29º Colóquio Brasileiro de Matemática

Rio de Janeiro – Julho, 2013

Otimização de Médias sobre Grafos Orientados

Aula 07 – Álgebra Min-Plus II

Eduardo Garibaldi   João Tiago Assunção Gomes

IMECC, Universidade Estadual de Campinas

Na **aula 06**, introduzimos as estruturas algébricas *min-plus*, dadas abaixo

$$(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes),$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus) \quad \text{e}$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes) \, .$$

Discutimos suas propriedades, comparando-as com as da estrutura algébrica usual (baseada em soma e produto).

Na **aula 06**, introduzimos as estruturas algébricas *min-plus*, dadas abaixo

$$(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes),$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus) \quad \text{e}$$

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes)\ .$$

Discutimos suas propriedades, comparando-as com as da estrutura algébrica usual (baseada em soma e produto).

Na **aula 06**, introduzimos as estruturas algébricas *min-plus*, dadas abaixo

$$(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes),$$

$$\big((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus\big) \quad \text{e}$$

$$\big((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes\big)\,.$$

Discutimos suas propriedades, comparando-as com as da estrutura algébrica usual (baseada em soma e produto).

Aula 07 – Álgebra Min-Plus II

Resumo:

- Dedicaremos atenção ao problema espectral *min-plus*: determinar autovalor τ_S e caracterizar autovetor $\vec{v}$ em

$$S \otimes \vec{v} = \tau_S \odot \vec{v},$$

  onde consideraremos as respectivas operações da álgebra *min-plus*.
- Reduziremos o problema dos pontos de entrega a um problema espectral segundo esta álgebra, associando os principais conceitos.

Aula 07 – Álgebra Min-Plus II

Resumo:

- Dedicaremos atenção ao problema espectral *min-plus*: determinar autovalor τ_S e caracterizar autovetor $\vec{v}$ em

$$S \otimes \vec{v} = \tau_S \odot \vec{v},$$

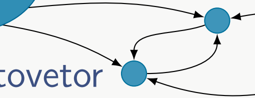
onde consideraremos as respectivas operações da álgebra *min-plus*.

- Reduziremos o problema dos pontos de entrega a um problema espectral segundo esta álgebra, associando os principais conceitos.

Sumário

Sumário

Problema de autovalor e autovetor



Nosso interesse vem a ser a busca de autovalores e autovetores no contexto da álgebra *min-plus*.

Dada matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$, examinaremos a equação

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

procurando por constantes $\tau \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e vetores $\vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ que a satisfazem.

O problema de autovalor e autovetor no contexto da álgebra *min-plus*, ao contrário das soluções para equação linear, possui caracterização completa com propriedades interessantes. Mostraremos,

- existência de autovalor e autovetor;

Problema de autovalor e autovetor

Nosso interesse vem a ser a busca de autovalores e autovetores no contexto da álgebra *min-plus*.

Dada matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$, examinaremos a equação

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

procurando por constantes $\tau \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e vetores $\vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ que a satisfazem.

O problema de autovalor e autovetor no contexto da álgebra *min-plus*, ao contrário das soluções para equação linear, possui caracterização completa com propriedades interessantes. Mostraremos,

- existência de autovalor e autovetor;

Problema de autovalor e autovetor

Nosso interesse vem a ser a busca de autovalores e autovetores no contexto da álgebra *min-plus*.

Dada matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$, examinaremos a equação

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

procurando por constantes $\tau \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e vetores $\vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ que a satisfazem.

O problema de autovalor e autovetor no contexto da álgebra *min-plus*, ao contrário das soluções para equação linear, possui caracterização completa com propriedades interessantes. Mostraremos,

- existência de autovalor e autovetor;
- unicidade do autovalor.

Problema de autovalor e autovetor

Nosso interesse vem a ser a busca de autovalores e autovetores no contexto da álgebra *min-plus*.

Dada matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$, examinaremos a equação

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

procurando por constantes $\tau \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e vetores $\vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ que a satisfazem.

O problema de autovalor e autovetor no contexto da álgebra *min-plus*, ao contrário das soluções para equação linear, possui caracterização completa com propriedades interessantes. Mostraremos,

- existência de autovalor e autovetor;
- unicidade do autovalor.

Problema de autovalor e autovetor

Nosso interesse vem a ser a busca de autovalores e autovetores no contexto da álgebra *min-plus*.

Dada matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$, examinaremos a equação

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

procurando por constantes $\tau \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e vetores $\vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ que a satisfazem.

O problema de autovalor e autovetor no contexto da álgebra *min-plus*, ao contrário das soluções para equação linear, possui caracterização completa com propriedades interessantes. Mostraremos,

- existência de autovalor e autovetor;
- unicidade do autovalor.

Antes, porém, chamaremos a atenção para a reescritura de tal problema

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

com a notação habitual, o que resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} \min\{S(1,1)+v_1,\ S(1,2)+v_2,\ \ldots,\ S(1,n)+v_n\} & = \tau + v_1 \\ \min\{S(2,1)+v_1,\ S(2,2)+v_2,\ \ldots,\ S(2,n)+v_n\} & = \tau + v_2 \\ & \vdots \\ \min\{S(n,1)+v_1,\ S(n,2)+v_2,\ \ldots,\ S(n,n)+v_n\} & = \tau + v_n \end{cases},$$

onde $S(i,j)$ denota a entrada (i,j) da matriz S.

Observação

Atente que, apesar da escrita linear $S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$ para a álgebra *min-plus*, trata-se, na realidade, de um problema intricado do ponto de vista operacional com relação à álgebra usual.

Antes, porém, chamaremos a atenção para a reescritura de tal problema

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

com a notação habitual, o que resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} \min\{S(1,1) + v_1,\ S(1,2) + v_2,\ \dots,\ S(1,n) + v_n\} & = \tau + v_1 \\ \min\{S(2,1) + v_1,\ S(2,2) + v_2,\ \dots,\ S(2,n) + v_n\} & = \tau + v_2 \\ & \vdots \\ \min\{S(n,1) + v_1,\ S(n,2) + v_2,\ \dots,\ S(n,n) + v_n\} & = \tau + v_n \end{cases},$$

onde $S(i,j)$ denota a entrada (i,j) da matriz S.

Observação

Atente que, apesar da escritura linear $S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$ para a álgebra *min-plus*, trata-se, na realidade, de um problema intricado do ponto de vista operacional com relação à álgebra usual.

