

# **Otimização de Médias sobre Grafos Orientados**



# Publicações Matemáticas

## Otimização de Médias sobre Grafos Orientados

Eduardo Garibaldi  
IMECC/UNICAMP

João Tiago Assunção Gomes  
IMECC/UNICAMP



29º Colóquio Brasileiro de Matemática

Copyright © 2013 by Eduardo Garibaldi e João Tiago Assunção Gomes

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Noni Geiger / Sérgio R. Vaz

## 29º Colóquio Brasileiro de Matemática

- Análise em Fractais – Milton Jara
- Asymptotic Models for Surface and Internal Waves – Jean-Claude Saut
- Billhares: Aspectos Físicos e Matemáticos – Alberto Saa e Renato de Sá Teles
- Controle Ótimo: Uma Introdução na Forma de Problemas e Soluções – Alex L. de Castro
- Eigenvalues on Riemannian Manifolds – Changyu Xia
- Equações Algébricas e a Teoria de Galois – Rodrigo Gondim, Maria Eulalia de Moraes Melo e Francesco Russo
- Ergodic Optimization, Zero Temperature Limits and the Max-Plus Algebra – Alexandre Baraviera, Renaud Leplaideur e Artur Lopes
- Expansive Measures – Carlos A. Morales e Víctor F. Sirvent
- Funções de Operador e o Estudo do Espectro – Augusto Armando de Castro Júnior
- Introdução à Geometria Finsler – Umberto L. Hryniewicz e Pedro A. S. Salomão
- Introdução aos Métodos de Crivos em Teoria dos Números – Júlio Andrade
- **Otimização de Médias sobre Grafos Orientados – Eduardo Garibaldi e João Tiago Assunção Gomes**

ISBN: 978-85-244-0361-3

**Distribuição:** IMPA  
Estrada Dona Castorina, 110  
22460-320 Rio de Janeiro, RJ  
E-mail: [ddic@impa.br](mailto:ddic@impa.br)  
<http://www.impa.br>

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>v</b>
<b>1 Problema dos pontos de entrega</b>	<b>1</b>
1.1 Protótipo de questão . . . . .	1
1.2 Linguagem da teoria de grafos . . . . .	4
Exercícios . . . . .	11
<b>2 Otimização de médias</b>	<b>13</b>
2.1 Constante cíclica minimal . . . . .	14
2.1.1 Algoritmo de Karp . . . . .	16
2.1.2 Regularidade e representação dual . . . . .	20
2.2 Conjunto cíclico minimal e corretores . . . . .	30
Exercícios . . . . .	35
<b>3 Algoritmo de Floría-Griffiths</b>	<b>37</b>
3.1 Descrição do algoritmo . . . . .	38
3.2 Comentários sobre a verificação . . . . .	41
Exercícios . . . . .	49
<b>4 Corretores especiais</b>	<b>53</b>
4.1 Corretores separantes . . . . .	54
4.2 Corretores calibrados . . . . .	60
4.2.1 Teorema de Perron-Frobenius . . . . .	69
Exercícios . . . . .	79

<b>5 Álgebra <i>min-plus</i></b>	<b>83</b>
5.1 Linguagem da álgebra <i>min-plus</i> . . . . .	84
5.1.1 Problema de autovalor e autovetor . . . . .	94
5.1.2 Tradução em otimização de médias . . . . .	101
5.2 Operador de Kleene . . . . .	106
5.3 Subautovetores . . . . .	111
5.3.1 Subgrafo crítico . . . . .	113
5.3.2 Propriedades geométricas . . . . .	118
Exercícios . . . . .	123
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>129</b>

# Prefácio

A aplicabilidade dos mecanismos de otimização existentes para grafos orientados – como, por exemplo, às redes computacionais, às simulações de cenários econômicos, à modelagem de compostos orgânicos, *etc.* – tem cativado cada vez mais interesse por novas técnicas e métodos mais eficientes. Há diversas vertentes matemáticas e computacionais concentradas neste tema, com ferramentas teóricas de variados graus de sofisticação sendo empregadas na resolução de relevantes questões envolvendo minimização ou maximização.

Este texto, por sua vez, deve ser visto sobretudo como material de formação para alunos de graduação nas áreas de Matemática, Matemática Aplicada, Física, Ciência da Computação e Engenharias. De modo mais geral, pode tirar proveito deste livro qualquer estudante de ensino superior que tenha interesse por problemas de otimização em grafos orientados, em múltiplas formas de apresentação e de aplicação.

Decidimos estabelecer como pré-requisitos para a leitura deste material o conhecimento de cálculo vetorial e álgebra linear. Se por um lado tais disciplinas são ministradas dentre as matérias iniciais em qualquer curso das áreas de exatas e de tecnologia no país, de outra parte esta escolha claramente limita o nível de complexidade de tópicos a serem contemplados. Ainda assim, abordaremos com o possível patamar de detalhamento aspectos introdutórios de várias áreas relacionadas com otimização: de teoria de matrizes não negativas a álgebra *min-plus*, de aspectos elementares de mecânica estatística do equilíbrio a primeiras noções de otimização ergódica.

Optamos deliberadamente em começar expondo problema motivador, para só então esmiuçar pouco a pouco instrumentos teóricos

úteis em sua resolução. Em linhas abrangentes, neste material desenvolvemos um estudo de otimização sobre grafos a partir de uma perspectiva de cálculo de médias, com aplicação direta a problemas de distribuição e logística.

Este notas foram especialmente preparadas para servir de livro-texto de curso introdutório ministrado no 29º Colóquio Brasileiro de Matemática (IMPA - Rio de Janeiro), em julho de 2013. Sua estrutura foi, portanto, arquitetada para um minicurso de duas semanas, sendo a primeira parte composta de teoria básica e contendo a segunda aprofundamentos em formulação equivalente do ponto de vista teórico.

## Um resumo esquemático

A fim de que o leitor tenha uma impressão inicial sobre o conteúdo destas notas, fornecemos sinopse de cada um dos capítulos.

### *Capítulo 1 - Problema dos pontos de entrega:*

Apresentam-se o problema dos pontos de entrega e os questionamentos naturais daí decorrentes. São introduzidas as noções básicas da teoria de grafos necessárias para a modelização do problema, como, por exemplo, caminhos e ciclos, representação matricial, conexidade, *etc.* (Ressaltamos que o conhecimento prévio de teoria de grafos não é solicitado.) Em conclusão, começamos a formalizar matematicamente o problema dos pontos de entrega.

*Capítulo 2 - Otimização de médias:* Descreve-se o problema abordado como uma questão de minimização de um custo  $c$  sobre os ciclos de um grafo orientado conexo. Introduz-se o principal conceito, a constante cíclica minimal  $m(c)$ , isto é, o valor de mínimo global do modelo. Demonstramos o clássico algoritmo de Karp, o qual caracteriza explicitamente esta constante. Discorre-se sobre a regularidade de  $m(c)$  com respeito à variação do custo  $c$  e obtém-se ainda representação dual para constante cíclica minimal. Consideramos também o conjunto cíclico minimal  $\mathcal{M}(c)$ , ou seja, os elementos que realizam a minimização em nosso problema. Explicamos estratégia para facilitar a identificação deste conjunto a partir de corretores, conceito de fundamental importância nos capítulos seguintes.

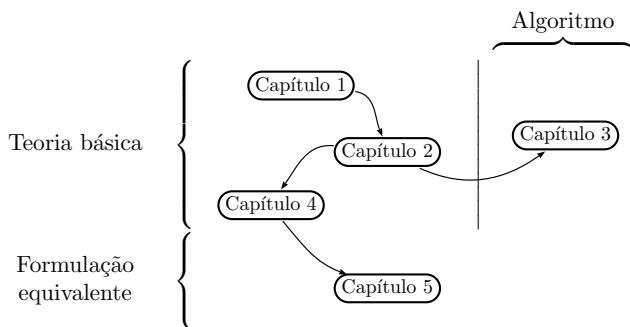
**Capítulo 3 - Algoritmo de Floría-Griffiths:** Apresenta-se o operador de Lax-Oleinik  $T_c$  e detalha-se o algoritmo de Floría-Griffiths, cuja saída retorna simultaneamente a constante cíclica minimal  $m(c)$  e um corretor  $u$ . Além disso, discutimos aspectos sobre a validação deste algoritmo, os quais ressaltam propriedades importantes do operador de Lax-Oleinik.

**Capítulo 4 - Corretores especias:** Introduzimos e analisamos duas relevantes classes de corretores: os corretores separantes e os corretores calibrados. A primeira é responsável por permitir colocar em evidência o conjunto cíclico minimal  $\mathcal{M}(c)$ . A outra classe (associada ao operador de Lax-Oleinik  $T_c$ ) possibilita descrever o comportamento assintótico de autovetores de Perron-Frobenius normalizados, decorrentes evidentemente do Teorema de Perron-Frobenius – para o qual se propõe demonstração ao final do capítulo.

Estes capítulos contêm as principais ferramentas para se tratar do problema originalmente proposto e fomentam a teoria básica de otimização de médias. Esta parte foi escrita para ser discutida na primeira semana do minicurso. Para a segunda semana, preparamos o último capítulo não só de forma a complementar o maquinário teórico necessário para a resolução do problema dos pontos de entrega, mas também de modo a fornecer uma formulação totalmente equivalente, com uma pronunciada ótica algébrica, enriquecendo assim a formação do leitor.

**Capítulo 5 - Álgebra Min-Plus:** Definimos a álgebra *min-plus* e investigamos o problema de autovalor e autovetor  $M \otimes v = \lambda \odot v$  neste contexto (teoria espectral *min-plus*). Mostramos que se trata de uma formulação equivalente à teoria de otimização de médias, de maneira que podemos conectar os conceitos correspondentes: o custo a uma matriz da álgebra matricial *min-plus*, a constante cíclica minimal ao único autovalor de tal matriz, os corretores calibrados aos seus autovetores, etc. Em síntese, ocupamo-nos de desenvolver descrição algébrica (com consequências inclusives geométricas) das noções discutidas nos capítulos anteriores.

O seguinte diagrama destaca os principais núcleos formados pelos capítulos e relações de dependência entre estes.



Sempre que possível, procuraremos apresentar os resultados de forma algorítmica. Em particular, isolamos o algoritmo de Floría-Griffiths em separado (capítulo 3), como forma de destacá-lo dentro do texto.

Finalmente, salientamos que este material foi redigido na linguagem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, sendo de nossa autoria todas as imagens aqui contidas, produzidas com a ajuda do pacote VAUCANSON-G para L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X e do software computacional WOLFRAM MATHEMATICA 7.

## Agradecimentos

Parte do material presente nos quatro primeiros capítulos foi desenvolvida a partir de notas redigidas para minicurso ministrado pelo primeiro autor, a convite do Prof. Marcelo Sobottka, na 12<sup>a</sup> Escola de Verão do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSC, organizada pelo Prof. Celso M. Doria, em 2011. Por esta razão, o primeiro autor é grato aos Profs. Sobottka e Doria pela produtiva oportunidade.

Os autores gostariam de agradecer a Lino Ramada Ferreira Junior pela leitura atenta de versão preliminar destas notas e por vários comentários e sugestões pertinentes, os quais certamente contribuíram para o aprimoramento do texto.

Os autores agradecem ainda ao Comitê Organizador do 29º Colóquio Brasileiro de Matemática pela possibilidade de divulgação do

tema deste livro por intermédio de um curso introdutório.

Durante a redação desta obra, o primeiro autor recebeu apoio parcial de bolsa de produtividade em pesquisa do CNPq e o segundo autor foi financiado por bolsa de doutorado da CAPES. Finalmente, os autores reconhecem o encorajador ambiente trabalho do IMECC-UNICAMP.

*Campinas, maio de 2013.*

EDUARDO GARIBALDI

JOÃO TIAGO ASSUNÇÃO GOMES



# Capítulo 1

## Problema dos pontos de entrega

### 1.1 Protótipo de questão

Se tivéssemos de formular uma indagação cuja resposta sintetiza nossos objetivos nestas notas, esta seria a seguinte pergunta: como pode uma empresa de distribuição de mercadorias escolher quais os pontos em uma metrópole nos quais estabelecer sua sede operacional significa ter a sua disposição o maior número de rotas com custo médio minimal para explorar?

Várias situações de planejamento estratégico recaem em interrogações similares. Não seria difícil apresentar perguntas semelhantes dentro do contexto de linhas aéreas, sistemas de abastecimento elétrico, malhas rodoviárias ou redes de telecomunicações. No entanto, decidimos aqui focar de modo exclusivo em problemas relacionados a custos em modelos de rotas de distribuição. A abordagem matemática que desenvolveremos se adapta imediatamente a quaisquer situações envolvendo a determinação de percursos fechados possuindo, por exemplo, máxima rentabilidade ou mínimo desperdício médios.

Retornando a questão inicial, observe que estamos interessados em resolver um problema de caráter global em sua essência. A análise

de custos médios permite que trechos com custos mais elevados não sejam prontamente desconsiderados, uma vez que a utilização de algum(ns) deste(s) em uma determinada rota pode ser compensada pela presença de vários trechos menos custosos. Em particular, todos os pontos de entrega sobre uma certa rota com custo médio minimal são, do ponto de vista do distribuidor que assume este tipo de análise, avaliados com idêntica importância em termos de potencial econômico.

Apesar de claramente um exame por ponto de entrega a ponto de entrega não ser viável em muitos casos reais devido à ordem de grandeza envolvida, e embora se trate, na verdade, de uma avaliação local em geral pouco apropriada a uma questão global, como motivação uma discussão sobre um caso simples pode ser instrutiva. Considere, por exemplo, que há em uma certa região seis possíveis pontos de entrega:  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$  e  $E_6$ . Temos um determinado custo associado ao trajeto do ponto  $E_i$  ao ponto  $E_j$  para todo par  $i \neq j$ , o qual será denotado  $c_{ij}$ . Assim, podemos descrever de modo esquemático esta situação pela seguinte ilustração.

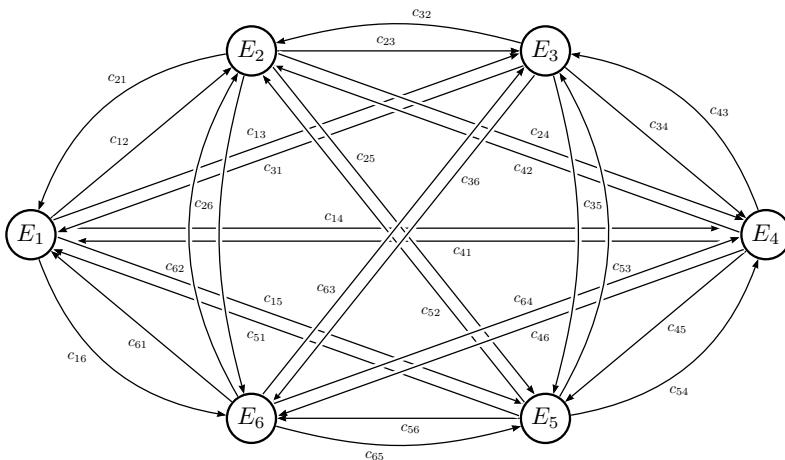


Figura 1.1: Rotas e respectivos custos em uma situação de seis pontos de entrega.

Supomos então que a empresa de distribuição cogite instalar-se ao lado do ponto de entrega  $E_1$ . Em particular, não haverá custo algum de trajeto até  $E_1$  e os custos  $c_{ij}$  poderão ser assumidos como tendo a própria empresa como ponto de partida.

Consideramos agora que a empresa de distribuição pondere sobre a realização de entregas em  $E_2$  e em  $E_5$ . Há dois trajetos óbvios,

$$E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_5 \rightarrow E_1 \quad \text{e} \quad E_1 \rightarrow E_5 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1,$$

com respectivos custos médios

$$\frac{c_{12} + c_{25} + c_{51}}{3} \quad \text{e} \quad \frac{c_{15} + c_{52} + c_{21}}{3}.$$

Nada impede, porém, que os custos  $c_{25}$  e  $c_{52}$  sejam tão proibitivos de modo que um trajeto mais longo como, por exemplo,

$$E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_5 \rightarrow E_1$$

tenha seu custo médio

$$\frac{c_{12} + c_{23} + c_{35} + c_{51}}{4}$$

inferior aos custos acima apresentados.

Perguntas naturais então se impõem. Como identificar estas trajetórias fechadas de custo médio minimal? Uma vez identificadas, a escolha da vizinhança do ponto de entrega  $E_1$  para instalar a sede da empresa teria sido a melhor decisão? Em outros termos, constituir sede ao lado, por exemplo, do ponto de entrega  $E_4$  não seria potencialmente mais rentável? Ou melhor, por qual ponto de entrega passam mais trajetórias com custo médio minimal?

No presente caso, exibida uma determinada lista de trinta valores numéricos  $c_{ij}$ , com  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $i \neq j$ , pode-se empiricamente tentar responder as questões postas. Isto não seria o caso se estivéssemos levando em conta duzentos pontos de entrega. Uma abordagem computacional se faria necessária.

Descreveremos nos próximos capítulos ideias centrais de um algoritmo que associa os custos  $\{c_{ij}\}$  a novos valores  $\{\hat{c}_{ij}\}$  tais que  $\hat{c}_{ij} \geq 0$  e  $\hat{c}_{ij} = 0$  se, e só se, o trajeto  $E_i \rightarrow E_j$  pertence a uma trajetória fechada com custo médio minimal.

## 1.2 Linguagem da teoria de grafos

Alguns conceitos da teoria de grafos nos auxiliarão no detalhamento de tal algoritmo. Há uma vasta literatura introdutória sobre esta teoria (veja, por exemplo, [8, 13]). Enfatizamos, entretanto, que estas notas formam um texto autocontido, de modo que faremos sobretudo uso de conceitos básicos e de resultados intuitivos sobre grafos orientados.

Para os propósitos deste texto, um *grafo orientado* é um par  $G = (V, A)$  tal que  $A \subset V \times V$ . Os elementos de  $V$  são ditos *vértices*. Nestas notas,  $V$  será sempre um conjunto finito. Os elementos de  $A$  são ditos *arestas*. Comumente a aresta  $(v, w)$  é representada por uma seta de  $v$  para  $w$ , ou seja,  $v \xrightarrow{G} w$ , e a aresta  $(w, v)$  é representada por seta no sentido inverso,  $w \xrightarrow{G} v$ .

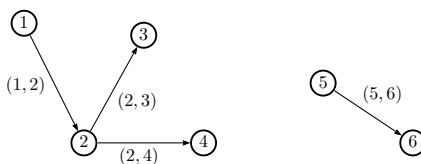


Figura 1.2: Exemplo de grafo  $G = (V, A)$  com vértices  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e arestas  $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (5, 6)\}$ .

Um grafo com conjunto de vértices  $V$  é dito ser um *grafo sobre*  $V$ . O conjunto de vértices de um grafo  $G$  é denotado por  $V(G)$  e seu conjunto de arestas é indicado por  $A(G)$ . Algumas vezes não faremos distinção entre um grafo e seu conjunto de vértices ou seu conjunto de arestas. Por exemplo, cometemos quando útil abuso de notação ao escrever

$$v \in G \quad \text{ou} \quad a = (v, w) \in G$$

para um vértice  $v$  ou uma aresta  $a = (v, w)$ .

### Isomorfismos e Subgrafos

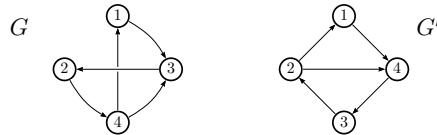
Sejam  $G = (V, A)$  e  $G' = (V', A')$  dois grafos. Dizemos que  $G$  e  $G'$  são *isomorfos*, e escrevemos  $G \simeq G'$ , se existir uma bijeção

$\varphi : V \rightarrow V'$  com

$$(v, w) \in A \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in A' \quad \forall v, w \in V.$$

Não distinguimos grafos isomorfos. De fato, sempre que  $\#V(G) = n$ , assumiremos que  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Exemplo 1.1.** Observe os grafos abaixo.



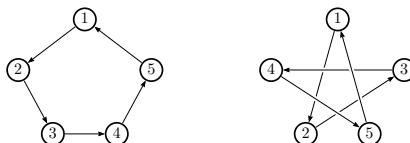
Neste caso, a bijeção  $\varphi$  que efetua o isomorfismo entre eles é dada explicitamente por

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = 3, \quad \varphi(3) = 4 \quad e \quad \varphi(4) = 2.$$

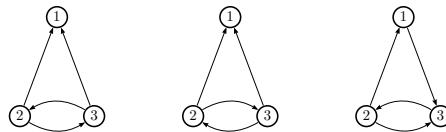
É fácil verificar que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi(1), \varphi(3)), (\varphi(2), \varphi(4)), (\varphi(3), \varphi(2)), \\ (\varphi(4), \varphi(1)), (\varphi(4), \varphi(3)) \end{array} \right\} = A'.$$

Os seguintes grafos também são isomorfos.



Abaixo apresentamos três grafos.



Note que os dois primeiros são isomorfos e o terceiro grafo não é isomorfo aos anteriores. Fica a cargo do leitor explicitar quais as respectivas bijeções em cada caso.

Dados dois grafos  $G' = (V', A')$  e  $G = (V, A)$ , se  $V' \subset V$  e  $A' \subset A$ , então  $G'$  é um *subgrafo* de  $G$  (equivalentemente,  $G$  é um *supergrafo* de  $G'$ ). Para um exemplo, veja a próxima figura.

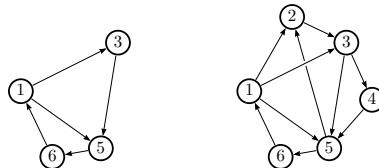


Figura 1.3: O grafo da esquerda é subgrafo do grafo da direita.

### Caminhos e Ciclos

Seja  $G = (V, A)$  um grafo orientado. Um *caminho* em  $G$  é um subgrafo  $P = (V', A')$  da forma

$$\begin{aligned} V' &= \{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subset V \quad \text{e} \\ A' &= \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k-1}, i_k)\} \subset A. \end{aligned}$$

Por vezes, indicamos o caminho  $P$  por  $i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k$  ou, mais explicitamente quando necessário, escrevemos

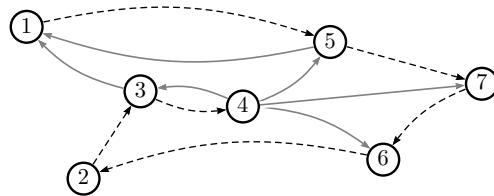
$$P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k.$$

Dizemos que o caminho  $P$  conecta o vértice  $i_0$  ao vértice  $i_k$ , sendo  $i_0$  seu *ponto inicial* e  $i_k$  seu *ponto final*. Dizemos também que  $P$  passa pelos vértices  $i_\ell$  quando  $\ell \in \{1, \dots, k-1\}$ . Além disso, o número de arestas de um caminho é seu *comprimento*. (Note que  $(\{i_0\}, \emptyset)$  é um caminho de comprimento nulo.)

**Exemplo 1.2.** No grafo  $G$  a seguir representado,

$$1 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4$$

é um exemplo de caminho.



Se  $P = (V', A')$  e  $Q = (V'', A'')$  são caminhos em  $G$  tais que o ponto final de  $P$  coincide com o ponto inicial de  $Q$ , então a *concatenação* de  $P$  com  $Q$  é o caminho em  $G$  definido simplesmente por  $PQ = (V' \cup V'', A' \cup A'')$ . Perceba que o caminho  $(\{i\}, \emptyset)$  atua como elemento neutro para operação de concatenação, ou seja,  $P(\{i\}, \emptyset) = P$  ou  $(\{i\}, \emptyset)P = P$  para qualquer caminho  $P$  com ponto, respectivamente, final ou inicial  $i$ .

**Exemplo 1.3.** No grafo do exemplo anterior, a concatenação de

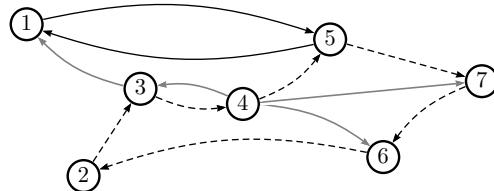
$$4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1 \xrightarrow{G} 5 \quad \text{e} \quad 5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4$$

vem a ser

$$4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4.$$

Um *ciclo* (ou *círculo fechado*) em  $G$  é um caminho conectando um vértice a si mesmo. Um ciclo é dito ser *simples* se não contém subciclos próprios (subgrafos próprios que são ciclos).

**Exemplo 1.4.** A concatenação do exemplo precedente é, de fato, um ciclo, o qual não é simples. Isto porque, como destaca a figura, são seus subciclos  $5 \xrightarrow{G} 1 \xrightarrow{G} 5$  ou  $5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5$ .



## Conexividade e Representação Matricial

Um grafo orientado  $G = (V, A)$  é dito ser *conexo* (ou *transitivo*) se, para cada par de vértices em  $V$ , houver um caminho em  $G$  conectando-os. O grafo descrito pela figura 1.2 claramente não é conexo. Uma condição necessária e suficiente para um grafo orientado ser conexo é a existência de um ciclo passando por todos os seus vértices, tal como  $1 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 7 \xrightarrow{G} 6 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 1$  no caso do grafo do exemplo 1.2.

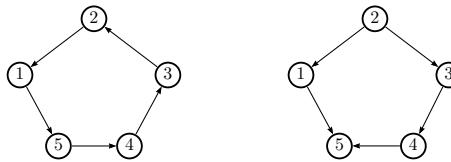


Figura 1.4: Enquanto o grafo da esquerda é conexo, o da direita não o é.

**Observação 1.5.** Veremos no exercício 1.2 que a conexidade determina uma relação de equivalência entre os vértices de um grafo. Assim, grafos não conexos possuem decomposição em subgrafos conexos, a qual pode ser computada pelo algoritmo de Tarjan (veja [23]), com tempo de execução linear, mais precisamente da forma  $O(\#A(G) + \#V(G))$ . Para os propósitos destas notas, neste ponto em diante (salvo menção em contrário), consideraremos grafos orientados conexos.

Note que a conexidade implica, para todo vértice  $v$ , a existência de arestas  $v \xrightarrow{G} w$  e  $\overline{w} \xrightarrow{G} v$  com respeito às quais o vértice  $v$  é, respectivamente, ponto inicial e ponto final. Logo, cada caminho conectando  $i$  a  $j$  em  $G$  é um subgrafo de um caminho da forma

$$i_0 \xrightarrow{G} i_1 = i \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{k-2} \xrightarrow{G} i_{k-1} = j \xrightarrow{G} i_k.$$

Dado um grafo  $G = (\{1, 2, \dots, n\}, A)$ , podemos codificar suas arestas em uma matriz  $M : \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$

definida por

$$M(i, j) = \mathbb{1}_A(i, j) := \begin{cases} 0 & \text{se } (i, j) \notin A \\ 1 & \text{se } (i, j) \in A \end{cases}.$$

Dizemos que  $M$  é uma *matriz de transição*.

**Exemplo 1.6.** No exemplo dos seis pontos de entrega, a matriz de transição associada vem a ser

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Definição 1.7.** Uma matriz  $M$  sobre  $V \times V$  com entradas não negativas é dita ser *irreduzível* se verifica a seguinte propriedade:

$$\forall (i, j) \in V \times V, \quad \exists k = k(i, j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad M^k(i, j) > 0,$$

onde  $M^k(i, j)$  denota a entrada  $(i, j)$  da matriz produto  $M^k$  (isto é, resultado da multiplicação de  $M$  por si mesma  $k$  vezes).

A matriz de transição registra naturalmente informações relevantes sobre o grafo. O resultado a seguir mostra como reconhecer a conexidade do grafo a partir da sua respectiva matriz de transição.

**Proposição 1.8.** Um grafo orientado  $G = (V, A)$  é conexo se, e somente se, sua matriz de transição  $M : V \times V \rightarrow \{0, 1\}$  é irreduzível.

*Demonstração.* Sejam  $i$  e  $j$  vértices de um grafo conexo  $G$ . Considere um caminho que os conecta,

$$i_0 = i \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{k-1} \xrightarrow{G} i_k = j,$$

cuja existência é garantida pela conexidade do grafo. Note então que

$$M^k(i, j) = \sum_{\substack{v_0=i, v_k=j \\ v_1, \dots, v_{k-1} \in V}} \prod_{\ell=0}^{k-1} \mathbb{1}_A(v_\ell, v_{\ell+1}) \geq \prod_{\ell=0}^{k-1} \mathbb{1}_A(i_\ell, i_{\ell+1}) = 1 > 0,$$

onde obtemos a condição necessária.

Reciprocamente, dados vértices  $i$  e  $j$ , pela irredutibilidade existe índice  $k = k(i, j) \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{\substack{v_0=i, v_k=j \\ v_1, \dots, v_{k-1} \in V}} \prod_{\ell=0}^{k-1} \mathbb{1}_A(v_\ell, v_{\ell+1}) = M^k(i, j) > 0.$$

Devido ao fato do somatório em questão ter somente termos não negativos, ao menos um dos produtórios é positivo. Considere então  $\prod_{\ell=0}^{k-1} \mathbb{1}_A(i_\ell, i_{\ell+1}) > 0$ . Em particular,  $M(i_\ell, i_{\ell+1}) = 1$ , o que significa que  $(i_\ell, i_{\ell+1})$  é uma aresta de  $G$ , para todo  $\ell = 0, 1, \dots, k - 1$ . Por sua vez, esta sucessão de arestas define um caminho

$$i_0 = i \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{k-1} \xrightarrow{G} i_k = j$$

conectando  $i$  a  $j$ . Como tal propriedade é verificada para quaisquer vértices  $i$  e  $j$ , obtemos a conexidade do grafo  $G$ .  $\square$

Podemos agora reinterpretar o problema dos pontos de entrega. Trata-se de um grafo orientado conexo  $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A)$ , onde as arestas de  $A$  estão codificadas na matriz de transição do exemplo 1.6. Temos então uma função custo  $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ , a qual admite a seguinte expressão matricial

$$\begin{bmatrix} * & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & * & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & * & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & * & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & * & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & * \end{bmatrix}.$$

**Notação 1.9.** Estamos acima empregando o símbolo  $*$  para indicar eventuais valores de  $c$  sobre  $(V \times V) \setminus A$ . A priori a função custo  $c$  sequer precisa ser aí definida. Adotaremos esta notação no decorrer do texto.

Podemos naturalmente estender esta função custo sobre os caminhos em  $G$ . Com efeito, se

$$P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k \quad (k \geq 1)$$

é um caminho, definimos

$$c(P) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_\ell, i_{\ell+1}).$$

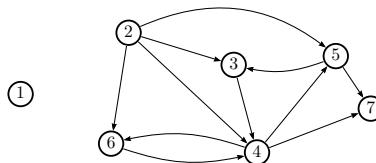
Queremos então encontrar os mínimos de  $c$  sobre os ciclos de  $G$ . O detalhamento de uma proposta de resolução para este problema de otimização será o foco dos próximos capítulos.

## Exercícios

**Exercício 1.1.** *Explicite os isomorfismos entre os grafos presentes no exemplo 1.1.*

**Exercício 1.2.** *Mostre que a conexidade é uma relação de equivalência entre os vértices de um grafo, isto é, mostre que a propriedade de “haver ciclo passando por  $i$  e  $j$ ” define uma relação reflexiva, simétrica e transitiva. (Para fins teóricos, é conveniente assumir  $(\{i\}, \emptyset)$  como ciclo passando por  $i$ .)*

**Exercício 1.3.** *Determine a decomposição em subgrafos conexos do grafo abaixo descrito.*



**Exercício 1.4.** *Descreva todos os caminhos de comprimento  $k$  sobre o grafo  $G$  tal que  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$  e*

$$M(i, j) = \mathbb{1}_{A(G)}(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } |i - j| \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

**Exercício 1.5.** Descreva todos os ciclos simples sobre o grafo  $G$  tal que  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$  e

$$M(i, j) = \mathbb{1}_{A(G)}(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \geq j - 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

**Exercício 1.6.** Seja  $M$  uma matriz de transição de um grafo  $G$ . Mostre que  $M^k(i, j)$  é igual ao número de caminhos de comprimento  $k$  conectando  $i$  a  $j$ .

**Exercício 1.7.** Uma matriz  $M$  sobre  $V \times V$  com entradas não negativas é dita ser aperiódica se

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que, } \forall (i, j) \in V \times V, \quad M^k(i, j) > 0.$$

Se a matriz de transição do grafo  $G = (V, A)$  for aperiódica (com inteiro positivo  $k$  como acima), mostre que, para quaisquer vértices  $i, j \in V$  e para qualquer inteiro  $\ell \geq k$ , pode-se encontrar caminho de comprimento  $\ell$  conectando  $i$  a  $j$ .

# Capítulo 2

## Otimização de médias

Neste capítulo, apresentaremos aspectos básicos da teoria de otimização de médias. Nossa objetivo é examinar conceitos essenciais relativos à formalização do problema de minimização proposto no capítulo 1.

A primeira destas noções a ser levada em consideração é a de *constante cílica minimal*, que nada mais é do que o valor de mínimo absoluto em nosso problema. Veremos como determinar esta constante de modo algorítmico. Estudaremos ainda sua regularidade, estabelecendo de que maneira tal valor varia quando o custo considerado é alterado. Mostraremos também como esta constante descrever por dualidade.

O conjunto dos ciclos que minimizam o custo certamente é outra noção fundamental que aqui figurará. Este conjunto receberá a denominação de *conjunto cílico minimal*. Discutiremos de que maneira colocá-lo em evidência a partir de renormalizações do custo que fazem uso de *corretores*, conceito este sugerido de forma natural pela representação dual da constante cílica minimal. Veremos enfim como construir corretores de modo algorítmico.

O leitor que estiver interessado sobretudo nos aspectos algorítmicos destacados nestas notas pode, sem prejuízo algum, contentar-se em apenas compreender os enunciados dos principais resultados presentes na subseção 2.1.2, sem se embrenhar nas respectivas demonstrações lá detalhadas.

## 2.1 Constante cíclica minimal

Seja  $G = (\{1, 2, \dots, n\}, A)$  um grafo orientado conexo. Recorde que a conexividade equivale a irredutibilidade da matriz de transição  $M = (\mathbb{1}_A(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Considere uma função  $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ , a qual pode representar possíveis custos associados aos caminhos de comprimento igual a 1 em  $G$ . Estendemos  $c$  sobre os caminhos de comprimento maior ou igual a 1 colocando

$$c(P) := \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_\ell, i_{\ell+1})$$

se o caminho  $P$  é descrito por  $i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k$ .

