

29º Colóquio Brasileiro de Matemática
Rio de Janeiro – Julho, 2013

Otimização de Médias sobre Grafos Orientados

Aula 05 – Corretores calibrados

Eduardo Garibaldi

IMECC, Universidade Estadual de Campinas

João Tiago Assunção Gomes



Reunindo os resultados até agora discutidos, note que determinamos existência (de modo algorítmico)

da *constante cíclica minimal* $m(c)$
e de *corretor* $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$,

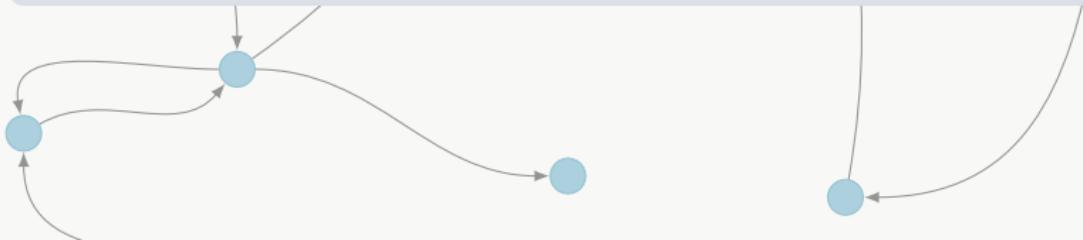
de modo que o custo renormalizado

$$\tilde{c}(i,j) := c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A(G),$$

verifica

$$\tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos em } G).$$

(Isto pode ser obtido apenas com os resultados discutidos na aula 02.)





Reunindo os resultados até agora discutidos, note que determinamos existência (de modo algorítmico)

da *constante cíclica minimal* $m(c)$
e de *corretor* $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$,

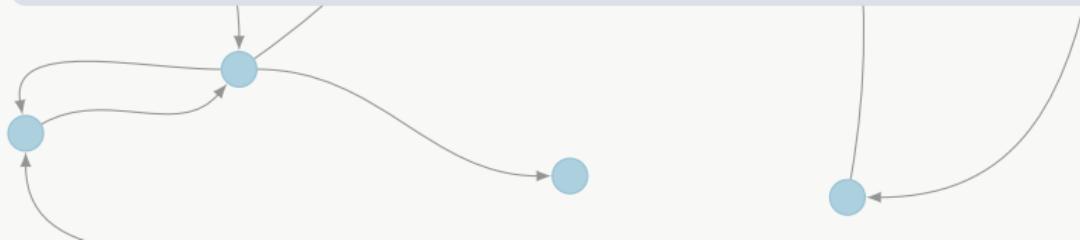
de modo que o custo renormalizado

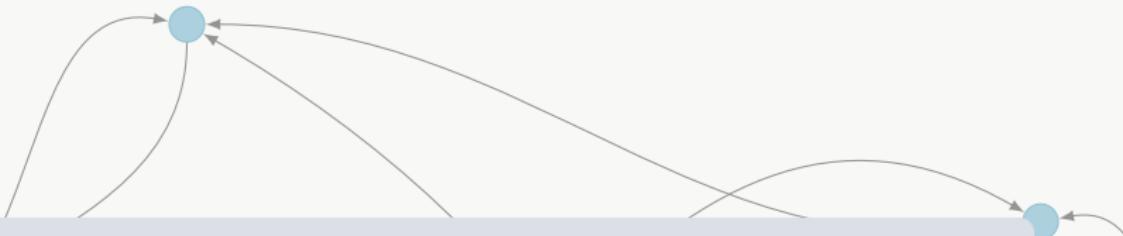
$$\tilde{c}(i,j) := c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A(G),$$

verifica

$$\tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos em } G).$$

(Isto pode ser obtido apenas com os resultados discutidos na aula 02.)



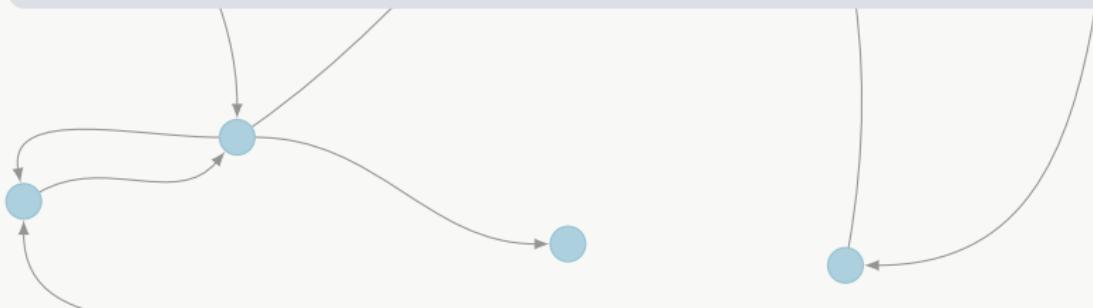


Descrevemos o *algoritmo de Floría-Griffiths* (aula 03) que determina simultaneamente par

$$(m(c), u)$$

com a ajuda de *operador de Lax-Oleinik*, isto é , de operador T_c agindo sobre as funções $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T_c f(j) = \min_{i : i \xrightarrow{G} j} [f(i) + c(i, j)], \quad \forall j \in V(G).$$



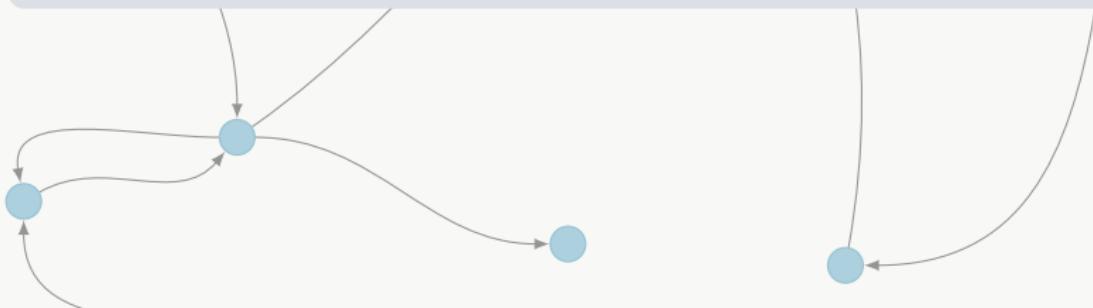


Descrevemos o *algoritmo de Floría-Griffiths* (aula 03) que determina simultaneamente par

$$(m(c), u)$$

com a ajuda de *operador de Lax-Oleinik*, isto é , de operador T_c agindo sobre as funções $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T_c f(j) = \min_{i : i \xrightarrow{G} j} [f(i) + c(i,j)], \quad \forall j \in V(G).$$





Ademais, finalizamos o processo de renormalização do custo original c . Para isso garantimos existência de corretor separante v , para o qual o custo

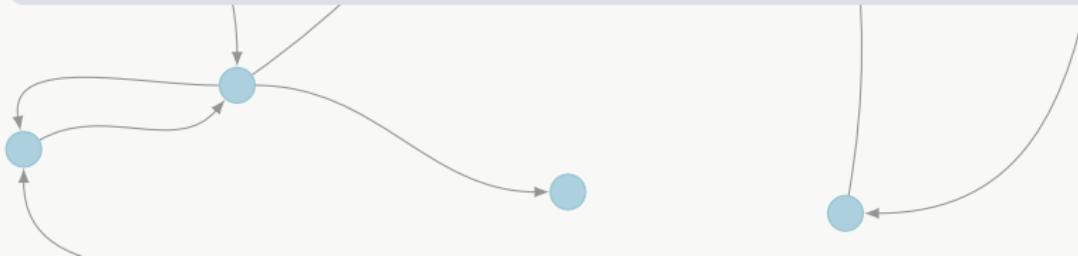
$$\begin{aligned}\hat{c}(i,j) &:= \tilde{c}(i,j) + v(i) - v(j) \\ &= c(i,j) + (u+v)(i) - (u+v)(j),\end{aligned}\quad \forall (i,j) \in A(G),$$

satisfaz

$$\hat{c}^{-1}(0) = \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos de } G).$$

Nesta aula, tratamos de outra classe específica de corretores:

os corretores calibrados.