Antes, porém, chamaremos a atenção para a reescritura de tal problema

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

com a notação habitual, o que resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} \min\{S(1,1) + v_1,\ S(1,2) + v_2,\ \ldots,\ S(1,n) + v_n\} & = \tau + v_1 \\ \min\{S(2,1) + v_1,\ S(2,2) + v_2,\ \ldots,\ S(2,n) + v_n\} & = \tau + v_2 \\ & \vdots \\ \min\{S(n,1) + v_1,\ S(n,2) + v_2,\ \ldots,\ S(n,n) + v_n\} & = \tau + v_n \end{cases},$$

onde $S(i,j)$ denota a entrada (i,j) da matriz S.

Observação

Atente que, apesar da escritura linear $S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$ para a álgebra *min-plus*, trata-se, na realidade, de um problema intricado do ponto de vista operacional com relação à álgebra usual.

Antes, porém, chamaremos a atenção para a reescritura de tal problema

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

com a notação habitual, o que resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} \min\{S(1,1)+v_1,\ S(1,2)+v_2,\ \ldots,\ S(1,n)+v_n\} & = \tau + v_1 \\ \min\{S(2,1)+v_1,\ S(2,2)+v_2,\ \ldots,\ S(2,n)+v_n\} & = \tau + v_2 \\ & \vdots \\ \min\{S(n,1)+v_1,\ S(n,2)+v_2,\ \ldots,\ S(n,n)+v_n\} & = \tau + v_n \end{cases},$$

onde $S(i,j)$ denota a entrada (i,j) da matriz S.

Observação

Atente que, apesar da escritura linear $S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$ para a álgebra *min-plus*, trata-se, na realidade, de um problema intricado do ponto de vista operacional com relação à álgebra usual.

Primeiramente, adaptamos para presente situação o conceito de irredutibilidade. Em termos precisos,

Definição

Dizemos que uma matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ é irredutível (no sentido *min-plus*) se

$$\forall\,(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \quad \exists\, k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad S^{k^{\otimes}}(i,j) \neq +\infty,$$

onde $S^{k^{\otimes}}(i,j)$ indica a entrada (i,j) da matriz produto *min-plus* $S^{k^{\otimes}}$.

Notação

Quando não houver possibilidade de confusão, ficará subentendido que a palavra irredutível se referirá, neste capítulo, ao sentido *min-plus*.

Primeiramente, adaptamos para presente situação o conceito de irredutibilidade. Em termos precisos,

Definição

Dizemos que uma matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ é irredutível (no sentido *min-plus*) se

$$\forall\, (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \quad \exists\, k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad S^{k^{\otimes}}(i,j) \neq +\infty,$$

onde $S^{k^{\otimes}}(i,j)$ indica a entrada (i,j) da matriz produto *min-plus* $S^{k^{\otimes}}$.

Notação

Quando não houver possibilidade de confusão, ficará subentendido que a palavra irredutível se referirá, neste capítulo, ao sentido *min-plus*.

Definição

Associada a uma matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ irredutível, introduzimos a constante

$$\tau_S := \inf \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \le i_0, i_1, \ldots, i_k \le n, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad k \ge 1 \end{array} \right\},$$

$$= \min \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \le i_0, i_1, \ldots, i_k \le n, \\ i_r \ne i_s \quad \text{se} \quad 0 \le r < s \le k-1, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad 1 \le k \le n \end{array} \right\}.$$

a qual receberá a denominação de *média cíclica minimal*.

Perceba que, como S é irredutível, $\tau_S \in \mathbb{R}$, já que

$$\tau_S \le \frac{1}{k(i,i)} \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k(i,i)-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \le i_1, \ldots, i_{k(i,i)-1} \le n \\ \text{e} \quad i_0 = i_{k(i,i)} = i \end{array} \right\}$$

$$\forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Definição

Associada a uma matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ irredutível, introduzimos a constante

$$\tau_S := \inf \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \;:\; \begin{array}{c} 1 \le i_0, i_1, \ldots, i_k \le n, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad k \ge 1 \end{array} \right\},$$

$$= \min \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \;:\; \begin{array}{c} 1 \le i_0, i_1, \ldots, i_k \le n, \\ i_r \ne i_s \quad \text{se} \quad 0 \le r < s \le k-1, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad 1 \le k \le n \end{array} \right\}.$$

a qual receberá a denominação de *média cíclica minimal*.

Perceba que, como S é irredutível, $\tau_S \in \mathbb{R}$, já que

$$\tau_S \le \frac{1}{k(i,i)} \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k(i,i)-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \;:\; \begin{array}{c} 1 \le i_1, \ldots, i_{k(i,i)-1} \le n \\ \text{e} \quad i_0 = i_{k(i,i)} = i \end{array} \right\}$$

$$\forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Definição

Associada a uma matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ irredutível, introduzimos a constante

$$\begin{aligned}\tau_S := \inf &\left\{ \frac{1}{k}\bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \;:\; \begin{array}{c} 1 \le i_0, i_1, \ldots, i_k \le n, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad k \ge 1 \end{array} \right\}, \\ = \min &\left\{ \frac{1}{k}\bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \;:\; \begin{array}{c} 1 \le i_0, i_1, \ldots, i_k \le n, \\ i_r \ne i_s \quad \text{se} \quad 0 \le r < s \le k-1, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad 1 \le k \le n \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

a qual receberá a denominação de *média cíclica minimal*.

Perceba que, como S é irredutível, $\tau_S \in \mathbb{R}$, já que

$$\begin{aligned}\tau_S &\le \frac{1}{k(i,i)} \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k(i,i)-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \;:\; \begin{array}{c} 1 \le i_1, \ldots, i_{k(i,i)-1} \le n \\ \text{e} \quad i_0 = i_{k(i,i)} = i \end{array} \right\} \\ &= \frac{S^{k(i,i)^{\otimes}}(i,i)}{k(i,i)} \ne +\infty, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n.\end{aligned}$$

Definição

Associada a uma matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ irredutível, introduzimos a constante

$$\begin{aligned}\tau_S := \inf &\left\{ \frac{1}{k}\bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \leq i_0, i_1, \ldots, i_k \leq n, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad k \geq 1 \end{array} \right\}, \\ = \min &\left\{ \frac{1}{k}\bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \leq i_0, i_1, \ldots, i_k \leq n, \\ i_r \neq i_s \quad \text{se} \quad 0 \leq r < s \leq k-1, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad 1 \leq k \leq n \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

a qual receberá a denominação de *média cíclica minimal*.

