29º Colóquio Brasileiro de Matemática

Rio de Janeiro – Julho, 2013

# Otimização de Médias sobre Grafos Orientados

*Aula 08 – Álgebra Min-Plus III*

Eduardo Garibaldi    João Tiago Assunção Gomes

*IMECC, Universidade Estadual de Campinas*

Introduzimos as estruturas algébricas *min-plus*

$$(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes),$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus) \quad \text{e}$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes),$$

discutimos seus pormenores e examinaremos o problema de autovalor e autovetores

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}.$$

Além disso, iniciamos uma lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.

- Exibimos bijeção entre os custo e as matrizes em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$;
- Estabelecemos a relação $\tau_S = m(c)$;
- Mostramos que autovetores e corretores calibrados são conceitos equivalentes.

Introduzimos as estruturas algébricas *min-plus*

$$(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes),$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus) \quad \text{e}$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes)\ ,$$

discutimos seus pormenores e examinaremos o problema de autovalor e autovetores

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}.$$

Além disso, iniciamos uma lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.

- Exibimos bijeção entre os custo e as matrizes em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$;
- Estabelecemos a relação $\tau_S = m(c)$;
- Mostramos que autovetores e corretores calibrados são conceitos equivalentes.

Introduzimos as estruturas algébricas *min-plus*

$$(\mathbb{R}\cup\{+\infty\},\oplus,\otimes),$$

$$((\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^n,\odot,\oplus) \quad \text{e}$$

$$((\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^{n\times n},\odot,\oplus,\otimes),$$

discutimos seus pormenores e examinaremos o problema de autovalor e autovetores

$$S\otimes\vec{v}=\tau\odot\vec{v}.$$

Além disso, iniciamos uma lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.

- Exibimos bijeção entre os custo e as matrizes em $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^{n\times n}$;
- Estabelecemos a relação $\tau_S = m(c)$;
- Mostramos que autovetores e corretores calibrados são conceitos equivalentes.

Introduzimos as estruturas algébricas *min-plus*

$$(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes),$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus) \quad \text{e}$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}, \odot, \oplus, \otimes)\ ,$$

discutimos seus pormenores e examinaremos o problema de autovalor e autovetores

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}.$$

Além disso, iniciamos uma lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.

- Exibimos bijeção entre os custo e as matrizes em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$;
- Estabelecemos a relação $\tau_S = m(c)$;
- Mostramos que autovetores e corretores calibrados são conceitos equivalentes.

Introduzimos as estruturas algébricas *min-plus*

$$(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes),$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus) \quad \text{e}$$

$$\left((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}, \odot, \oplus, \otimes\right),$$

discutimos seus pormenores e examinaremos o problema de autovalor e autovetores

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}.$$

Além disso, iniciamos uma lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.

- Exibimos bijeção entre os custo e as matrizes em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$;
- Estabelecemos a relação $\tau_S = m(c)$;
- Mostramos que autovetores e corretores calibrados são conceitos equivalentes.

Introduzimos as estruturas algébricas *min-plus*

$$(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes),$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus) \quad \text{e}$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}, \odot, \oplus, \otimes)\ ,$$

discutimos seus pormenores e examinaremos o problema de autovalor e autovetores

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}.$$

Além disso, iniciamos uma lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.

- Exibimos bijeção entre os custo e as matrizes em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$;
- Estabelecemos a relação $\tau_S = m(c)$;
- Mostramos que autovetores e corretores calibrados são conceitos equivalentes.

Introduzimos as estruturas algébricas *min-plus*

$$(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes),$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus) \quad \text{e}$$

$$\left((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes\right),$$

discutimos seus pormenores e examinaremos o problema de autovalor e autovetores

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}.$$

Além disso, iniciamos uma lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.

- Exibimos bijeção entre os custo e as matrizes em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$;
- Estabelecemos a relação $\tau_S = m(c)$;
- Mostramos que autovetores e corretores calibrados são conceitos equivalentes.

# Aula 08 – Álgebra Min-Plus III

**Resumo:**

- Discutiremos o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \ldots,$$

  responsável pela caracterização do operador de Kleene $S^{\star}$
- Complementaremos a lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.
- Estenderemos o conceito de autovetores introduzindo a noção de subautovetores.
- Apresentaremos o subgrafo crítico (em correspondência direta com o conjunto cíclico minimal) para poder caracterizar processo de renormalização e discutir a noção de subautovetor separante.
- Faremos uma análise geométrica dos conjuntos formados pelos autovalores e subautovetores.

# *Aula 08 – Álgebra Min-Plus III*

**Resumo:**

- Discutiremos o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^\otimes} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^\otimes} \oplus \ldots,$$

  responsável pela caracterização do operador de Kleene $S^\star$
- Complementaremos a lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.
- Estenderemos o conceito de autovetores introduzindo a noção de subautovetores.
- Apresentaremos o subgrafo crítico (em correspondência direta com o conjunto cíclico minimal) para poder caracterizar processo de renormalização e discutir a noção de subautovetor separante.
- Faremos uma análise geométrica dos conjuntos formados pelos autovalores e subautovetores.

# Aula 08 – Álgebra Min-Plus III

**Resumo:**

- Discutiremos o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \dots,$$

  responsável pela caracterização do operador de Kleene $S^{\star}$
- Complementaremos a lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.
- Estenderemos o conceito de autovetores introduzindo a noção de subautovetores.
- Apresentaremos o subgrafo crítico (em correspondência direta com o conjunto cíclico minimal) para poder caracterizar processo de renormalização e discutir a noção de subautovetor separante.
- Faremos uma análise geométrica dos conjuntos formados pelos autovalores e subautovetores.

## Aula 08 – Álgebra Min-Plus III

**Resumo:**

- Discutiremos o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \ldots,$$

  responsável pela caracterização do operador de Kleene $S^{\star}$
- Complementaremos a lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.
- Estenderemos o conceito de autovetores introduzindo a noção de subautovetores.
- Apresentaremos o subgrafo crítico (em correspondência direta com o conjunto cíclico minimal) para poder caracterizar processo de renormalização e discutir a noção de subautovetor separante.
- Faremos uma análise geométrica dos conjuntos formados pelos autovalores e subautovetores.

# *Aula 08 – Álgebra Min-Plus III*

**Resumo:**

- Discutiremos o comportamento da série
$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \ldots,$$
responsável pela caracterização do operador de Kleene $S^{\star}$
- Complementaremos a lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.
- Estenderemos o conceito de autovetores introduzindo a noção de subautovetores.
- Apresentaremos o subgrafo crítico (em correspondência direta com o conjunto cíclico minimal) para poder caracterizar processo de renormalização e discutir a noção de subautovetor separante.
- Faremos uma análise geométrica dos conjuntos formados pelos autovalores e subautovetores.

# Sumário

1. Operador de Kleene
2. Subautovetores
    - Subgrafo crítico e propriedade separante
    - Propriedades geométricas
3. Dicionário

# Sumário

1 Operador de Kleene

2 Subautovetores
- Subgrafo crítico e propriedade separante
- Propriedades geométricas

3 Dicionário

# Operador de Kleene

Retornamos ao estudo da álgebra *min-plus* com a meta de

entender o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \ldots.$$

e determinar sua convergência para algum $S^{\star}$ de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$.

*Observação*

Destacamos que este conceito não aparece de forma inusitada. Considere matriz $S$ irredutível com $\tau_S = 0$. Recorde que a série

$$S^{\infty} = S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus S^{3^{\otimes}} \oplus S^{4^{\otimes}} \oplus \ldots$$

está bem definida e suas entradas são números reais. Além disso

$$I \oplus S^{\infty} = I \oplus S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus \ldots \oplus S^{(n-1)^{\otimes}}.$$

# Operador de Kleene

Retornamos ao estudo da álgebra *min-plus* com a meta de

entender o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \ldots.$$

e determinar sua convergência para algum $S^{\star}$ de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$.

## Observação

Destacamos que este conceito não aparece de forma inusitada. Considere matriz $S$ irredutível com $\tau_S = 0$. Recorde que a série

$$S^{\infty} = S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus S^{3^{\otimes}} \oplus S^{4^{\otimes}} \oplus \ldots$$

está bem definida e suas entradas são números reais. Além disso,

$$I \oplus S^{\infty} = I \oplus S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus \ldots S^{(n-1)^{\otimes}}.$$

Consequentemente, ao menos para o caso com $\tau_S = 0$, temos a convergência da série em questão.

# Operador de Kleene

Retornamos ao estudo da álgebra *min-plus* com a meta de

entender o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \ldots.$$

e determinar sua convergência para algum $S^{\star}$ de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$.

## *Observação*

Destacamos que este conceito não aparece de forma inusitada. Considere matriz $S$ irredutível com $\tau_S = 0$. Recorde que a série

$$S^{\infty} = S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus S^{3^{\otimes}} \oplus S^{4^{\otimes}} \oplus \ldots$$

está bem definida e suas entradas são números reais. Além disso,

$$I \oplus S^{\infty} = I \oplus S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus \ldots S^{(n-1)^{\otimes}}.$$

Consequentemente, ao menos para o caso com $\tau_S = 0$, temos a convergência da série em questão.

# Operador de Kleene

Retornamos ao estudo da álgebra *min-plus* com a meta de

entender o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \dots .$$

e determinar sua convergência para algum $S^{\star}$ de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$.

## *Observação*

Destacamos que este conceito não aparece de forma inusitada. Considere matriz $S$ irredutível com $\tau_S = 0$. Recorde que a série

$$S^{\infty} = S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus S^{3^{\otimes}} \oplus S^{4^{\otimes}} \oplus \dots$$

está bem definida e suas entradas são números reais. Além disso,

$$I \oplus S^{\infty} = I \oplus S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus \dots S^{(n-1)^{\otimes}}.$$

Consequentemente, ao menos para o caso com $\tau_S = 0$, temos a convergência da série em questão.

# Operador de Kleene

Retornamos ao estudo da álgebra *min-plus* com a meta de

entender o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \dots .$$

e determinar sua convergência para algum $S^{\star}$ de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$.

## *Observação*

Destacamos que este conceito não aparece de forma inusitada. Considere matriz $S$ irredutível com $\tau_S = 0$. Recorde que a série

$$S^{\infty} = S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus S^{3^{\otimes}} \oplus S^{4^{\otimes}} \oplus \dots$$

está bem definida e suas entradas são números reais. Além disso,

$$I \oplus S^{\infty} = I \oplus S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus \dots S^{(n-1)^{\otimes}}.$$

Consequentemente, ao menos para o caso com $\tau_S = 0$, temos a convergência da série em questão.

Veremos abaixo que esta convergência ocorre em geral.

