Exercícios Selecionados 4.1

1) Indique quais pares ordenados pertencem a cada uma das relações [binárias] ρ em $\mathbb{N}$:

a) $x \rho y \leftrightarrow x + y < 7$: $(1,3), (2,5), (3,3), (4,4)$.

$\rho = \{(1,3), (3,3)\}$

b) $x \rho y \leftrightarrow x = y + 2$; $(0,2), (4,2), (6,3), (5,3)$.

$\rho = \{(4,2), (5,3)\}$

2) Determine quais dos pares ~~ordenados~~ dados ~~fazem parte~~ sat[isfazem] a relação a seguir:

a) ρ é a relação binária em $\mathbb{Z}$, $x \rho y \leftrightarrow x = -y$;

$\rho = \{(1,-1), (-3,3)\}$

b) ρ é a relação ~~binária~~ unária em $\mathbb{N}$, $x \in \rho \leftrightarrow x$ é primo;

$\rho = \{19, 41\}$

c) ρ é a relação ternária em $\mathbb{N}$, $(x,y,z) \in \rho \leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$.

$\rho = \{(3,4,5), (0,5,5), (8,6,10)\}$

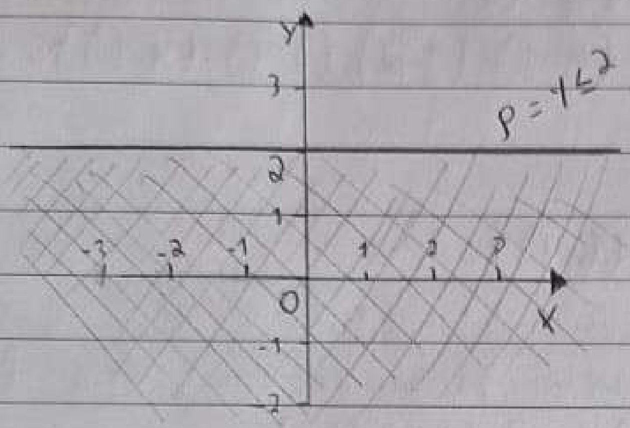
d) ρ é a relação binária em $\mathbb{Q}$, $x \rho y \leftrightarrow x \leq 1/y$.

$\rho = \{(-3,-5), (-4,\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},\frac{1}{3})\}$

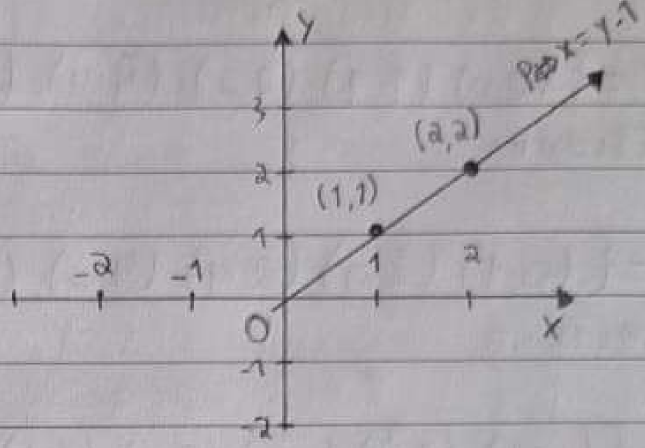
3) Para cada uma das relações binárias a seguir, desenhe uma figura do plano que ela define:

$y = x + 1$

a) $x \rho y \leftrightarrow y \leq 2$



b) $x \rho y \leftrightarrow x = y - 1$



5) Classifique cada relação em $S \times T$, onde $S = T = \mathbb{N}$, como um-para-um, um-para-vários, vários-para-um, vários-para-vários:

a) $\rho = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,3), (4,3)\}$: vários-para-vários

b) $\rho = \{(9,7), (6,5), (3,6), (8,5)\}$: vários-para-um

c) $\rho = \{(12,5), (8,4), (6,3), (7,12)\}$: um-para-um

d) $\rho = \{(2,7), (8,4), (2,5), (7,6), (10,1)\}$: um-para-vários

7) Sejam ρ e σ relações binárias em $\mathbb{N}$ definidas por $x \rho y \leftrightarrow$ "x divide y", $x \sigma y \leftrightarrow 5x \leq y$. Determine os pares que satisfazem:

a) $\rho \cup \sigma$: $(2,6), (3,17), (2,1), (0,0)$. $\rho \cup \sigma = \{(2,6), (3,17), (0,0)\}$

