29º Colóquio Brasileiro de Matemática
Rio de Janeiro – Julho, 2013

Otimização de Médias sobre Grafos Orientados

Aula 01 – Problema dos pontos de entrega

Eduardo Garibaldi   João Tiago Assunção Gomes
IMECC, Universidade Estadual de Campinas

Aula 01 – Problema dos pontos de entrega

Resumo:

- Apresentam-se o problema dos pontos de entrega e os questionamentos naturais daí decorrentes.
- São introduzidas as noções básicas da teoria de grafos.
- Em conclusão, começamos a formalizar matematicamente o problema dos pontos de entrega.

Monitoria: exercícios 1.1 a 1.7.

Aula 01 – Problema dos pontos de entrega

Resumo:

- Apresentam-se o problema dos pontos de entrega e os questionamentos naturais daí decorrentes.
- São introduzidas as noções básicas da teoria de grafos.
- Em conclusão, começamos a formalizar matematicamente o problema dos pontos de entrega.

Monitoria: exercícios 1.1 a 1.7.

Aula 01 – Problema dos pontos de entrega

Resumo:

- Apresentam-se o problema dos pontos de entrega e os questionamentos naturais daí decorrentes.
- São introduzidas as noções básicas da teoria de grafos.
- Em conclusão, começamos a formalizar matematicamente o problema dos pontos de entrega.

Monitoria: exercícios 1.1 a 1.7.

Aula 01 – Problema dos pontos de entrega

Resumo:

- Apresentam-se o problema dos pontos de entrega e os questionamentos naturais daí decorrentes.
- São introduzidas as noções básicas da teoria de grafos.
- Em conclusão, começamos a formalizar matematicamente o problema dos pontos de entrega.

Monitoria: exercícios 1.1 a 1.7.

Sumário

Sumário

Protótipo de questão

A indagação que sintetiza nossos objetivos, é dada pela pergunta:

Como pode uma empresa de distribuição de mercadorias escolher quais os pontos em uma metrópole nos quais estabelecer sua sede operacional significa ter a sua disposição o maior número de rotas com custo médio minimal para explorar?

- Do ponto de vista do distribuidor, todos os pontos de entrega sobre uma certa rota com custo médio minimal são avaliados com idêntica importância em termos de potencial econômico.
- Tal análise permite que trechos com custos mais elevados não sejam prontamente desconsiderados, uma vez que a utilização de algum(ns) deste(s) em uma determinada rota pode ser compensada pela presença de vários trechos menos custosos.

Protótipo de questão

A indagação que sintetiza nossos objetivos, é dada pela pergunta:

> Como pode uma empresa de distribuição de mercadorias escolher quais os pontos em uma metrópole nos quais estabelecer sua sede operacional significa ter a sua disposição o maior número de rotas com custo médio minimal para explorar?

- Do ponto de vista do distribuidor, todos os pontos de entrega sobre uma certa rota com custo médio minimal são avaliados com idêntica importância em termos de potencial econômico.
- Tal análise permite que trechos com custos mais elevados não sejam prontamente desconsiderados, uma vez que a utilização de algum(ns) deste(s) em uma determinada rota pode ser compensada pela presença de vários trechos menos custosos.

Protótipo de questão

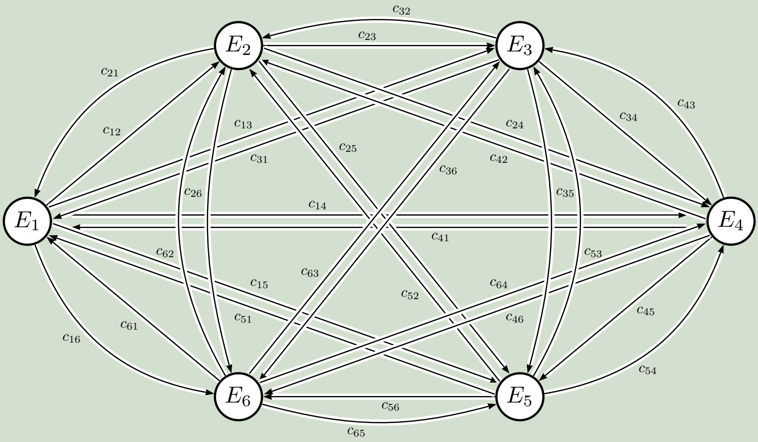
A indagação que sintetiza nossos objetivos, é dada pela pergunta:

Como pode uma empresa de distribuição de mercadorias escolher quais os pontos em uma metrópole nos quais estabelecer sua sede operacional significa ter a sua disposição o maior número de rotas com custo médio minimal para explorar?

- Do ponto de vista do distribuidor, todos os pontos de entrega sobre uma certa rota com custo médio minimal são avaliados com idêntica importância em termos de potencial econômico.
- Tal análise permite que trechos com custos mais elevados não sejam prontamente desconsiderados, uma vez que a utilização de algum(ns) deste(s) em uma determinada rota pode ser compensada pela presença de vários trechos menos custosos.

Exemplo

Considere seis pontos de entrega E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 e E_6 e, para todo par $i \neq j$, custo c_{ij} associado ao trajeto do ponto E_i ao ponto E_j.