Ademais, finalizamos o processo de renormalização do custo original c . Para isso garantimos existência de corretor separante v , para o qual o custo

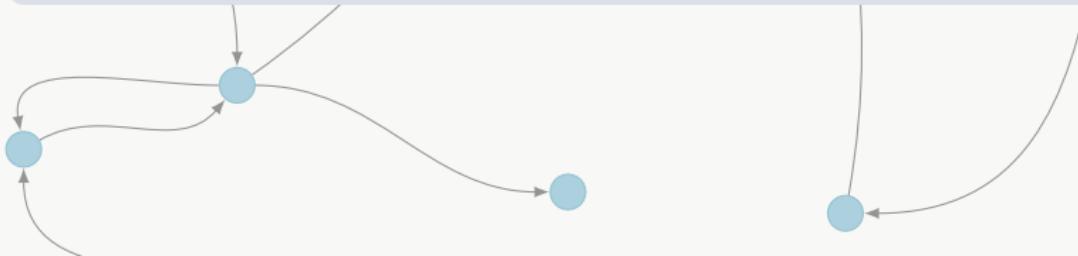
$$\begin{aligned}\hat{c}(i,j) &:= \tilde{c}(i,j) + v(i) - v(j) \\ &= c(i,j) + (u + v)(i) - (u + v)(j),\end{aligned}\quad \forall (i,j) \in A(G),$$

satisfaz

$$\hat{c}^{-1}(0) = \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos de } G).$$

Nesta aula, tratamos de outra classe específica de corretores:

os corretores calibrados.





Ademais, finalizamos o processo de renormalização do custo original c . Para isso garantimos existência de corretor separante v , para o qual o custo

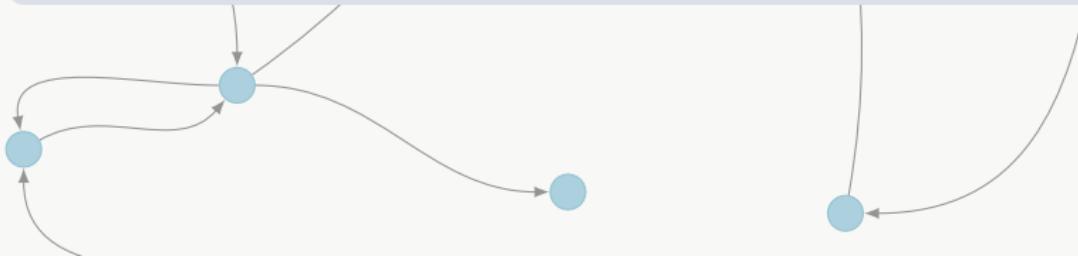
$$\begin{aligned}\hat{c}(i,j) &:= \tilde{c}(i,j) + v(i) - v(j) \\ &= c(i,j) + (u + v)(i) - (u + v)(j),\end{aligned}\quad \forall (i,j) \in A(G),$$

satisfaz

$$\hat{c}^{-1}(0) = \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos de } G).$$

Nesta aula, tratamos de outra classe específica de corretores:

os corretores calibrados.

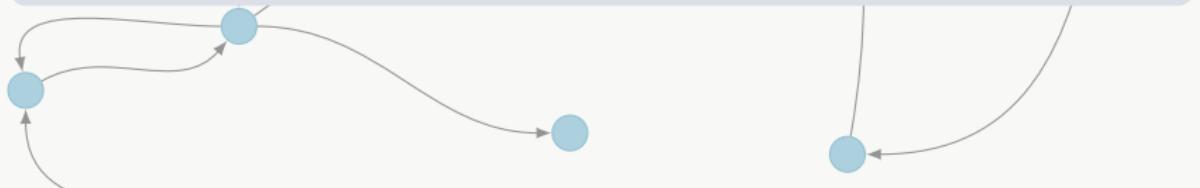


Aula 05 – Corretores calibrados

Resumo:

- Introduzimos a classe dos corretores calibrados, a qual está associada ao operador de Lax-Oleinik T_c e possibilita descrever o comportamento assintótico de autovetores de Perron-Frobenius normalizados.
- Investigaremos propriedades de tais corretores, bem como consequências para o problema dos pontos de entrega.

Prova: Sobre o conteúdo apresentado nas **aulas 01 a 04**.
(O tópico da aula 05 **não** será cobrado nesta avaliação.)

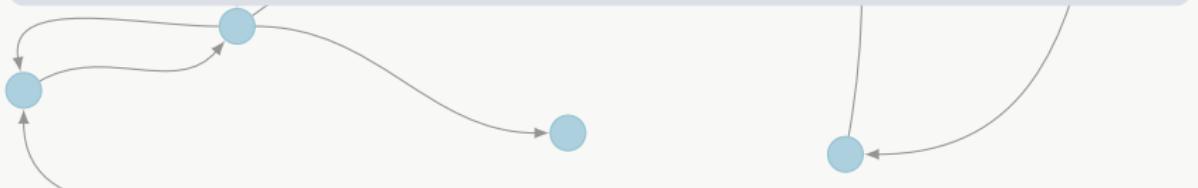


Aula 05 – Corretores calibrados

Resumo:

- Introduzimos a classe dos corretores calibrados, a qual está associada ao operador de Lax-Oleinik T_c e possibilita descrever o comportamento assintótico de autovetores de Perron-Frobenius normalizados.
- Investigaremos propriedades de tais corretores, bem como consequências para o problema dos pontos de entrega.

Prova: Sobre o conteúdo apresentado nas **aulas 01 a 04**.
(O tópico da aula 05 não será cobrado nesta avaliação.)



Aula 05 – Corretores calibrados

Resumo:

- Introduzimos a classe dos corretores calibrados, a qual está associada ao operador de Lax-Oleinik T_c e possibilita descrever o comportamento assintótico de autovetores de Perron-Frobenius normalizados.
- Investigaremos propriedades de tais corretores, bem como consequências para o problema dos pontos de entrega.

Prova: Sobre o conteúdo apresentado nas **aulas 01 a 04**.

(O tópico da aula 05 **não** será cobrado nesta avaliação.)

Sumário

- 1 Corretores calibrados
- 2 Ponto de Vista Assintótico
 - Resultado principal
 - Demonstração

Sumário

- 1 Corretores calibrados
- 2 Ponto de Vista Assintótico
 - Resultado principal
 - Demonstração

Corretores calibrados

Esta classe de corretores distingue-se por

incorporar à desigualdade de correção, isto é,

$$u(j) \leq u(i) + c(i,j) - m(c), \quad \forall (i,j) \in G$$

a exigência de a igualdade ser verificada para cada vértice j ,

como uma obrigatoriedade de “calibração”.

Definição

Um corretor $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ associado à função custo c é dito ser *calibrado* se satisfaz a igualdade

$$u(j) = \min_{i \sim S_j} [u(i) + c(i,j) - m(c)]$$

para todo $j \in V(G)$.

Corretores calibrados

Esta classe de corretores distingue-se por

incorporar à desigualdade de correção, isto é,

$$u(j) \leq u(i) + c(i,j) - m(c), \quad \forall (i,j) \in G$$

a exigência de a igualdade ser verificada para cada vértice j ,

como uma obrigatoriedade de “calibração”.

Definição

Um corretor $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ associado à função custo c é dito ser *calibrado* se satisfaz a igualdade

$$u(j) = \min_{i : i \xrightarrow{G} j} [u(i) + c(i,j) - m(c)]$$

para todo $j \in V(G)$.

Corretores calibrados

Esta classe de corretores distingue-se por

incorporar à desigualdade de correção, isto é,

$$u(j) \leq u(i) + c(i,j) - m(c), \quad \forall (i,j) \in G$$

a exigência de a igualdade ser verificada para cada vértice j ,

como uma obrigatoriedade de “calibração”.

Definição

Um corretor $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ associado à função custo c é dito ser *calibrado* se satisfaz a igualdade

$$u(j) = \min_{i : i \xrightarrow{G} j} [u(i) + c(i,j) - m(c)]$$

para todo $j \in V(G)$.