Introduzimos então a *constante cíclica minimal*

$$m(c) := \inf\{c(P) : P \text{ ciclo em } G\}.$$

Note que, para determinar esta constante, na verdade basta levar em conta apenas os ciclos simples.

**Proposição 2.1.** *Temos que*

$$m(c) = \min\{c(P) : P \text{ ciclo simples em } G\}.$$

*Demonstração.* Seja  $P$  ciclo em  $G$ . Se  $P$  for simples, não há nada para argumentar. Suponha que  $i \in V(G)$  seja vértice pelo qual  $P$  passa ao menos duas vezes. Podemos então escrever  $P = P_1 P_2 \dots P_s$ , onde cada  $P_\ell$  é um ciclo de comprimento  $k_\ell$  conectando  $i$  a si mesmo sem conter subciclo próprio passando por  $i$ . É fácil ver que

$$c(P) = \frac{k_1}{k_1 + k_2 + \dots + k_s} c(P_1) + \dots + \frac{k_s}{k_1 + k_2 + \dots + k_s} c(P_s).$$

Sendo  $c(P)$  combinação convexa dos valores  $c(P_\ell)$ , em particular há  $r \in \{1, 2, \dots, s\}$  tal que

$$c(P_r) \leq c(P).$$

Reaplicando a mesma discussão sobre  $P_r$ , temos que este ou é simples ou é concatenação de subciclos que conectam certo vértice  $j \neq i$  a si

mesmo e não possuem subciclos próprios com esta propriedade (veja a figura 2.1). Como consideramos um número finito de vértices, este argumento recursivo conduz à existência de  $Q$  subciclo simples de  $P$  tal que  $c(Q) \leq c(P)$ .  $\square$

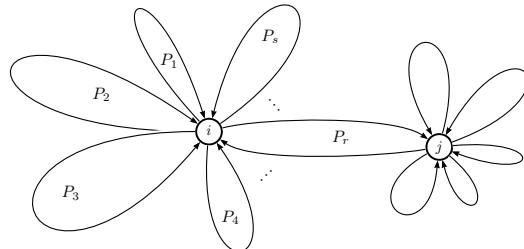


Figura 2.1: Busca recursiva por ciclo simples que minimiza o custo.

Como sobre um grafo finito há um número finito de ciclos simples, é possível em teoria conhecer explicitamente a constante cíclica minimal. A dificuldade poderia estar, porém, em listar todos os ciclos simples de um dado grafo.

**Exemplo 2.2.** Considere o grafo completo com  $n$  vértices, isto é, o grafo  $G = (\{1, 2, \dots, n\}, \{1, 2, \dots, n\}^2)$ . Há exatamente  $n$  ciclos simples de comprimento igual a 1, quais sejam:  $1 \xrightarrow{G} 1, 2 \xrightarrow{G} 2, \dots, n \xrightarrow{G} n$ . Fixado o ponto inicial, note que existem  $n - 1$  ciclos simples de comprimento igual a 2 contendo-o:

$$i \xrightarrow{G} j \xrightarrow{G} i, \quad j \neq i.$$

Porém,  $i \xrightarrow{G} j \xrightarrow{G} i$  e  $j \xrightarrow{G} i \xrightarrow{G} j$  representam o mesmo ciclo. Logo, há exatamente  $n(n - 1)/2$  ciclos simples de comprimento igual a 2. Analogamente, observamos que há

$$\begin{aligned} n(n - 1)(n - 2)/3 &\text{ ciclos simples com comprimento 3,} \\ n(n - 1)(n - 2)(n - 3)/4 &\text{ ciclos simples com comprimento 4,} \end{aligned}$$

⋮

$$(n - 1)! \text{ ciclos simples com comprimento } n.$$

Temos então

$$n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \dots + (n-1)!$$

ciclos simples em  $G = (\{1, 2, \dots, n\}, \{1, 2, \dots, n\}^2)$ .

Percebe-se, pelo exemplo anterior, que uma mera comparação dos valores de  $c$  sobre os ciclos simples pode não vir a ser a abordagem mais eficiente para determinar a constante  $m(c)$ .

### 2.1.1 Algoritmo de Karp

Com o intuito de caracterizar de forma algorítmica a constante cíclica minimal, introduzimos o conceito de menor custo dentre os caminhos de comprimento fixado  $k > 0$  com ponto final  $i$ ,

$$S_k(i) = \min \left\{ c(P) : \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \text{ de comprimento } k \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}.$$

Esta função é fundamental na formulação do seguinte resultado clássico originalmente apresentado em [19].

**Teorema 2.3** (Algoritmo de Karp). *Seja  $G = (\{1, \dots, n-1\}, A)$  grafo orientado conexo com função custo  $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Então a constante cíclica minimal é dada explicitamente por*

$$m(c) = \min_{1 \leq i \leq n-1} \max_{1 \leq k \leq n-1} \left[ \frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right]. \quad (2.1)$$

Atente que, para simplificar a apresentação da fórmula, estamos (atípicamente) considerando  $\#V(G) = n-1$  no teorema acima.

*Demonstração.* Primeiramente, argumentaremos que é suficiente provar o teorema para o caso especial em que  $m(c) = 0$ . Para tanto, considere a função custo  $c' : A \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $c'(i, j) = c(i, j) - m(c)$  para todo  $(i, j) \in A$ . Em particular,

$$\begin{aligned} m(c') &= \inf\{c'(Q) : Q \text{ ciclo em } G\} \\ &= \inf\{c(Q) : Q \text{ ciclo em } G\} - m(c) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, se  $S'_k(i)$  denota o menor custo, com relação a função  $c'$ , dentre os caminhos de comprimento  $k > 0$  com ponto final  $i$ , temos  $S'_k(i) = S_k(i) - m(c)$ , o que implica

$$\frac{n}{n-k} S'_n(i) - \frac{k}{n-k} S'_k(i) = \frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) - m(c).$$

Portanto, pela equação acima, o resultado no caso geral será comprovado ao mostrarmos que ocorre

$$0 = \min_{1 \leq i \leq n-1} \max_{1 \leq k \leq n-1} \left[ \frac{n}{n-k} S'_n(i) - \frac{k}{n-k} S'_k(i) \right],$$

o que vem a ser a equação (2.1) para a constante cíclica minimal nula.

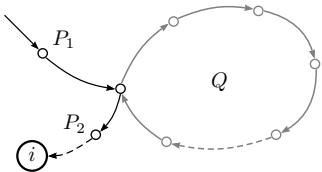


Figura 2.2: Para caminhos longos, podemos descartar seus subciclos.

Sendo assim, supomos  $m(c) = 0$ . Com isto, pela definição da constante cíclica minimal, é fácil perceber que não existe ciclo com custo negativo. Note então que  $\inf_{k \geq 1} k S_k(i) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i)$ . De fato, seja  $P$  caminho com ponto final  $i$  de comprimento  $k \geq n$ . Temos que  $P$  contém um ciclo  $Q$  e se escreve como concatenação de caminhos  $P = P_1 Q P_2$  (veja a figura 2.2), onde  $P_1$  tem comprimento  $k_1 \geq 0$  e  $P_2$  possui ponto final  $i$  e comprimento  $k_2 \geq 1$ . Já certificamos que  $c(Q) \geq 0$ . Logo, a concatenação  $P_1 P_2$  tem ponto final  $i$ , possui comprimento  $1 \leq k_1 + k_2 < k$  e satisfaz

$$(k_1 + k_2) c(P_1 P_2) \leq k c(P).$$

Segue daí que, na avaliação de  $\inf_{k \geq 1} k S_k(i)$ , o caminho  $P_1 P_2$  serve como substituto para  $P$  e tem comprimento estritamente menor. Podemos repetir tal argumento até encontrar um caminho com comprimento menor ou igual a  $n - 1$ , o que assegura a veracidade da

igualdade

$$\inf_{k \geq 1} k S_k(i) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i), \quad \forall i \in V(G).$$

Pela discussão anterior,  $\min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) \leq n S_n(i)$ . Portanto,

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} [n S_n(i) - k S_k(i)] = n S_n(i) - \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) \geq 0, \quad (2.2)$$

onde obtemos a relação  $\max_{1 \leq k \leq n-1} \left[ \frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right] \geq 0$ , a qual é válida para todo vértice  $i$ .

Resta-nos mostrar que a igualdade

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} \left[ \frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right] = 0$$

ocorre para algum vértice  $i$ . Perceba que, por (2.2), é suficiente encontrar, para algum vértice  $i$ , um caminho  $P^i$ , com ponto final  $i$  e comprimento  $k^i = n$ , tal que  $k^i c(P^i) = n S_n(i) = \inf_{k \geq 1} k S_k(i)$ .

Devido à suposição  $m(c) = 0$ , obtemos a existência de um ciclo  $Q_0$  com custo 0. Seja  $k_0$  seu comprimento. Dado qualquer vértice  $j \in Q_0$ , considere o caminho  $P^j$ , com ponto final  $j$  e comprimento  $k^j \leq n-1$ , satisfazendo  $k^j c(P^j) = \inf_{k \geq 1} k S_k(j) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j)$ . É fácil verificar que a concatenação de  $P^j$  com repetições do ciclo  $Q_0$ , isto é,  $P^j Q_0 \dots Q_0$ , é um caminho que também cumpre

$$\begin{aligned} (k^j + k_0 + \dots + k_0) c(P^j Q_0 \dots Q_0) &= \\ &= k^j c(P^j) + k_0 c(Q_0) + \dots + k_0 c(Q_0) \\ &= k^j c(P^j) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j). \end{aligned}$$

Realizando repetições suficientes do ciclo  $Q_0$  para que o caminho  $P^j Q_0 \dots Q_0$  tenha comprimento maior que  $n$ , tome então  $i$  o  $(n+1)$ -ésimo vértice do caminho  $P^j Q_0 \dots Q_0$ , mais explicitamente

$$i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{k^j} = j \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_n = i \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{k^j + \ell k_0}.$$

Considere agora o caminho  $P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}$ , onde  $Q^{j,i}$  é o subcaminho no ciclo  $Q_0$  conectando  $j$  a  $i$  cujo comprimento é igual a  $k^{j,i}$ . Temos que  $P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}$  é um caminho de comprimento  $n$  e seu ponto final é o vértice  $i$ .

Concluímos o resultado com o seguinte fato.

**Afirmção.** O caminho  $P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}$  satisfaz

$$(k^j + k_0 + \dots + k_0 + k^{j,i}) c(P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}) = \\ = (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i).$$

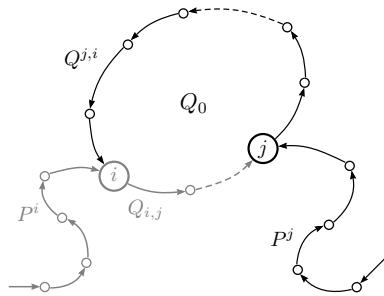


Figura 2.3: Decomposição do ciclo  $Q_0$ .

A primeira igualdade segue imediatamente de  $c(Q_0) = 0$ . Suponha que a segunda igualdade não se verifique, ou seja, que exista um caminho  $P^i$ , com ponto final  $i$  e comprimento  $k^i \leq n-1$ , satisfazendo

$$k^i c(P^i) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) < (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}).$$

Considere o subcaminho  $Q_{i,j}$  no ciclo  $Q_0$  conectando  $i$  a  $j$ , o qual completa  $Q^{j,i}$  no sentido que  $Q_0 = Q_{i,j} Q^{j,i}$  (veja a figura 2.3). Denote por  $k_{i,j}$  seu comprimento. As concatenações  $P^i Q_{i,j}$  e  $P^j Q^{j,i} Q_{i,j} = P^j Q_0$  são caminhos com ponto final  $j$  para os quais obtemos

$$(k^i + k_{i,j}) c(P^i Q_{i,j}) = k^i c(P^i) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ < (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ = (k^j + k_0) c(P^j Q_0) \\ = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j) = \inf_{k \geq 1} k S_k(j),$$

o que é uma clara contradição.

Desta forma,

$$\begin{aligned} n S_n(i) &\leq (k^j + k_0 + \dots + k_0 + k^{j,i}) c(P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) = \inf_{k \geq 1} k S_k(i) \leq n S_n(i), \end{aligned}$$

onde segue o resultado.  $\square$

**Observação 2.4.** Com o propósito de facilitar a implementação computacional de tal algoritmo, a função  $S_k$  é originalmente definida no artigo [19] de forma distinta: fixado um vértice  $i_0 \in G$ , a função  $S_k$  determina o menor custo dentre os caminhos de comprimento  $k > 0$  com ponto inicial  $i_0$  e ponto final  $i$ , isto é,

$$S_k(i) = \min \left\{ c(P) : \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \text{ de comprimento } k \\ \text{conectando } i_0 \text{ a } i \end{array} \right\}$$

(convenciona-se  $S_k(i) = \infty$  caso não exista um caminho em  $G$  de comprimento  $k$  conectando  $i_0$  a  $i$ ).

## Complexidade

O algoritmo de Karp opera em tempo  $O(\#V(G)\#A(G))$ . Por sua vez, a complexidade associada à memória requerida para execução do algoritmo é  $O(\#V(G))$ .

### 2.1.2 Regularidade e representação dual

Se na subseção anterior o foco eram aspectos computacionais relativos à determinação da constante cíclica minimal, agora desejamos analisar propriedades mais abstratas, como sua dependência com relação ao custo e a possibilidade de obtê-la a partir da uma fórmula baseada em dualidade. Ressaltamos uma vez mais que o leitor cuja motivação central está no conteúdo algorítmico destas notas pode, sem qualquer perda neste sentido, somente examinar com atenção os enunciados dos resultados a seguir, evitando de esmiuçá-las.

## Regularidade

Queremos entender como a constante cíclica minimal  $m(c)$  varia quando o custo  $c$  é modificado. Também como forma de motivar os

resultados de regularidade a serem apresentados, traduziremos estes conceitos em estruturas vetoriais. Considere um grafo  $G$  cujo conjunto de vértices é dado por  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ . Diremos que uma aresta  $i_1 \xrightarrow{G} j_1$  é menor que  $i_2 \xrightarrow{G} j_2$  se

$$\begin{aligned} i_1 &< i_2 \quad \text{ou} \\ i_1 &= i_2 \quad \text{e} \quad j_1 \leq j_2. \end{aligned}$$

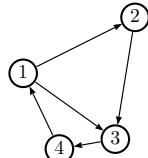
onde  $\leq$  é a ordem usual dos números naturais, a qual sobre  $V(G)$  pode claramente ser resumida pela cadeia  $1 < 2 < \dots < n$ .

Tal relação entre as arestas de  $G$  induz uma ordem em  $A(G)$  que também será denotada pelo mesmo símbolo  $\leq$  e receberá a denominação de ordem lexicográfica. Em particular, todas as arestas formam a cadeia

$$i_1 \xrightarrow{G} j_1 \leq i_2 \xrightarrow{G} j_2 \leq \dots \leq i_{\#A(G)} \xrightarrow{G} j_{\#A(G)}.$$

A prova deste fato será solicitada no exercício 2.5.

**Exemplo 2.5.** Explicitaremos a ordem lexicográfica para o grafo  $G$  abaixo representado.



$$A(G) = \left\{ \begin{array}{l} 2 \xrightarrow{G} 3, 1 \xrightarrow{G} 2, \\ 4 \xrightarrow{G} 1, 3 \xrightarrow{G} 4, \\ 1 \xrightarrow{G} 3 \end{array} \right\}.$$

Perceba que a ordenação natural de  $V(G)$  permite a comparação entre as arestas do grafo  $G$ : por exemplo,  $1 \xrightarrow{G} 2 \leq 1 \xrightarrow{G} 3$ . Por comparação termo a termo, construímos a seguinte cadeia no conjunto  $A(G)$

$$1 \xrightarrow{G} 2 \leq 1 \xrightarrow{G} 3 \leq 2 \xrightarrow{G} 3 \leq 3 \xrightarrow{G} 4 \leq 4 \xrightarrow{G} 1.$$

Atente que, segundo esta ordenação, a função custo  $c : A \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser apresentada como um vetor

$$(c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), \dots, c(i_{\#A(G)}, j_{\#A(G)})) \in \mathbb{R}^{\#A(G)}$$

Desta maneira, o próprio espaço  $\mathbb{R}^{\#A(G)}$  pode ser visto como o conjunto de todas as funções de custo sobre as arestas de um grafo  $G$ .

Temos igualmente a caracterização da constante cíclica minimal como uma função sobre o espaço  $\mathbb{R}^{\#A(G)}$ , ou melhor,

$$m(c) : \mathbb{R}^{\#A(G)} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Representar o custo como um vetor e a constante cíclica minimal como uma função sobre o espaço  $\mathbb{R}^{\#A(G)}$  não só possibilita como naturalmente fomenta questionamentos sobre propriedades comuns a funções sobre espaços euclidianos, como, por exemplo, convexidade, continuidade, diferenciabilidade, etc.

A próxima proposição assegura que, vista como uma função sobre  $\mathbb{R}^{\#A(G)}$ , a constante cíclica minimal é uma aplicação côncava.

**Proposição 2.6.** *Sejam  $c$  e  $c'$  custos sobre as arestas do grafo orientado  $G$ . Então a constante cíclica minimal  $m$  satisfaz*

$$m(tc + (1 - t)c') \geq tm(c) + (1 - t)m(c'), \quad \forall t \in [0, 1].$$

*Demonstração.* Ao considerar a função custo  $tc + (1 - t)c'$ , denote por  $Q$  o ciclo  $i = i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k = i$  cujo custo é minimal, isto é,  $m(tc + (1 - t)c') = [tc + (1 - t)c'](Q)$ . Resulta daí claramente que

$$\begin{aligned} m(tc + (1 - t)c') &= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} [tc + (1 - t)c'](i_\ell, i_{\ell+1}) \\ &= \frac{t}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_\ell, i_{\ell+1}) + \frac{(1 - t)}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} c'(i_\ell, i_{\ell+1}) \\ &= tc(Q) + (1 - t)c'(Q) \\ &\geq tm(c) + (1 - t)m(c'), \end{aligned}$$

onde a desigualdade final segue do fato que o ciclo  $Q$  não necessariamente é um ciclo com custo mínimo para  $c$  ou  $c'$ .  $\square$

Com respeito à continuidade, é possível verificar regularidade dita lipschitziana para a constante cíclica minimal  $m$ , adotando-se para tanto a norma do máximo,

$$\|(x_1, \dots, x_{\#A(G)})\|_\infty = \max_{1 \leq \ell \leq \#A(G)} |x_\ell|,$$

sobre o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{\#A(G)}$ . Isto é o que afirma a proposição a seguir.

**Proposição 2.7.** *Dados custos  $c$  e  $c'$ , temos*

$$|m(c) - m(c')| \leq \max_{i \xrightarrow{G} j} |c(i, j) - c'(i, j)| = \|c - c'\|_\infty.$$

*Demonstração.* Sejam  $Q$  e  $Q'$  ciclos em  $G$  tais que  $m(c) = c(Q)$  e  $m(c') = c'(Q')$ . Atentamos que não necessariamente  $Q'$  é um ciclo de custo minimal para  $c$ , sendo que o mesmo é válido para  $Q$  com respeito a  $c'$ . Portanto,

$$m(c) \leq c(Q') \quad \text{e} \quad m(c') \leq c'(Q).$$

Descreveremos  $Q' : i'_0 \xrightarrow{G} i'_1 \xrightarrow{G} i'_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i'_k$ . Sendo assim, obtemos

$$\begin{aligned} m(c) - m(c') &= m(c) - c'(Q') \leq c(Q') - c'(Q') \\ &= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i'_\ell, i'_{\ell+1}) - c'(i'_\ell, i'_{\ell+1}) \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} |c(i'_\ell, i'_{\ell+1}) - c'(i'_\ell, i'_{\ell+1})| \\ &\leq \max_{i \xrightarrow{G} j} |c(i, j) - c'(i, j)|, \end{aligned}$$

bem como de forma análoga se mostra

$$m(c') - m(c) \leq c'(Q) - c(Q) \leq \max_{i \xrightarrow{G} j} |c(i, j) - c'(i, j)|,$$

onde segue a desigualdade desejada

$$|m(c) - m(c')| \leq \max_{i \xrightarrow{G} j} |c(i, j) - c'(i, j)|.$$

□

**Observação 2.8** (Diferenciabilidade da constante cíclica minimal como uma função do custo). *É bem sabido da análise convexa que*

*o fato de a aplicação  $m(c) : \mathbb{R}^{\#A(G)} \rightarrow \mathbb{R}$  ser côncava assegura, em particular, que existem as derivadas direcionais laterais em qualquer ponto. Mais precisamente, para todo custo  $c$ , fixado  $v \in \mathbb{R}^{\#A(G)}$ , existem os limites*

$$\begin{aligned}\partial_v^+ m(c) &:= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(c + hv) - m(c)}{h}, \\ \partial_v^- m(c) &:= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(c - hv) - m(c)}{h}.\end{aligned}$$

*O leitor interessado em mais detalhes sobre a diferenciabilidade de funções côncavas pode consultar a obra clássica [22].*

*A regularidade (dita lipschitziana) estabelecida na proposição 2.7 para a constante cíclica minimal como função do custo também traz consequência para a diferenciabilidade. Grosseramente, pode-se afirmar que, ao se sortear ao acaso um custo  $c$ , a constante cíclica minimal é em  $c$  diferenciável. Para apresentar a propriedade com exatidão, o leitor deve estar informado que um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^{\#A(G)}$  tem medida nula se, para todo  $\epsilon > 0$ , for possível encontrar paralelepípedos*

$$I_j := [a_1^j, b_1^j] \times [a_2^j, b_2^j] \times \dots \times [a_{\#A(G)}^j, b_{\#A(G)}^j], \quad j \in \mathbb{N},$$

*tais que*

$$\begin{aligned}X &\subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \quad e \\ \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{volume}(I_j) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^{\#A(G)} (b_k^j - a_k^j) < \epsilon.\end{aligned}$$

*O Teorema de Rademacher assegura então que, em virtude do tipo de regularidade obtido na proposição 2.7, há subconjunto  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{\#A(G)}$  de medida nula tal que, para todo custo  $c \notin \mathcal{R}$ , existe a diferencial  $Dm(c)$ , isto é, a transformação linear cumprindo*

$$\begin{aligned}m(c + v) &= m(c) + Dm(c) \cdot v + \rho(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^{\#A(G)}, \\ \text{com} \quad \lim_{\|v\|_\infty \rightarrow 0} \frac{\rho(v)}{\|v\|_\infty} &= 0.\end{aligned}$$

*Em síntese, fora de um conjunto de medida nula, a constante cíclica minimal é diferenciável. Para uma prova do Teorema de Rademacher, o leitor com mais maturidade pode consultar, por exemplo, [14].*

## Dualidade

A teoria de dualidade é uma poderosa ferramenta em otimização de modo geral. (O leitor mais experiente pode obter detalhes a este respeito, por exemplo, em [1].) Aqui desejamos unicamente indicar, de maneira ingênua, como nossa questão de minimização do custo sobre ciclos está relacionada com um problema de maximização envolvendo funções definidas sobre os vértices do grafo. Isto será feito mostrando que a constante cíclica minimal é valor ótimo também para o segundo problema.

Para tanto, começamos assinalando a seguinte reescrita da constante  $m(c)$  em função dos caminhos em  $G$ .

### Proposição 2.9.

$$\begin{aligned} m(c) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\} \\ &= \sup_{k \geq 1} \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

*Demonastração.* Primeiramente, observamos que para um caminho arbitrário  $P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{r+s}$  de comprimento  $r + s$  sempre é possível decompor-lo em

$$\begin{aligned} P_{[0,r]} &: i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_r \\ P_{[r,r+s]} &: i_r \xrightarrow{G} i_{r+1} \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{r+s} \end{aligned}$$

tal que  $P$  é a concatenação  $P_{[0,r]}P_{[r,r+s]}$ . Obviamente,

$$c(P) = \frac{r}{r+s} c(P_{[0,r]}) + \frac{s}{r+s} c(P_{[r,r+s]}).$$

Sendo assim, considere a sequência

$$\left\{ a_k = \min \left\{ k c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\} \right\}_{k \geq 1},$$

a qual satisfaz a seguinte relação

$$\begin{aligned}
 a_{r+s} &= \min \left\{ (r+s) c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } r+s \end{array} \right\} \\
 &\geq \min \left\{ r c(P_{[0,r]}) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } r+s \end{array} \right\} \\
 &\quad + \min \left\{ s c(P_{[r,r+s]}) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } r+s \end{array} \right\} \\
 &= a_r + a_s,
 \end{aligned}$$

denominada de propriedade superaditiva. Pelo lema superaditivo (veja exercício 2.6), o limite de  $\frac{a_k}{k}$  quando  $k \rightarrow \infty$  existe, valendo

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{k} = \\
 &= \sup_{k \geq 1} \frac{a_k}{k} = \sup_{k \geq 1} \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Note então que

$$\sup_{k \geq 1} \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\} \leq m(c).$$

Com efeito, se  $Q : i_0 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_r = i_0$  é um ciclo com custo mínimo, ocorre

$$\begin{aligned}
 m(c) = c(Q) &= \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{r-1} c(i_\ell, i_{\ell+1}) \\
 &\geq \min_{i \xrightarrow{G} j} c(i, j) = \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } 1 \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Não é difícil perceber que o ciclo formado pela concatenação  $QQ$  também minimiza o custo. Logo, para caminhos de comprimento 2,

$QQ : i_0 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_r = i_0 \xrightarrow{G} i_{r+1} = i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{2r} = i_0$  satisfaz

$$\begin{aligned} m(c) &= c(QQ) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{r-1} \frac{[c(i_{2\ell}, i_{2\ell+1}) + c(i_{2\ell+1}, i_{2\ell+2})]}{2} \\ &\geq \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento 2} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Generalizando este argumento para desta vez  $k$  repetições do ciclo  $Q$ , obtemos

$$\begin{aligned} m(c) &= c(Q \cdots Q) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{r-1} \left( \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} c(i_{k\ell+m}, i_{k\ell+m+1}) \right) \\ &\geq \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Para finalizar, basta observarmos que não é difícil fornecer estimativa para a velocidade da convergência do limite no enunciado. Pode-se facilmente argumentar que, se  $n = \#V(G)$ , então

$$\begin{aligned} 0 \leq m(c) - \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\} &\leq \\ \leq \frac{n}{k} \max \left\{ c(Q) : \begin{array}{l} Q \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } \ell \leq n-1 \end{array} \right\}. & \quad (2.3) \end{aligned}$$

Com efeito, pela conexidade de  $G$ , dado um caminho  $P$  de comprimento  $k$ , sempre podemos encontrar um caminho  $Q$  de comprimento  $\ell \leq n-1$  de tal modo que a concatenação  $PQ$  seja um ciclo em  $G$ . Segue daí que

$$\begin{aligned} m(c) &\leq c(PQ) = \frac{k}{k+\ell} c(P) + \frac{\ell}{k+\ell} c(Q) \\ &< c(P) + \frac{n}{k} \max \left\{ c(Q) : \begin{array}{l} Q \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } \ell \leq n-1 \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

bastando então tomar o mínimo sobre  $P$ .  $\square$

É útil constatar a existência de outras maneiras de caracterizar a constante cíclica minimal. Destacamos abaixo uma importante fórmula de dualidade, a qual motivará algumas noções introduzidas na próxima seção. Assinalamos que este tipo de caracterização é comum, por exemplo, em otimização ergódica [12, 7].

**Teorema 2.10** (Representação Dual). *Seja  $G$  um grafo orientado conexo. Então, a constante cíclica minimal possui a seguinte representação dual*

$$m(c) = \sup_{f:V(G) \rightarrow \mathbb{R}} \min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i, j) + f(i) - f(j)].$$

*Demonstração.* Considere um ciclo  $Q$  com custo minimal descrito por  $i = i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k = i$ . Para qualquer função  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ , observamos que

$$\begin{aligned} m(c) &= c(Q) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_\ell, i_{\ell+1}) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} [c(i_\ell, i_{\ell+1}) + f(i_\ell) - f(i_{\ell+1})] \\ &\geq \min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i, j) + f(i) - f(j)]. \end{aligned}$$

Como, no argumento anterior,  $f$  é uma função arbitrária, obtemos

$$m(c) \geq \sup_{f:V(G) \rightarrow \mathbb{R}} \min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i, j) + f(i) - f(j)].$$

Resta-nos verificar a desigualdade oposta. Desta maneira, para cada  $k \geq 1$  fixo, defina a função

$$f_k(i) := \max \left\{ -\frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \sum_{\ell=0}^{r-1} c(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} P : i = i_0 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k \\ \text{caminho em } G \end{array} \right\}.$$

Seja  $P^j : j = i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k$  um caminho em  $G$  com vértice inicial  $j$  e comprimento  $k$ . Devido à conexidade do grafo, é possível

garantir a existência de pelo menos uma aresta com vértice final  $j$ . Sendo assim, para qualquer aresta  $i \xrightarrow{G} j$ , consideramos o caminho

$$P_{i \xrightarrow{G} j} : i \xrightarrow{G} j = i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{k-1}$$

que tem vértice inicial  $i$  e comprimento também igual a  $k$ . Então, denotando momentaneamente  $i_{-1} = i$ , observe que

$$\begin{aligned} c(i, j) + f_k(i) &\geq c(i, j) - \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \sum_{\ell=-1}^{r-2} c(i_\ell, i_{\ell+1}) \\ &= c(i, j) - \frac{1}{k} \left( k c(i, j) + \sum_{r=2}^k \sum_{\ell=0}^{r-2} c(i_\ell, i_{\ell+1}) \right) \\ &= - \sum_{\ell=0}^{k-2} \frac{k-\ell-1}{k} c(i_\ell, i_{\ell+1}) \\ &= c(P^j) - \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{k-\ell}{k} c(i_\ell, i_{\ell+1}) \\ &= c(P^j) - \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \sum_{\ell=0}^{r-1} c(i_\ell, i_{\ell+1}), \end{aligned}$$

onde a desigualdade é obtida simplesmente pela majoração dada por  $f_k(i)$  com relação ao somatório presente em sua definição quando considerado sobre os vértices do caminho  $P_{i \xrightarrow{G} j}$ .

Obviamente,

$$c(P^j) \geq \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\}.$$

Logo, ao tomar o máximo sobre os caminhos começando em  $j$  e de comprimento  $k$ , resulta que

$$c(i, j) + f_k(i) - \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\} \geq f_k(j).$$

Atente que a argumentação anterior é válida para qualquer vértice  $j$ , de modo que

$$\min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i, j) + f_k(i) - f_k(j)] \geq \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\}.$$

Devido à proposição 2.9, temos então que

$$\sup_{k \geq 1} \min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i, j) + f_k(i) - f_k(j)] \geq m(c).$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} \sup_{f: V(G) \rightarrow \mathbb{R}} \min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i, j) + f(i) - f(j)] &\geq \\ \geq \sup_{k \geq 1} \min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i, j) + f_k(i) - f_k(j)] &\geq m(c). \end{aligned}$$

□

## 2.2 Conjunto cíclico minimal e corretores

Definimos o *conjunto cíclico minimal* pondo

$$\mathcal{M}(c) := \{P \text{ ciclo em } G : c(P) = m(c)\}.$$

Na verdade, a compreensão deste conjunto vem a ser uma chave para todas as respostas acerca de otimização de ciclos.

Nossa estratégia consistirá aqui em renormalizar a função custo original  $c$  de modo a obter  $\hat{c} \geq 0$  satisfazendo

$$\hat{c}^{-1}(0) = \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos em } G).$$

Tal renormalização se dará de modo algorítmico e terá uma etapa intermediária consistindo na obtenção de  $\tilde{c} \geq 0$  tal que

$$\tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos em } G).$$

Neste processo, faremos uso de corretores, que nada mais são do que as funções sobre os vértices do grafo que realizam o supremo na fórmula de representação dual da constante cíclica minimal (veja observação 2.13 em seguida).

**Definição 2.11.** Uma função  $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser um corretor associado à função custo  $c$  se verificar

$$c(i, j) + u(i) - u(j) \geq m(c), \quad \forall (i, j) \in A(G).$$

Se  $u$  é um corretor associado a  $c$ , definimos

$$\tilde{c}(i, j) := c(i, j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A(G)$$

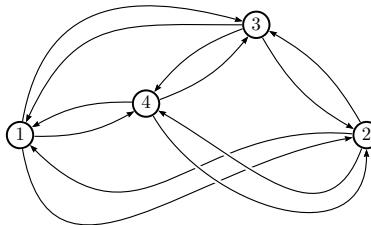
e estendemos  $\tilde{c}$  sobre os caminhos em  $G$  da maneira usual. Note então que se  $P$  é um ciclo, temos

$$\tilde{c}(P) = c(P) - m(c).$$

Resulta imediatamente que  $m(\tilde{c}) = 0$  e

$$\tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}(c).$$

**Exemplo 2.12.** Consideremos o problema da empresa de distribuição com quatro pontos de entrega.



Isto significa levar em conta a seguinte matriz de transição irredutível

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Listamos todos os ciclos simples neste caso.

- Ciclos simples com comprimento igual a 2:

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, \quad & 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2, \quad 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3. \\ 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1, \quad & 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2, \\ 1 \rightarrow 4 \rightarrow 1, \quad & \end{aligned}$$

- Ciclos simples com comprimento igual a 3:

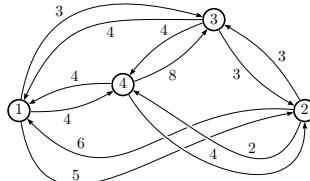
$$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1, & 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2, \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1, & 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2. \\ 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1, & \\ 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1, & \\ 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1, & \\ 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1, & \end{array}$$

- Ciclos simples com comprimento igual a 4:

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1, \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1, \\ 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1, \\ 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1, \\ 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1, \\ 1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1. \end{array}$$

Se tomarmos a função custo  $c : A(G) \rightarrow \mathbb{R}$  representada matricialmente (reveja a notação 1.9) e graficamente por

$$c = \begin{bmatrix} * & 5 & 3 & 4 \\ 6 & * & 3 & 2 \\ 4 & 3 & * & 4 \\ 4 & 4 & 8 & * \end{bmatrix}$$



inspeção direta garante que  $m(c) = 3$  e que os ciclos simples do conjunto cíclico minimal  $\mathcal{M}(c)$  são exatamente  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 4 \rightarrow 2$  e  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ . (Note que todas as trajetórias fechadas com custo médio minimal passam pelo ponto de entrega 2.) Além disso, tampouco é difícil comprovar que

$$u = (1, 1, 1, 0)$$

é um corretor associado a  $c$  e que, neste caso, basta a etapa inter-

mediária de renormalização para já obter

$$\tilde{c} = \hat{c} = \begin{bmatrix} * & 2 & 0 & 2 \\ 3 & * & 0 & 0 \\ 1 & 0 & * & 2 \\ 0 & 0 & 4 & * \end{bmatrix}.$$

A verificação destas afirmações é deixada como exercício.