Exemplo

Supomos que a empresa de distribuição cogite instalar-se ao lado de E_1 e esteja ponderando sobre entregas em E_2 e em E_5. Há dois trajetos óbvios,

$$E_1 \to E_2 \to E_5 \to E_1 \qquad \text{e} \qquad E_1 \to E_5 \to E_2 \to E_1,$$

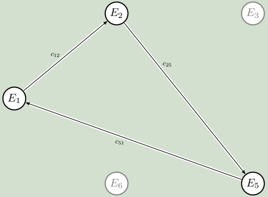
com respectivos custos médios

$$\frac{c_{12} + c_{25} + c_{51}}{3} \qquad \text{e} \qquad \frac{c_{15} + c_{52} + c_{21}}{3}.$$

Exemplo

Supomos que a empresa de distribuição cogite instalar-se ao lado de E_1 e esteja ponderando sobre entregas em E_2 e em E_5. Há dois trajetos óbvios,

$$E_1 \to E_2 \to E_5 \to E_1 \qquad \text{e} \qquad E_1 \to E_5 \to E_2 \to E_1,$$



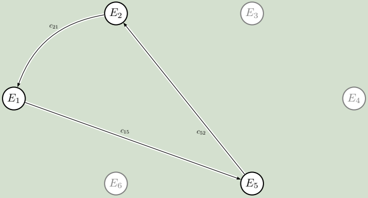
com respectivos custos médios

$$\frac{c_{12} + c_{25} + c_{51}}{3} \qquad \text{e} \qquad \frac{c_{15} + c_{52} + c_{21}}{3}.$$

Exemplo

Supomos que a empresa de distribuição cogite instalar-se ao lado de E_1 e esteja ponderando sobre entregas em E_2 e em E_5. Há dois trajetos óbvios,

$$E_1 \to E_2 \to E_5 \to E_1 \quad \text{e} \quad E_1 \to E_5 \to E_2 \to E_1,$$



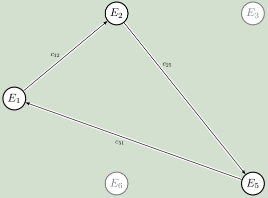
com respectivos custos médios

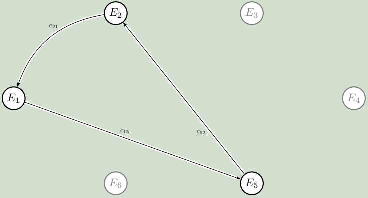
$$\frac{c_{12} + c_{25} + c_{51}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{c_{15} + c_{52} + c_{21}}{3}.$$

Exemplo

Supomos que a empresa de distribuição cogite instalar-se ao lado de E_1 e esteja ponderando sobre entregas em E_2 e em E_5. Há dois trajetos óbvios,

$$E_1 \to E_2 \to E_5 \to E_1 \qquad \text{e} \qquad E_1 \to E_5 \to E_2 \to E_1,$$





com respectivos custos médios

$$\frac{c_{12} + c_{25} + c_{51}}{3} \qquad \text{e} \qquad \frac{c_{15} + c_{52} + c_{21}}{3}.$$

Exemplo

Nada impede, porém, que os custos c_{25} e c_{52} sejam tão proibitivos de modo que um trajeto mais longo como, por exemplo,

$$E_1 \to E_2 \to E_3 \to E_5 \to E_1$$

tenha seu custo médio

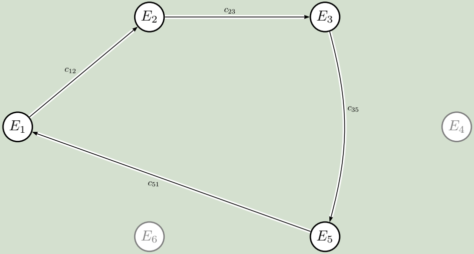
$$\frac{c_{12}+c_{23}+c_{35}+c_{51}}{4} \leq \frac{c_{12}+c_{25}+c_{51}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{c_{15}+c_{52}+c_{21}}{3}$$

inferior aos custos anteriores.

Exemplo

Nada impede, porém, que os custos c_{25} e c_{52} sejam tão proibitivos de modo que um trajeto mais longo como, por exemplo,

$$E_1 \to E_2 \to E_3 \to E_5 \to E_1$$



tenha seu custo médio

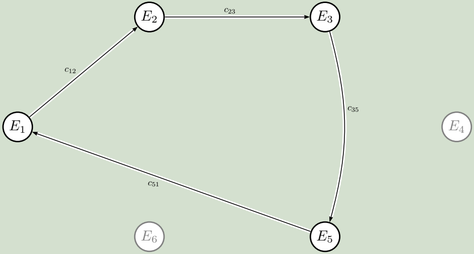
$$\frac{c_{12}+c_{23}+c_{35}+c_{51}}{4} \leq \frac{c_{12}+c_{25}+c_{51}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{c_{15}+c_{52}+c_{21}}{3}$$

inferior aos custos anteriores.

Exemplo

Nada impede, porém, que os custos c_{25} e c_{52} sejam tão proibitivos de modo que um trajeto mais longo como, por exemplo,

$$E_1 \to E_2 \to E_3 \to E_5 \to E_1$$



tenha seu custo médio

$$\frac{c_{12}+c_{23}+c_{35}+c_{51}}{4} \leq \frac{c_{12}+c_{25}+c_{51}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{c_{15}+c_{52}+c_{21}}{3}$$

inferior aos custos anteriores.

Perguntas naturais então se impõem.

