

29º Colóquio Brasileiro de Matemática
Rio de Janeiro – Julho, 2013

Otimização de Médias sobre Grafos Orientados

Aula 04 – Corretores separantes

Eduardo Garibaldi

IMECC, Universidade Estadual de Campinas

João Tiago Assunção Gomes



Até o momento vimos como determinar a existência (de modo algorítmico)

da *constante cíclica minimal* $m(c)$
e de um *corretor* $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$,

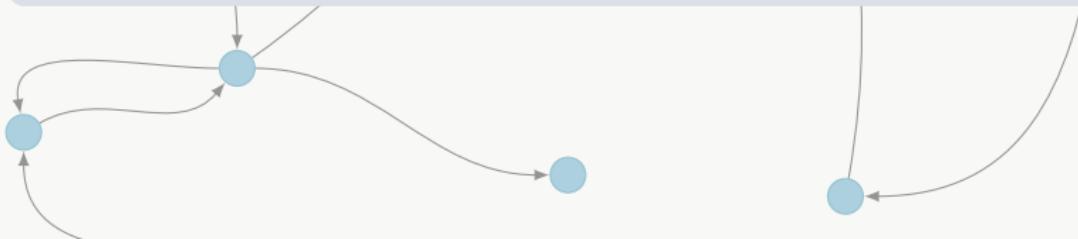
de modo que o custo renormalizado

$$\tilde{c}(i,j) := c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A(G),$$

verifica

$$\tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos em } G).$$

(Isto pode ser obtido apenas com os resultados discutidos na aula 02.)





Até o momento vimos como determinar a existência (de modo algorítmico)

da *constante cíclica minimal* $m(c)$
e de um *corretor* $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$,

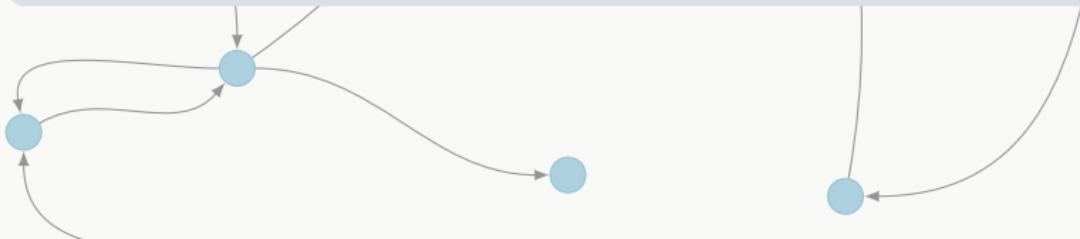
de modo que o custo renormalizado

$$\tilde{c}(i,j) := c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A(G),$$

verifica

$$\tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos em } G).$$

(Isto pode ser obtido apenas com os resultados discutidos na aula 02.)





Além disso, descrevemos o *algoritmo de Floría-Griffiths* (aula 03) que determina simultaneamente par

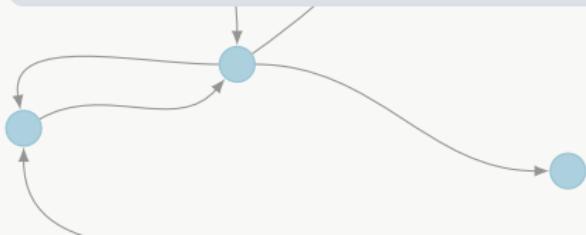
$$(m(c), u)$$

com a ajuda de *operador de Lax-Oleinik*, isto é , de operador T_c agindo sobre as funções $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T_c f(j) = \min_{i : i \xrightarrow{G} j} [f(i) + c(i,j)], \quad \forall j \in V(G).$$

Nesta aula, tratamos de uma classe específica de corretores:

os corretores separantes.





Além disso, descrevemos o *algoritmo de Floría-Griffiths* (aula 03) que determina simultaneamente par

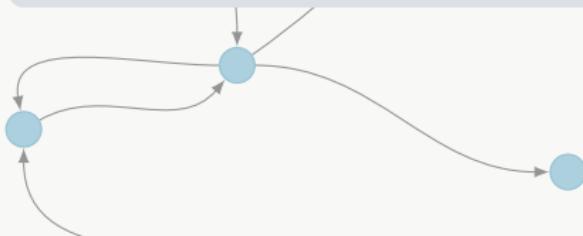
$$(m(c), u)$$

com a ajuda de *operador de Lax-Oleinik*, isto é , de operador T_c agindo sobre as funções $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T_c f(j) = \min_{i : i \xrightarrow{G} j} [f(i) + c(i,j)], \quad \forall j \in V(G).$$

Nesta aula, tratamos de uma classe específica de corretores:

os corretores separantes.





