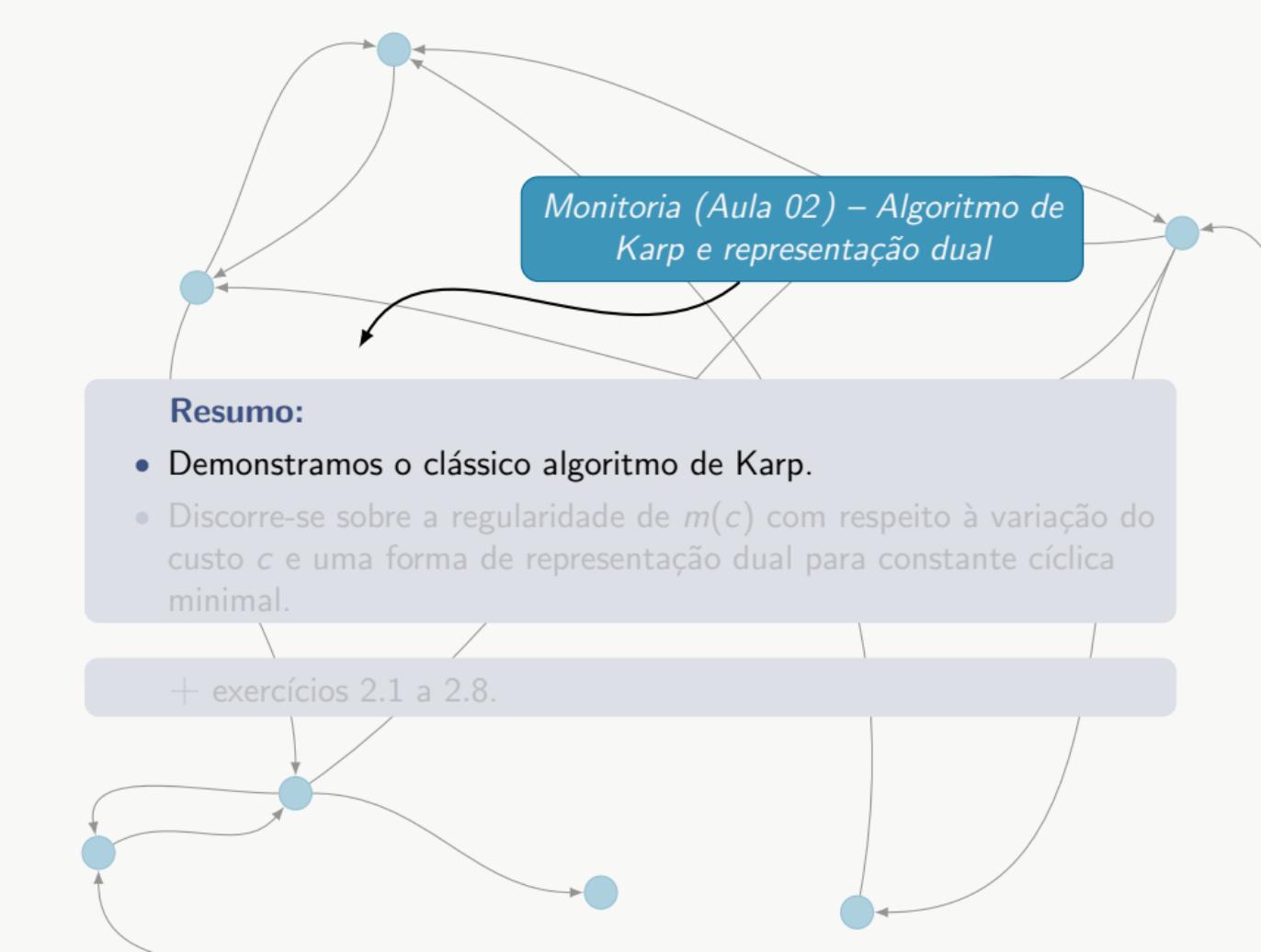


29º Colóquio Brasileiro de Matemática
Rio de Janeiro – Julho, 2013

Otimização de Médias sobre Grafos Orientados

Monitoria (Aula 02) – Algoritmo de
Karp e representação dual

Eduardo Garibaldi João Tiago Assunção Gomes
IMECC, Universidade Estadual de Campinas