- Como identificar estas trajetórias fechadas de custo médio minimal?
- Uma vez identificadas, a escolha da vizinhança do ponto de entrega E_1 para instalar a sede da empresa teria sido a melhor decisão?
- Em outros termos, constituir sede ao lado, por exemplo, do ponto de entrega E_4 não seria potencialmente mais rentável?
- Ou melhor, por qual ponto de entrega passam mais trajetórias com custo médio minimal?

Perguntas naturais então se impõem.

- Como identificar estas trajetórias fechadas de custo médio minimal?
- Uma vez identificadas, a escolha da vizinhança do ponto de entrega E_1 para instalar a sede da empresa teria sido a melhor decisão?
- Em outros termos, constituir sede ao lado, por exemplo, do ponto de entrega E_4 não seria potencialmente mais rentável?
- Ou melhor, por qual ponto de entrega passam mais trajetórias com custo médio minimal?

Perguntas naturais então se impõem.

- Como identificar estas trajetórias fechadas de custo médio minimal?
- Uma vez identificadas, a escolha da vizinhança do ponto de entrega E_1 para instalar a sede da empresa teria sido a melhor decisão?
- Em outros termos, constituir sede ao lado, por exemplo, do ponto de entrega E_4 não seria potencialmente mais rentável?
- Ou melhor, por qual ponto de entrega passam mais trajetórias com custo médio minimal?

Perguntas naturais então se impõem.

- Como identificar estas trajetórias fechadas de custo médio minimal?
- Uma vez identificadas, a escolha da vizinhança do ponto de entrega E_1 para instalar a sede da empresa teria sido a melhor decisão?
- Em outros termos, constituir sede ao lado, por exemplo, do ponto de entrega E_4 não seria potencialmente mais rentável?
- Ou melhor, por qual ponto de entrega passam mais trajetórias com custo médio minimal?

Sumário

Linguagem da teoria de grafos

Introduzimos conceitos básicos e resultados intuitivos sobre grafos orientados.

Definição

Um *grafo orientado* é um par

$$G = (V, A) \quad \text{tal que} \quad A \subset V \times V.$$

Os elementos de V são ditos *vértices* e os elementos de A são ditos *arestas*.

Um grafo com conjunto de vértices V (o qual será sempre um conjunto finito) é dito ser um *grafo sobre V*.

Notação

Comumente a aresta (v, w) é representada por uma seta de v para w, ou seja, $v \overset{G}{\to} w$, e a aresta de sentido inverso, (w, v), por $w \overset{G}{\to} v$.

Linguagem da teoria de grafos

Introduzimos conceitos básicos e resultados intuitivos sobre grafos orientados.

Definição

Um *grafo orientado* é um par

$$G = (V, A) \quad \text{tal que} \quad A \subset V \times V.$$

Os elementos de V são ditos *vértices* e os elementos de A são ditos *arestas*.

Um grafo com conjunto de vértices V (o qual será sempre um conjunto finito) é dito ser um *grafo sobre* V.

Notação

Comumente a aresta (v, w) é representada por uma seta de v para w, ou seja, $v \stackrel{G}{\to} w$, e a aresta de sentido inverso, (w, v), por $w \stackrel{G}{\to} v$.

Linguagem da teoria de grafos

Introduzimos conceitos básicos e resultados intuitivos sobre grafos orientados.

Definição

Um *grafo orientado* é um par

$$G = (V, A) \quad \text{tal que} \quad A \subset V \times V.$$

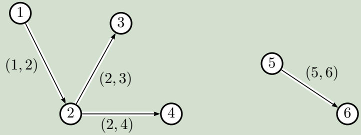
Os elementos de V são ditos *vértices* e os elementos de A são ditos *arestas*.

Um grafo com conjunto de vértices V (o qual será sempre um conjunto finito) é dito ser um *grafo sobre V*.

Notação

Comumente a aresta (v, w) é representada por uma seta de v para w, ou seja, $v \overset{G}{\to} w$, e a aresta de sentido inverso, (w, v), por $w \overset{G}{\to} v$.

Exemplo



Temos a representação gráfica do grafo $G = (V, A)$ com

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{e} \quad A = \{(1,2), (2,3), (2,4), (5,6)\}.$$

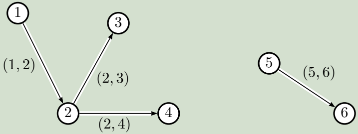
Notação

O conjunto de vértices de um grafo G é denotado por $V(G)$ e seu conjunto de arestas é indicado por $A(G)$. Cometeremos o abuso de notação

$$v \in G \quad \text{ou} \quad v \xrightarrow{G} w = (v, w) \in G$$

para um vértice v ou uma aresta (v, w).

Exemplo



Temos a representação gráfica do grafo $G = (V, A)$ com

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{e} \quad A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (5, 6)\}.$$

Notação

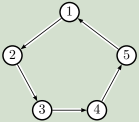
O conjunto de vértices de um grafo G é denotado por $V(G)$ e seu conjunto de arestas é indicado por $A(G)$. Cometeremos o abuso de notação

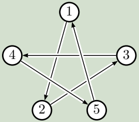
$$v \in G \quad \text{ou} \quad v \xrightarrow{G} w = (v, w) \in G$$

para um vértice v ou uma aresta (v, w).