Perceba que, como S é irredutível, $\tau_S \in \mathbb{R}$, já que

$$\begin{aligned}\tau_S &\leq \frac{1}{k(i,i)} \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k(i,i)-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \leq i_1, \ldots, i_{k(i,i)-1} \leq n \\ \text{e} \quad i_0 = i_{k(i,i)} = i \end{array} \right\} \\ &= \frac{S^{k(i,i)^{\otimes}}(i,i)}{k(i,i)} \neq +\infty, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n.\end{aligned}$$

Apresentamos um relevante resultado preliminar que servirá como argumento de unicidade de autovalor e de caracterização de autovetor

Proposição

Dada uma matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$, suponha que existam constante $\gamma \in \mathbb{R}$ e vetor $\vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$, com $\vec{v} \neq (+\infty, \dots, +\infty)^\intercal$, tais que $S \otimes \vec{v} = \gamma \odot \vec{v}$. Então, $\gamma = \tau_S$ e todas as entradas do vetor $\vec{v}$ são reais, isto é, $v_i \neq +\infty$ para $1 \leq i \leq n$.

Para o principal resultado, necessitaremos ainda do seguinte lema.

Lema

Seja $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ matriz irredutível com $\tau_S = 0$. Considere a matriz S^∞ com entrada (i,j) dada por

$$S^\infty(i,j) := \inf_{k \geq 1} S^{k^\otimes}(i,j) = S(i,j) \oplus S^{2^\otimes}(i,j) \oplus S^{3^\otimes}(i,j) \oplus \dots$$

Então S^∞ está bem definida e possui todas as entradas reais, valendo

$$I \oplus S^\infty = I \oplus S \oplus S^{2^\otimes} \oplus \dots \oplus S^{(n-1)^\otimes}.$$

Apresentamos um relevante resultado preliminar que servirá como argumento de unicidade de autovalor e de caracterização de autovetor

Proposição

Dada uma matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$*, suponha que existam constante* $\gamma \in \mathbb{R}$ *e vetor* $\vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$*, com* $\vec{v} \neq (+\infty, \ldots, +\infty)^\intercal$*, tais que* $S \otimes \vec{v} = \gamma \odot \vec{v}$*. Então,* $\gamma = \tau_S$ *e todas as entradas do vetor* $\vec{v}$ *são reais, isto é,* $v_i \neq +\infty$ *para* $1 \leq i \leq n$*.*

Para o principal resultado, necessitaremos ainda do seguinte lema.

Lema

Seja $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ *matriz irredutível com* $\tau_S = 0$*. Considere a matriz* S^∞ *com entrada* (i, j) *dada por*

$$S^\infty(i,j) := \inf_{k \geq 1} S^{k^\otimes}(i,j) = S(i,j) \oplus S^{2^\otimes}(i,j) \oplus S^{3^\otimes}(i,j) \oplus \ldots$$

Então S^∞ *está bem definida e possui todas as entradas reais, valendo*

$$I \oplus S^\infty = I \oplus S \oplus S^{2^\otimes} \oplus \ldots \oplus S^{(n-1)^\otimes}.$$

Apresentamos um relevante resultado preliminar que servirá como argumento de unicidade de autovalor e de caracterização de autovetor

Proposição

Dada uma matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$, *suponha que existam constante* $\gamma \in \mathbb{R}$ *e vetor* $\vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n}$, *com* $\vec{v} \neq (+\infty, \ldots, +\infty)^{\mathsf{T}}$, *tais que* $S \otimes \vec{v} = \gamma \odot \vec{v}$. *Então,* $\gamma = \tau_S$ *e todas as entradas do vetor* $\vec{v}$ *são reais, isto é,* $v_i \neq +\infty$ *para* $1 \leq i \leq n$.

Para o principal resultado, necessitaremos ainda do seguinte lema.

Lema

Seja $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ *matriz irredutível com* $\tau_S = 0$. *Considere a matriz* S^∞ *com entrada* (i,j) *dada por*

$$S^\infty(i,j) := \inf_{k\geq 1} S^{k^\otimes}(i,j) = S(i,j) \oplus S^{2^\otimes}(i,j) \oplus S^{3^\otimes}(i,j) \oplus \ldots$$

Então S^∞ *está bem definida e possui todas as entradas reais, valendo*

$$I \oplus S^\infty = I \oplus S \oplus S^{2^\otimes} \oplus \ldots \oplus S^{(n-1)^\otimes}.$$

Apresentamos um relevante resultado preliminar que servirá como argumento de unicidade de autovalor e de caracterização de autovetor

Proposição

Dada uma matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$, *suponha que existam constante* $\gamma \in \mathbb{R}$ *e vetor* $\vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n}$, *com* $\vec{v} \neq (+\infty, \ldots, +\infty)^{\intercal}$, *tais que* $S \otimes \vec{v} = \gamma \odot \vec{v}$. *Então,* $\gamma = \tau_S$ *e todas as entradas do vetor* $\vec{v}$ *são reais, isto é,* $v_i \neq +\infty$ *para* $1 \leq i \leq n$.

Para o principal resultado, necessitaremos ainda do seguinte lema.

Lema

Seja $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ *matriz irredutível com* $\tau_S = 0$. *Considere a matriz* S^{∞} *com entrada* (i,j) *dada por*

$$S^{\infty}(i,j) := \inf_{k\geq 1} S^{k^{\otimes}}(i,j) = S(i,j) \oplus S^{2^{\otimes}}(i,j) \oplus S^{3^{\otimes}}(i,j) \oplus \ldots$$

Então S^{∞} *está bem definida e possui todas as entradas reais, valendo*

$$I \oplus S^{\infty} = I \oplus S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus \ldots \oplus S^{(n-1)^{\otimes}}.$$

Exibimos agora o resultado preponderante para o problema espectral *min-plus*.

Teorema (Perron-Frobenius – versão *min-plus*)

Dada matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$*, a constante* τ_S *é seu único autovalor e, a este associado, há autovetor* $\vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ *com todas as entradas reais, isto é,*

$$S \otimes \vec{u} = \tau_S \odot \vec{u},$$
$$u_i \neq +\infty, \qquad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Observação

Para saber mais sobre a afinidade entre o teorema clássico de Perron-Frobenius e a sua versão *min-plus*, indicamos o artigo [1], no qual, além de demonstração apresentada no livro texto, também se encontram outras quatro provas distintas para este teorema.

Exibimos agora o resultado preponderante para o problema espectral *min-plus*.

Teorema (Perron-Frobenius – versão *min-plus*)

Dada matriz irredutível $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$*, a constante* τ_S *é seu único autovalor e, a este associado, há autovetor* $\vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ *com todas as entradas reais, isto é,*

$$\begin{aligned} &S \otimes \vec{u} = \tau_S \odot \vec{u}, \\ &u_i \neq +\infty, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Observação

Para saber mais sobre a afinidade entre o teorema clássico de Perron-Frobenius e a sua versão *min-plus*, indicamos o artigo [1], no qual, além de demonstração apresentada no livro texto, também se encontram outras quatro provas distintas para este teorema.

