos x,y Є S para os quais x º y não pertence a S.

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

Operações Binárias e Unárias

EXEMPLO 8 A divisão não é uma operação binária em $\mathbb{Z}$ porque $x \div 0$ não existe. •

EXEMPLO 9 Seja $x \circ y$ definida em $\mathbb{N}$ por

$$x \circ y = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 5 \\ 0 \text{ se } x \leq 5 \end{cases}$$

Então, pela primeira parte da definição de $\circ$, $5 \circ 1 = 1$, mas, pela segunda parte, $5 \circ 1 = 0$. Portanto, $\circ$ não é bem-definida em $\mathbb{N}$. •

EXEMPLO 10 A subtração não é uma operação binária em $\mathbb{N}$ porque $\mathbb{N}$ não é fechado sob a subtração. (Por exemplo, $1 - 10 \notin \mathbb{N}$.) •

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

Operações Binárias e Unárias

Para que # seja uma **operação unária** no conjunto S, é preciso que para qualquer $x \in S$, $x^{\#}$ exista, seja único e seja um elemento de S. Caso qualquer dessas condições não seja satisfeita, não teremos uma operação unária.

EXEMPLO 11 Seja x# definida por $x^{\#} = -x$, de tal forma que $x^{\#}$ é o negativo de x. Então # é uma operação unária em Z, mas não em N porque N não é fechado sob #.

EXEMPLO 12 O conectivo lógico da negação é uma operação unária no conjunto das wffs proposicionais. Se P for uma wff proposicional, então P' será uma wff proposicional. •

Com esses exemplos fica claro que para $\circ$ (ou #) ser ou não uma operação binária (ou unária) não depende apenas de sua definição, mas também do conjunto em questão.

Teoria de Conjuntos

Relações entre Conjuntos

Operações Binárias e Unárias

Até agora todas nossas operações binárias foram descritas através de uma descrição ou uma equação. Suponha que S é um conjunto finito, $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Então uma operação arbitrária $\circ$ em S pode ser definida por uma matriz, ou tabela, onde cada elemento i, j (linha i, coluna j) denota $x_i \circ x_j$

EXEMPLO 13 Seja $S = \{2, 5, 9\}$ e seja $\circ$ definida pela matriz

$\circ$	2	5	9
2	2	2	9
5	5	9	2
9	5	5	9

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

A maioria das operações que vimos opera em números, mas também podemos realizar operações em conjuntos. Dado um conjunto arbitrário S, podemos definir algumas operações binárias e unárias no conjunto $\mathscr{P}(S)$. S, neste caso, é chamado o **conjunto universo** ou **universo de discurso.** O conjunto universo define o contexto dos objetos em questão. Se $S = \mathbb{Z}$, por exemplo, então todos seus subconjuntos conterão apenas inteiros.

Definição: União de Conjuntos

Seja $A, B \in \mathscr{P}(S)$. A união de A e B, denotada por $A \cup B$, é $\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

PRÁTICA 13 Seja $A, B \in \mathscr{P}(S)$. Complete a seguinte definição: A **interseção** de A e B, denotada por $A \cap B$ é $\{x \mid x$ ____ $\}$.

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

EXEMPLO 15 Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{3, 5, 6, 10, 11\}$. Podemos considerar A e B como elementos de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Então, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$ e $A \cap B = \{3, 5\}$. Tanto $A \cup B$ quanto $A \cap B$ são elementos de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. ♦

Podemos usar *diagramas de Venn* (cujo nome é dado em função do matemático inglês do século 19, John Venn) para visualizar as operações binárias de união e interseção. As áreas sombreadas nas Figs. 3.1 e 3.2 ilustram os conjuntos que resultam da aplicação das operações binárias nos conjuntos dados.