b) $\rho \cap \sigma$: $(3,6), (1,2), (2,12)$. $\rho \cap \sigma = \{(2,12)\}$

c) ρ': $(1,5), (2,8), (3,15)$. $\rho' = \emptyset$

d) σ': $(1,1), (2,10), (4,8)$. $\sigma' = \{(1,1), (4,8)\}$

8) SEJA $S = \{0, 1, 2, 4, 6\}$. VERIFIQUE SE AS RELAÇÕES BINÁRIAS EM S SÃO REFLEXIVAS, SIMÉTRICAS, ANTI-SIMÉTRICAS E/OU TRANSITIVAS:

a) $\rho = \{(0,0), (1,1), (2,2), (4,4), (6,6), (0,1), (1,2), (2,4), (4,6)\}$:
REFLEXIVA.

b) $\rho = \{(0,1), (1,0), (2,4), (4,2), (4,6), (6,4)\}$:
SIMÉTRICA.

c) $\rho = \{(0,1), (1,2), (0,2), (2,0), (2,1), (1,0), (0,0), (1,1), (2,2)$:
SIMÉTRICA, TRANSITIVA.

d) $\rho = \{(0,0), (1,1), (2,2), (4,4), (6,6), (4,6), (6,4)\}$:
REFLEXIVA, SIMÉTRICA, TRANSITIVA.

e) $\rho = \varnothing$: REFLEXIVA, SIMÉTRICA, TRANSITIVA E ANTI-SIMÉTRICA.

9) CLASSIFIQUE AS RELAÇÕES A SEGUIR COMO REFLEXIVAS, SIMÉTRICAS, ANTI-SIMÉTRICAS E TRANSITIVAS:

a) $S = \mathbb{Q}$; $x \rho y \leftrightarrow |x| \leq |y|$
REFLEXIVA, TRANSITIVA.

b) $S = \mathbb{Z}$; $x \rho y \leftrightarrow x - y$ É MÚLTIPLO DE 3.
REFLEXIVA, SIMETRICA E TRANSITIVA.

c) $S = \mathbb{N}$; $x \rho y \leftrightarrow x \cdot y$ É PAR
SIMETRICA.

d) $S = \mathbb{N}$; $x \rho y \leftrightarrow x$ É ÍMPAR: REFLEXIVA, TRANSITIVA

12) SEJAM ρ E σ RELAÇÕES BINÁRIAS EM UM CONJUNTO S.

a) SE ρ E σ FOREM REFLEXIVAS, A UNIÃO $\rho \cup \sigma$ SERÁ REFLEXIVA? E A INTERSECÇÃO?

SE ρ E σ SÃO REFLEXIVAS, ENTÃO TODO ELEMENTO X SE RELACIONA COM ELE MESMO, E COMO A UNIÃO É DEFINIDA POR: $x(\rho \cup \sigma)y \leftrightarrow x\rho y \vee x\sigma y$. CONCLUÍMOS QUE A UNIÃO $\rho \cup \sigma$ É REFLEXIVA.

SE $\rho \cap \sigma$ CONTÉM TODOS OS ELEMENTOS $x \mid x\rho y \wedge x\sigma y$, E ρ E σ SÃO REFLEXIVAS, $\rho \cap \sigma$ TAMBÉM SERÁ REFLEXIVA.

b) SE ρ E σ FOREM SIMETRICAS, A UNIÃO $\rho \cup \sigma$ TAMBEM SERÁ? E A INTERSEÇÃO $\rho \cap \sigma$?

SE ρ E σ SÃO SIMÉTRICAS, ENTÃO SE $x\rho y \in \rho$ OU $\sigma \Rightarrow (y, x) \in \rho$ OU σ. LOGO A UNIÃO $\rho \cup \sigma$ SERÁ SIMÉTRICA, POIS TODOS OS ELEMENTOS DESSE CONJUNTO SATISFAZEM ρ OU σ OU OS DOIS, PORTANTO TODOS OS PARES (x, y) E (y, x) QUE SATISFAZEM $\rho \vee \sigma \in \rho \cup \sigma$.

DO MESMO JEITO, A INTERSEÇÃO $\rho \cap \sigma$ É SIMÉTRICA, POIS TODOS OS SEUS ELEMENTOS SATISFAZEM $\rho \wedge \sigma$.

c) SE ρ E σ FOREM TRANSITIVAS, A UNIÃO $\rho \cup \sigma$ TAMBÉM SERÁ? E A INTERSEÇÃO $\rho \cap \sigma$?