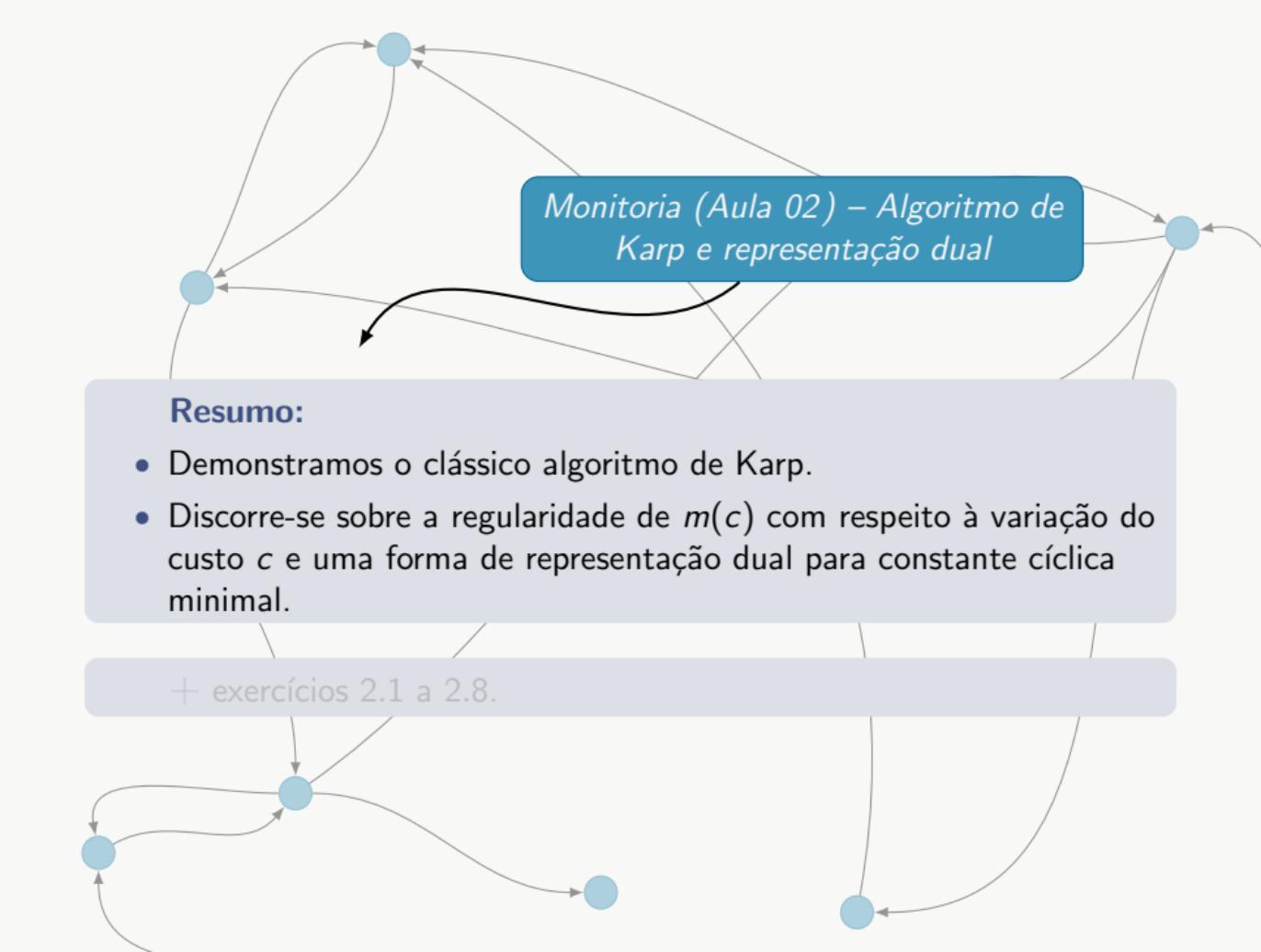


Monitoria (Aula 02) – Algoritmo de Karp e representação dual

Resumo:

- Demonstramos o clássico algoritmo de Karp.
- Discorre-se sobre a regularidade de $m(c)$ com respeito à variação do custo c e uma forma de representação dual para constante cíclica minimal.

+ exercícios 2.1 a 2.8.

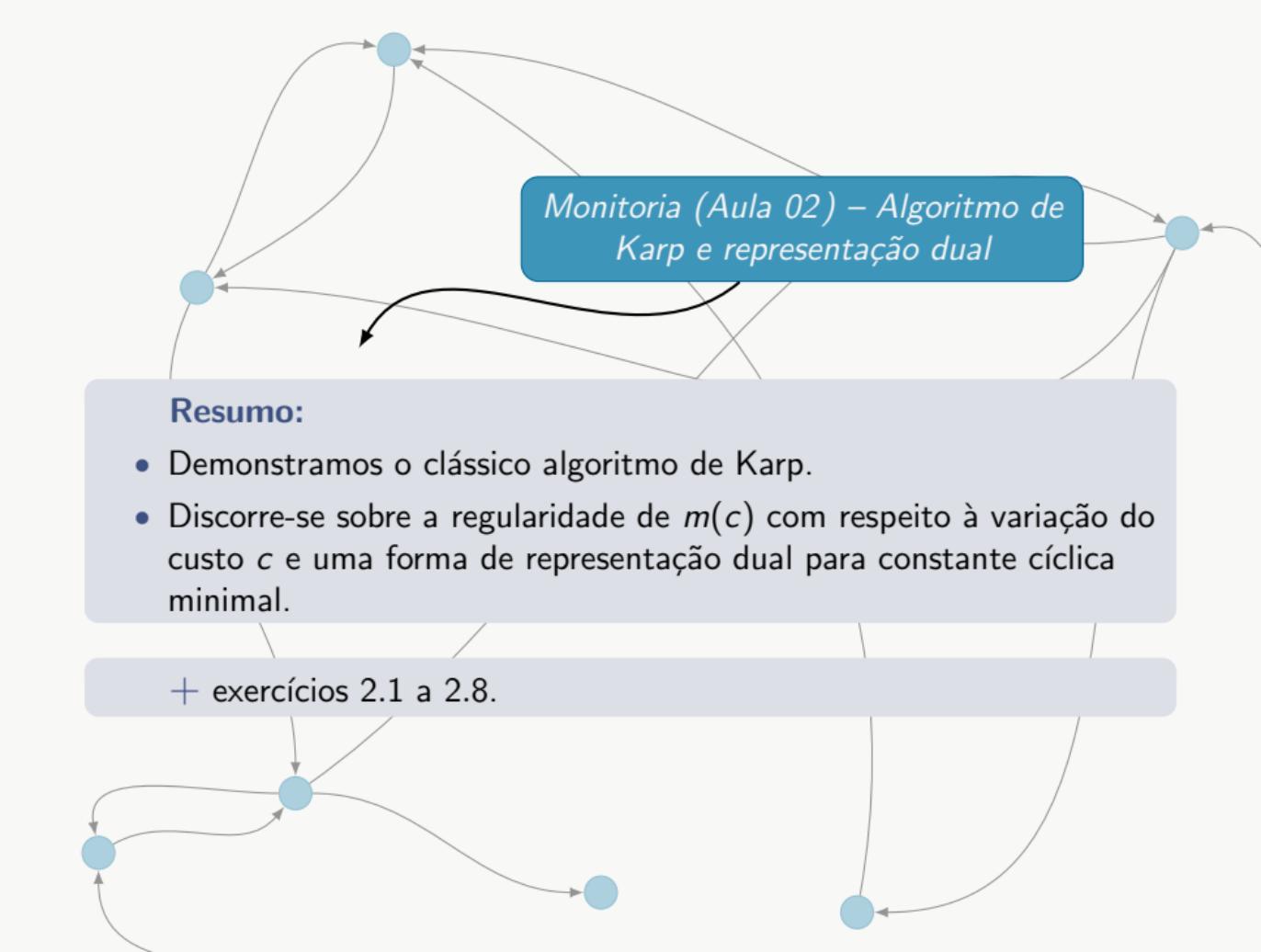


Monitoria (Aula 02) – Algoritmo de Karp e representação dual

Resumo:

- Demonstramos o clássico algoritmo de Karp.
- Discorre-se sobre a regularidade de $m(c)$ com respeito à variação do custo c e uma forma de representação dual para constante cíclica minimal.

+ exercícios 2.1 a 2.8.



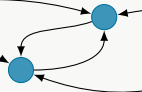
Monitoria (Aula 02) – Algoritmo de Karp e representação dual

Resumo:

- Demonstramos o clássico algoritmo de Karp.
- Discorre-se sobre a regularidade de $m(c)$ com respeito à variação do custo c e uma forma de representação dual para constante cíclica minimal.

+ exercícios 2.1 a 2.8.

Sumário



1 Algoritmo de Karp

2 Comentários sobre regularidade

Regularidade

Dualidade



Sumário

1 Algoritmo de Karp

2 Comentários sobre regularidade

Regularidade

Dualidade

Algoritmo de Karp

Temos o intuito de

caracterizar de forma algorítmica a constante cíclica minimal.