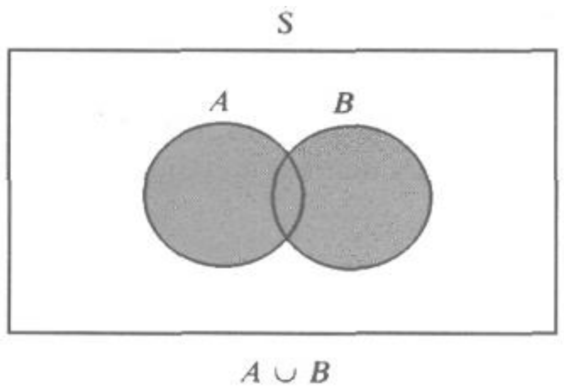


Figura 3.1

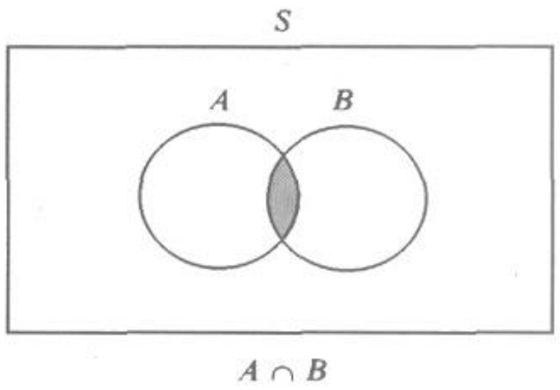


Figura 3.2

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Definiremos uma operação unária em $\mathscr{P}(S)$.

Definição: Complemento de um Conjunto

Para um conjunto $A \in \mathscr{P}(S)$, o **complemento de** A, A' é $\{x \mid x \in S \text{ e } x \notin A\}$.

PRÁTICA 14 Ilustre A' em um diagrama de Venn.

Outra operação binária entre os conjuntos A e B é a **diferença de conjuntos:** $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Esta operação pode ser escrita como $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B'\}$ e, finalmente como $A - B = A \cap B'$.

PRÁTICA 15 Ilustre A — B em um diagrama de Venn.

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Dois conjuntos A e B tais que $A \cap B = \varnothing$ são ditos **disjuntos.** Portanto, $A - B$ e $B - A$, por exemplo, são conjuntos disjuntos.

EXEMPLO 16 Sejam

$$A = \{x \mid x \text{ é um inteiro não-negativo par}\}$$
$$B = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 2y + 1)\}$$
$$C = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 4y)\}$$

subconjuntos de $\mathbb{N}$. Como B representa o conjunto dos números inteiros não-negativos ímpares, A e B são disjuntos. Além disso, todo inteiro ou é par ou é ímpar, portanto, $A \cup B = \mathbb{N}$. Esses dois fatos nos dizem, ainda, que $A' = B$. Todo múltiplo de 4 é um número par, portanto, C é um subconjunto de A, donde $A \cup C = A$. C é, na verdade, um subconjunto próprio de A e $A - C = \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x = 4y + 2)\}$. •

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

PRÁTICA 16 Sejam

$$A = \{1,2,3,5,10\}$$
$$B = \{2,4,7,8,9\}$$
$$C = \{5, 8, 10\}$$

subconjuntos de $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Encontre

a. $A \cup B$
b. $A - C$
c. $B' \cap (A \cup C)$

16. a. $\{1,2,3,4,5,7,8,9,10\}$
    b. $\{1,2,3\}$
    c. $\{1,3,5,10\}$

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Produto Cartesiano

Existe uma última operação que definiremos com base nos elementos de $\mathcal{P}(S)$.

Definição: Produto Cartesiano
Sejam A e B subconjuntos de S. O **produto cartesiano (produto cruzado)** de A e B, denotado por $A \times B$ é definido por

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Portanto, o produto Cartesiano de dois conjuntos *A e B é o* conjunto de todos os pares ordenados cujas primeiras coordenadas pertençam a A e as segundas pertençam a B. O produto cruzado não é uma operação binária em $\mathcal{P}(S)$. Na verdade, ele opera em um par ordenado de membros de $\mathcal{P}(S)$ e fornece um resultado único e o conjunto resultante não é, em geral, um subconjunto de S; isto é, não é um elemento de $\mathcal{P}(S)$. A condição de fechamento para uma operação binária não é, portanto, satisfeita.