SE ρ E σ SÃO SIMÉTRICAS, ENTÃO $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S \wedge (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho]$, E O MESMO PARA σ. LOGO VERIFICAMOS QUE A UNIÃO $\rho \cup \sigma$ NÃO SERÁ TRANSITIVA. POIS, PODE EXISTIR UM PAR (x, y) EM ρ E UM PAR (y, z) EM σ, TAL QUE EM $\rho \cup \sigma$ O PAR (x, z) NÃO EXISTA.

13) ECONTRE OS FECHOS REFLEXIVOS, SIMÉTRICOS E TRANSITIVOS DAS RELAÇÕES:

a) $\rho = \{(0,0), (1,1), (2,2), (4,4), (6,6), (0,1), (1,2), (2,4), (4,6)\}$

FECHO SIMÉTRICO: $\{(0,0), (1,1), (2,2), (4,4), (6,6), (0,1), (1,2), (2,4), (4,6), (1,0), (2,1), (4,2), (6,4)\}$

FECHO TRANSITIVO: $\{(0,0), (1,1), (2,2), (4,4), (6,6), (0,1), (1,2), (2,4), (4,6), (0,2), (1,4), (2,6), (0,4), (1,6), (0,6)\}$

b) $\rho = \{(0,1), (1,0), (2,4), (4,2), (4,6), (6,4)\}$

FECHO REFLEXIVO: $\{(0,1), (1,0), (2,4), (4,2), (4,6), (6,4), (0,0), (1,1), (2,2), (4,4), (6,6)\}$

FECHO TRANSITIVO: $\{(0,1), (1,0), (2,4), (4,2), (4,6), (6,4), (0,0), (1,1), (2,2), (4,4), (6,6)\}$

c) $\rho = \{(0,1), (1,2), (0,2), (2,0), (2,1), (1,0), (0,0), (1,1), (2,2)\}$

FECHO REFLEXIVO: $\{(0,1), (1,2), (0,2), (2,0), (2,1), (1,0), (0,0), (1,1), (2,2), (4,4), (6,6)\}$

d) $\rho = \{(0,0), (1,1), (2,2), (4,4), (6,6), (4,6), (6,4)\}$

↳ JÁ POSSUÍ A REFLEXIVIDADE, SIMÉTRIA E A TRANSITIVIDADE.

e) $\rho = \emptyset$

↳ COMO O CONJUNTO VAZIO NÃO POSSUI ELEMENTOS SE TORNA IMPOSSÍVEL DEMONSTRAR QUE ELE NÃO POSSUÍ AS PROPRIEDADES REFLEXIVAS, SIMÉTRICA E TRANSITIVA. POR ISSO, SE DIZ QUE ELE POSSUÍ AS TRÊS PROPRIEDADES POR VACUIDADE.

14) Descreva em palavras o que o feixo transitivo de cada relação representa:

a) S = Conjunto de todos os edifícios da cidade; $x \rho y \leftrightarrow x$ é um ano mais velho que y.

$x \rho^* y \leftrightarrow x$ é algum número de anos mais velho que y.

b) S = Conjunto de todos os homens da Bulgária; $x \rho y \leftrightarrow x$ é pai de y:

$x \rho^* y \leftrightarrow x$ é um ancestral homem de y

c) S = Conjunto de todas as cidades do Brasil; $x \rho y \leftrightarrow$ podemos ir de carro a cidade x até a y em um dia:

$x \rho^* y \leftrightarrow$ podemos ir de carro da cidade x até a y em alguns dias.

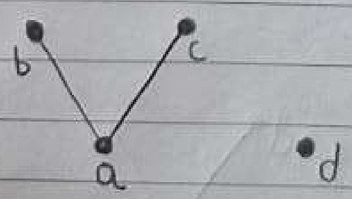
18) Desenhe o grafo das seguintes ordenações parciais:

a) $S=\{a,b,c\}$

$\rho=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$

b) $S=\{a,b,c,d\}$

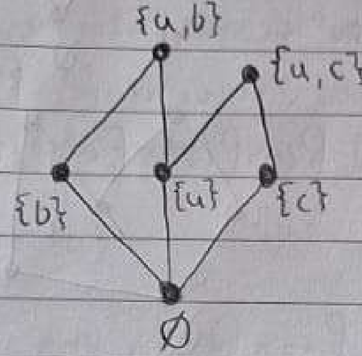
$\rho=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c)\}$



c) $S=\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b\}\}$

$A \rho B \leftrightarrow A \subseteq B$

$\rho=\{(\emptyset,\emptyset), (\{a\},\{a\}), (\{b\},\{b\}), (\{c\},\{c\}), (\{a,b\},\{a,b\}), (\{a,c\},\{a,c\}),$
$(\emptyset,\{a\}), (\emptyset,\{b\}), (\emptyset,\{c\}), (\emptyset,\{a,b\}), (\emptyset,\{a,c\}), (\{a\},\{a,b\}), (\{a\},\{a$
$(\{b\},\{a,b\}), (\{c\},\{a,c\})\}$