Observação

Na aula 03, para apresentar o algoritmo de Floría-Griffiths, fazemos uso de operadores de Lax-Oleinik

$$T_{c-m(c)} f(j) = \min_{\substack{i: \\ i \rightarrow j}} [f(i) + c(i,j) - m(c)], \quad \forall j \in V(G).$$

Assim, u é corretor associado ao custo c se, e só se,

$$u \leq T_{c-m(c)} u.$$

Além disso, é evidente que corretores calibrados correspondem a pontos fixos de operadores de Lax-Oleinik, ou melhor,

u é corretor calibrado para c se, e só se, $u = T_{c-m(c)} u$.

Observação

Na aula 03, para apresentar o algoritmo de Floría-Griffiths, fazemos uso de operadores de Lax-Oleinik

$$T_{c-m(c)} f(j) = \min_{\substack{i: \\ i \xrightarrow{G} j}} [f(i) + c(i,j) - m(c)], \quad \forall j \in V(G).$$

Assim, u é corretor associado ao custo c se, e só se,

$$u \leq T_{c-m(c)} u.$$

Além disso, é evidente que corretores calibrados correspondem a pontos fixos de operadores de Lax-Oleinik, ou melhor,

u é corretor calibrado para c se, e só se, $u = T_{c-m(c)} u$.

Observação

Na aula 03, para apresentar o algoritmo de Floría-Griffiths, fazemos uso de operadores de Lax-Oleinik

$$T_{c-m(c)} f(j) = \min_{\substack{i: \\ i \xrightarrow{G} j}} [f(i) + c(i,j) - m(c)], \quad \forall j \in V(G).$$

Assim, u é corretor associado ao custo c se, e só se,

$$u \leq T_{c-m(c)} u.$$

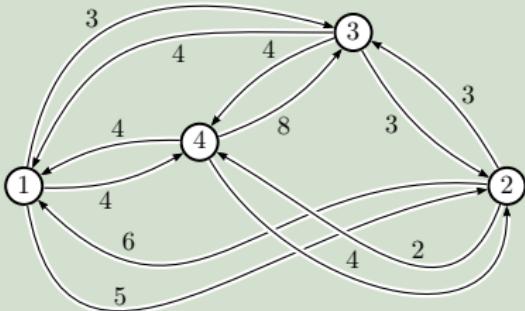
Além disso, é evidente que corretores calibrados correspondem a pontos fixos de operadores de Lax-Oleinik, ou melhor,

u é corretor calibrado para c se, e só se, $u = T_{c-m(c)} u$.

Exemplo

Considere o problema de distribuição com quatro pontos de entrega.

$$c = \begin{bmatrix} * & 5 & 3 & 4 \\ 6 & * & 3 & 2 \\ 4 & 3 & * & 4 \\ 4 & 4 & 8 & * \end{bmatrix}$$



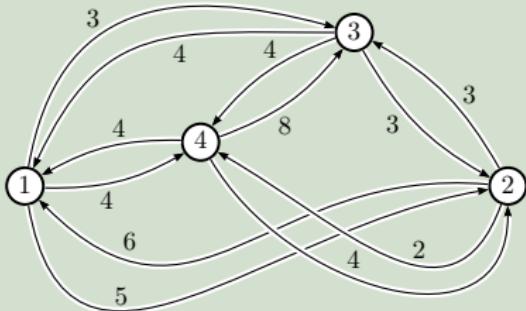
A constante cíclica minimal associada é $m(c) = 3$ e um corretor, como apresentado anteriormente, é dado por

$$u = (1, 1, 1, 0).$$

Exemplo

Considere o problema de distribuição com quatro pontos de entrega.

$$c = \begin{bmatrix} * & 5 & 3 & 4 \\ 6 & * & 3 & 2 \\ 4 & 3 & * & 4 \\ 4 & 4 & 8 & * \end{bmatrix}$$



A constante cíclica minimal associada é $m(c) = 3$ e um corretor, como apresentado anteriormente, é dado por

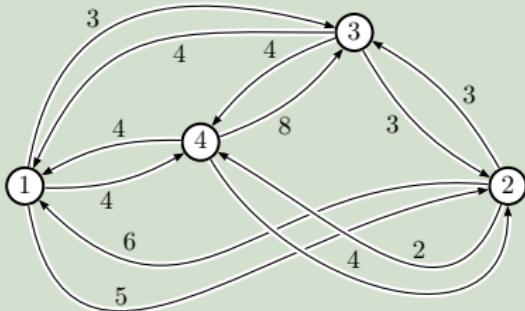
$$u = (1, 1, 1, 0).$$

Não é difícil verificar que se trata na verdade de um corretor calibrado.

Exemplo

Considere o problema de distribuição com quatro pontos de entrega.

$$c = \begin{bmatrix} * & 5 & 3 & 4 \\ 6 & * & 3 & 2 \\ 4 & 3 & * & 4 \\ 4 & 4 & 8 & * \end{bmatrix}$$



A constante cíclica minimal associada é $m(c) = 3$ e um corretor, como apresentado anteriormente, é dado por

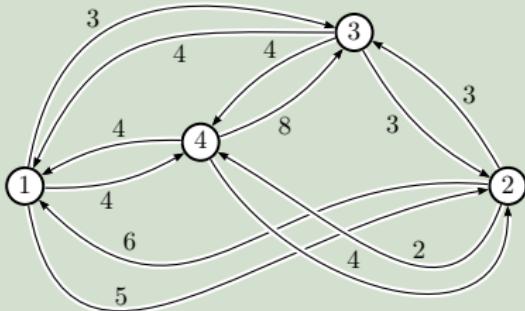
$$u = (1, 1, 1, 0).$$

Não é difícil verificar que se trata na verdade de um corretor calibrado.

Exemplo

Considere o problema de distribuição com quatro pontos de entrega.

$$c = \begin{bmatrix} * & 5 & 3 & 4 \\ 6 & * & 3 & 2 \\ 4 & 3 & * & 4 \\ 4 & 4 & 8 & * \end{bmatrix}$$



A constante cíclica minimal associada é $m(c) = 3$ e um corretor, como apresentado anteriormente, é dado por

$$u = (1, 1, 1, 0).$$

Não é difícil verificar que se trata na verdade de um corretor calibrado.

Sumário

- 1 Corretores calibrados
- 2 Ponto de Vista Assintótico
 - Resultado principal
 - Demonstração

Ponto de Vista Assintótico

Nosso principal objetivo será

exibir corretores calibrados partindo de um ponto de vista assintótico,

isto é, mostrar que pontos de acumulação de uma família de autovetores de Perron-Frobenius (a ser definida) fornecem corretores desta classe.

Definição

Dado um custo c , considere a família de matrizes $\{L_t\}_{t \geq 0}$ definidas sobre $\#V(G) \times \#V(G)$ cujas entradas são dadas por

$$L_t(i,j) = \begin{cases} e^{-t c(i,j)} & \text{se } (i,j) \in A(G) \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin A(G) \end{cases}$$

Ponto de Vista Assintótico

Nosso principal objetivo será

exibir corretores calibrados partindo de um ponto de vista assintótico,

isto é, mostrar que pontos de acumulação de uma família de autovetores de Perron-Frobenius (a ser definida) fornecem corretores desta classe.

Definição

Dado um custo c , considere a família de matrizes $\{L_t\}_{t>0}$ definidas sobre $\#V(G) \times \#V(G)$ cujas entradas são dadas por

$$L_t(i,j) = \begin{cases} e^{-t c(i,j)} & \text{se } (i,j) \in A(G) \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin A(G) \end{cases}.$$

Ponto de Vista Assintótico

Nosso principal objetivo será

exibir corretores calibrados partindo de um ponto de vista assintótico,

isto é, mostrar que pontos de acumulação de uma família de autovetores de Perron-Frobenius (a ser definida) fornecem corretores desta classe.