**Observação 2.13.** Recordemos da representação dual para a constante cíclica minimal, dada por

$$m(c) = \sup_{f:V(G) \rightarrow \mathbb{R}} \min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i, j) + f(i) - f(j)]$$

e demonstrada na subseção 2.1.2. Afirmamos que o conceito de corretor se faz aí presente de forma indissociável. Dado um corretor  $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ , temos a seguinte equivalência

$$\begin{aligned} u(j) \leq c(i, j) + u(i) - m(c), \quad & \forall i \xrightarrow{G} j \\ \Leftrightarrow m(c) \leq \min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i, j) + u(i) - u(j)]. \end{aligned}$$

Note que a segunda formulação vem a ser a segunda desigualdade obtida na demonstração da representação dual e, portanto, todo corretor  $u$  verifica o máximo dentre todas as funções de  $V(G)$  em  $\mathbb{R}$  na fórmula dual acima. Desta maneira, o teorema 2.10 poderia ser obtido como corolário da existência de corretores.

Sobre a existência de corretores, temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.14.** Toda função custo admite corretores. Estes podem ser obtidos de modo algorítmico.

*Demonstração.* Para  $i \in V(G)$ , definimos

$$u(i) := \inf \left\{ k [c(P) - m(c)] : \begin{array}{l} k \geq 1, \text{ } P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}.$$

Se  $\#V(G) = n$ , afirmamos que

$$u(i) = \min \left\{ k [c(P) - m(c)] : \begin{array}{l} 1 \leq k \leq n, P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}.$$

De fato, observe primeiro que

$$\ell [c(Q) - m(c)] \geq 0$$

sempre que  $Q$  for um ciclo de comprimento  $\ell$  arbitrário. Se  $P$  é um caminho em  $G$  de comprimento  $k > n$  com ponto final  $i$ , então  $P$  se escreve como uma concatenação de caminhos

$$P = P_1 Q P_2,$$

onde  $Q$  é um ciclo de comprimento  $\ell \geq 1$ ,  $P_1$  e  $P_2$  têm, respectivamente, comprimentos  $k_1$  e  $k_2$ , com  $k_1 + k_2 \geq 1$ . (Admitimos inclusive, perceba,  $P_2 = (\{i\}, \emptyset)$  e  $k_2 = 0$ .) Então, pelo observado acima, temos que

$$k [c(P) - m(c)] \geq (k_1 + k_2) [c(P_1 P_2) - m(c)].$$

Note que  $P_1 P_2$  é um caminho em  $G$  de comprimento  $k_1 + k_2 \leq k - 1$  com ponto final  $i$ . Podemos, é claro, reaplicar o mesmo argumento até obter  $k_1 + k_2 \leq n$ .

Falta apenas mostrar que  $u$  é um corretor associado a  $c$ . Para tanto, considere

$$a = (i, j) \in A(G).$$

Seja  $P$  caminho em  $G$  de comprimento  $k \in \{1, \dots, n - 1\}$  com ponto final  $i$  tal que

$$u(i) = k [c(P) - m(c)].$$

Considere então a concatenação  $Q = Pa$  e observe que

$$c(i, j) - m(c) + u(i) = (k + 1) [c(Q) - m(c)] \geq u(j).$$

□

Note que, para determinar um corretor como acima, é necessário primeiro conhecer a constante cíclica minimal. Além disso, cada valor de um tal corretor demanda *a priori* o conhecimento de uma lista

(não necessariamente breve) de possíveis caminhos. Estes aspectos levantam questões sobre a efetiva computabilidade de tal corretor em determinadas situações práticas.

Veremos, no próximo capítulo, um algoritmo permitindo estabelecer simultaneamente par

(constante cíclica minimal, corretor)

de modo mais eficiente, sem passar por todos os ciclos simples ou por todos os caminhos com determinado ponto final.

## Exercícios

**Exercício 2.1.** Mostre que, se  $i$  é um vértice de um ciclo que minimiza o custo, então  $i$  é também um vértice de um ciclo simples que minimiza o custo.

**Exercício 2.2.** Verifique que a ordem lexicográfica de fato é um or- dem sobre o conjunto de arestas.

**Exercício 2.3.** Ordene as arestas dos grafos apresentadas nos exemplos 1.1 e 1.2.

**Exercício 2.4.** Seja  $c$  um custo cuja representação matricial é dada abaixo

$$\begin{bmatrix} * & 3 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & * & * \\ 3 & 7 & 0 & 2 \\ * & 3 & * & 0 \end{bmatrix}.$$

Escreva a representação vetorial deste custo com relação ordem lexi- cográfica. Além disso, discorra sobre o caso geral.

**Exercício 2.5.** Demostre que a ordenação lexicográfica em  $A(G)$  é uma ordem total, consequentemente  $A(G)$  é uma cadeia.

**Exercício 2.6** (Lema Superaditivo). Seja  $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$  uma sequê- ncia superaditiva, isto é,

$$a_{m+n} \geq a_m + a_n, \quad \forall m, n \geq 1.$$

Mostre que o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$  existe e é igual a  $\sup_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$  (podendo ser  $+\infty$ ).

**Exercício 2.7.** Considere a função custo descrita matricialmente por

$$c = \begin{bmatrix} * & 2 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & * & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & * & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 4 & * & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & * \end{bmatrix}.$$

Mostre que  $m(c) = 2$ . Determine ainda que os únicos ciclos simples pertencentes ao conjunto cíclico minimal  $\mathcal{M}(c)$  são

$$1 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 1, \quad 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 4, \quad 1 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 1, \quad 1 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 1,$$

$$1 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 1 \quad e \quad 1 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 1.$$

**Exercício 2.8.** Verifique as afirmações feitas no exemplo 2.12.

**Exercício 2.9.** Sejam  $u_1$  e  $u_2$  dois corretores para o custo  $c$ . Mostre que as funções definidas por

$$\begin{aligned} u_{\min}(i) &= \min\{u_1(i), u_2(i)\}, \\ u_{\max}(i) &= \max\{u_1(i), u_2(i)\}, \quad \forall i \in V(G), \end{aligned}$$

são também corretores associados a  $c$ .

**Exercício 2.10.** Mostre que é convexo o conjunto formado por todos os corretores associados a uma certa função custo, ou melhor, se  $u$  e  $v$  são corretores para o custo  $c$ , mostre que, para todo  $t \in [0, 1]$ , a função  $tu + (1 - t)v$  é também um corretor para  $c$ .

**Exercício 2.11.** Prove que o conjunto dos corretores para um determinado custo é fechado. Mais concretamente, supondo  $\#V(G) = n$ , se  $\{u^k = (u^k(1), u^k(2), \dots, u^k(n))\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de corretores associados ao custo  $c$  a qual converge a  $u = (u(1), u(2), \dots, u(n))$  no sentido que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |u^k(i) - u(i)| = 0,$$

prove que  $u$  é também um corretor para  $c$ .

# Capítulo 3

## Algoritmo de Floría-Griffiths

Detalharemos um algoritmo proposto por Floría e Griffiths [15] para determinar ao mesmo tempo par  
(constante cíclica minimal, corretor).

Para tanto, começamos relembrando a definição equivalente de corretor:

$$u(j) \leq \min_{i \xrightarrow{G} j} [u(i) + c(i, j) - m(c)], \quad \forall j \in V(G),$$

onde destacamos que o mínimo é tomado sobre todas as arestas  $i \xrightarrow{G} j$  com ponto final  $j$ .

Baseando-se nesta reescrita, introduzimos um operador apropriado, o qual será fundamental na descrição do algoritmo desejado.

**Definição 3.1.** Seja  $c : A(G) \rightarrow \mathbb{R}$  função custo arbitrária. O operador de Lax-Oleinik associado  $T_c$  age sobre as funções  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\begin{aligned} T_c f(j) &:= \min\{f(i) + c(i, j) : i \in V(G), M(i, j) = 1\} \\ &= \min\{f(i) + c(i, j) : (i, j) \in A(G)\} \\ &= \min_{i \xrightarrow{G} j} [f(i) + c(i, j)], \quad \forall j \in V(G). \end{aligned}$$

### Observação 3.2.

i. Note que  $u$  é corretor associado a um custo  $c$  se, e só se,

$$u \leq T_{c-m(c)} u.$$

ii. Atente que o operador de Lax-Oleinik já foi empregado, por exemplo, no teorema 2.3 (algoritmo de Karp) sob a seguinte forma

$$\begin{aligned} T_c^k[0](j) &= \min \left\{ k c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho de comprimento } k \\ \text{com ponto final } j \text{ em } G \end{array} \right\} \\ &= k S_k(j), \end{aligned}$$

onde  $T_c^k$  denota a  $k$ -ésima iterada do operador. (O caso geral da identidade acima será demonstrado no item iii da proposição 3.3.) Em particular, segundo o algoritmo de Karp, se  $\#V(G) = n - 1$  vale que

$$m(c) = \min_{1 \leq i \leq n-1} \max_{1 \leq k \leq n-1} \frac{1}{n-k} (T_c^n[0] - T_c^k[0])(i).$$

Além disso, observe que o enunciado da proposição 2.9 pode ser apresentado como

$$m(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \min_{j \in V(G)} T_c^k[0](j) = \sup_{k \geq 1} \frac{1}{k} \min_{j \in V(G)} T_c^k[0](j). \quad (3.1)$$

## 3.1 Descrição do algoritmo

O algoritmo de Floría-Griffiths consiste em um processo iterativo que, a partir de uma função qualquer sobre os vértices do grafo e de uma cota superior para a constante cíclica, produz um corretor e determina a própria constante.

No detalhamento deste algoritmo, faremos uso de notação conveniente. Por uma questão de praticidade, escreveremos várias vezes  $a \wedge b$  significando, como de costume,  $\min\{a, b\}$ . Além disso, adotaremos a convenção também usual em otimização de denotar, para uma função  $F$  sobre um conjunto  $C$ , por  $\operatorname{argmin}\{F(x) : x \in C\}$  o conjunto dos elementos  $y \in C$  que verificam  $F(y) = \min\{F(x) : x \in C\}$ .

## Algoritmo

Começamos fornecendo:

$$\text{Entradas } \begin{cases} V_0 = V(G), \\ u_0 : V(G) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{função arbitrária,} \\ m_0 \geq m(c). \end{cases}$$

Note que uma maneira prática de obter cota superior  $m_0$  é tomar o mínimo de  $c(P)$  com  $P$  pertencente a um subconjunto fixo de ciclos.

Na primeira iteração, obtemos:

$$\text{Saídas (Iterada 1)} \begin{cases} V_1 \subset V(G), \\ u_1 : V(G) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_1 \leq u_0, \\ m_1 \in [m(c), m_0]. \end{cases}$$

Os dois primeiros dados resultam simplesmente ao se colocar:

- $V_1 := \{j \in V(G) : T_{c-m_0} u_0(j) < u_0(j)\};$
- $u_1(j) := \min\{u_0(j), T_{c-m_0} u_0(j)\}, \quad \forall j \in V(G).$

Quanto à determinação da nova cota superior, devemos proceder da forma abaixo detalhada.

- Primeiro, definimos  $\sigma_1 : V(G) \rightarrow V(G)$  obedecendo
  - se  $j \notin V_1$ , escolhemos  $\sigma_1(j)$  pertencente a

$$\{i \in V(G) : M(i, j) = 1\};$$

- se  $j \in V_1$ , escolhemos  $\sigma_1(j)$  no conjunto

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}\{u_0(i) + c(i, j) - m_0 : i \text{ com } (i, j) \in A(G)\} &= \\ &= \operatorname{argmin}\{u_0(i) + c(i, j) : i \text{ com } (i, j) \in A(G)\}. \end{aligned}$$

Para cada  $j \in V_1$ , consideramos  $k_1(j) := j$  e  $k_2(j) := \sigma_1(k_1(j))$ .

Se  $j = k_1(j) = k_2(j)$ , temos um ciclo  $P_1^j$ ,

$$j = k_2(j) \xrightarrow{G} k_1(j) = j.$$

Colocamos então

$$m_1 := m_0 \wedge \min\{c(P_1^j) : j \in V_1\}.$$

Na segunda iteração, encontramos

$$\text{Saídas (Iterada 2)} \quad \begin{cases} V_2 \subset V(G), \\ u_2 : V(G) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_2 \leq u_1, \\ m_2 \in [m(c), m_1]. \end{cases}$$

Como antes, fazemos:

- $V_2 := \{j \in V(G) : T_{c-m_1} u_1(j) < u_1(j)\};$
- $u_2(j) := \min\{u_1(j), T_{c-m_1} u_1(j)\}, \quad \forall j \in V(G).$

Já com respeito à cota superior, procedemos como segue.

- Definimos  $\sigma_2 : V(G) \rightarrow V(G)$  satisfazendo
  - se  $j \notin V_2$ , colocamos  $\sigma_2(j) = \sigma_1(j);$
  - se  $j \in V_2$ , escolhemos  $\sigma_2(j)$  pertencente a

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}\{u_1(i) + c(i, j) - m_1 : i \text{ com } (i, j) \in A(G)\} = \\ = \operatorname{argmin}\{u_1(i) + c(i, j) : i \text{ com } (i, j) \in A(G)\}. \end{aligned}$$

Para cada  $j \in V_2$ , definimos

$$k_1(j) := j, \quad k_2(j) := \sigma_2(k_1(j)) \quad \text{e} \quad k_3(j) := \sigma_2(k_2(j)).$$

Se  $j = k_1(j) = k_2(j)$  ou  $j = k_1(j) = k_3(j)$ , temos um ciclo  $P_2^j$ ,

$$k_2(j) \xrightarrow{G} k_1(j) \quad \text{ou} \quad k_3(j) \xrightarrow{G} k_2(j) \xrightarrow{G} k_1(j).$$

Introduzimos finalmente

$$m_2 := m_1 \wedge \min\{c(P_2^j) : j \in V_2\}.$$

Após  $r$  iterações, o algoritmo produz:

$$\text{Saídas (Iterada r)} \quad \begin{cases} V_r \subset V(G), \\ u_r : V(G) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_r \leq u_{r-1} \leq \dots \leq u_0, \\ m_r \in [m(c), m_{r-1}]. \end{cases}$$

Colocamos:

- $V_r := \{j \in V(G) : T_{c-m_{r-1}} u_{r-1}(j) < u_{r-1}(j)\};$
- $u_r(j) := \min\{u_{r-1}(j), T_{c-m_{r-1}} u_{r-1}(j)\}, \quad \forall j \in V(G).$

Além disso, a definição da nova cota superior ocorre de acordo com os passos gerais descritos abaixo.

- Definimos  $\sigma_r : V(G) \rightarrow V(G)$  verificando
  - se  $j \notin V_r$ , fazemos  $\sigma_r(j) = \sigma_{r-1}(j);$
  - se  $j \in V_r$ , escolhemos  $\sigma_r(j)$  no conjunto

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}\{u_{r-1}(i) + c(i, j) - m_{r-1} : i \text{ com } (i, j) \in A(G)\} = \\ = \operatorname{argmin}\{u_{r-1}(i) + c(i, j) : i \text{ com } (i, j) \in A(G)\}. \end{aligned}$$

Para cada  $j \in V_r$ , consideramos

$$k_1(j) := j, \quad k_2(j) := \sigma_r(k_1(j)), \quad \dots, \quad k_{r+1}(j) := \sigma_r(k_r(j)).$$

Se  $k_1(j) = k_s(j)$  para algum  $s \in \{2, \dots, r+1\}$ , temos então um ciclo  $P_r^j$ ,

$$k_s(j) \xrightarrow{G} k_{s-1}(j) \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} k_1(j).$$

Colocamos então

$$m_r := m_{r-1} \wedge \min\{c(P_r^j) : j \in V_r\}.$$

A condição de finalização do algoritmo é dada pela exigência:

**Parada**  $\{V_{r+1} = \emptyset.$

## 3.2 Comentários sobre a verificação

Nesta subseção, utilizaremos a discussão de certos aspectos relativos à verificação da validade do algoritmo de Floría-Griffiths como justificativa para estudar propriedades relevantes do operador de Lax-Oleinik.

Antes de adotar esta atitude, no entanto, supondo que o algoritmo funcione, a pergunta básica que devemos imediatamente responder é

se  $(m_r, u_r)$  é um par (constante cíclica minimal, corretor). Ora, note que

$$V_{r+1} = \emptyset \Leftrightarrow u_r \leq T_{c-m_r} u_r.$$

Seja então  $P$  um ciclo em  $G$ ,

$$P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k \quad (k \geq 1).$$

Como  $i_0 = i_k$ , as desigualdades

$$\begin{aligned} u_r(i_k) &\leq u_r(i_{k-1}) + c(i_{k-1}, i_k) - m_r \\ u_r(i_{k-1}) &\leq u_r(i_{k-2}) + c(i_{k-2}, i_{k-1}) - m_r \\ &\vdots \\ u_r(i_1) &\leq u_r(i_0) + c(i_0, i_1) - m_r \end{aligned}$$

implicam  $m_r \leq c(P)$ . Uma vez que  $P$  é um ciclo arbitrário, temos que  $m_r \leq m(c)$ . Mas por construção  $m_r \geq m(c)$ . Logo,  $m_r = m(c)$  e a desigualdade  $u_r \leq T_{c-m(c)} u_r$  significa que  $u_r$  é um corretor.

As propriedades do operador de Lax-Oleinik que queremos aqui destacar estão reunidas abaixo.

**Proposição 3.3.** *O operador de Lax-Oleinik verifica:*

i.  $f \leq g \Rightarrow T_c f \leq T_c g$ ;

ii.  $T_c(f \wedge g) = T_c f \wedge T_c g$ ;

iii.  $T_{c_k} T_{c_{k-1}} \dots T_{c_1} T_{c_0} f(j) =$

$$= \min \left\{ f(i_0) + \sum_{r=0}^k c_r(i_r, i_{r+1}) : \begin{array}{l} i_0 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{k+1} = j \\ \text{caminho em } G \\ \text{com ponto final } j \end{array} \right\}.$$

iv. se  $\#V(G) = n$ , então

$$T_{c-m(c)} f \wedge T_{c-m(c)}^2 f \wedge \dots \wedge T_{c-m(c)}^n f \leq T_{c-m(c)}^k f, \quad \forall k \geq n+1.$$

**Observação 3.4.** A seguinte identidade é um caso particular do item iii acima:

$$\begin{aligned} T_{c-m_k} T_{c-m_{k-1}} \cdots T_{c-m_1} T_{c-m_0} f(j) &= \\ &= \min_P \left[ f(i_P) + (k+1)c(P) - \sum_{r=0}^k m_r \right], \end{aligned}$$

onde o mínimo é tomado sobre todos os caminhos  $P$  em  $G$  de comprimento  $k+1$  conectando vértice arbitrário  $i_P$  ao vértice fixo  $j$ . Em particular, caso  $m_k = \dots = m_1 = m_0 = m(c)$ , temos

$$T_{c-m(c)}^{k+1} f(j) = \min_P \left[ f(i_P) + (k+1)(c(P) - m(c)) \right], \quad (3.2)$$

sendo o mínimo considerado, é claro, sobre o mesmo conjunto de caminhos.

*Demonstração.*

Item i. Segue da definição do operador.

Item ii. Como  $f \wedge g \leq f, g$ , pelo item i resulta

$$T_c(f \wedge g) \leq T_c f \wedge T_c g.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} T_c f(j) \wedge T_c g(j) &\leq \min_{\substack{i \xrightarrow{G} j}} [(f(i) + c(i, j)) \wedge (g(i) + c(i, j))] \\ &= T_c(f \wedge g)(j). \end{aligned}$$

Item iii. A identidade prova-se por indução. O caso  $k = 0$  é a própria definição do operador de Lax-Oleinik. Supondo a validade da igualdade para  $k-1$ , temos imediatamente

$$\begin{aligned} T_{c_k} [T_{c_{k-1}} \cdots T_{c_1} T_{c_0} f](j) &= \\ &= \min_{\substack{i_k \xrightarrow{G} j}} [T_{c_{k-1}} \cdots T_{c_1} T_{c_0} f(i_k) + c_k(i_k, j)] \\ &= \min \left\{ f(i_0) + \sum_{r=0}^k c_r(i_r, i_{r+1}) : \begin{array}{l} i_0 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{k+1} = j \\ \text{caminho em } G \\ \text{com ponto final } j \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Item *iv*. Observe que todo caminho  $P$  em  $G$  de comprimento  $k \geq n+1$  conectando  $i$  a  $j$  se escreve como uma concatenação de caminhos

$$P = P_1 Q P_2,$$

onde  $P_1$  é um caminho com ponto inicial  $i$  de comprimento  $k_1$ ,  $Q$  é um ciclo de comprimento  $1 \leq \ell \leq n$  e  $P_2$  é um caminho com ponto final  $j$  de comprimento  $k_2$ . Note que necessariamente  $k_1 + k_2 \geq 1$ . Temos então que

$$k [c(P) - m(c)] \geq (k_1 + k_2) [c(P_1 P_2) - m(c)].$$

Segue que  $P_1 P_2$  é um caminho de comprimento  $k_1 + k_2 \leq k - 1$  conectando  $i$  a  $j$ . Este argumento pode ser repetido até se obter  $k_1 + k_2 \leq n$ . A desigualdade segue então da descrição fornecida pela equação (3.2).  $\square$

O leitor interessado em argumentos completos para assegurar que a condição de finalização do algoritmo de Floría-Griffiths é alcançada pode consultar o artigo original [15].

Um fato a ter em mente é que, quando um ciclo que minimiza o custo está entre os ciclos  $P_s^j$  de alguma etapa  $s$  do algoritmo, então são necessárias no máximo  $\#V(G)$  iterações adicionais para que o algoritmo pare. Isto está mais precisamente apresentado na próxima proposição. Esclarecemos que por uma iteração entendemos uma iterada completa do algoritmo, da qual resultam não só um novo subconjunto de vértices usado inclusive como controle de parada, mas principalmente uma nova função candidata à corretor e uma nova cota superior para a constante cíclica minimal.

**Proposição 3.5.** Denote  $n = \#V(G)$ . Se ocorrer  $m_s = m(c)$ , então  $V_{r+1} = \emptyset$  para algum  $r \in \{s, s+1, \dots, s+n\}$ .

*Demonstração.* Repare que

$$\begin{aligned}
 u_{s+1} &= u_s \wedge T_{c-m(c)} u_s, \\
 u_{s+2} &= u_{s+1} \wedge T_{c-m(c)} u_{s+1} \\
 &= u_s \wedge T_{c-m(c)} u_s \wedge T_{c-m(c)}^2 u_s, \\
 u_{s+3} &= u_{s+2} \wedge T_{c-m(c)} u_{s+2} \\
 &= u_s \wedge T_{c-m(c)} u_s \wedge T_{c-m(c)}^2 u_s \wedge T_{c-m(c)}^3 u_s, \\
 &\vdots \\
 u_{s+k} &= u_{s+k-1} \wedge T_{c-m(c)} u_{s+k-1} \\
 &= u_s \wedge T_{c-m(c)} u_s \wedge T_{c-m(c)}^2 u_s \wedge \dots \wedge T_{c-m(c)}^k u_s.
 \end{aligned}$$

Se  $\#V(G) = n$ , vale que

$$T_{c-m(c)}^{n+1} u_s \geq T_{c-m(c)} u_s \wedge T_{c-m(c)}^2 u_s \wedge \dots \wedge T_{c-m(c)}^n u_s.$$

Resulta daí que  $T_{c-m(c)} u_{s+n} \geq u_{s+n}$ , ou melhor,  $V_{s+n+1} = \emptyset$ . Em síntese, quando  $m_s = m(c)$ , o algoritmo realiza no máximo  $\#V(G)$  iterações adicionais.  $\square$

A validação do algoritmo fica, portanto, condicionada à presença de algum ciclo que minimiza o custo entre os ciclos  $P_s^j$  de alguma etapa  $s$ . Neste sentido, não é difícil fornecer um valor para uma eventual iteração na qual todos os vértices de todos os ciclos que minimizam o custo podem ter sido levados em conta na determinação dos ciclos  $P_s^j$ . Para tanto, necessitaremos do lema a seguir.

### Lema 3.6.

$$\begin{aligned}
 V_{s+1} &= \{j \in V(G) : T_{c-m_s} T_{c-m_{s-1}} \cdots T_{c-m_0} u_0(j) < u_0(j)\} \\
 &= \{j \in V(G) : T_c^{s+1} u_0(j) < u_0(j) + (m_s + \dots + m_0)\}.
 \end{aligned}$$

*Demonstração.* Observe que a condição  $T_{c-m_s} u_s < u_s$  pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 &T_{c-m_s} u_0 \wedge T_{c-m_s} T_{c-m_0} u_0 \wedge T_{c-m_s} T_{c-m_1} T_{c-m_0} u_0 \wedge \dots \wedge \\
 &\quad \wedge T_{c-m_s} T_{c-m_{s-2}} \cdots T_{c-m_0} u_0 \wedge T_{c-m_s} T_{c-m_{s-1}} \cdots T_{c-m_0} u_0 \\
 &< u_0 \wedge T_{c-m_0} u_0 \wedge T_{c-m_1} T_{c-m_0} u_0 \wedge T_{c-m_2} T_{c-m_1} T_{c-m_0} u_0 \wedge \dots \wedge \\
 &\quad \wedge T_{c-m_{s-1}} T_{c-m_{s-2}} \cdots T_{c-m_0} u_0.
 \end{aligned}$$

Como  $m_s \leq m_{s-1} \leq \dots \leq m_0$ , segue de resultado geral (veja o exercício 3.2) que

$$T_{c-m_0} u_0 \leq T_{c-m_s} u_0, \quad T_{c-m_1} T_{c-m_0} u_0 \leq T_{c-m_s} T_{c-m_0} u_0,$$

$$T_{c-m_2} T_{c-m_1} T_{c-m_0} u_0 \leq T_{c-m_s} T_{c-m_1} T_{c-m_0} u_0, \quad \dots,$$

$$T_{c-m_{s-1}} T_{c-m_{s-2}} \cdots T_{c-m_0} u_0 \leq T_{c-m_s} T_{c-m_{s-2}} \cdots T_{c-m_0} u_0.$$

Logo, ao realizar os respectivos cancelamentos ou reciprocamente as respectivas inclusões, vemos que a desigualdade acima é, na verdade, equivalente a

$$T_{c-m_s} T_{c-m_{s-1}} \cdots T_{c-m_0} u_0 < u_0.$$

□

Um aspecto relevante do funcionamento do algoritmo pode então agora ser facilmente demonstrado.

**Proposição 3.7.** *Se  $P$  é um ciclo de comprimento  $s$  satisfazendo  $s c(P) < m_{s-1} + \dots + m_0$ , então  $V(P) \subset V_s$ .*

*Demonstração.* Escrevendo  $P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_s = i_0$ , temos que

$$\begin{aligned} T_c^s u_0(i_0) &\leq u_0(i_0) + \sum_{k=0}^{s-1} c(i_k, i_{k+1}) \\ &= u_0(i_0) + s c(P) \\ &< u(i_0) + m_{s-1} + \dots + m_0. \end{aligned}$$

Logo, pelo lema anterior, concluímos que todo vértice de  $P$  pertence a  $V_s$ . □

Como consequência imediata (reveja o exercício 2.1), estabelecemos o valor da eventual iteração do algoritmo antes mencionada.

**Corolário 3.8.** *Se  $s$  for igual ao mínimo múltiplo comum dos comprimentos dos ciclos simples que minimizam o custo e se ocorrer  $m_{s-1} > m(c)$ , então*

$$\bigcup_{c(P)=m(c)} V(P) \subset V_s.$$

O fato de todos os vértices de todos os ciclos que minimizam o custo pertencerem ao conjunto  $V_s$  *a priori* não é suficiente para assegurar que algum ciclo que minimiza o custo figura entre os ciclos  $P_s^j$ . É necessário ainda que algum deles tenha sido selecionado ao se realizar o procedimento de busca de arestas empregando a aplicação  $\sigma_s$ . A este respeito, a próxima proposição reapresenta o elemento central na definição desta aplicação em termos da função inicial  $u_0$ .

**Proposição 3.9.** *O fato de o vértice  $\sigma \in V(G)$  pertencer ao conjunto  $\operatorname{argmin}\{u_{s-1}(i) + c(i, j) : i \text{ com } (i, j) \in A(G)\}$  é equivalente a existência de caminho  $P$  pertencente a*

$$\operatorname{argmin} \left\{ u_0(i_Q) + k_Q c(Q) - \sum_{k=0}^{k_Q-2} m_k : \begin{array}{l} Q \text{ caminho em } G \\ \text{com comprimento } k_Q \leq s \\ \text{conectando } i_Q \text{ a } j \end{array} \right\}$$

que se escreve como  $P : i_P \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} \sigma \xrightarrow{G} j$ .

**Observação 3.10.** Note que

$$\min_Q \left[ u_0(i_Q) + k_Q c(Q) - \sum_{k=0}^{k_Q-2} m_k \right] = \min_{1 \leq \ell \leq s} T_c T_{c-m_{\ell-2}} \cdots T_{c-m_0} u_0(j),$$

onde o primeiro mínimo é tomado sobre todos os caminhos  $Q$  em  $G$  de qualquer comprimento  $k_Q \leq s$  conectando vértice arbitrário  $i_Q$  ao vértice fixo  $j$ .

*Demonstração.* Assuma que

$$\sigma \in \operatorname{argmin} \{u_{s-1}(i) + c(i, j) : i \text{ com } (i, j) \in A(G)\}.$$

Existe  $\ell = \ell(\sigma) \leq s-1$  tal que  $u_{s-1}(\sigma) = T_c^\ell u_0(\sigma) - (m_0 + \dots + m_{\ell-1})$ . Considere então caminho  $P^\sigma$  em  $G$  de comprimento  $\ell$ , conectando  $i_0^\sigma$  a  $\sigma$ , tal que  $T_c^\ell u_0(\sigma) = u_0(i_0^\sigma) + \ell c(P^\sigma)$ . Defina por concatenação o caminho  $P := P^\sigma(\sigma, j) : i_P = i_0^\sigma \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} \sigma \xrightarrow{G} j$  e denote seu comprimento por  $k_P = \ell + 1$ . Seja  $Q$  caminho em  $G$  com qualquer comprimento  $k_Q \leq s$  conectando vértice arbitrário  $i_Q$  a  $j$ . Denotamos

$Q : j_0 = i_Q \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} j_{k_Q-1} = i \xrightarrow{G} j$ . Observe que

$$\begin{aligned}
& u_0(i_Q) + k_Q c(Q) - \sum_{k=0}^{k_Q-2} m_k = \\
& = u_0(j_0) + \sum_{k=0}^{k_Q-2} [c(j_k, j_{k+1}) - m_k] + c(i, j) \\
& \geq T_{c-m_{k_Q-2}} \cdots T_{c-m_0} u_0(i) + c(i, j) \\
& \geq u_{s-1}(i) + c(i, j) \\
& \geq u_{s-1}(\sigma) + c(\sigma, j) \\
& = T_c^\ell u_0(\sigma) - (m_0 + \dots + m_{\ell-1}) + c(\sigma, j) \\
& = u_0(i_P) + k_P c(P) - \sum_{k=0}^{k_P-2} m_k.
\end{aligned}$$

Portanto, encontramos caminho  $P$  em  $G$  cumprindo o solicitado.

Reciprocamente, seja  $P$  caminho em

$$\operatorname{argmin} \left\{ u_0(i_Q) + k_Q c(Q) - \sum_{k=0}^{k_Q-2} m_k : \begin{array}{l} Q \text{ caminho em } G \\ \text{com comprimento } k_Q \leq s \\ \text{conectando } i_Q \text{ a } j \end{array} \right\}$$

descrito por  $P : i_P \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} \sigma \xrightarrow{G} j$ . Denote por  $k_P$  o comprimento de  $P$ . Pela minimalidade de  $P$ , seu subcaminho  $P^\sigma$  de comprimento  $k_P - 1$  com ponto final  $\sigma$  necessariamente cumpre

$$\begin{aligned}
u_{s-1}(\sigma) &= u_0(i_P) + (k_P - 1) c(P^\sigma) - \sum_{k=0}^{k_P-2} m_k \\
&= T_{c-m_{k_P-2}} \cdots T_{c-m_0} u_0(\sigma).
\end{aligned}$$

Considere então vértice  $i \in V(G)$  verificando  $(i, j) \in A(G)$ . Tome  $\ell = \ell(i) \leq s - 1$  tal que  $u_{s-1}(i) = T_c^\ell u_0(i) - (m_0 + \dots + m_{\ell-1})$ . Seja  $Q^i$  caminho de comprimento  $\ell$ , conectando  $i_Q$  a  $i$ , tal que  $T_c^\ell u_0(i) = u_0(i_Q) + \ell c(Q^i)$ . Se levarmos em conta o caminho obtido por concatena-

tenaçāo  $Q := Q^i(i, j)$  de comprimento  $k_Q = \ell + 1$ , temos que

$$\begin{aligned} u_{s-1}(\sigma) + c(\sigma, j) &= u_0(i_P) + k_P c(P) - \sum_{k=0}^{k_P-2} m_k \\ &\leq u_0(i_Q) + k_Q c(Q) - \sum_{k=0}^{k_Q-2} m_k \\ &= T_c^\ell u_0(i) - (m_0 + \dots + m_{\ell-1}) + c(i, j) \\ &= u_{s-1}(i) + c(i, j). \end{aligned}$$

Logo,  $\sigma \in \operatorname{argmin}\{u_{s-1}(i) + c(i, j) : i \text{ com } (i, j) \in A(G)\}$ . □

## Exercícios

**Exercício 3.1.** Determine  $T_c f$  nos seguintes casos:

$$i. \quad c = \begin{bmatrix} * & 3 & 1 \\ 9 & 5 & * \\ 3 & 7 & 19 \end{bmatrix}, \quad f = (3, -5, 6);$$

$$ii. \quad c = \begin{bmatrix} * & -3 & 2 & 20 \\ * & 8 & * & -5 \\ 3 & * & * & * \\ * & -3 & 4 & * \end{bmatrix}, \quad f = (1, 40, 3, -2);$$

$$iii. \quad c = \begin{bmatrix} 12 & -3 & * & * \\ * & 16 & 6 & * \\ * & * & -6 & 9 \\ 4 & 58 & 4 & 32 \end{bmatrix}, \quad f = (-1, 7, -44, 0);$$

$$iv. \quad c = \begin{bmatrix} * & 3 & 6 & * & 2 \\ -9 & * & * & -62 & * \\ * & -2 & 40 & 2 & 9 \\ -25 & 6 & * & 90 & 7 \\ * & * & -7 & * & * \end{bmatrix}, \quad f = (-3, 7, 0, -8, 9).$$

**Exercício 3.2.**

- i. Dados custos  $c \leq c'$ , argumente que  $T_c f \leq T_{c'} f$  para toda função  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ .

- ii. Verifique que  $T_c[f + \kappa] = T_c[f] + \kappa$  para qualquer aplicação  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  e toda constante  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 3.3.** Prove que, para toda função  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ , ocorre

$$m(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \min_{j \in V(G)} T_c^k f(j).$$

[Sugestão: Use o limite (3.1) aplicando o item i da proposição 3.3 e o item ii do exercício anterior a  $\min_{i \in V(G)} f(i) \leq f \leq \max_{i \in V(G)} f(i)$ .]

**Exercício 3.4.** Mostre que, se a função  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  e a constante  $\gamma \in \mathbb{R}$  cumprem  $T_{c-\gamma}f = f$ , então obrigatoriamente  $\gamma = m(c)$ .

[Sugestão: Use o exercício anterior.]

**Exercício 3.5.** Mostre que operadores de Lax-Oleinik verificam a seguinte condição de regularidade

$$\max_{i \in V(G)} [T_c f(i) - T_c g(i)] \leq \max_{j \in V(G)} [f(j) - g(j)],$$

para todo custo  $c : A(G) \rightarrow \mathbb{R}$  e quaisquer funções  $f, g : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exercício 3.6.** Dada função  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ , considere caminho  $i_{r+1} \xrightarrow{G} i_r \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_0$  cumprindo

$$T_c^{r+1} f(i_0) = f(i_{r+1}) + \sum_{\ell=0}^r c(i_{\ell+1}, i_\ell).$$

Mostre que, para todo  $s \in \{0, \dots, r\}$ , ocorre

$$T_c^{r+1} f(i_0) = T_c^{r+1-s} f(i_s) + \sum_{\ell=0}^{s-1} c(i_{\ell+1}, i_\ell),$$

$$T_c^{r+1-s} f(i_s) = T_c^{r-s} f(i_{s+1}) + c(i_{s+1}, i_s),$$

$$T_c^{r-s} f(i_{s+1}) = f(i_{r+1}) + \sum_{\ell=s+1}^r c(i_{\ell+1}, i_\ell).$$

(Quando  $s = 0$ , adotamos a convenção de que o somatório presente na primeira igualdade é nulo.)

**Exercício 3.7.** Denote  $n = \#V(G)$ . Considere iteração do algoritmo de Floría-Griffiths na qual  $m_{s-1} > m(c)$ . Se  $Q$  é um caminho em  $G$  com comprimento

$$k_Q < s - \frac{n}{m_{s-1} - m(c)} \max \left\{ c(Q) : \begin{array}{l} Q \text{ caminho em } G \text{ de} \\ \text{comprimento } \ell \leq n-1 \end{array} \right\},$$

prove que

$$sm(c) - \sum_{k=0}^{s-2} m_k < k_Q c(Q) - \sum_{k=0}^{k_Q-2} m_k.$$

(Note que este tipo de expressão seria examinado ao se levar em conta a descrição dada pela proposição 3.9 quando  $u_0 \equiv 0$ .)

[Sugestão: Para a prova, use a desigualdade (2.3).]

**Exercício 3.8.** Suponha que tenha sido dado  $m_0 \leq 0$  como entrada no algoritmo de Floría-Griffiths (o que pode ser aceitável quando, por exemplo,  $c \leq 0$ ). Mostre que, se o caminho  $P$  pertence a

$$\operatorname{argmin} \left\{ u_0(i_Q) + k_Q c(Q) : \begin{array}{l} Q \text{ caminho em } G \text{ de} \\ \text{comprimento } k_Q \leq s \\ \text{conectando } i_Q \text{ a } j \end{array} \right\}$$

e tem comprimento  $k_P$ , então  $P$  pertence também a

$$\operatorname{argmin} \left\{ u_0(i_Q) + k_Q c(Q) - \sum_{k=0}^{k_Q-2} m_k : \begin{array}{l} Q \text{ caminho em } G \text{ de} \\ \text{comprimento } k_P \leq k_Q \leq s \\ \text{conectando } i_Q \text{ a } j \end{array} \right\}.$$



# Capítulo 4

## Corretores especiais

Até o momento vimos como determinar de modo algorítmico a constante cíclica minimal  $m(c)$  e um corretor  $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ , de modo que o custo renormalizado

$$\tilde{c}(i, j) := c(i, j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A(G),$$

verifica

$$\tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos em } G).$$

Isto pode ser obtido apenas com os resultados discutidos no capítulo 2. Ainda assim, no capítulo 3, descrevemos algoritmo que determina simultaneamente par  $(m(c), u)$  com a ajuda de operador de Lax-Oleinik, isto é, de operador  $T_c$  agindo sobre as funções  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$T_c f(j) = \min_{i : i \xrightarrow{G} j} [f(i) + c(i, j)], \quad \forall j \in V(G).$$

Neste capítulo, tratamos de duas classes específicas de corretores: os corretores separantes e os corretores calibrados. A primeira classe será responsável por uma nova renormalização para a qual se obtém  $\hat{c} \geq 0$  com

$$\hat{c}^{-1}(0) = \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos em } G),$$

o que nos permitirá mostrar como levar a termo a estratégia proposta na seção 2.2. A segunda classe é formada por pontos fixos para operador de Lax-Oleinik, mais precisamente por funções  $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$

que cumprem

$$u = T_{c-m(c)} u,$$

e destaca-se por caracterizar o comportamento assintótico de sequências convergentes de autovetores de Perron-Frobenius.

Além da questão natural de existência, investigaremos propriedades de ambas as classes de corretores, bem como consequências para o problema dos pontos de entrega. Enfatizamos que os conceitos apresentados neste capítulo serão fundamentais para a exposição do restante destas notas.

## 4.1 Corretores separantes

Estudamos aqui a primeira classe mencionada de corretores, a qual se destacará por seu papel na nova renormalização do custo.

**Definição 4.1.** Um corretor  $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  associado à função custo  $c$  é dito ser separante se a igualdade  $c(i, j) + u(i) - u(j) = m(c)$  acontece se, e só se, existe ciclo em  $G$

$$Q : \ell_0 = i \xrightarrow{G} \ell_1 = j \xrightarrow{G} \ell_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} \ell_k = i$$

satisfazendo  $c(Q) = m(c)$ .

Não é difícil fornecer exemplos deste tipo de situação.

**Exemplo 4.2.** O corretor apresentado no exemplo 2.12 é de modo evidente separante. Além deste caso, o leitor pode facilmente verificar que

$$u = (0, 3, 5, 2, 3)$$

é um corretor separante para o custo

$$c = \begin{bmatrix} * & -5 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & * & 1 & -9 & 2 \\ -1 & -10 & * & 7 & -6 \\ 5 & 6 & -5 & * & -7 \\ -11 & -8 & 2 & 8 & * \end{bmatrix}.$$

Note que, para o custo acima,  $m(c) = -8$  e os ciclos simples pertencentes a  $\mathcal{M}(c)$  são precisamente  $2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2$ ,  $2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 2$ ,  $1 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1$  e  $1 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1$ .

O ponto chave da noção de corretor separante é o fato de a igualdade funcional  $c(i, j) + u(i) - u(j) = m(c)$  apenas ocorrer sobre arestas  $(i, j)$  de ciclos que minimizam o custo. Isto porque a recíproca é válida em geral como observado a seguir.

**Observação 4.3.** Note que, se  $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  é um corretor arbitrário e se

$$Q : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k$$

é um ciclo satisfazendo  $c(Q) = m(c)$ , então

$$c(i_0, i_1) + u(i_0) - u(i_1) = m(c).$$

Isto é consequência da igualdade  $c(Q) = m(c)$ , a qual implica que as desigualdades decorrentes da definição de corretor, a saber,

$$c(i_0, i_1) + u(i_0) - u(i_1) \geq m(c),$$

$$c(i_1, i_2) + u(i_1) - u(i_2) \geq m(c),$$

$$\vdots$$

$$c(i_{k-1}, i_k) + u(i_{k-1}) - u(i_k) \geq m(c),$$

são todas na realidade igualdades.

O principal resultado desta seção é o seguinte.

**Teorema 4.4.** Toda função custo admite corretores separantes. Estes podem ser obtidos de modo algorítmico.

Considere a função custo renormalizada  $\tilde{c}$  definida a partir de um corretor arbitrário  $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  para  $c$  por

$$\tilde{c}(i, j) := c(i, j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A(G).$$

Repare que, se  $v$  é um corretor separante para  $\tilde{c}$ , então  $u + v$  é um corretor separante para a função custo original  $c$ . (A verificação desta afirmação consta entre os exercícios deste capítulo.) Com isto, graças à proposição 2.14, basta provar o teorema acima para o custo renormalizado  $\tilde{c}$ , o qual verifica  $m(\tilde{c}) = 0$  e  $\tilde{c}^{-1}(0) \supseteq \mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}(c)$ .

Antes de apresentar esta demonstração, sublinhamos a utilidade do conjunto cíclico minimal  $\mathcal{M}(c)$  dentro do problema dos pontos

de entrega: coletar todas as trajetórias fechadas que minimizam em média a distribuição sobre o grafo em questão. Intuitivamente,  $\mathcal{M}(c)$  pode ser visto como um subgrafo (dado explicitamente por  $\cup_{Q \in \mathcal{M}(c)} Q$ ) cujos vértices caracterizariam “boas” localizações para se estabelecer sedes da empresa, já que a partir de qualquer uma destas sedes existe a possibilidade de distribuição com custo médio mínimo sobre algum ciclo. Em particular, atentamos que seria um ato redundante estipular duas sedes de distribuição sobre distintos vértices de um mesmo ciclo que minimiza custo. Neste sentido, introduzimos a noção a seguir.

**Definição 4.5.** *Uma decomposição irredutível para o conjunto cílico minimal  $\mathcal{M}(c)$  é dada por*

$$\mathcal{M}(c) = \mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{M}_s,$$

*com respeito à qual, ao denotarmos por  $V_p$  a reunião de vértices de ciclos em  $\mathcal{M}_p$  e por  $A_p$  a reunião de arestas de ciclos em  $\mathcal{M}_p$ , verificam-se*

$$V_p \cap V_{p'} = \emptyset \quad e \quad A_p \cap A_{p'} = \emptyset \quad \forall p' \neq p.$$

Ainda discutindo o problema dos pontos de entrega, suponha que na empresa de distribuição em questão exista uma hierarquia de possíveis estabelecimentos, isto é, sede, subsidiária, filial, etc., a qual é determinada pela demanda de serviços. Um critério para se determinar qual tipo de estabelecimento instalar em cada  $\mathcal{M}_p$  poderia ser dado pela cardinalidade de vértices  $\#V_p$  associados ao respectivo subconjunto de  $\mathcal{M}(c)$ .

A existência de decomposição irredutível para  $\mathcal{M}(c)$  é assegurada pelo próximo resultado, o qual será útil na demonstração do teorema 4.4.

**Lema 4.6.** *O conjunto cílico minimal  $\mathcal{M}(c)$  possui decomposição irredutível, a qual pode ser determinada de forma algorítmica.*

*Demonstração.* Seja  $\ell_1 \in V(G)$  vértice de algum ciclo  $P_1 \in \mathcal{M}(\tilde{c})$ . Defina o primeiro termo da decomposição como

$$\mathcal{M}_1 := \{Q \in \mathcal{M}(\tilde{c}) : \ell_1 \in V(Q)\}.$$

Claramente,  $V_1 = \cup_{Q \in \mathcal{M}_1} V(Q)$  e  $A_1 = \cup_{Q \in \mathcal{M}_1} A(Q)$ . Se existir vértice  $\ell_2 \in V(G) \setminus V_1$  em algum ciclo  $P_2 \in \mathcal{M}(\tilde{c})$ , podemos continuar induutivamente a construção da decomposição.

Resta mostrar que a decomposição assim obtida cumpre o solicitado. Atente que a condição  $A_p \cap A_{p'} = \emptyset$  para todo  $p' \neq p$ , segue imediatamente da imposição  $V_p \cap V_{p'} = \emptyset$  para todo  $p' \neq p$ . Desta forma, suponhamos que

$$k \in V_p \cap V_{p'}, \quad \text{para } 1 \leq p < p' \leq s.$$

Isto significa que

$$k \in V(P) \cap V(P'), \quad \text{com } P \in \mathcal{M}_p \quad \text{e} \quad P' \in \mathcal{M}_{p'}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que  $k$  é ponto final de  $P$  e ponto inicial de  $P'$ . É fácil então ver que a concatenação  $PP'$  pertence a  $\mathcal{M}_p$ . Em particular,  $V(P') \subset V_p$ , o que é uma contradição.  $\square$

Podemos agora demonstrar o principal teorema desta seção.

*Demonstração do teorema 4.4.* Usando o lema 4.6, podemos escrever  $V(G) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_s \sqcup W$ , onde  $W := V(G) \setminus \cup_{p=1}^s V_p$ . Nossa objetivo é exibir corretor  $v : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para toda aresta  $(i, j) \in A(G)$ , temos

$$\begin{aligned} \tilde{c}(i, j) + v(i) - v(j) = 0 &\Leftrightarrow (i, j) \in A_p \text{ para algum } p \in \{1, \dots, s\} \\ &\Leftrightarrow (i, j) \in A(P) \text{ com } P \in \mathcal{M}_p. \end{aligned}$$

Pela observação 4.3,

$$\tilde{c}(i, j) = 0 \text{ sempre que } (i, j) \in A_p \text{ para algum } p \in \{1, \dots, s\}.$$

(Em particular, devemos definir  $v$  identicamente constante sobre cada subconjunto de vértices  $V_p$ .)

Note que pode ocorrer  $\tilde{c}(i, j) = 0$  embora  $(i, j) \notin \cup_{p=1}^s A_p$ . Seja então  $\mathcal{P}$  o conjunto dos caminhos

$$P : i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_k, \quad k \geq 1,$$

com  $(i_r, i_{r+1}) \notin \cup_{p=1}^s A_p$  para todo  $r = 0, \dots, k-1$ , tais que  $\tilde{c}(P) = 0$ , ou equivalentemente tais que

$$\tilde{c}(i_r, i_{r+1}) = 0 \quad \forall r \in \{0, \dots, k-1\}.$$

**Afirmção.** *Nenhum caminho  $P \in \mathcal{P}$  tem mais de duas arestas com o mesmo vértice pertencente a  $W$ .*

Caso contrário,  $P$  conteria subciclo de  $\mathcal{M}(\tilde{c})$  com ponto inicial em  $W$ , o que obrigaria tal vértice de  $W$  a estar necessariamente em  $\sqcup_{p=1}^s V_p$ , contradizendo a própria definição de  $W$ .

**Afirmção.** *Nenhum caminho  $P \in \mathcal{P}$  tem mais de duas arestas com vértices pertencentes a um mesmo  $V_p$ .*

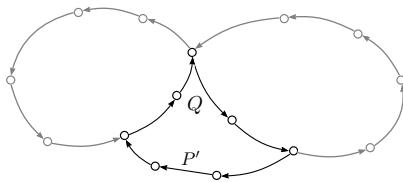


Figura 4.1: Ciclo formado por  $P'Q$  em  $\mathcal{M}(\tilde{c})$ .

Caso contrário, haveria subcaminho  $P'$  com pontos inicial e final em algum  $V_p$ . Pela construção de  $\mathcal{M}_p$ , há caminho  $Q$ , com  $A(Q) \subset A_p$ , conectando o ponto final de  $P'$  ao ponto inicial de  $P'$  (veja a figura 4.1). Em particular,  $P'Q$  seria um ciclo de  $\mathcal{M}(\tilde{c})$ . Necessariamente,  $P'Q \in \mathcal{M}_p$  e todas as arestas de  $P'$  pertenceriam a  $A_p$ , contradizendo o fato de  $P$  pertencer a  $\mathcal{P}$ .

Das duas afirmações acima, resulta que o comprimento de qualquer caminho pertencente a  $\mathcal{P}$  é majorado por  $s + \#W$ . Isto permite introduzir a seguinte aplicação

$$\mu : \{V_1, \dots, V_s\} \cup W \rightarrow \{0, 1, \dots, s + \#W\}$$

definida por

$$\mu(V_p) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{comprimento de } P : \\ \quad P \in \mathcal{P} \text{ com ponto} \\ \quad \text{inicial em } V_p \end{array} \right\},$$

$$\mu(i) = \max \left\{ \begin{array}{l} \text{comprimento de } P : \\ \quad P \in \mathcal{P} \text{ com ponto} \\ \quad \text{inicial } i \end{array} \right\}, \forall i \in W,$$

onde convencionamos que tal função assume valor nulo quando eventualmente for vazio o conjunto sobre o qual o respectivo máximo é considerado. Denote

$$\eta := \frac{1}{2} \frac{1}{s + \#W} \min_{\tilde{c}(i,j) > 0} \tilde{c}(i,j).$$

Defina então  $v : V(G) \rightarrow \{0, \eta, 2\eta, \dots, (s + \#W)\eta\}$  por

$$v(i) = \begin{cases} \eta\mu(V_p) & \text{se } i \in V_p \\ \eta\mu(i) & \text{se } i \in W \end{cases}.$$

Afirmamos que  $v$  é um corretor separante para  $\tilde{c}$ . (Por construção,  $v$  é identicamente constante sobre cada  $V_p$  como necessário.) Note primeiro que, para  $(i, j) \in A(G)$  com  $\tilde{c}(i, j) > 0$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{c}(i, j) + v(i) - v(j) &\geq \tilde{c}(i, j) - (s + \#W)\eta \\ &= \tilde{c}(i, j) - \frac{1}{2} \min_{\tilde{c}>0} \tilde{c} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Além disso, se  $\tilde{c}(i, j) = 0$  com  $(i, j) \in A_p$ , então  $i, j \in V_p$  e

$$\tilde{c}(i, j) + v(i) - v(j) = \tilde{c}(i, j) = 0.$$

Finalmente, suponha que  $\tilde{c}(i, j) = 0$  embora  $i$  e  $j$  não pertençam ambos a um mesmo subconjunto  $V_p$ . Pela definição de  $\mu$ , temos que  $v(i) - v(j) \geq \eta$ . Logo,

$$\tilde{c}(i, j) + v(i) - v(j) \geq \eta > 0.$$

Todas estas desigualdades confirmam que  $v$  é um corretor separante para  $\tilde{c}$ . Além disso, observe que os argumentos fornecidos são construíveis, o que assegura que um tal corretor separante pode ser obtido de modo algorítmico.  $\square$

Reunindo os resultados até agora discutidos, note que descrevemos os passos principais de um algoritmo permitindo renormalizar a função custo original  $c$ . Resulta deste processo

$$\begin{aligned} \hat{c}(i, j) &:= \tilde{c}(i, j) + v(i) - v(j) \\ &= c(i, j) + (u + v)(i) - (u + v)(j), \quad \forall (i, j) \in A(G), \end{aligned}$$

função que satisfaz

$$\hat{c}^{-1}(0) = \mathcal{M}(c) \quad (\text{entre os ciclos de } G).$$

Ressalta-se que este algoritmo é, no momento, mais teórico do que prático, especialmente no que se refere à obtenção de  $v$ . O leitor concordará que esta etapa carece de procedimento mais concreto, sem a intervenção direta do lema 4.6. Veremos uma forma de isto sanar no próximo capítulo, com o auxílio de ferramenta da dita álgebra *min-plus*. Além disso, fato interessante a destacar será a possibilidade de lá integrar ambas as etapas de renormalização em um único processo.

## 4.2 Corretores calibrados

Outra classe de destaque dentre os corretores distingue-se por incorporar à desigualdade de correção (isto é,  $u(j) \leq u(i) + c(i, j) - m(c)$  para toda aresta  $(i, j)$  de  $G$ ) a exigência de a igualdade ser verificada para cada vértice  $j$ , como uma obrigatoriedade de “calibração”.

**Definição 4.7.** Um corretor  $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  associado à função custo  $c$  é dito ser calibrado se satisfaçõa a igualdade

$$u(j) = \min_{i : i \xrightarrow{G} j} [u(i) + c(i, j) - m(c)]$$

para todo  $j \in V(G)$ .

**Observação 4.8.** No capítulo 3, para apresentar o algoritmo de Floría-Griffiths, fazemos uso de operadores de Lax-Oleinik, mais precisamente de operadores agindo sobre funções  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  da forma

$$T_c f(j) = \min_{i : i \xrightarrow{G} j} [f(i) + c(i, j)], \quad \forall j \in V(G).$$

Assim,  $u$  é corretor associado ao custo  $c$  se, e só se,  $u \leq T_{c-m(c)}u$ . Além disso, é evidente que corretores calibrados correspondem a pontos fixos de operadores de Lax-Oleinik, ou melhor,  $u$  é corretor calibrado para  $c$  se, e só se,  $u = T_{c-m(c)}u$ .

**Exemplo 4.9.** Retornamos ao problema com quatro pontos de entrega do exemplo 2.12, para o qual temos

$$c = \begin{bmatrix} * & 5 & 3 & 4 \\ 6 & * & 3 & 2 \\ 4 & 3 & * & 4 \\ 4 & 4 & 8 & * \end{bmatrix}.$$

A constante cíclica minimal associada é  $m(c) = 3$  e um corretor, como apresentado anteriormente, é dado por

$$u = (1, 1, 1, 0).$$

Não é difícil verificar que se trata na verdade de um corretor calibrado, o que é deixado como exercício para o leitor.

Adiaremos por um momento a prova sobre a existência em geral de corretores calibrados. O principal mérito destes corretores será explorado no próximo capítulo, no qual apresentaremos um tratamento algébrico linear para a teoria de otimização de médias, verificando que, quando adotamos uma álgebra apropriada, corretores calibrados resumem-se a autovetores de uma matriz canonicamente associada ao custo  $c$ .

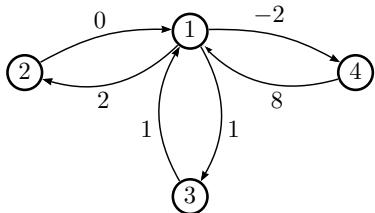
### Ponto de Vista Assintótico

Nosso objetivo para o restante da seção será exibir corretores calibrados partindo de um ponto de vista assintótico, isto é, mostrar que pontos de acumulação de uma família de autovetores de Perron-Frobenius (a ser definida) fornecem corretores desta classe.

Para tanto, associada ao custo  $c$ , consideramos uma família de matrizes  $\{L_t\}_{t>0}$  definidas sobre  $\#V(G) \times \#V(G)$  cujas entradas são dadas por

$$L_t(i, j) = \begin{cases} e^{-t c(i, j)} & \text{se } (i, j) \in A(G) \\ 0 & \text{se } (i, j) \notin A(G) \end{cases}.$$

**Exemplo 4.10.** Para a função custo descrita por



$$c = \begin{bmatrix} * & 2 & 1 & -2 \\ 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 8 & * & * & * \end{bmatrix},$$

a família de matrizes associadas vem a ser simplesmente

$$\left\{ L_t = \begin{bmatrix} 0 & e^{-2t} & e^{-t} & e^{2t} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{-8t} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}_{t>0}.$$

Observe que o polinômio característico da matriz transposta  $L_t^\top$  é

$$p_t(\zeta) = \zeta^2[\zeta^2 - (e^{-6t} + 2e^{2t})],$$

o qual possui como raízes

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = -\sqrt{e^{-6t} + 2e^{2t}} \quad e \quad \zeta_4 = \sqrt{e^{-6t} + 2e^{2t}}.$$

Denote o autovalor positivo por  $\kappa_t = \sqrt{e^{-6t} + 2e^{2t}}$ . É fácil ver do grafo acima que  $m(c) = 1$ . Note agora que

$$\begin{aligned} -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{e^{-6t} + 2e^{2t}} = \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log e^{-t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sqrt{e^{-4t} + 2} = 1 + 0 = m(c). \end{aligned}$$

Podemos também obter autovetor resolvendo o sistema  $L_t^\top \vec{y} = \kappa_t \vec{y}$ , com relação à variável  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ , dado explicitamente por

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_2 + y_3 e^{-t} + y_4 e^{-8t} & = & \kappa_t y_1 \\ y_1 e^{-2t} & = & \kappa_t y_2 \\ y_1 e^{-t} & = & \kappa_t y_3 \\ y_1 e^{2t} & = & \kappa_t y_4 \end{array} \right.,$$

o que nos fornece

$$\vec{v}_t = (v_t(1), v_t(2), v_t(3), v_t(4))^\top = \left( 1, \frac{e^{-2t}}{\kappa_t}, \frac{e^{-t}}{\kappa_t}, \frac{e^{2t}}{\kappa_t} \right)^\top.$$

Denotando por  $u(i) := -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log v_t(i)$ , obtemos

$$u = (u(1), u(2), u(3), u(4))^\top = (0, 1, 0, -3)^\top.$$

É deixado como exercício ao leitor verificar que o vetor  $u$  é um corretor calibrado para o custo  $c$ .

Veremos a seguir que são válidas em geral as propriedades relativas ao comportamento assintótico de autovalores e autovetores da família  $\{L_t^\top\}_{t>0}$  descortinadas no exemplo acima. Característica marcante em uma tal família é o fato de todas as entradas para todas as matrizes serem não negativas. Em vista disto, consideramos um resultado clássico da teoria de matrizes não negativas – cuja demonstração será apresentada separadamente na subseção 4.2.1 – que se destaca por suas aplicações em vários outros contextos. Recorde, se necessário, a noção de irreduzibilidade introduzida na definição 1.7.

**Teorema** (Perron-Frobenius). *Seja  $L$  uma matriz quadrada, de entradas não negativas e irreduzível. Então,*

- i.  $L\vec{v}_L = \kappa_L \vec{v}_L$ , para algum  $\kappa_L > 0$  e algum vetor  $\vec{v}_L$  com estradas positivas;
- ii. o autovalor  $\kappa_L$  é geometricamente simples;
- iii. os únicos autovetores não nulos de  $L$  com entradas não negativas são os múltiplos escalares de  $\vec{v}_L$ ;
- iv.  $\kappa_L$  é o autovalor maximal em valor absoluto, ou melhor, se  $\mu \neq \kappa_L$  é um autovalor de  $L$ , então  $|\mu| < \kappa_L$ .

Em particular,  $\kappa_L$  e  $\vec{v}_L$  serão denominados, respectivamente, autovalor e autovetor de Perron-Frobenius.

Denotando  $n = \#V(G)$ , no nosso contexto aplicaremos o Teorema de Perron-Frobenius ao considerar as famílias

$$\{\kappa_t\}_{t>0} \quad \text{e} \quad \left\{ \vec{v}_t = (v_t(1), \dots, v_t(n)) \right\}_{t>0}$$

formadas, respectivamente, por autovalores e autovetores de Perron-Frobenius de cada uma das matrizes pertencentes a família das matrizes transpostas  $\{L_t^\top\}_{t>0}$ . Note, em particular, que  $\vec{v}_t$  é autovetor

à esquerda da matriz  $L_t$  associado ao seu autovalor  $\kappa_t$ . Como esta condição persiste por multiplicação por escalar estritamente positivo,  $\vec{v}_t$  não está *a priori* bem definido. Por isto, levamos em conta também  $\vec{w}_t$  autovetor à direita da matriz  $L_t$  associado ao autovalor  $\kappa_t$  e demandamos que

$$\sum_{k=1}^n v_t(k) w_t(k) = 1.$$

Podemos, se necessário, considerar  $\frac{1}{v_t(1)} \vec{v}_t$  no lugar de  $\vec{v}_t$  e também  $v_t(1) \vec{w}_t$  em vez de  $\vec{w}_t$ , de modo que assumimos ainda

$$v_t(1) = 1 \quad \forall t > 0.$$

Ao investigarmos o comportamento assintótico em escala logarítmica de tais autovalores e autovetores de Perron-Frobenius, encontramos o seguinte relevante resultado relativo à caracterização da constante cíclica minimal e à obtenção de corretores calibrados.

### Teorema 4.11.

i. *Em termos dos autovalores de Perron-Frobenius, a constante cíclica minimal pode ser caracterizada como*

$$m(c) = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \kappa_t.$$

ii. *As famílias  $\{\frac{1}{t} \log v_t(i)\}_{t>0}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , admitem pontos de acumulação quando  $t \rightarrow \infty$ . Para toda sequência de números reais  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , com  $t_k \rightarrow \infty$ , com respeito à qual existem os limites*

$$u(i) := - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log v_{t_k}(i), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

*o vetor  $u := (u(1), \dots, u(n))$  assim obtido é um corretor calibrado para o custo  $c$ .*

A prova deste teorema será apresentada em partes. Para a demonstração do primeiro item, necessitaremos do seguinte lema.

**Lema 4.12.** *Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  números reais. Sobre o conjunto simplexo  $\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$ , a função*

$$F(x_1, \dots, x_m) := - \sum_{i=1}^m x_i \log x_i + \sum_{i=1}^m x_i \alpha_i$$

*atinge seu máximo valor  $\log \sum_{i=1}^m e^{\alpha_i}$  somente no ponto*

$$\left( \sum_{i=1}^m e^{\alpha_i} \right)^{-1} (e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}).$$

A prova deste resultado é deixada como exercício para o leitor. Apenas ressaltamos que, para a aplicação  $\phi(x) = -x \log x$ , é usual colocar  $\phi(0) = 0$  de modo a se ter uma função contínua sobre  $[0, 1]$ . O item  $i$  do teorema 4.11 seguirá então de forma imediata da seguinte proposição.

**Proposição 4.13.** *Para todo  $t > 0$ , verifica-se*

$$m(c) - \frac{1}{t} \log n^2 \leq -\frac{1}{t} \log \kappa_t \leq m(c).$$

*Demonstração.* Denotando  $v_t(k) = e^{-tg_t(k)}$ ,  $w_t(k) = e^{-th_t(k)}$  e  $\kappa_t = e^{-t\pi_t}$ , observe que o fato de estarmos lidando com autovetores e autovetor da matriz  $L_t$  se traduz então como

$$\sum_{i=1}^n M(i, j) e^{-t[c(i, j) + g_t(i)]} = e^{-t[g_t(j) + \pi_t]}, \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n M(i, j) e^{-t[c(i, j) + h_t(j)]} = e^{-t[h_t(i) + \pi_t]}, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

onde  $M$  é a matriz de transição associada ao grafo  $G$ . Além disso, recorde que fixamos

$$\sum_{k=1}^n e^{-t[g_t(k) + h_t(k)]} = 1.$$

Em particular, de  $\sum_{i=1}^n M(i,j)e^{-t[c(i,j)+g_t(i)-g_t(j)-\pi_t]} = 1$  obtemos que

$$c(i,j) + g_t(i) - g_t(j) - \pi_t \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A(G),$$

ou melhor,

$$\min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i,j) + g_t(i) - g_t(j)] \geq \pi_t. \quad (4.1)$$

Relembrando da representação dual para constante cíclica minimal (veja o teorema 2.10), resulta, para  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} m(c) &= \sup_{f:V(G) \rightarrow \mathbb{R}} \min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i,j) + f(i) - f(j)] \\ &\geq \min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i,j) + g_t(i) - g_t(j)] \geq \pi_t. \end{aligned}$$

Para obter a outra desigualdade do enunciado, aplicaremos o lema anterior com  $m = n^2$ . Assim sendo, se  $\nu(i,j) \geq 0$  para quaisquer  $i, j = 1, \dots, n$ , se  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu(i,j) = 1$ , e se  $M(i,j) = 0$  implica  $\nu(i,j) = 0$ , constatamos então que o lema 4.12 assegura

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu(i,j) \log \nu(i,j) - t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu(i,j)[c(i,j) + g_t(i) + h_t(j)] &\leq \\ \leq \log \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M(i,j) e^{-t[c(i,j)+g_t(i)+h_t(j)]}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Note primeiro que

$$\begin{aligned} \log \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M(i,j) e^{-t[c(i,j)+g_t(i)+h_t(j)]} &= \\ = \log \sum_{j=1}^n e^{-th_t(j)} \sum_{i=1}^n M(i,j) e^{-t[c(i,j)+g_t(i)]} & \\ = \log \sum_{j=1}^n e^{-th_t(j)} (e^{-t\pi_t} e^{-tg_t(j)}) &= \log e^{-t\pi_t} = -t\pi_t. \end{aligned}$$

O lema 4.12 estabelece ainda que a igualdade em (4.2) só ocorre para

$$\nu_t(i,j) := M(i,j) e^{-t[c(i,j)+g_t(i)+h_t(j)-\pi_t]} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Deixamos como exercício para o leitor verificar que, para toda função  $f : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ , temos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_t(i, j)f(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_t(i, j)f(j). \quad (4.3)$$

Portanto, se tomarmos  $u$  corretor arbitrário para o custo  $c$ , a propriedade (4.3) nos permite obter

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_t(i, j)[c(i, j) + g_t(i) + h_t(j)] = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_t(i, j)[c(i, j) + u(i) - u(j) + g_t(i) + h_t(j)] \\ &\geq m(c) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_t(i, j)[g_t(i) + h_t(j)] \\ &= m(c) + \sum_{k=1}^n e^{-t[g_t(k) + h_t(k)]}[g_t(k) + h_t(k)]. \end{aligned}$$

Ora,  $\sum_{k=1}^n e^{-t[g_t(k) + h_t(k)]} = 1$  implica  $g_t(k) + h_t(k) \geq 0$ . Logo, temos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_t(i, j)[c(i, j) + g_t(i) + h_t(j)] \geq m(c)$$

Finalmente, o próprio lema 4.12 quando aplicado ao caso particular  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$  garante

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu(i, j) \log \nu(i, j) \leq \log n^2.$$

Reunindo as informações obtidas, vemos que

$$-\pi_t \leq \log n^2 - tm(c),$$

onde concluímos que

$$\pi_t \geq m(c) - \frac{1}{t} \log n^2.$$

□

Recorde que impomos  $v_t(1) = 1$  para todo  $t > 0$ . Com isto, a primeira afirmação do item *ii* do teorema 4.11 é uma consequência direta da próxima proposição.