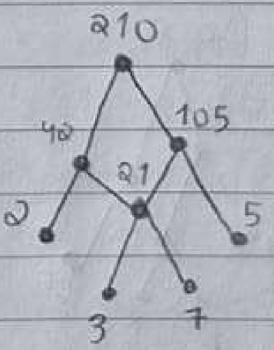
19) Indique os elementos mínimos, máximos, minimais e maximais que aparecem no exercício 18:

a) Minimal: a
Maximal: c
Mínimo: a
Máximo: c

b) Minimal: a, d
Maximal: b, c, d
Mínimo: não possui
Máximo: não possui

c) Minimal: $\emptyset$
Maximal: $\{a,b\}, \{a,c\}$
Mínimo: $\emptyset$
Máximo: não possui

20) Desenhe o grafo da ordenação parcial "x divide y" no conjunto $\{2, 3, 5, 7, 21, 42, 105, 210\}$. Indique os elementos minimais, mínimos, maximais e máximos:

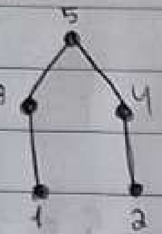


Elemento máximo: 210
Elemento mínimo: não possui

Elementos maximais: 210
Elementos minimais: 2, 3, 7, 5

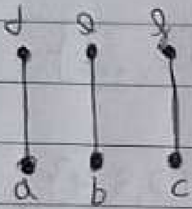
22) Para cada grafo de ordenação parcial abaixo, escreva os elementos da relação:

a)



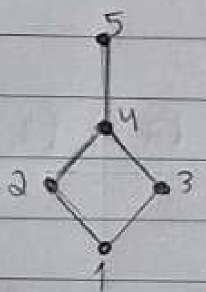
$\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (1,5), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5)\}$

b)



$\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f), (a,d), (b,e), (c,f)\}$

c)



$\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$

28) Qual o conjunto [a] para a relação de equivalência $\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,a)\}$? Ele tem outras representações?

O conjunto da classe de equivalência [a] é: $\{a, c\}$. Está classe pode ser representada como [c].

b) Qual o conjunto [3] para a relação de equivalência $\rho = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (3,2), (2,3), (3,3), (4,4), (5,5), (4,5), (5,4)\}$? E qual é o conjunto [4]?

O conjunto da classe de equivalência $[3] = \{1, 2, 3\}$. Já o conjunto $[4] = \{4, 5\}$.

c) Qual o conjunto [1] para a relação de equivalência de congruência módulo 2 em $\mathbb{Z}$?

O conjunto [1] é: $[1] = \{\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

d) Qual o conjunto [-3] para a relação congruência módulo 5 e $\mathbb{Z}$?

O conjunto [-3] é: $[-3] = \{\ldots, -18, -13, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$

29) Dada a partição $\{1,2\}$ e $\{3,4\}$ do conjunto $S=\{1,2,3,4\}$, liste os pares da relação de equivalência correspondente.

A partir dessas partições concluímos que: $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$.

b) Dada a partição $\{a,b,c\}$ e $\{d,e\}$ do conjunto $S=\{a,b,c,d,e\}$, liste os pares de ρ.

A partir dessas partições verificamos que: $\rho=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(d,e),(e,d)\}$.

31) SEJA $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ E SEJA ρ UMA RELAÇÃO BINÁRIA EM S DEFINIDA POR $(x, y)\, \rho\, (z, w) \leftrightarrow y = w$. MOSTRE QUE ρ É UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA EM S E DESCREVA AS CLASSES EQUIVALENTES.

DEM:

REFLEXIVA: SEJA $\underbrace{(x, y)}_{}\, \rho\, (x, y)$ COM $(x, y) \in \mathbb{N}$. DAÍ VERIFICAMOS QUE ρ SÓ É VÁLIDA SE AS ORDENADAS FOREM IGUAIS, E NO CASO DE $(x, y)\, \rho\, (x, y)$ AS ORDENADAS y E y SÃO IGUAIS $\therefore$ É VÁLIDA A REFLEXIVIDADE.