Além disso, descrevemos o *algoritmo de Floría-Griffiths* (aula 03) que determina simultaneamente par

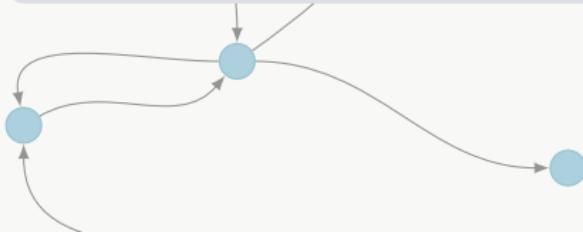
$$(m(c), u)$$

com a ajuda de *operador de Lax-Oleinik*, isto é , de operador T_c agindo sobre as funções $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T_c f(j) = \min_{i : i \xrightarrow{G} j} [f(i) + c(i,j)], \quad \forall j \in V(G).$$

Nesta aula, tratamos de uma classe específica de corretores:

os corretores separantes.



Aula 04 – Corretores separantes

Resumo:

- Introduzimos a classe dos corretores separantes, responsável por permitir colocar em evidência o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$.
- Além da questão natural de existência, investigaremos propriedades de tais corretores, bem como consequências para o problema dos pontos de entrega.

Monitoria: exercícios 4.1 a 4.4 e dúvidas gerais.

Prova: Amanhã (dia 26/07)

Sobre o conteúdo apresentado nas aulas 01 a 04.

(O tópico da aula 05 não será cobrado nesta avaliação.)

Aula 04 – Corretores separantes

Resumo:

- Introduzimos a classe dos corretores separantes, responsável por permitir colocar em evidência o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$.
- Além da questão natural de existência, investigaremos propriedades de tais corretores, bem como consequências para o problema dos pontos de entrega.

Monitoria: exercícios 4.1 a 4.4 e dúvidas gerais.

Prova: Amanhã (dia 26/07)

Sobre o conteúdo apresentado nas aulas 01 a 04.

(O tópico da aula 05 não será cobrado nesta avaliação.)

Aula 04 – Corretores separantes

Resumo:

- Introduzimos a classe dos corretores separantes, responsável por permitir colocar em evidência o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$.
- Além da questão natural de existência, investigaremos propriedades de tais corretores, bem como consequências para o problema dos pontos de entrega.

Monitoria: exercícios 4.1 a 4.4 e dúvidas gerais.

Prova: Amanhã (dia 26/07)

Sobre o conteúdo apresentado nas **aulas 01 a 04**.

(O tópico da **aula 05** não será cobrado nesta avaliação.)

Aula 04 – Corretores separantes

Resumo:

- Introduzimos a classe dos corretores separantes, responsável por permitir colocar em evidência o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$.
- Além da questão natural de existência, investigaremos propriedades de tais corretores, bem como consequências para o problema dos pontos de entrega.

Monitoria: exercícios 4.1 a 4.4 e dúvidas gerais.

Prova: Amanhã (dia 26/07)

Sobre o conteúdo apresentado nas **aulas 01 a 04**.

(O tópico da aula 05 **não** será cobrado nesta avaliação.)

Sumário

1 Corretores separantes

2 Existência

Decomposição irredutível

Prova da existência

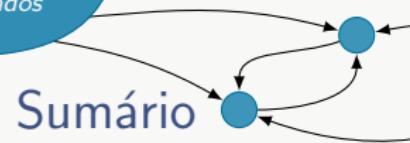
Sumário

1 Corretores separantes

2 Existência

Decomposição irredutível

Prova da existência



Corretores separantes

Esta classe de corretores será responsável por

uma nova renormalização do custo para a qual se obtém $\hat{c} \geq 0$ com

$$\hat{c}^{-1}(0) = \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos em } G).$$

Definition

Um corretor $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao custo c é dito ser *separante* se a igualdade $c(i, j) + u(i) - u(j) = m(c)$ acontece se, e só se, existe ciclo em G

$$Q : \ell_0 = i \xrightarrow{G} \ell_1 = j \xrightarrow{G} \ell_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} \ell_k = i$$

satisfazendo $c(Q) = m(c)$.

Corretores separantes

Esta classe de corretores será responsável por

uma nova renormalização do custo para a qual se obtém $\hat{c} \geq 0$ com

$$\hat{c}^{-1}(0) = \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos em } G).$$

Definition

Um corretor $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao custo c é dito ser *separante* se a igualdade $c(i, j) + u(i) - u(j) = m(c)$ acontece se, e só se, existe ciclo em G

$$Q : \ell_0 = i \xrightarrow{G} \ell_1 = j \xrightarrow{G} \ell_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} \ell_k = i$$

satisfazendo $c(Q) = m(c)$.