Por fim, ainda sobre o resultado anterior, enfatizamos que em geral não é possível garantir a unicidade de autovetor.

Exemplo

Considere a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Já que as entradas da matriz S não são negativas, perceba então que $0 \leq \tau_S \leq S(1,1) = 0$. Desta forma, é imediata a verificação de que

$$\vec{v} = (0,1,0) \quad \text{e} \quad \vec{w} = (1,2,0)$$

são autovetores de S associados ao autovalor 0.

Por fim, ainda sobre o resultado anterior, enfatizamos que em geral não é possível garantir a unicidade de autovetor.

Exemplo

Considere a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Já que as entradas da matriz S não são negativas, perceba então que $0 \leq \tau_S \leq S(1,1) = 0$. Desta forma, é imediata a verificação de que

$$\vec{v} = (0,1,0) \quad \text{e} \quad \vec{w} = (1,2,0)$$

são autovetores de S associados ao autovalor 0.

Por fim, ainda sobre o resultado anterior, enfatizamos que em geral não é possível garantir a unicidade de autovetor.

Exemplo

Considere a matriz irredutível

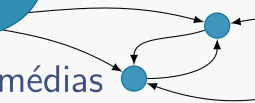
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Já que as entradas da matriz S não são negativas, perceba então que $0 \leq \tau_S \leq S(1,1) = 0$. Desta forma, é imediata a verificação de que

$$\vec{v} = (0,1,0) \quad \text{e} \quad \vec{w} = (1,2,0)$$

são autovetores de S associados ao autovalor 0.

Sumário



Tradução em otimização de médias

Começaremos a estabelecer um dicionário entre ambas as teorias:
otimização de médias e **álgebra min-plus**.

Mais concretamente,

dado G um grafo orientado, estipulamos que a dimensão do espaço n-dimensional *min-plus* será igual a cardinalidade de conjunto dos vértices $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Há uma bijeção natural entre funções custo sobre arestas e matrizes da álgebra *min-plus*. A ideia essencial que torna isto possível:

codificar a ausência de uma certa aresta no grafo pelo elemento $+\infty$, devido às propriedades algébricas de tal elemento.

Esta posição se distingue também por permitir levar em conta grafo completo ao se convencionar como excessivamente custosas arestas em $(V(G) \times V(G)) \setminus A(G)$.

Tradução em otimização de médias

Começaremos a estabelecer um dicionário entre ambas as teorias:
otimização de médias e **álgebra min-plus**.

Mais concretamente,

dado G um grafo orientado, estipulamos que a dimensão do espaço n-dimensional *min-plus* será igual a cardinalidade de conjunto dos vértices $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$.

Há uma bijeção natural entre funções custo sobre arestas e matrizes da álgebra *min-plus*. A ideia essencial que torna isto possível:

codificar a ausência de uma certa aresta no grafo pelo elemento $+\infty$, devido às propriedades algébricas de tal elemento.

Tradução em otimização de médias

Começaremos a estabelecer um dicionário entre ambas as teorias:
otimização de médias e **álgebra min-plus**.

Mais concretamente,

dado G um grafo orientado, estipulamos que a dimensão do espaço n-dimensional *min-plus* será igual a cardinalidade de conjunto dos vértices $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Há uma bijeção natural entre funções custo sobre arestas e matrizes da álgebra *min-plus*. A ideia essencial que torna isto possível:

codificar a ausência de uma certa aresta no grafo pelo elemento $+\infty$, devido às propriedades algébricas de tal elemento.

Esta posição se distingue também por permitir levar em conta grafo completo ao se convencionar como excessivamente custosas arestas em $(V(G) \times V(G)) \setminus A(G)$.

Tradução em otimização de médias

Começaremos a estabelecer um dicionário entre ambas as teorias:
otimização de médias e **álgebra min-plus**.

Mais concretamente,

dado G um grafo orientado, estipulamos que a dimensão do espaço n-dimensional *min-plus* será igual a cardinalidade de conjunto dos vértices $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Há uma bijeção natural entre funções custo sobre arestas e matrizes da álgebra *min-plus*. A ideia essencial que torna isto possível:

codificar a ausência de uma certa aresta no grafo pelo elemento $+\infty$*, devido às propriedades algébricas de tal elemento.*

Esta posição se distingue também por permitir levar em conta grafo completo ao se convencionar como excessivamente custosas arestas em $\big(V(G) \times V(G)\big) \setminus A(G)$.

$c \mapsto S_c$

Dados grafo orientado $G = (V, A)$, com sua respectiva matriz de transição M, e função custo c a valores reais sobre as arestas de G, associamos de modo canônico matriz S_c cujas entradas, pertencentes ao conjunto real *min-plus*, são dadas por

$$S_c(i,j) = \begin{cases} c(j,i) & \text{se } M(j,i) = 1 \\ +\infty & \text{se } M(j,i) = 0 \end{cases}.$$

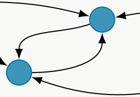
Exemplo

Com respeito à representação matricial para o custo, temos

$$c = \begin{bmatrix} * & 3 & 4 & 80 \\ 78 & * & 0 & * \\ 13 & 2 & * & -1 \\ * & * & -40 & 0 \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad S_c = \begin{bmatrix} +\infty & 78 & 13 & +\infty \\ 3 & +\infty & 2 & +\infty \\ 4 & 0 & +\infty & -40 \\ 80 & +\infty & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

a qual, na prática, significa a substituição do símbolo $*$ pelo elemento $+\infty$ do conjunto real *min-plus* seguida de transposição matricial.

$c \mapsto S_c$



Dados grafo orientado $G = (V, A)$, com sua respectiva matriz de transição M, e função custo c a valores reais sobre as arestas de G, associamos de modo canônico matriz S_c cujas entradas, pertencentes ao conjunto real *min-plus*, são dadas por

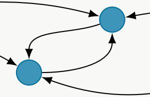
$$S_c(i,j) = \begin{cases} c(j,i) & \text{se } M(j,i) = 1 \\ +\infty & \text{se } M(j,i) = 0 \end{cases}.$$

Exemplo

Com respeito à representação matricial para o custo, temos

$$c = \begin{bmatrix} * & 3 & 4 & 80 \\ 78 & * & 0 & * \\ 13 & 2 & * & -1 \\ * & * & -40 & 0 \end{bmatrix} \mapsto S_c = \begin{bmatrix} +\infty & 78 & 13 & +\infty \\ 3 & +\infty & 2 & +\infty \\ 4 & 0 & +\infty & -40 \\ 80 & +\infty & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

a qual, na prática, significa a substituição do símbolo $*$ pelo elemento $+\infty$ do conjunto real *min-plus* seguida de transposição matricial.