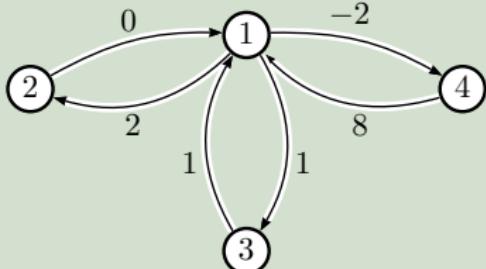
Definição

Dado um custo c , considere a família de matrizes $\{L_t\}_{t>0}$ definidas sobre $\#V(G) \times \#V(G)$ cujas entradas são dadas por

$$L_t(i,j) = \begin{cases} e^{-t c(i,j)} & \text{se } (i,j) \in A(G) \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin A(G) \end{cases}.$$

Exemplo

Para a função custo descrita por



$$c = \begin{bmatrix} * & 2 & 1 & -2 \\ 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 8 & * & * & * \end{bmatrix},$$

é fácil obter que $m(c) = 1$.

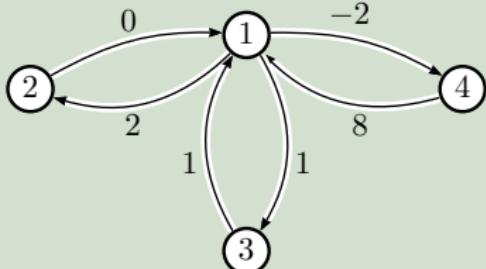
A família de matrizes associadas vem a ser simplesmente

$$\left\{ L_t = \begin{bmatrix} 0 & e^{-2t} & e^{-t} & e^{2t} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{-8t} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}_{t>0}.$$

Estamos interessados no comportamento assintótico em escala logarítmica de autovalores e autovetores desta família.

Exemplo

Para a função custo descrita por



$$c = \begin{bmatrix} * & 2 & 1 & -2 \\ 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 8 & * & * & * \end{bmatrix},$$

é fácil obter que $m(c) = 1$.

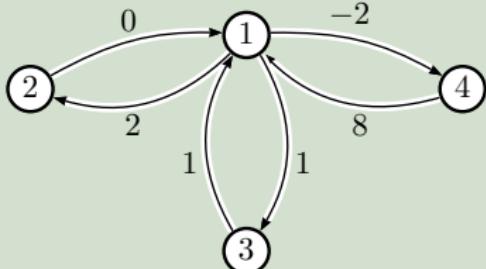
A família de matrizes associadas vem a ser simplesmente

$$\left\{ L_t = \begin{bmatrix} 0 & e^{-2t} & e^{-t} & e^{2t} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{-8t} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}_{t>0}.$$

Estamos interessados no comportamento assintótico em escala logarítmica de autovalores e autovetores desta família.

Exemplo

Para a função custo descrita por



$$c = \begin{bmatrix} * & 2 & 1 & -2 \\ 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 8 & * & * & * \end{bmatrix},$$

é fácil obter que $m(c) = 1$.

A família de matrizes associadas vem a ser simplesmente

$$\left\{ L_t = \begin{bmatrix} 0 & e^{-2t} & e^{-t} & e^{2t} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{-8t} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}_{t>0}.$$

Estamos interessados no comportamento assintótico em escala logarítmica de autovalores e autovetores desta família.

Exemplo

Observe que o polinômio característico da matriz transposta

$$L_t^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & e^{-t} & e^{-8t} \\ e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{2t} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{é } p_t(\zeta) = \zeta^2[\zeta^2 - (e^{-6t} + 2e^{-2t})],$$

o qual possui como raízes

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0,$$

$$\zeta_3 = -\sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}} \quad \text{e}$$

$$\zeta_4 = \sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}}.$$

Exemplo

Observe que o polinômio característico da matriz transposta

$$L_t^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & e^{-t} & e^{-8t} \\ e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{2t} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é $p_t(\zeta) = \zeta^2[\zeta^2 - (e^{-6t} + 2e^{-2t})],$

o qual possui como raízes

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0,$$

$$\zeta_3 = -\sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}} \quad \text{e}$$

$$\zeta_4 = \sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}}.$$

Denote o autovalor positivo por $\gamma_t = \sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}}$.

Exemplo

Observe que o polinômio característico da matriz transposta

$$L_t^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & e^{-t} & e^{-8t} \\ e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{2t} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é $p_t(\zeta) = \zeta^2[\zeta^2 - (e^{-6t} + 2e^{-2t})],$

o qual possui como raízes

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0,$$

$$\zeta_3 = -\sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}} \quad \text{e}$$

$$\zeta_4 = \sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}}.$$

Denote o autovalor positivo por $\kappa_t = \sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}}.$

Exemplo

Observe que o polinômio característico da matriz transposta

$$L_t^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & e^{-t} & e^{-8t} \\ e^{-2t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{2t} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é $p_t(\zeta) = \zeta^2[\zeta^2 - (e^{-6t} + 2e^{-2t})],$

o qual possui como raízes

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0,$$

$$\zeta_3 = -\sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}} \quad \text{e}$$

$$\zeta_4 = \sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}}.$$

Denote o autovalor positivo por $\kappa_t = \sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}}.$

Exemplo

Note agora que o comportamento assintótico deste autovalor é igual

$$\begin{aligned}
 -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}} \\
 &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log e^{-t} \sqrt{e^{-4t} + 2} \\
 &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log e^{-t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{e^{-4t} + 2} \\
 &= 1 + 0 = m(c).
 \end{aligned}$$

Considere o sistema $L_t^T \vec{y} = \kappa_t \vec{y}$, dado explicitamente por

$$\left\{
 \begin{array}{rcl}
 y_2 + y_3 e^{-t} + y_4 e^{-8t} &=& \kappa_t y_1 \\
 y_1 e^{-2t} &=& \kappa_t y_2 \\
 y_1 e^{-t} &=& \kappa_t y_3 \\
 y_1 e^{2t} &=& \kappa_t y_4
 \end{array}
 \right.,$$

cuja solução fornece o autovetor associado.

Exemplo

Note agora que o comportamento assintótico deste autovalor é igual

$$\begin{aligned}
 -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}} \\
 &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log e^{-t} \sqrt{e^{-4t} + 2} \\
 &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log e^{-t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{e^{-4t} + 2} \\
 &= 1 + 0 = m(c).
 \end{aligned}$$

Considere o sistema $L_t^T \vec{y} = \kappa_t \vec{y}$, dado explicitamente por

$$\left\{
 \begin{array}{rcl}
 y_2 + y_3 e^{-t} + y_4 e^{-8t} &=& \kappa_t y_1 \\
 y_1 e^{-2t} &=& \kappa_t y_2 \\
 y_1 e^{-t} &=& \kappa_t y_3 \\
 y_1 e^{2t} &=& \kappa_t y_4
 \end{array}
 \right.,$$

cuja solução fornece o autovetor associado.

Exemplo

Note agora que o comportamento assintótico deste autovalor é igual

$$\begin{aligned}
 -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}} \\
 &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log e^{-t} \sqrt{e^{-4t} + 2} \\
 &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log e^{-t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{e^{-4t} + 2} \\
 &= 1 + 0 = m(c).
 \end{aligned}$$

Considere o sistema $L_t^T \vec{y} = \kappa_t \vec{y}$, dado explicitamente por

$$\left\{
 \begin{array}{rcl}
 y_2 + y_3 e^{-t} + y_4 e^{-8t} &=& \kappa_t y_1 \\
 y_1 e^{-2t} &=& \kappa_t y_2 \\
 y_1 e^{-t} &=& \kappa_t y_3 \\
 y_1 e^{2t} &=& \kappa_t y_4
 \end{array}
 \right.,$$

cuja solução fornece o autovetor associado.

Exemplo

Note agora que o comportamento assintótico deste autovalor é igual

$$\begin{aligned}
 -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}} \\
 &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log e^{-t} \sqrt{e^{-4t} + 2} \\
 &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log e^{-t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{e^{-4t} + 2} \\
 &= 1 + 0 = m(c).
 \end{aligned}$$

Considere o sistema $L_t^T \vec{y} = \kappa_t \vec{y}$, dado explicitamente por

$$\left\{
 \begin{array}{rcl}
 y_2 + y_3 e^{-t} + y_4 e^{-8t} &=& \kappa_t y_1 \\
 y_1 e^{-2t} &=& \kappa_t y_2 \\
 y_1 e^{-t} &=& \kappa_t y_3 \\
 y_1 e^{2t} &=& \kappa_t y_4
 \end{array}
 \right.,$$

cuja solução fornece o autovetor associado.