Observação

Note que, se $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ é um corretor arbitrário e se

$$Q : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k$$

é um ciclo satisfazendo $c(Q) = m(c)$, então

$$c(i_0, i_1) + u(i_0) - u(i_1) = m(c).$$

Isto é consequência da igualdade $c(Q) = m(c)$, a qual implica que as desigualdades decorrentes da definição de corretor, a saber,

$$c(i_0, i_1) + u(i_0) - u(i_1) \geq m(c),$$

$$c(i_1, i_2) + u(i_1) - u(i_2) \geq m(c),$$

⋮

$$c(i_{k-1}, i_k) + u(i_{k-1}) - u(i_k) \geq m(c),$$

são todas na realidade igualdades.

Observação

Note que, se $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ é um corretor arbitrário e se

$$Q : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k$$

é um ciclo satisfazendo $c(Q) = m(c)$, então

$$c(i_0, i_1) + u(i_0) - u(i_1) = m(c).$$

Isto é consequência da igualdade $c(Q) = m(c)$, a qual implica que as desigualdades decorrentes da definição de corretor, a saber,

$$c(i_0, i_1) + u(i_0) - u(i_1) \geq m(c),$$

$$c(i_1, i_2) + u(i_1) - u(i_2) \geq m(c),$$

⋮

$$c(i_{k-1}, i_k) + u(i_{k-1}) - u(i_k) \geq m(c),$$

são todas na realidade igualdades.

Exemplo

Considere o problema dos quatro pontos de entrega, com o custo

$$c = \begin{bmatrix} * & -5 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & * & 1 & -9 & 2 \\ -1 & -10 & * & 7 & -6 \\ 5 & 6 & -5 & * & -7 \\ -11 & -8 & 2 & 8 & * \end{bmatrix}.$$

Note que, $m(c) = -8$ e

$$M(c) = \left\{ \text{concatenações de } \begin{array}{l} 2 \xrightarrow{c} 4 \xrightarrow{c} 5 \xrightarrow{c} 2, \quad 1 \xrightarrow{c} 2 \xrightarrow{c} 4 \xrightarrow{c} 5 \xrightarrow{c} 1, \\ 2 \xrightarrow{c} 4 \xrightarrow{c} 3 \xrightarrow{c} 2 \quad \text{e} \quad 1 \xrightarrow{c} 3 \xrightarrow{c} 2 \xrightarrow{c} 4 \xrightarrow{c} 5 \xrightarrow{c} 1. \end{array} \right\}$$

Exemplo

Considere o problema dos quatro pontos de entrega, com o custo

$$c = \begin{bmatrix} * & -5 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & * & 1 & -9 & 2 \\ -1 & -10 & * & 7 & -6 \\ 5 & 6 & -5 & * & -7 \\ -11 & -8 & 2 & 8 & * \end{bmatrix}.$$

Note que, $m(c) = -8$ e

$$\mathcal{M}(c) = \left\{ \begin{array}{l} \text{concatenações de} \\ 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 2, \quad 1 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1, \\ 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \quad \text{e} \quad 1 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1. \end{array} \right\}$$

Exemplo

Considere o problema dos quatro pontos de entrega, com o custo

$$c = \begin{bmatrix} * & -5 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & * & 1 & -9 & 2 \\ -1 & -10 & * & 7 & -6 \\ 5 & 6 & -5 & * & -7 \\ -11 & -8 & 2 & 8 & * \end{bmatrix}.$$

Note que, $m(c) = -8$ e

$$\mathcal{M}(c) = \left\{ \begin{array}{l} \text{concatenações de} \\ 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 2, \quad 1 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1, \\ 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \quad \text{e} \quad 1 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1. \end{array} \right\}$$

Exemplo

Perceba que $u = (0, 3, 5, 2, 3)$, renormaliza o custo c como abaixo

$$c = \begin{bmatrix} * & -5 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & * & 1 & -9 & 2 \\ -1 & -10 & * & 7 & -6 \\ 5 & 6 & -5 & * & -7 \\ -11 & -8 & 2 & 8 & * \end{bmatrix}.$$

Note que, $m(c) = -8$ e

$$\mathcal{M}(c) = \left\{ \begin{array}{l} \text{concatenações de} \\ 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 2, \quad 1 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1, \\ 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \quad \text{e} \quad 1 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1. \end{array} \right\}$$

Exemplo

Perceba que $u = (0, 3, 5, 2, 3)$, renormaliza o custo c como abaixo

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 15 & * & 7 & 0 & 7 \\ 12 & 0 & * & 18 & 4 \\ 15 & 13 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 17 & * \end{bmatrix}.$$

Portanto, u é um corretor separante.

Note que, $m(c) = -8$ e

$$\mathcal{M}(c) = \left\{ \begin{array}{l} \text{concatenações de} \\ 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 2, \quad 1 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1, \\ 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \quad \text{e} \quad 1 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1. \end{array} \right\}$$

Exemplo

Perceba que $u = (0, 3, 5, 2, 3)$, renormaliza o custo c como abaixo

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 15 & * & 7 & 0 & 7 \\ 12 & 0 & * & 18 & 4 \\ 15 & 13 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 17 & * \end{bmatrix}.$$

Portanto, u é um corretor separante.