## Proposição

*Seja $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ uma matriz irredutível. Então, vale a igualdade*

$$S^{\star} := \bigoplus_{k=0}^{\infty} ((-\tau_S) \odot S)^{k^{\otimes}}$$

$$= I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus \ldots \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{(n-1)^{\otimes}},$$

*sendo todas as entradas $S^{\star}(i,j)$ números reais. Ademais, $\tau_{S^{\star}} = 0$.*

*Tal operador recebe a denominação de operador de Kleene (ou estrela de Kleene) associado à matriz $S$.*

Veremos abaixo que esta convergência ocorre em geral.

## Proposição

*Seja $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ uma matriz irredutível. Então, vale a igualdade*

$$\begin{aligned} S^\star &:= \bigoplus_{k=0}^{\infty} ((-\tau_S) \odot S)^{k^\otimes} \\ &= I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^\otimes} \oplus \ldots \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{(n-1)^\otimes}, \end{aligned}$$

*sendo todas as entradas $S^\star(i,j)$ números reais. Ademais, $\tau_{S^\star} = 0$.*

*Tal operador recebe a denominação de operador de Kleene (ou estrela de Kleene) associado à matriz $S$.*

Veremos abaixo que esta convergência ocorre em geral.

## Proposição

*Seja $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ uma matriz irredutível. Então, vale a igualdade*

$$\begin{aligned} S^{\star} &:= \bigoplus_{k=0}^{\infty} ((-\tau_S) \odot S)^{k^{\otimes}} \\ &= I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus \ldots \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{(n-1)^{\otimes}}, \end{aligned}$$

*sendo todas as entradas $S^{\star}(i,j)$ números reais. Ademais, $\tau_{S^{\star}} = 0$.*

*Tal operador recebe a denominação de operador de Kleene (ou estrela de Kleene) associado à matriz $S$.*

Veremos abaixo que esta convergência ocorre em geral.

## Proposição

*Seja* $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ *uma matriz irredutível. Então, vale a igualdade*

$$S^\star := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \left((-\tau_S) \odot S\right)^{k^\otimes}$$
$$= I \oplus \left((-\tau_S) \odot S\right) \oplus \left((-\tau_S) \odot S\right)^{2^\otimes} \oplus \ldots \oplus \left((-\tau_S) \odot S\right)^{(n-1)^\otimes},$$

*sendo todas as entradas* $S^\star(i,j)$ *números reais. Ademais,* $\tau_{S^\star} = 0$.

*Tal operador recebe a denominação de operador de Kleene (ou estrela de Kleene) associado à matriz* $S$.

## Exemplo

Considere a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 3 & 7 \\ 5 & +\infty & +\infty \\ +\infty & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ +\infty & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja média cíclica minimal é $\tau_S = 2$.

Pela proposição anterior, temos o operador de Kleene

$$S^{\star} = I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, observe que

$$((-\tau_S) \odot S)^{\infty} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo

Considere a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 3 & 7 \\ 5 & +\infty & +\infty \\ +\infty & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ +\infty & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja média cíclica minimal é $\tau_S = 2$.

Pela proposição anterior, temos o operador de Kleene

$$S^\star = I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, observe que

$$((-\tau_S) \odot S)^{\infty} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo

Considere a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 3 & 7 \\ 5 & +\infty & +\infty \\ +\infty & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ +\infty & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja média cíclica minimal é $\tau_S = 2$.

Pela proposição anterior, temos o operador de Kleene

$$S^{\star} = I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, observe que

$$((-\tau_S) \odot S)^{\infty} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo

Considere a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 3 & 7 \\ 5 & +\infty & +\infty \\ +\infty & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ +\infty & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja média cíclica minimal é $\tau_S = 2$.

Pela proposição anterior, temos o operador de Kleene

$$S^{\star} = I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, observe que

$$((-\tau_S) \odot S)^{\infty} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

É possível identificar quando estamos lidando com um operador de Kleene.

## Proposição

*Vale a equivalência:*

$$S^{\star} = S \quad \Leftrightarrow \quad \tau_S = 0, \quad S^{2^{\otimes}} = S \quad e \quad S(i,i) = 0,\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n.$$

*Em particular, ocorre $(S^{\star})^{\star} = S^{\star}$.*

Repare que este resultado fornece um teste de consistência.

## *Exemplo*

Para o exemplo anterior, pode-se de imediato verificar que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, de fato encontramos um operador de Kleene.

É possível identificar quando estamos lidando com um operador de Kleene.

## Proposição

*Vale a equivalência:*

$$S^\star = S \quad \Leftrightarrow \quad \tau_S = 0, \quad S^{2^\otimes} = S \quad e \quad S(i,i) = 0,\ \forall\, i = 1, 2, \dots, n.$$

*Em particular, ocorre* $(S^\star)^\star = S^\star$.

Repare que este resultado fornece um teste de consistência.

## *Exemplo*

Para o exemplo anterior, pode-se de imediato verificar que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, de fato encontramos um operador de Kleene.

É possível identificar quando estamos lidando com um operador de Kleene.

## Proposição

*Vale a equivalência:*

$$S^{\star} = S \quad \Leftrightarrow \quad \tau_S = 0, \quad S^{2^{\otimes}} = S \quad e \quad S(i,i) = 0, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n.$$

*Em particular, ocorre* $(S^{\star})^{\star} = S^{\star}$.

Repare que este resultado fornece um teste de consistência.

## *Exemplo*

Para o exemplo anterior, pode-se de imediato verificar que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, de fato encontramos um operador de Kleene.

É possível identificar quando estamos lidando com um operador de Kleene.

## Proposição

*Vale a equivalência:*

$$S^\star = S \quad \Leftrightarrow \quad \tau_S = 0, \quad S^{2^\otimes} = S \quad e \quad S(i,i) = 0,\ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n.$$

*Em particular, ocorre* $(S^\star)^\star = S^\star$.

Repare que este resultado fornece um teste de consistência.

## *Exemplo*

Para o exemplo anterior, pode-se de imediato verificar que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, de fato encontramos um operador de Kleene.

Matrizes que satisfazem propriedades semelhantes às de $S^\star$ terão utilidade posteriormente.

## Definition

- Uma matriz $S$ é dita definida se $\tau_S = 0$.
- Se, além disso, $S(i,i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, dizemos que a matriz $S$ é fortemente definida.

## *Observação*

Com relação a propriedade fortemente definida, observe que esta impõe, em particular, que todos os ciclos de comprimento 1 ($i \xrightarrow{G} i$, com $i = 1, 2, \ldots, n$) minimizam o custo associado $c_S$.

Matrizes que satisfazem propriedades semelhantes às de $S^\star$ terão utilidade posteriormente.

## Definition

- Uma matriz $S$ é dita definida se $\tau_S = 0$.
- Se, além disso, $S(i,i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, dizemos que a matriz $S$ é fortemente definida.

## Observação

Com relação a propriedade fortemente definida, observe que esta impõe, em particular, que todos os ciclos de comprimento 1 ($i \xrightarrow{G} i$, com $i = 1, 2, \ldots, n$) minimizam o custo associado $c_S$.

Matrizes que satisfazem propriedades semelhantes às de $S^\star$ terão utilidade posteriormente.

## Definition

- Uma matriz $S$ é dita definida se $\tau_S = 0$.
- Se, além disso, $S(i,i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, dizemos que a matriz $S$ é fortemente definida.

## *Observação*

Com relação a propriedade fortemente definida, observe que esta impõe, em particular, que todos os ciclos de comprimento 1 ($i \stackrel{G}{\to} i$, com $i = 1, 2, \ldots, n$) minimizam o custo associado $c_S$.

# Tradução em Otimização de Médias

Queremos entender como o operador de Kleene se transcreve dentro de otimização de médias. Considere a

matriz $S_{c-m(c)} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ associada ao custo $c - m(c)$.

$$S^{\star}_{c-m(c)}(i,j) = \inf \left\{ k(c(P) - m(c)) \ : \ \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \\ \text{conectando } j \text{ a } i \text{ de} \\ \text{comprimento } k \geq 1 \end{array} \right\}.$$

**Observação**

O operador de Kleene pode ser visto como uma concretização algébrica de noção relevante em otimização de médias. Em particular, a expressão à direita da igualdade é a empregada na definição do potencial de Mañé.

# Tradução em Otimização de Médias

Queremos entender como o operador de Kleene se transcreve dentro de otimização de médias. Considere a

matriz $S_{c-m(c)} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ associada ao custo $c - m(c)$.

As entradas $(i, j)$, com $i \neq j$, do respectivo operador de Kleene podem ser apresentadas como

$$S^\star_{c-m(c)}(i,j) = \inf \left\{ k(c(P) - m(c)) \ : \ \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \\ \text{conectando } j \text{ a } i \text{ de} \\ \text{comprimento } k \geq 1 \end{array} \right\}.$$

**Observação**

O operador de Kleene pode ser visto como uma concretização algébrica de noção relevante em otimização de médias. Em particular, a expressão à direita da igualdade é a empregada na definição do potencial de Mañé.

# Tradução em Otimização de Médias

Queremos entender como o operador de Kleene se transcreve dentro de otimização de médias. Considere a

matriz $S_{c-m(c)} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ associada ao custo $c - m(c)$.

As entradas $(i, j)$, com $i \neq j$, do respectivo operador de Kleene podem ser apresentadas como

$$S^{\star}_{c-m(c)}(i,j) = \inf \left\{ k(c(P) - m(c)) \;:\; \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \\ \text{conectando } j \text{ a } i \text{ de} \\ \text{comprimento } k \geq 1 \end{array} \right\}.$$

### Observação

O operador de Kleene pode ser visto como uma concretização algébrica de noção relevante em otimização de médias. Em particular, a expressão à direita da igualdade é a empregada na definição do potencial de Mañé.

# Tradução em Otimização de Médias

Queremos entender como o operador de Kleene se transcreve dentro de otimização de médias. Considere a

matriz $S_{c-m(c)} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ associada ao custo $c - m(c)$.

As entradas $(i, j)$, com $i \neq j$, do respectivo operador de Kleene podem ser apresentadas como

$$S^{\star}_{c-m(c)}(i,j) = \inf \left\{ k(c(P) - m(c)) \ : \ \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \\ \text{conectando } j \text{ a } i \text{ de} \\ \text{comprimento } k \geq 1 \end{array} \right\}.$$

## *Observação*

O operador de Kleene pode ser visto como uma concretização algébrica de noção relevante em otimização de médias. Em particular, a expressão à direita da igualdade é a empregada na definição do potencial de Mañé.