Isomorfismos

Exemplo





Acima exibimos duas representações gráficas para o grafo

$$G = \big(\{1, 2, 3, 4, 5\}\,,\ \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}\big).$$

Definição

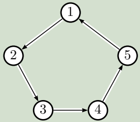
Dizemos que dois grafos orientados $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ são *isomorfos*, e escrevemos $G \simeq G'$, se existir uma bijeção $\varphi : V \to V'$ com

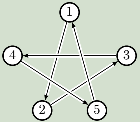
$$(v, w) \in A \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in A' \qquad \forall\, v, w \in V.$$

Não distinguimos grafos isomorfos.

Isomorfismos

Exemplo





Acima exibimos duas representações gráficas para o grafo

$$G = \left(\{1,2,3,4,5\}\,,\ \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)\}\right).$$

Definição

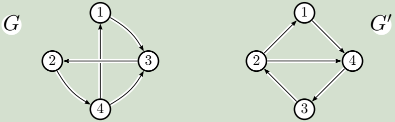
Dizemos que dois grafos orientados $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ são *isomorfos*, e escrevemos $G \simeq G'$, se existir uma bijeção $\varphi : V \to V'$ com

$$(v, w) \in A \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in A' \qquad \forall\, v, w \in V.$$

Não distinguimos grafos isomorfos.

Exemplo

Observe os grafos abaixo.



Neste caso, a bijeção φ que efetua o isomorfismo entre eles é dada explicitamente por

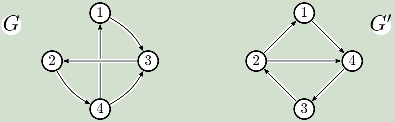
$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(2) = 3, \qquad \varphi(3) = 4 \quad \text{e} \quad \varphi(4) = 2.$$

É fácil verificar que

$$\left\{ \begin{array}{c} (\varphi(1), \varphi(3)),\ (\varphi(2), \varphi(4)),\ (\varphi(3), \varphi(2)), \\ (\varphi(4), \varphi(1)),\ (\varphi(4), \varphi(3)) \end{array} \right\} = A'.$$

Exemplo

Observe os grafos abaixo.



Neste caso, a bijeção φ que efetua o isomorfismo entre eles é dada explicitamente por

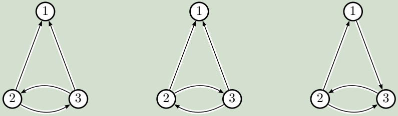
$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(2) = 3, \qquad \varphi(3) = 4 \quad \text{e} \quad \varphi(4) = 2.$$

É fácil verificar que

$$\left\{ \begin{array}{c} (\varphi(1), \varphi(3)),\ \ (\varphi(2), \varphi(4)),\ \ (\varphi(3), \varphi(2)), \\ (\varphi(4), \varphi(1)),\ \ (\varphi(4), \varphi(3)) \end{array} \right\} = A'.$$

Exemplo

Abaixo apresentamos três grafos.



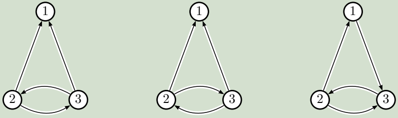
Note que os dois primeiros são isomorfos, pois basta aplicar a bijeção

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(2) = 3 \quad \text{e} \quad \varphi(3) = 2.$$

O terceiro grafo não é isomorfo aos anteriores.

Exemplo

Abaixo apresentamos três grafos.



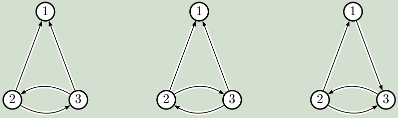
Note que os dois primeiros são isomorfos, pois basta aplicar a bijeção

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(2) = 3 \quad \text{e} \quad \varphi(3) = 2.$$

O terceiro grafo não é isomorfo aos anteriores.

Exemplo

Abaixo apresentamos três grafos.



Note que os dois primeiros são isomorfos, pois basta aplicar a bijeção

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(2) = 3 \quad \text{e} \quad \varphi(3) = 2.$$

O terceiro grafo não é isomorfo aos anteriores.

Subgrafos

Definição

Dados dois grafos orientados $G' = (V', A')$ e $G = (V, A)$, se $V' \subset V$ e $A' \subset A$, então G' é um *subgrafo* de G (equivalentemente, G é um *supergrafo* de G').

Exemplo

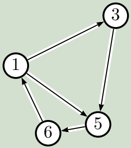
O grafo da esquerda é subgrafo do grafo da direita.

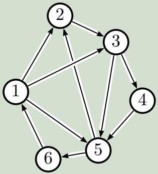
Subgrafos

Definição

Dados dois grafos orientados $G' = (V', A')$ e $G = (V, A)$, se $V' \subset V$ e $A' \subset A$, então G' é um *subgrafo* de G (equivalentemente, G é um *supergrafo* de G').

Exemplo





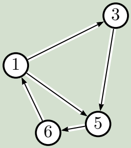
O grafo da esquerda é subgrafo do grafo da direita.

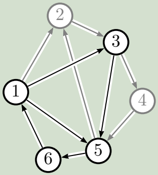
Subgrafos

Definição

Dados dois grafos orientados $G' = (V', A')$ e $G = (V, A)$, se $V' \subset V$ e $A' \subset A$, então G' é um *subgrafo* de G (equivalentemente, G é um *supergrafo* de G').

Exemplo





O grafo da esquerda é subgrafo do grafo da direita.