Note que, $m(c) = -8$ e

$$\mathcal{M}(c) = \left\{ \begin{array}{l} \text{concatenações de} \\ 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 2, \quad 1 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1, \\ 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \quad \text{e} \quad 1 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1. \end{array} \right\}$$

Sumário

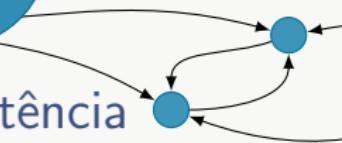
1 Corretores separantes

2 Existência

Decomposição irredutível

Prova da existência





Existência

O principal resultado desta aula é o seguinte.

Teorema

Toda função custo admite corretores separantes. Estes podem ser obtidos de modo algorítmico.

Observação

Basta provar o teorema acima para o custo renormalizado $\tilde{c}(i, j) = c(i, j) + u(i) - u(j) - m(c)$, o qual verifica

$$m(\tilde{c}) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}(c).$$

Perceba que, se v é um corretor separante para \tilde{c} , então $u + v$ é um corretor separante para a função custo original c .

Existência

O principal resultado desta aula é o seguinte.

Teorema

Toda função custo admite corretores separantes. Estes podem ser obtidos de modo algorítmico.

Observação

Basta provar o teorema acima para o custo renormalizado $\tilde{c}(i,j) = c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c)$, o qual verifica

$$m(\tilde{c}) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}(c).$$

Perceba que, se v é um corretor separante para \tilde{c} , então $u + v$ é um corretor separante para a função custo original c .

Antes de apresentar a respectiva demonstração, faremos uma breve discussão sobre o conjunto $\mathcal{M}(c)$.

Existência

O principal resultado desta aula é o seguinte.

Teorema

Toda função custo admite corretores separantes. Estes podem ser obtidos de modo algorítmico.

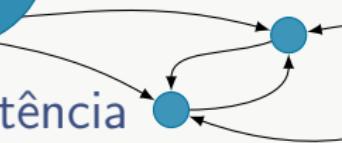
Observação

Basta provar o teorema acima para o custo renormalizado $\tilde{c}(i,j) = c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c)$, o qual verifica

$$m(\tilde{c}) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}(c).$$

Perceba que, se v é um corretor separante para \tilde{c} , então $u + v$ é um corretor separante para a função custo original c .

Antes de apresentar a respectiva demonstração, faremos uma breve discussão sobre o conjunto $\mathcal{M}(c)$.



Existência

O principal resultado desta aula é o seguinte.

Teorema

Toda função custo admite corretores separantes. Estes podem ser obtidos de modo algorítmico.

Observação

Basta provar o teorema acima para o custo renormalizado $\tilde{c}(i,j) = c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c)$, o qual verifica

$$m(\tilde{c}) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}(c).$$

Perceba que, se v é um corretor separante para \tilde{c} , então $u + v$ é um corretor separante para a função custo original c .

Antes de apresentar a respectiva demonstração, faremos uma breve discussão sobre o conjunto $\mathcal{M}(c)$.

Decomposição irredutível

Sublinhamos a utilidade dos vértices pertencentes a ciclos do conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ dentro do problema dos pontos de entrega:

caracterizar “boas” localizações para se estabelecer sedes da empresa, já que a partir destas existe a possibilidade de distribuição com custo médio mínimo sobre algum ciclo.

Neste sentido, introduzimos a noção a seguir.

Definition

Uma decomposição irredutível para o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ é dada por

$$\mathcal{M}(c) = \mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{M}_s,$$

com respeito à qual, ao denotarmos por V_p a reunião de vértices de ciclos em \mathcal{M}_p e por A_p a reunião de arestas de ciclos em \mathcal{M}_p , verificam-se

$$V_p \cap V_{p'} = \emptyset \quad \text{e} \quad A_p \cap A_{p'} = \emptyset \quad \forall p' \neq p.$$



Decomposição irredutível

Sublinhamos a utilidade dos vértices pertencentes a ciclos do conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ dentro do problema dos pontos de entrega:

caracterizar “boas” localizações para se estabelecer sedes da empresa, já que a partir destas existe a possibilidade de distribuição com custo médio mínimo sobre algum ciclo.

Neste sentido, introduzimos a noção a seguir.