**Proposição 4.14.** *Existe constante  $K(c, n) > 0$  tal que*

$$\frac{1}{K(c, n)^t} \leq \frac{v_t(i)}{v_t(j)} \leq K(c, n)^t \quad \forall i, j \in V(G), \quad \forall t \geq 1.$$

*Demonstração.* Dados  $i, j \in V(G)$ , da conexidade do grafo resulta a existência de caminho  $P$  em  $G$  de comprimento  $r < n$  com ponto inicial  $i$  e ponto final  $j$ . Observamos então que

$$\begin{aligned} e^{-trc(P)} v_t(i) &\leq \sum_{i_0, \dots, i_{r-1}=1}^n L_t(i_0, i_1) L_t(i_1, i_2) \cdots L_t(i_{r-1}, j) v_t(i_0) \\ &= \kappa_t^r v_t(j). \end{aligned}$$

Empregando a proposição 4.13, obtemos explicitamente que

$$\frac{v_t(i)}{v_t(j)} \leq n^{2n} e^{-t n (m(c) - \Gamma_c)},$$

com

$$\Gamma_c = \max \left\{ c(Q) : \begin{array}{l} Q \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } \ell \leq n-1 \end{array} \right\}.$$

Como  $i$  e  $j$  desempenham papéis permutáveis na desigualdade acima, o resultado desta de imediato decorre.  $\square$

A parte restante da prova do teorema 4.11 é detalhada a seguir.

*Demonstração da segunda afirmação do item ii do teorema 4.11.* A função  $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  cujos valores funcionais são dados pelos limites

$$u(i) := - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \log v_{t_k}(i), \quad \forall i \in V(G),$$

vem a ser um corretor calibrado para  $c$ . Para isto mostrar, retomamos a escritura  $v_t(i) = e^{-t g_t(i)}$  e  $\kappa_t = e^{-t \pi_t}$ . Note então que, ao passar ao limite na desigualdade (4.1), obtemos

$$\min_{i \xrightarrow{G} j} [c(i, j) + u(i) - u(j)] \geq m(c),$$

ou seja,  $u$  é um corretor para o custo  $c$ .

Se  $u$  não fosse um corretor calibrado, existiria vértice  $j \in V(G)$  para o qual valeria

$$\min_{\substack{i \in G \\ i \rightarrow j}} [c(i, j) + u(i) - u(j) - m(c)] =: \eta > 0.$$

Porém, isto provocaria, para  $k$  suficientemente grande, a evidente contradição

$$1 = \sum_{i=1}^n M(i, j) e^{-t_k [c(i, j) + g_{t_k}(i) - g_{t_k}(j) - \pi_{t_k}]} \leq \sum_{i=1}^n M(i, j) e^{-t_k \frac{\eta}{2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

□

Alguns comentários conclusivos nos parecem pertinentes. Primeiro, o uso do lema 4.12 para provar o item *i* do teorema 4.11 não tem nada de fortuito. Na verdade, trata-se de uma versão elementar de fundamental princípio maximal empregado no estudo de estados de Gibbs em mecânica estatística do equilíbrio. Uma reconhecida referência introdutória para esta teoria e suas implicações para sistemas dinâmicos vem a ser as notas de Bowen [9]. Segundo, ferramentas matemáticas mais sofisticadas garantem que há convergência no item *ii* do teorema 4.11, isto é, que em escala logarítmica autovetores de Perron-Frobenius de fato convergem. O leitor com maior maturidade pode consultar, por exemplo, [10, 20, 16, 6], onde encontrará diversos aspectos relativos a esta convergência.

### 4.2.1 Teorema de Perron-Frobenius

Como foi anunciado anteriormente, finalizaremos este capítulo apresentando uma prova do Teorema de Perron-Frobenius. Resultado clássico da teoria de matrizes não negativas, suas aplicações variam desde métodos para classificação de times e ferramentas de busca na internet até modelos de crescimento populacional ou de mecânica estatística.

A demonstração do Teorema de Perron-Frobenius que será aqui discutida segue a referência [5] e se destaca por utilizar de argumentos comuns à teoria de jogos – relação esta que não será explicitada neste texto.

Iniciamos com o enunciado de importante princípio matemático fundamental para teoria de jogos. Sua respectiva demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [21].

**Teorema** (Minimax de von Neumann). *Seja  $L = (\lambda_{ij})$  matriz  $m \times n$ . Então, associada a esta matriz há uma única constante  $\chi(L)$  para a qual, simultaneamente,*

- i. *existe vetor linha  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , com  $x_i \geq 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ , verificando*

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{ij} x_i \leq \chi(L), \quad \forall j = 1, 2, \dots, n; \quad (4.4)$$

- ii. *existe vetor coluna  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$ , com  $y_j \geq 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$  e  $\sum_{j=1}^n y_j = 1$ , cumprindo*

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_j \geq \chi(L), \quad \forall i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.5)$$

Em particular, todo vetor  $\vec{x}$  satisfazendo as condições do item i é denominado vetor linha ótimo para a matriz  $L$ . Da mesma maneira, qualquer vetor  $\vec{y}$  satisfazendo as condições do item ii é um vetor coluna ótimo para a matriz  $L$ .

Destacamos que os somatórios presentes nas equações (4.4) e (4.5) são, respectivamente, as entradas do vetor linha  $\vec{x}L$  e do vetor coluna  $L\vec{y}$ . Desta forma, o teorema acima fornece o valor  $\chi(L)$  que, ao mesmo tempo, é uma cota superior para as entradas de  $\vec{x}L$  e uma cota inferior para as entradas de  $L\vec{y}$ . Por sua vez, isto nos permite concluir a identidade  $\vec{x}L\vec{y} = \chi(L)$  como consequência imediata das seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \chi(L) &\leq \min_{1 \leq i \leq m} \left[ \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_j \right] \left( \sum_{i=1}^m x_i \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i \lambda_{ij} y_j = \vec{x}L\vec{y} \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \left[ \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} x_i \right] \left( \sum_{j=1}^n y_j \right) \leq \chi(L). \end{aligned}$$

Dentre as implicações do Teorema Minimax de von Neumann, obtemos abaixo o dito princípio da indiferença para teoria de jogos.

**Proposição 4.15.** *Se são positivas todas as entradas de um vetor linha ótimo  $\vec{x}$  para uma matriz  $L$ , então qualquer vetor coluna ótimo  $\vec{y}$  satisfaz*

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_j = \chi(L), \quad \forall i = 1, 2, \dots, m,$$

isto é,  $\vec{x}L\vec{y} = \chi(L)\vec{1}$ , onde  $\vec{1}$  é o vetor coluna, com tamanho adequado, cujas entradas são todas iguais a 1.

*Demonstração.* Sejam  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , respectivamente, vetores linha e coluna ótimos para  $L$ . Sabemos que estes satisfazem  $\vec{x}L\vec{y} = \chi(L)$ , de modo que vale

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{x}L\vec{y} - \chi(L) = \vec{x}L\vec{y} - \chi(L) \sum_{i=1}^m x_i \\ &= \vec{x}L\vec{y} - \chi(L) \vec{x} \vec{1} = \vec{x}(L\vec{y} - \chi(L)\vec{1}) \\ &= \sum_{i=1}^m x_i \left( \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_j - \chi(L) \right). \end{aligned}$$

Por hipótese, as entradas de  $\vec{x}$  são positivas, isto é,  $x_i > 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ . Por outro lado, a optimidade do vetor  $\vec{y}$  nos garante para os mesmos índices que  $\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_j - \chi(L) \geq 0$ . Portanto, da igualdade acima conclui-se necessariamente

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_j = \chi(L), \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

□

**Observação 4.16.** *Por argumentação análoga, verifica-se facilmente a seguinte afirmação:*

– *Se são positivas todas as entradas de um vetor coluna ótimo  $\vec{y}$  para uma matriz  $L$ , então qualquer vetor linha ótimo  $\vec{x}$  cumpre  $\vec{x}L = \chi(L)\vec{1}$ , onde  $\vec{1}$  é o vetor linha, com tamanho apropriado, cujas entradas são todas iguais a 1.*

Como aplicação deste resultado, considere a seguinte situação ilustrativa, a qual nos permitirá conectar o Teorema Minimax de von Neumann a um problema de autovalor e autovetor.

**Exemplo 4.17.** Seja  $L$  uma matriz  $n \times n$ . Denotando por  $I$  a matriz identidade, suponha então que existam uma constante  $\kappa_L$  tal que  $\chi(L - \kappa_L I) = 0$  e um vetor linha ótimo  $\vec{x}$ , associado à matriz  $L - \kappa_L I$ , com todas as entradas positivas. Sob tais condições, para qualquer vetor coluna ótimo  $\vec{y}$  da matriz  $L - \kappa_L I$ , obtemos a seguinte equivalência

$$(L - \kappa_L I)\vec{y} = \chi(L - \kappa_L I)\vec{1} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad L\vec{y} = \kappa_L \vec{y}.$$

Com o intuito de verificar tal situação hipotética e, assim, provar o Teorema de Perron-Frobenius, inicialmente investigamos o comportamento da família  $\{L - \kappa I\}_{\kappa \in \mathbb{R}}$  com relação ao parâmetro  $\kappa$ .

**Proposição 4.18.** Seja  $L$  uma matriz  $n \times n$ .

- i.  $\chi(L - \kappa I) \rightarrow \pm\infty$  quando  $\kappa \rightarrow \mp\infty$ ;
- ii.  $\chi(L - \kappa I)$  é não crescente com relação a  $\kappa$ ;
- iii.  $|\chi(L - \kappa I) - \chi(L - \kappa^* I)| \leq |\kappa - \kappa^*|$ .

*Demonstração.* Denotaremos por  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  respectivos vetores linha e coluna ótimos para a matriz  $L - \kappa I$  e por  $\vec{x}^*$  e  $\vec{y}^*$  respectivos vetores linha e coluna ótimos para  $L - \kappa^* I$ .

Item i. Observe primeiro que

$$\begin{aligned} \chi(L - \kappa I) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi(L - \kappa I) \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} x_i - \kappa x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \right) - \frac{\kappa}{n} \sum_{j=1}^n x_j \\ &\geq \min_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} - \frac{\kappa}{n}. \end{aligned}$$

Resulta daí que

$$\lim_{\kappa \rightarrow -\infty} \chi(L - \kappa I) \geq \lim_{\kappa \rightarrow -\infty} \left( \min_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} - \frac{\kappa}{n} \right) = +\infty.$$

Procedendo de forma similar, temos que a majoração

$$\chi(L - \kappa I) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\lambda_{ij} y_j - \kappa y_i) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} - \frac{\kappa}{n}$$

implica por sua vez  $\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \chi(L - \kappa I) = -\infty$ .

Item *ii*. Perceba que, para  $\kappa \leq \kappa^*$ , as entradas da matriz  $L - \kappa^* I$  são menores ou iguais às entradas da matriz  $L - \kappa I$ . Desta forma, obtém-se facilmente que

$$\vec{z}(L - \kappa I) \vec{w} \geq \vec{z}(L - \kappa^* I) \vec{w}$$

para quaisquer vetores  $\vec{z}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ . Em particular, para  $\vec{x}$  e  $\vec{y}^*$  temos

$$\begin{aligned} \chi(L - \kappa^* I) &= \chi(L - \kappa^* I) \sum_{i=1}^n x_i \leq \\ &\leq \vec{x}(L - \kappa^* I) \vec{y}^* \leq \vec{x}(L - \kappa I) \vec{y}^* \leq \\ &\leq \chi(L - \kappa I) \sum_{j=1}^n y_j^* = \chi(L - \kappa I). \end{aligned}$$

Item *iii*. Note que valem as desigualdades

$$\begin{aligned} \chi(L - \kappa I) &= \chi(L - \kappa I) \sum_{i=1}^n x_i^* \leq \vec{x}^*(L - \kappa I) \vec{y} \quad \text{e} \\ \chi(L - \kappa^* I) &= \chi(L - \kappa^* I) \sum_{j=1}^n y_j \geq \vec{x}^*(L - \kappa^* I) \vec{y}, \end{aligned}$$

a partir das quais obtemos

$$\begin{aligned} \chi(L - \kappa I) - \chi(L - \kappa^* I) &\leq \vec{x}^*(L - \kappa I) \vec{y} - \vec{x}^*(L - \kappa^* I) \vec{y} \\ &= (\kappa - \kappa^*) \sum_{k=1}^n x_k^* y_k \leq |\kappa - \kappa^*|. \end{aligned}$$

Como podemos permutar os papéis de  $\kappa$  e  $\kappa^*$  na desigualdade anterior, resulta de imediato que

$$|\chi(L - \kappa I) - \chi(L - \kappa^* I)| \leq |\kappa - \kappa^*|.$$

□

Em preparação para a prova do Teorema de Perron-Frobenius, enunciamos e demonstramos resultados que verificam as condições do exemplo 4.17. Enfatizamos que o conceito de irreduibilidade (veja a definição 1.7) pressupõe a não negatividade de todas as entradas da matriz em questão.

**Lema 4.19.** *Seja  $L = (\lambda_{ij})$  uma matriz  $n \times n$  irreduível. Então existe  $\kappa_L > 0$  tal que  $\chi(L - \kappa_L I) = 0$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, argumentaremos que  $\chi(L) > 0$ . Com efeito, suponha  $\chi(L) \leq 0$ , de modo que, se  $\vec{x}$  é um vetor linha ótimo para matriz  $L$ , então temos  $\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} x_i \leq 0$  para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ . Uma vez que as entradas da matriz  $L$  e do vetor  $\vec{x}$  são não negativas, necessariamente

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} x_i = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Considere agora entrada  $x_{\tilde{i}} > 0$ . Impreterivelmente  $\lambda_{\tilde{i}j} = 0$  para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ , isto é, a  $\tilde{i}$ -ésima linha da matriz  $L$  tem todas as entradas nulas. Resulta daí que as  $\tilde{i}$ -ésimas linhas das matrizes  $L^2, L^3, L^4, \dots$  também possuem todas as entradas nulas e, portanto, que, para todo  $1 \leq j \leq n$  e para todo  $k \geq 1$ , ocorre  $L^k(\tilde{i}, j) = 0$ . Isto claramente contradiz o fato de  $L$  ser irreduível.

Pelo que acabamos de mostrar e pelo item  $i$  da proposição 4.18,

$$\chi(L) = \chi(L - 0I) > 0, \quad \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \chi(L - \kappa I) = -\infty.$$

Além disso, pelo item *iii* da mesma proposição, é contínua a função  $\kappa \in \mathbb{R} \mapsto \chi(L - \kappa I) \in \mathbb{R}$ . Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $\kappa_L > 0$  tal que  $\chi(L - \kappa_L I) = 0$ .  $\square$

**Lema 4.20.** *Seja  $L$  uma matriz  $n \times n$  irreduível. Então qualquer vetor linha ou coluna ótimo para a matriz  $L - \kappa_L I$  possui todas as entradas positivas.*

*Demonstração.* Seja  $\vec{x}$  um vetor linha ótimo para a matriz  $L - \kappa_L I$ . Pela escolha de  $\kappa_L$ , a condição de otimalidade fornece que todas as entradas de  $\vec{x}(L - \kappa_L I)$  são menores ou iguais a  $0 = \chi(L - \kappa_L I)$ , ou melhor, as entradas de  $\vec{x}L$  são menores ou iguais às respectivas

entradas de  $\kappa_L \vec{x}$ . Por argumento indutivo, temos daí que, para todo  $k \geq 1$ , as entradas de  $\vec{x}L^k$  são menores ou iguais às respectivas entradas de  $\kappa_L^k \vec{x}$ . Suponha então que exista alguma entrada  $x_{\tilde{j}} = 0$ . Resulta que

$$\sum_{i=1}^n L^k(i, \tilde{j})x_i \leq \kappa_L^k x_{\tilde{j}} = 0.$$

Como as entradas de  $L$  são não negativas, vemos que, para qualquer índice  $\tilde{i}$  com  $x_{\tilde{i}} > 0$ , ocorre  $L^k(\tilde{i}, \tilde{j}) = 0$  para todo  $k \geq 1$ , o que obviamente contradiz a irreduzibilidade de  $L$ . Portanto, todo vetor linha ótimo para a matriz  $L - \kappa_L I$  possui todas as entradas positivas.

Seja  $\vec{y}$  um vetor coluna ótimo para a matriz  $L - \kappa_L I$ . Pela proposição 4.15, resulta  $(L - \kappa_L I)\vec{y} = \chi(L - \kappa_L I)\vec{1} = \vec{0}$ , isto é,  $L\vec{y} = \kappa_L \vec{y}$ . Procedendo então de forma semelhante à anterior, esta igualdade nos permite argumentar que a existência de alguma entrada nula para o vetor  $\vec{y}$  igualmente contradiria a irreduzibilidade de  $L$ . Em síntese, o vetor coluna ótimo  $\vec{y}$  também possui todas as entradas positivas.  $\square$

Tendo garantidas propriedades para  $L - \kappa_L I$ , necessitamos ainda do resultado abaixo.

**Lema 4.21.** *Seja  $L = (\lambda_{ij})$  uma matriz  $n \times n$  com  $\chi(L) = 0$ . Se todo vetor linha ou coluna ótimo para a matriz  $L$  possui todas as entradas positivas, então o posto de  $L$  é igual a  $n - 1$ .*

*Demonstração.* A proposição 4.15 garante que  $L\vec{y} = \chi(L)\vec{1} = \vec{0}$  para qualquer vetor coluna ótimo  $\vec{y}$ . Portanto,  $L$  tem posto menor ou igual a  $n - 1$ . Suponha que o posto de  $L$  seja menor ou igual a  $n - 2$ , ou melhor, que exista vetor não nulo  $\vec{w}$ , não colinear ao vetor coluna ótimo  $\vec{y}$ , tal que  $L\vec{w} = \vec{0}$ . Temos então duas possibilidades: ou  $\sum_{i=1}^n w_i = 0$  ou, sem perda de generalidade,  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  (basta considerar o vetor  $(\sum_{i=1}^n w_i)^{-1} \vec{w}$ ).

*Caso  $\sum_{i=1}^n w_i = 0$ :* Como  $\vec{w}$  é não nulo, há necessariamente alguma entrada positiva. Sendo assim, considere a constante  $\theta$  dada por

$$\frac{1}{\theta} = \max_{0 \leq i \leq n} \frac{w_i}{y_i} > 0$$

e defina  $\vec{z} = \vec{y} - \theta \vec{w}$ . Assinalamos que o vetor  $\vec{z}$  cumpre

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n z_j &= \sum_{j=1}^n y_j - \theta \sum_{j=1}^n w_j = \sum_{j=1}^n y_j = 1 \quad \text{e} \\ z_j &= y_j - \theta w_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

Ademais,  $\vec{z}$  possui ao menos uma entrada nula (para índice que realiza o máximo na definição de  $\theta$ ). Obviamente  $L\vec{z} = \vec{0}$ , ou seja,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} z_j = 0 = \chi(L), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Logo,  $\vec{z}$  é um vetor coluna ótimo para  $L$  cujas entradas não são todas positivas, o que contradiz a hipótese.

*Caso  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ :* Defina constante  $\theta$  pondo

$$\frac{1 + \theta}{\theta} = \max_{0 \leq i \leq n} \frac{w_i}{y_i}.$$

Note que o vetor  $\vec{z} = (1 + \theta)\vec{y} - \theta \vec{w}$  satisfaz

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n z_j &= (1 + \theta) \sum_{j=1}^n y_j - \theta \sum_{j=1}^n w_j = 1 \quad \text{e} \\ z_j &= (1 + \theta)y_j - \theta w_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

Além disso, por construção, ao menos uma entrada de  $\vec{z}$  é nula. Novamente  $L\vec{z} = \vec{0}$  significa

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} z_j = 0 = \chi(L), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Portanto, mais uma vez temos uma contradição com a hipótese ao determinar vetor coluna ótimo para  $L$  com alguma entrada nula.

Temos então que o posto de  $L$  deve ser igual a  $n - 1$ . □

Podemos finalmente apresentar a prova aguardada.

*Demonstração do Teorema de Perron-Frobenius.*

Item *i*. Seja  $\kappa_L > 0$  constante dada pelo lema 4.19 satisfazendo  $\chi(L - \kappa_L I) = 0$ . Considere  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  vetores linha e coluna ótimos, respectivamente, com respeito à matriz  $L - \kappa_L I$ . (Note que sua existência é assegurada pelo Teorema Minimax de von Neumann.) Devido ao lema 4.20, as entradas de  $\vec{x}$  e  $\vec{v}_L := \vec{y}$  são todas positivas. Uma vez que nos deparamos com a situação abordada no exemplo 4.17, obtemos  $L\vec{v}_L = \kappa_L \vec{v}_L$ .

Item *ii*. Basta aplicar o lema 4.21 para a matriz  $L - \kappa_L I$ . Visto que o lema 4.20 garante que quaisquer vetores linha ou coluna ótimos para a matriz  $L - \kappa_L I$  possuem entradas positivas, temos que o posto de  $L - \kappa_L I$  é igual a  $n - 1$ . Segundo o Teorema do Núcleo e da Imagem, a dimensão do núcleo da transformação linear associada é igual a 1. Portanto, qualquer vetor  $\vec{w}$  que satisfizer  $(L - \kappa_L I)\vec{w} = 0$  é múltiplo escalar de  $\vec{v}_L$ .

Item *iii*. Como as entradas do vetor coluna ótimo  $\vec{y} = \vec{v}_L$  são positivas, a observação 4.16 assegura que um vetor linha ótimo  $\vec{x}$  da matriz  $L - \kappa_L I$  cumpre

$$\vec{x}(L - \kappa_L I) = \chi(L - \kappa_L I)\vec{1} = \vec{0},$$

sendo, portanto,  $\vec{x}$  um autovetor à esquerda da matriz  $L$  associado ao autovalor  $\kappa_L$ . Sejam  $\vec{\vartheta}$  autovetor de  $L$  com entradas não negativas e  $\vec{x}$  vetor linha ótimo para a matriz  $L - \kappa_L I$ . Concretamente, temos

$$L\vec{\vartheta} = \mu\vec{\vartheta} \quad (\text{com } \mu \geq 0) \quad \text{e} \quad \vec{x}L = \kappa_L \vec{x}.$$

Verifica-se facilmente cada uma das seguintes igualdades

$$\mu(\vec{x}\vec{\vartheta}) = \vec{x}(\mu\vec{\vartheta}) = \vec{x}(L\vec{\vartheta}) = \vec{x}L\vec{\vartheta} = (\kappa_L \vec{x})\vec{\vartheta} = \kappa_L(\vec{x}\vec{\vartheta}).$$

Como pelo lema 4.20 as entradas de  $\vec{x}$  são positivas, resulta então

$$\vec{x}\vec{\vartheta} = \sum_{i=1}^n x_i \vartheta_i > 0.$$

Em consequência,  $\vec{\vartheta}$  é autovetor associado ao autovalor  $\mu = \kappa_L$  e, devido ao item *ii* acima, é múltiplo escalar do autovetor de Perron-Frobenius  $\vec{v}_L$ .

Item *iv*. Primeiramente, considere  $\vec{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)^\top$  um autovetor não nulo da matriz  $L = (\lambda_{ij})$  associado ao autovalor  $\mu \in \mathbb{C}$ , isto é,  $L\vec{\vartheta} = \mu\vec{\vartheta}$ . Defina

$$\vec{\vartheta}^+ := (|\vartheta_1|, |\vartheta_2|, \dots, |\vartheta_n|)^\top.$$

Como  $\lambda_{ij} \geq 0$  para quaisquer  $1 \leq i, j \leq n$ , temos

$$|\mu||\vartheta_i| = \left| \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}\vartheta_j \right| \leq \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}|\vartheta_j|, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Ao escrever  $\vec{v}_L = \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$ , para todo  $1 \leq i \leq n$  vale

$$|\mu| \frac{|\vartheta_i|}{y_i} \leq \frac{1}{y_i} \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} y_j \frac{|\vartheta_j|}{y_j} \leq \kappa_L \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|\vartheta_j|}{y_j}, \quad (4.6)$$

onde concluímos que  $|\mu| \leq \kappa_L$ .

Resta mostrar que não pode ocorrer  $|\mu| = \kappa_L$  quando  $\mu \neq \kappa_L$ . Por redução ao absurdo, assuma que este seja o caso. Observe então que (4.6) implica

$$|\mu||\vartheta_i| = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}|\vartheta_j| \quad \text{sempre que} \quad \frac{|\vartheta_i|}{y_i} = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|\vartheta_j|}{y_j}.$$

Porém, deve existir índice  $1 \leq \ell_0 \leq n$  tal que  $|\mu||\vartheta_{\ell_0}| < \sum_{j=1}^n \lambda_{\ell_0 j}|\vartheta_j|$ . Caso contrário,  $\vec{\vartheta}^+$  seria autovetor de  $L$  com entradas não negativas e, pelo item *iii* acima, necessariamente se verificaria  $\mu = \kappa_L$ . Assim, deve em particular acontecer

$$\frac{|\vartheta_{\ell_0}|}{y_{\ell_0}} < \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|\vartheta_j|}{y_j}.$$

Raciocinando de novo como em (4.6), segue que, quando  $\lambda_{\ell_1 \ell_0} \neq 0$ ,

$$\kappa_L \frac{|\vartheta_{\ell_1}|}{y_{\ell_1}} = |\mu| \frac{|\vartheta_{\ell_1}|}{y_{\ell_1}} < \kappa_L \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|\vartheta_j|}{y_j} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\vartheta_{\ell_1}|}{y_{\ell_1}} < \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|\vartheta_j|}{y_j}.$$

Empregando repetidamente este argumento, toda vez que tivermos  $\lambda_{\ell_k \ell_{k-1}} \cdots \lambda_{\ell_2 \ell_1} \lambda_{\ell_1 \ell_0} \neq 0$ , sucede

$$\frac{|\vartheta_{\ell_k}|}{y_{\ell_k}}, \dots, \frac{|\vartheta_{\ell_1}|}{y_{\ell_1}}, \frac{|\vartheta_{\ell_0}|}{y_{\ell_0}} < \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|\vartheta_j|}{y_j}.$$

Sendo  $L$  irredutível, daí resulta a contradição de que nenhum dos  $n$  termos  $|\vartheta_i|/y_i$  realiza o máximo  $\max_j |\vartheta_j|/y_j$ .  $\square$

## Exercícios

**Exercício 4.1.** Verifique as afirmações feitas no exemplo 4.2.

**Exercício 4.2.** Seja  $\tilde{c}$  custo renormalizado definido por

$$\tilde{c}(i, j) := c(i, j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A(G),$$

onde  $u : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  é um corretor associado à função custo original  $c$ . Mostre que, se  $v$  é um corretor separante para  $\tilde{c}$ , então  $u + v$  é um corretor separante para  $c$ .

**Exercício 4.3.** Sejam  $u$  um corretor separante e  $v$  um corretor arbitrário associados ao custo  $c$ . Mostre que, para todo  $t \in (0, 1]$ , o corretor  $tu + (1-t)v$  é separante. Em particular, conclua que é convexo o conjunto formado por todos os corretores separantes associados a uma determinada função custo.

**Exercício 4.4.** Use o exercício anterior e o teorema 4.4 para provar que os corretores separantes formam um subconjunto denso entre os corretores de um certo custo. Mais concretamente, supondo  $\#V(G) = n$ , se  $u = (u(1), u(2), \dots, u(n))$  define um corretor arbitrário para o custo  $c$ , mostre que, dado  $\epsilon > 0$ , sempre se pode encontrar corretor separante  $v = (v(1), v(2), \dots, v(n))$  associado a  $c$  satisfazendo

$$\sum_{i=1}^n |u(i) - v(i)| < \epsilon.$$

**Exercício 4.5.** Verifique que é calibrado o corretor apresentado no exemplo 4.9. Prove também que o vetor obtido por processo de limite no exemplo 4.10 define corretor calibrado para o custo lá considerado.

**Exercício 4.6.** Sejam  $u_1$  e  $u_2$  dois corretores calibrados associados ao custo  $c$ . Mostre que o corretor dado por

$$u_{\min}(i) = \min\{u_1(i), u_2(i)\}, \quad \forall i \in V(G),$$

também é calibrado. Propriedade análoga é válida quando levados em conta corretores separantes? O que se pode afirmar para  $u_{\max}(i) = \max\{u_1(i), u_2(i)\}$ ,  $\forall i \in V(G)$ , em ambas as situações?

**Exercício 4.7.** Como observado nos exemplos 4.2 e 4.9, o corretor apresentado no exemplo 2.12 é ao mesmo tempo separante e calibrado. O objetivo deste exercício é mostrar que, de modo geral, tanto nenhum destes subconjuntos de corretores está contido no outro, como não é vazio o complementar da reunião destas duas classes de corretores.

i. Considere a função custo descrita por

$$c = \begin{bmatrix} * & 5 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & * & 5 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & * & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 5 & * & 5 \\ 9 & 3 & 3 & 2 & * \end{bmatrix}.$$

Determine que  $m(c) = 3$ , bem como estabeleça que os ciclos simples pertencentes ao conjunto  $\mathcal{M}(c)$  são  $1 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 1$ ,  $1 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1$  e  $1 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 1$ . Prove então que  $u = (2, 2, 2, 1/2, 2)$  define um corretor associado a  $c$ , o qual é separante mas não é calibrado.

ii. Seja  $c$  o custo dado matricialmente por

$$c = \begin{bmatrix} * & 24 & 32 & 10 & 22 \\ 18 & * & 20 & 32 & 22 \\ 12 & 14 & * & 15 & 18 \\ 18 & 28 & 20 & * & 28 \\ 24 & 16 & 30 & 12 & * \end{bmatrix}.$$

Mostre que  $m(c) = 14$ . Determine que os únicos ciclos simples pertencentes a  $\mathcal{M}(c)$  são  $1 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 1$  e  $1 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 1$ . Prove a seguir que  $u = (-2, 0, 0, -6, 4)$  define um corretor associado ao custo  $c$ , o qual é calibrado mas não é separante.

iii. Considere agora o custo dado por

$$c = \begin{bmatrix} * & -1 & -2 & 1 & -1 \\ -8 & * & 0 & 0 & -2 \\ -8 & -3 & * & -7 & -4 \\ -2 & 2 & -3 & * & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -8 & * \end{bmatrix}.$$

Mostre que, neste caso,  $m(c) = -5$ . Estabeleça que os ciclos simples em  $\mathcal{M}(c)$  são  $1 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 1$ ,  $3 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3$ ,  $3 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3$  e  $1 \xrightarrow{G} 5 \xrightarrow{G} 4 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 1$ . Prove enfim que  $u = (0, 3, 3, 1, 4)$  define um corretor para  $c$ , o qual não é separante e tampouco calibrado.

**Exercício 4.8.** Seja  $c$  o custo representado por

$$c = \begin{bmatrix} * & 4 & 1 & 9 & 8 \\ 12 & * & 13 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & * & 7 & 11 \\ 15 & 7 & 8 & * & 9 \\ 16 & 9 & 23 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Verifique que  $m(c) = 6$ . Mostre que os ciclos simples pertencentes a  $\mathcal{M}(c)$  são  $5 \xrightarrow{G} 5$ ,  $1 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 1$  e  $1 \xrightarrow{G} 3 \xrightarrow{G} 2 \xrightarrow{G} 1$ . Prove que  $u = (6, 0, 1, 2, 1)$  e  $v = (6, 0, 1, 1, -1)$  definem corretores calibrados para  $c$ . Mostre que, para todo  $t \in (0, 1)$ , o corretor  $tu + (1-t)v$  não é calibrado. Conclua então que não é em geral convexo o conjunto dos corretores calibrados de um determinado custo.

**Exercício 4.9.** Prove que os corretores calibrados para um certo custo formam um conjunto fechado. Mais precisamente, se  $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de corretores calibrados para o custo  $c$  a qual converge para o corretor  $u$ , mostre que  $u$  também é calibrado.

**Exercício 4.10.** Seja  $L$  uma matriz  $n \times n$  irredutível. Mostre que, para todo inteiro  $k \geq 1$ , o autovalor de Perron-Frobenius associado à matriz produto  $L^k$  cumpre  $\kappa_{L^k} = \kappa_L^k$ .

**Exercício 4.11.** Demonstre o lema 4.12.

[Sugestão: Use a concavidade estrita da função logarítmica.]

**Exercício 4.12.** Verifique a propriedade (4.3).

**Exercício 4.13** (Potencial de Mañé). *Dado  $G$  grafo orientado conexo, considere  $c : A(G) \rightarrow \mathbb{R}$  função custo. Introduzimos o potencial de Mañé associado colocando para  $(i, j) \in V(G) \times V(G)$*

$$\phi_c(i, j) = \inf \left\{ k(c(P) - m(c)) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{conectando } i \text{ a } j \text{ de} \\ \text{comprimento } k \geq 1 \end{array} \right\}.$$

Mostre primeiro que esta função está bem definida ao observar que o ínfimo acima é, na verdade, um mínimo sobre os caminhos de comprimento no máximo  $\#V(G)$  que não repetem vértices. Prove a seguir que o potencial de Mañé verifica as propriedades:

- i. para  $i_0, i_1, i_2 \in V(G)$ , ocorre  $\phi_c(i_0, i_2) \leq \phi_c(i_0, i_1) + \phi_c(i_1, i_2)$ ;
  - ii. para todo  $i \in V(G)$ , tem-se  $\phi_c(i, i) \geq 0$  e, além disso, acontece  $\phi_c(i, i) = 0$  se, e só se,  $i$  pertence a algum ciclo de  $\mathcal{M}(c)$ ;
  - iii. com respeito a decomposição irredutível do conjunto cíclico minimal (reveja a definição 4.5), vale que
- $$i, j \in V_p \quad \text{para algum } p \quad \Leftrightarrow \quad \phi_c(i, j) + \phi_c(j, i) = 0;$$
- iv. se  $i$  é vértice de algum ciclo de  $\mathcal{M}(c)$ , então o vetor  $u$  com entradas  $u(j) := \phi_c(i, j)$  define um corretor calibrado para o custo  $c$ .