# Sumário

1 Operador de Kleene

2 Subautovetores
   Subgrafo crítico e propriedade separante
   Propriedades geométricas

3 Dicionário

# Ordem

Considere agora a ordem parcial sobre $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$,

$$\vec{v} \preceq \vec{w} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{v}.$$

## Observação

Lembre-se que tal ordem não é a ordem lexicográfica apesar de sempre concordar com esta, isto é, $\vec{v} \preceq \vec{w} \;\Rightarrow\; \vec{v} \leq \vec{w}$.

Também definimos ordem parcial sobre $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes)$ por

$$S \preceq R \qquad \Leftrightarrow \qquad S \oplus R = S.$$

## Observação

Vale a propriedade monótona do produto de uma matriz por um vetor e do produto matricial:

$$S_1 \preceq S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \otimes \vec{v} \preceq S_2 \otimes \vec{v}, \qquad \forall\, \vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \qquad \text{e}$$

$$S_1 \preceq S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \otimes R \preceq S_2 \otimes R, \qquad \forall\, R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}.$$

# Ordem

Considere agora a ordem parcial sobre $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$,

$$\vec{v} \preceq \vec{w} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{v}.$$

## *Observação*

Lembre-se que tal ordem não é a ordem lexicográfica apesar de sempre concordar com esta, isto é, $\vec{v} \preceq \vec{w} \;\Rightarrow\; \vec{v} \leq \vec{w}$.

Também definimos ordem parcial sobre $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes)$ por

$$S \preceq R \qquad \Leftrightarrow \qquad S \oplus R = S.$$

## *Observação*

Vale a propriedade monótona do produto de uma matriz por um vetor e do produto matricial:

$$S_1 \preceq S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \otimes \vec{v} \preceq S_2 \otimes \vec{v}, \qquad \forall\, \vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \qquad \text{e}$$

$$S_1 \preceq S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \otimes R \preceq S_2 \otimes R, \qquad \forall\, R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}.$$

# Ordem

Considere agora a ordem parcial sobre $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$,

$$\vec{v} \preceq \vec{w} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{v}.$$

## *Observação*

Lembre-se que tal ordem não é a ordem lexicográfica apesar de sempre concordar com esta, isto é, $\vec{v} \preceq \vec{w} \;\Rightarrow\; \vec{v} \leq \vec{w}$.

Também definimos ordem parcial sobre $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes)$ por

$$S \preceq R \qquad \Leftrightarrow \qquad S \oplus R = S.$$

## *Observação*

Vale a propriedade monótona do produto de uma matriz por um vetor e do produto matricial:

$$S_1 \preceq S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \otimes \vec{v} \preceq S_2 \otimes \vec{v}, \qquad \forall\, \vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \qquad \text{e}$$

$$S_1 \preceq S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \otimes R \preceq S_2 \otimes R, \qquad \forall\, R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}.$$

# Ordem

Considere agora a ordem parcial sobre $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$,

$$\vec{v} \preceq \vec{w} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{v}.$$

*Observação*

Lembre-se que tal ordem não é a ordem lexicográfica apesar de sempre concordar com esta, isto é, $\vec{v} \preceq \vec{w} \;\Rightarrow\; \vec{v} \leq \vec{w}$.

Também definimos ordem parcial sobre $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes)$ por

$$S \preceq R \qquad \Leftrightarrow \qquad S \oplus R = S.$$

*Observação*

Vale a propriedade monótona do produto de uma matriz por um vetor e do produto matricial:

$$S_1 \preceq S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \otimes \vec{v} \preceq S_2 \otimes \vec{v}, \qquad \forall\, \vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \qquad \text{e}$$

$$S_1 \preceq S_2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \otimes R \preceq S_2 \otimes R, \qquad \forall\, R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}.$$

# Subautovetores

Com auxílio deste tipo de ordem parcial, consideramos uma noção mais abrangente que a de autovetor.

## Definição

Dizemos que $\vec{u}$ é um subautovetor para uma matriz irredutível $S$ sempre que

$$\tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u},$$

ou equivalentemente quando $(\tau_S \odot \vec{u}) \oplus (S \otimes \vec{u}) = \tau_S \odot \vec{u}$.

Como vimos,

a constante cíclica minimal nada mais é que a média cíclica minimal e autovetores correspondem a corretores calibrados.

$$u(j) + m(c) = (\tau_{S_c} \odot \vec{u})_j \leq (S_c \otimes \vec{u})_j = \min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i) + c(i,j)].$$

# Subautovetores

Com auxílio deste tipo de ordem parcial, consideramos uma noção mais abrangente que a de autovetor.

## Definição

Dizemos que $\vec{u}$ é um subautovetor para uma matriz irredutível $S$ sempre que

$$\tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u},$$

ou equivalentemente quando $(\tau_S \odot \vec{u}) \oplus (S \otimes \vec{u}) = \tau_S \odot \vec{u}$.

Como vimos,

a constante cíclica minimal nada mais é que a média cíclica minimal e autovetores correspondem a corretores calibrados.

Não há surpresa com o fato que a desigualdade vetorial $\tau_{S_c} \odot \vec{u} \preceq S_c \otimes \vec{u}$, quando vista em termo de suas entradas, fornece para todo $j = 1, 2, \ldots, n$

$$u(j) + m(c) = (\tau_{S_c} \odot \vec{u})_j \leq (S_c \otimes \vec{u})_j = \min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i) + c(i, j)].$$

# Subautovetores

Com auxílio deste tipo de ordem parcial, consideramos uma noção mais abrangente que a de autovetor.

## Definição

Dizemos que $\vec{u}$ é um subautovetor para uma matriz irredutível $S$ sempre que

$$\tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u},$$

ou equivalentemente quando $(\tau_S \odot \vec{u}) \oplus (S \otimes \vec{u}) = \tau_S \odot \vec{u}$.

Como vimos,

a constante cíclica minimal nada mais é que a média cíclica minimal
e autovetores correspondem a corretores calibrados.

Não há surpresa com o fato que a desigualdade vetorial $\tau_{S_c} \odot \vec{u} \preceq S_c \otimes \vec{u}$, quando vista em termo de suas entradas, fornece para todo $j = 1, 2, \ldots, n$

$$u(j) + m(c) = (\tau_{S_c} \odot \vec{u})_j \leq (S_c \otimes \vec{u})_j = \min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i) + c(i,j)].$$

Portanto,

o conceito de subautovetor da matriz $S_c$ coincidem com a noção usual de corretor associado ao custo $c$ segundo a otimização de médias.

No restante desta aula, assumiremos como hipótese padrão que

a matriz $S$ é definida, ou seja, $\tau_S = 0$.

Imediatamente tal condição garante simplificações como, por exemplo,

$$\vec{u} \text{ é autovetor} \quad \Leftrightarrow \quad S \otimes \vec{u} = \vec{u},$$

Além disso, esta suposição não significa perda de generalidade, já que os resultados para o caso geral poderão ser obtidos ao se lidar com a matriz $(-\tau_S) \odot S$.

Portanto,

o conceito de subautovetor da matriz $S_c$ coincidem com a noção usual de corretor associado ao custo $c$ segundo a otimização de médias.

No restante desta aula, assumiremos como hipótese padrão que

a matriz $S$ é definida, ou seja, $\tau_S = 0$.

Imediatamente tal condição garante simplificações como, por exemplo,

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ é autovetor} \quad &\Leftrightarrow \quad S \otimes \vec{u} = \vec{u}, \\ \vec{u} \text{ é subautovetor} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u} \\ \text{ou} \quad S^{\star} &= I \oplus S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus \cdots \oplus S^{(n-1)^{\otimes}}. \end{aligned}$$

Portanto,

o conceito de subautovetor da matriz $S_c$ coincidem com a noção usual de corretor associado ao custo $c$ segundo a otimização de médias.

No restante desta aula, assumiremos como hipótese padrão que

a matriz $S$ é definida, ou seja, $\tau_S = 0$.

Imediatamente tal condição garante simplificações como, por exemplo,

$$\begin{array}{rcl} \vec{u} \text{ é autovetor} & \Leftrightarrow & S \otimes \vec{u} = \vec{u}, \\ \vec{u} \text{ é subautovetor} & \Leftrightarrow & \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u} \end{array}$$

$$\text{ou} \quad S^{\star} = I \oplus S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus \cdots \oplus S^{(n-1)^{\otimes}}.$$

Além disso, esta suposição não significa perda de generalidade, já que os resultados para o caso geral poderão ser obtidos ao se lidar com a matriz $(-\tau_S) \odot S$.

Portanto,

o conceito de subautovetor da matriz $S_c$ coincidem com a noção usual de corretor associado ao custo $c$ segundo a otimização de médias.

No restante desta aula, assumiremos como hipótese padrão que

a matriz $S$ é definida, ou seja, $\tau_S = 0$.

Imediatamente tal condição garante simplificações como, por exemplo,

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ é autovetor} \quad &\Leftrightarrow \quad S \otimes \vec{u} = \vec{u}, \\ \vec{u} \text{ é subautovetor} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u} \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad S^{\star} = I \oplus S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus \cdots \oplus S^{(n-1)^{\otimes}}.$$

Além disso, esta suposição não significa perda de generalidade, já que os resultados para o caso geral poderão ser obtidos ao se lidar com a matriz $(-\tau_S) \odot S$.

Portanto,

o conceito de subautovetor da matriz $S_c$ coincidem com a noção usual de corretor associado ao custo $c$ segundo a otimização de médias.

No restante desta aula, assumiremos como hipótese padrão que

a matriz $S$ é definida, ou seja, $\tau_S = 0$.

Imediatamente tal condição garante simplificações como, por exemplo,

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ é autovetor} \quad &\Leftrightarrow \quad S \otimes \vec{u} = \vec{u}, \\ \vec{u} \text{ é subautovetor} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u} \\ \text{ou} \quad S^\star &= I \oplus S \oplus S^{2^\otimes} \oplus \cdots \oplus S^{(n-1)^\otimes}. \end{aligned}$$

Além disso, esta suposição não significa perda de generalidade, já que os resultados para o caso geral poderão ser obtidos ao se lidar com a matriz $(-\tau_S) \odot S$.

Portanto,

o conceito de subautovetor da matriz $S_c$ coincidem com a noção usual de corretor associado ao custo $c$ segundo a otimização de médias.

No restante desta aula, assumiremos como hipótese padrão que

a matriz $S$ é definida, ou seja, $\tau_S = 0$.