$c \mapsto S_c$

Dados grafo orientado $G = (V, A)$, com sua respectiva matriz de transição M, e função custo c a valores reais sobre as arestas de G, associamos de modo canônico matriz S_c cujas entradas, pertencentes ao conjunto real *min-plus*, são dadas por

$$S_c(i,j) = \begin{cases} c(j,i) & \text{se } M(j,i) = 1 \\ +\infty & \text{se } M(j,i) = 0 \end{cases}.$$

Exemplo

Com respeito à representação matricial para o custo, temos

$$c = \begin{bmatrix} * & 3 & 4 & 80 \\ 78 & * & 0 & * \\ 13 & 2 & * & -1 \\ * & * & -40 & 0 \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad S_c = \begin{bmatrix} +\infty & 78 & 13 & +\infty \\ 3 & +\infty & 2 & +\infty \\ 4 & 0 & +\infty & -40 \\ 80 & +\infty & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

a qual, na prática, significa a substituição do símbolo $*$ pelo elemento $+\infty$ do conjunto real *min-plus* seguida de transposição matricial.

$S \mapsto c_S$

A correspondência inversa também é facilmente explicitada.

Seja S uma matriz $n \times n$ na álgebra matricial *min-plus*. Considere o grafo G com

- conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$;
- matriz de transição associada definida por

$$M(i,j) = \mathbb{1}_{A(G)}(i,j) \begin{cases} 1 & \text{se } S(j,i) \neq +\infty \\ 0 & \text{se } S(j,i) = +\infty \end{cases}, \quad \forall\,(i,j) \in V(G) \times V(G).$$

Define-se, por conseguinte, função custo sobre as arestas de G ao se introduzir

$$c_S : A(G) \to \mathbb{R} \text{ dada por } c_S(i,j) = S(j,i) \text{ para todo } (i,j) \in A(G).$$

$S \mapsto c_S$

A correspondência inversa também é facilmente explicitada.

Seja S uma matriz $n \times n$ na álgebra matricial *min-plus*. Considere o grafo G com

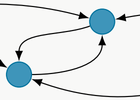
- conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$;
- matriz de transição associada definida por

$$M(i,j) = \mathbb{1}_{A(G)}(i,j) \begin{cases} 1 & \text{se } S(j,i) \neq +\infty \\ 0 & \text{se } S(j,i) = +\infty \end{cases}, \quad \forall\, (i,j) \in V(G) \times V(G).$$

Define-se, por conseguinte, função custo sobre as arestas de G ao se introduzir

$$c_S : A(G) \to \mathbb{R} \text{ dada por } c_S(i,j) = S(j,i) \text{ para todo } (i,j) \in A(G).$$

$S \mapsto c_S$



A correspondência inversa também é facilmente explicitada.

Seja S uma matriz $n \times n$ na álgebra matricial *min-plus*. Considere o grafo G com

- conjunto de vértices $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$;
- matriz de transição associada definida por

$$M(i,j) = \mathbb{1}_{A(G)}(i,j) \begin{cases} 1 & \text{se } S(j,i) \neq +\infty \\ 0 & \text{se } S(j,i) = +\infty \end{cases}, \quad \forall\, (i,j) \in V(G) \times V(G).$$

Define-se, por conseguinte, função custo sobre as arestas de G ao se introduzir

$c_S : A(G) \to \mathbb{R}$ dada por $c_S(i,j) = S(j,i)$ para todo $(i,j) \in A(G)$.

Exemplo

Primeiramente note que, para a matriz

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 56 & +\infty & 9 \\ 3 & 4 & +\infty & -38 \\ 78 & +\infty & 2 & -6 \\ -9 & +\infty & 45 & +\infty \end{bmatrix},$$

obtemos a matriz de transição

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sobre as arestas do grafo G, com vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, a esta matriz associado, podemos graficamente representar o custo c_S como acima.

Exemplo

Primeiramente note que, para a matriz

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 56 & +\infty & 9 \\ 3 & 4 & +\infty & -38 \\ 78 & +\infty & 2 & -6 \\ -9 & +\infty & 45 & +\infty \end{bmatrix},$$

obtemos a matriz de transição

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sobre as arestas do grafo G, com vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, a esta matriz associado, podemos graficamente representar o custo c_S como acima.

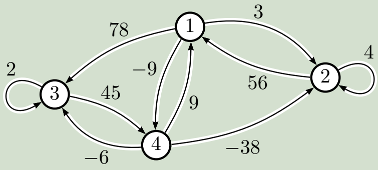
Exemplo

Primeiramente note que, para a matriz

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 56 & +\infty & 9 \\ 3 & 4 & +\infty & -38 \\ 78 & +\infty & 2 & -6 \\ -9 & +\infty & 45 & +\infty \end{bmatrix},$$

obtemos a matriz de transição

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Sobre as arestas do grafo G, com vértices $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, a esta matriz associado, podemos graficamente representar o custo c_S como acima.

Irredutibilidade

Destacamos também que os conceitos

- de irredutibilidade para matriz de transição M, isto é,

$$\forall\,(i,j) \in V \times V, \quad \exists\, k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad M^k(i,j) > 0 \quad \text{e}$$

- de irredutibilidade no sentido *min-plus* para matriz S_c, ou seja,

$$\forall\,(i,j) \in V \times V, \quad \exists\, k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad S_c^{k^{\otimes}}(i,j) \neq +\infty,$$

são equivalentes à conexidade do grafo G.

Observação

Deste ponto em diante, sempre faremos a suposição de irredutibilidade no sentido *min-plus*.

Irredutibilidade

Destacamos também que os conceitos

- de irredutibilidade para matriz de transição M, isto é,

$$\forall\,(i,j) \in V \times V, \quad \exists\, k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad M^k(i,j) > 0 \quad \text{e}$$

- de irredutibilidade no sentido *min-plus* para matriz S_c, ou seja,

$$\forall\,(i,j) \in V \times V, \quad \exists\, k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad S_c^{k^{\otimes}}(i,j) \neq +\infty,$$

são equivalentes à conexidade do grafo G.

Observação

Deste ponto em diante, sempre faremos a suposição de irredutibilidade no sentido *min-plus*.

Irredutibilidade

Destacamos também que os conceitos

- de irredutibilidade para matriz de transição M, isto é,

$$\forall (i,j) \in V \times V, \quad \exists\, k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad M^k(i,j) > 0 \quad \text{e}$$

- de irredutibilidade no sentido *min-plus* para matriz S_c, ou seja,

$$\forall (i,j) \in V \times V, \quad \exists\, k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad S_c^{k^{\otimes}}(i,j) \neq +\infty,$$

são equivalentes à conexidade do grafo G.

