

Resolvam os exercícios selecionados desta seção escrevendo a resolução a mão. Montem um arquivo PDF e enviem o arquivo no blog acadêmico. A escrita deve ser detalhada e legível com fotos nítidas e sem sombras. Sigam o modelo que tenho adotado na sala de aula.

Bons estudos!

Prof. Erlon

Exercícios 3.1

- ★1. Seja $S = \{2, 5, 17, 27\}$. Quais das sentenças a seguir são verdadeiras?
 a. $5 \in S$ b. $2 + 5 \in S$ c. $\emptyset \in S$
2. Seja $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } -1 < x < 2\}$. Quais das sentenças a seguir são verdadeiras?
 a. $0 \in B$ b. $-1 \in B$ c. $-0.84 \in B$ d. $\sqrt{2} \in B$
3. Quantos conjuntos diferentes são descritos abaixo? Quais são eles?

$\{2, 3, 4\}$ $\{x \mid x \text{ é a primeira letra de céu, boi ou açude}\}$ $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \leq x \leq 4\}$ $\{a, b, c\}$	\emptyset $\{x \mid x \text{ é a primeira letra de céu, boi e açude}\}$ $\{2, a, 3, b, 4, c\}$ $\{3, 4, 2\}$
--	---
- ★4. Descreva cada um dos conjuntos a seguir, listando seus elementos:
 a. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 < 25\}$
 b. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ é par e } 2 < x < 11\}$
 c. $\{x \mid x \text{ é um dos três primeiros presidentes do Brasil}\}$
 d. $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 = -1\}$
 e. $\{x \mid x \text{ é um dos estados da região Nordeste do Brasil}\}$
 f. $\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } |x| < 4\}$ ($|x|$ denota a função do valor absoluto)
5. Descreva cada um dos conjuntos abaixo, listando seus elementos:
 a. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 - 5x + 6 = 0\}$
 b. $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 = 7\}$
 c. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 - 2x - 8 = 0\}$
6. Descreva cada um dos conjuntos abaixo, apresentando uma propriedade característica:
 a. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
 b. $\{1, 3, 5, 6, 9, 11, \dots\}$
 c. $\{\text{Sarney, Collor, Itamar}\}$
 d. $\{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \dots\}$
7. Descreva cada um dos conjuntos a seguir:
 a. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\exists q)(q \in \{2, 3\} \text{ e } x = 2q)\}$
 b. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\exists y)(\exists z)(y \in \{0, 1\} \text{ e } z \in \{3, 4\} \text{ e } y < x < z)\}$
 c. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \text{ par} \rightarrow x \neq y)\}$
- ★8. Dada a descrição de um conjunto A como $A = \{2, 4, 8, \dots\}$, você acha que $16 \in A$?

★12. Seja

$$A = \{(x, y) \mid (x, y) \text{ está a três unidades do ponto } (1, 4)\}$$

e

$$B = \{(x, y) \mid (x - 1)^2 + (y - 4)^2 \leq 25\}$$

Prove que $A \subset B$.

15. Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para todos os conjuntos A , B e C ?

★a. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

★b. $\{\emptyset\} = \emptyset$

★c. $\{\emptyset\} = \{0\}$

★d. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

★e. $\emptyset \subseteq A$

★f. $\emptyset \in A$

g. $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$

h. Se $A \subset B$ e $B \subseteq C$, então $A \subset C$

i. Se $A \neq B$ e $B \neq C$ então $A \neq C$.

j. Se $A \in B$ e $B \not\subseteq C$, então $A \notin C$.

★19. Encontre $\mathcal{P}(S)$ para $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Quantos elementos você espera que este conjunto tenha?

20. Encontre $\mathcal{P}(S)$ para $S = \{\emptyset\}$.

21. Encontre $\mathcal{P}(S)$ para $S = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

22. Encontre $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ para $S = \{a, b\}$.

★23. O que pode ser dito sobre A se $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$?

24. O que pode ser dito sobre A se $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}\}$?

25. Prove que se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

★26. Prove que se $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, então $A = B$.

27. Resolva para x e y .

a. $(y, x + 2) = (5, 3)$

b. $(2x, y) = (16, 7)$

c. $(2x - y, x + y) = (-2, 5)$

29. Quais das operações a seguir são binárias ou unárias nos conjuntos dados? Para as que não foram, justifique sua resposta.