# Capítulo 5

## Álgebra *min-plus*

Ao apresentar uma breve introdução à álgebra *min-plus*, o objetivo deste capítulo está primeiramente em relacionar conceitos próprios desta teoria com as noções que antes estudamos em otimização de médias sobre grafos. A álgebra *min-plus* é uma vasta área de pesquisa com aplicações correntes tanto em ciências de base como em engenharias. Há, portanto, uma extensa literatura sobre esta teoria e seus desdobramentos. O leitor interessado em se aprofundar pode consultar referências de base como, por exemplo, [3, 17, 18].

A minimização tem sido naturalmente o foco destas notas. Observe que, visto como uma operação sobre o conjunto  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , o mínimo partilha de várias propriedades em comum com a soma usual sobre  $\mathbb{R}$ , como, por exemplo,

$$\begin{aligned} a + 0 &= a, & \min\{a, +\infty\} &= a; \\ a + b &= b + a, & \min\{a, b\} &= \min\{b, a\}; \\ a + (b + c) &= (a + b) + c, & \min\{a, \min\{b, c\}\} &= \min\{\min\{a, b\}, c\}. \end{aligned}$$

Do ponto de vista algébrico, passaremos a estudar uma estrutura semelhante a  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ , ou melhor, similar ao conjunto  $\mathbb{R}$  munido da soma e multiplicação habituais. Para tanto, consideraremos o conjunto  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  equipado das operações de *mínimo* e *adição* (respectivamente denotadas por  $\oplus$  e  $\otimes$ ), as quais justificam a denominação *min-plus* adotada.

Queremos sobretudo destacar aqui a utilidade da álgebra *min-plus* para análise de questões de otimização de médias sobre grafos. Por exemplo, associaremos os conceitos de constante cíclica minimal e de corretor calibrado às noções, respectivamente, de autovalor e de autovetor de um operador apropriado, o qual é linear segundo a álgebra *min-plus*. Reduziremos assim o problema dos pontos de entrega a um problema espectral segundo esta álgebra.

## 5.1 Linguagem da álgebra *min-plus*

O exemplo trivial presente em toda literatura de álgebra linear é o espaço vetorial  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ , isto é, o conjunto das  $n$ -uplas de números reais equipado com soma vetorial e multiplicação por escalar, construído a partir de  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ . É comum também estudar a álgebra  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$ , ou seja, o conjunto das matrizes quadradas de tamanho  $n$  munido da soma e do produto de matrizes, as quais caracterizam as transformações lineares sobre  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ .

Com o intuito de introduzir a álgebra *min-plus*, procederemos de forma análoga. Primeiramente, apresentaremos  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes) = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$  explorando pormenores da operação de mínimo. Em seguida, definiremos o correspondente espaço  $n$ -dimensional *min-plus*  $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$ . Por fim, descreveremos a álgebra das transformações lineares *min-plus*

$$\mathcal{L}((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n) = ((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes).$$

(Como veremos, esta coincide com a álgebra matricial *min-plus*.)

Ainda nesta seção, dedicaremos então total atenção ao problema espectral de determinação de autovalor  $\tau_S$  e caracterização de autovetor  $\vec{v}$  em

$$S \otimes \vec{v} = \tau_S \odot \vec{v},$$

onde  $S$  será uma matriz quadrada pertencente a álgebra matricial *min-plus* e consideraremos, portanto, as respectivas operações da álgebra em questão.

**Definição 5.1.** *Considere o conjunto  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  munido das seguin-*

tes operações

$$\begin{aligned}\oplus : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\} &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ (a, b) &\mapsto a \oplus b := \min\{a, b\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\otimes : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\} &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ (a, b) &\mapsto a \otimes b := a + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \\ (+\infty, b) &\mapsto +\infty \otimes b := +\infty, \\ (a, +\infty) &\mapsto a \otimes +\infty := +\infty.\end{aligned}$$

Denominamos  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes) = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$  de conjunto real min-plus.

**Exemplo 5.2.** O leitor se aclimatará facilmente com as notações e as operações apresentadas verificando que

$$\begin{array}{ll} 26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} = -85, & 8 \otimes 4 = 8 + 4 = 12, \\ +\infty \oplus 37 = 37, & 46 \otimes +\infty = +\infty, \\ 2 \oplus 2 = 2, & 2 \otimes -3 = -1. \end{array}$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97$$

e  $(7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.$

A adição  $\otimes$ , que já é tão familiar ao leitor, goza das mesmas propriedades que a multiplicação usual, operação análoga na estrutura padrão  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ . Isto destacamos em listagem abaixo.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a.$
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a.$
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c.$
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$ :	$a \otimes (-a) = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty.$

**Observação 5.3.** Devido a esta última propriedade, a operação de adição  $\otimes$  não mais se comporta como originalmente. Mais precisamente, a lei do cancelamento,  $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ , sempre é

satisfeta em  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ . No entanto, esta não é uma afirmação verdadeira em geral sobre  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ , como pode ser visto na seguinte exemplificação

$$-2 \otimes +\infty = +\infty = 5 \otimes +\infty \quad e \quad -2 \neq 5.$$

Salientamos – deixando a verificação para o exercício 5.1 – que o mínimo  $\oplus$  também satisfaz algumas das propriedades anteriores.

Existência de elemento neutro:

$$a \oplus +\infty = a.$$

Comutatividade:

$$a \oplus b = b \oplus a.$$

Associatividade:

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c.$$

Porém, do ponto de vista teórico, uma das mais importantes características de  $\oplus$  é descrita abaixo.

Idempotência:

$$a \oplus a = \min\{a, a\} = a.$$

Subjacente ao conceito de mínimo, encontramos a ordem herdada por  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  da ordem usual sobre números reais, ou melhor,

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \oplus b = a.$$

(Para mais detalhes, veja o exercício 5.3.) Com respeito a esta ordem e a operação  $\otimes$ , destacamos propriedade de imediata verificação:

$$a \geq b \quad e \quad c \geq d \quad \Rightarrow \quad a \otimes c \geq b \otimes d. \quad (5.1)$$

As operações de mínimo e de adição estão bem relacionadas pela propriedade distributiva de  $\otimes$  com respeito a  $\oplus$ , isto é,

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \otimes c &= \min\{a, b\} + c = \min\{a + c, b + c\} \\ &= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c). \end{aligned}$$

**Observação 5.4.** A distributividade de  $\oplus$  com respeito a  $\otimes$  não é em geral válida, como pode ser visto, por exemplo, para os seguintes valores

$$(-3 \otimes 8) \oplus 5 = 5 \neq 2 = (-3 \oplus 5) \otimes (8 \oplus 5).$$

A distinção fundamental entre  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  e o conjunto real *min-plus*  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$  é a impossibilidade de se definir operação inversa à  $\oplus$ , que, no caso de  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ , vem a ser a subtração. Este fato tem como efeito inclusive a diversificação de possíveis soluções de uma equação algébrica de primeiro grau.

**Exemplo 5.5.** Considere a equação linear min-plus dada por

$$(7 \otimes x) \oplus -5 = 7.$$

*Não é difícil perceber que sempre ocorre  $\min\{7 + x, -5\} \leq -5$ , logo tal equação não possui solução. Por outro lado, as equações*

$$(7 \otimes x) \oplus -5 = -7 \quad \text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = -5$$

*possuem soluções descritas, respectivamente, ora por um único valor  $x = -14$ , ora por infinitos valores  $x \in [-12, +\infty]$ . Veremos mais detalhes sobre a diversidade de possíveis soluções para uma equação linear min-plus no exercício 5.2.*

No contexto *min-plus*, o conceito análogo ao de espaço vetorial é apresentado a seguir.

**Definição 5.6.** O espaço *n-dimensional real min-plus* é definido considerando o conjunto  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ , cujos elementos são representados por

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^\top, \quad \text{com} \quad v_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

munido de um produto por escalar a em  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$  dado por

$$\begin{aligned} a \odot \vec{v} &:= (a \otimes v_1, \dots, a \otimes v_n)^\top \\ &= (a + v_1, \dots, a + v_n)^\top, \quad \forall \vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \end{aligned}$$

e uma adição vetorial

$$\begin{aligned} \vec{v} \oplus \vec{w} &:= (v_1 \oplus w_1, \dots, v_n \oplus w_n)^\top \\ &= (\min\{v_1, w_1\}, \dots, \min\{v_n, w_n\})^\top, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \end{aligned}$$

Tal espaço será denotada por  $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$ .

Várias propriedades operacionais discutidas para  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$  são naturalmente herdadas pelo espaço  $n$ -dimensional *min-plus*. Além disso, a ordem lexicográfica (reveja a subseção 2.1.2) quando considerada sobre  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$  pode certas vezes ser ratificada de forma operacional através da implicação

$$\vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \leq \vec{w}.$$

Para priorizar uma apresentação mais concisa do conteúdo, deixamos estas verificações para os exercícios 5.4 e 5.5.

**Exemplo 5.7.** Para que o leitor se habitue com a notação, apresentamos alguns cálculos elementares:

$$3 \odot (+\infty, 4, -5)^T = (3 \otimes +\infty, 3 \otimes 4, 3 \otimes -5)^T = (+\infty, 7, -2)^T,$$

$$+\infty \odot (89, +\infty, 56, -23)^T = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty)^T,$$

$$\begin{aligned} (15, -4 + \infty, +\infty)^T \oplus (0, 85, 7, +\infty)^T &= \\ &= (15 \oplus 0, -4 \oplus 85, +\infty \oplus 7, +\infty \oplus +\infty)^T = (0, -4, 7, +\infty)^T. \end{aligned}$$

Damos também uma amostra da ordem lexicográfica

$$\begin{aligned} (4, 120, -1)^T \oplus (4, +\infty, -3)^T &= (4, 120, -1)^T \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow (4, 120, -1)^T \leq (4, +\infty, -3)^T. \end{aligned}$$

Ademais, frisamos a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} (1, 3, +\infty)^T &= \\ &= (\min\{1, +\infty\}, \min\{3, +\infty\}, \min\{+\infty, +\infty\})^T \\ &= (1, +\infty, +\infty)^T \oplus (+\infty, 3, +\infty)^T \oplus (+\infty, +\infty, +\infty)^T \\ &= 1 \odot (0, +\infty, +\infty)^T \oplus 3 \odot (+\infty, 0, +\infty)^T \oplus +\infty \odot (+\infty, +\infty, 0)^T. \end{aligned}$$

A última equação do exemplo precedente nada tem de particular. Destacamos que todo elemento do espaço  $n$ -dimensional *min-plus* possui reescrita dada por

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (v_1, \dots, v_n)^T = (\min\{v_1, +\infty\}, \dots, \min\{v_n, +\infty\})^T \\ &= (v_1, +\infty, \dots, +\infty)^T \oplus \dots \oplus (+\infty, +\infty, \dots, v_n)^T \\ &= \bigoplus_{i=1}^n v_i \odot (+\infty, \dots, 0, \dots, +\infty)^T. \end{aligned}$$

Isto motiva a introdução da seguinte base canônica

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (0, +\infty, +\infty, \dots, +\infty)^\top, \\ \vec{e}_2 &= (+\infty, 0, +\infty, \dots, +\infty)^\top, \\ &\vdots \\ \vec{e}_n &= (+\infty, +\infty, +\infty, \dots, 0)^\top.\end{aligned}$$

Procurando por outros atributos que igualmente aproximem a estrutura  $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$  da noção de espaço vetorial, passaremos a examinar as transformações lineares no espaço  $n$ -dimensional *min-plus*. Deste modo, dizemos que

$$T : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \rightarrow (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$$

é uma aplicação linear se satisfaz

$$T(a \odot \vec{v}) = a \odot T(\vec{v}) \quad \text{e} \quad T(\vec{v} \oplus \vec{w}) = T(\vec{v}) \oplus T(\vec{w}),$$

para todo  $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e quaisquer  $\vec{v}, \vec{w} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ .

**Exemplo 5.8.** Para a matriz com entradas em  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ +\infty & 16 & +\infty \end{bmatrix},$$

considere a aplicação  $T_S : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \rightarrow (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$  definida por

$$T_S \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3)) \\ v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3 \\ 16 \otimes v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min\{v_2 - 3, 4 + v_3\} \\ \min\{v_1, v_2 - 6, v_3\} \\ 16 + v_2 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que  $T_S$  é uma transformação linear. Com efeito, denotando  $a \odot \vec{v} = (a \otimes v_1, a \otimes v_2, a \otimes v_3)^\top$ , obtemos

$$\begin{aligned}T_S(a \odot \vec{v}) &= \begin{pmatrix} (-3 \otimes a \otimes v_2) \oplus (4 \otimes a \otimes v_3) \\ a \otimes v_1 \oplus (-6 \otimes a \otimes v_2) \oplus a \otimes v_3 \\ 16 \otimes a \otimes v_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \otimes [(-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3)] \\ a \otimes [v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3] \\ a \otimes (16 \otimes v_2) \end{pmatrix} \\ &= a \odot T_S(\vec{v}),\end{aligned}$$

enquanto para  $\vec{v} \oplus \vec{w} = (v_1 \oplus w_1, v_2 \oplus w_2, v_3 \oplus w_3)^\top$ , temos

$$\begin{aligned} T_S(\vec{v} \oplus \vec{w}) &= \begin{pmatrix} [-3 \otimes (v_2 \oplus w_2)] \oplus [4 \otimes (v_3 \oplus w_3)] \\ (v_1 \oplus w_1) \oplus [-6 \otimes (v_2 \oplus w_2)] \oplus (v_3 \oplus w_3) \\ 16 \otimes (v_2 \oplus w_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [(-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3)] \oplus [(-3 \otimes w_2) \oplus (4 \otimes w_3)] \\ [v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3] \oplus [w_1 \oplus (-6 \otimes w_2) \oplus w_3] \\ (16 \otimes v_2) \oplus (16 \otimes w_2) \end{pmatrix} \\ &= T_S(\vec{v}) \oplus T_S(\vec{w}). \end{aligned}$$

Mais geralmente, para qualquer matriz  $n \times n$ ,  $S = (\zeta_{ij})$ , com entradas no conjunto real *min-plus*  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ , introduzimos o operador

$$T_S(\vec{v}) := \bigoplus_{j=1}^n v_j \odot (\zeta_{1j}, \zeta_{2j}, \dots, \zeta_{nj})^\top$$

Fica a cargo do leitor verificar que o operador  $T_S$  assim definido é linear (veja o exercício 5.6).

Utilizando reescrita dos vetores de  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$  com relação à base canônica  $\{\vec{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ , segue de imediato que

$$T(\vec{v}) = \bigoplus_{i=1}^n v_i \odot T(\vec{e}_i),$$

para qualquer  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ . Tal relação, por sua vez, justifica a seguinte representação matricial

$$S_T := [T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad \dots \quad T(\vec{e}_n)],$$

onde o vetor  $T(\vec{e}_i)$  é visto como a  $i$ -ésima coluna para a matriz  $S_T$ . Assim, de maneira recíproca à associação entre matrizes  $S$  e transformações lineares  $T_S$ , temos

$$T(\vec{v}) = \bigoplus_{i=1}^n v_i \odot T(\vec{e}_i) = T_{S_T}(\vec{v}).$$

Desta discussão concluímos que as matrizes e as transformações lineares também são conceito equivalentes sob o ponto de vista *min-plus*. Portanto,

$$\mathcal{L}((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n) = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}.$$

Isto nos conduz de modo natural à seguinte estrutura algébrica.

**Definição 5.9.** *O conjunto das matrizes  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  forma-rá a álgebra das transformações lineares min-plus ou álgebra matricial min-plus, a qual será denotada por  $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes)$ , quando estiver munido das três operações a seguir:*

- *um produto por escalar em  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$  dado por*

$$a \odot S := (a \otimes S(i, j))_{1 \leq i, j \leq n} = (a + S(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$$

*para todo  $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e qualquer  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ ;*

- *uma adição comutativa entre elementos definida por*

$$\begin{aligned} S \oplus R &:= (S(i, j) \oplus R(i, j))_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= (\min\{S(i, j), R(i, j)\})_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

*para quaisquer  $S, R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ ;*

- *um produto matricial não comutativo dado por*

$$\begin{aligned} S \otimes R &:= \left( \bigoplus_{k=1}^n S(i, k) \otimes R(k, j) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \left( \min_{1 \leq k \leq n} \{S(i, k) + R(k, j)\} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

*para quaisquer  $S, R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ ;*

*(Acima denotamos a entrada  $(i, j)$  das matrizes  $S$  e  $R$ , respectivamente, por  $S(i, j)$  e  $R(i, j)$ .)*

Novamente para que se mantenha a concisão do texto, deixamos as principais propriedades da álgebra matricial *min-plus* para o exercício 5.7. De forma similar ao caso vetorial, a ordem lexicográfica quando assumida em  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  admite confirmação operacional por

$$S \oplus R = S \quad \Rightarrow \quad S \leq R.$$

**Exemplo 5.10.** Abaixo visualizamos as operações da álgebra min-plus em notação matricial:

$$a \odot \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \dots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \dots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \zeta_{11} & \dots & a + \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a + \zeta_{n1} & \dots & a + \zeta_{nn} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \dots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \dots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \eta_{11} & \dots & \eta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \dots & \eta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min\{\zeta_{11}, \eta_{11}\} & \dots & \min\{\zeta_{1n}, \eta_{1n}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\{\zeta_{n1}, \eta_{n1}\} & \dots & \min\{\zeta_{nn}, \eta_{nn}\} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \dots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \dots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \eta_{11} & \dots & \eta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \dots & \eta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min_{1 \leq k \leq n} \{\zeta_{1k} + \eta_{k1}\} & \dots & \min_{1 \leq k \leq n} \{\zeta_{1k} + \eta_{kn}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \min_{1 \leq k \leq n} \{\zeta_{nk} + \eta_{k1}\} & \dots & \min_{1 \leq k \leq n} \{\zeta_{nk} + \eta_{kn}\} \end{bmatrix}.$$

Veremos no exercício 5.7 que

$$O := \begin{bmatrix} +\infty & \dots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \dots & +\infty \end{bmatrix} \quad e \quad I := \begin{bmatrix} 0 & +\infty & \dots & +\infty \\ +\infty & 0 & \dots & +\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & +\infty & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

são, respectivamente, a matriz nula (elemento neutro para  $\oplus$ ) e a matriz identidade (elemento neutro para  $\otimes$ ).

Podemos identificar cada matriz  $S = (\zeta_{ij})$  com sua aplicação linear associada,  $T_S$ , e assim apresentar o produto de uma matriz com

um vetor  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^\top$  simplesmente colocando

$$S \otimes \vec{v} := T_S(\vec{v}) = \bigoplus_{j=1}^n v_j \odot (\zeta_{1j}, \zeta_{2j}, \dots, \zeta_{nj})^\top,$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \dots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \dots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min_{1 \leq k \leq n} \{\zeta_{1k} + v_k\} \\ \vdots \\ \min_{1 \leq k \leq n} \{\zeta_{nk} + v_k\} \end{pmatrix}.$$

Introduzimos uma derradeira notação: a matriz  $S^{k^\otimes}$  denotará o produto matricial *min-plus* da matriz  $S$  por si mesma  $k$  vezes, ou seja,

$$S^{k^\otimes} = \overbrace{S \otimes S \otimes \cdots \otimes S \otimes S}^k.$$

Observe que, para toda entrada  $(i, j)$ ,

$$\begin{aligned} S^{k^\otimes}(i, j) &= \bigoplus_{i_1=1}^n \bigoplus_{i_2=1}^n \cdots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^n [S(i, i_1) \otimes S(i_1, i_2) \otimes \cdots \otimes S(i_{k-1}, j)] \\ &= \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{c} 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i \quad \text{e} \quad i_k = j \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Convenciona-se ainda que  $S^{0^\otimes} = I$ .

Até este ponto, apresentamos as principais definições relativas à álgebra *min-plus*, as quais nos permitirão discutir e tirar proveito de problema de autovalor e autovetor segundo esta álgebra no restante desta seção.

**Observação 5.11.** Antes de prosseguir, destacamos isomorfismos envolvendo a álgebra min-plus

$$(\mathbb{R}_+, \max, \cdot) \xleftarrow{\log x} (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +) \xleftarrow{-x} (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +),$$

onde a primeira estrutura recebe a denominação de álgebra max e a segunda, de álgebra max-plus. Tais álgebras também gozam das

mesmas propriedades discutidas anteriormente, além de admitirem extensões naturais em termos de estruturas vetoriais e matriciais. A formalização abstrata sob a qual estão incluídas tais álgebras compreende a teoria dos semianéis, diodos, semimódulos, etc., que tem como propriedade chave a idempotência. Caso o leitor tenha interesse neste tópico, indicamos a referência [17].

### 5.1.1 Problema de autovalor e autovetor

Dada matriz  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ , examinaremos a equação

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

procurando por constantes  $\tau \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e vetores  $\vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$  que a satisfazem. Nossa interesse vem a ser, portanto, a busca de autovalores e autovetores no contexto da álgebra *min-plus*.

Antes, porém, chamaremos a atenção para a reescrita de tal problema com a notação habitual, o que resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} \min\{S(1,1) + v_1, S(1,2) + v_2, \dots, S(1,n) + v_n\} &= \tau + v_1 \\ \min\{S(2,1) + v_1, S(2,2) + v_2, \dots, S(2,n) + v_n\} &= \tau + v_2 \\ \vdots \\ \min\{S(n,1) + v_1, S(n,2) + v_2, \dots, S(n,n) + v_n\} &= \tau + v_n \end{cases},$$

onde  $S(i,j)$  denota a entrada  $(i,j)$  da matriz  $S$ . Atente que, apesar da escritura linear  $S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$  para a álgebra *min-plus*, trata-se, na realidade, de um problema intrincado do ponto de vista operacional com relação à álgebra usual.

Vimos no exemplo 5.5 que há várias possibilidades para o conjunto solução de equações lineares segundo a estrutura *min-plus*, ocorrendo até mesmo em certos casos ausência de solução. O problema de autovalor e autovetor no contexto da álgebra *min-plus*, ao contrário, possui caracterização completa com propriedades interessantes.

Primeiramente, adaptamos para presente situação o conceito de irreductibilidade (reveja a definição 1.7). Em termos precisos, dizemos que uma matriz  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  é irreductível (no sentido *min-plus*) se

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad \exists k = k(i,j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad S^{k^\otimes}(i,j) \neq +\infty,$$

onde  $S^{k^\otimes}(i, j)$  indica a entrada  $(i, j)$  da matriz produto *min-plus*  $S^{k^\otimes}$ . (Quando não houver possibilidade de confusão, ficará subentendido que a palavra irredutível se referirá, neste capítulo, ao sentido *min-plus*.)

Associada a uma matriz  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  irredutível, introduzimos a constante

$$\tau_S := \inf \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_0, i_1, \dots, i_k \leq n, \\ i_0 = i_k \text{ e } k \geq 1 \end{array} \right\},$$

a qual receberá a denominação de *média cíclica minimal*. O leitor pode facilmente verificar (veja o exercício 5.8) que

$$\tau_S = \min \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_0, i_1, \dots, i_k \leq n, \\ i_r \neq i_s \text{ se } 0 \leq r < s \leq k-1, \\ i_0 = i_k \text{ e } 1 \leq k \leq n \end{array} \right\}.$$

Perceba que, como  $S$  é irredutível,  $\tau_S \in \mathbb{R}$ , já que

$$\begin{aligned} \tau_S &\leq \frac{1}{k(i, i)} \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k(i, i)-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_1, \dots, i_{k(i, i)-1} \leq n \\ \text{e } i_0 = i_{k(i, i)} = i \end{array} \right\} \\ &= \frac{S^{k(i, i)^\otimes}(i, i)}{k(i, i)} \neq +\infty, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Com relação ao problema de autovalor e autovetor apresentamos abaixo um relevante resultado preliminar.

**Proposição 5.12.** *Dada uma matriz irredutível  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ , suponha que existam constante  $\gamma \in \mathbb{R}$  e vetor  $\vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ , com  $\vec{v} \neq (+\infty, \dots, +\infty)^\top$ , tais que  $S \otimes \vec{v} = \gamma \odot \vec{v}$ . Então,  $\gamma = \tau_S$  e todas as entradas do vetor  $\vec{v}$  são reais, isto é,  $v_i \neq +\infty$  para  $1 \leq i \leq n$ .*

*Demonstração.* Uma consequência imediata da equação de autovalor e autovetor é a igualdade  $S^{k^\otimes} \otimes \vec{v} = (k\gamma) \odot \vec{v}$  para todo inteiro  $k \geq 1$ . Ao escrever as respectivas entradas em tal identidade vetorial, obtemos

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq j \leq n} [S^{k^\otimes}(i, j) + v_j] &= k\gamma + v_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \forall k \geq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad S^{k^\otimes}(i, j) + v_j &\geq k\gamma + v_i, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

Devido ao fato que  $\vec{v} \neq (+\infty, \dots, +\infty)^\top$ , existe índice  $r$  para o qual  $v_r \neq +\infty$ . Já pela irreductibilidade da matriz  $S$ , obtemos, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , constante  $k(i, r)$  tal que  $S^{k(i, r)}(i, r) \neq +\infty$ . Empregando estas informações na desigualdade anterior, segue que

$$k(i, r)\gamma + v_i \leq S^{k(i, r)}(i, r) + v_r < +\infty,$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , donde concluímos que todas as entradas do vetor  $\vec{v}$  são reais.

Para provar a igualdade  $\gamma = \tau_S$ , note que, escrevendo em termos das entradas, obtemos a equivalência

$$S \otimes \vec{v} = \gamma \odot \vec{v} \Leftrightarrow \min_{1 \leq j \leq n} [S(i, j) + v_j] = \gamma + v_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Assim, para qualquer conjunto de índices  $1 \leq i_0, i_1, \dots, i_{k-1} \leq n$ , temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} S(i_0, i_1) + v_{i_1} &\geq \min_{1 \leq j \leq n} [S(i_0, j) + v_j] = \gamma + v_{i_0}, \\ S(i_1, i_2) + v_{i_2} &\geq \min_{1 \leq j \leq n} [S(i_1, j) + v_j] = \gamma + v_{i_1}, \\ &\vdots \\ S(i_{k-1}, i_0) + v_{i_0} &\geq \min_{1 \leq j \leq n} [S(i_{k-1}, j) + v_j] = \gamma + v_{i_{k-1}}, \end{aligned}$$

cuja respectiva soma fornece  $\gamma \leq \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1})$ , com a convenção que  $i_k = i_0$ . Como a escolha do conjunto de índices é arbitrária, obtemos  $\gamma \leq \tau_S$ .

Por outro lado, tome arbitrariamente índice  $1 \leq i_0 \leq n$ . A igualdade  $\min_{1 \leq j \leq n} [S(i_0, j) + v_j] = \gamma + v_{i_0}$  garante a existência de índice  $1 \leq i_1 \leq n$  tal que  $S(i_0, i_1) + v_{i_1} = \gamma + v_{i_0}$ . Por sua vez, para o índice  $i_1$ , há  $1 \leq i_2 \leq n$  tal que  $S(i_1, i_2) + v_{i_2} = \gamma + v_{i_1}$ . Procedendo de maneira induktiva, encontramos uma sequência de índices  $\{i_\ell\}_{\ell \geq 0} \subset \{1, \dots, n\}$ , a qual necessariamente contém uma repetição

$i_r = i_s$ , com  $r < s$ . Assim sendo, obtemos que as igualdades

$$\begin{aligned} S(i_r, i_{r+1}) + v_{i_{r+1}} &= \gamma + v_{i_r} \\ S(i_{r+1}, i_{r+2}) + v_{i_{r+2}} &= \gamma + v_{i_{r+1}} \\ &\vdots \\ S(i_{s-1}, i_s) + v_{i_s} &= \gamma + v_{i_{s-1}} \end{aligned}$$

$$\text{implicam } \gamma = \frac{1}{s-r} \bigotimes_{\ell=r}^{s-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \geq \tau_S. \quad \square$$

A proposição anterior servirá como argumento de unicidade de autovalor e de caracterização de autovetor para o principal resultado. Para demonstrá-lo, necessitaremos ainda do seguinte lema.

**Lema 5.13.** *Seja  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  matriz irredutível com  $\tau_S = 0$ . Considere a matriz  $S^\infty$  com entrada  $(i, j)$  dada por*

$$\begin{aligned} S^\infty(i, j) &:= \inf_{k \geq 1} S^{k^\otimes}(i, j) \\ &= S(i, j) \oplus S^{2^\otimes}(i, j) \oplus S^{3^\otimes}(i, j) \oplus S^{4^\otimes}(i, j) \oplus \dots \end{aligned}$$

Então  $S^\infty$  está bem definida e possui todas as entradas reais, valendo

$$I \oplus S^\infty = I \oplus S \oplus S^{2^\otimes} \oplus \dots \oplus S^{(n-1)^\otimes}.$$

*Demonstração.* Usamos primeiro a irredutibilidade da matriz  $S$ , a qual garante que  $S^\infty(i, j) \leq S^{k(i, j)^\otimes}(i, j) \neq +\infty$ . Além disso, qualquer coletânea de índices  $1 \leq i_0, i_1, \dots, i_k \leq n$ , com  $k \geq n$ , necessariamente contém uma repetição  $i_r = i_s$ , com  $0 \leq r < s \leq k$ . Em particular, pela definição da média cíclica minimal, segue

$$\bigotimes_{\ell=r}^{s-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \geq (s-r) \tau_S = 0.$$

Se  $r = 0$  e  $s = k$ , a desigualdade acima significa  $\bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \geq 0$ . Caso contrário, pela propriedade (5.1), obtemos

$$\begin{aligned} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) &= \bigotimes_{\ell=0}^{r-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \otimes \bigotimes_{\ell=r}^{s-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \otimes \bigotimes_{\ell=s}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \\ &\geq \bigotimes_{\ell=0}^{r-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \otimes \bigotimes_{\ell=s}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}), \end{aligned}$$

o que nos fornece produto  $\otimes$  envolvendo uma quantidade menor de termos. Repetimos esta argumentação até que não seja mais possível garantir a repetição de índices, isto é, até haver no máximo  $n$  índices, o que ocorre quando  $k = n - 1$ . Desta discussão, segue que

$$\begin{aligned} S^\infty(i, i) &= \inf_{k \geq 1} S^{k^\otimes}(i, i) \\ &= \inf_{k \geq 1} \bigoplus_{i_1=1}^n \dots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^n [S(i, i_1) \otimes \dots \otimes S(i_{k-1}, i)] \geq 0 = I(i, i), \end{aligned}$$

bem como, para  $i \neq j$ ,

$$\begin{aligned} S^\infty(i, j) &= \inf_{k \geq 1} \bigoplus_{i_1=1}^n \dots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^n [S(i, i_1) \otimes \dots \otimes S(i_{k-1}, j)] \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} \bigoplus_{i_1=1}^n \dots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^n [S(i, i_1) \otimes \dots \otimes S(i_{k-1}, j)] \\ &= S(i, j) \oplus S^{2^\otimes}(i, j) \oplus \dots \oplus S^{(n-1)^\otimes}(i, j). \end{aligned}$$

□

Podemos agora apresentar o resultado preponderante para o problema espectral *min-plus*.

**Teorema 5.14** (Perron-Frobenius – versão *min-plus*). *Dada matriz irreductível  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ , a constante  $\tau_S$  é seu único autovalor e, a este associado, há autovetor  $\vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$  com todas as entradas reais, isto é,*

$$\begin{aligned} S \otimes \vec{u} &= \tau_S \odot \vec{u}, \\ u_i &\neq +\infty, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Observe que, sem perda de generalidade, podemos supor  $\tau_S = 0$ . Basta tomar a matriz  $(-\tau_S) \odot S$ , a qual (devido ao exercício 5.9) cumpre  $\tau_{(-\tau_S) \odot S} = 0$ .

Seja  $S^\infty$  como no enunciado do lema 5.13. Note que, em termos da notação habitual, as entradas de  $S^\infty$  podem ser descritas como

$$S^\infty(i, j) = \inf_{k \geq 1} \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i \quad \text{e} \quad i_k = j \end{array} \right\}.$$

Resulta daí que o produto  $S \otimes S^\infty$  satisfaz

$$\begin{aligned} (S \otimes S^\infty)(i, j) &= \min_{1 \leq i_0 \leq n} [S(i, i_0) + S^\infty(i_0, j)] = \\ &= \inf_{k \geq 1} \min \left\{ S(i, i_0) + \sum_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_0, \dots, i_{k-1} \leq n \\ \text{e } i_k = j \end{array} \right\} \\ &= \inf_{k \geq 2} \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n \\ i_0 = i \quad \text{e } i_k = j \end{array} \right\} \geq S^\infty(i, j) \end{aligned}$$

para cada uma das entradas  $(i, j)$ . Se para algum índice  $j$  fixado, a igualdade  $(S \otimes S^\infty)(i, j) = S^\infty(i, j)$  fosse verificada para todo  $i = 1, \dots, n$ , obteríamos que a  $j$ -ésima coluna da matriz  $S^\infty$  seria um autovetor para  $S$  (associado ao autovalor  $\tau_S = 0$ ).