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Como estaremos, freqüentemente, interessados no produto cruzado de um conjunto com ele próprio, abreviaremos $A \times A$ por A^2; em geral, usaremos A^n para denotar o conjunto de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de elementos de A.

PRÁTICA 17 Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{3,4\}$.

a. Encontre $A \times B$.
b. Encontre $B \times A$.
c. Encontre A^2.
d. Encontre A^3.

17. a. $A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$
b. $B \times A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$
c. $A^2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$
d. $A^3 = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Identidades de Conjuntos

Identidades de Conjuntos Básicas

1a. $A \cup B = B \cup A$	1b. $A \cap B = B \cap A$	(propriedades comutativas)
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(propriedades associativas)
3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(propriedades distributivas)
4a. $A \cup \varnothing = A$	4b. $A \cap S = A$	(propriedades de identidade)
5a. $A \cup A' = S$	5b. $A \cap A' = \varnothing$	(propriedades de complemento)

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Identidades de Conjuntos

EXEMPLO 17 Vamos demonstrar a identidade 3a. Poderíamos desenhar diagramas de Venn para cada lado da equação e ver que eles são iguais. No entanto, a identidade 3a é tida como válida para todos os subconjuntos *A*, *B* e C, e qualquer figura que desenharmos não pode ser completamente geral. Portanto, se desenharmos *A* e *B* como disjuntos, seria um caso especial; mas se os desenhássemos com interseção não-vazia, não estaríamos considerando o caso em que *A e B* são disjuntos. Para não termos que desenhar uma figura para cada caso. vamos demonstrar a igualdade do conjunto através da inclusão em ambas as direções. Portanto, demonstraremos

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Identidades de Conjuntos

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

e também que

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

Para mostrar que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$, tomaremos x como um elemento arbitrário de $A \cup (B \cap C)$. Podemos proceder da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\to x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C) \\ &\to x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \in C) \\ &\to (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in C) \\ &\to x \in (A \cup B) \text{ e } x \in (A \cup C) \\ &\to x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Para mostrar que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$, invertemos o argumento acima. ◆

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Identidades de Conjuntos

PRÁTICA 18 Demonstre a identidade 4a. 4a. $A \cup \emptyset = A$

18. Mostre a inclusão de conjuntos em ambas as direções. Para mostrar $A \cup \emptyset \subseteq A$, tome $x \in A \cup \emptyset$. Então $x \in A$ ou $x \in \emptyset$, mas como $\emptyset$ não tem elementos, $x \in A$. Para mostrar $A \subseteq A \cup \emptyset$, seja $x \in A$. Então $x \in A$ ou $x \in \emptyset$, logo $x \in A \cup \emptyset$.

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Identidades de Conjuntos

EXEMPLO 18

Podemos usar as identidades básicas de conjuntos para provar

$$[A \cup (B \cap C)] \cap ([A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)') = \varnothing$$

para A, B e C quaisquer subconjuntos de S. Na demonstração a seguir, os números à direita indicam as identidades usadas em cada passo.

$[A \cup (B \cap C)] \cap ([A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)')$	
$= ([A \cup (B \cap C)] \cap ([A' \cup (B \cap C)]) \cap (B \cap C)'$	(2b)
$= ([(B \cap C) \cup A] \cap [(B \cap C) \cup A']) \cap (B \cap C)'$	(1a duas vezes)
$= [(B \cap C) \cup (A \cap A')] \cap (B \cap C)'$	(3a)
$= [(B \cap C) \cup \varnothing] \cap (B \cap C)'$	(5b)
$= (B \cap C) \cap (B \cap C)'$	(4a)
$= \varnothing$	(5b)