★a. $x \circ y = x + 1$; $S = \mathbb{N}$

★b. $x \circ y = x + y - 1$; $S = \mathbb{N}$

★c. $x \circ y = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ x & \text{se } x \text{ é par} \end{cases} \quad S = \mathbb{Z}$

d. $x^* = \ln x$; $S = \mathbb{R}$

e. $x^* = x^2$; $S = \mathbb{Z}$

f. \circ

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	4
3	3	4	5

 $S = \{1, 2, 3\}$

g. $x \circ y =$ a fração, x ou y com o menor denominador; $S =$ conjunto de todas as frações

h. $x \circ y =$ a pessoa, x ou y , cujo nome aparece primeiro em ordem alfabética; $S =$ conjunto de 10 pessoas com nomes diferentes

i. $x \circ y = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \text{ é positivo} \\ 1/(-x) & \text{se } x \text{ é negativo} \end{cases} \quad S = \mathbb{R}$

33. Sejam

$$\begin{aligned} A &= \{p, q, r, s\} \\ B &= \{r, t, v\} \\ C &= \{p, s, t, u\} \end{aligned}$$

subconjuntos de $S = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$. Encontre

$$\begin{array}{ll} \text{a. } B \cap C & \text{b. } A \cup C \\ \text{c. } C' & \text{d. } A \cap B \cap C \\ \text{e. } B - C & \text{f. } (A \cup B)' \\ \text{g. } A \times B & \text{h. } (A \cup B) \cap C' \end{array}$$

34. Sejam

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 5, 6, 8\} \\ B &= \{1, 4, 5, 9\} \\ C &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } 2 \leq x < 5\} \end{aligned}$$

subconjuntos de $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Encontre:

$$\begin{array}{lll} \star \text{a. } A \cup B & \star \text{b. } A \cap B & \star \text{c. } A \cap C \\ \text{d. } B \cup C & \text{e. } A - B & \text{f. } A' \\ \text{g. } A \cap A' & \star \text{h. } (A \cap B)' & \text{i. } C - B \\ \text{j. } (C \cap B) \cup A' & \text{k. } (B - A)' \cap (A - B) & \text{l. } (C' \cup B)' \\ \text{m. } B \times C & & \end{array}$$

★37. Considere os seguintes subconjuntos de \mathbb{Z} :

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{Z} \text{ e } y \geq 4 \text{ e } x = 3y)\} \\ B &= \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{Z} \text{ e } x = 2y)\} \\ C &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } |x| \leq 10\} \end{aligned}$$

Usando as operações de conjuntos, descreva cada um dos seguintes conjuntos em termos de A , B e C :

- conjunto de todos os inteiros ímpares
- $\{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
- $\{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{Z} \text{ e } y \geq 2 \text{ e } x = 6y)\}$
- $\{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$
- $\{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{Z} \text{ e } y \geq 5 \text{ e } x = 2y + 1)\} \cup \{x \mid (\exists y)(y \in \mathbb{Z} \text{ e } y \leq -5 \text{ e } x = 2y - 1)\}$

39. Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para quaisquer conjuntos A , B e C ?

$$\begin{array}{ll} \star \text{a. } A \cup A = A & \text{b. } B \cap B = B \\ \star \text{c. } (A \cap B)' = A' \cap B' & \text{d. } (A')' = A \\ \star \text{e. } A - B = (B - A)' & \text{f. } (A - B) \cap (B - A) = \emptyset \\ \text{g. If } A \cap B = \emptyset \text{ então } A \subset B. & \text{h. } B \times A = A \times B \end{array}$$

40. Para cada uma das sentenças a seguir, encontre as condições gerais para os conjuntos A e B para tornar a sentença verdadeira:

$$\begin{array}{lll} \star \text{a. } A \cup B = A & \text{b. } A \cap B = A & \text{c. } A \cup \emptyset = \emptyset \\ \text{d. } B - A = \emptyset & \text{e. } A \cup B \subseteq A \cap B & \end{array}$$

50. A e B são subconjuntos de S . Demonstre as seguintes identidades mostrando a inclusão em ambas as direções:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } (A \cup B)' = A' \cap B' & \text{b. } (A \cap B)' = A' \cup B' \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{a. } (A \cup B)' = A' \cap B' \\ \text{b. } (A \cap B)' = A' \cup B' \end{array}} \right\} \text{Leis de De Morgan}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c. } A \cup (B \cap A) = A & \text{d. } (A \cap B)' \cup B = A' \cup B \\ \text{e. } (A \cap B) \cup (A \cap B') = A & \text{f. } [A \cap (B \cup C)]' = A' \cup (B' \cap C') \end{array}$$