Lista de Exercício Segundo Bimestre - Funções

Kauã Araujo de Souza
cc2md

Data:

Lista de Exercícios Segundo Bimestre - Funções

Kauã Araujo de Souza / CC2MD

1. Sejam $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Determine os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

$f \circ g: f(g(x)) = \sqrt{x-1} = \sqrt{(2x^2 - 5x + 3) - 1}$

$f(g(x)) = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$

$g \circ f: g(f(x)) = 2 \cdot (\sqrt{x-1})^2 - 5 \cdot (\sqrt{x-1}) + 3$

$g(f(x)) = (\sqrt{2x-2})^2 - 5\sqrt{5x-5} + 3$

$'' = 2x - 2 - x - 8$

$'' = x - 10$

2) Dadas as funções $f(x) = 2x + m$ e $g(x) = ax + 2$, qual é a relação que a e m devem satisfazer para que se tenha $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

$f(x) = 2x + m$ e $g(x) = ax + 2$

$f \circ g: f(g(x)) = 2(ax + 2) + m$

$'' = 2ax + 4 + m$

$g \circ f: g(f(x)) = a(2x + m) + 2$

$'' = 2ax + am + 2$

$f \circ g = g \circ f$

$2ax + 4 + m = 2ax + am + 2$

$4 + m = am + 2$

$m(1 - a) = -2$

$m = \frac{-2}{1-a} \neq 1$

3) Dada a aplicação $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$, qual é o valor de x tal que $f(x) = f(x-1)$?

$x^2 - 2 = (x-1)^2 - 2$

$x^2 - 2 = x^2 - 2x + 1 - 2$

$x^2 - 2 = x^2 - 2x - 1$

$0 = -2x + 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Assim x é $\frac{1}{2}$.

Data: Lista de exercício 2 Bimestre Funções

Kauã Araujo de Souza / CC2MD

4) Sejam as funções reais $g(x) = 2x - 3$ e $f \circ g(x) = 2x^2 - 4x + 1$. Determine a lei da função f.

$f(x) = x^2 - 1x + 1$

$f(x) = x - 1x + 1$ $\quad g(x) = 2x - 3$

e

$f \circ g = 2x^2 - 4x + 1$

5) Se $f : R \to R$ é da forma $f(x) = ax + b$ e verifica $f(f(x)) = x + 1$ para todo x real, calcule os valores de a e b.

$f(f(x)) = f(ax+b)$

$f(f(x)) = a(ax+b) + b$

$= a^2x + ab + b$

$= a^2x + ab + b = x + 1$ $\quad$ tirando o x

$= a^2 + ab + b = 1$ $\quad$ colocando $a = 1$ na segunda equação

$ab + b = 1$

$= 1.b + b = 1$

$= 2b = 1$

$= b = \frac{1}{2}$ e $a = 1$

//

//

Kauã de Souza Araujo

Data:

Orden de grandeza de Funções:

4) Encontre constantes que satisfazem a definição de ordem de grandeza para provar que, se $f(x) = \sqrt{x+100}$ e $g(x) = \sqrt{x}$, então $f = \Theta(g)$. $f(x) = \sqrt{x+100}$ $g(x)\ \sqrt{x}$

Como vemos que $f(x) = \sqrt{x+100}$ e $g(x) = \sqrt{x}$, vemos que 100 em $f(x)$ é um numero fixo e ele não fara tanta diferença assim, já que o que nos importa é $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x}$ que tem seu resultado indefinido ou $= \infty$. Portanto o comportamento de $f(x)$ é da mesma ordem de $g(x) = \sqrt{x}$, satisfazendo a definição de Θ grandeza independente.

5) Encontre constantes que satisfazem a definição de ordem de grandeza que se, $f(x) = x^3 + \log x$ e $g(x) = x^3$, então $f = \Theta(g)$.

Precisamos que $f(x)$ e $g(x)$ cresçam no mesmo ritmo.

$$c_1 \cdot g(x) \leq f(x) \leq c_2 \cdot g(x)$$

x^3 tem um crescimento muito superior comparado a $\log x$.

Então, usaremos $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$

$$x^3 \leq x^3 + \log x < 2x^3$$

Concluimos que c_1 e c_2 satisfazem a ordem de grandeza.

Data: Kauã Araujo de Souza / CC2MD

6)... $f(x) \log(3x^2)$ e $g(x) = \log x$, então $f = \Theta(g)$.

Como $f(x)$ cresce mais rápido que $g(x)$ e precisamos que se torne $f = \Theta(g)$ precisamos colocar C1 em 1 e C2 em 3 assim ficaremos com $f(x) = \log(3x^2)$ e $g(x) = \log 3.x^2$ então ficarão equivalentes assim essa é uma constante multiplicativa e $f(x) = \Theta(g(x))$

7) Nesta seção, observamos que $h_1 = \Theta(h)$ implica, a partir de certo ponto h_1 fica dentro de um "envelope" de h. Esse envelope pode estar inteiramente acima ou inteiramente abaixo de h? Explique.

A resposta é não. Porque, h_1 está sempre dentro um limite superior $(C2 \cdot h(x))$ e um inferior $(C1 \cdot h(x))$. Ou seja, ele cresce parecido com $h(x)$, sem ficar muito maior ou menor para o x grande. H_1 oscila dentro desse envelope e pode se aproximar de $h(x)$ multiplicando por diferentes constantes, sempre no limite estabelecido.

9) Encontre o menor inteiro n para o qual $x \log x$ é $O(x^n)$.

Quando dizemos que $x \log x = O(x^n)$, dizemos então que existe um n para o qual a função $x \log x$ cresce assintoticamente ... testando $O(x^1)$ como 1 percebemos que não se sai do lugar, então utilizando 2, temos $x \log x = O(x^2)$, comparado com x^2, o crescimento de $x \log x$ é mais lento então $x \log x$ está, de fato, dentro da ordem de x^2.

Kauã Araujo de Souza

Data:

10) Encontre o menor inteiro n para o qual $(x^4+4x)/(x+2)$ é $O(x^n)$

Para que seja inteiro vamos utilizar o menor inteiro para x e n e para $x=2$ e $n=3$ temos:

$\frac{(2^4+4.2)}{(2+2)} \leq C.2^3$

$\frac{16+8}{4} \quad \frac{4+2}{1} = 6 \leq C.8$

11) Plote os gráficos das funções .... $x, \sqrt{x}, \log x, x^3, x \log x, 2x^3+3;$ $e^x, (\log x)^2, \ln x, x^3+\log x$

A ordem do mais lento para o mais rápido é:

1: $\log x$ e $\ln x$

2: $(\log x)^2$

3: $\sqrt{x}$

4: x

5: $x \log x$

6: x^3

7: $x^3+\log x$

8: $2x^3+x$

9: e^x

Data: Kauã Araujo de Souza / CC2MD

19) I. $O(n^3)$ II. $O(n^3)$ III. $\Theta(n^2)$

Qual é a mais util, e porquê?

$\Theta(n^2)$ é ideal se você já analisou o algoritmo e sabe que ele cresce exatamente a uma taxa de n^2. Esta é mais informativa, descrevendo o crescimento real da função.

20) No pior caso ele precisa ficar testando todas as 2^n combinações possíveis de valores lógicos para as letras. Essa notação precisa ser avaliada, o tempo de execução é proporcional a 2^n.