Identidades de Conjuntos Básicas

1a. $A \cup B = B \cup A$	1b. $A \cap B = B \cap A$	(propriedades comutativas)
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(propriedades associativas)
3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(propriedades distributivas)
4a. $A \cup \varnothing = A$	4b. $A \cap S = A$	(propriedades de identidade)
5a. $A \cup A' = S$	5b. $A \cap A' = \varnothing$	(propriedades de complemento)

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Identidades de Conjuntos

O **dual** para cada identidade de conjunto na nossa lista também aparece na lista. Os duais são obtidos substituindo-se $\cup$ por $\cap$ e trocando S por $\varnothing$. O dual da identidade no Exemplo 18 é

$$[A \cap (B \cup C)] \cup ([A' \cap (B \cup C)] \cup (B \cup C)') = S \qquad [A \cup (B \cap C)] \cap ([A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)') = \varnothing$$

que podemos demonstrar substituindo cada identidade básica de conjuntos usada na demonstração do Exemplo 18 por sua dual. Como este método sempre funciona, sempre que tivermos demonstrado uma identidade de conjuntos usando as identidades básicas, teremos também demonstrado sua dual.

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Identidades de Conjuntos

Identidades de Conjuntos Básicas

1a. $A \cup B = B \cup A$	1b. $A \cap B = B \cap A$	(propriedades comutativas)
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(propriedades associativas)
3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(propriedades distributivas)
4a. $A \cup \emptyset = A$	4b. $A \cap S = A$	(propriedades de identidade)
5a. $A \cup A' = S$	5b. $A \cap A' = \emptyset$	(propriedades de complemento)

PRÁTICA 19 a. Usando as identidades básicas de conjuntos, estabeleça a identidade

$$[C \cap (A \cup B)] \cup [(A \cup B) \cap C'] = A \cup B$$

(A, B e C são quaisquer subconjuntos de *S.)*

b. Indique a identidade dual que você sabe ser verdadeira.

19. a.
$$\begin{aligned}
&[C \cap (A \cup B)] \cup [(A \cup B) \cap C'] \\
&= [(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap C'] && (1b)\\
&= (A \cup B) \cap (C \cup C') && (3b)\\
&= (A \cup B) \cap S && (5a)\\
&= A \cup B && (4b)
\end{aligned}$$

b. $[C \cup (A \cap B)] \cap [(A \cap B) \cup C'] = A \cap B$

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Identidades de Conjuntos

50. A e B são subconjuntos de S. Demonstre as seguintes identidades mostrando a inclusão em ambas as direções:

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{a. } (A \cup B)' = A' \cap B' \\ \textbf{b. } (A \cap B)' = A' \cup B' \end{array}\right\} \text{Leis de De Morgan}$$

c. $A \cup (B \cap A) = A$

d. $(A \cap B')' \cup B = A' \cup B$

e. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

f. $[A \cap (B \cup C)]' = A' \cup (B' \cap C')$

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Identidades de Conjuntos

Identidades de Conjuntos Básicas

1a. $A \cup B = B \cup A$	1b. $A \cap B = B \cap A$	(propriedades comutativas)
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(propriedades associativas)
3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(propriedades distributivas)
4a. $A \cup \varnothing = A$	4b. $A \cap S = A$	(propriedades de identidade)
5a. $A \cup A' = S$	5b. $A \cap A' = \varnothing$	(propriedades de complemento)

51. *a.* A, B e C são subconjuntos de S. Demonstre as seguintes identidades usando as identidades básicas de conjuntos apresentadas nesta seção:

★1. $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

2. $([(A \cap C) \cap B] \cup [(A \cap C) \cap B']) \cup (A \cap C)' = S$

3. $(A \cup C) \cap [(A \cap B) \cup (C' \cap B)] = A \cap B$

b. Indique o dual de cada uma das identidades acima.

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

Identidades de Conjuntos

52. A, B e C são subconjuntos de S. Demonstre as seguintes identidades de conjuntos, quer seja mostrando a inclusão em ambas as direções ou usando as identidades previamente demonstradas, incluindo as do Exercício 50.