Exemplo

Note agora que o comportamento assintótico deste autovalor é igual

$$\begin{aligned}
 -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{e^{-6t} + 2e^{-2t}} \\
 &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log e^{-t} \sqrt{e^{-4t} + 2} \\
 &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log e^{-t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{e^{-4t} + 2} \\
 &= 1 + 0 = m(c).
 \end{aligned}$$

Considere o sistema $L_t^T \vec{y} = \kappa_t \vec{y}$, dado explicitamente por

$$\left\{
 \begin{array}{rcl}
 y_2 + y_3 e^{-t} + y_4 e^{-8t} &=& \kappa_t y_1 \\
 y_1 e^{-2t} &=& \kappa_t y_2 \\
 y_1 e^{-t} &=& \kappa_t y_3 \\
 y_1 e^{2t} &=& \kappa_t y_4
 \end{array}
 \right.,$$

cuja solução fornece o autovetor associado.

Exemplo

Resolvendo o sistema linear apresentado, obtemos

$$\vec{v}_t = (v_t(1), v_t(2), v_t(3), v_t(4))^T = \left(1, \frac{e^{-2t}}{\kappa_t}, \frac{e^{-t}}{\kappa_t}, \frac{e^{2t}}{\kappa_t}\right)^T.$$

Denotando por $u(i) := -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log v_t(i)$, obtemos

$$u = (u(1), u(2), u(3), u(4))^T = (0, 1, 0, -3)^T.$$

Além disso, o vetor u é um corretor calibrado para o custo

$$c = \begin{bmatrix} * & 2 & 1 & -2 \\ 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 8 & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Veremos que são válidas as propriedades relativas ao comportamento assintótico de autovalores e autovetores da família $\{L_t^T\}_{t>0}$ descritas no exemplo acima.

Exemplo

Resolvendo o sistema linear apresentado, obtemos

$$\vec{v}_t = (v_t(1), v_t(2), v_t(3), v_t(4))^T = \left(1, \frac{e^{-2t}}{\kappa_t}, \frac{e^{-t}}{\kappa_t}, \frac{e^{2t}}{\kappa_t}\right)^T.$$

Denotando por $u(i) := -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log v_t(i)$, obtemos

$$u = (u(1), u(2), u(3), u(4))^T = (0, 1, 0, -3)^T.$$

Além disso, o vetor u é um corretor calibrado para o custo

$$c = \begin{bmatrix} * & 2 & 1 & -2 \\ 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 8 & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Veremos que são válidas as propriedades relativas ao comportamento assintótico de autovalores e autovetores da família $\{L_t^T\}_{t>0}$ descritas no exemplo acima.

Exemplo

Resolvendo o sistema linear apresentado, obtemos

$$\vec{v}_t = (v_t(1), v_t(2), v_t(3), v_t(4))^T = \left(1, \frac{e^{-2t}}{\kappa_t}, \frac{e^{-t}}{\kappa_t}, \frac{e^{2t}}{\kappa_t}\right)^T.$$

Denotando por $u(i) := -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log v_t(i)$, obtemos

$$u = (u(1), u(2), u(3), u(4))^T = (0, 1, 0, -3)^T.$$

Além disso, o vetor u é um corretor calibrado para o custo

$$c = \begin{bmatrix} * & 2 & 1 & -2 \\ 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 8 & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Veremos que são válidas as propriedades relativas ao comportamento assintótico de autovalores e autovetores da família $\{L_t^T\}_{t>0}$ descritas no exemplo acima.

Exemplo

Resolvendo o sistema linear apresentado, obtemos

$$\vec{v}_t = (v_t(1), v_t(2), v_t(3), v_t(4))^T = \left(1, \frac{e^{-2t}}{\kappa_t}, \frac{e^{-t}}{\kappa_t}, \frac{e^{2t}}{\kappa_t}\right)^T.$$

Denotando por $u(i) := -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log v_t(i)$, obtemos

$$u = (u(1), u(2), u(3), u(4))^T = (0, 1, 0, -3)^T.$$

Além disso, o vetor u é um corretor calibrado para o custo

$$c = \begin{bmatrix} * & 2 & 1 & -2 \\ 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 8 & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Veremos que são válidas as propriedades relativas ao comportamento assintótico de autovalores e autovetores da família $\{L_t^T\}_{t>0}$ descritas no exemplo acima.

Característica marcante na família $\{L_t^T\}_{t>0}$ é o fato de

todas as entradas para todas as matrizes serem não negativas.

Apresentamos um resultado clássico da teoria de matrizes não negativas.

Teorema (Perron-Frobenius)

Seja L uma matriz quadrada, de entradas não negativas e irredutível.
Então,

- $L\vec{v}_L = \kappa_L \vec{v}_L$, para algum $\kappa_L > 0$ e algum vetor \vec{v}_L com entradas positivas;
- o autovalor κ_L é geometricamente simples;
- os únicos autovetores não nulos de L com entradas não negativas são os múltiplos escalares de \vec{v}_L ;
- κ_L é o autovalor maximal em valor absoluto, ou melhor, se $\mu \neq \kappa_L$ é um autovalor de L , então $|\mu| < \kappa_L$.

Em particular, κ_L e \vec{v}_L serão denominados, respectivamente, autovalor e autovetor de Perron-Frobenius.

Característica marcante na família $\{L_t^T\}_{t>0}$ é o fato de

todas as entradas para todas as matrizes serem não negativas.

Apresentamos um resultado clássico da teoria de matrizes não negativas.

Teorema (Perron-Frobenius)

*Seja L uma matriz quadrada, de entradas não negativas e irreductível.
Então,*

- ① $L\vec{v}_L = \kappa_L \vec{v}_L$, para algum $\kappa_L > 0$ e algum vetor \vec{v}_L com estradas positivas;
- ② o autovalor κ_L é geometricamente simples;
- ③ os únicos autovetores não nulos de L com entradas não negativas são os múltiplos escalares de \vec{v}_L ;
- ④ κ_L é o autovalor maximal em valor absoluto, ou melhor, se $\mu \neq \kappa_L$ é um autovalor de L , então $|\mu| < \kappa_L$.

Em particular, κ_L e \vec{v}_L serão denominados, respectivamente, autovalor e autovetor de Perron-Frobenius.

Característica marcante na família $\{L_t^T\}_{t>0}$ é o fato de

todas as entradas para todas as matrizes serem não negativas.

Apresentamos um resultado clássico da teoria de matrizes não negativas.

Teorema (Perron-Frobenius)

Seja L uma matriz quadrada, de entradas não negativas e irreductível.
Então,

- ① $L\vec{v}_L = \kappa_L \vec{v}_L$, para algum $\kappa_L > 0$ e algum vetor \vec{v}_L com estradas positivas;
- ② o autovalor κ_L é geometricamente simples;
- ③ os únicos autovetores não nulos de L com entradas não negativas são os múltiplos escalares de \vec{v}_L ;
- ④ κ_L é o autovalor maximal em valor absoluto, ou melhor, se $\mu \neq \kappa_L$ é um autovalor de L , então $|\mu| < \kappa_L$.

Em particular, κ_L e \vec{v}_L serão denominados, respectivamente, autovalor e autovetor de Perron-Frobenius.

Característica marcante na família $\{L_t^T\}_{t>0}$ é o fato de

todas as entradas para todas as matrizes serem não negativas.

Apresentamos um resultado clássico da teoria de matrizes não negativas.

