29º Colóquio Brasileiro de Matemática
Rio de Janeiro – Julho, 2013

Otimização de Médias sobre Grafos Orientados

Aula 06 – Álgebra Min-Plus I

Eduardo Garibaldi João Tiago Assunção Gomes
IMECC, Universidade Estadual de Campinas

O principal foco deste curso tem sido a **minimização**.

Vista como uma operação sobre o conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, o mínimo partilha de várias propriedades em comum com a soma usual sobre $\mathbb{R}$, como, por exemplo,

$$
\begin{aligned}
&a + 0 = a, && \min\{a, +\infty\} = a;\\
&a + b = b + a, && \min\{a, b\} = \min\{b, a\};\\
&a + (b + c) = (a + b) + c, && \min\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\min\{a, b\}, c\}.
\end{aligned}
$$

O principal foco deste curso tem sido a **minimização**.

Vista como uma operação sobre o conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, o mínimo partilha de várias propriedades em comum com a soma usual sobre $\mathbb{R}$, como, por exemplo,

$$
\begin{aligned}
a + 0 &= a, & \min\{a, +\infty\} &= a; \\
a + b &= b + a, & \min\{a, b\} &= \min\{b, a\}; \\
a + (b + c) &= (a + b) + c, & \min\{a, \min\{b, c\}\} &= \min\{\min\{a, b\}, c\}.
\end{aligned}
$$

O principal foco deste curso tem sido a **minimização**.

Vista como uma operação sobre o conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, o mínimo partilha de várias propriedades em comum com a soma usual sobre $\mathbb{R}$, como, por exemplo,

$$a + 0 = a, \qquad \min\{a, +\infty\} = a;$$

$$a + b = b + a, \qquad \min\{a, b\} = \min\{b, a\};$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad \min\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\min\{a, b\}, c\}.$$

O principal foco deste curso tem sido a **minimização**.

Vista como uma operação sobre o conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, o mínimo partilha de várias propriedades em comum com a soma usual sobre $\mathbb{R}$, como, por exemplo,

$$\begin{aligned} a + 0 &= a, & \min\{a, +\infty\} &= a; \\ a + b &= b + a, & \min\{a, b\} &= \min\{b, a\}; \\ a + (b + c) &= (a + b) + c, & \min\{a, \min\{b, c\}\} &= \min\{\min\{a, b\}, c\}. \end{aligned}$$

Do ponto de vista algébrico, passaremos a estudar uma estrutura semelhante a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Para tanto, consideraremos o conjunto

$$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

equipado das operações de

mínimo e *adição*

(respectivamente denotadas por $\oplus$ e $\otimes$), as quais justificam a denominação *min-plus* adotada.

Ao apresentar uma breve introdução à álgebra *min-plus*, o objetivo desta aula está em relacionar conceitos próprios desta teoria com as noções que antes estudamos em otimização de médias sobre grafos.

Do ponto de vista algébrico, passaremos a estudar uma estrutura semelhante a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Para tanto, consideraremos o conjunto

$$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

equipado das operações de

mínimo e *adição*

(respectivamente denotadas por $\oplus$ e $\otimes$), as quais justificam a denominação *min-plus* adotada.

Ao apresentar uma breve introdução à álgebra *min-plus*, o objetivo desta aula está em relacionar conceitos próprios desta teoria com as noções que antes estudamos em otimização de médias sobre grafos.

Do ponto de vista algébrico, passaremos a estudar uma estrutura semelhante a $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Para tanto, consideraremos o conjunto

$$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

equipado das operações de

mínimo e *adição*

(respectivamente denotadas por $\oplus$ e $\otimes$), as quais justificam a denominação *min-plus* adotada.

Ao apresentar uma breve introdução à álgebra *min-plus*, o objetivo desta aula está em relacionar conceitos próprios desta teoria com as noções que antes estudamos em otimização de médias sobre grafos.

Aula 06 – Álgebra Min-Plus I

Resumo:

- Apresentamos os principais conceitos da álgebra *min-plus*:
  - conjunto real *min-plus*;
  - espaço *n*-dimensional *min-plus*;
  - álgebra matricial *min-plus*.
- Investigamos os pormenores destas estruturas e comparamos com a álgebra usual.

Aula 06 – Álgebra Min-Plus I

Resumo:

- Apresentamos os principais conceitos da álgebra *min-plus*:
  - conjunto real *min-plus*;
  - espaço *n*-dimensional *min-plus*;
  - álgebra matricial *min-plus*.
- Investigamos os pormenores destas estruturas e comparamos com a álgebra usual.

Sumário

Sumário

Conjunto real *min-plus*

A primeira estrutura que está associada a noção *min-plus* será apresentada abaixo.