Imediatamente tal condição garante simplificações como, por exemplo,

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ é autovetor} \quad &\Leftrightarrow \quad S \otimes \vec{u} = \vec{u}, \\ \vec{u} \text{ é subautovetor} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u} \\ \text{ou} \quad S^{\star} &= I \oplus S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus \cdots \oplus S^{(n-1)^{\otimes}}. \end{aligned}$$

Além disso, esta suposição não significa perda de generalidade, já que os resultados para o caso geral poderão ser obtidos ao se lidar com a matriz $(-\tau_S) \odot S$.

# Sumário

1. Operador de Kleene
2. Subautovetores
   - Subgrafo crítico e propriedade separante
   - Propriedades geométricas
3. Dicionário

# Subgrafo crítico

No contexto da álgebra *min-plus*, queremos

apresentar a noção de subgrafo crítico, conceito análogo ao de conjunto cíclico minimal.

Por questão de precisão, sejam $G$ grafo orientado conexo e $M$ matriz de transição associados a matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}^{n \times n})$ (como definidos na **Aula 07**).

## Definição

Dizemos então que um ciclo $Q : i_0 = i_k \xrightarrow{G} i_{k-1} \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_0$ é crítico para $S$ se verifica

$$\frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) = \tau_S.$$

# Subgrafo crítico

No contexto da álgebra *min-plus*, queremos

apresentar a noção de subgrafo crítico, conceito análogo ao de conjunto cíclico minimal.

Por questão de precisão, sejam $G$ grafo orientado conexo e $M$ matriz de transição associados a matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}^{n \times n})$ (como definidos na **Aula 07**).

## Definição

Dizemos então que um ciclo $Q : i_0 = i_k \xrightarrow{G} i_{k-1} \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_0$ é crítico para $S$ se verifica

$$\frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) = \tau_S.$$

Em particular, temos que um ciclo $Q$ é crítico para $S$ se, e somente se, é um ciclo que minimiza o custo associado $c_S$, isto é, $c_S(Q) = m(c_S)$.

# Subgrafo crítico

No contexto da álgebra *min-plus*, queremos

apresentar a noção de subgrafo crítico, conceito análogo ao de conjunto cíclico minimal.

Por questão de precisão, sejam $G$ grafo orientado conexo e $M$ matriz de transição associados a matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}^{n\times n})$ (como definidos na **Aula 07**).

## Definição

Dizemos então que um ciclo $Q : i_0 = i_k \xrightarrow{G} i_{k-1} \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_0$ é crítico para $S$ se verifica

$$\frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) = \tau_S.$$

Em particular, temos que um ciclo $Q$ é crítico para $S$ se, e somente se, é um ciclo que minimiza o custo associado $c_S$, isto é, $c_S(Q) = m(c_S)$.

# Subgrafo crítico

No contexto da álgebra *min-plus*, queremos

apresentar a noção de subgrafo crítico, conceito análogo ao de conjunto cíclico minimal.

Por questão de precisão, sejam $G$ grafo orientado conexo e $M$ matriz de transição associados a matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}^{n \times n})$ (como definidos na **Aula 07**).

## Definição

Dizemos então que um ciclo $Q : i_0 = i_k \xrightarrow{G} i_{k-1} \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_0$ é crítico para $S$ se verifica

$$\frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) = \tau_S.$$

Em particular, temos que um ciclo $Q$ é crítico para $S$ se, e somente se, é um ciclo que minimiza o custo associado $c_S$, isto é, $c_S(Q) = m(c_S)$.

Perceba ainda que o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c_S)$ é formado por todos os ciclos críticos de $S$.

## Definição

Definimos o subgrafo crítico associado a uma matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ como sendo o grafo $G_{\mathrm{Cr}} = (V_{\mathrm{Cr}}, A_{\mathrm{Cr}})$, onde

1. $V_{\mathrm{Cr}}$ é o subconjunto de $V(G)$ formado dos vértices que pertencem a algum ciclo crítico de $S$;
2. $A_{\mathrm{Cr}}$ é o subconjunto de $A(G)$ composto pelas arestas pertencentes a algum ciclo crítico de $S$.

Os vértices e arestas do subgrafo crítico $G_{\mathrm{Cr}}$ serão denominados, respectivamente, por vértices críticos e arestas críticas.

Um aspecto peculiar dos subautovetores pode ser agora descortinado.

Não importando o subautovetor $\vec{u}$ tomado, sempre se verifica

$$(\tau_S \odot \vec{u})_i = (S \otimes \vec{u})_i, \qquad \forall\, i \in V_{\mathrm{Cr}}.$$

Perceba ainda que o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c_S)$ é formado por todos os ciclos críticos de $S$.

## Definição

Definimos o subgrafo crítico associado a uma matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ como sendo o grafo $G_{\mathrm{Cr}} = (V_{\mathrm{Cr}}, A_{\mathrm{Cr}})$, onde

1. $V_{\mathrm{Cr}}$ é o subconjunto de $V(G)$ formado dos vértices que pertencem a algum ciclo crítico de $S$;
2. $A_{\mathrm{Cr}}$ é o subconjunto de $A(G)$ composto pelas arestas pertencentes a algum ciclo crítico de $S$.

Os vértices e arestas do subgrafo crítico $G_{\mathrm{Cr}}$ serão denominados, respectivamente, por vértices críticos e arestas críticas.

Um aspecto peculiar dos subautovetores pode ser agora descortinado.

Não importando o subautovetor $\vec{u}$ tomado, sempre se verifica

$$(\tau_S \odot \vec{u})_i = (S \otimes \vec{u})_i, \qquad \forall\, i \in V_{\mathrm{Cr}}.$$

Perceba ainda que o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c_S)$ é formado por todos os ciclos críticos de $S$.

## Definição

Definimos o subgrafo crítico associado a uma matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ como sendo o grafo $G_{\mathrm{Cr}} = (V_{\mathrm{Cr}}, A_{\mathrm{Cr}})$, onde

1. $V_{\mathrm{Cr}}$ é o subconjunto de $V(G)$ formado dos vértices que pertencem a algum ciclo crítico de $S$;
2. $A_{\mathrm{Cr}}$ é o subconjunto de $A(G)$ composto pelas arestas pertencentes a algum ciclo crítico de $S$.

Os vértices e arestas do subgrafo crítico $G_{\mathrm{Cr}}$ serão denominados, respectivamente, por vértices críticos e arestas críticas.

Um aspecto peculiar dos subautovetores pode ser agora descortinado.

Não importando o subautovetor $\vec{u}$ tomado, sempre se verifica

$$(\tau_S \odot \vec{u})_i = (S \otimes \vec{u})_i, \qquad \forall\, i \in V_{\mathrm{Cr}}.$$

Perceba ainda que o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c_S)$ é formado por todos os ciclos críticos de $S$.

## Definição

Definimos o subgrafo crítico associado a uma matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ como sendo o grafo $G_{\mathrm{Cr}} = (V_{\mathrm{Cr}}, A_{\mathrm{Cr}})$, onde

1. $V_{\mathrm{Cr}}$ é o subconjunto de $V(G)$ formado dos vértices que pertencem a algum ciclo crítico de $S$;
2. $A_{\mathrm{Cr}}$ é o subconjunto de $A(G)$ composto pelas arestas pertencentes a algum ciclo crítico de $S$.

Os vértices e arestas do subgrafo crítico $G_{\mathrm{Cr}}$ serão denominados, respectivamente, por vértices críticos e arestas críticas.

Um aspecto peculiar dos subautovetores pode ser agora descortinado.

Não importando o subautovetor $\vec{u}$ tomado, sempre se verifica

$$(\tau_S \odot \vec{u})_i = (S \otimes \vec{u})_i, \qquad \forall\, i \in V_{\mathrm{Cr}}.$$

Para descrever completamente o subgrafo crítico é necessário

reconhecemos todas as arestas críticas, isto é, apresentando uma caracterização algébrica para os elementos em $A_{\mathrm{Cr}}$.

**Proposição**

*Seja $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ uma matriz irredutível definida. São equivalentes:*

1. $(j, i) \in A_{Cr}$;
2. $S(i, j) \otimes S^{\star}(j, j_0) = S^{\star}(i, j_0)$, *para todo* $j_0 = 1, 2, \ldots, n$;
3. $S^{\star}(i_0, j) = S^{\star}(i_0, i) \otimes S(i, j)$, *para todo* $i_0 = 1, 2, \ldots, n$.

Para descrever completamente o subgrafo crítico é necessário

reconhecemos todas as arestas críticas, isto é, apresentando uma caracterização algébrica para os elementos em $A_{\mathrm{Cr}}$.

## Proposição

*Seja $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ uma matriz irredutível definida. São equivalentes:*

1. $(j, i) \in A_{Cr}$;
2. $S(i, j) \otimes S^\star(j, j_0) = S^\star(i, j_0)$, *para todo* $j_0 = 1, 2, \ldots, n$;
3. $S^\star(i_0, j) = S^\star(i_0, i) \otimes S(i, j)$, *para todo* $i_0 = 1, 2, \ldots, n$.

Para descrever completamente o subgrafo crítico é necessário

reconhecemos todas as arestas críticas, isto é, apresentando uma caracterização algébrica para os elementos em $A_{\mathrm{Cr}}$.

## Proposição

*Seja $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ uma matriz irredutível definida. São equivalentes:*

1. $(j, i) \in A_{Cr}$;
2. $S(i, j) \otimes S^{\star}(j, j_0) = S^{\star}(i, j_0)$, *para todo* $j_0 = 1, 2, \ldots, n$;
3. $S^{\star}(i_0, j) = S^{\star}(i_0, i) \otimes S(i, j)$, *para todo* $i_0 = 1, 2, \ldots, n$.

Para descrever completamente o subgrafo crítico é necessário

reconhecemos todas as arestas críticas, isto é, apresentando uma caracterização algébrica para os elementos em $A_{\mathrm{Cr}}$.

## Proposição

*Seja* $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ *uma matriz irredutível definida. São equivalentes:*

1. $(j, i) \in A_{Cr}$;
2. $S(i,j) \otimes S^{\star}(j, j_0) = S^{\star}(i, j_0)$, *para todo* $j_0 = 1, 2, \ldots, n$;
3. $S^{\star}(i_0, j) = S^{\star}(i_0, i) \otimes S(i, j)$, *para todo* $i_0 = 1, 2, \ldots, n$.

# Renormalização

Desejamos por ora

apresentar processo de renormalização em termos da álgebra *min-plus*.

Considere então as seguintes matrizes diagonais obtidas a partir de um subautovetor $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ de uma matriz irredutível $S$:

$$D_{\vec{u}} := \begin{bmatrix} u_1 & \ldots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \ldots & u_n \end{bmatrix}, \qquad D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} := \begin{bmatrix} -u_1 & \ldots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \ldots & -u_n \end{bmatrix}.$$

Explicitando cada uma das entradas $(i, j)$ de tal matriz, segundo a álgebra usual, obtemos que

# Renormalização

Desejamos por ora

apresentar processo de renormalização em termos da álgebra *min-plus*.