Teorema (Perron-Frobenius)

Seja L uma matriz quadrada, de entradas não negativas e irreductível.
Então,

- ① $L\vec{v}_L = \kappa_L \vec{v}_L$, para algum $\kappa_L > 0$ e algum vetor \vec{v}_L com estradas positivas;
- ② o autovalor κ_L é geometricamente simples;
- ③ os únicos autovetores não nulos de L com entradas não negativas são os múltiplos escalares de \vec{v}_L ;
- ④ κ_L é o autovalor maximal em valor absoluto, ou melhor, se $\mu \neq \kappa_L$ é um autovalor de L , então $|\mu| < \kappa_L$.

Em particular, κ_L e \vec{v}_L serão denominados, respectivamente, autovalor e autovetor de Perron-Frobenius.

Característica marcante na família $\{L_t^T\}_{t>0}$ é o fato de

todas as entradas para todas as matrizes serem não negativas.

Apresentamos um resultado clássico da teoria de matrizes não negativas.

Teorema (Perron-Frobenius)

Seja L uma matriz quadrada, de entradas não negativas e irreductível.
Então,

- ① $L\vec{v}_L = \kappa_L \vec{v}_L$, para algum $\kappa_L > 0$ e algum vetor \vec{v}_L com estradas positivas;
- ② o autovalor κ_L é geometricamente simples;
- ③ os únicos autovetores não nulos de L com entradas não negativas são os múltiplos escalares de \vec{v}_L ;
- ④ κ_L é o autovalor maximal em valor absoluto, ou melhor, se $\mu \neq \kappa_L$ é um autovalor de L , então $|\mu| < \kappa_L$.

Em particular, κ_L e \vec{v}_L serão denominados, respectivamente, autovalor e autovetor de Perron-Frobenius.

Característica marcante na família $\{L_t^T\}_{t>0}$ é o fato de

todas as entradas para todas as matrizes serem não negativas.

Apresentamos um resultado clássico da teoria de matrizes não negativas.

Teorema (Perron-Frobenius)

Seja L uma matriz quadrada, de entradas não negativas e irreductível.
Então,

- ① $L\vec{v}_L = \kappa_L \vec{v}_L$, para algum $\kappa_L > 0$ e algum vetor \vec{v}_L com estradas positivas;
- ② o autovalor κ_L é geometricamente simples;
- ③ os únicos autovetores não nulos de L com entradas não negativas são os múltiplos escalares de \vec{v}_L ;
- ④ κ_L é o autovalor maximal em valor absoluto, ou melhor, se $\mu \neq \kappa_L$ é um autovalor de L , então $|\mu| < \kappa_L$.

Em particular, κ_L e \vec{v}_L serão denominados, respectivamente, autovalor e autovetor de Perron-Frobenius.

Resultado principal

Denote $n = \#V(G)$. Considere as famílias

$$\{\kappa_t\}_{t>0} \quad \text{e} \quad \left\{ \vec{v}_t = (v_t(1), \dots, v_t(n)) \right\}_{t>0}$$

formadas, respectivamente, por autovalores e autovetores de Perron-Frobenius de cada uma das matrizes pertencentes a família de matrizes transpostas $\{L_t^T\}_{t>0}$.

Observação

Para que \vec{v}_t esteja bem definido, levamos em conta também \vec{w}_t autovetor à direita da matriz L_t associado ao autovalor κ_t e demandamos que

$$\sum_{k=1}^n v_t(k) w_t(k) = 1 \quad \text{e} \quad v_t(1) = 1 \quad \forall t > 0.$$

Resultado principal

Denote $n = \#V(G)$. Considere as famílias

$$\{\kappa_t\}_{t>0} \quad \text{e} \quad \left\{ \vec{v}_t = (v_t(1), \dots, v_t(n)) \right\}_{t>0}$$

formadas, respectivamente, por autovalores e autovetores de Perron-Frobenius de cada uma das matrizes pertencentes a família de matrizes transpostas $\{L_t^T\}_{t>0}$.

Observação

Para que \vec{v}_t esteja bem definido, levamos em conta também \vec{w}_t autovetor à direita da matriz L_t associado ao autovalor κ_t e demandamos que

$$\sum_{k=1}^n v_t(k) w_t(k) = 1 \quad \text{e} \quad v_t(1) = 1 \quad \forall t > 0.$$

O comportamento assintótico em escala logarítmica de tais autovalores e autovetores de Perron-Frobenius fornecem o seguinte relevante resultado.

Teorema

- ① Em termos dos autovalores de Perron-Frobenius, a constante cíclica minimal pode ser caracterizada como

$$m(c) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t.$$

- ② As famílias $\{\frac{1}{t} \log v_t(i)\}_{t>0}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, admitem pontos de acumulação quando $t \rightarrow \infty$. Para toda sequência de números reais $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, com $t_k \rightarrow \infty$, com respeito à qual existem os limites

$$u(i) := - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log v_{t_k}(i), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

o vetor $u := (u(1), \dots, u(n))$ assim obtido é um corretor calibrado para o custo c .

O comportamento assintótico em escala logarítmica de tais autovalores e autovetores de Perron-Frobenius fornecem o seguinte relevante resultado.

Teorema

- ① Em termos dos autovalores de Perron-Frobenius, a constante cíclica minimal pode ser caracterizada como

$$m(c) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t.$$

- ② As famílias $\{\frac{1}{t} \log v_t(i)\}_{t>0}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, admitem pontos de acumulação quando $t \rightarrow \infty$. Para toda sequência de números reais $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, com $t_k \rightarrow \infty$, com respeito à qual existem os limites

$$u(i) := - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log v_{t_k}(i), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

o vetor $u := (u(1), \dots, u(n))$ assim obtido é um corretor calibrado para o custo c .

O comportamento assintótico em escala logarítmica de tais autovalores e autovetores de Perron-Frobenius fornecem o seguinte relevante resultado.

Teorema

- ① *Em termos dos autovalores de Perron-Frobenius, a constante cíclica minimal pode ser caracterizada como*

$$m(c) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t.$$

- ② *As famílias $\{\frac{1}{t} \log v_t(i)\}_{t>0}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, admitem pontos de acumulação quando $t \rightarrow \infty$. Para toda sequência de números reais $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, com $t_k \rightarrow \infty$, com respeito à qual existem os limites*

$$u(i) := - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log v_{t_k}(i), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

o vetor $u := (u(1), \dots, u(n))$ assim obtido é um corretor calibrado para o custo c .

O comportamento assintótico em escala logarítmica de tais autovalores e autovetores de Perron-Frobenius fornecem o seguinte relevante resultado.

Teorema

- ① Em termos dos autovalores de Perron-Frobenius, a constante cíclica minimal pode ser caracterizada como

$$m(c) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t.$$

- ② As famílias $\{\frac{1}{t} \log v_t(i)\}_{t>0}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, admitem pontos de acumulação quando $t \rightarrow \infty$. Para toda sequência de números reais $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, com $t_k \rightarrow \infty$, com respeito à qual existem os limites

$$u(i) := - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log v_{t_k}(i), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

o vetor $u := (u(1), \dots, u(n))$ assim obtido é um corretor calibrado para o custo c .

Demonstração

Primeiramente, queremos garantir que

$$m(c) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t.$$

Tal item seguirá de forma imediata da proposição.

Proposição

Para todo $t > 0$, verifica-se

$$m(c) - \frac{1}{t} \log n^2 \leq -\frac{1}{t} \log \kappa_t \leq m(c).$$

$$\phi(x) = -x \log x,$$

Demonstração

Primeiramente, queremos garantir que

$$m(c) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t.$$

Tal item seguirá de forma imediata da proposição.

Proposição

Para todo $t > 0$, verifica-se

$$m(c) - \frac{1}{t} \log n^2 \leq -\frac{1}{t} \log \kappa_t \leq m(c).$$

Para a demonstração esta proposição, inicialmente, considere a aplicação

$$\phi(x) = -x \log x,$$

colocando $\phi(0) = 0$ (de modo que seja contínua sobre $[0, 1]$).

Demonstração

Primeiramente, queremos garantir que

$$m(c) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t.$$

Tal item seguirá de forma imediata da proposição.