SIMETRIA: SE $(x, y)\, \rho\, (z, w) \in \rho$, ENTÃO $y = z$. DAÍ PODEMOS DEDUZIR QUE $(z, w)\, \rho\, (x, y) \in \rho$, POIS SE $y = z$ É VERDADEIRO, ENTÃO $z = y$ TAMBÉM É $\therefore$ É VÁLIDA A SIMETRIA.

TRANSITIVIDADE: SE $(x, y)\, \rho\, (z, w) \in \rho$, ENTÃO $y = w$ E $(z, w)\, \rho\, (r, s) \in \rho$, ENTÃO $w = s$. DAÍ CONCLUÍMOS QUE $(x, y)\, \rho\, (r, s) \in \rho$, POIS SE $y = w$ E $w = s \Rightarrow y = s$ $\therefore$ É VÁLIDA A TRANSITIVIDADE.

AS CLASSES DE EQUIVALÊNCIA DESSA RELAÇÃO ρ PARTICIONAM O CONJUNTO S EM PARES ORDENADOS COM A SEGUNDA CORDENADA IGUAL, COMO EM: $[2] = \{(0,2), (1,2), (2,2), (3,2), \ldots\}$, E ESSE PADRÃO SEGUE ATÉ O INFINITO, FORMALIZANDO MATEMATICAMENTE, TEMOS QUE $[(x, y)] = \{(z, w) \in S \mid y = w\}$

34) SEJA S O CONJUNTO DE TODAS AS WFFS PROPOSICIONAIS COM n AFIRMAÇÕES. SEJA ρ UMA RELAÇÃO BINÁRIA EM S DEFINIDA POR $P \rho Q$ <-> "$P <-> Q$" É UMA TAUTOLOGIA". MOSTRE QUE ρ É UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA EM S E DESCREVA AS CLASSES DE EQUIVALÊNCIA RESULTANTES.

REFLEXIVIDADE: SEJA P UMA WFF PROPOSICIONAL, TAL QUE $P \in S$. DAÍ VERIFICAMOS QUE SE P TIVER VALOR LÓGICO VERDADEIRO: $P <-> P \Leftrightarrow V <-> V \Leftrightarrow V$. E SE P TIVER VALOR LÓGICO FALSO: $P <-> P \Leftrightarrow F <-> F \Leftrightarrow V$, OU SEJA, ρ É REFLEXIVA.

SIMETRIA: SE $P \rho Q \in \rho$, ENTÃO $P <-> Q$ É UMA TAUTOLOGIA. DAÍ CONCLUÍMOS QUE OU P E Q POSSUEM VALOR LÓGICO FALSO, E PORTANTO $Q <-> P$ É UMA TAUTOLOGIA. OU P E Q POSSUEM VALOR LÓGICO VERDADEIRO, E PORTANTO, $Q <-> P$ TAMBÉM É UMA TAUTOLOGIA. ENTÃO VERIFICAMOS QUE ρ É SIMÉTRICA.

TRANSITIVIDADE: SE $P \rho Q \in \rho$ E $Q \rho R \in \rho$, ENTÃO $P <-> Q$ E $Q <-> R$ SÃO AMBAS TAUTOLÓGICAS. OU SEJA, P, Q E R POSSUEM VALORES LÓGICOS IGUAIS, OU AS TRÊS TEM VALOR LÓGICO VERDADEIRO, OU ELAS POSSUEM VALOR LÓGICO FALSO. DAÍ CONCLUÍMOS QUE $P <-> R$ É UMA TAUTOLOGIA. ENTÃO VERIFICAMOS QUE ρ É TRANSITIVA.

COMO DEMONSTRADO ACIMA, ρ É REFLEXIVA, SIMÉTRICA E TRANSITIVA. OU SEJA, ρ É UMA RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA EM S. PORTANTO, ρ PARTICIONA O CONJUNTO S EM CLASSES DE EQUIVALÊNCIA DISJUNTAS. NO CASO DE ρ, AS CLASSES DE EQUIVALÊNCIA PARTICIONAM S EM 2 SUBCONJUNTOS, UM CONTENDO TODAS AS WFFS COM VALOR LÓGICO VERDADEIRO, E OUTRO COM TODAS AS WFFS COM VALOR LÓGICO FALSO.