Caminhos

Definição

Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado. Um *caminho em G* é um subgrafo $P = (V', A')$ da forma

$$\begin{aligned} V' &= \{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subset V \quad \text{e} \\ A' &= \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k-1}, i_k)\} \subset A. \end{aligned}$$

Notação

Por vezes, indicamos o caminho P por $P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k$.

Dizemos que

- P passa pelos vértices i_ℓ quando $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$;
- o caminho P conecta seu *ponto inicial* i_0 ao seu *ponto final* i_k;
- o número de arestas de um caminho é seu *comprimento*. (Note que $(\{i_0\}, \emptyset)$ possui comprimento nulo.)

Caminhos

Definição

Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado. Um *caminho em G* é um subgrafo $P = (V', A')$ da forma

$$V' = \{i_0, i_1, \ldots, i_k\} \subset V \quad \text{e}$$
$$A' = \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{k-1}, i_k)\} \subset A.$$

Notação

Por vezes, indicamos o caminho P por $P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \ldots \xrightarrow{G} i_k$.

Dizemos que

- P passa pelos vértices i_ℓ quando $\ell \in \{1, \ldots, k-1\}$;
- o caminho P conecta seu *ponto inicial* i_0 ao seu *ponto final* i_k;
- o número de arestas de um caminho é seu *comprimento*. (Note que $(\{i_0\}, \emptyset)$ possui comprimento nulo.)

Caminhos

Definição

Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado. Um *caminho em G* é um subgrafo $P = (V', A')$ da forma

$$V' = \{i_0, i_1, \ldots, i_k\} \subset V \quad \text{e}$$
$$A' = \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{k-1}, i_k)\} \subset A.$$

Notação

Por vezes, indicamos o caminho P por $P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \ldots \xrightarrow{G} i_k$.

Dizemos que

- P passa pelos vértices i_ℓ quando $\ell \in \{1, \ldots, k-1\}$;
- o caminho P conecta seu *ponto inicial* i_0 ao seu *ponto final* i_k;
- o número de arestas de um caminho é seu *comprimento*. (Note que $(\{i_0\}, \emptyset)$ possui comprimento nulo.)

Caminhos

Definição

Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado. Um *caminho em G* é um subgrafo $P = (V', A')$ da forma

$$V' = \{i_0, i_1, \ldots, i_k\} \subset V \quad \text{e}$$
$$A' = \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{k-1}, i_k)\} \subset A.$$

Notação

Por vezes, indicamos o caminho P por $P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \ldots \xrightarrow{G} i_k$.

Dizemos que

- P passa pelos vértices i_ℓ quando $\ell \in \{1, \ldots, k-1\}$;
- o caminho P conecta seu *ponto inicial* i_0 ao seu *ponto final* i_k;
- o número de arestas de um caminho é seu *comprimento*. (Note que $(\{i_0\}, \emptyset)$ possui comprimento nulo.)

Caminhos

Definição

Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado. Um *caminho em G* é um subgrafo $P = (V', A')$ da forma

$$V' = \{i_0, i_1, \ldots, i_k\} \subset V \quad \text{e}$$
$$A' = \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{k-1}, i_k)\} \subset A.$$

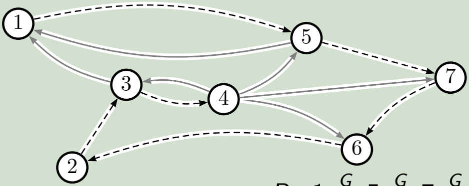
Notação

Por vezes, indicamos o caminho P por $P : i_0 \overset{G}{\to} i_1 \overset{G}{\to} i_2 \overset{G}{\to} \ldots \overset{G}{\to} i_k$.

Dizemos que

- P passa pelos vértices i_ℓ quando $\ell \in \{1, \ldots, k-1\}$;
- o caminho P conecta seu *ponto inicial* i_0 ao seu *ponto final* i_k;
- o número de arestas de um caminho é seu *comprimento*. (Note que $(\{i_0\}, \emptyset)$ possui comprimento nulo.)

Exemplo



$$P : 1 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4$$

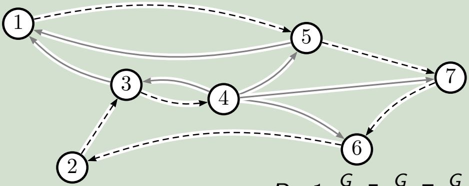
Temos em destaque no grafo G, acima representado, um caminho P de comprimento 6 que conecta seu *ponto inicial* 1 ao seu *ponto final* 4.

Definição

Sejam $P = (V', A')$ e $Q = (V'', A'')$ caminhos em G tais que o ponto final de P coincide com o ponto inicial de Q. Definimos a *concatenação* de P com Q como o caminho

$$PQ = (V' \cup V'', A' \cup A'').$$

Exemplo



$$P : 1 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4$$

Temos em destaque no grafo G, acima representado, um caminho P de comprimento 6 que conecta seu *ponto inicial* 1 ao seu *ponto final* 4.

Definição

Sejam $P = (V', A')$ e $Q = (V'', A'')$ caminhos em G tais que o ponto final de P coincide com o ponto inicial de Q. Definimos a *concatenação* de P com Q como o caminho

$$PQ = (V' \cup V'', A' \cup A'').$$

Observação

Perceba que o caminho $(\{i\}, \emptyset)$ atua como elemento neutro para operação de concatenação, ou seja, $P(\{i\}, \emptyset) = P$ ou $(\{i\}, \emptyset)P = P$.