Sendo assim, basta provar  $(S \otimes S^\infty)(i, j) \leq S^\infty(i, j)$  para algum  $j$  fixado e para cada  $i = 1, \dots, n$ . Da descrição de  $\tau_S$  como mínimo, temos que existe alguma coletânea de índices  $1 \leq j_0, \dots, j_r \leq n$ , com  $j_0 = j_r$  para algum  $1 \leq r \leq n$ , tal que  $0 = \frac{1}{r} \bigotimes_{\ell=0}^{r-1} S(j_\ell, j_{\ell+1})$ . Fixe  $j = j_0$  e considere a  $j$ -ésima coluna da matriz  $S^\infty$ ,

$$\vec{u} = S^\infty \otimes \vec{e}_j = (S^\infty(1, j), \dots, S^\infty(n, j))^\top.$$

Em particular, este vetor verifica  $(S \otimes \vec{u})_i = (S \otimes S^\infty)(i, j)$ . Além disso,  $\vec{u}$  possui a  $j$ -ésima entrada nula (logo difere de  $(+\infty, \dots, +\infty)^\top$ ). Isto porque, para todo  $k \geq 1$  fixo,

$$\begin{aligned} 0 = \tau_S &\leq \min \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n \\ \text{e } i_0 = i_k = j \end{array} \right\} = \\ &= \min \left\{ \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n \\ \text{e } i_0 = i_k = j \end{array} \right\} = \frac{1}{k} S^{k^\otimes}(j, j), \end{aligned}$$

o que implica  $0 \leq S^\infty(j, j)$  e, por outro lado,

$$S^\infty(j, j) \leq S^{r^\otimes}(j, j) \leq \sum_{\ell=0}^{r-1} S(j_\ell, j_{\ell+1}) = 0.$$

Devido a este fato, obtemos a desigualdade desejada

$$\begin{aligned} S^\infty(i, j) &= S^\infty(i, j) + S^\infty(j, j) = \\ &= \inf_{k \geq 1} \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) + \sum_{\ell=0}^{r-1} S(j_\ell, j_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n \\ i_0 = i \quad \text{e} \quad i_k = j \end{array} \right\} \\ &\geq \inf_{k \geq r+1} \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_0, \dots, i_{k-1} \leq n \\ i_0 = i \quad \text{e} \quad i_k = j \end{array} \right\} \\ &\geq (S \otimes S^\infty)(i, j), \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Finalmente, perceba que foram verificadas todas as hipóteses da proposição 5.12, donde segue que  $\vec{u}$  tem todas as entradas reais.  $\square$

### Observação 5.15.

- i. O principal aparato empregado na demonstração acima foi a matriz  $S^\infty$ . Esta também tem grande importância para os sistemas de equações lineares segundo a álgebra min-plus do tipo  $\vec{x} = (S \otimes \vec{x}) \oplus \vec{w}$ , cuja solução é dada por  $(I \oplus S^\infty) \otimes \vec{w}$ , quando existe. Adiantamos ao leitor que na seção 5.2 nos dedicaremos ao estudo de outra relevante ferramenta intrinsecamente relacionada com esta matriz.
- ii. Caso o leitor se interesse em saber mais sobre a afinidade entre o teorema clássico de Perron-Frobenius e a sua versão min-plus, indicamos o artigo [4], no qual, além de demonstração nas mesmas linhas da aqui apresentada, também se encontram outras quatro provas distintas para o teorema 5.14.

Por fim, ainda sobre o resultado anterior, enfatizamos que em geral não é possível garantir a unicidade de autovetor.

**Exemplo 5.16.** Considere a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & +\infty & +\infty \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Já que as entradas da matriz  $S$  não são negativas, perceba então que  $0 \leq \tau_S \leq S(1, 1) = 0$ . Desta forma, é imediata a verificação de que

$$\vec{v} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{w} = (1, 2, 0)$$

são autovetores de  $S$  associados ao autovalor 0.

### 5.1.2 Tradução em otimização de médias

A esta altura, quer em definições, quer em técnicas de demonstrações, o leitor já deve ter percebido similaridades entre as ferramentas algébricas introduzidas até agora neste capítulo e os conceitos da otimização de médias empregados para examinar o problema dos pontos de entrega. Nesta subsecção, começamos a estabelecer um dicionário entre ambas as teorias ao mostrar como noções fundamentais da otimização de médias podem ser completamente reescritas em termos da álgebra *min-plus*. Isto nos permitirá, em particular, destacar ainda mais aspectos algébricos da teoria apresentada no capítulo 2. Além disso, esta tradução será devidamente complementada nas seções subsequentes e as relações obtidas se encontrará sintetizadas na tabela 5.1 ao final do capítulo.

Há já de início uma vantagem considerável na representação de custos sobre grafos, pois a adoção da linguagem da álgebra *min-plus* permite tratar, de certa forma, apenas de grafos completos. Mais concretamente, dado  $G$  um grafo orientado, estipulamos que a dimensão do espaço  $n$ -dimensional *min-plus* será igual a cardinalidade de conjunto dos vértices  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ . Assim, a inclusão  $A(G) \subset V(G) \times V(G) = \{1, 2, \dots, n\}^2$  significa agora que as arestas do grafo estão contidas no conjunto que indexa as matrizes da álgebra *min-plus*.

Há então de maneira natural correspondência bijetiva entre funções custo sobre arestas de grafos orientados e matrizes da álgebra *min-plus*. A ideia essencial que torna possível esta correspondência resumem-se na seguinte atitude: *codificar a ausência de uma certa aresta no grafo pelo elemento  $+\infty$* . Devido às propriedades algébricas de tal elemento, veremos que este ponto de vista será bastante útil. Esta posição se distingue também por permitir levar em conta grafo completo ao se convencionar como excessivamente custosas arestas em  $(V(G) \times V(G)) \setminus A(G)$ .

Desta forma, dados grafo orientado  $G = (V, A)$ , com sua respectiva matriz de transição  $M$ , e função custo  $c$  a valores reais sobre as arestas de  $G$ , associamos de modo canônico matriz  $S_c$  cujas entradas,

pertencentes ao conjunto real *min-plus*, são dadas por

$$S_c(i, j) = \begin{cases} c(j, i) & \text{se } M(j, i) = 1 \\ +\infty & \text{se } M(j, i) = 0 \end{cases}.$$

**Exemplo 5.17** (Matriz  $S_c$  associada a custo  $c$ ). *Com respeito à representação matricial para o custo (reveja a notação 1.9), temos a associação*

$$c = \begin{bmatrix} * & 3 & 4 & 80 \\ 78 & * & 0 & * \\ 13 & 2 & * & -1 \\ * & * & -40 & 0 \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad S_c = \begin{bmatrix} +\infty & 78 & 13 & +\infty \\ 3 & +\infty & 2 & +\infty \\ 4 & 0 & +\infty & -40 \\ 80 & +\infty & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

a qual, na prática, significa a substituição do símbolo  $*$  pelo elemento  $+\infty$  do conjunto real min-plus seguida de transposição matricial.

A correspondência inversa também é facilmente explicitada. Seja  $S$  uma matriz  $n \times n$  na álgebra matricial *min-plus*. Considere o grafo  $G$  com conjunto de vértices  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$  e matriz de transição associada definida por

$$M(i, j) = \mathbb{1}_{A(G)}(i, j) \begin{cases} 1 & \text{se } S(j, i) \neq +\infty \\ 0 & \text{se } S(j, i) = +\infty \end{cases}, \quad \forall (i, j) \in V(G) \times V(G).$$

Define-se, por conseguinte, função custo sobre as arestas de  $G$  ao se introduzir  $c_S : A(G) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $c_S(i, j) = S(j, i)$  para todo  $(i, j) \in A(G)$ .

**Exemplo 5.18** (Custo  $c_S$  associado a uma matriz  $S$ ). *Primeiramente note que, para a matriz*

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 56 & +\infty & 9 \\ 3 & 4 & +\infty & -38 \\ 78 & +\infty & 2 & -6 \\ -9 & +\infty & 45 & +\infty \end{bmatrix},$$

obtemos a matriz de transição

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sobre as arestas do grafo  $G$ , com vértices  $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ , a esta matriz associado, podemos graficamente representar o custo  $c_S$  como abaixo.

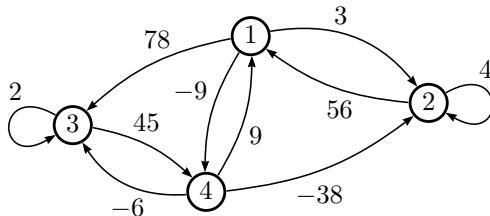


Figura 5.1: Grafo  $G$  com custo  $c_S$ .

Em vista da relação biunívoca  $c_S \leftrightarrow S_c$ , ficará subentendido a existência de um grafo e de um custo associados a uma matriz  $S$ , aos quais poderemos recorrer sempre que necessário. Este fato, coloca de maneira clara a teoria de grafos como um novo ponto de vista a ser utilizado para caracterizações e resultados futuros em álgebra *min-plus*.

Destacamos também que os conceitos de irredutibilidade para matriz de transição  $M$  e de irredutibilidade no sentido *min-plus* para matriz  $S_c$ , mais especificamente,

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in V \times V, \quad \exists k = k(i, j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad M^k(i, j) > 0 \quad \text{e} \\ \forall (i, j) \in V \times V, \quad \exists k = k(i, j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad S_c^{k^\otimes}(i, j) \neq +\infty, \end{aligned}$$

são equivalentes à conexidade do grafo  $G$  (veja exercício 5.10). Deste ponto em diante, sempre faremos a suposição de irredutibilidade no sentido *min-plus*.

**Observação 5.19.** *Para melhor visualizar a relação entre irredutibilidade no sentido min-plus e a conexidade do grafo associado, note que as entradas da matriz  $S_c^{k^\otimes}$  podem ser explicitadas da seguinte*

forma

$$\begin{aligned}
 S_c^{k^\otimes}(i, j) &= \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i \text{ e } i_k = j \end{array} \right\} \\
 &= \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n, \\ S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) \neq +\infty, \forall \ell \\ i_0 = i \text{ e } i_k = j \end{array} \right\} \\
 &= \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_{\ell+1}, i_\ell) : \begin{array}{l} j = i_k \xrightarrow{G} i_{k-1} \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_0 = i \end{array} \right\} \\
 &= k \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \text{ conectando} \\ j \text{ a } i \text{ de comprimento } k \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

É interessante observar igualmente que, ao assumir conexidade, podemos, por exemplo, reescrever a conclusão da proposição 2.9 como

$$m(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \min_{i, j \in V(G)} S_c^{k^\otimes}(i, j) = \sup_{k \geq 1} \frac{1}{k} \min_{i, j \in V(G)} S_c^{k^\otimes}(i, j).$$

(Compare a expressão acima com a fórmula (3.1).)

A relação acima nada tem de acidental. Veremos a seguir que a constante cíclica minimal desempenha papel proeminente ao ser transcrita na álgebra *min-plus*.

### Constante Cíclica Minimal e Corretores Calibrados

Para revelar vínculos mais fortes entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias, focamos na interpretação do significado do autovalor e dos autovetores do problema espectral *min-plus*. Com respeito ao autovalor, de novo a descrição das entradas de  $S_c^{k^\otimes}$  obtida acima nos fornece caracterização para a constante cíclica minimal:

$$\begin{aligned}
 m(c) &= \inf_{k \geq 1} \frac{1}{k} \min_{i \in V(G)} S_c^{k^\otimes}(i, i) \\
 &= \inf \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S_c(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_0, i_1, \dots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i_k \text{ e } k \geq 1 \end{array} \right\} \\
 &= \tau_{S_c}.
 \end{aligned}$$

Em outros termos,  $m(c)$  coincide com a média cíclica minimal  $\tau_{S_c}$ , a qual, devido à irredutibilidade, também é o único autovalor para  $S_c$  segundo a versão *min-plus* para o Teorema de Perron-Frobenius.

Note agora que a transformação linear (para álgebra *min-plus*)  $T_{S_c} : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \rightarrow (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ , naturalmente associado à matriz  $S_c$ , é dada explicitamente por

$$T_{S_c}(\vec{v}) = \bigoplus_{i=1}^n v_i \odot (S_c(1, i), S_c(2, i), \dots, S_c(n, i))^T,$$

$$(T_{S_c}(\vec{v}))_j = \bigoplus_{i=1}^n v_i \otimes S_c(j, i) = \min_{i \xrightarrow{G} j} [v(i) + c(i, j)], \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Uma consequência imediata deste fato é que os autovetores (segundo a álgebra *min-plus*) de  $S_c$  são de corretores calibrados para o custo  $c$  e *vice-versa*. Para isto confirmar, basta observar que, dado um autovetor  $\vec{u}$ , temos as igualdades vetoriais

$$T_{S_c}(\vec{u}) = S_c \otimes \vec{u} = \tau_{S_c} \odot \vec{u} = m(c) \odot \vec{u},$$

as quais apresentadas em termos de suas entradas nos fornecem a propriedade de calibração

$$\min_{i \xrightarrow{G} j} [u(i) + c(i, j)] = (T_{S_c}(\vec{u}))_j = m(c) \otimes u_j = m(c) + u(j).$$

Em particular, a versão *min-plus* do Teorema de Perron-Frobenius é também um resultado sobre a existência de corretores calibrados. Note que decorre de forma análoga a recíproca, isto é, o fato de corretores calibrados para o custo  $c$  definirem autovetores para a matriz  $S_c$ .

**Observação 5.20.** A correspondência biunívoca  $c_S \leftrightarrow S_c$  e a igualdade  $m(c) = \tau_{S_c}$  permitem facilmente compreender de que forma a média cíclica minimal  $\tau_S$  depende de uma matriz  $n \times n$  irredutível  $S$  da álgebra matricial *min-plus*. Para sermos precisos, dada uma matriz de transição arbitrária  $M : \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}$ , denote

$$\Xi_M := \{S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n} : S(i, j) < +\infty \Leftrightarrow M(j, i) = 1\}.$$

Temos obviamente a decomposição

$$(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n} = \bigsqcup_M \Xi_M,$$

onde a união é tomada sobre todas as possíveis matrizes de transição. De uma vez por todas, fixe  $M$  matriz de transição irredutível. Podemos então tirar proveito do estudo de regularidade da constante cíclica minimal realizada na subseção 2.1.2. Da proposição 2.6 obtemos que  $S \in \Xi_M \mapsto \tau_S \in \mathbb{R}$  é uma aplicação côncava. Além disso, decorre da proposição 2.7 que  $S \in \Xi_M \mapsto \tau_S \in \mathbb{R}$  é contínua, valendo

$$|\tau_S - \tau_{S'}| \leq \max_{M(j,i)=1} |S(i,j) - S'(i,j)|, \quad \forall S, S' \in \Xi_M.$$

Há na literatura várias generalizações destes resultados. Para uma situação mais geral, o leitor pode consultar, por exemplo, a seção 3 de [2].

Lembramos que, ao término deste capítulo, encontra-se um resumo das equivalências entre a otimização de médias e a álgebra *min-plus* discutidas até o momento (veja a tabela 5.1). Adiantamos ao leitor que há vários outros pontos nos quais os dois tópicos em questão estabelecem ligações de modo estreito. Antes de apresentá-los, discutiremos um novo conceito em álgebra *min-plus*.

## 5.2 Operador de Kleene

Retornamos ao estudo da álgebra *min-plus* com meta a de entender o comportamento da série

$$I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^\otimes} \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{3^\otimes} \oplus \dots,$$

procurando determinar sua convergência para algum elemento  $S^*$  de  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ . A existência deste limite, visto como um operador associado a uma matriz  $S$  da álgebra matricial *min-plus*, será responsável na próxima seção por importantes caracterizações para ambos os contextos, tanto para a álgebra *min-plus*, como para a otimização de médias.

Inicialmente, destacamos que este conceito não aparece de forma inusitada, como uma simples curiosidade sobre o comportamento de séries geométricas segundo a álgebra *min-plus*. Por exemplo, considere matriz  $S$  irredutível com  $\tau_S = 0$ . Recorde então que a série  $S \oplus S^{2^\otimes} \oplus S^{3^\otimes} \oplus S^{4^\otimes} \oplus \dots$  foi introduzida no lema 5.13, lá denotada por  $S^\infty$  e crucial na prova da versão *min-plus* do Teorema de Perron-Frobenius. Naquele lema, vimos que  $S^\infty$  está bem definida e suas entradas são todas números reais. Além disso, vale que  $I \oplus S^\infty = I \oplus S \oplus S^{2^\otimes} \oplus \dots \oplus S^{(n-1)^\otimes}$ . Consequentemente, ao menos para o caso com  $\tau_S = 0$ , temos a convergência da série em questão.

Veremos abaixo que esta convergência ocorre em geral.

**Proposição 5.21.** *Seja  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  uma matriz irredutível. Então, vale a igualdade*

$$\begin{aligned} S^{\star} &:= \bigoplus_{k=0}^{\infty} ((-\tau_S) \odot S)^{k^\otimes} \\ &= I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^\otimes} \oplus \dots \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{(n-1)^\otimes}, \end{aligned}$$

sendo todas as entradas  $S^{\star}(i, j)$  números reais. Ademais,  $\tau_{S^{\star}} = 0$ .

Tal operador recebe a denominação de operador de Kleene (ou estrela de Kleene) associado à matriz  $S$ .

*Demonstração.* Como  $\tau_{(-\tau_S) \odot S} = 0$ , pelo lema 5.13 resulta que a matriz  $((-\tau_S) \odot S)^\infty$  tem todas as entradas reais e cumpre

$$\begin{aligned} S^{\star} &= I \oplus ((-\tau_S) \odot S)^\infty \\ &= I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^\otimes} \oplus \dots \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{(n-1)^\otimes}, \end{aligned}$$

onde segue a primeira parte da proposição.

Resta-nos obter  $\tau_{S^{\star}} = 0$ . De um lado, para  $1 \leq i \leq n$ , temos claramente

$$((-\tau_S) \odot S)^{k^\otimes}(i, i) = (-k\tau_S) \otimes S^{k^\otimes}(i, i) \geq (-k\tau_S) \otimes (k\tau_S) = 0,$$

onde

$$\tau_{S^{\star}} \leq S^{\star}(i, i) = I(i, i) = 0.$$

Por outro lado, para cada par  $(i, j)$ , com  $i \neq j$ , podemos determinar  $\rho = \rho(i, j) \in \{1, \dots, n-1\}$  tal que  $S^{\star}(i, j) = ((-\tau_S) \odot S)^{\rho(i, j)^{\otimes}}(i, j)$ . Note então que, para  $k > 1$  e  $1 \leq i_0, i_1, \dots, i_k \leq n$ , com  $i_r \neq i_s$  quando  $0 \leq r < s \leq k-1$ , vale

$$\bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S^{\star}(i_{\ell}, i_{\ell+1}) = \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} ((-\tau_S) \odot S)^{\rho(i_{\ell}, i_{\ell+1})^{\otimes}}(i_{\ell}, i_{\ell+1}),$$

com

$$\begin{aligned} ((-\tau_S) \odot S)^{\rho^{\otimes}}(i_{\ell}, i_{\ell+1}) &= \\ &= \bigotimes_{j_1=1}^{k-1} \dots \bigotimes_{j_{\rho-1}=1}^{k-1} [((-\tau_S) \odot S)(i_{\ell}, j_1) \otimes \dots \otimes ((-\tau_S) \odot S)(j_{\rho-1}, i_{\ell+1})]. \end{aligned}$$

Repare ainda que  $\sum_{\ell=0}^{k-1} \rho(i_{\ell}, i_{\ell+1}) \geq k$ . De modo mais explícito, quando supomos  $i_0 = i_k$ , vemos que cada termo  $\frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S^{\star}(i_{\ell}, i_{\ell+1})$  pode ser minorado por termo da forma  $\frac{1}{K} \bigotimes_{\ell=0}^{K-1} ((-\tau_S) \odot S)(j_{\ell}, j_{\ell+1})$ , com  $K = \sum_{\ell=0}^{k-1} \rho(i_{\ell}, i_{\ell+1})$ . Utilizando agora (veja o exercício 5.8) que

$$\tau_{S^{\star}} = \min \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S^{\star}(i_{\ell}, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_0, i_1, \dots, i_k \leq n, \\ i_r \neq i_s \text{ se } 0 \leq r < s \leq k-1, \\ i_0 = i_k \text{ e } 1 \leq k \leq n \end{array} \right\},$$

pela discussão acima e da igualdade  $S^{\star}(i, i) = I(i, i)$  para todo  $i$ , podemos sem dificuldade concluir que

$$\tau_{S^{\star}} \geq \min\{\tau_{(-\tau_S) \odot S}, 0\} = 0.$$

□

**Exemplo 5.22.** Considere a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 3 & 7 \\ 5 & +\infty & +\infty \\ +\infty & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

cuja média cílica minimal é  $\tau_S = 2$ . Note que

$$((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ +\infty & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pela proposição anterior, temos o operador de Kleene

$$S^{\star} = I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{2^{\otimes}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, observe que

$$((-\tau_S) \odot S)^{\infty} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Abaixo apresentamos um resultado que permite identificar quando estamos lidando com um operador de Kleene.

**Proposição 5.23.** Vale a equivalência:

$$S^{\star} = S \Leftrightarrow \tau_S = 0, \quad S^{2^{\otimes}} = S \quad e \quad S(i, i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Em particular, ocorre  $(S^{\star})^{\star} = S^{\star}$ .

Repare que este resultado fornece um teste de consistência. Isto sem dificuldade ilustramos no caso do exemplo 5.22 acima. Ali este resultado permite afirmar que de fato encontramos um operador de Kleene, uma vez que se pode de imediato verificar que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Demonstração.* Seja  $S^{\star} = S$ . Evidentemente,  $\tau_S = \tau_{S^{\star}} = 0$ . Com isto, para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , obtemos

$$0 \leq S(i, i) = S^{\star}(i, i) = I(i, i) = 0,$$

e, consequentemente, para toda entrada  $(i, j)$ , vale

$$S(i, j) = S^{\star}(i, j) \leq S^{2^{\otimes}}(i, j) = \min_{1 \leq i_0 \leq n} \{S(i, i_0) + S(i_0, j)\} \leq S(i, j),$$

onde segue a primeira implicação.

Reciprocamente,  $S^{2^\otimes} = S$  implica  $S^{k^\otimes} = S$  para  $k \geq 1$ . Como  $\tau_S = 0$ , ocorre então

$$S^{\star} = I \oplus S \oplus S^{2^\otimes} \oplus \dots \oplus S^{(n-1)^\otimes} = I \oplus S.$$

Contudo, de  $S(i, i) = 0 = I(i, i)$  para todo  $i$ , resulta  $S^{\star} = S$ .  $\square$

Matrizes que satisfazem propriedades semelhantes às de  $S^{\star}$  terão utilidade posteriormente. Por isso, introduzimos as seguintes noções.

**Definição 5.24.** Uma matriz  $S$  é dita definida se  $\tau_S = 0$ . Se, além disso,  $S(i, i) = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , dizemos que a matriz  $S$  é fortemente definida.

Com relação a propriedade fortemente definida, observe que esta impõe, em particular, que todos os ciclos de comprimento 1 ( $i \xrightarrow{G} i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ ) minimizam o custo associado  $c_S$ .

### Tradução em Otimização de Médias

Para entender como o operador de Kleene se transcreve dentro de otimização de médias, considere a matriz  $S_{c-m(c)} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  associada ao custo  $c - m(c)$ . As entradas  $(i, j)$ , com  $i \neq j$ , do respectivo operador de Kleene podem ser apresentadas como

$$S_{c-m(c)}^{\star}(i, j) = \inf \left\{ k(c(P) - m(c)) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{conectando } j \text{ a } i \text{ de} \\ \text{comprimento } k \geq 1 \end{array} \right\}.$$

Observamos que a expressão à direita da igualdade é a empregada na definição do potencial de Mañé  $\phi_c : V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{R}$  no exercício 4.13. Em particular, o operador de Kleene pode ser visto como uma concretização algébrica de noção relevante em otimização de médias. Na verdade, vale que

$$\phi_c(i, j) = S_{c-m(c)}^{\infty}(j, i), \quad \forall i, j \in V(G).$$

Com efeito, para  $i \neq j$ , temos  $S_{c-m(c)}^{\infty}(j, i) = S_{c-m(c)}^{\star}(j, i) = \phi_c(i, j)$ . Ademais, a igualdade  $\phi_c(i, i) = S_{c-m(c)}^{\infty}(i, i)$  é confirmada simplesmente ao se descrever, como acima, as entradas na diagonal da matriz  $S_{c-m(c)}^{\infty}(i, i)$  segundo a álgebra usual. Desta forma, segue do

exercício 4.13 que  $S_{c-m(c)}^{\star}(i, i) \neq \phi_c(i, i)$  se, e somente se, por  $i$  não passa ciclo algum que minimiza o custo  $c$ .

## 5.3 Subautovetores

Nesta seção, complementaremos a lista de relações que queremos aqui estabelecer entre a álgebra *min-plus* e a otimização de médias. Para isso primeiramente estenderemos o conceito de autovetores introduzindo a noção de subautovetores, com ajuda de ordem induzida pela operação  $\oplus$ . A seguir, apresentaremos o subgrafo crítico associado a uma matriz irredutível da álgebra matricial *min-plus*, o qual está em correspondência direta com o conjunto cíclico minimal. Com isto, no contexto da álgebra *min-plus*, caracterizaremos o processo de renormalização e discutiremos também a noção de subautovetor separante. Por fim, faremos uma análise geométrica dos conjuntos formados pelos autovalores e subautovetores para uma matriz irredutível da álgebra *min-plus* e seu operador de Kleene.

Passamos a levar em conta agora a ordem parcial sobre o espaço  $n$ -dimensional *min-plus*  $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$  estabelecida pela equivalência

$$\vec{v} \preceq \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{v}.$$

(Lembre-se que tal ordem não é a ordem lexicográfica apesar de sempre concordar com esta, isto é,  $\vec{v} \preceq \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \leq \vec{w}$ , como indica o exercício 5.5.) Ademais, também definimos ordem parcial sobre a álgebra matricial *min-plus*  $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes)$  por

$$S \preceq R \quad \Leftrightarrow \quad S \oplus R = S.$$

Deixamos para os exercícios a verificação da propriedade monótona do produto de uma matriz por um vetor e do produto matricial:

$$\begin{aligned} S_1 \preceq S_2 &\Rightarrow S_1 \otimes \vec{v} \preceq S_2 \otimes \vec{v}, & \forall \vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n & \text{e} \\ S_1 \preceq S_2 &\Rightarrow S_1 \otimes R \preceq S_2 \otimes R, & \forall R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}. \end{aligned}$$

(Veja o exercício 5.13.) Com auxílio deste tipo de ordem parcial, consideraremos uma noção mais abrangente que a de autovetor.

**Definição 5.25.** Dizemos que  $\vec{u}$  é um subautovetor para uma matriz irreduzível  $S$  sempre que

$$\tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u},$$

ou equivalentemente quando  $(\tau_S \odot \vec{u}) \oplus (S \otimes \vec{u}) = \tau_S \odot \vec{u}$ .

Como vimos, a constante cíclica minimal nada mais é que a média cíclica minimal e autovetores correspondem a corretores calibrados. O leitor não ficará surpreso com o fato que a desigualdade vetorial  $\tau_{S_c} \odot \vec{u} \preceq S_c \otimes \vec{u}$ , quando vista em termo de suas entradas, fornece para todo  $j = 1, 2, \dots, n$

$$u(j) + m(c) = (\tau_{S_c} \odot \vec{u})_j \leq (S_c \otimes \vec{u})_j = \min_{i \xrightarrow{G} j} [u(i) + c(i, j)]. \quad (5.2)$$

Portanto, o conceito de subautovetor da matriz  $S_c$  coincidem com a noção usual de corretor associado ao custo  $c$  segundo a otimização de médias.

**Observação 5.26.** Mesmo sabendo da existência de ao menos uma coluna de  $((-\tau_S) \odot S)^\infty$  que fornece autovetor para a matriz irreduzível  $S$  (reveja a prova da versão min-plus do Teorema de Perron-Frobenius), é útil ter conhecimento que todas as colunas do operador de Kleene  $S^*$  são exemplos de subautovetores para  $S$ . Com efeito, perceba que, para toda entrada  $(i, j)$  e qualquer  $j_0 \neq j$ , ocorre  $((-\tau_S) \odot S)(i, j) \otimes S^*(j, j_0) \geq ((-\tau_S) \odot S)^\infty(i, j_0) \geq S^*(i, j_0)$ . Ademais, se  $j_0 = j$ , trivialmente temos  $((-\tau_S) \odot S)(i, j) \otimes S^*(j, j_0) = ((-\tau_S) \odot S)(i, j_0) \geq S^*(i, j_0)$ . Em termos mais claros, segue em geral que

$$((-\tau_S) \odot S)(i, j) \otimes S^*(j, j_0) \geq S^*(i, j_0), \quad \forall j_0 = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3)$$

Pondo  $\vec{u} = (u(1), u(2), \dots, u(n)) = (S^*(1, j_0), S^*(2, j_0), \dots, S^*(3, j_0))$  para  $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$  fixado, vemos que (5.3), em particular, assegura que

$$\tau_S \otimes u(i) \leq S(i, j) \otimes u(j), \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

onde  $\tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u}$ .

No restante desta seção, para que as demonstrações apresentadas sejam mais concisas, assumiremos como hipótese padrão que a matriz  $S$  é definida, ou seja,  $\tau_S = 0$ . Imediatamente tal condição garante simplificações como, por exemplo,

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ é autovetor} &\Leftrightarrow S \otimes \vec{u} = \vec{u}, \\ \vec{u} \text{ é subautovetor} &\Leftrightarrow \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u} \\ \text{ou } S^{\star} &= I \oplus S \oplus S^{2^{\otimes}} \oplus \cdots \oplus S^{(n-1)^{\otimes}}. \end{aligned}$$

Além disso, esta suposição não significa perda de generalidade, já que os resultados para o caso geral poderão ser obtidos ao se lidar com a matriz  $(-\tau_S) \odot S$ .

### 5.3.1 Subgrafo crítico

Queremos, nesta subseção, apresentar a noção de subgrafo crítico. No contexto da álgebra *min-plus*, este conceito é análogo ao de conjunto cíclico minimal e, *grosso modo*, caracteriza-se por dar destaque aos índices que sempre verificam a igualdade na relação que define subautovetores. Ademais, o subgrafo crítico permitirá definir os subautovetores separantes a partir da propriedade de visualização.

Por questão de precisão, sejam  $G$  grafo orientado conexo e  $M$  matriz de transição associados a matriz irredutível  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  (como definidos na subseção 5.1.2). Dizemos então que um ciclo  $Q : i_0 = i_k \xrightarrow{G} i_{k-1} \xrightarrow{G} \cdots \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_0$  é crítico para  $S$  se verifica

$$\frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) = \tau_S.$$

Em particular, temos que um ciclo  $Q$  é crítico para  $S$  se, e somente se, é um ciclo que minimiza o custo associado  $c_S$ , isto é,  $c_S(Q) = m(c_S)$ . Perceba ainda que o conjunto cíclico minimal  $\mathcal{M}(c_S)$  é formado por todos os ciclos críticos de  $S$ .

**Definição 5.27.** Definimos o subgrafo crítico associado a uma matriz irredutível  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  como sendo o grafo  $G_{Cr} = (V_{Cr}, A_{Cr})$ , onde

- i.  $V_{Cr}$  é o subconjunto de  $V(G)$  formado dos vértices que pertencem a algum ciclo crítico de  $S$ ;

- ii.  $A_{Cr}$  é o subconjunto de  $A(G)$  composto pelas arestas pertencentes a algum ciclo crítico de  $S$ .

Os vértices e arestas do subgrafo crítico  $G_{Cr}$  serão denominados, respectivamente, por vértices críticos e arestas críticas.

Um aspecto peculiar dos subautovetores pode ser agora descortinado. Trata-se do fato de certas entradas na relação  $\tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u}$  persistirem em verificar a igualdade. Mais precisamente, não importando o subautovetor  $\vec{u}$  tomado,

$$(\tau_S \odot \vec{u})_i = (S \otimes \vec{u})_i, \quad \forall i \in V_{Cr}.$$

Para isto confirmar, é suficiente aplicar em (5.2) a conclusão da observação 4.3.

Perceba que, ao reconhecemos todas as arestas críticas, será possível descrever completamente o subgrafo crítico. Com este objetivo, apresentamos abaixo uma caracterização algébrica para os elementos em  $A_{Cr}$ .

**Proposição 5.28.** *Seja  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  uma matriz irredutível definida. São equivalentes:*

- i.  $(j, i) \in A_{Cr}$ ;
- ii.  $S(i, j) \otimes S^*(j, j_0) = S^*(i, j_0)$ , para todo  $j_0 = 1, 2, \dots, n$ ;
- iii.  $S^*(i_0, j) = S^*(i_0, i) \otimes S(i, j)$ , para todo  $i_0 = 1, 2, \dots, n$ .

*Demonstração.* Previamente, observamos que a proposição 5.21 nos garante que, para cada entrada  $(i, j)$ , com  $i \neq j$ , há um caminho  $P = P^{ji} : j = i_\rho^P \xrightarrow{G} i_{\rho-1}^P \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_1^P \xrightarrow{G} i_0^P = i$  de comprimento  $\rho = \rho(i, j) \leq n - 1$  verificando

$$S^*(i, j) = S^{\rho(i, j)}(i, j) = \bigotimes_{\ell=0}^{\rho-1} S(i_\ell^P, i_{\ell+1}^P).$$

Provaremos que i equivale a ii. Seja então  $(j, i) \in A_{Cr}$ . Se  $j = i$ , então  $j \xrightarrow{G} j$  é um ciclo crítico, sendo imediato que  $S(j, j) = 0$ . Basta, portanto, analisar o caso  $i \neq j$ . Considere assim ciclo crítico

$$Q : i_k^Q = i \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_1^Q = j \xrightarrow{G} i_0^Q = i,$$

o qual satisfaz  $\frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell^Q, i_{\ell+1}^Q) = 0$ . Note que, levando em conta concatenações se necessário, podemos supor  $k \geq n$ . De um lado, temos que

$$S^\star(i, i) = 0 = S(i, j) \otimes \bigotimes_{\ell=1}^{k-1} S(i_\ell^Q, i_{\ell+1}^Q) \geq S(i, j) \otimes S^\star(j, i).$$

Tome agora índice  $j_0 \neq i$ . Por outro lado, para caminho conveniente  $P = P^{j_0 i}$  conectando  $j_0$  a  $i$  em  $G$ , com comprimento  $\rho = \rho(i, j_0) \leq n - 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} S^\star(i, j_0) &= \bigotimes_{\ell=0}^{\rho-1} S(i_\ell^P, i_{\ell+1}^P) \\ &= \bigotimes_{\ell=0}^{\rho-1} S(i_\ell^P, i_{\ell+1}^P) \otimes \left( S(i, j) \otimes \bigotimes_{\ell=1}^{k-1} S(i_\ell^Q, i_{\ell+1}^Q) \right) \\ &\geq S(i, j) \otimes S^\star(j, j_0). \end{aligned}$$

Logo, para  $(j, i) \in A_{\text{Cr}}$  resulta que

$$S(i, j) \otimes S^\star(j, j_0) \leq S^\star(i, j_0), \quad \forall j_0 = 1, 2, \dots, n.$$

Como a desigualdade oposta foi obtida para uma aresta qualquer em (5.3), segue daí a primeira implicação.