Definition

Uma decomposição irredutível para o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ é dada por

$$\mathcal{M}(c) = \mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{M}_s,$$

com respeito à qual, ao denotarmos por V_p a reunião de vértices de ciclos em \mathcal{M}_p e por A_p a reunião de arestas de ciclos em \mathcal{M}_p , verificam-se

$$V_p \cap V_{p'} = \emptyset \quad \text{e} \quad A_p \cap A_{p'} = \emptyset \quad \forall p' \neq p.$$

Observação

Para o problema dos pontos de entrega, suponha que na empresa de distribuição em questão exista uma hierarquia de sede, subsidiária, filial, etc., determinada pela demanda de serviços. Um critério para se determinar qual tipo de estabelecimento instalar em cada \mathcal{M}_p poderia ser dado por $\#V_p$ associados ao respectivo subconjunto de $\mathcal{M}(c)$.

A existência de decomposição irredutível para $\mathcal{M}(c)$ é assegurada pelo próximo resultado.

Lema

O conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ possui decomposição irredutível, a qual pode ser determinada de forma algorítmica.

Observação

Para o problema dos pontos de entrega, suponha que na empresa de distribuição em questão exista uma hierarquia de sede, subsidiária, filial, etc., determinada pela demanda de serviços. Um critério para se determinar qual tipo de estabelecimento instalar em cada \mathcal{M}_p poderia ser dado por $\#V_p$ associados ao respectivo subconjunto de $\mathcal{M}(c)$.

A existência de decomposição irredutível para $\mathcal{M}(c)$ é assegurada pelo próximo resultado.

Lema

O conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ possui decomposição irredutível, a qual pode ser determinada de forma algorítmica.

Prova da existência

Apresentaremos (de maneira concisa) os principais passos da demonstração.

- Usando o lema anterior, podemos escrever

$$V(G) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_s \sqcup W, \quad \text{onde } W := V(G) \setminus \bigcup_{p=1}^s V_p.$$

- Vimos que

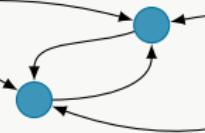
$$\tilde{c}(i,j) = 0 \text{ sempre que } (i,j) \in A_p \text{ para algum } p \in \{1, \dots, s\}.$$

- Note que pode ocorrer $\tilde{c}(i,j) = 0$ embora $(i,j) \notin \bigcup_{p=1}^s A_p$.

Seja então \mathcal{P} o conjunto dos caminhos

$$P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k, \quad k \geq 1,$$

com $(i_r, i_{r+1}) \notin \bigcup_{p=1}^s A_p$ para todo $r = 0, \dots, k-1$, tais que $\tilde{c}(P) = 0$, ou equivalentemente tais que $\tilde{c}(i_r, i_{r+1}) = 0, \forall r \in \{0, \dots, k-1\}$.



Prova da existência

Apresentaremos (de maneira concisa) os principais passos da demonstração.

- Usando o lema anterior, podemos escrever

$$V(G) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_s \sqcup W, \quad \text{onde } W := V(G) \setminus \bigcup_{p=1}^s V_p.$$

- Vimos que

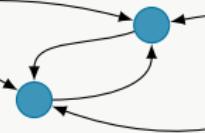
$$\tilde{c}(i,j) = 0 \text{ sempre que } (i,j) \in A_p \text{ para algum } p \in \{1, \dots, s\}.$$

- Note que pode ocorrer $\tilde{c}(i,j) = 0$ embora $(i,j) \notin \bigcup_{p=1}^s A_p$.

Seja então \mathcal{P} o conjunto dos caminhos

$$P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k, \quad k \geq 1,$$

com $(i_r, i_{r+1}) \notin \bigcup_{p=1}^s A_p$ para todo $r = 0, \dots, k-1$, tais que $\tilde{c}(P) = 0$, ou equivalentemente tais que $\tilde{c}(i_r, i_{r+1}) = 0, \forall r \in \{0, \dots, k-1\}$.



Prova da existência

Apresentaremos (de maneira concisa) os principais passos da demonstração.

- Usando o lema anterior, podemos escrever

$$V(G) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_s \sqcup W, \quad \text{onde } W := V(G) \setminus \bigcup_{p=1}^s V_p.$$

- Vimos que

$$\tilde{c}(i, j) = 0 \text{ sempre que } (i, j) \in A_p \text{ para algum } p \in \{1, \dots, s\}.$$

- Note que pode ocorrer $\tilde{c}(i, j) = 0$ embora $(i, j) \notin \bigcup_{p=1}^s A_p$.

Seja então \mathcal{P} o conjunto dos caminhos

$$P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k, \quad k \geq 1,$$

com $(i_r, i_{r+1}) \notin \bigcup_{p=1}^s A_p$ para todo $r = 0, \dots, k - 1$, tais que $\tilde{c}(P) = 0$, ou equivalentemente tais que $\tilde{c}(i_r, i_{r+1}) = 0, \forall r \in \{0, \dots, k - 1\}$.



Prova da existência

Apresentaremos (de maneira concisa) os principais passos da demonstração.