Exemplo

Considere os caminhos

$$4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1 \xrightarrow{G} 5 \quad \text{e}$$

$$5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4.$$

A concatenação destes vem a ser

$$4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4.$$

Observação

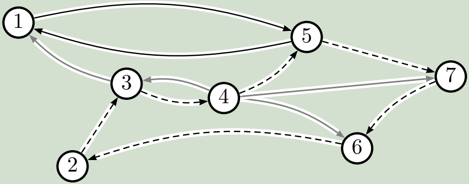
Perceba que o caminho $(\{i\}, \emptyset)$ atua como elemento neutro para operação de concatenação, ou seja, $P(\{i\}, \emptyset) = P$ ou $(\{i\}, \emptyset)P = P$.

Exemplo

Considere os caminhos

$4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1 \xrightarrow{G} 5$ e

$5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4.$



A concatenação destes vem a ser

$$4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4.$$

Observação

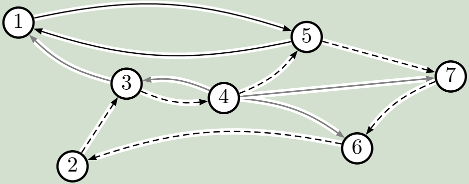
Perceba que o caminho $(\{i\}, \emptyset)$ atua como elemento neutro para operação de concatenação, ou seja, $P(\{i\}, \emptyset) = P$ ou $(\{i\}, \emptyset)P = P$.

Exemplo

Considere os caminhos

$4 \overset{G}{\to} 5 \overset{G}{\to} 1 \overset{G}{\to} 5$ e

$5 \overset{G}{\to} 7 \overset{G}{\to} 6 \overset{G}{\to} 2 \overset{G}{\to} 3 \overset{G}{\to} 4.$



A concatenação destes vem a ser

$$4 \overset{G}{\to} 5 \overset{G}{\to} 1 \overset{G}{\to} 5 \overset{G}{\to} 7 \overset{G}{\to} 6 \overset{G}{\to} 2 \overset{G}{\to} 3 \overset{G}{\to} 4.$$

Ciclos

Definição

Um *ciclo* (ou *circuito fechado*) em G é um caminho conectando um vértice a si mesmo. Um ciclo é dito ser *simples* se não contém subciclos próprios (subgrafos próprios que são ciclos).

Exemplo

A concatenação realizada anteriormente é, de fato, um ciclo, o qual não é simples. Destacamos seus subciclos

$5 \xrightarrow{G} 1 \xrightarrow{G} 5$ e

$5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5.$

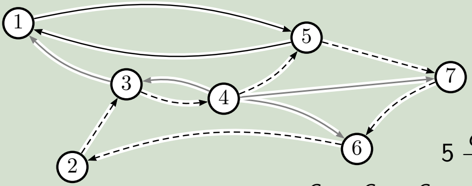
Ciclos

Definição

Um *ciclo* (ou *circuito fechado*) em G é um caminho conectando um vértice a si mesmo. Um ciclo é dito ser *simples* se não contém subciclos próprios (subgrafos próprios que são ciclos).

Exemplo

A concatenação realizada anteriormente é, de fato, um ciclo, o qual não é simples. Destacamos seus subciclos



$$5 \overset{G}{\to} 1 \overset{G}{\to} 5 \qquad \text{e}$$

$$5 \overset{G}{\to} 7 \overset{G}{\to} 6 \overset{G}{\to} 2 \overset{G}{\to} 3 \overset{G}{\to} 4 \overset{G}{\to} 5.$$

Conexividade

Definição

Um grafo orientado $G = (V, A)$ é dito ser *conexo* (ou *transitivo*) se, para cada par de vértices em V, houver um caminho em G conectando-os.

Exemplo

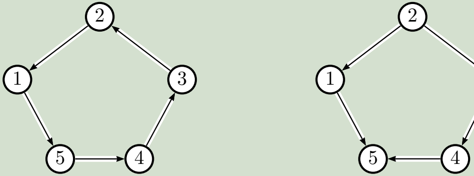
Enquanto o grafo da esquerda é conexo, o da direita não o é.

Conexividade

Definição

Um grafo orientado $G = (V, A)$ é dito ser *conexo* (ou *transitivo*) se, para cada par de vértices em V, houver um caminho em G conectando-os.

Exemplo



Enquanto o grafo da esquerda é conexo, o da direita não o é.

Uma condição necessária e suficiente para conexidade é

a existência de um ciclo passando por todos os seus vértices.

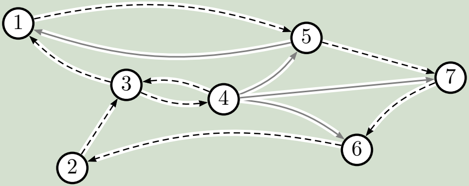
Exemplo

O ciclo $1 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 1$ passa por todos os vértices do grafo acima.

Uma condição necessária e suficiente para conexidade é

a existência de um ciclo passando por todos os seus vértices.

Exemplo



O ciclo $1 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 1$ passa por todos os vértices do grafo acima.