★**a.** $(A')' = A$

★**b.** $A \cap (B \cup A') = B \cap A$

c. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

d. $(A - B) - C = (A - C) - B$

e. $[(A' \cup B') \cap A']' = A$

Teoria de Conjuntos

Número de Elementos em Conjuntos

– Em muitas situações, é interessante que saibamos determinar o número de elementos da união e da interseção de conjuntos. Neste Tópico, vamos mostrar como proceder para realizar tais cálculos.

Teoria de Conjuntos

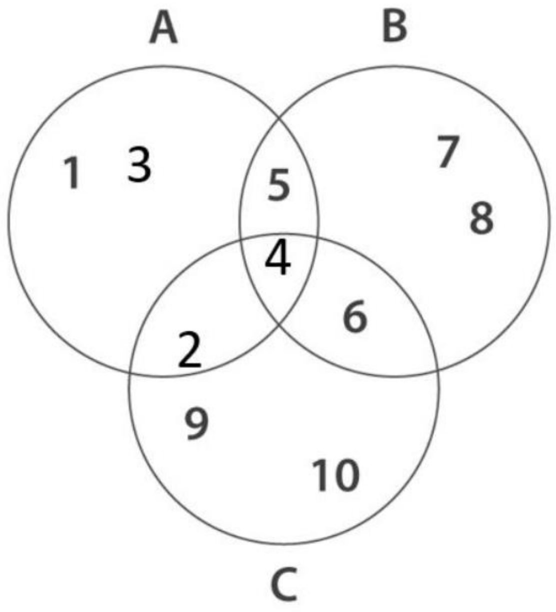
Número de Elementos em Conjuntos

- Exemplo: Considere os conjuntos A={1;2;3;4;5}; B={4;5;6;7;8} e C={2;4;6;9;10}. Calcule a quantidade de elementos da união dos conjuntos A, B e C.

Teoria de Conjuntos

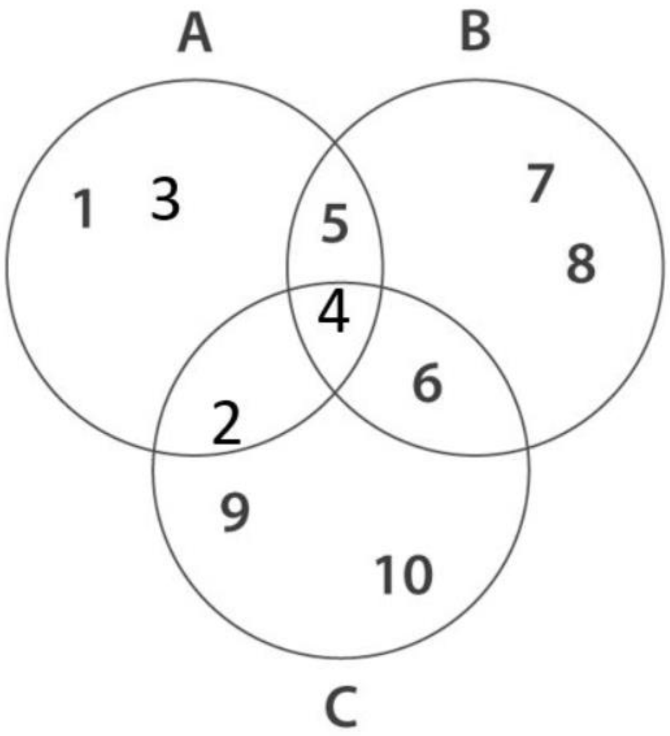
Exemplo: A={1;2;3;4;5}; B={4;5;6;7;8} e C={2;4;6;9;10}

Vamos começar construindo o diagrama de Venn que representa a união dos conjuntos.