Introduzimos o conceito de menor custo dentre os caminhos de comprimento fixado $k > 0$ com ponto final i ,

$$S_k(i) = \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \text{ de comprimento } k \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}.$$

Teorema (Algoritmo de Karp)

Seja $G = (\{1, \dots, n-1\}, A)$ grafo orientado conexo com função custo $c : A \rightarrow \mathbb{R}$. Então a constante cíclica minimal é dada explicitamente por

$$m(c) = \min_{1 \leq i \leq n-1} \max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right]. \quad (1)$$

Algoritmo de Karp

Temos o intuito de

caracterizar de forma algorítmica a constante cíclica minimal.

Introduzimos o conceito de menor custo dentre os caminhos de comprimento fixado $k > 0$ com ponto final i ,

$$S_k(i) = \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \text{ de comprimento } k \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}.$$

Teorema (Algoritmo de Karp)

Seja $G = (\{1, \dots, n-1\}, A)$ grafo orientado conexo com função custo $c : A \rightarrow \mathbb{R}$. Então a constante cíclica minimal é dada explicitamente por

$$m(c) = \min_{1 \leq i \leq n-1} \max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right]. \quad (1)$$

Algoritmo de Karp

Temos o intuito de

caracterizar de forma algorítmica a constante cíclica minimal.

Introduzimos o conceito de menor custo dentre os caminhos de comprimento fixado $k > 0$ com ponto final i ,

$$S_k(i) = \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \text{ de comprimento } k \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}.$$

Teorema (Algoritmo de Karp)

Seja $G = (\{1, \dots, n-1\}, A)$ grafo orientado conexo com função custo $c : A \rightarrow \mathbb{R}$. Então a constante cíclica minimal é dada explicitamente por

$$m(c) = \min_{1 \leq i \leq n-1} \max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right]. \quad (1)$$

Observação

Este resultado clássico é originalmente apresentado em [2]. Para simplificar a apresentação, estamos (atipicamente) considerando $\#V(G) = n - 1$ no teorema acima.

Demonstração.

Primeiramente, argumentaremos que é suficiente provar o teorema para o caso especial em que $m(c) = 0$.

Observação

Este resultado clássico é originalmente apresentado em [2]. Para simplificar a apresentação, estamos (atipicamente) considerando $\#V(G) = n - 1$ no teorema acima.

Demonstração.

Primeiramente, argumentaremos que é suficiente provar o teorema para o caso especial em que $m(c) = 0$. Para tanto, considere a função custo $c' : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $c'(i, j) = c(i, j) - m(c)$ para todo $(i, j) \in A$. Em particular,

$$\begin{aligned} m(c') &= \inf\{c'(Q) : Q \text{ ciclo em } G\} \\ &= \inf\{c(Q) : Q \text{ ciclo em } G\} - m(c) = 0. \end{aligned}$$

Observação

Este resultado clássico é originalmente apresentado em [2]. Para simplificar a apresentação, estamos (atipicamente) considerando $\#V(G) = n - 1$ no teorema acima.

Demonstração.

Primeiramente, argumentaremos que é suficiente provar o teorema para o caso especial em que $m(c) = 0$. Para tanto, considere a função custo $c' : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $c'(i, j) = c(i, j) - m(c)$ para todo $(i, j) \in A$. Em particular,

$$\begin{aligned} m(c') &= \inf\{c'(Q) : Q \text{ ciclo em } G\} \\ &= \inf\{c(Q) : Q \text{ ciclo em } G\} - m(c) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, se $S'_k(i)$ denota o menor custo, com relação a função c' , dentre os caminhos de comprimento $k > 0$ com ponto final i , temos $S'_k(i) = S_k(i) - m(c)$, o que implica

$$\frac{n}{n-k} S'_n(i) - \frac{k}{n-k} S'_k(i) = \frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) - m(c).$$

Além disso, se $S'_k(i)$ denota o menor custo, com relação a função c' , dentre os caminhos de comprimento $k > 0$ com ponto final i , temos $S'_k(i) = S_k(i) - m(c)$, o que implica

$$\frac{n}{n-k} S'_n(i) - \frac{k}{n-k} S'_k(i) = \frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) - m(c).$$

Portanto, pela equação acima, o resultado no caso geral será comprovado ao mostrarmos que ocorre

$$0 = \min_{1 \leq i \leq n-1} \max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S'_n(i) - \frac{k}{n-k} S'_k(i) \right],$$

o que vem a ser a equação (1) para a constante cíclica minimal nula.

Além disso, se $S'_k(i)$ denota o menor custo, com relação a função c' , dentre os caminhos de comprimento $k > 0$ com ponto final i , temos $S'_k(i) = S_k(i) - m(c)$, o que implica

$$\frac{n}{n-k} S'_n(i) - \frac{k}{n-k} S'_k(i) = \frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) - m(c).$$

Portanto, pela equação acima, o resultado no caso geral será comprovado ao mostrarmos que ocorre

$$0 = \min_{1 \leq i \leq n-1} \max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S'_n(i) - \frac{k}{n-k} S'_k(i) \right],$$

o que vem a ser a equação (1) para a constante cíclica minimal nula.

Sendo assim, supomos $m(c) = 0$. Com isto, pela definição da constante cíclica minimal, é fácil perceber que não existe ciclo com custo negativo.

De fato, seja P caminho com ponto final i de comprimento $k \geq n$. Temos que P contém um ciclo Q e se escreve como concatenação de caminhos $P = P_1QP_2$ (como na figura abaixo), onde P_1 tem comprimento $k_1 \geq 0$ e P_2 possui ponto final i e comprimento $k_2 \geq 1$ (portanto, $k_1 + k_2 \geq 1$). Já certificamos que $c(Q) \geq 0$.



Figura: Para caminhos longos, podemos descartar seus subciclos.

Sendo assim, supomos $m(c) = 0$. Com isto, pela definição da constante cíclica minimal, é fácil perceber que não existe ciclo com custo negativo.

Note então que $\inf_{k \geq 1} k S_k(i) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i)$.



Figura 1

Sendo assim, supomos $m(c) = 0$. Com isto, pela definição da constante cíclica minimal, é fácil perceber que não existe ciclo com custo negativo.

Note então que $\inf_{k \geq 1} k S_k(i) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i)$. De fato, seja P caminho com ponto final i de comprimento $k \geq n$. Temos que P contém um ciclo Q e se escreve como concatenação de caminhos $P = P_1 Q P_2$ (como na figura abaixo), onde P_1 tem comprimento $k_1 \geq 0$ e P_2 possui ponto final i e comprimento $k_2 \geq 1$ (portanto, $k_1 + k_2 \geq 1$). Já certificamos que $c(Q) \geq 0$.



Figura: Para caminhos longos, podemos descartar seus subciclos.