Observação

Deste ponto em diante, sempre faremos a suposição de irredutibilidade no sentido *min-plus*.

Irredutibilidade

Destacamos também que os conceitos

- de irredutibilidade para matriz de transição M, isto é,

$$\forall (i,j) \in V \times V, \quad \exists\, k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad M^k(i,j) > 0 \quad \text{e}$$

- de irredutibilidade no sentido *min-plus* para matriz S_c, ou seja,

$$\forall (i,j) \in V \times V, \quad \exists\, k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad S_c^{k^{\otimes}}(i,j) \neq +\infty,$$

são equivalentes à conexidade do grafo G.

Observação

Deste ponto em diante, sempre faremos a suposição de irredutibilidade no sentido *min-plus*.

Observação

Para melhor visualizar a relação entre irredutibilidade no sentido *min-plus* e a conexidade do grafo associado, note que as entradas da matriz $S_c^{k^{\otimes}}$ podem ser explicitadas da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
S_c^{k^{\otimes}}(i,j) &= \min\left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \le i_1, \ldots, i_{k-1} \le n, \\ i_0 = i \text{ e } i_k = j \end{array} \right\} \\
&= \min\left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \le i_1, \ldots, i_{k-1} \le n, \\ S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \neq +\infty, \ \forall \ell \\ i_0 = i \text{ e } i_k = j \end{array} \right\} \\
&= \min\left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_{\ell+1}, i_\ell) \ : \ j = i_k \overset{G}{\to} i_{k-1} \overset{G}{\to} \cdots \overset{G}{\to} i_0 = i \right\} \\
&= k \min\left\{ c(P) \ : \ \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \text{ conectando} \\ j \text{ a } i \text{ de comprimento } k \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

Observação

Para melhor visualizar a relação entre irredutibilidade no sentido *min-plus* e a conexidade do grafo associado, note que as entradas da matriz $S_c^{k^{\otimes}}$ podem ser explicitadas da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
S_c^{k^{\otimes}}(i,j) &= \min\left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \ :\ \begin{array}{c} 1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i \text{ e } i_k = j \end{array} \right\} \\
&= \min\left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \ :\ \begin{array}{c} 1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \neq +\infty, \ \forall \ell \\ i_0 = i \text{ e } i_k = j \end{array} \right\} \\
&= \min\left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_{\ell+1}, i_\ell) \ :\ j = i_k \xrightarrow{G} i_{k-1} \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} i_0 = i \right\} \\
&= k \min\left\{ c(P) \ :\ \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \text{ conectando} \\ j \text{ a } i \text{ de comprimento } k \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

Observação

Para melhor visualizar a relação entre irredutibilidade no sentido *min-plus* e a conexidade do grafo associado, note que as entradas da matriz $S_c^{k^{\otimes}}$ podem ser explicitadas da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
S_c^{k^{\otimes}}(i,j) &= \min\left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i \text{ e } i_k = j \end{array} \right\} \\
&= \min\left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \neq +\infty, \ \forall \ell \\ i_0 = i \text{ e } i_k = j \end{array} \right\} \\
&= \min\left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_{\ell+1}, i_\ell) \ : \ j = i_k \xrightarrow{G} i_{k-1} \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} i_0 = i \right\} \\
&= k \min\left\{ c(P) \ : \ \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \text{ conectando} \\ j \text{ a } i \text{ de comprimento } k \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

Observação

Para melhor visualizar a relação entre irredutibilidade no sentido *min-plus* e a conexidade do grafo associado, note que as entradas da matriz $S_c^{k^{\otimes}}$ podem ser explicitadas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
S_c^{k^{\otimes}}(i,j) &= \min\left\{\sum_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i \text{ e } i_k = j \end{array} \right\} \\
&= \min\left\{\sum_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \neq +\infty, \ \forall \ell \\ i_0 = i \text{ e } i_k = j \end{array} \right\} \\
&= \min\left\{\sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_{\ell+1}, i_\ell) \ : \ j = i_k \xrightarrow{G} i_{k-1} \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} i_0 = i \right\} \\
&= k \min\left\{ c(P) \ : \ \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \text{ conectando} \\ j \text{ a } i \text{ de comprimento } k \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

τ_S e $m(c)$

Para revelar vínculos mais fortes,

> focamos na interpretação do significado do autovalor do problema espectral *min-plus*.

Utilizando a descrição das entradas de $S_c^{k^{\otimes}}$ obtida anteriormente nos fornece caracterização para a constante cíclica minimal:

$$
\begin{aligned}
m(c) &= \inf_{k \geq 1} \frac{1}{k} \min_{i \in V(G)} S_c^{k^{\otimes}}(i,i) \\
&= \inf \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \;:\; \begin{array}{c} 1 \leq i_0, i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad k \geq 1 \end{array} \right\} \\
&= \tau_{S_c}.
\end{aligned}
$$

Em outros termos, $m(c)$ coincide com a média cíclica minimal τ_{S_c}, a qual, devido à irredutibilidade, também é o único autovalor para S_c segundo a versão *min-plus* para o Teorema de Perron-Frobenius.

τ_S e $m(c)$

Para revelar vínculos mais fortes,

focamos na interpretação do significado do autovalor do problema espectral *min-plus*.

Utilizando a descrição das entradas de $S_c^{k^{\otimes}}$ obtida anteriormente nos fornece caracterização para a constante cíclica minimal:

$$
\begin{aligned}
m(c) &= \inf_{k \geq 1} \frac{1}{k} \min_{i \in V(G)} S_c^{k^{\otimes}}(i,i) \\
&= \inf \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \;:\; \begin{array}{c} 1 \leq i_0, i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad k \geq 1 \end{array} \right\} \\
&= \tau_{S_c}.
\end{aligned}
$$

Em outros termos, $m(c)$ coincide com a média cíclica minimal τ_{S_c}, a qual, devido à irredutibilidade, também é o único autovalor para S_c segundo a versão *min-plus* para o Teorema de Perron-Frobenius.

τ_S e $m(c)$

Para revelar vínculos mais fortes,

focamos na interpretação do significado do autovalor do problema espectral *min-plus*.