Considere então as seguintes matrizes diagonais obtidas a partir de um subautovetor $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ de uma matriz irredutível $S$:

$$D_{\vec{u}} := \begin{bmatrix} u_1 & \ldots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \ldots & u_n \end{bmatrix}, \qquad D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} := \begin{bmatrix} -u_1 & \ldots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \ldots & -u_n \end{bmatrix}.$$

Denote $\hat{S} := D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$.

$$\begin{aligned} \hat{S}(i,j) &= \min_{1 \le i_0 \le n} \min_{1 \le i_1 \le n} \{ D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}}(i, i_0) + S(i_0, i_1) + D_{\vec{u}}(i_1, j) \} \\ &= S(i,j) + u(j) - u(i). \end{aligned}$$

# Renormalização

Desejamos por ora

apresentar processo de renormalização em termos da álgebra *min-plus*.

Considere então as seguintes matrizes diagonais obtidas a partir de um subautovetor $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ de uma matriz irredutível $S$:

$$D_{\vec{u}} := \begin{bmatrix} u_1 & \ldots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \ldots & u_n \end{bmatrix}, \qquad D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} := \begin{bmatrix} -u_1 & \ldots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \ldots & -u_n \end{bmatrix}.$$

Denote $\hat{S} := D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$. Explicitando cada uma das entradas $(i, j)$ de tal matriz, segundo a álgebra usual, obtemos que

$$\begin{aligned} \hat{S}(i,j) &= \min_{1 \leq i_0 \leq n} \min_{1 \leq i_1 \leq n} \left\{ D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}}(i, i_0) + S(i_0, i_1) + D_{\vec{u}}(i_1, j) \right\} \\ &= S(i,j) + u(j) - u(i). \end{aligned}$$

# Renormalização

Desejamos por ora

apresentar processo de renormalização em termos da álgebra *min-plus*.

Considere então as seguintes matrizes diagonais obtidas a partir de um subautovetor $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ de uma matriz irredutível $S$:

$$D_{\vec{u}} := \begin{bmatrix} u_1 & \dots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \dots & u_n \end{bmatrix}, \qquad D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} := \begin{bmatrix} -u_1 & \dots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \dots & -u_n \end{bmatrix}.$$

Denote $\hat{S} := D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$. Explicitando cada uma das entradas $(i, j)$ de tal matriz, segundo a álgebra usual, obtemos que

$$\begin{aligned} \hat{S}(i,j) &= \min_{1 \le i_0 \le n} \min_{1 \le i_1 \le n} \left\{ D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}}(i, i_0) + S(i_0, i_1) + D_{\vec{u}}(i_1, j) \right\} \\ &= S(i,j) + u(j) - u(i). \end{aligned}$$

Por sua vez, como $\vec{u}$ é subautovetor de $S$, ou melhor, como $\vec{u}$ é corretor associado a $c_S$, garantimos que

$$\hat{S}(i,j) \geq \tau_S, \quad \text{para toda aresta } (j,i) \in A(G) \qquad \text{e}$$
$$\hat{S}(i,j) = \tau_S, \quad \text{para toda aresta crítica } (j,i) \in A_{\mathrm{Cr}}.$$

Fica agora patente conexão com o processo de renormalização do custo e, por esta razão, denominaremos $\hat{S}$ de renormalização da matriz $S$.

**Observação**

Note ainda que o custo $c_{\hat{S}}$ associado a uma renormalização de $S$ é dado, para cada aresta $(i,j)$, por

$$c_{\hat{S}}(i,j) = \hat{S}(j,i) = S(j,i) + u(i) - u(j) = c_S(i,j) + u(i) - u(j),$$

o qual coincide com o custo renormalizado $\hat{c_S}$ com relação ao corretor $u$ (naturalmente associado ao subautovetor $\vec{u}$).

Por sua vez, como $\vec{u}$ é subautovetor de $S$, ou melhor, como $\vec{u}$ é corretor associado a $c_S$, garantimos que

$$\begin{aligned} \hat{S}(i,j) &\geq \tau_S, \quad \text{para toda aresta } (j,i) \in A(G) \qquad \text{e} \\ \hat{S}(i,j) &= \tau_S, \quad \text{para toda aresta crítica } (j,i) \in A_{\mathrm{Cr}}. \end{aligned}$$

Fica agora patente conexão com o processo de renormalização do custo e, por esta razão, denominaremos $\hat{S}$ de renormalização da matriz $S$.

**Observação**

Note ainda que o custo $c_{\hat{S}}$ associado a uma renormalização de $S$ é dado, para cada aresta $(i,j)$, por

$$c_{\hat{S}}(i,j) = \hat{S}(j,i) = S(j,i) + u(i) - u(j) = c_S(i,j) + u(i) - u(j),$$

o qual coincide com o custo renormalizado $\hat{c_S}$ com relação ao corretor $u$ (naturalmente associado ao subautovetor $\vec{u}$).

Por sua vez, como $\vec{u}$ é subautovetor de $S$, ou melhor, como $\vec{u}$ é corretor associado a $c_S$, garantimos que

$$\begin{aligned} \hat{S}(i,j) &\geq \tau_S, \quad \text{para toda aresta } (j,i) \in A(G) \qquad \text{e} \\ \hat{S}(i,j) &= \tau_S, \quad \text{para toda aresta crítica } (j,i) \in A_{\mathrm{Cr}}. \end{aligned}$$

Fica agora patente conexão com o processo de renormalização do custo e, por esta razão, denominaremos $\hat{S}$ de renormalização da matriz $S$.

### Observação

Note ainda que o custo $c_{\hat{S}}$ associado a uma renormalização de $S$ é dado, para cada aresta $(i,j)$, por

$$c_{\hat{S}}(i,j) = \hat{S}(j,i) = S(j,i) + u(i) - u(j) = c_S(i,j) + u(i) - u(j),$$

o qual coincide com o custo renormalizado $\widehat{c_S}$ com relação ao corretor $u$ (naturalmente associado ao subautovetor $\vec{u}$).

Por sua vez, como $\vec{u}$ é subautovetor de $S$, ou melhor, como $\vec{u}$ é corretor associado a $c_S$, garantimos que

$$\begin{aligned} \hat{S}(i,j) &\geq \tau_S, \quad \text{para toda aresta } (j,i) \in A(G) \qquad \text{e} \\ \hat{S}(i,j) &= \tau_S, \quad \text{para toda aresta crítica } (j,i) \in A_{\mathrm{Cr}}. \end{aligned}$$

Fica agora patente conexão com o processo de renormalização do custo e, por esta razão, denominaremos $\hat{S}$ de renormalização da matriz $S$.

## Observação

Note ainda que o custo $c_{\hat{S}}$ associado a uma renormalização de $S$ é dado, para cada aresta $(i,j)$, por

$$c_{\hat{S}}(i,j) = \hat{S}(j,i) = S(j,i) + u(i) - u(j) = c_S(i,j) + u(i) - u(j),$$

o qual coincide com o custo renormalizado $\widehat{c_S}$ com relação ao corretor $u$ (naturalmente associado ao subautovetor $\vec{u}$).

# Propriedade de visualização

Introntroduzimos a seguir uma classe de subautovetores que destacam o subgrafo crítico por meio desta renormalização sobre matrizes da álgebra matricial *min-plus*.

## Definição

Uma matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ verifica a propriedade de visualização estrita se suas entradas satisfazem:

1. $S(i,j) = \tau_S$ para todo $(i,j) \in A_{\mathrm{Cr}}$;
2. $S(i,j) > \tau_S$ para todo $(i,j) \notin A_{\mathrm{Cr}}$.

Além disso, um subautovetor $\vec{u}$ é dito separante com relação a uma matriz $S$ se a matriz $D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$ possui visualização estrita.

Obviamente,

a propriedade de visualização, adicionada ao processo de renormalização de uma matriz por um subautovetor, introduz a noção análoga a de corretor separante da otimização de médias.

# Propriedade de visualização

Introntroduzimos a seguir uma classe de subautovetores que destacam o subgrafo crítico por meio desta renormalização sobre matrizes da álgebra matricial *min-plus*.

## Definição

Uma matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ verifica a propriedade de visualização estrita se suas entradas satisfazem:

1. $S(i,j) = \tau_S$ para todo $(i,j) \in A_{\mathrm{Cr}}$;
2. $S(i,j) > \tau_S$ para todo $(i,j) \notin A_{\mathrm{Cr}}$.

Além disso, um subautovetor $\vec{u}$ é dito separante com relação a uma matriz $S$ se a matriz $D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$ possui visualização estrita.

Obviamente,

a propriedade de visualização, adicionada ao processo de renormalização de uma matriz por um subautovetor, introduz a noção análoga a de corretor separante da otimização de médias.

# Propriedade de visualização

Introntroduzimos a seguir uma classe de subautovetores que destacam o subgrafo crítico por meio desta renormalização sobre matrizes da álgebra matricial *min-plus*.

## Definição

Uma matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ verifica a propriedade de visualização estrita se suas entradas satisfazem:

1. $S(i,j) = \tau_S$ para todo $(i,j) \in A_{\mathrm{Cr}}$;
2. $S(i,j) > \tau_S$ para todo $(i,j) \notin A_{\mathrm{Cr}}$.

Além disso, um subautovetor $\vec{u}$ é dito separante com relação a uma matriz $S$ se a matriz $D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$ possui visualização estrita.

Obviamente,

a propriedade de visualização, adicionada ao processo de renormalização de uma matriz por um subautovetor, introduz a noção análoga a de corretor separante da otimização de médias.

# Propriedade de visualização

Introntroduzimos a seguir uma classe de subautovetores que destacam o subgrafo crítico por meio desta renormalização sobre matrizes da álgebra matricial *min-plus*.

## Definição

Uma matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ verifica a propriedade de visualização estrita se suas entradas satisfazem:

1. $S(i,j) = \tau_S$ para todo $(i,j) \in A_{\text{Cr}}$;
2. $S(i,j) > \tau_S$ para todo $(i,j) \notin A_{\text{Cr}}$.

Além disso, um subautovetor $\vec{u}$ é dito separante com relação a uma matriz $S$ se a matriz $D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$ possui visualização estrita.

Obviamente,

a propriedade de visualização, adicionada ao processo de renormalização de uma matriz por um subautovetor, introduz a noção análoga a de corretor separante da otimização de médias.