Teoria de Conjuntos

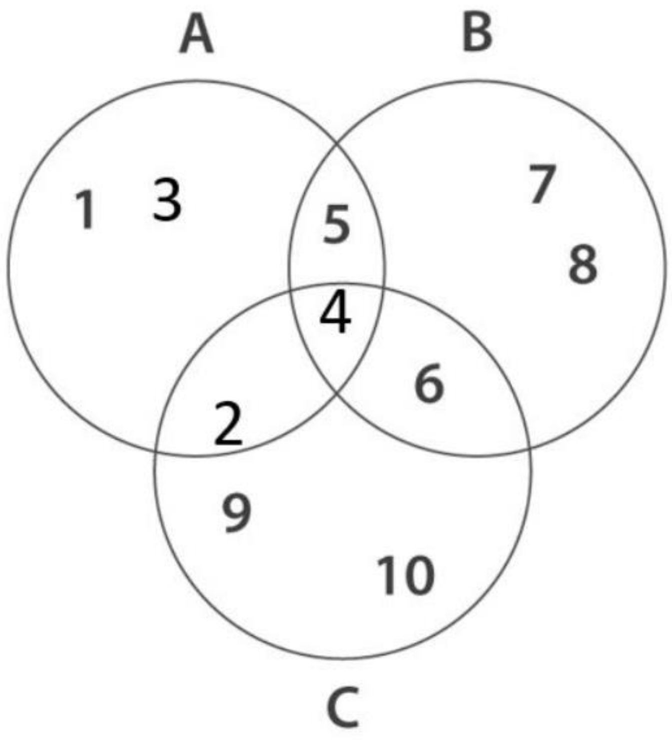
Exemplo: A={1;2;3;4;5}; B={4;5;6;7;8} e C={2;4;6;9;10}



Seja n(A)= número de A;
n(A)= 5
n(B)= nº de elementos do conjunto B;
n(B)= 5
n(C)= nº de elementos do conjunto C;
n(C)= 5
n(A ∩ B)= nº de elementos da interseção do conjunto A com o B;
n(A ∩ B) = 2.
n(A ∩ C)= nº de elementos da interseção do conjunto A com o C;
n(A ∩ C) = 2.

Teoria de Conjuntos

Exemplo: A={1;2;3;4;5}; B={4;5;6;7;8} e C={2;4;6;9;10}



n(A∩B∩C)= nº de elementos da interseção dos três conjuntos n(A∩B∩C)=1
n(A U B U C)= nº de elementos da união dos três conjuntos n(AUB U C)=?

n(A U B **U C**)= n(A) + n(B) **+ n(C)** - n(A ∩ B) - n(A ∩ C) - n(B ∩ C) + n(A∩B∩C).

n(AUBUC) = 5 + 5 + 5 - 2 - 2 - 2 +1; n(AUBUC) = 10

E para 2 conjuntos?

Teoria de Conjuntos

Exercícios Extras

1. Uma prova com duas questões foi dada a uma classe de 40 alunos. Dez alunos acertaram as duas questões, 25 acertaram a primeira questão e 20 acertaram a segunda questão. Quantos alunos erraram as duas questões?

Teoria de Conjuntos

Exercícios Extras

2. No ano passado, houve uma campanha de doação de sangue na nossa Universidade. Sabemos que o sangue das pessoas pode ser classificado em quatro tipos quanto aos antígenos. Uma pesquisa feita com um grupo de 100 alunos da Universidade constatou que 45 deles têm o antígeno A, 41 têm o antígeno B e 12 o antígeno AB. De posse das informações acima, calcule a quantidade de alunos que possuem sangue com o antígeno O.

Teoria de Conjuntos

Exercícios Extras

1. Resolução

T= total de alunos que fizeram a prova.

A= acertaram a primeira questão.

B= acertaram a segunda questão.

$A \cap B$= acertaram as duas questões.

$n(T) = 40 \rightarrow$ total de alunos que fizeram a prova.

$n(A) = 25 \rightarrow$ quantidade de alunos que acertaram a 1ª questão.

$n(B) = 20 \rightarrow$ quantidade de alunos que acertaram a 2ª questão.

$n(A \cap B) = 10 \rightarrow$ quantidade de alunos que acertaram as duas questões.