Sendo assim, supomos $m(c) = 0$. Com isto, pela definição da constante cíclica minimal, é fácil perceber que não existe ciclo com custo negativo.

Note então que $\inf_{k \geq 1} k S_k(i) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i)$. De fato, seja P caminho com ponto final i de comprimento $k \geq n$. Temos que P contém um ciclo Q e se escreve como concatenação de caminhos $P = P_1 Q P_2$ (como na figura abaixo), onde P_1 tem comprimento $k_1 \geq 0$ e P_2 possui ponto final i e comprimento $k_2 \geq 1$ (portanto, $k_1 + k_2 \geq 1$). Já certificamos que $c(Q) \geq 0$.

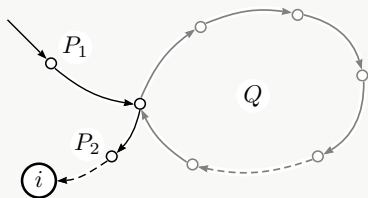


Figura: Para caminhos longos, podemos descartar seus subciclos.

Logo, a concatenação P_1P_2 tem ponto final i , possui comprimento $1 \leq k_1 + k_2 < k$ e satisfaz

$$(k_1 + k_2) c(P_1P_2) \leq k c(P).$$

Segue daí que, na avaliação de $\inf_{k \geq 1} k S_k(i)$, o caminho P_1P_2 serve como substituto para P e tem comprimento estritamente menor.

Logo, a concatenação P_1P_2 tem ponto final i , possui comprimento $1 \leq k_1 + k_2 < k$ e satisfaz

$$(k_1 + k_2) c(P_1P_2) \leq k c(P).$$

Segue daí que, na avaliação de $\inf_{k \geq 1} k S_k(i)$, o caminho P_1P_2 serve como substituto para P e tem comprimento estritamente menor.

Podemos repetir tal argumento até encontrar um caminho com comprimento menor ou igual a $n - 1$, o que assegura a veracidade da igualdade

$$\inf_{k \geq 1} k S_k(i) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i), \quad \forall i \in V(G).$$

Logo, a concatenação P_1P_2 tem ponto final i , possui comprimento $1 \leq k_1 + k_2 < k$ e satisfaz

$$(k_1 + k_2) c(P_1P_2) \leq k c(P).$$

Segue daí que, na avaliação de $\inf_{k \geq 1} k S_k(i)$, o caminho P_1P_2 serve como substituto para P e tem comprimento estritamente menor.

Podemos repetir tal argumento até encontrar um caminho com comprimento menor ou igual a $n - 1$, o que assegura a veracidade da igualdade

$$\inf_{k \geq 1} k S_k(i) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i), \quad \forall i \in V(G).$$

Pela discussão anterior, $\min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) \leq n S_n(i)$. Portanto,

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} [n S_n(i) - k S_k(i)] = n S_n(i) - \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) \geq 0, \quad (2)$$

donde obtemos a relação $\max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right] \geq 0$, a qual é válida para todo vértice i .

Perceba que, por (2), é suficiente encontrar, para algum vértice i , um caminho P' , com ponto final i e comprimento $k' = n$, tal que $k'c(P') = n S_n(i) = \inf_{k \geq 1} k S_k(i)$.

Pela discussão anterior, $\min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) \leq n S_n(i)$. Portanto,

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} [n S_n(i) - k S_k(i)] = n S_n(i) - \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) \geq 0, \quad (2)$$

donde obtemos a relação $\max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right] \geq 0$, a qual é válida para todo vértice i .

Resta-nos mostrar que a igualdade

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right] = 0$$

ocorre para algum algum vértice i .

Pela discussão anterior, $\min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) \leq n S_n(i)$. Portanto,

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} [n S_n(i) - k S_k(i)] = n S_n(i) - \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) \geq 0, \quad (2)$$

donde obtemos a relação $\max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right] \geq 0$, a qual é válida para todo vértice i .

Resta-nos mostrar que a igualdade

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right] = 0$$

ocorre para algum vértice i . Perceba que, por (2), é suficiente encontrar, para algum vértice i , um caminho P^i , com ponto final i e comprimento $k^i = n$, tal que $k^i c(P^i) = n S_n(i) = \inf_{k \geq 1} k S_k(i)$.

Pela discussão anterior, $\min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) \leq n S_n(i)$. Portanto,

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} [n S_n(i) - k S_k(i)] = n S_n(i) - \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) \geq 0, \quad (2)$$

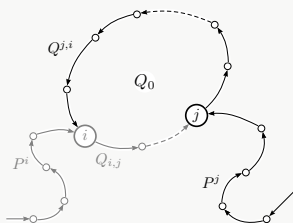
donde obtemos a relação $\max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right] \geq 0$, a qual é válida para todo vértice i .

Resta-nos mostrar que a igualdade

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right] = 0$$

ocorre para algum algum vértice i . Perceba que, por (2), é suficiente encontrar, para algum vértice i , um caminho P^i , com ponto final i e comprimento $k^i = n$, tal que $k^i c(P^i) = n S_n(i) = \inf_{k \geq 1} k S_k(i)$.

Devido à suposição $m(c) = 0$, obtemos a existência de um ciclo Q_0 com custo 0. Seja k_0 seu comprimento.

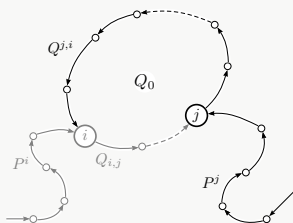


Dado qualquer vértice $j \in Q_0$, considere o caminho P^j , com ponto final j e comprimento $k^j \leq n - 1$, satisfazendo

$$\begin{aligned} k^j c(P^j) &= \inf_{k \geq 1} k S_k(j) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j). \end{aligned}$$

$$= k^i c(P^i) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j).$$

Devido à suposição $m(c) = 0$, obtemos a existência de um ciclo Q_0 com custo 0. Seja k_0 seu comprimento.



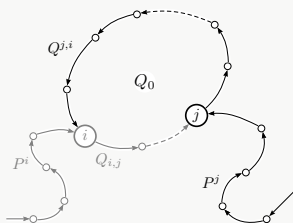
Dado qualquer vértice $j \in Q_0$, considere o caminho P^j , com ponto final j e comprimento $k^j \leq n - 1$, satisfazendo

$$\begin{aligned} k^j c(P^j) &= \inf_{k \geq 1} k S_k(j) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j). \end{aligned}$$

É fácil verificar que a concatenação de P^j com repetições do ciclo Q_0 , isto é, $P^j Q_0 \dots Q_0$, é um caminho que também cumpre

$$\begin{aligned} (k^j + k_0 + \dots + k_0) c(P^j Q_0 \dots Q_0) &= \\ &= k^j c(P^j) + k_0 c(Q_0) + \dots + k_0 c(Q_0) \end{aligned}$$

Devido à suposição $m(c) = 0$, obtemos a existência de um ciclo Q_0 com custo 0. Seja k_0 seu comprimento.