Proposição

Para todo $t > 0$, verifica-se

$$m(c) - \frac{1}{t} \log n^2 \leq -\frac{1}{t} \log \kappa_t \leq m(c).$$

Para a demonstração esta proposição, inicialmente, considere a aplicação

$$\phi(x) = -x \log x,$$

colocando $\phi(0) = 0$ (de modo que seja contínua sobre $[0, 1]$).

Também necessitaremos do seguinte lema.

Lema

Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ números reais. Sobre o conjunto simplexo $\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$, a função

$$F(x_1, \dots, x_m) := - \sum_{i=1}^m x_i \log x_i + \sum_{i=1}^m x_i \alpha_i$$

atinge seu máximo valor $\log \sum_{i=1}^m e^{\alpha_i}$ somente no ponto

$$\left(\sum_{i=1}^m e^{\alpha_i} \right)^{-1} (e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}).$$

Observação

Na verdade, este resultado trata-se de uma versão elementar de fundamental princípio maximal empregado no estudo de estados de Gibbs em mecânica estatística do equilíbrio.

Também necessitaremos do seguinte lema.

Lema

Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ números reais. Sobre o conjunto simplexo $\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$, a função

$$F(x_1, \dots, x_m) := - \sum_{i=1}^m x_i \log x_i + \sum_{i=1}^m x_i \alpha_i$$

atinge seu máximo valor $\log \sum_{i=1}^m e^{\alpha_i}$ somente no ponto

$$\left(\sum_{i=1}^m e^{\alpha_i} \right)^{-1} (e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}).$$

Observação

Na verdade, este resultado trata-se de uma versão elementar de fundamental princípio maximal empregado no estudo de estados de Gibbs em mecânica estatística do equilíbrio.

Investigamos agora primeira afirmação do segundo item:

$$\left\{ \frac{1}{t} \log v_t(i) \right\}_{t>0}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

admite pontos de acumulação quando $t \rightarrow \infty$.

Visto que impomos $v_t(1) = 1$ para todo $t > 0$, a afirmação acima é uma consequência direta da próxima proposição.

Proposição

Existe constante $K(c, n) > 0$ tal que

$$\frac{1}{K(c, n)^t} \leq \frac{v_t(i)}{v_t(j)} \leq K(c, n)^t \quad \forall i, j \in V(G), \quad \forall t \geq 1.$$

Observação

Ferramentas matemáticas mais sofisticadas garantem que há convergência no limite em questão, isto é, que em escala logarítmica autovetores de Perron-Frobenius de fato convergem.

Investigamos agora primeira afirmação do segundo item:

$$\left\{ \frac{1}{t} \log v_t(i) \right\}_{t>0}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

admite pontos de acumulação quando $t \rightarrow \infty$.

Visto que impomos $v_t(1) = 1$ para todo $t > 0$, a afirmação acima é uma consequência direta da próxima proposição.

Proposição

Existe constante $K(c, n) > 0$ tal que

$$\frac{1}{K(c, n)^t} \leq \frac{v_t(i)}{v_t(j)} \leq K(c, n)^t \quad \forall i, j \in V(G), \quad \forall t \geq 1.$$

Observação

Ferramentas matemáticas mais sofisticadas garantem que há convergência no limite em questão, isto é, que em escala logarítmica autovetores de Perron-Frobenius de fato convergem.

Investigamos agora primeira afirmação do segundo item:

$$\left\{ \frac{1}{t} \log v_t(i) \right\}_{t>0}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

admite pontos de acumulação quando $t \rightarrow \infty$.

Visto que impomos $v_t(1) = 1$ para todo $t > 0$, a afirmação acima é uma consequência direta da próxima proposição.

Proposição

Existe constante $K(c, n) > 0$ tal que

$$\frac{1}{K(c, n)^t} \leq \frac{v_t(i)}{v_t(j)} \leq K(c, n)^t \quad \forall i, j \in V(G), \quad \forall t \geq 1.$$

Observação

Ferramentas matemáticas mais sofisticadas garantem que há convergência no limite em questão, isto é, que em escala logarítmica autovetores de Perron-Frobenius de fato convergem.

A parte restante do segundo item é detalhada a seguir.

A função $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ cujos valores funcionais são dados pelos limites

$$u(i) := - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log v_{t_k}(i), \quad \forall i \in V(G),$$

vem a ser um corretor calibrado para c .

Para isto mostrar, introduzimos a escritura

$$v_t(i) = e^{-t g_t(i)} \quad \text{e} \quad \kappa_t = e^{-t \pi_t}.$$

se traduz então como

$$\sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t [c(i,j) + g_t(i)]} = e^{-t [g_t(j) - \pi_t]}, \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

onde M é a matriz de transição associada ao grafo G .

A parte restante do segundo item é detalhada a seguir.

A função $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ cujos valores funcionais são dados pelos limites

$$u(i) := -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log v_{t_k}(i), \quad \forall i \in V(G),$$

vem a ser um corretor calibrado para c .

Para isto mostrar, introduzimos a escritura

$$v_t(i) = e^{-t g_t(i)} \quad \text{e} \quad \kappa_t = e^{-t \pi_t}.$$

Observe que o fato de estarmos lidando com autovetores e autovalor da matriz L_t^\top (isto é, $L_t^\top v_t = \kappa_t v_t$)

A parte restante do segundo item é detalhada a seguir.

A função $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ cujos valores funcionais são dados pelos limites

$$u(i) := -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log v_{t_k}(i), \quad \forall i \in V(G),$$

vem a ser um corretor calibrado para c .

Para isto mostrar, introduzimos a escritura

$$v_t(i) = e^{-t g_t(i)} \quad \text{e} \quad \kappa_t = e^{-t \pi_t}.$$

Observe que o fato de estarmos lidando com autovetores e autovalor da matriz L_t^T (isto é, $L_t^T v_t = \kappa_t v_t$) se traduz então como

$$\sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t[c(i,j)+g_t(i)]} = e^{-t[g_t(j)+\pi_t]}, \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

onde M é a matriz de transição associada ao grafo G .

A parte restante do segundo item é detalhada a seguir.

A função $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ cujos valores funcionais são dados pelos limites

$$u(i) := -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log v_{t_k}(i), \quad \forall i \in V(G),$$

vem a ser um corretor calibrado para c .

Para isto mostrar, introduzimos a escritura

$$v_t(i) = e^{-t g_t(i)} \quad \text{e} \quad \kappa_t = e^{-t \pi_t}.$$

Observe que o fato de estarmos lidando com autovetores e autovalor da matriz L_t^T (isto é, $L_t^T v_t = \kappa_t v_t$) se traduz então como

$$\sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t[c(i,j)+g_t(i)]} = e^{-t[g_t(j)+\pi_t]}, \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

onde M é a matriz de transição associada ao grafo G .

Em particular, de

$$\sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t[c(i,j) + g_t(i) - g_t(j) - \pi_t]} = 1$$

segue que

$$c(i,j) + g_t(i) - g_t(j) - \pi_t \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A(G),$$

Note então que, ao passar ao limite na expressão acima, obtemos

$$\min_{j \in \mathcal{G}_i} [c(i,j) + u(i) - u(j)] \geq m(c),$$

ou seja, u é um corretor para o custo c .

Em particular, de

$$\sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t[c(i,j) + g_t(i) - g_t(j) - \pi_t]} = 1$$

segue que

$$c(i,j) + g_t(i) - g_t(j) - \pi_t \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A(G),$$

ou melhor,

$$\min_{\substack{i \xrightarrow{G} j}} [c(i,j) + g_t(i) - g_t(j)] \geq \pi_t.$$

ou seja, π é um corretor para o custo c .

Em particular, de

$$\sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t[c(i,j) + g_t(i) - g_t(j) - \pi_t]} = 1$$

segue que

$$c(i,j) + g_t(i) - g_t(j) - \pi_t \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A(G),$$

ou melhor,

$$\min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i,j) + g_t(i) - g_t(j)] \geq \pi_t.$$

Note então que, ao passar ao limite na expressão acima, obtemos

$$\min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i,j) + u(i) - u(j)] \geq m(c),$$

Em particular, de

$$\sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t[c(i,j) + g_t(i) - g_t(j) - \pi_t]} = 1$$

segue que

$$c(i,j) + g_t(i) - g_t(j) - \pi_t \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A(G),$$

ou melhor,

$$\min_{\substack{i \xrightarrow{G} j}} [c(i,j) + g_t(i) - g_t(j)] \geq \pi_t.$$

Note então que, ao passar ao limite na expressão acima, obtemos

$$\min_{\substack{i \xrightarrow{G} j}} [c(i,j) + u(i) - u(j)] \geq m(c),$$

ou seja, u é um corretor para o custo c .