Note que

- a conexidade implica, para todo vértice v, a existência de arestas $v \xrightarrow{G} w$ e $\overline{w} \xrightarrow{G} v$. Logo, cada caminho conectando i a j em G é um subgrafo de um caminho da forma

$$i_0 \xrightarrow{G} i_1 = i \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{k-2} \xrightarrow{G} i_{k-1} = j \xrightarrow{G} i_k;$$

- a conexidade é uma relação de equivalência entre os vértices de um grafo particionando-o em subgrafos conexos.

Observação

Grafos não conexos possuem decomposição em subgrafos conexos, a qual pode ser computada pelo algoritmo de Tarjan.

Note que

- a conexidade implica, para todo vértice v, a existência de arestas $v \xrightarrow{G} w$ e $\overline{w} \xrightarrow{G} v$. Logo, cada caminho conectando i a j em G é um subgrafo de um caminho da forma

$$i_0 \xrightarrow{G} i_1 = i \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \ldots \xrightarrow{G} i_{k-2} \xrightarrow{G} i_{k-1} = j \xrightarrow{G} i_k;$$

- a conexidade é uma relação de equivalência entre os vértices de um grafo particionando-o em subgrafos conexos.

Observação

Grafos não conexos possuem decomposição em subgrafos conexos, a qual pode ser computada pelo algoritmo de Tarjan.

Note que

- a conexidade implica, para todo vértice v, a existência de arestas $v \xrightarrow{G} w$ e $\overline{w} \xrightarrow{G} v$. Logo, cada caminho conectando i a j em G é um subgrafo de um caminho da forma

$$i_0 \xrightarrow{G} i_1 = i \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{k-2} \xrightarrow{G} i_{k-1} = j \xrightarrow{G} i_k;$$

- a conexidade é uma relação de equivalência entre os vértices de um grafo particionando-o em subgrafos conexos.

Observação

Grafos não conexos possuem decomposição em subgrafos conexos, a qual pode ser computada pelo algoritmo de Tarjan.

Representação Matricial

Dado um grafo $G = (\{1, 2, \dots, n\}, A)$, podemos codificar suas arestas em uma matriz $M : \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} \to \{0, 1\}$ definida por

$$M(i, j) = \mathbb{1}_A(i, j) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad (i, j) \notin A \\ 1 & \text{se} \quad (i, j) \in A \end{cases}.$$

Dizemos que M é uma *matriz de transição*.

Exemplo

Para o problema de distribuição com seis pontos de entrega, a matriz de transição vem a ser

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Representação Matricial

Dado um grafo $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, A)$, podemos codificar suas arestas em uma matriz $M : \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ definida por

$$M(i,j) = \mathbb{1}_A(i,j) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad (i,j) \notin A \\ 1 & \text{se} \quad (i,j) \in A \end{cases}.$$

Dizemos que M é uma *matriz de transição*.

Exemplo

Para o problema de distribuição com seis pontos de entrega, a matriz de transição vem a ser

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Representação Matricial

Dado um grafo $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, A)$, podemos codificar suas arestas em uma matriz $M : \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ definida por

$$M(i,j) = \mathbb{1}_A(i,j) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad (i,j) \notin A \\ 1 & \text{se} \quad (i,j) \in A \end{cases}.$$

Dizemos que M é uma *matriz de transição*.

Exemplo

Para o problema de distribuição com seis pontos de entrega, a matriz de transição vem a ser

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição

Uma matriz M sobre $V \times V$ com entradas não negativas é dita ser *irredutível* se verifica a seguinte propriedade:

$$\forall\,(i,j) \in V \times V, \quad \exists\, k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad M^k(i,j) > 0,$$

onde $M^k(i,j)$ denota a entrada (i,j) da matriz produto M^k.

O resultado a seguir mostra como reconhecer a conexidade do grafo a partir da sua respectiva matriz de transição.

Proposição

Um grafo orientado $G = (V, A)$ é conexo se, e somente se, sua matriz de transição $M : V \times V \to \{0, 1\}$ é irredutível.

Definição

Uma matriz M sobre $V \times V$ com entradas não negativas é dita ser *irredutível* se verifica a seguinte propriedade:

$$\forall\,(i,j) \in V \times V, \quad \exists\, k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad M^k(i,j) > 0,$$

onde $M^k(i,j)$ denota a entrada (i,j) da matriz produto M^k.

O resultado a seguir mostra como reconhecer a conexidade do grafo a partir da sua respectiva matriz de transição.

Proposição

Um grafo orientado $G = (V, A)$ é conexo se, e somente se, sua matriz de transição $M : V \times V \to \{0,1\}$ é irredutível.

Sumário

Problema dos pontos de entrega

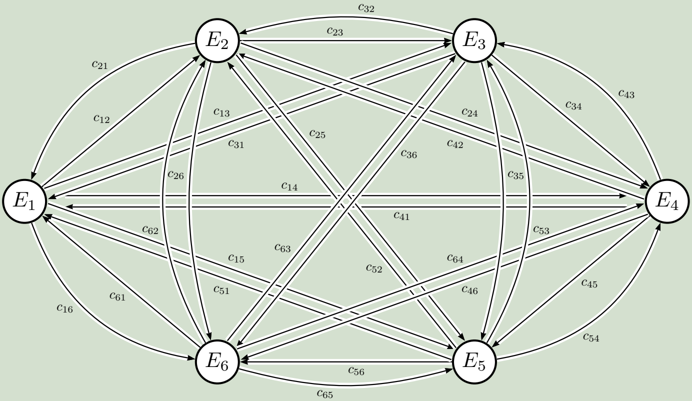
Exemplo

Trata-se de um grafo orientado conexo $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A)$, cujos vértices são pontos de entrega.