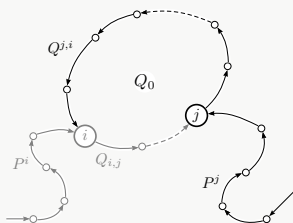
Dado qualquer vértice $j \in Q_0$, considere o caminho P^j , com ponto final j e comprimento $k^j \leq n - 1$, satisfazendo

$$\begin{aligned} k^j c(P^j) &= \inf_{k \geq 1} k S_k(j) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j). \end{aligned}$$

É fácil verificar que a concatenação de P^j com repetições do ciclo Q_0 , isto é, $P^j Q_0 \dots Q_0$, é um caminho que também cumpre

$$\begin{aligned} (k^j + k_0 + \dots + k_0) c(P^j Q_0 \dots Q_0) &= \\ &= k^j c(P^j) + k_0 c(Q_0) + \dots + k_0 c(Q_0) \\ &= k^j c(P^j) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j). \end{aligned}$$

Devido à suposição $m(c) = 0$, obtemos a existência de um ciclo Q_0 com custo 0. Seja k_0 seu comprimento.



Dado qualquer vértice $j \in Q_0$, considere o caminho P^j , com ponto final j e comprimento $k^j \leq n - 1$, satisfazendo

$$\begin{aligned} k^j c(P^j) &= \inf_{k \geq 1} k S_k(j) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j). \end{aligned}$$

É fácil verificar que a concatenação de P^j com repetições do ciclo Q_0 , isto é, $P^j Q_0 \dots Q_0$, é um caminho que também cumpre

$$\begin{aligned} (k^j + k_0 + \dots + k_0) c(P^j Q_0 \dots Q_0) &= \\ &= k^j c(P^j) + k_0 c(Q_0) + \dots + k_0 c(Q_0) \\ &= k^j c(P^j) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j). \end{aligned}$$

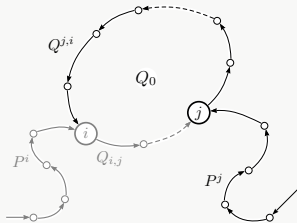
Realizando repetições suficientes do ciclo Q_0 para que o caminho $P^j Q_0 \dots Q_0$ tenha comprimento maior que n , tome então i o $(n+1)$ -ésimo vértice do caminho $P^j Q_0 \dots Q_0$, mais explicitamente

$$i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{kj} = j \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_n = i \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{kj+\ell k_0}.$$

Considere agora o caminho

$$P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i},$$

onde $Q^{j,i}$ é o subcaminho no ciclo Q_0 conectando j a i cujo comprimento é igual a $k^{j,i}$.



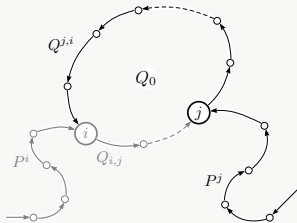
Realizando repetições suficientes do ciclo Q_0 para que o caminho $P^j Q_0 \dots Q_0$ tenha comprimento maior que n , tome então i o $(n+1)$ -ésimo vértice do caminho $P^j Q_0 \dots Q_0$, mais explicitamente

$$i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{kj} = j \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_n = i \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{kj+\ell k_0}.$$

Considere agora o caminho

$$P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i},$$

onde $Q^{j,i}$ é o subcaminho no ciclo Q_0 conectando j a i cujo comprimento é igual a $k^{j,i}$.



Temos que $P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}$ é um caminho de comprimento n e seu ponto final é o vértice i .

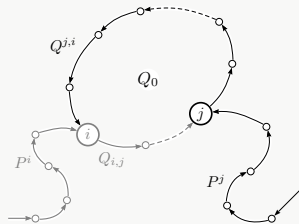
Realizando repetições suficientes do ciclo Q_0 para que o caminho $P^j Q_0 \dots Q_0$ tenha comprimento maior que n , tome então i o $(n+1)$ -ésimo vértice do caminho $P^j Q_0 \dots Q_0$, mais explicitamente

$$i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{kj} = j \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_n = i \xrightarrow{G} \dots \xrightarrow{G} i_{kj+\ell k_0}.$$

Considere agora o caminho

$$P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i},$$

onde $Q^{j,i}$ é o subcaminho no ciclo Q_0 conectando j a i cujo comprimento é igual a $k^{j,i}$.



Temos que $P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}$ é um caminho de comprimento n e seu ponto final é o vértice i .

Concluimos o resultado com o seguinte fato.

Afirmção. O caminho $P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}$ satisfaz

$$\begin{aligned}(k^j + k_0 + \dots + k_0 + k^{j,i}) c(P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}) &= \\ &= (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i).\end{aligned}$$

A primeira igualdade segue imediatamente de $c(Q_0) = 0$.

Concluimos o resultado com o seguinte fato.

Afirmção. O caminho $P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}$ satisfaz

$$\begin{aligned} (k^j + k_0 + \dots + k_0 + k^{j,i}) c(P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}) = \\ = (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i). \end{aligned}$$

A primeira igualdade segue imediatamente de $c(Q_0) = 0$. Suponha que a segunda igualdade não se verifique, ou seja, que exista um caminho P^i , com ponto final i e comprimento $k^i \leq n - 1$, satisfazendo

$$k^i c(P^i) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) < (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}).$$

Concluimos o resultado com o seguinte fato.

Afirmção. O caminho $P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}$ satisfaz

$$\begin{aligned} (k^j + k_0 + \dots + k_0 + k^{j,i}) c(P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}) = \\ = (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i). \end{aligned}$$

A primeira igualdade segue imediatamente de $c(Q_0) = 0$. Suponha que a segunda igualdade não se verifique, ou seja, que exista um caminho P^i , com ponto final i e comprimento $k^i \leq n - 1$, satisfazendo

$$k^i c(P^i) = \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) < (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}).$$

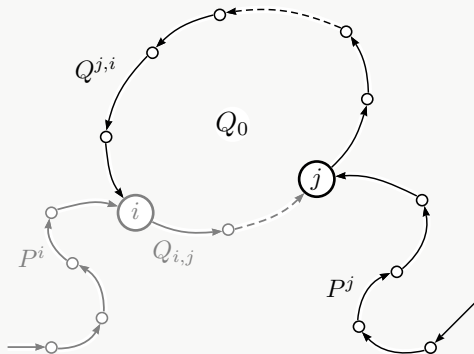


Figura: Decomposição do ciclo Q_0 .