Utilizando a descrição das entradas de $S_c^{k^\otimes}$ obtida anteriormente nos fornece caracterização para a constante cíclica minimal:

$$
\begin{aligned}
m(c) &= \inf_{k \geq 1} \frac{1}{k} \min_{i \in V(G)} S_c^{k^\otimes}(i,i) \\
&= \inf \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \leq i_0, i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad k \geq 1 \end{array} \right\} \\
&= \tau_{S_c}.
\end{aligned}
$$

Em outros termos, $m(c)$ coincide com a média cíclica minimal τ_{S_c}, a qual, devido à irredutibilidade, também é o único autovalor para S_c segundo a versão *min-plus* para o Teorema de Perron-Frobenius.

τ_S e $m(c)$

Para revelar vínculos mais fortes,

> focamos na interpretação do significado do autovalor do problema espectral *min-plus*.

Utilizando a descrição das entradas de $S_c^{k^{\otimes}}$ obtida anteriormente nos fornece caracterização para a constante cíclica minimal:

$$
\begin{aligned}
m(c) &= \inf_{k\geq 1} \frac{1}{k} \min_{i\in V(G)} S_c^{k^{\otimes}}(i,i) \\
&= \inf \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \leq i_0, i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad k \geq 1 \end{array} \right\} \\
&= \tau_{S_c}.
\end{aligned}
$$

Em outros termos, $m(c)$ coincide com a média cíclica minimal τ_{S_c}, a qual, devido à irredutibilidade, também é o único autovalor para S_c segundo a versão *min-plus* para o Teorema de Perron-Frobenius.

τ_S e $m(c)$

Para revelar vínculos mais fortes,

focamos na interpretação do significado do autovalor do problema espectral *min-plus*.

Utilizando a descrição das entradas de $S_c^{k^{\otimes}}$ obtida anteriormente nos fornece caracterização para a constante cíclica minimal:

$$
\begin{aligned}
m(c) &= \inf_{k\geq 1} \frac{1}{k} \min_{i\in V(G)} S_c^{k^{\otimes}}(i,i) \\
&= \inf \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \; : \; \begin{array}{c} 1 \leq i_0, i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad k \geq 1 \end{array} \right\} \\
&= \tau_{S_c}.
\end{aligned}
$$

Em outros termos, $m(c)$ coincide com a média cíclica minimal τ_{S_c}, a qual, devido à irredutibilidade, também é o único autovalor para S_c segundo a versão *min-plus* para o Teorema de Perron-Frobenius.

Autovetores e Corretores Calibrados

Note agora que a transformação linear (para álgebra *min-plus*) $T_{S_c} : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$, naturalmente associado à matriz S_c, é dada explicitamente por

$$T_{S_c}(\vec{v}) = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot (S_c(1,i), S_c(2,i), \ldots, S_c(n,i))^{\intercal},$$

$$\left(T_{S_c}(\vec{v})\right)_j = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \otimes S_c(j,i) = \min_{i \xrightarrow{G} j}[v(i) + c(i,j)], \qquad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Uma consequência imediata deste fato é que

os autovetores (segundo a álgebra *min-plus*) de S_c são de corretores calibrados para o custo c e *vice-versa*.

Autovetores e Corretores Calibrados

Note agora que a transformação linear (para álgebra *min-plus*) $T_{S_c} : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$, naturalmente associado à matriz S_c, é dada explicitamente por

$$T_{S_c}(\vec{v}) = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot (S_c(1,i), S_c(2,i), \ldots, S_c(n,i))^{\mathsf{T}} \,,$$

$$\left(T_{S_c}(\vec{v})\right)_j = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \otimes S_c(j,i) = \min_{i \xrightarrow{G} j}[v(i) + c(i,j)], \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Uma consequência imediata deste fato é que

os autovetores (segundo a álgebra *min-plus*) de S_c são de corretores calibrados para o custo c e *vice-versa*.

Autovetores e Corretores Calibrados

Note agora que a transformação linear (para álgebra *min-plus*) $T_{S_c} : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$, naturalmente associado à matriz S_c, é dada explicitamente por

$$T_{S_c}(\vec{v}) = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot (S_c(1,i), S_c(2,i), \ldots, S_c(n,i))^{\intercal} \,,$$

$$\left(T_{S_c}(\vec{v})\right)_j = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \otimes S_c(j,i) = \min_{i \xrightarrow{G} j}[v(i) + c(i,j)], \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Uma consequência imediata deste fato é que

os autovetores (segundo a álgebra *min-plus*) de S_c são de corretores calibrados para o custo c e *vice-versa*.

Para isto confirmar, basta observar que, dado um autovetor $\vec{u}$, temos as igualdades vetoriais

$$T_{S_c}(\vec{u}) = S_c \otimes \vec{u} = \tau_{S_c} \odot \vec{u} = m(c) \odot \vec{u},$$

as quais apresentadas em termos de suas entradas nos fornecem a propriedade de calibração

$$\min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i) + c(i,j)] = \left(T_{S_c}(\vec{u})\right)_j = m(c) \otimes u_j = m(c) + u(j).$$

Em particular,

a versão *min-plus* do Teorema de Perron-Frobenius é também um resultado sobre a existência de corretores calibrados.

Note que decorre de forma análoga a recíproca, isto é, o fato de corretores calibrados para o custo c definirem autovetores para a matriz S_c.

Para isto confirmar, basta observar que, dado um autovetor $\vec{u}$, temos as igualdades vetoriais

$$T_{S_c}(\vec{u}) = S_c \otimes \vec{u} = \tau_{S_c} \odot \vec{u} = m(c) \odot \vec{u},$$

as quais apresentadas em termos de suas entradas nos fornecem a propriedade de calibração

$$\min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i) + c(i,j)] = \left(T_{S_c}(\vec{u})\right)_j = m(c) \otimes u_j = m(c) + u(j).$$

Em particular,

a versão *min-plus* do Teorema de Perron-Frobenius é também um resultado sobre a existência de corretores calibrados.

Para isto confirmar, basta observar que, dado um autovetor $\vec{u}$, temos as igualdades vetoriais

$$T_{S_c}(\vec{u}) = S_c \otimes \vec{u} = \tau_{S_c} \odot \vec{u} = m(c) \odot \vec{u},$$

as quais apresentadas em termos de suas entradas nos fornecem a propriedade de calibração

$$\min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i) + c(i,j)] = \left(T_{S_c}(\vec{u})\right)_j = m(c) \otimes u_j = m(c) + u(j).$$

Em particular,

a versão *min-plus* do Teorema de Perron-Frobenius é também um resultado sobre a existência de corretores calibrados.

Note que decorre de forma análoga a recíproca, isto é, o fato de corretores calibrados para o custo c definirem autovetores para a matriz S_c.