Teoria de Conjuntos

Exercícios Extras

2. No ano passado, houve uma campanha de doação de sangue na nossa Universidade. Sabemos que o sangue das pessoas pode ser classificado em quatro tipos quanto aos antígenos. Uma pesquisa feita com um grupo de 100 alunos da Universidade constatou que 45 deles têm o antígeno A, 41 têm o antígeno B e 12 o antígeno AB. De posse das informações acima, calcule a quantidade de alunos que possuem sangue com o antígeno O.

Teoria de Conjuntos

Exercícios de Fixação

1 - USP-SP - Depois de n dias de férias, um estudante observa que:

- choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde;
- quando chove de manhã não chove à tarde;
- houve 5 tardes sem chuva;
- houve 6 manhãs sem chuva.

Podemos afirmar então que n é igual a:

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

Teoria de Conjuntos

Exercícios de Fixação

2 - 52 pessoas discutem a preferência por dois produtos A e B, entre outros e conclui-se que o número de pessoas que gostavam de B era:

I - O quádruplo do número de pessoas que gostavam de A e B;

II - O dobro do número de pessoas que gostavam de A;

III - A metade do número de pessoas que não gostavam de A nem de B.

Nestas condições, o número de pessoas que não gostavam dos dois produtos ao mesmo tempo é igual a:

a)48

b)35

c)36

d)47

e)37

Teoria de Conjuntos

Exercícios de Fixação

3 - UFBA - 35 estudantes estrangeiros vieram ao Brasil. 16 visitaram Manaus; 16, S. Paulo e 11, Salvador.
Desses estudantes, 5 visitaram Manaus e Salvador e , desses 5, 3 visitaram também São Paulo.
O número de estudantes que visitaram Manaus ou São Paulo foi:

a) 29
b) 24
c) 11
d) 8
e) 5

Problema

4. Uma pesquisa realizada pelo Colégio Unicanto detectou que 500 alunos gostam de matemática, 700 de português, 300 das duas disciplinas e 1 000 alunos afirmam não gostar de nenhuma destas. Nestas condições, quantos foram os entrevistados?

A) 2 500 alunos
B) 2 000 alunos
C) 1 900 alunos
D) 900 alunos

É necessário lembrar que todas as vezes que alguém gosta de duas ou mais coisas ao mesmo tempo, usaremos a noção de diagrama para a sua resolução.

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

5 - Se um conjunto A possui 1024 subconjuntos, então o cardinal de A é igual a:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 9
e)10

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

6 - Após um jantar, foram servidas as sobremesas X e Y.
Sabe-se que das 10 pessoas presentes, 5 comeram a sobremesa X, 7 comeram a sobremesa Y e 3 comeram as duas.
Quantas não comeram nenhuma ?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 0

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

7 – Um colégio oferece a seus alunos a prática de um ou mais dos seguintes esportes: futebol, basquete e vôlei. Sabe-se que, no atual semestre,

- 20 alunos praticam vôlei e basquete;
- 60 alunos praticam futebol e 65 praticam basquete;
- 21 alunos não praticam nem futebol nem vôlei;
- o número de alunos que praticam só futebol é idêntico ao número dos alunos que praticam só vôlei;
- 17 alunos praticam futebol e vôlei;
- 45 alunos praticam futebol e basquete; 30, entre os 45, não praticam vôlei.

número total de alunos do colégio, no atual semestre, é igual a

a) 93.
b) 114.
c) 103.
d) 110.
e) 99.

Teoria de Conjuntos

Operações em Conjuntos

8 - FGV-SP - Sejam A, B e C conjuntos finitos.

O número de elementos de $A \cap B$ é 30, o número de elementos de $A \cap C$ é 20 e o número de elementos de $A \cap B \cap C$ é 15.

Então o número de elementos de $A \cap (B \cup C)$ é igual a:

a)35
b)15
c)50
d)45
e)20

UVV

universidadevilavelha

uvvoficial

universidadevilavelha