Considere o subcaminho $Q_{i,j}$ no ciclo Q_0 conectando i a j , o qual completa $Q^{j,i}$ no sentido que $Q_0 = Q_{i,j}Q^{j,i}$. Denote por $k_{i,j}$ seu comprimento.

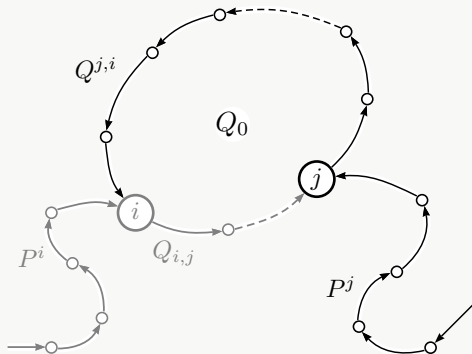


Figura: Decomposição do ciclo Q_0 .

Considere o subcaminho $Q_{i,j}$ no ciclo Q_0 conectando i a j , o qual completa $Q^{j,i}$ no sentido que $Q_0 = Q_{i,j}Q^{j,i}$. Denote por $k_{i,j}$ seu comprimento.

As concatenações $P^i Q_{i,j}$ e $P^j Q^{j,i} Q_{i,j} = P^j Q_0$ são caminhos com ponto final j para os quais obtemos

$$\begin{aligned} (k^i + k_{i,j}) c(P^i Q_{i,j}) &= k^i c(P^i) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ &< (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ &= (k^j + k_0) c(P^j Q_0) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j) = \inf_{k \geq 1} k S_k(j), \end{aligned}$$

o que é uma clara contradição. ◇

$$= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) = \inf_{k \geq 1} k S_k(i) \leq n S_n(i).$$

donde segue o resultado. □

As concatenações $P^i Q_{i,j}$ e $P^j Q^{j,i} Q_{i,j} = P^j Q_0$ são caminhos com ponto final j para os quais obtemos

$$\begin{aligned} (k^i + k_{i,j}) c(P^i Q_{i,j}) &= k^i c(P^i) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ &< (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ &= (k^j + k_0) c(P^j Q_0) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j) = \inf_{k \geq 1} k S_k(j), \end{aligned}$$

o que é uma clara contradição. ◇

$$= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) = \inf_{k \geq 1} k S_k(i) \leq n S_n(i).$$

donde segue o resultado. □

As concatenações $P^i Q_{i,j}$ e $P^j Q^{j,i} Q_{i,j} = P^j Q_0$ são caminhos com ponto final j para os quais obtemos

$$\begin{aligned} (k^i + k_{i,j}) c(P^i Q_{i,j}) &= k^i c(P^i) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ &< (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ &= (k^j + k_0) c(P^j Q_0) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j) = \inf_{k \geq 1} k S_k(j), \end{aligned}$$

o que é uma clara contradição. ◇

$$= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) = \inf_{k \geq 1} k S_k(i) \leq n S_n(i).$$

donde segue o resultado. □

As concatenações $P^i Q_{i,j}$ e $P^j Q^{j,i} Q_{i,j} = P^j Q_0$ são caminhos com ponto final j para os quais obtemos

$$\begin{aligned} (k^i + k_{i,j}) c(P^i Q_{i,j}) &= k^i c(P^i) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ &< (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ &= (k^j + k_0) c(P^j Q_0) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j) = \inf_{k \geq 1} k S_k(j), \end{aligned}$$

o que é uma clara contradição. ◇

Desta forma,

$$n S_n(i) \leq (k^j + k_0 + \dots + k_0 + k^{j,i}) c(P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i})$$

As concatenações $P^i Q_{i,j}$ e $P^j Q^{j,i} Q_{i,j} = P^j Q_0$ são caminhos com ponto final j para os quais obtemos

$$\begin{aligned} (k^i + k_{i,j}) c(P^i Q_{i,j}) &= k^i c(P^i) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ &< (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ &= (k^j + k_0) c(P^j Q_0) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j) = \inf_{k \geq 1} k S_k(j), \end{aligned}$$

o que é uma clara contradição. ◇

Desta forma,

$$\begin{aligned} n S_n(i) &\leq (k^j + k_0 + \dots + k_0 + k^{j,i}) c(P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) = \inf_{k \geq 1} k S_k(i) \leq n S_n(i), \end{aligned}$$

donde segue o resultado. □

As concatenações $P^i Q_{i,j}$ e $P^j Q^{j,i} Q_{i,j} = P^j Q_0$ são caminhos com ponto final j para os quais obtemos

$$\begin{aligned} (k^i + k_{i,j}) c(P^i Q_{i,j}) &= k^i c(P^i) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ &< (k^j + k^{j,i}) c(P^j Q^{j,i}) + k_{i,j} c(Q_{i,j}) \\ &= (k^j + k_0) c(P^j Q_0) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(j) = \inf_{k \geq 1} k S_k(j), \end{aligned}$$

o que é uma clara contradição. ◇

Desta forma,

$$\begin{aligned} n S_n(i) &\leq (k^j + k_0 + \dots + k_0 + k^{j,i}) c(P^j Q_0 \dots Q_0 Q^{j,i}) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n-1} k S_k(i) = \inf_{k \geq 1} k S_k(i) \leq n S_n(i), \end{aligned}$$

donde segue o resultado. □

Complexidade

O algoritmo de Karp opera em tempo

$$O(\#V(G)\#A(G)).$$

Observação

Para facilitar a implementação computacional, a função S_k é originalmente definida no artigo [2] de forma distinta: *fixado um vértice $i_0 \in G$, a função S_k determina o menor custo dentre os caminhos de comprimento $k > 0$ com ponto inicial i_0 e ponto final i , isto é,*

$$S_k(i) = \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \text{ de comprimento } k \\ \text{conectando } i_0 \text{ a } i \end{array} \right\}$$

(convenciona-se $S_k(i) = \infty$ caso não exista um caminho em G de comprimento k conectando i_0 a i).

Complexidade

O algoritmo de Karp opera em tempo

$$O(\#V(G)\#A(G)).$$

Observação

Para facilitar a implementação computacional, a função S_k é originalmente definida no artigo [2] de forma distinta: *fixado um vértice $i_0 \in G$, a função S_k determina o menor custo dentre os caminhos de comprimento $k > 0$ com ponto inicial i_0 e ponto final i , isto é,*

$$S_k(i) = \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \text{ de comprimento } k \\ \text{conectando } i_0 \text{ a } i \end{array} \right\}$$

(convenciona-se $S_k(i) = \infty$ caso não exista um caminho em G de comprimento k conectando i_0 a i).

Sumário



1 Algoritmo de Karp

2 Comentários sobre regularidade

Regularidade

Dualidade

Ordenação

Considere um grafo G com $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$.