Problema dos pontos de entrega

Exemplo

Trata-se de um grafo orientado conexo $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A)$, cujos vértices são pontos de entrega.



Exemplo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As arestas de A são os possíveis trajetos entre pontos de entrega e estão codificadas na matriz de transição ao lado.

Temos então uma função custo

$$c : A \to \mathbb{R},$$

a qual admite a seguinte expressão matricial

$$\begin{bmatrix} * & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & * & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & * & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & * & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & * & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & * \end{bmatrix}.$$

Notação

Estamos empregando o símbolo $*$ para indicar eventuais valores de c sobre $(V \times V) \setminus A$. *A priori* a função custo c sequer precisa ser aí definida.

Exemplo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As arestas de A são os possíveis trajetos entre pontos de entrega e estão codificadas na matriz de transição ao lado.

Temos então uma função custo

$$c : A \to \mathbb{R},$$

a qual admite a seguinte expressão matricial

$$\begin{bmatrix} * & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & * & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & * & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & * & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & * & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & * \end{bmatrix}.$$

Notação

Estamos empregando o símbolo $*$ para indicar eventuais valores de c sobre $(V \times V) \setminus A$. *A priori* a função custo c sequer precisa ser aí definida.

Exemplo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As arestas de A são os possíveis trajetos entre pontos de entrega e estão codificadas na matriz de transição ao lado.

Temos então uma função custo

$$c : A \to \mathbb{R},$$

a qual admite a seguinte expressão matricial

$$\begin{bmatrix} * & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & * & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & * & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & * & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & * & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & * \end{bmatrix}.$$

Notação

Estamos empregando o símbolo $*$ para indicar eventuais valores de c sobre $(V \times V) \setminus A$. *A priori* a função custo c sequer precisa ser aí definida.

Observação

Procedendo de maneira análoga, é possível apresentar grafo $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, A)$ que caracteriza o problema de distribuição dos n pontos de entrega.

Estende-se naturalmente a função custo sobre os caminhos em G.

Definição

Se $P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \ldots \xrightarrow{G} i_k$ é um caminho (de comprimento $k \geq 1$), definimos

$$c(P) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_\ell, i_{\ell+1}).$$

encontrar os mínimos da função custo c sobre os ciclos de G, ou seja,

$$\inf\{c(P) : P \text{ ciclo em } G\}.$$

Observação

Procedendo de maneira análoga, é possível apresentar grafo $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, A)$ que caracteriza o problema de distribuição dos n pontos de entrega.

Estende-se naturalmente a função custo sobre os caminhos em G.

Definição

Se $P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \ldots \xrightarrow{G} i_k$ é um caminho (de comprimento $k \geq 1$), definimos

$$c(P) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_\ell, i_{\ell+1}).$$

Queremos então detalhar uma proposta de resolução para o seguinte problema de otimização:

encontrar os mínimos da função custo c sobre os ciclos de G, ou seja,

$$\inf\{c(P) : P \text{ ciclo em } G\}.$$

Observação

Procedendo de maneira análoga, é possível apresentar grafo $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, A)$ que caracteriza o problema de distribuição dos n pontos de entrega.

Estende-se naturalmente a função custo sobre os caminhos em G.

Definição

Se $P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \ldots \xrightarrow{G} i_k$ é um caminho (de comprimento $k \geq 1$), definimos

$$c(P) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_\ell, i_{\ell+1}).$$

Queremos então detalhar uma proposta de resolução para o seguinte problema de otimização:

encontrar os mínimos da função custo c sobre os ciclos de G, ou seja,

$$\inf\{c(P) : P \text{ ciclo em } G\}.$$

Bibliografia

E. Garibaldi e J. T. A. Gomes,
Otimização de Médias sobre Grafos Orientados,
Coleção publicações matemáticas (29 CBM) **12**, IMPA, 2013.

Seções: 1.1 e 1.2 (páginas 01 a 11);

J. A. Bondy e U. S. R. Murty,
Graph theory,
Graduated texts in mathematics, Springer, 2008.

R. Diestel,
Graph theory,
4ª ed., Graduated texts in mathematics, Springer, 2010.

Sinopse da Aula 02

- Descreve-se o problema dos pontos de entrega como uma questão de minimização de um custo c sobre os ciclos de um grafo.
- Introduz-se o principal conceito, a constante cíclica minimal $m(c)$.
- Consideramos também o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ e explicamos estratégia para facilitar a identificação deste conjunto.

Sinopse da Aula 02

- Descreve-se o problema dos pontos de entrega como uma questão de minimização de um custo c sobre os ciclos de um grafo.
- Introduz-se o principal conceito, a constante cíclica minimal $m(c)$.
- Consideramos também o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ e explicamos estratégia para facilitar a identificação deste conjunto.

Sinopse da Aula 02

- Descreve-se o problema dos pontos de entrega como uma questão de minimização de um custo c sobre os ciclos de um grafo.
- Introduz-se o principal conceito, a constante cíclica minimal $m(c)$.
- Consideramos também o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ e explicamos estratégia para facilitar a identificação deste conjunto.

Até a próxima aula!