A existência de subautovetor separante (e, portanto, de corretor separante) pode ser estabelecida com o auxilio do operador de Kleene.

### Proposição

*Sejam $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ uma matriz irredutível definida e $\vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n}$ um vetor da forma*

$$\vec{u} = \Big(\bigotimes_{r=1}^{n} a_r S^\star(1,r), \ldots, \bigotimes_{r=1}^{n} a_r S^\star(n,r)\Big)^\intercal$$
$$= \sum_{r=1}^{n} a_r (S^\star(1,r), \ldots, S^\star(n,r))^\intercal,$$

*onde $a_r > 0$ para todo $1 \leq r \leq n$ e $\sum_{r=1}^{n} a_r = 1$. (Mais especificamente, $\vec{u}$ é combinação convexa, segundo a álgebra usual, das colunas do operador de Kleene $S^\star$.) Então, a matriz $D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$ possui a propriedade de visualização estrita e, consequentemente, $\vec{u}$ é subautovetor separante.*

A existência de subautovetor separante (e, portanto, de corretor separante) pode ser estabelecida com o auxilio do operador de Kleene.

## Proposição

*Sejam* $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ *uma matriz irredutível definida e* $\vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n}$ *um vetor da forma*

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \left( \bigotimes_{r=1}^{n} a_r S^{\star}(1,r), \ldots, \bigotimes_{r=1}^{n} a_r S^{\star}(n,r) \right)^{\mathsf{T}} \\ &= \sum_{r=1}^{n} a_r \left(S^{\star}(1,r), \ldots, S^{\star}(n,r)\right)^{\mathsf{T}},\end{aligned}$$

*onde* $a_r > 0$ *para todo* $1 \le r \le n$ *e* $\sum_{r=1}^{n} a_r = 1$. *(Mais especificamente,* $\vec{u}$ *é combinação convexa, segundo a álgebra usual, das colunas do operador de Kleene* $S^{\star}$*.) Então, a matriz* $D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$ *possui a propriedade de visualização estrita e, consequentemente,* $\vec{u}$ *é subautovetor separante.*

A existência de subautovetor separante (e, portanto, de corretor separante) pode ser estabelecida com o auxilio do operador de Kleene.

## Proposição

*Sejam* $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ *uma matriz irredutível definida e* $\vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n}$ *um vetor da forma*

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \Big( \bigotimes_{r=1}^{n} a_r S^{\star}(1, r), \ldots, \bigotimes_{r=1}^{n} a_r S^{\star}(n, r) \Big)^{\mathsf{T}} \\ &= \sum_{r=1}^{n} a_r \big(S^{\star}(1, r), \ldots, S^{\star}(n, r)\big)^{\mathsf{T}},\end{aligned}$$

*onde* $a_r > 0$ *para todo* $1 \leq r \leq n$ *e* $\sum_{r=1}^{n} a_r = 1$. *(Mais especificamente,* $\vec{u}$ *é combinação convexa, segundo a álgebra usual, das colunas do operador de Kleene* $S^{\star}$*.) Então, a matriz* $D_{\vec{u}}^{-1^{\otimes}} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$ *possui a propriedade de visualização estrita e, consequentemente,* $\vec{u}$ *é subautovetor separante.*

# Sumário

1. Operador de Kleene
2. Subautovetores
   - Subgrafo crítico e propriedade separante
   - Propriedades geométricas
3. Dicionário

# Propriedades geométricas

Para finalizar, apresentaremos um tratamento geométrico, o qual tem o intuito de

> estabelecer relações entre autovetores e subautovetores das matrizes $S$ e $S^\star$.

Introduzimos primeiramente o conceito análogo ao de subespaço vetorial.

**Definition**

Um subconjunto $\mathcal{V}$ de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ é denominado de cone quando é fechado para as operações $\odot$ e $\oplus$. Mais especificamente, para $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$ e $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, a combinação linear *min-plus*

$$\bigoplus_{\ell=1}^{k} a_\ell \odot \vec{v}_\ell \in \mathcal{V}.$$

# Propriedades geométricas

Para finalizar, apresentaremos um tratamento geométrico, o qual tem o intuito de

estabelecer relações entre autovetores e subautovetores das matrizes $S$ e $S^\star$.

Introduzimos primeiramente o conceito análogo ao de subespaço vetorial.

## Definition

Um subconjunto $\mathcal{V}$ de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ é denominado de cone quando é fechado para as operações $\odot$ e $\oplus$. Mais especificamente, para $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$ e $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, a combinação linear *min-plus*

$$\bigoplus_{\ell=1}^{k} a_\ell \odot \vec{v}_\ell \in \mathcal{V}.$$

# Propriedades geométricas

Para finalizar, apresentaremos um tratamento geométrico, o qual tem o intuito de

estabelecer relações entre autovetores e subautovetores das matrizes $S$ e $S^{\star}$.

Introduzimos primeiramente o conceito análogo ao de subespaço vetorial.

## Definition

Um subconjunto $\mathcal{V}$ de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ é denominado de cone quando é fechado para as operações $\odot$ e $\oplus$. Mais especificamente, para $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$ e $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, a combinação linear *min-plus*

$$\bigoplus_{\ell=1}^{k} a_\ell \odot \vec{v}_\ell \in \mathcal{V}.$$

## Observação

As características geométricas serão consequências naturais do fato das combinações lineares *min-plus* poderem ser reescritas como sistemas de desigualdades em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$.

Estudaremos exclusivamente os seguintes conjuntos.

## Definition

Seja $S$ uma matriz irredutível com autovalor $\tau_S$.

1. Denotaremos por $\mathcal{V}^\star(S)$ conjunto de todos os subautovetores de $S$ para o autovalor $\tau_S$.
2. O conjunto formado por todos os autovetores da matriz $S$ será denotado por $\mathcal{V}(S)$.

Antes de mais nada, afirmamos que

tais conjuntos são cones no espaço $n$-dimensional *min-plus*.

Em particular, é imediato que $\mathcal{V}(S)$ é um subcone do cone $\mathcal{V}^\star(S)$.

## Observação

As características geométricas serão consequências naturais do fato das combinações lineares *min-plus* poderem ser reescritas como sistemas de desigualdades em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$.

Estudaremos exclusivamente os seguintes conjuntos.

## Definition

Seja $S$ uma matriz irredutível com autovalor $\tau_S$.

1. Denotaremos por $\mathcal{V}^\star(S)$ conjunto de todos os subautovetores de $S$ para o autovalor $\tau_S$.
2. O conjunto formado por todos os autovetores da matriz $S$ será denotado por $\mathcal{V}(S)$.

Antes de mais nada, afirmamos que

tais conjuntos são cones no espaço $n$-dimensional *min-plus*.

Em particular, é imediato que $\mathcal{V}(S)$ é um subconjunto de $\mathcal{V}^\star(S)$.

### Observação

As características geométricas serão consequências naturais do fato das combinações lineares *min-plus* poderem ser reescritas como sistemas de desigualdades em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$.

Estudaremos exclusivamente os seguintes conjuntos.

### Definition

Seja $S$ uma matriz irredutível com autovalor $\tau_S$.

1. Denotaremos por $\mathcal{V}^\star(S)$ conjunto de todos os subautovetores de $S$ para o autovalor $\tau_S$.
2. O conjunto formado por todos os autovetores da matriz $S$ será denotado por $\mathcal{V}(S)$.

Antes de mais nada, afirmamos que

tais conjuntos são cones no espaço $n$-dimensional *min-plus*.

### Observação

As características geométricas serão consequências naturais do fato das combinações lineares *min-plus* poderem ser reescritas como sistemas de desigualdades em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$.

Estudaremos exclusivamente os seguintes conjuntos.

### Definition

Seja $S$ uma matriz irredutível com autovalor $\tau_S$.

1. Denotaremos por $\mathcal{V}^\star(S)$ conjunto de todos os subautovetores de $S$ para o autovalor $\tau_S$.
2. O conjunto formado por todos os autovetores da matriz $S$ será denotado por $\mathcal{V}(S)$.

Antes de mais nada, afirmamos que

tais conjuntos são cones no espaço $n$-dimensional *min-plus*.

Em particular, é imediato que $\mathcal{V}(S)$ é um subcone do cone $\mathcal{V}^\star(S)$.

### Observação

As características geométricas serão consequências naturais do fato das combinações lineares *min-plus* poderem ser reescritas como sistemas de desigualdades em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$.

Estudaremos exclusivamente os seguintes conjuntos.

### Definition

Seja $S$ uma matriz irredutível com autovalor $\tau_S$.

1. Denotaremos por $\mathcal{V}^\star(S)$ conjunto de todos os subautovetores de $S$ para o autovalor $\tau_S$.
2. O conjunto formado por todos os autovetores da matriz $S$ será denotado por $\mathcal{V}(S)$.

Antes de mais nada, afirmamos que

tais conjuntos são cones no espaço $n$-dimensional *min-plus*.

Em particular, é imediato que $\mathcal{V}(S)$ é um subcone do cone $\mathcal{V}^\star(S)$.

## Exemplo

Queremos determinar subautovetores para matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

com constante cíclica minimal $\tau_S = 2$, ou seja,

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \qquad \text{tal que} \qquad \tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u},$$

Considere o seguinte sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \min\{+\infty + u_1,\, 4 + u_2\} \geq 2 + u_1 \\ \min\{u_1,\, 6 + u_2\} \geq 2 + u_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u_2 + 2 \geq u_1 \\ u_1 \geq 2 + u_2 \end{cases}$$

o qual, por sua vez, determina a seguinte região no plano estendido

$$V^*(S) = \{\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^2 : u_1 = u_2 + 2\}.$$

## *Exemplo*

Queremos determinar subautovetores para matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

com constante cíclica minimal $\tau_S = 2$, ou seja,

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \qquad \text{tal que} \qquad \tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u},$$

Considere o seguinte sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \min\{+\infty + u_1,\, 4 + u_2\} \geq 2 + u_1 \\ \min\{u_1,\, 6 + u_2\} \geq 2 + u_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_2 + 2 \geq u_1 \\ u_1 \geq 2 + u_2 \end{cases},$$

o qual, por sua vez, determina a seguinte região no plano estendido

$$\mathcal{V}^\star(S) = \{\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^2 \,:\, u_1 = u_2 + 2\}.$$

## Exemplo

Queremos determinar subautovetores para matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

com constante cíclica minimal $\tau_S = 2$, ou seja,

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \qquad \text{tal que} \qquad \tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u},$$