- Usando o lema anterior, podemos escrever

$$V(G) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_s \sqcup W, \quad \text{onde } W := V(G) \setminus \bigcup_{p=1}^s V_p.$$

- Vimos que

$$\tilde{c}(i, j) = 0 \text{ sempre que } (i, j) \in A_p \text{ para algum } p \in \{1, \dots, s\}.$$

- Note que pode ocorrer $\tilde{c}(i, j) = 0$ embora $(i, j) \notin \bigcup_{p=1}^s A_p$.

Seja então \mathcal{P} o conjunto dos caminhos

$$P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k, \quad k \geq 1,$$

com $(i_r, i_{r+1}) \notin \bigcup_{p=1}^s A_p$ para todo $r = 0, \dots, k - 1$, tais que $\tilde{c}(P) = 0$, ou equivalentemente tais que $\tilde{c}(i_r, i_{r+1}) = 0, \forall r \in \{0, \dots, k - 1\}$.



Prova da existência

Apresentaremos (de maneira concisa) os principais passos da demonstração.

- Usando o lema anterior, podemos escrever

$$V(G) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_s \sqcup W, \quad \text{onde } W := V(G) \setminus \bigcup_{p=1}^s V_p.$$

- Vimos que

$$\tilde{c}(i, j) = 0 \text{ sempre que } (i, j) \in A_p \text{ para algum } p \in \{1, \dots, s\}.$$

- Note que pode ocorrer $\tilde{c}(i, j) = 0$ embora $(i, j) \notin \bigcup_{p=1}^s A_p$.

Seja então \mathcal{P} o conjunto dos caminhos

$$P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k, \quad k \geq 1,$$

com $(i_r, i_{r+1}) \notin \bigcup_{p=1}^s A_p$ para todo $r = 0, \dots, k - 1$, tais que $\tilde{c}(P) = 0$, ou equivalentemente tais que $\tilde{c}(i_r, i_{r+1}) = 0, \forall r \in \{0, \dots, k - 1\}$.



Afirmção. Nenhum caminho $P \in \mathcal{P}$ tem mais de duas arestas com o mesmo vértice pertencente a W .

Afirmção. Nenhum caminho $P \in \mathcal{P}$ tem mais de duas arestas com vértices pertencentes a um mesmo V_p .



Figura 10

Afirmção. Nenhum caminho $P \in \mathcal{P}$ tem mais de duas arestas com o mesmo vértice pertencente a W .

Afirmção. Nenhum caminho $P \in \mathcal{P}$ tem mais de duas arestas com vértices pertencentes a um mesmo V_p .



Figura: Ciclo formado por $P'Q$ em $\mathcal{M}(\tilde{c})$.

Afirmção. Nenhum caminho $P \in \mathcal{P}$ tem mais de duas arestas com o mesmo vértice pertencente a W .

Afirmção. Nenhum caminho $P \in \mathcal{P}$ tem mais de duas arestas com vértices pertencentes a um mesmo V_p .

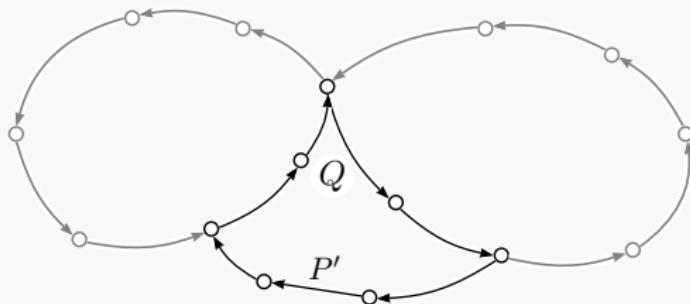


Figura: Ciclo formado por $P'Q$ em $\mathcal{M}(\tilde{c})$.

Das duas afirmações anteriores, resulta que o comprimento de qualquer caminho pertencente a \mathcal{P} é majorado por $s + \#W$. Isto permite introduzir a seguinte aplicação

$$\mu : \{V_1, \dots, V_s\} \cup W \rightarrow \{0, 1, \dots, s + \#W\}$$

definida por

$$\mu(V_p) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{comprimento de } P : \\ \quad P \in \mathcal{P} \text{ com ponto} \\ \quad \text{ inicial em } V_p \end{array} \right\},$$

$$\mu(i) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{comprimento de } P : \\ \quad P \in \mathcal{P} \text{ com ponto} \\ \quad \text{ inicial } i \end{array} \right\}, \forall i \in W,$$

onde convencionamos que tal função assume valor nulo quando eventualmente for vazio o conjunto sobre o qual o respectivo máximo é considerado.