Reciprocamente, suponha que sejam satisfeitas as condições do item *ii*. Quando  $j = i$ , necessariamente  $S(j, j) = 0$  e, portanto,  $j \xrightarrow{G} j$  é um ciclo crítico. Seja então  $j \neq i$ . Para  $j_0 = i$ , acontece  $S(i, j) \otimes S^\star(j, i) = S^\star(i, i) = 0$ . Assim, a concatenação de  $(j, i)P^{ij}$  nos fornece um ciclo que é crítico para  $S$ , pois

$$S(i, j) \otimes \bigotimes_{\ell=0}^{\rho-1} S(i_\ell^P, i_{\ell+1}^P) = S(i, j) \otimes S^\star(j, i) = 0.$$

Logo,  $(j, i) \in A_{\text{Cr}}$ .

Segue de argumentação análoga que  $i$  equivale a *iii*. □

Desejamos por ora apresentar processo de renormalização em termos da álgebra *min-plus*. Considere então as seguintes matrizes diagonais obtidas a partir de um subautovetor  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$  de uma

matriz irredutível  $S$ :

$$D_{\vec{u}} := \begin{bmatrix} u_1 & \dots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \dots & u_n \end{bmatrix}, \quad D_{\vec{u}}^{-1^\otimes} := \begin{bmatrix} -u_1 & \dots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \dots & -u_n \end{bmatrix}.$$

Denote  $\hat{S} := D_{\vec{u}}^{-1^\otimes} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$ . Explicitando cada uma das entradas  $(i, j)$  de tal matriz, segundo a álgebra usual, obtemos que

$$\begin{aligned} \hat{S}(i, j) &= \min_{1 \leq i_0 \leq n} \min_{1 \leq i_1 \leq n} \{D_{\vec{u}}^{-1^\otimes}(i, i_0) + S(i_0, i_1) + D_{\vec{u}}(i_1, j)\} \\ &= S(i, j) + u(j) - u(i). \end{aligned}$$

Por sua vez, como  $\vec{u}$  é subautovetor de  $S$ , ou melhor, como  $\vec{u}$  é corretor associado a  $c_S$ , garantimos (reveja a observação 4.3) que

$$\begin{aligned} \hat{S}(i, j) &\geq \tau_S, \quad \text{para toda aresta } (j, i) \in A(G) \quad \text{e} \\ \hat{S}(i, j) &= \tau_S, \quad \text{para toda aresta crítica } (j, i) \in A_{Cr}. \end{aligned}$$

Fica agora patente conexão com o processo de renormalização do custo, técnica empregada de forma fundamental em otimização de médias. Por esta razão, denominaremos  $\hat{S}$  de renormalização da matriz  $S$ .

Note ainda que o custo  $c_{\hat{S}}$  associado a uma renormalização de  $S$  é dado, para cada aresta  $(i, j)$ , por

$$c_{\hat{S}}(i, j) = \hat{S}(j, i) = S(j, i) + u(i) - u(j) = c_S(i, j) + u(i) - u(j),$$

o qual coincide com o custo renormalizado  $\widehat{c_S}$  com relação ao corretor  $u$  (naturalmente associado ao subautovetor  $\vec{u}$ ).

Intrinsecamente relacionada com estas considerações, introduzimos a seguir uma classe de subautovetores que destacam o subgrafo crítico por meio desta renormalização sobre matrizes da álgebra matricial *min-plus*.

**Definição 5.29.** Uma matriz irredutível  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  verifica a propriedade de visualização estrita se suas entradas satisfazem:

$$i. \quad S(i, j) = \tau_S \text{ para todo } (i, j) \in A_{Cr};$$

ii.  $S(i, j) > \tau_S$  para todo  $(i, j) \notin A_{Cr}$ .

Além disso, um subautovetor  $\vec{u}$  é dito separante com relação a uma matriz  $S$  se a matriz  $D_{\vec{u}}^{-1} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$  possui visualização estrita.

Obviamente, a propriedade de visualização, adicionada ao processo de renormalização de uma matriz por um subautovetor, introduz a noção análoga a de corretor separante da otimização de médias. Na verdade, a expressão “propriedade de visualização estrita” é corrente na literatura da álgebra *min-plus*. Como não foi encontrada denominação específica para o subautovetor que aqui chamamos de separante, tomamos a liberdade de assim o denominar, de forma que se adeque a nossos propósitos nestas notas.

No contexto da álgebra *min-plus*, a existência de subautovetor separante (e, portanto, de corretor separante) pode ser estabelecida com o auxílio do operador de Kleene, como mostra a próxima proposição.

**Proposição 5.30.** *Sejam  $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  uma matriz irredutível definida e  $\vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$  um vetor da forma*

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \left( \bigotimes_{r=1}^n a_r S^\star(1, r), \dots, \bigotimes_{r=1}^n a_r S^\star(n, r) \right)^\top \\ &= \sum_{r=1}^n a_r (S^\star(1, r), \dots, S^\star(n, r))^\top,\end{aligned}$$

onde  $a_r > 0$  para todo  $1 \leq r \leq n$  e  $\sum_{r=1}^n a_r = 1$ . (Mais especificamente,  $\vec{u}$  é combinação convexa, segundo a álgebra usual, das colunas do operador de Kleene  $S^\star$ .) Então, a matriz  $D_{\vec{u}}^{-1} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$  possui a propriedade de visualização estrita e, consequentemente,  $\vec{u}$  é subautovetor separante.

*Demonstração.* Um fato já assinalado é que as colunas do operador de Kleene  $S^\star$  são subautovetores de  $S$  (reveja a observação 5.26). Isto implica que  $\vec{u}$  é um subautovetor para  $S$ , visto que, para cada

entrada  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} (S \otimes \vec{u})_i &= \bigoplus_{j=1}^n S(i, j) \otimes \left( \bigotimes_{r=1}^n a_r S^*(j, r) \right) \\ &= \bigoplus_{j=1}^n \left( \bigotimes_{r=1}^n a_r S(i, j) \otimes a_r S^*(j, r) \right) \geq \bigotimes_{r=1}^n a_r S^*(i, r) = (\vec{u})_i. \end{aligned}$$

Note que a segunda igualdade decorre de  $S(i, j) = \bigotimes_{r=1}^n a_r S(i, j)$ .

Considerando então a renormalização de  $S$ , com relação ao sub-autovetor  $\vec{u}$ , dada pela matriz  $\hat{S} = D_{\vec{u}}^{-1} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$ , temos que

$$\hat{S}(i, j) \geq 0, \quad \text{para toda aresta } (i, j) \in A(G) \quad \text{e}$$

$$\hat{S}(i, j) = 0, \quad \text{para toda aresta crítica } (i, j) \in A_{\text{Cr}}.$$

Resta-nos mostrar que a desigualdade é estrita sobre as arestas em  $A(G) \setminus A_{\text{Cr}}$ . Seja então  $(j, i) \notin A_{\text{Cr}}$ . A proposição 5.28 garante que existe algum índice  $1 \leq \tilde{j} \leq n$  tal que  $S(i, j) \otimes S^*(j, \tilde{j}) > S^*(i, \tilde{j})$ . Por outro lado, sabemos que a relação  $S(i, j) \otimes S^*(j, j_0) \geq S^*(i, j_0)$  sempre é satisfeita para  $j_0 = 1, 2, \dots, n$ . Como  $a_{\tilde{j}} > 0$ , resulta daí que

$$\begin{aligned} (D_{\vec{u}}^{-1} \otimes S \otimes D_{\vec{u}})(i, j) &= (-u(i)) \otimes S(i, j) \otimes u(j) \\ &= \left( \bigotimes_{r=1}^n -a_r S^*(i, r) \right) \otimes S(i, j) \otimes \left( \bigotimes_{r=1}^n a_r S^*(j, r) \right) \\ &= \bigotimes_{r=1}^n a_r ((-S^*(i, r)) \otimes S(i, j) \otimes S^*(j, r)) > 0, \end{aligned}$$

onde concluímos o resultado desejado.  $\square$

Uma recíproca para a proposição acima é proposta em [11].

### 5.3.2 Propriedades geométricas

Apresentaremos nesta última subseção um tratamento geométrico, o qual tem o intuito de estabelecer relações entre autovetores e subautovetores das matrizes  $S$  e  $S^*$ . Empregando o formalismo

algébrico desenvolvido até o momento, introduzimos primeiramente o conceito análogo ao de subespaço vetorial.

**Definição 5.31.** Um subconjunto  $\mathcal{V}$  de  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$  é denominado de cone quando é fechado para as operações  $\odot$  e  $\oplus$ . Mais especificamente, para  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathcal{V}$  e  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , a combinação linear min-plus

$$\bigoplus_{\ell=1}^k a_\ell \odot \vec{v}_\ell \in \mathcal{V}.$$

Apesar de estarem implícitas nesta definição, as características geométricas serão consequências naturais do fato das combinações lineares *min-plus* poderem ser reescritas como sistemas de desigualdades em  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$  (como veremos nos exemplos 5.33 e 5.34).

Estudaremos exclusivamente os seguintes conjuntos.

**Definição 5.32.** Seja  $S$  uma matriz irreduzível com autovalor  $\tau_S$ .

- i. Denotaremos por  $\mathcal{V}^\star(S)$  conjunto de todos os subautovetores de  $S$  para o autovalor  $\tau_S$ .
- ii. O conjunto formado por todos os autovetores da matriz  $S$  será denotado por  $\mathcal{V}(S)$ .

Antes de mais nada, afirmamos que tais conjuntos são cones no espaço  $n$ -dimensional *min-plus*. Sejam  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  vetores de  $\mathcal{V}^\star(S)$ , ou seja,  $\tau_S \odot \vec{v}_\ell \preceq S \otimes \vec{v}_\ell$  para  $\ell = 1, \dots, k$ . Dados os escalares  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , temos que

$$\begin{aligned} S \otimes \left( \bigoplus_{\ell=1}^k a_\ell \odot \vec{v}_\ell \right) &= \bigoplus_{\ell=1}^k a_\ell \odot (S \otimes \vec{v}_\ell) \\ &\succeq \bigoplus_{\ell=1}^k a_\ell \odot (\tau_S \odot \vec{v}_\ell) = \tau_S \odot \left( \bigoplus_{\ell=1}^k a_\ell \odot \vec{v}_\ell \right). \end{aligned}$$

Portanto,  $\bigoplus_{\ell=1}^k a_\ell \odot \vec{v}_\ell$  também é subautovetor de  $S$  para o autovalor  $\tau_S$ . Logo,  $\mathcal{V}^\star(S)$  é um cone em  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ . Pelo mesmo argumento (a menos de substituição do símbolo  $\succeq$  por  $=$ ), temos que  $\mathcal{V}(S)$  também vem a ser um cone em  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ . Em particular, é imediato das definições que  $\mathcal{V}(S)$  é um subcone do cone

$\mathcal{V}^*(S)$ . (Perceba que acabamos de sugerir uma simples resolução para o exercício 4.6.)

**Exemplo 5.33.** Considere a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

com constante cíclica minimal  $\tau_S = 2$ . A determinação de subautovetores para esta matriz, ou seja, de  $\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$  tal que  $\tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u}$ , passa pelo seguinte sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \min\{+\infty + u_1, 4 + u_2\} \geq 2 + u_1 \\ \min\{u_1, 6 + u_2\} \geq 2 + u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 + 2 \geq u_1 \\ u_1 \geq 2 + u_2 \end{cases},$$

o qual, por sua vez, determina a seguinte região no plano estendido

$$\mathcal{V}^*(S) = \{\vec{u} = (u_1, u_2) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^2 : u_1 = u_2 + 2\},$$

cuja a representação gráfica é descrita pela figura 5.2. Não é difícil perceber que este operador satisfaz  $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}^*(S)$ .

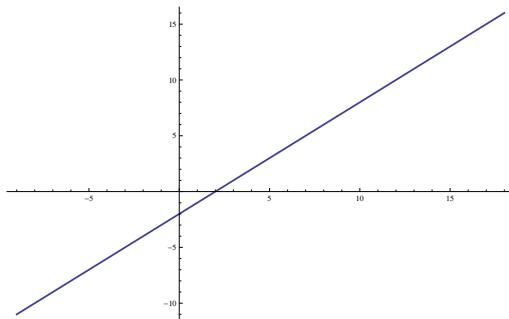


Figura 5.2: Representação gráfica de  $\mathcal{V}^*(S)$  em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 5.34.** Seja a matriz irredutível

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & 4 & 6 \\ -6 & 5 & +\infty \\ 0 & +\infty & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que  $\tau_S = -1$ . Os elementos  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  do conjunto  $\mathcal{V}^*(S)$  obedecem o sistema de desigualdades abaixo apresentado

$$\begin{cases} \min\{4 + u_2, 6 + u_3\} \geq -1 + u_1 \\ \min\{-6 + u_1, 5 + u_2\} \geq -1 + u_2 \\ \min\{u_1, 2 + u_3\} \geq -1 + u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + u_2 \geq -1 + u_1 \\ 6 + u_3 \geq -1 + u_1 \\ -6 + u_1 \geq -1 + u_2 \\ u_1 \geq -1 + u_3 \end{cases}.$$

Reduzindo tal sistema, encontramos a seguinte região em  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^3$

$$\mathcal{V}^*(S) = \left\{ \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^3 : \begin{array}{l} u_1 = u_2 + 5 \\ -1 \leq u_1 - u_3 \leq 7 \end{array} \right\}.$$

Na figura 5.3, exibimos uma representação gráfica para  $\mathcal{V}^*(S)$  sobre o plano  $\{\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_1 = u_2 + 5\}$ . No exercício 5.17, pediremos que o leitor descreva geometricamente o conjunto dos autovetores  $\mathcal{V}(S)$ .

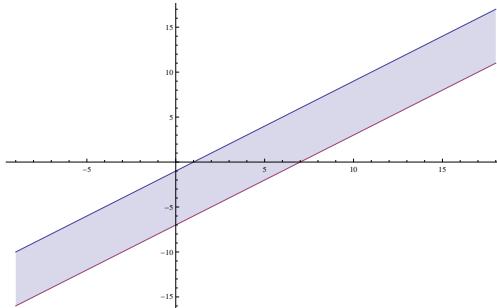


Figura 5.3: Representação gráfica para  $\mathcal{V}^*(S)$  em um plano de  $\mathbb{R}^3$ .

**Observação 5.35.** O subgrafo crítico fornece relevante informação de caráter geométrico. Relembre que, para uma aresta crítica  $(j, i)$ , todo subautovetor  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$  verifica a igualdade  $(-\vec{u}_i) \otimes S(i, j) \otimes \vec{u}_j = \tau_S$ . Isto significa que, para  $(j, i) \in A_{Cr}$ , o cone  $\mathcal{V}^*(S)$  está contido no hiperplano  $u_i = u_j + S(i, j) - \tau_S$ . Consequentemente, vale a inclusão

$$\mathcal{V}^*(S) \subset \bigcap_{(j, i) \in A_{Cr}} \{ \vec{u} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n : u_i = u_j + S(i, j) - \tau_S \}.$$

Em particular, quando houver ciclo crítico passando por todos os vértices do grafo, resulta que  $\mathcal{V}^*(S)$  é uma reta.

Destacamos que situações nas quais os cones  $\mathcal{V}(S)$  e  $\mathcal{V}^*(S)$  coincidem não são raras. Ademais, para casos específicos, é possível obter caracterizações envolvendo estes cones e os cones associados ao operador de Kleene  $S^*$ .

### Proposição 5.36.

i. Se  $S$  é uma matriz irredutível definida, então

$$\mathcal{V}^*(S) = \mathcal{V}(S^*) = \mathcal{V}^*(S^*).$$

ii. Se  $S$  é uma matriz irredutível fortemente definida, então

$$\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}^*(S).$$

*Demonstração.* Salientamos que, em ambos os casos,  $\tau_S = 0$ . Desta maneira, a proposição 5.21 garante  $\tau_{S^*} = 0$  e

$$S^* = I \oplus S \oplus S^{2\otimes} \oplus S^{3\otimes} \oplus \cdots \oplus S^{(n-1)\otimes}.$$

Item i. Mostraremos a primeira igualdade  $\mathcal{V}^*(S) = \mathcal{V}(S^*)$ . Seja  $\vec{u}$  um subautovetor de  $S$ . Obviamente vale  $I \otimes \vec{u} = \vec{u}$  e, pelo exercício 5.13, temos que

$$\vec{u} \preceq S \otimes \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \preceq S^{k\otimes} \otimes \vec{u}, \quad \forall k \geq 1.$$

Em consequência, resulta

$$\vec{u} \preceq (I \oplus S \oplus \cdots \oplus S^{(n-1)\otimes}) \otimes \vec{u} = S^* \otimes \vec{u} \preceq I \otimes \vec{u} = \vec{u}$$

e, assim,  $S^* \vec{u} = \vec{u}$ . Por outro lado, seja  $\vec{u}$  autovetor de  $S^*$ . Por definição,  $S^* \preceq S$ , donde naturalmente segue que

$$\vec{u} = S^* \otimes \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u}.$$

Para a segunda igualdade, recordamos que a proposição 5.23 assegura  $(S^*)^* = S^*$ . Logo, pelo argumento anterior, temos que

$$\mathcal{V}^*(S^*) = \mathcal{V}((S^*)^*) = \mathcal{V}(S^*).$$

Item *ii*. Basta mostrar que  $\mathcal{V}^{\star}(S) \subset \mathcal{V}(S)$  ao se levar em conta a hipótese que  $S(i, i) = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Seja  $\vec{u} \in \mathcal{V}^{\star}(S)$ , ou melhor, tal que  $\vec{u} \preceq S \otimes \vec{u}$ . Note que

$$\begin{aligned} u(i) &= S(i, i) \otimes u(i) \leq \bigoplus_{r=1}^n S(i, r) \otimes u(r) \\ &\quad \left( \bigoplus_{\substack{1 \leq r \leq n \\ r \neq i}} S(i, r) \otimes u(r) \right) \oplus u(i) \leq u(i), \end{aligned}$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ . Concluímos então que  $S \otimes \vec{u} = \vec{u}$ .  $\square$

A proposição anterior nos fornece novas formas de descrever corretores calibrados. Seu item *i* pode ser assim reescrito: *para um custo  $c_S$  com  $m(c_S) = 0$ , os corretores de  $c_S$  coincidem com os corretores calibrados de  $c_{S^{\star}}$ , os quais, de fato, representam todos os corretores de  $c_{S^{\star}}$ .* Em particular, para um corretor calibrado  $u$  associado a  $c_S$ , temos a caracterização

$$u(j) = \min_{i \xrightarrow{G} j} [u(i) + c_{S^{\star}}(i, j)], \quad \forall j \in V(G).$$

Já o item *ii* da proposição 5.36 nos diz, em uma explanação genérica, que *se, além de  $m(c_S) = 0$ , a função  $c_S$  dá custo mínimo para todo ciclo de comprimento 1, então todo corretor de  $c_S$  satisfaz a propriedade de calibração.*

## Exercícios

**Exercício 5.1.** Considere a operação de mínimo  $\oplus$  sobre o conjunto real min-plus  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Verifique as propriedades abaixo enunciadas.

$$\text{Existência de elemento neutro:} \quad a \oplus +\infty = a.$$

$$\text{Comutatividade:} \quad a \oplus b = b \oplus a.$$

$$\text{Associatividade:} \quad a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c.$$

**Exercício 5.2.** Analisando os parâmetros  $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , discorra sobre a ausência ou existência de única/múltiplas soluções com respeito a variável  $x$  para a equação linear min-plus  $(a \otimes x) \oplus b = c$ .

**Exercício 5.3.** Define-se a relação de ordem usual sobre  $\mathbb{R}$  por

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad b - a \in [0, +\infty).$$

Prove que a extensão de tal relação sobre  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , dada por

$$\begin{aligned} a \leq b, & \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ com } a \leq b \text{ e} \\ a \leq +\infty, & \quad \forall a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \end{aligned}$$

de fato, é uma ordem. Além disso, mostre que

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \oplus b = a.$$

**Exercício 5.4.** Mostre que as seguintes propriedades são satisfeitas no espaço  $n$ -dimensional min-plus  $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$ .

$$\text{Associatividade:} \quad (a \otimes b) \odot \vec{v} = a \odot (b \odot \vec{v}).$$

$$\text{Existência de elemento neutro:} \quad 0 \odot \vec{v} = \vec{v}.$$

$$\text{Existência de elemento absorvente:} \quad +\infty \odot \vec{v} = (+\infty, \dots, +\infty).$$

$$\text{Associatividade:} \quad \vec{v} \oplus (\vec{w} \oplus \vec{u}) = (\vec{v} \oplus \vec{w}) \oplus \vec{u}.$$

$$\text{Comutatividade:} \quad \vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{w} \oplus \vec{v}.$$

$$\text{Existência de elemento neutro:} \quad \vec{v} \oplus (+\infty, \dots, +\infty) = \vec{v}.$$

$$\text{Distributividade:} \quad a \odot (\vec{v} \oplus \vec{w}) = (a \odot \vec{v}) \oplus (a \odot \vec{w}).$$

**Exercício 5.5.** Exiba exemplo que assegura que a ordem lexicográfica  $\vec{v} \leq \vec{w}$  não equivale à relação  $\vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{v}$ .

[Sugestão: Perceba que a igualdade  $\vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{v}$  obriga que a desigualdade seja válida para todas as entradas.]

**Exercício 5.6.** Prove que toda matriz  $S = (\zeta_{ij}) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  permite introduzir operador linear como definido abaixo

$$T_S(\vec{v}) := \bigoplus_{j=1}^n v_j \odot (\zeta_{1,j}, \zeta_{2,j}, \dots, \zeta_{n,j})^\top.$$

**Exercício 5.7.** Obtenha que as relações listadas a seguir são válidas para álgebra matricial min-plus  $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes)$ .

$$\text{Associatividade:} \quad (a \otimes b) \odot S = a \odot (b \odot S).$$

$$\begin{array}{ll} \text{Existência de elemento neutro:} & 0 \odot S = S. \\ \text{Existência de elemento absorvente:} & +\infty \odot S = O. \end{array}$$

$$\text{Associatividade:} \quad S \oplus (R \oplus \bar{R}) = (S \oplus R) \oplus \bar{R}.$$

$$\text{Comutatividade:} \quad S \oplus R = R \oplus S.$$

$$\text{Existência de elemento neutro:} \quad S \oplus O = S.$$

$$\text{Associatividade:} \quad S \otimes (R \otimes \bar{R}) = (S \otimes R) \otimes \bar{R}.$$

$$\text{Existência de elemento neutro:} \quad S \otimes I = S.$$

$$\begin{array}{ll} \text{Distributividades:} & a \odot (S \oplus R) = (a \odot S) \oplus (a \odot R); \\ & S \otimes (R \oplus \bar{R}) = (S \otimes R) \oplus (S \otimes \bar{R}). \end{array}$$

**Exercício 5.8.** Mostre a seguinte igualdade

$$\tau_S = \min \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{ll} 1 \leq i_0, i_1, \dots, i_k \leq n, \\ i_r \neq i_s \text{ se } 0 \leq r < s \leq k-1, \\ i_0 = i_k \text{ e } 1 \leq k \leq n \end{array} \right\}.$$

[Sugestão: Adapte a argumentação da prova da proposição 2.1.]

**Exercício 5.9.** Dado escalar  $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , obtenha que  $\tau_{(a \odot S)} = a \otimes \tau_S$ . Conclua daí que  $\tau_{(-\tau_S) \odot S} = 0$ .

**Exercício 5.10.** Seja  $S_c$  matriz associada a um custo  $c$ . Argumente que a propriedade irredutível, isto é,

$$\forall (i, j) \in V \times V, \quad \exists k = k(i, j) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad S_c^{k^\otimes}(i, j) \neq +\infty,$$

é equivalente à conexidade do grafo  $G$ .

**Exercício 5.11.** Determine o operador de Kleene associado a cada uma das matrizes abaixo.

$$i. \quad S = \begin{bmatrix} +\infty & -4 & 1 & 4 \\ +\infty & 3 & +\infty & -14 \\ 1 & +\infty & -5 & 7 \\ +\infty & -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$ii. \quad S = \begin{bmatrix} 14 & -3 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 16 & 6 & +\infty \\ 1 & +\infty & -5 & 5 \\ -7 & 12 & 4 & +\infty \end{bmatrix}.$$

$$iii. S = \begin{bmatrix} +\infty & 3 & 6 & +\infty & 2 \\ -9 & +\infty & 53 & -16 & +\infty \\ 2 & -3 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & +\infty & 5 & -13 \\ +\infty & +\infty & -7 & +\infty & 9 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 5.12.** Para cada um dos custos abaixo, estabeleça quais os vértices que pertencem a algum ciclo do respectivo conjunto cíclico minimal.

$$i. c = \begin{bmatrix} 37 & -3 & 7 & 180 \\ * & 4 & 42 & * \\ -5 & 9 & * & -6 \\ * & 16 & 6 & * \end{bmatrix}.$$

$$ii. c = \begin{bmatrix} 12 & -3 & 0 & * \\ * & * & -6 & 9 \\ -9 & * & * & -62 \\ 4 & -2 & 87 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$iii. c = \begin{bmatrix} * & 3 & 6 & * & 2 \\ 4 & 58 & 4 & 3 & 17 \\ * & -2 & 0 & 2 & 9 \\ * & 1 & * & * & -13 \\ * & 3 & -7 & * & -8 \end{bmatrix}.$$

[Sugestão: Use as relações entre o operador de Kleene e o potencial de Mañé.]

**Exercício 5.13.** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  matrizes em  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  cumprindo  $S_1 \preceq S_2$ . Verifique então que

$$\begin{aligned} S_1 \preceq S_2 &\Rightarrow S_1 \otimes \vec{v} \preceq S_2 \otimes \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \quad \text{e} \\ S_1 \preceq S_2 &\Rightarrow S_1 \otimes R \preceq S_2 \otimes R, \quad \forall R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}. \end{aligned}$$

Conclua disto que

$$\vec{u} \preceq S \otimes \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \preceq S^{k^\otimes} \otimes \vec{u}, \quad \forall k \geq 1.$$

**Exercício 5.14.** Sejam  $S$  matriz irredutível em  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$  e  $\hat{S} := D_{\vec{u}}^{-1} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}$  uma renormalização de  $S$  com respeito a algum subautovetor  $\vec{u}$ . Mostre que  $\tau_{\hat{S}} = \tau_S$ .

**Exercício 5.15.** Dê exemplo de corretor separante para cada um dos custos abaixo.

$$i. \ c = \begin{bmatrix} -9 & * & * & -54 \\ * & 3 & 22 & * \\ 37 & -3 & 7 & 27 \\ * & 13 & -2 & * \end{bmatrix}.$$

$$ii. \ c = \begin{bmatrix} -5 & 9 & * & -6 \\ -14 & 2 & -3 & * \\ -4 & 3 & -29 & 7 \\ * & 4 & * & 9 \end{bmatrix}.$$

$$iii. \ c = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 0 & 17 \\ * & 18 & * & 4 & -1 \\ 4 & -17 & 0 & * & 9 \\ * & 1 & 0 & * & 6 \\ * & -4 & 3 & * & -20 \end{bmatrix}.$$

[Sugestão: Aplique a proposição 5.30 à matriz  $(-\tau_{S_c}) \odot S_c$ .]

**Exercício 5.16.** Em cada um dos casos, explice o respectivo subgrafo crítico  $G_{Cr}$ .

$$i. \ S = \begin{bmatrix} +\infty & 20 & -6 & +\infty & -13 \\ 3 & +\infty & +\infty & 4 & 25 \\ +\infty & 1 & 0 & +\infty & -9 \\ 0 & 1 & +\infty & 4 & +\infty \\ 5 & +\infty & 34 & -21 & -20 \end{bmatrix}.$$

$$ii. \ S = \begin{bmatrix} 3 & 1 & +\infty & -19 & -49 \\ +\infty & 3 & 24 & +\infty & 2 \\ -3 & 5 & 44 & 3 & -17 \\ -9 & +\infty & -7 & +\infty & 41 \\ +\infty & 3 & -7 & +\infty & 2 \end{bmatrix}.$$

**Exercício 5.17.** No exemplo 5.34, encontre os autovalores para a matriz  $S$  lá considerada e descreva geometricamente o cone  $\mathcal{V}(S)$ .

Otimização de Médias	Álgebra Min-plus
Custo sobre arestas	
$c : A(G) \rightarrow \mathbb{R}$	$\Rightarrow$
$c_S(i,j) = S(j,i), \quad \forall (i,j) \in A(G)$	$\Leftarrow$
Constante cíclica minimal	
$m(c) = \inf\{c(P) : P \text{ ciclo em } G\}$	$\Leftrightarrow$
$u(j) = \min_{i \in \underline{S}_j} [u(i) - c(i,j) - m(c)]$	$\Leftrightarrow$
Corretor calibrado	
$\phi_c(i,j) = \inf_{k \in \underline{S}_j} \{k(c(P) - m(c)) : \begin{array}{l} P \text{ caminho de } i \text{ a } j \\ \text{com comprimento } k \geq 1 \end{array}\}$	
Potencial de Mañé	
$\phi_c(i,j) = S^{\star}_{c-m(c)}(j,i), \quad \forall (i,j) \in A(G)$	
Corretor	
$c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0$	$\Leftrightarrow$
Conjunto cíclico minimal	
$\mathcal{M}(c) := \{P \text{ ciclo em } G : c(P) = m(c)\}$	$\Leftrightarrow$
Corretor separante	
$c(i,j) + u(i) - u(j) = m(c) \Rightarrow \exists Q \text{ ciclo com } c(Q) = m(c) \text{ e } (i,j) \in Q$	$\Leftrightarrow$
Matriz	
$S_c(i,j) = \begin{cases} c(j,i) & \text{se } M(j,i) = 1 \\ +\infty & \text{se } M(j,i) = 0 \\ S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n} \end{cases}$	
Média cíclica mínima	
$\tau_S := \inf \left\{ \frac{1}{k} \bigotimes_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) : \begin{array}{l} 1 \leq i_0, \dots, i_k \leq n, \\ i_0 = i_k \quad \text{e} \quad k \geq 1 \end{array} \right\}$	
Autovetor	
$S \otimes \vec{u} = \tau_S \odot \vec{u}$	
Operador de Kleene	
$S^{\star} = I \oplus ((-\tau_S) \odot S) \oplus ((-\tau_S) \odot S)^{\otimes \infty}$	
Subautovetor	
$\tau_S \odot \vec{u} \preceq S \otimes \vec{u}$	
Subgrafo crítico	
$G_{Cr} = (V_{Cr}, A_{Cr})$	
Vetor separante	
$(D_{\vec{u}}^{-1})^{\otimes} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}(i,j) = \tau_S, \quad \forall (j,i) \in A_{Cr}$	
$(D_{\vec{u}}^{-1})^{\otimes} \otimes S \otimes D_{\vec{u}}(i,j) > \tau_S, \quad \forall (j,i) \notin A_{Cr}$	

Tabela 5.1: Dicionário entre álgebra min-plus e otimização de médias.

# Bibliografia

- [1] E. J. Anderson e P. Nash, *Linear programming in infinite-dimensional spaces: theory and applications*, Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization, Wiley, 1987.
- [2] N. Bacaër, Convergence of numerical methods and parameter dependence of min-plus eigenvalue problems, Frenkel-Kontorova models and homogenization of Hamilton-Jacobi equations, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* **35** (2001), 1185-1195.
- [3] F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder e J. P. Quadrat, *Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems*, Wiley series in probability and mathematical statistics, John Wiley & Sons, 1992.
- [4] R. B. Bapat, A max version of the Perron-Frobenius theorem, *Linear Algebra and its Applications* **275-276** (1998), 3-18.
- [5] R. B. Bapat e T. E. S. Raghavan, *Nonnegative matrices and applications*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1997.
- [6] A. Baraviera, A. O. Lopes e Ph. Thieullen, A large deviation principle for equilibrium states of Hölder potentials: the zero-temperature case, *Stochastics and Dynamics* **6** (2006), 77-96.
- [7] R. Bissacot e E. Garibaldi, Weak KAM methods and ergodic optimal problems for countable Markov shifts, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society* **41** (2010), 321-338.
- [8] J. A. Bondy e U. S. R. Murty, *Graph theory*, Graduated texts in mathematics, Springer, 2008.
- [9] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture notes in mathematics **470**, Springer-Verlag, 1975.

- [10] J. Brémont, Gibbs measures at temperature zero, *Nonlinearity* **16** (2003), 419-426.
- [11] P. Butkovič, H. Schneider e S. Sergeev, On visualization scaling, sub-eigenvectors and Kleene stars in max algebra, *Linear Algebra and its Applications* **431** (2009), 2395-2406.
- [12] J. P. Conze e Y. Guivarc'h, Croissance des sommes ergodiques et principe variationnel, *Technical Report*, Université de Rennes 1, 1993.
- [13] R. Diestel, *Graph theory*, 4<sup>a</sup> ed., Graduated texts in mathematics, Springer, 2010.
- [14] L. C. Evans e R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in advanced mathematics, CRC Press, 1991.
- [15] L. M. Floría e R. B. Griffiths, Numerical procedure for solving a minimization eigenvalue problem, *Numerische Mathematik* **55** (1989), 565-574.
- [16] E. Garibaldi e Ph. Thieullen, Description of some ground states by Puiseux techniques, *Journal of Statistical Physics* **146** (2012), 125-180.
- [17] M. Gondran e M. Minoux, *Graphs, dioïds and semirings: new models and algorithms*, Springer, 2008.
- [18] B. Heidergott, G. J. Olsder e J. W. van der Woude, *Max plus at work: modeling and analysis of synchronized systems: a course on max-plus algebra and its applications*, Princeton series in applied mathematics, Princeton University Press, 2006.
- [19] R. M. Karp, A characterization of the minimum cycle mean in a digraph, *Discrete Mathematics* **23** (1978), 309-311.
- [20] R. Leplaire, A dynamical proof for the convergence of Gibbs measures at temperature zero, *Nonlinearity* **18** (2005), 2847-2880.
- [21] T. Parthasarathy e T. E. S. Raghavan, *Some topics in two-person games*, Modern analytic and computational methods in science and mathematics, Elsevier Science Ltd, 1971.
- [22] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton landmarks in mathematics and physics, Princeton University Press, 1996.
- [23] R. E. Tarjan, Depth-first search and linear graph algorithms, *SIAM Journal on Computing* **1** (1972), 146-160.