Considere o seguinte sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \min\{+\infty + u_1,\, 4 + u_2\} \geq 2 + u_1 \\ \min\{u_1,\, 6 + u_2\} \geq 2 + u_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_2 + 2 \geq u_1 \\ u_1 \geq 2 + u_2 \end{cases},$$

o qual, por sua vez, determina a seguinte região no plano estendido

$$\mathcal{V}^\star(S) = \left\{\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^2 \,:\, u_1 = u_2 + 2\right\}.$$

## Exemplo

Queremos determinar subautovetores para matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

com constante cíclica minimal $\tau_S = 2$, ou seja,

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \qquad \text{tal que} \qquad \tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u},$$

Considere o seguinte sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \min\{+\infty + u_1,\, 4 + u_2\} \geq 2 + u_1 \\ \min\{u_1,\, 6 + u_2\} \geq 2 + u_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u_2 + 2 \geq u_1 \\ u_1 \geq 2 + u_2 \end{cases},$$

o qual, por sua vez, determina a seguinte região no plano estendido

$$\mathcal{V}^\star(S) = \left\{\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^2 \;:\; u_1 = u_2 + 2\right\}.$$

## Exemplo

Queremos determinar subautovetores para matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

com constante cíclica minimal $\tau_S = 2$, ou seja,

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \qquad \text{tal que} \qquad \tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u},$$

Considere o seguinte sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \min\{+\infty + u_1,\, 4 + u_2\} \geq 2 + u_1 \\ \min\{u_1,\, 6 + u_2\} \geq 2 + u_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u_2 + 2 \geq u_1 \\ u_1 \geq 2 + u_2 \end{cases},$$

o qual, por sua vez, determina a seguinte região no plano estendido

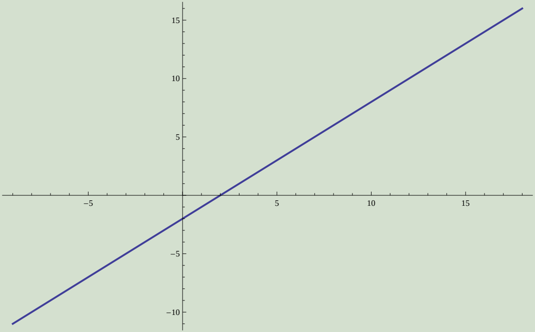
$$\mathcal{V}^{\star}(S) = \left\{\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^2 \;:\; u_1 = u_2 + 2\right\}.$$

## Exemplo

Em particular,

$$\mathcal{V}^{\star}(S) = \left\{\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^2 \;:\; u_1 = u_2 + 2\right\},$$

possui representação gráfica é descrita pela figura abaixo.



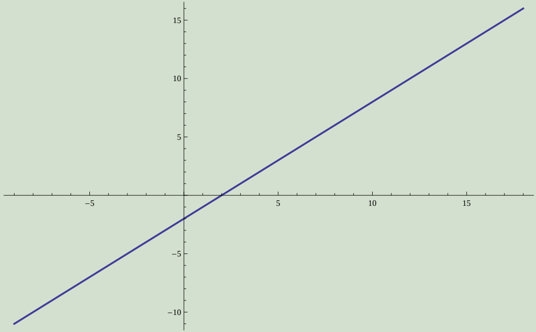

Não é difícil perceber que este operador satisfaz $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}^{\star}(S)$.

## Exemplo

Em particular,

$$\mathcal{V}^{\star}(S) = \left\{ \vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^2 \,:\, u_1 = u_2 + 2 \right\},$$

possui representação gráfica é descrita pela figura abaixo.




Não é difícil perceber que este operador satisfaz $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}^{\star}(S)$.

## Exemplo

Seja a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 4 & 6 \\ -6 & 5 & +\infty \\ 0 & +\infty & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que $\tau_S = -1$. Os elementos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ do conjunto $\mathcal{V}^\star(S)$ obedecem o sistema de desigualdades abaixo apresentado

$$\begin{cases} \min\{4 + u_2, 6 + u_3\} \geq -1 + u_1 \\ \min\{-6 + u_1, 5 + u_2\} \geq -1 + u_2 \\ \min\{u_1, 2 + u_3\} \geq -1 + u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + u_2 \geq -1 + u_1 \\ 6 + u_3 \geq -1 + u_1 \\ -6 + u_1 \geq -1 + u_2 \\ u_1 \geq -1 + u_3 \end{cases}.$$

Reduzindo tal sistema, encontramos a seguinte região em $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^3$

$$\mathcal{V}^\star(S) = \left\{ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^3 \; : \; \begin{matrix} u_1 = u_2 + 5 \quad \text{e} \\ -1 \leq u_1 - u_3 \leq 7 \end{matrix} \right\}.$$

## Exemplo

Seja a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 4 & 6 \\ -6 & 5 & +\infty \\ 0 & +\infty & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que $\tau_S = -1$. Os elementos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ do conjunto $\mathcal{V}^\star(S)$ obedecem o sistema de desigualdades abaixo apresentado

$$\begin{cases} \min\{4 + u_2, 6 + u_3\} \geq -1 + u_1 \\ \min\{-6 + u_1, 5 + u_2\} \geq -1 + u_2 \\ \min\{u_1, 2 + u_3\} \geq -1 + u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + u_2 \geq -1 + u_1 \\ 6 + u_3 \geq -1 + u_1 \\ -6 + u_1 \geq -1 + u_2 \\ u_1 \geq -1 + u_3 \end{cases}.$$

Reduzindo tal sistema, encontramos a seguinte região em $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^3$

$$\mathcal{V}^\star(S) = \left\{ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^3 : \begin{array}{c} u_1 = u_2 + 5 \quad \text{e} \\ -1 \leq u_1 - u_3 \leq 7 \end{array} \right\}.$$

## Exemplo

Seja a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 4 & 6 \\ -6 & 5 & +\infty \\ 0 & +\infty & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que $\tau_S = -1$. Os elementos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ do conjunto $\mathcal{V}^\star(S)$ obedecem o sistema de desigualdades abaixo apresentado

$$\begin{cases} \min\{4 + u_2, 6 + u_3\} \geq -1 + u_1 \\ \min\{-6 + u_1, 5 + u_2\} \geq -1 + u_2 \\ \min\{u_1, 2 + u_3\} \geq -1 + u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + u_2 \geq -1 + u_1 \\ 6 + u_3 \geq -1 + u_1 \\ -6 + u_1 \geq -1 + u_2 \\ u_1 \geq -1 + u_3 \end{cases}.$$

Reduzindo tal sistema, encontramos a seguinte região em $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^3$

$$\mathcal{V}^\star(S) = \left\{ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^3 \ : \ \begin{array}{c} u_1 = u_2 + 5 \quad \text{e} \\ -1 \leq u_1 - u_3 \leq 7 \end{array} \right\}.$$

## Exemplo

Seja a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 4 & 6 \\ -6 & 5 & +\infty \\ 0 & +\infty & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que $\tau_S = -1$. Os elementos $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ do conjunto $\mathcal{V}^\star(S)$ obedecem o sistema de desigualdades abaixo apresentado

$$\begin{cases} \min\{4 + u_2,\ 6 + u_3\} \geq -1 + u_1 \\ \min\{-6 + u_1,\ 5 + u_2\} \geq -1 + u_2 \\ \min\{u_1,\ 2 + u_3\} \geq -1 + u_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4 + u_2 \geq -1 + u_1 \\ 6 + u_3 \geq -1 + u_1 \\ -6 + u_1 \geq -1 + u_2 \\ u_1 \geq -1 + u_3 \end{cases}.$$

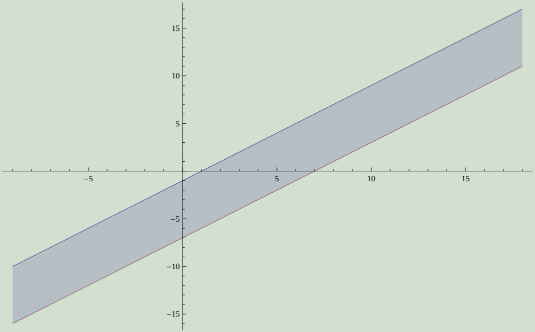
Reduzindo tal sistema, encontramos a seguinte região em $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^3$

$$\mathcal{V}^\star(S) = \left\{ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^3 \ : \ \begin{array}{c} u_1 = u_2 + 5 \quad \text{e} \\ -1 \leq u_1 - u_3 \leq 7 \end{array} \right\}.$$

## Exemplo

A seguir exibimos uma representação gráfica para

$$\mathcal{V}^\star(S) = \left\{ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^3 \ : \ \begin{array}{c} u_1 = u_2 + 5 \quad \text{e} \\ -1 \leq u_1 - u_3 \leq 7 \end{array} \right\}$$




sobre o plano $\{\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_1 = u_2 + 5\}$.

## Observação

O subgrafo crítico fornece relevante informação de caráter geométrico.

Relembre que, para uma aresta crítica $(j, i)$,

*todo subautovetor* $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$
*verifica a igualdade* $(-u_i) \otimes S(i, j) \otimes u_j = \tau_S$.

Isto significa que, para $(j, i) \in A_{Cr}$,

*o cone* $\mathcal{V}^\star(S)$ *está contido no hiperplano* $u_i = u_j + S(i, j) - \tau_S$.

Consequentemente, vale a inclusão

$$\mathcal{V}^\star(S) \subset \bigcap_{(j,i) \in A_{Cr}} \{\vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n : u_i = u_j + S(i,j) - \tau_S\}.$$

## Observação

O subgrafo crítico fornece relevante informação de caráter geométrico. Relembre que, para uma aresta crítica $(j, i)$,

$$\textit{todo subautovetor } \vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \quad \textit{verifica a igualdade } (-u_i) \otimes S(i, j) \otimes u_j = \tau_S.$$

Isto significa que, para $(j, i) \in A_{\mathrm{Cr}}$,

$$\textit{o cone } \mathcal{V}^\star(S) \textit{ está contido no hiperplano } u_i = u_j + S(i, j) - \tau_S.$$

Consequentemente, vale a inclusão

$$\mathcal{V}^\star(S) \subset \bigcap_{(j,i) \in A_{\mathrm{Cr}}} \{\vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \,:\, u_i = u_j + S(i, j) - \tau_S\}.$$

Em particular, quando houver ciclo crítico passando por todos os vértices do grafo, resulta que $\mathcal{V}^\star(S)$ é uma reta.