Das duas afirmações anteriores, resulta que o comprimento de qualquer caminho pertencente a \mathcal{P} é majorado por $s + \#W$. Isto permite introduzir a seguinte aplicação

$$\mu : \{V_1, \dots, V_s\} \cup W \rightarrow \{0, 1, \dots, s + \#W\}$$

definida por

$$\mu(V_p) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{comprimento de } P : \\ P \in \mathcal{P} \text{ com ponto} \\ \text{ inicial em } V_p \end{array} \right\},$$

$$\mu(i) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{comprimento de } P : \\ P \in \mathcal{P} \text{ com ponto} \\ \text{ inicial } i \end{array} \right\}, \forall i \in W,$$

onde convencionamos que tal função assume valor nulo quando eventualmente for vazio o conjunto sobre o qual o respectivo máximo é considerado.

Denote

$$\eta := \frac{1}{2} \frac{1}{s + \#W} \min_{\tilde{c}(i,j) > 0} \tilde{c}(i,j).$$

Defina então

a função $v : V(G) \rightarrow \{0, \eta, 2\eta, \dots, (s + \#W)\eta\}$ por

$$v(i) = \begin{cases} \eta\mu(V_p) & \text{se } i \in V_p \\ \eta\mu(i) & \text{se } i \in W \end{cases}.$$

Denote

$$\eta := \frac{1}{2} \frac{1}{s + \#W} \min_{\tilde{c}(i,j) > 0} \tilde{c}(i,j).$$

Defina então

a função $v : V(G) \rightarrow \{0, \eta, 2\eta, \dots, (s + \#W)\eta\}$ por

$$v(i) = \begin{cases} \eta\mu(V_p) & \text{se } i \in V_p \\ \eta\mu(i) & \text{se } i \in W \end{cases}.$$

Por fim, basta verificar que v é um corretor separante para \tilde{c} . □

Observação:

Ressalta-se que este algoritmo é mais teórico do que prático, especialmente no que se refere à obtenção de v . Veremos uma forma de isto sanar na próxima semana, com o auxílio de ferramentas da dita álgebra *min-plus*.

Denote

$$\eta := \frac{1}{2} \frac{1}{s + \#W} \min_{\tilde{c}(i,j) > 0} \tilde{c}(i,j).$$

Defina então

a função $v : V(G) \rightarrow \{0, \eta, 2\eta, \dots, (s + \#W)\eta\}$ por

$$v(i) = \begin{cases} \eta\mu(V_p) & \text{se } i \in V_p \\ \eta\mu(i) & \text{se } i \in W \end{cases}.$$

Por fim, basta verificar que v é um corretor separante para \tilde{c} . □

Observação

Ressalta-se que este algoritmo é mais teórico do que prático, especialmente no que se refere à obtenção de v . Veremos uma forma de isto sanar na próxima semana, com o auxílio de ferramenta da dita álgebra *min-plus*.

Denote

$$\eta := \frac{1}{2} \frac{1}{s + \#W} \min_{\tilde{c}(i,j) > 0} \tilde{c}(i,j).$$

Defina então

a função $v : V(G) \rightarrow \{0, \eta, 2\eta, \dots, (s + \#W)\eta\}$ por

$$v(i) = \begin{cases} \eta\mu(V_p) & \text{se } i \in V_p \\ \eta\mu(i) & \text{se } i \in W \end{cases}.$$

Por fim, basta verificar que v é um corretor separante para \tilde{c} . □

Observação

Ressalta-se que este algoritmo é mais teórico do que prático, especialmente no que se refere à obtenção de v . Veremos uma forma de isto sanar na próxima semana, com o auxílio de ferramenta da dita álgebra *min-plus*.

Bibliografia



E. Garibaldi e J. T. A. Gomes,

Otimização de Médias sobre Grafos Orientados,

Coleção publicações matemáticas (29 CBM) **12**, IMPA, 2013.

Seções: 4.1 (páginas 57 a 60);



E. Garibaldi e Ph. Thieullen,

Description of some ground states by Puiseux techniques,

Journal of Statistical Physics **146** (2012), 125-180.

Sinopse da Aula 05

- Introduzimos a classe dos corretores calibrados, a qual está associada ao operador de Lax-Oleinik T_c e possibilita descrever o comportamento assintótico de autovetores de Perron-Frobenius normalizados.
- Investigaremos propriedades de tais corretores, bem como consequências para o problema dos pontos de entrega.

Prova: Amanhã (dia 26/07)

Sobre o conteúdo apresentado nas **aulas 01 a 04**.

(O tópico da aula 05 não será cobrado nesta avaliação.)

Sinopse da Aula 05

- Introduzimos a classe dos corretores calibrados, a qual está associada ao operador de Lax-Oleinik T_c e possibilita descrever o comportamento assintótico de autovetores de Perron-Frobenius normalizados.
- Investigaremos propriedades de tais corretores, bem como consequências para o problema dos pontos de entrega.