Em particular, de

$$\sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t[c(i,j) + g_t(i) - g_t(j) - \pi_t]} = 1$$

segue que

$$c(i,j) + g_t(i) - g_t(j) - \pi_t \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A(G),$$

ou melhor,

$$\min_{\substack{i \xrightarrow{G} j}} [c(i,j) + g_t(i) - g_t(j)] \geq \pi_t.$$

Note então que, ao passar ao limite na expressão acima, obtemos

$$\min_{\substack{i \xrightarrow{G} j}} [c(i,j) + u(i) - u(j)] \geq m(c),$$

ou seja, u é um corretor para o custo c .

Suponha que u não fosse um corretor calibrado, existiria vértice $j \in V(G)$ para o qual valeria

$$\min_{\substack{i \rightarrow j}} [c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c)] =: \eta > 0.$$

$$\overleftarrow{\overrightarrow{u}} \geq 0,$$



Suponha que u não fosse um corretor calibrado, existiria vértice $j \in V(G)$ para o qual valeria

$$\min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c)] =: \eta > 0.$$

Porém, isto provocaria, para k suficientemente grande, a evidente contradição

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t_k [c(i,j) + g_{t_k}(i) - g_{t_k}(j) - \pi_{t_k}]} \\ &\leq \sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t_k \frac{\eta}{2}} \end{aligned}$$

Suponha que u não fosse um corretor calibrado, existiria vértice $j \in V(G)$ para o qual valeria

$$\min_{\substack{i \in G \\ i \rightarrow j}} [c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c)] =: \eta > 0.$$

Porém, isto provocaria, para k suficientemente grande, a evidente contradição

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t_k[c(i,j)+g_{t_k}(i)-g_{t_k}(j)-\pi_{t_k}]} \\ &\leq \sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t_k \frac{\eta}{2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$



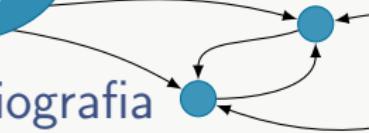
Suponha que u não fosse um corretor calibrado, existiria vértice $j \in V(G)$ para o qual valeria

$$\min_{\substack{i \in G \\ i \rightarrow j}} [c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c)] =: \eta > 0.$$

Porém, isto provocaria, para k suficientemente grande, a evidente contradição

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t_k [c(i,j) + g_{t_k}(i) - g_{t_k}(j) - \pi_{t_k}]} \\ &\leq \sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t_k \frac{\eta}{2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□



Bibliografia



E. Garibaldi e J. T. A. Gomes,
Otimização de Médias sobre Grafos Orientados,
Coleção publicações matemáticas (29 CBM) 12, IMPA, 2013.

Seções: 4.2 (páginas 60 a 69);



R. B. Bapat e T. E. S. Raghavan,
Nonnegative matrices and applications,
Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1997.



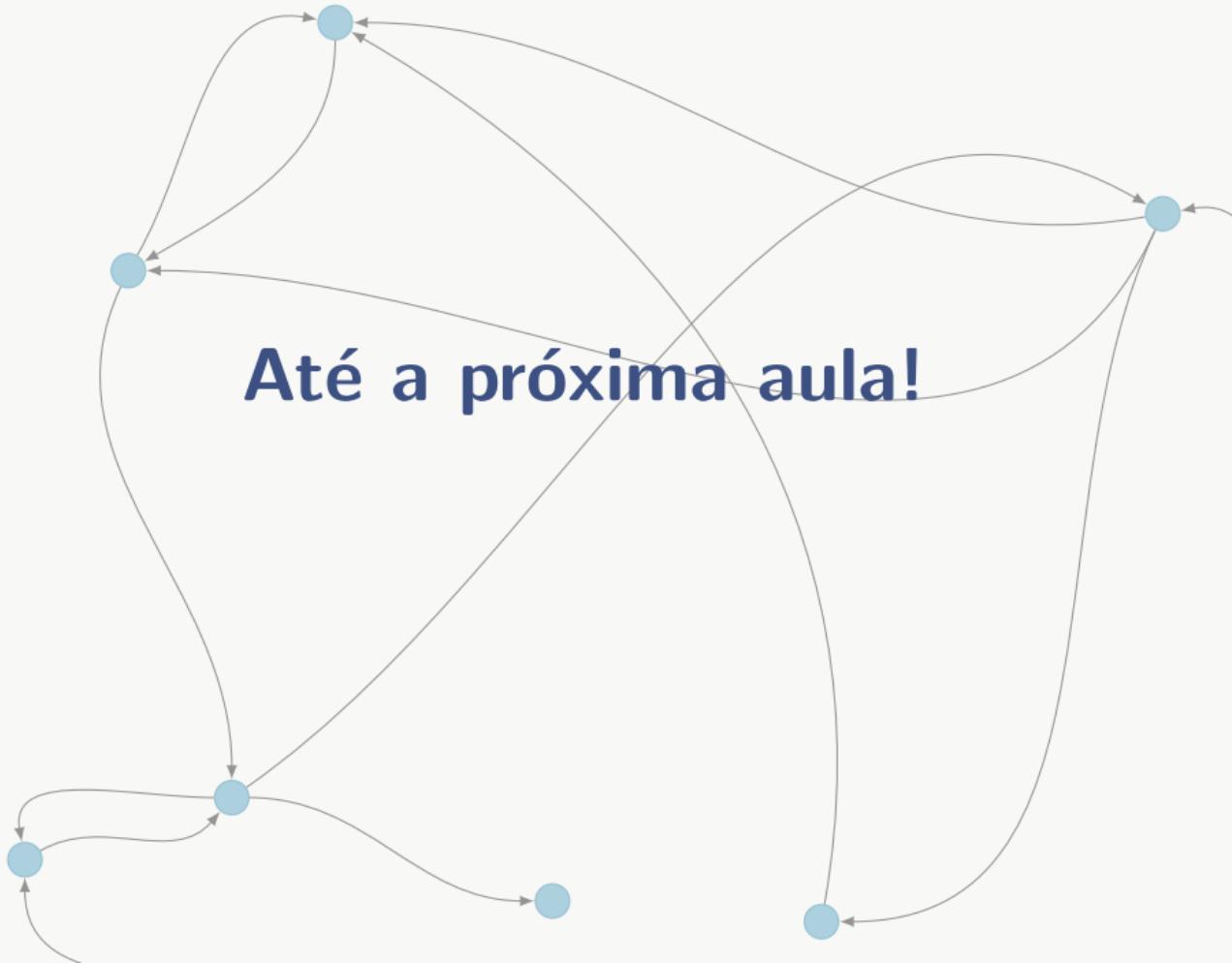
E. Garibaldi e Ph. Thieullen,
Description of some ground states by Puiseux techniques,
Journal of Statistical Physics 146 (2012), 125-180.

Sinopse da Aula 06

- Apresentamos os principais conceitos da álgebra *min-plus*:
 - conjunto real *min-plus*;
 - espaço n -dimensional *min-plus*;
 - álgebra matricial *min-plus*.
- Investigamos os pormenores destas estruturas e comparamos com a álgebra usual.

Sinopse da Aula 06

- Apresentamos os principais conceitos da álgebra *min-plus*:
 - conjunto real *min-plus*;
 - espaço n -dimensional *min-plus*;
 - álgebra matricial *min-plus*.
- Investigamos os pormenores destas estruturas e comparamos com a álgebra usual.



A complex directed graph with 6 nodes and many edges. The nodes are light blue circles. The edges are grey lines with arrows indicating direction. The graph has several cycles and some long-distance connections. It is centered around a node at the bottom center.

Até a próxima aula!