Para isto confirmar, basta observar que, dado um autovetor $\vec{u}$, temos as igualdades vetoriais

$$T_{S_c}(\vec{u}) = S_c \otimes \vec{u} = \tau_{S_c} \odot \vec{u} = m(c) \odot \vec{u},$$

as quais apresentadas em termos de suas entradas nos fornecem a propriedade de calibração

$$\min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i) + c(i,j)] = \left(T_{S_c}(\vec{u})\right)_j = m(c) \otimes u_j = m(c) + u(j).$$

Em particular,

a versão *min-plus* do Teorema de Perron-Frobenius é também um resultado sobre a existência de corretores calibrados.

Note que decorre de forma análoga a recíproca, isto é, o fato de corretores calibrados para o custo c definirem autovetores para a matriz S_c.

Sumário

Dicionário entre álgebra *min-plus* e otimização de médias.

Otimização de Médias		**Álgebra *Min-plus***
Custo sobre arestas		Matriz
$c: A(G) \to \mathbb{R}$	$\Longrightarrow$	$S_c(i,j) = \begin{cases} c(j,i) & \text{se } M(j,i) = 1 \\ +\infty & \text{se } M(j,i) = 0 \end{cases}$
$c_S(i,j) = S(j,i), \quad \forall\,(i,j) \in A(G)$	$\Longleftarrow$	$S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$
Constante cíclica minimal		Média cíclica minimal
$m(c) = \inf\{c(P) : P \text{ ciclo em } G\}$	$\Longleftrightarrow$	$\tau_S := \inf \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \le i_0, \ldots, i_k \le n, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad k \ge 1 \end{array} \right\}$
Corretor calibrado		Autovetor
$u(j) = \min_{i \overset{G}{\to} j} [u(i) - c(i,j) - m(c)]$	$\Longleftrightarrow$	$S \otimes \vec{u} = \tau_S \odot \vec{u}$
Potencial de Mañé		Operador de Kleene
$\phi_c(i,j) = \inf \left\{ k(c(P) - m(c)) : \begin{array}{c} P \text{ caminho de } i \text{ a } j \\ \text{com comprimento } k \ge 1 \end{array} \right\}$		$\begin{aligned} S^\star &= I \oplus \big((-\tau_S) \odot S\big) \oplus \big((-\tau_S) \odot S\big)^{2^\otimes} \oplus \cdots \\ &= I \oplus \big((-\tau_S) \odot S\big)^{\infty} \end{aligned}$
	$\phi_c(i,j) = S^{\infty}_{c-m(c)}(j,i), \qquad \forall\,(i,j) \in A(G)$	
Corretor		Subautovetor
$c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c) \ge 0$	$\Longleftrightarrow$	$\tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u}$
Conjunto cíclico minimal		Subgrafo crítico
$\mathcal{M}(c) := \{P \text{ ciclo em } G : c(P) = m(c)\}$	$\Longleftrightarrow$	$G_{\mathrm{Cr}} = (V_{\mathrm{Cr}}, A_{\mathrm{Cr}})$
Corretor separante		Vetor separante
$c(i,j) + u(i) - u(j) = m(c) \quad \Rightarrow$ $\exists Q$ ciclo com $c(Q) = m(c)$ e $(i,j) \in Q$	$\Longleftrightarrow$	$\big(D_{\vec{u}}^{-1^\otimes} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}\big)(i,j) = \tau_S, \quad \forall\,(j,i) \in A_{\mathrm{Cr}}$ $\big(D_{\vec{u}}^{-1^\otimes} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}\big)(i,j) > \tau_S, \quad \forall\,(j,i) \notin A_{\mathrm{Cr}}$

Bibliografia

E. Garibaldi e J. T. A. Gomes,
Otimização de Médias sobre Grafos Orientados,
Coleção publicações matemáticas (29 CBM) **12**, IMPA, 2013.

Subseções: 5.1.1 e 5.1.2 (páginas 94 a 106);

R. B. Bapat,
A max version of the Perron-Frobenius theorem,
Linear Algebra and its Applications **275-276** (1998), 3-18.

M. Gondran e M. Minoux,
Graphs, dioïds and semirings: new models and algorithms,
Springer, 2008.

Sinopse da Aula 08

- Discutiremos o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \ldots,$$

  responsável pela caracterização do operador de Kleene $S^{\star}$

- Complementaremos a lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.
- Estenderemos o conceito de autovetores introduzindo a noção de subautovetores.
- Apresentaremos o subgrafo crítico (em correspondência direta com o conjunto cíclico minimal) para poder caracterizar processo de renormalização e discutir a noção de subautovetor separante.
- Faremos uma análise geométrica dos conjuntos formados pelos autovalores e subautovetores.

Sinopse da Aula 08

- Discutiremos o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \ldots,$$

  responsável pela caracterização do operador de Kleene $S^{\star}$
- Complementaremos a lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.
- Estenderemos o conceito de autovetores introduzindo a noção de subautovetores.
- Apresentaremos o subgrafo crítico (em correspondência direta com o conjunto cíclico minimal) para poder caracterizar processo de renormalização e discutir a noção de subautovetor separante.
- Faremos uma análise geométrica dos conjuntos formados pelos autovalores e subautovetores.

Sinopse da Aula 08

- Discutiremos o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \ldots,$$

  responsável pela caracterização do operador de Kleene $S^{\star}$
- Complementaremos a lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.
- Estenderemos o conceito de autovetores introduzindo a noção de subautovetores.
- Apresentaremos o subgrafo crítico (em correspondência direta com o conjunto cíclico minimal) para poder caracterizar processo de renormalização e discutir a noção de subautovetor separante.
- Faremos uma análise geométrica dos conjuntos formados pelos autovalores e subautovetores.

Sinopse da Aula 08

- Discutiremos o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \ldots,$$

  responsável pela caracterização do operador de Kleene $S^{\star}$
- Complementaremos a lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.
- Estenderemos o conceito de autovetores introduzindo a noção de subautovetores.
- Apresentaremos o subgrafo crítico (em correspondência direta com o conjunto cíclico minimal) para poder caracterizar processo de renormalização e discutir a noção de subautovetor separante.
- Faremos uma análise geométrica dos conjuntos formados pelos autovalores e subautovetores.

Sinopse da Aula 08

- Discutiremos o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^{\otimes}} \oplus \ldots,$$

  responsável pela caracterização do operador de Kleene $S^\star$
- Complementaremos a lista de relações entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias.
- Estenderemos o conceito de autovetores introduzindo a noção de subautovetores.
- Apresentaremos o subgrafo crítico (em correspondência direta com o conjunto cíclico minimal) para poder caracterizar processo de renormalização e discutir a noção de subautovetor separante.
- Faremos uma análise geométrica dos conjuntos formados pelos autovalores e subautovetores.

Até a próxima aula!