Prova: Amanhã (dia 26/07)

Sobre o conteúdo apresentado nas **aulas 01 a 04**.

(O tópico da aula 05 **não** será cobrado nesta avaliação.)

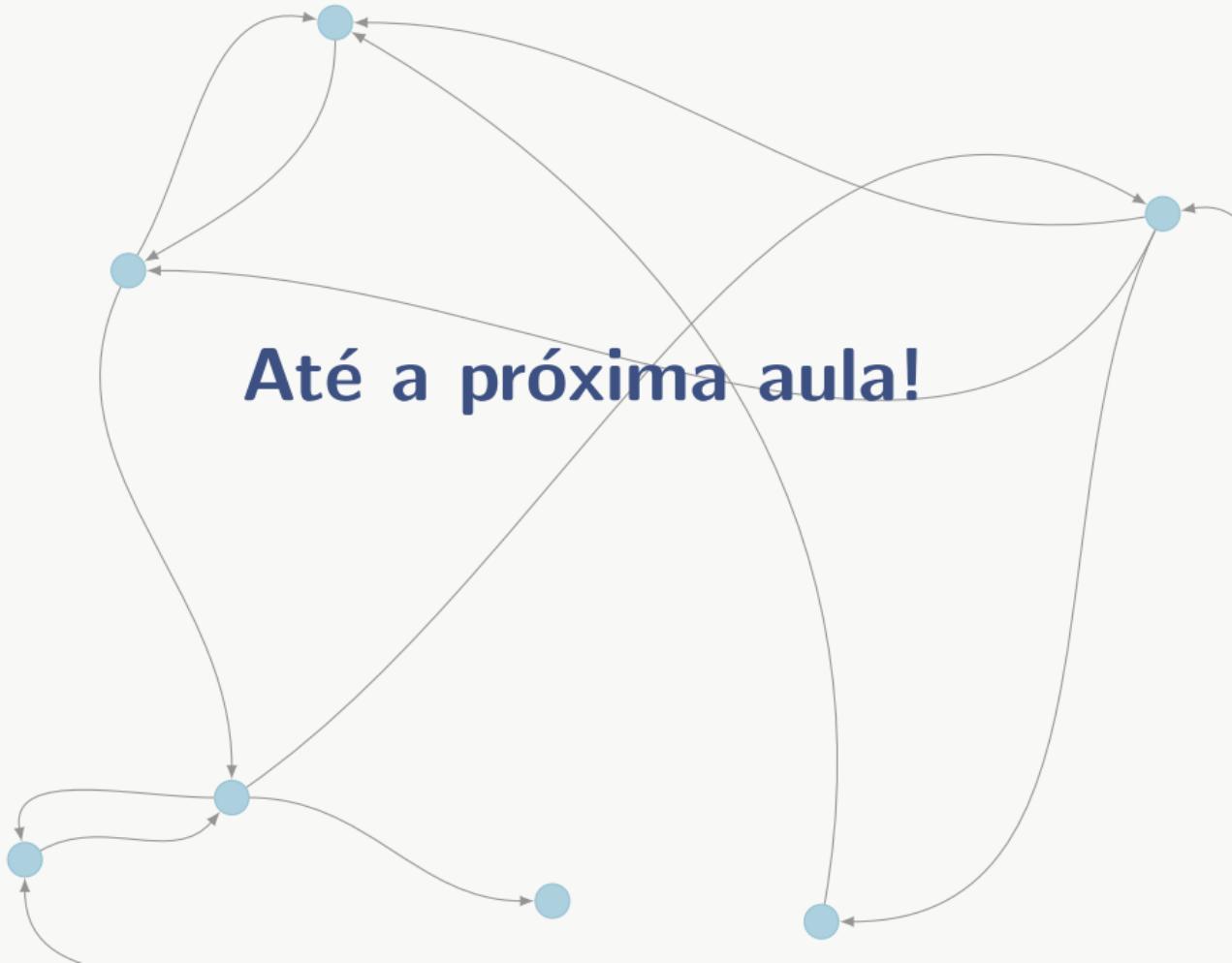
Sinopse da Aula 05

- Introduzimos a classe dos corretores calibrados, a qual está associada ao operador de Lax-Oleinik T_c e possibilita descrever o comportamento assintótico de autovetores de Perron-Frobenius normalizados.
- Investigaremos propriedades de tais corretores, bem como consequências para o problema dos pontos de entrega.

Prova: Amanhã (dia 26/07)

Sobre o conteúdo apresentado nas **aulas 01 a 04**.

(O tópico da aula 05 **não** será cobrado nesta avaliação.)



A complex directed graph with 6 nodes and many edges. The nodes are light blue circles. The edges are grey lines with arrows indicating direction. The graph has several cycles and some long-distance connections. It is centered around a node at the bottom center.

Até a próxima aula!