Definição

Diremos que uma aresta $i_1 \xrightarrow{G} j_1$ é menor que $i_2 \xrightarrow{G} j_2$ se

$$i_1 < i_2 \quad \text{ou} \\ i_1 = i_2 \quad \text{e} \quad j_1 \leq j_2.$$

onde \leq é a ordem usual sobre $V(G)$, a qual pode claramente ser resumida pela cadeia $1 < 2 < \dots < n$.

Tal relação entre as arestas de G induz ordem lexicográfica em $A(G)$.
Em particular, todas as arestas formam a cadeia

$$i_1 \xrightarrow{G} j_1 \leq i_2 \xrightarrow{G} j_2 \leq \dots \leq i_{\#A(G)} \xrightarrow{G} j_{\#A(G)}.$$

Ordenação

Considere um grafo G com $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$.

Definição

Diremos que uma aresta $i_1 \xrightarrow{G} j_1$ é menor que $i_2 \xrightarrow{G} j_2$ se

$$i_1 < i_2 \quad \text{ou} \\ i_1 = i_2 \quad \text{e} \quad j_1 \leq j_2.$$

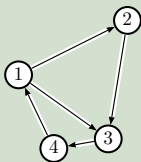
onde \leq é a ordem usual sobre $V(G)$, a qual pode claramente ser resumida pela cadeia $1 < 2 < \dots < n$.

Tal relação entre as arestas de G induz ordem lexicográfica em $A(G)$.
Em particular, todas as arestas formam a cadeia

$$i_1 \xrightarrow{G} j_1 \leq i_2 \xrightarrow{G} j_2 \leq \dots \leq i_{\#A(G)} \xrightarrow{G} j_{\#A(G)}.$$

Exemplo

Explicitaremos a ordem lexicográfica para o grafo G abaixo representado.



$$A(G) = \left\{ \begin{array}{l} 2 \xrightarrow{G} 3, 1 \xrightarrow{G} 2, \\ 4 \xrightarrow{G} 1, 3 \xrightarrow{G} 4, \\ 1 \xrightarrow{G} 3 \end{array} \right\}.$$

A ordenação de $V(G)$ permite a comparação entre as arestas do grafo G , por exemplo,

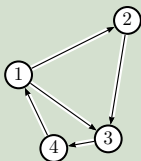
$$1 \xrightarrow{G} 2 \leq 1 \xrightarrow{G} 3.$$

Por comparação termo a termo, construímos a seguinte cadeia no conjunto $A(G)$

$$1 \xrightarrow{G} 2 \leq 1 \xrightarrow{G} 3 \leq 2 \xrightarrow{G} 3 \leq 3 \xrightarrow{G} 4 \leq 4 \xrightarrow{G} 1.$$

Exemplo

Explicitaremos a ordem lexicográfica para o grafo G abaixo representado.



$$A(G) = \left\{ \begin{array}{l} 2 \xrightarrow{G} 3, 1 \xrightarrow{G} 2, \\ 4 \xrightarrow{G} 1, 3 \xrightarrow{G} 4, \\ 1 \xrightarrow{G} 3 \end{array} \right\}.$$

A ordenação de $V(G)$ permite a comparação entre as arestas do grafo G , por exemplo,

$$1 \xrightarrow{G} 2 \leq 1 \xrightarrow{G} 3.$$

Por comparação termo a termo, construímos a seguinte cadeia no conjunto $A(G)$

$$1 \xrightarrow{G} 2 \leq 1 \xrightarrow{G} 3 \leq 2 \xrightarrow{G} 3 \leq 3 \xrightarrow{G} 4 \leq 4 \xrightarrow{G} 1.$$

Segundo esta ordenação,

- a função custo $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser apresentada como um vetor

$$(c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), \dots, c(i_{\#A(G)}, j_{\#A(G)})) \in \mathbb{R}^{\#A(G)};$$

- o espaço $\mathbb{R}^{\#A(G)}$ pode ser visto como o conjunto de todas as funções de custo sobre as arestas de um grafo G ;
- a constante cíclica minimal caracteriza-se como uma função sobre o espaço $\mathbb{R}^{\#A(G)}$, ou melhor,

$$m(c) : \mathbb{R}^{\#A(G)} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Tal representação vetorial fomenta questionamentos comuns a funções sobre espaços euclidianos, como, por exemplo, convexidade, continuidade, diferenciabilidade, etc.

Segundo esta ordenação,

- a função custo $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser apresentada como um vetor

$$(c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), \dots, c(i_{\#A(G)}, j_{\#A(G)})) \in \mathbb{R}^{\#A(G)};$$

- o espaço $\mathbb{R}^{\#A(G)}$ pode ser visto como o conjunto de todas as funções de custo sobre as arestas de um grafo G ;
- a constante cíclica minimal caracteriza-se como uma função sobre o espaço $\mathbb{R}^{\#A(G)}$, ou melhor,

$$m(c) : \mathbb{R}^{\#A(G)} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Tal representação vetorial fomenta questionamentos comuns a funções sobre espaços euclidianos, como, por exemplo, convexidade, continuidade, diferenciabilidade, etc.

Segundo esta ordenação,

- a função custo $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser apresentada como um vetor

$$(c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), \dots, c(i_{\#A(G)}, j_{\#A(G)})) \in \mathbb{R}^{\#A(G)};$$

- o espaço $\mathbb{R}^{\#A(G)}$ pode ser visto como o conjunto de todas as funções de custo sobre as arestas de um grafo G ;
- a constante cíclica minimal caracteriza-se como uma função sobre o espaço $\mathbb{R}^{\#A(G)}$, ou melhor,

$$m(c) : \mathbb{R}^{\#A(G)} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Tal representação vetorial fomenta questionamentos comuns a funções sobre espaços euclidianos, como, por exemplo, convexidade, continuidade, diferenciabilidade, etc.

Segundo esta ordenação,

- a função custo $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser apresentada como um vetor

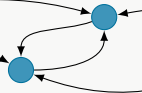
$$(c(i_1, j_1), c(i_2, j_2), \dots, c(i_{\#A(G)}, j_{\#A(G)})) \in \mathbb{R}^{\#A(G)};$$

- o espaço $\mathbb{R}^{\#A(G)}$ pode ser visto como o conjunto de todas as funções de custo sobre as arestas de um grafo G ;
- a constante cíclica minimal caracteriza-se como uma função sobre o espaço $\mathbb{R}^{\#A(G)}$, ou melhor,

$$m(c) : \mathbb{R}^{\#A(G)} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Tal representação vetorial fomenta questionamentos comuns a funções sobre espaços euclidianos, como, por exemplo, convexidade, continuidade, diferenciabilidade, *etc.*

Regularidade



Considere a norma do máximo,

$$\|(x_1, \dots, x_{\#A(G)})\|_{\infty} = \max_{1 \leq \ell \leq \#A(G)} |x_{\ell}|,$$

sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{\#A(G)}$.