## *Observação*

O subgrafo crítico fornece relevante informação de caráter geométrico. Relembre que, para uma aresta crítica $(j, i)$,

$$\textit{todo subautovetor } \vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \quad \textit{verifica a igualdade } (-u_i) \otimes S(i, j) \otimes u_j = \tau_S .$$

Isto significa que, para $(j, i) \in A_{\mathrm{Cr}}$,

$$\textit{o cone } \mathcal{V}^{\star}(S) \textit{ está contido no hiperplano } u_i = u_j + S(i, j) - \tau_S .$$

Consequentemente, vale a inclusão

$$\mathcal{V}^{\star}(S) \subset \bigcap_{(j,i) \in A_{\mathrm{Cr}}} \left\{ \vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \;:\; u_i = u_j + S(i, j) - \tau_S \right\}.$$

Em particular, quando houver ciclo crítico passando por todos os vértices do grafo, resulta que $\mathcal{V}^{\star}(S)$ é uma reta.

## *Observação*

O subgrafo crítico fornece relevante informação de caráter geométrico. Relembre que, para uma aresta crítica $(j, i)$,

$$\textit{todo subautovetor } \vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \quad \textit{verifica a igualdade } (-u_i) \otimes S(i, j) \otimes u_j = \tau_S.$$

Isto significa que, para $(j, i) \in A_{\mathrm{Cr}}$,

$$\textit{o cone } \mathcal{V}^\star(S) \textit{ está contido no hiperplano } u_i = u_j + S(i, j) - \tau_S.$$

Consequentemente, vale a inclusão

$$\mathcal{V}^\star(S) \subset \bigcap_{(j,i) \in A_{\mathrm{Cr}}} \{\vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \,:\, u_i = u_j + S(i, j) - \tau_S\}.$$

Em particular, quando houver ciclo crítico passando por todos os vértices do grafo, resulta que $\mathcal{V}^\star(S)$ é uma reta.

## Observação

O subgrafo crítico fornece relevante informação de caráter geométrico. Relembre que, para uma aresta crítica $(j, i)$,

$$\textit{todo subautovetor } \vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$$
$$\textit{verifica a igualdade } (-u_i) \otimes S(i,j) \otimes u_j = \tau_S.$$

Isto significa que, para $(j, i) \in A_{\mathrm{Cr}}$,

$$\textit{o cone } \mathcal{V}^\star(S) \textit{ está contido no hiperplano } u_i = u_j + S(i,j) - \tau_S.$$

Consequentemente, vale a inclusão

$$\mathcal{V}^\star(S) \subset \bigcap_{(j,i)\in A_{\mathrm{Cr}}} \big\{\vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \,:\, u_i = u_j + S(i,j) - \tau_S\big\}.$$

Em particular, quando houver ciclo crítico passando por todos os vértices do grafo, resulta que $\mathcal{V}^\star(S)$ é uma reta.

Destacamos que

- situações nas quais os cones $\mathcal{V}(S)$ e $\mathcal{V}^{\star}(S)$ coincidem não são raras;
- para casos específicos, é possível obter caracterizações envolvendo estes cones e os cones associados ao operador de Kleene $S^{\star}$.

## Proposição

1. *Se $S$ é uma matriz irredutível definida, então*

$$\mathcal{V}^{\star}(S) = \mathcal{V}(S^{\star}) = \mathcal{V}^{\star}(S^{\star}).$$

2. *Se $S$ é uma matriz irredutível fortemente definida, então*

$$\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}^{\star}(S).$$

Destacamos que

- situações nas quais os cones $\mathcal{V}(S)$ e $\mathcal{V}^\star(S)$ coincidem não são raras;
- para casos específicos, é possível obter caracterizações envolvendo estes cones e os cones associados ao operador de Kleene $S^\star$.

## Proposição

1. *Se $S$ é uma matriz irredutível definida, então*

$$\mathcal{V}^\star(S) = \mathcal{V}(S^\star) = \mathcal{V}^\star(S^\star).$$

2. *Se $S$ é uma matriz irredutível fortemente definida, então*

$$\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}^\star(S).$$

# Tradução em Otimização de Médias

Obtemos novas formas de descrever corretores calibrados reescrevendo os itens do resultado anterior:

1. *para um custo $c_S$ com $m(c_S) = 0$, os corretores de $c_S$ coincidem com os corretores calibrados de $c_{S^\star}$, os quais, de fato, representam todos os corretores de $c_{S^\star}$;*

### Observação

Em particular, para um corretor calibrado $u$ associado a $c_S$, temos a caracterização

$$u(j) = \min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i) + c_{S^\star}(i,j)], \quad \forall j \in V(G).$$

2. *se, além de $m(c_S) = 0$, a função $c_S$ dá custo mínimo para todo ciclo de comprimento 1, então todo corretor de $c_S$ satisfaz a propriedade de calibração.*

# Tradução em Otimização de Médias

Obtemos novas formas de descrever corretores calibrados reescrevendo os itens do resultado anterior:

1. *para um custo $c_S$ com $m(c_S) = 0$, os corretores de $c_S$ coincidem com os corretores calibrados de $c_{S^\star}$, os quais, de fato, representam todos os corretores de $c_{S^\star}$;*

**Observação**

Em particular, para um corretor calibrado $u$ associado a $c_S$, temos a caracterização

$$u(j) = \min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i) + c_{S^\star}(i,j)], \quad \forall j \in V(G).$$

2. *se, além de $m(c_S) = 0$, a função $c_S$ dá custo mínimo para todo ciclo de comprimento 1, então todo corretor de $c_S$ satisfaz a propriedade de calibração.*

# Tradução em Otimização de Médias

Obtemos novas formas de descrever corretores calibrados reescrevendo os itens do resultado anterior:

1. *para um custo $c_S$ com $m(c_S) = 0$, os corretores de $c_S$ coincidem com os corretores calibrados de $c_{S^\star}$, os quais, de fato, representam todos os corretores de $c_{S^\star}$;*

**Observação**

Em particular, para um corretor calibrado $u$ associado a $c_S$, temos a caracterização

$$u(j) = \min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i) + c_{S^\star}(i,j)], \quad \forall j \in V(G).$$

2. *se, além de $m(c_S) = 0$, a função $c_S$ dá custo mínimo para todo ciclo de comprimento 1, então todo corretor de $c_S$ satisfaz a propriedade de calibração.*

# Tradução em Otimização de Médias

Obtemos novas formas de descrever corretores calibrados reescrevendo os itens do resultado anterior:

1. *para um custo* $c_S$ *com* $m(c_S) = 0$, *os corretores de* $c_S$ *coincidem com os corretores calibrados de* $c_{S^\star}$, *os quais, de fato, representam todos os corretores de* $c_{S^\star}$;

## Observação

Em particular, para um corretor calibrado $u$ associado a $c_S$, temos a caracterização

$$u(j) = \min_{i \overset{G}{\to} j} [u(i) + c_{S^\star}(i,j)], \quad \forall j \in V(G).$$

2. *se, além de* $m(c_S) = 0$, *a função* $c_S$ *dá custo mínimo para todo ciclo de comprimento* 1, *então todo corretor de* $c_S$ *satisfaz a propriedade de calibração.*

# Sumário

1 Operador de Kleene

2 Subautovetores
   Subgrafo crítico e propriedade separante
   Propriedades geométricas

3 Dicionário

# Dicionário entre álgebra *min-plus* e otimização de médias.

| ***Otimização de Médias*** | | **Álgebra *Min-plus*** |
|---|---|---|
| Custo sobre arestas | | Matriz |
| $c : A(G) \to \mathbb{R}$ | $\Longrightarrow$ | $S_c(i,j) = \begin{cases} c(j,i) & \text{se } M(j,i) = 1 \\ +\infty & \text{se } M(j,i) = 0 \end{cases}$ |
| $c_S(i,j) = S(j,i), \quad \forall\,(i,j) \in A(G)$ | $\Longleftarrow$ | $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ |
| Constante cíclica minimal | | Média cíclica minimal |
| $m(c) = \inf\{c(P) : P \text{ ciclo em } G\}$ | $\Longleftrightarrow$ | $\tau_S := \inf\left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \le i_0, \ldots, i_k \le n, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad k \ge 1 \end{array} \right\}$ |
| Corretor calibrado | | Autovetor |
| $u(j) = \min_{i \xrightarrow{G} j} [u(i) - c(i,j) - m(c)]$ | $\Longleftrightarrow$ | $S \otimes \vec{u} = \tau_S \odot \vec{u}$ |
| Potencial de Mañé | | Operador de Kleene |
| $\phi_c(i,j) = \inf\left\{ k(c(P) - m(c)) : \begin{array}{c} P \text{ caminho de } i \text{ a } j \\ \text{com comprimento } k \ge 1 \end{array} \right\}$ | | $\begin{aligned} S^\star &= I \oplus \big((-\tau_S) \odot S\big) \oplus \big((-\tau_S) \odot S\big)^{2^\otimes} \oplus \cdots \\ &= I \oplus \big((-\tau_S) \odot S\big)^{\infty} \end{aligned}$ |
| | $\phi_c(i,j) = S^{\infty}_{c-m(c)}(j,i), \qquad \forall\,(i,j) \in A(G)$ | |
| Corretor | | Subautovetor |
| $c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c) \ge 0$ | $\Longleftrightarrow$ | $\tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u}$ |
| Conjunto cíclico minimal | | Subgrafo crítico |
| $\mathcal{M}(c) := \{P \text{ ciclo em } G \,:\, c(P) = m(c)\}$ | $\Longleftrightarrow$ | $G_{\mathrm{Cr}} = (V_{\mathrm{Cr}}, A_{\mathrm{Cr}})$ |
| Corretor separante | | Vetor separante |
| $c(i,j) + u(i) - u(j) = m(c) \quad \Rightarrow$ $\exists\, Q$ ciclo com $c(Q) = m(c)$ e $(i,j) \in Q$ | $\Longleftrightarrow$ | $\big(D_{\vec{u}}^{-1^\otimes} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}\big)(i,j) = \tau_S, \quad \forall\,(j,i) \in A_{\mathrm{Cr}}$ <br> $\big(D_{\vec{u}}^{-1^\otimes} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}\big)(i,j) > \tau_S, \quad \forall\,(j,i) \notin A_{\mathrm{Cr}}$ |

# Bibliografia

E. Garibaldi e J. T. A. Gomes,
*Otimização de Médias sobre Grafos Orientados*,
Coleção publicações matemáticas (29 CBM) **12**, IMPA, 2013.

*Seções:* 5.3 e 5.4 (páginas 106 a 123);

P. Butkovič, H. Schneider e S. Sergeev,
On visualization scaling, subeigenvectors and Kleene stars in max algebra,
*Linear Algebra and its Applications* **431** (2009), 2395-2406.

M. Gondran e M. Minoux,
*Graphs, dioïds and semirings: new models and algorithms*,
Springer, 2008.

# Muito Obrigado!
# Fim.