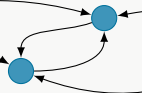
É possível verificar regularidade dita lipschitziana para a constante cíclica minimal $m(c)$ (vista como uma função sobre $\mathbb{R}^{\#A(G)}$).

Proposição

Dados custos c e c' , temos

$$|m(c) - m(c')| \leq \max_{i \xrightarrow{c} j} |c(i, j) - c'(i, j)| = \|c - c'\|_{\infty}.$$

Regularidade



Considere a norma do máximo,

$$\|(x_1, \dots, x_{\#A(G)})\|_{\infty} = \max_{1 \leq \ell \leq \#A(G)} |x_{\ell}|,$$

sobre o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{\#A(G)}$.

É possível verificar regularidade dita lipschitziana para a constante cíclica minimal $m(c)$ (vista como uma função sobre $\mathbb{R}^{\#A(G)}$).

Proposição

Dados custos c e c' , temos

$$|m(c) - m(c')| \leq \max_{i \xrightarrow{c} j} |c(i, j) - c'(i, j)| = \|c - c'\|_{\infty}.$$

Além disso, a constante cíclica minimal $m(c) : \mathbb{R}^{\#A(G)} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação côncava.

Proposição

Sejam c e c' custos sobre as arestas do grafo orientado G . Então a constante cíclica minimal m satisfaz

$$m(tc + (1 - t)c') \geq tm(c) + (1 - t)m(c'), \quad \forall t \in [0, 1].$$

É bem sabido da análise convexa que propriedade descrita acima assegura, para todo custo c , fixado $v \in \mathbb{R}^{\#A(G)}$, que existem os limites

$$\begin{aligned}\partial_v^+ m(c) &:= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(c + hv) - m(c)}{h}, \\ \partial_v^- m(c) &:= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(c - hv) - m(c)}{h}.\end{aligned}$$

Além disso, a constante cíclica minimal $m(c) : \mathbb{R}^{\#A(G)} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação côncava.

Proposição

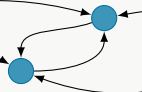
Sejam c e c' custos sobre as arestas do grafo orientado G . Então a constante cíclica minimal m satisfaz

$$m(tc + (1 - t)c') \geq tm(c) + (1 - t)m(c'), \quad \forall t \in [0, 1].$$

É bem sabido da análise convexa que propriedade descrita acima assegura, para todo custo c , fixado $v \in \mathbb{R}^{\#A(G)}$, que existem os limites

$$\begin{aligned}\partial_v^+ m(c) &:= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(c + hv) - m(c)}{h}, \\ \partial_v^- m(c) &:= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m(c - hv) - m(c)}{h}.\end{aligned}$$

Dualidade



É útil constatar a existência de outras maneiras de caracterizar a constante cíclica minimal $m(c)$ em função dos caminhos em G .

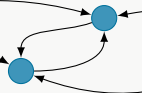
Proposição

$$\begin{aligned} m(c) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\} \\ &= \sup_{k \geq 1} \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Observação

A convergência do limite acima é garantida por um argumento de superaditividade.

Dualidade



É útil constatar a existência de outras maneiras de caracterizar a constante cíclica minimal $m(c)$ em função dos caminhos em G .

Proposição

$$\begin{aligned} m(c) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\} \\ &= \sup_{k \geq 1} \min \left\{ c(P) : \begin{array}{l} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Observação

A convergência do limite acima é garantida por um argumento de superaditividade.

Destacamos, através da fórmula de dualidade abaixo, como *nossa questão de minimização do custo sobre ciclos está relacionada com um problema de maximização envolvendo funções definidas sobre os vértices do grafo.*

Teorema (Representação Dual)

Seja G um grafo orientado conexo. Então, a constante cíclica minimal possui a seguinte representação dual

$$m(c) = \sup_{f: V(G) \rightarrow \mathbb{R}} \min_{i \xrightarrow{c} j} [c(i, j) + f(i) - f(j)].$$

Observação

A teoria de dualidade é uma poderosa ferramenta em otimização de modo geral. Assinalamos que este tipo de caracterização é comum, por exemplo, na teoria de otimização ergódica.

Destacamos, através da fórmula de dualidade abaixo, como *nossa questão de minimização do custo sobre ciclos está relacionada com um problema de maximização envolvendo funções definidas sobre os vértices do grafo.*

Teorema (Representação Dual)

Seja G um grafo orientado conexo. Então, a constante cíclica minimal possui a seguinte representação dual

$$m(c) = \sup_{f: V(G) \rightarrow \mathbb{R}} \min_{i \xrightarrow{c} j} [c(i, j) + f(i) - f(j)].$$

Observação

A teoria de dualidade é uma poderosa ferramenta em otimização de modo geral. Assinalamos que este tipo de caracterização é comum, por exemplo, na teoria de otimização ergódica.

Bibliografia



E. Garibaldi e J. T. A. Gomes,
Otimização de Médias sobre Grafos Orientados,
Coleção publicações matemáticas (29 CBM) **12**, IMPA, 2013.

Subseções: 2.1.1 e 2.1.2 (páginas 16 a 30);



R. Bissacot e E. Garibaldi,
Weak KAM methods and ergodic optimal problems for countable
Markov shifts,
Bulletin of the Brazilian Mathematical Society **41** (2010), 321-338.



R. M. Karp,
A characterization of the minimum cycle mean in a digraph,
Discrete Mathematics **23** (1978), 309-311.



Sinopse da Aula 03

- Apresenta-se o operador de Lax-Oleinik T_c .
- Detalha-se o algoritmo de Floría-Griffiths, cuja saída retorna simultaneamente a constante cíclica minimal $m(c)$ e um corretor u .
- Discutimos aspectos sobre a validação deste algoritmo, os quais ressaltam propriedades importantes do operador de Lax-Oleinik.



Sinopse da Aula 03

- Apresenta-se o operador de Lax-Oleinik T_c .
- Detalha-se o algoritmo de Floría-Griffiths, cuja saída retorna simultaneamente a constante cíclica minimal $m(c)$ e um corretor u .
- Discutimos aspectos sobre a validação deste algoritmo, os quais ressaltam propriedades importantes do operador de Lax-Oleinik.



Sinopse da Aula 03

- Apresenta-se o operador de Lax-Oleinik T_c .
- Detalha-se o algoritmo de Floría-Griffiths, cuja saída retorna simultaneamente a constante cíclica minimal $m(c)$ e um corretor u .
- Discutimos aspectos sobre a validação deste algoritmo, os quais ressaltam propriedades importantes do operador de Lax-Oleinik.



Até a próxima aula!