Definição

Considere o conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ munido das seguintes operações

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\} &\to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ (a, b) &\mapsto a \oplus b := \min\{a, \ b\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \otimes : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\} &\to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ (a, b) &\mapsto a \otimes b := a + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \\ (+\infty, b) &\mapsto +\infty \otimes b := +\infty, \\ (a, +\infty) &\mapsto a \otimes +\infty := +\infty. \end{aligned}$$

Denominamos $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes) = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ de conjunto real *min-plus*.

Conjunto real *min-plus*

A primeira estrutura que está associada a noção *min-plus* será apresentada abaixo.

Definição

Considere o conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ munido das seguintes operações

$$
\begin{aligned}
\oplus : \ \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad &\to \quad \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\
(a, b) \quad &\mapsto \quad a \oplus b := \min\{a, \ b\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\otimes : \ \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad &\to \quad \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\
(a, b) \quad &\mapsto \quad a \otimes b := a + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \\
(+\infty, b) \quad &\mapsto \quad +\infty \otimes b := +\infty, \\
(a, +\infty) \quad &\mapsto \quad a \otimes +\infty := +\infty.
\end{aligned}
$$

Denominamos $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes) = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ de conjunto real *min-plus*.

Conjunto real *min-plus*

A primeira estrutura que está associada a noção *min-plus* será apresentada abaixo.

Definição

Considere o conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ munido das seguintes operações

$$\begin{array}{rcl} \oplus: \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ (a, b) & \mapsto & a \oplus b := \min\{a,\ b\}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \otimes: \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ (a, b) & \mapsto & a \otimes b := a + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \\ (+\infty, b) & \mapsto & +\infty \otimes b := +\infty, \\ (a, +\infty) & \mapsto & a \otimes +\infty := +\infty. \end{array}$$

Denominamos $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes) = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ de conjunto real *min-plus*.

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$
\begin{aligned}
26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} = -85, &\qquad 8 \otimes 4 = 8 + 4 = 12,\\
+\infty \oplus 37 = 37, &\qquad 46 \otimes +\infty = +\infty,\\
2 \oplus 2 = 2, &\qquad 2 \otimes -3 = -1.
\end{aligned}
$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$
(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97
$$
$$
\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.
$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a$.
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a$.
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$:	$a \otimes (-a) = 0, \ a \in \mathbb{R}$.
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty$.

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$\begin{aligned} 26 \oplus -85 = \min\{26,\, -85\} &= -85, & 8 \otimes 4 = 8 + 4 = 12, \\ +\infty \oplus 37 &= 37, & 46 \otimes +\infty = +\infty, \\ 2 \oplus 2 &= 2, & 2 \otimes -3 = -1. \end{aligned}$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97$$
$$\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a$.
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a$.
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$:	$a \otimes (-a) = 0, \; a \in \mathbb{R}$.
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty$.

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$
\begin{aligned}
26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} = -85, &\qquad 8 \otimes 4 = 8 + 4 = 12,\\
+\infty \oplus 37 = 37, &\qquad 46 \otimes +\infty = +\infty,\\
2 \oplus 2 = 2, &\qquad 2 \otimes -3 = -1.
\end{aligned}
$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97$$
$$\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a$.
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a$.
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$:	$a \otimes (-a) = 0, \ a \in \mathbb{R}$.
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty$.

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$
\begin{aligned}
26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} &= -85, & 8 \otimes 4 = 8 + 4 &= 12,\\
+\infty \oplus 37 &= 37, & 46 \otimes +\infty &= +\infty,\\
2 \oplus 2 &= 2, & 2 \otimes -3 &= -1.
\end{aligned}
$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$
(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97
$$
$$
\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.
$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a$.
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a$.
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$:	$a \otimes (-a) = 0, \ a \in \mathbb{R}$.
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty$.

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$
\begin{aligned}
26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} &= -85, \qquad & 8 \otimes 4 = 8 + 4 = 12,\\
+\infty \oplus 37 &= 37, & 46 \otimes +\infty = +\infty,\\
2 \oplus 2 &= 2, & 2 \otimes -3 = -1.
\end{aligned}
$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97$$
$$\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a.$
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a.$
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c.$
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$:	$a \otimes (-a) = 0, \ a \in \mathbb{R}.$
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty.$

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$\begin{aligned} 26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} &= -85, & 8 \otimes 4 = 8 + 4 = 12,\\ +\infty \oplus 37 &= 37, & 46 \otimes +\infty = +\infty,\\ 2 \oplus 2 &= 2, & 2 \otimes -3 = -1. \end{aligned}$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97$$
$$\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a.$
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a.$
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c.$
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$:	$a \otimes (-a) = 0, \ a \in \mathbb{R}.$
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty.$

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$
\begin{aligned}
26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} &= -85, &\qquad 8 \otimes 4 = 8 + 4 = 12,\\
+\infty \oplus 37 &= 37, &\qquad 46 \otimes +\infty = +\infty,\\
2 \oplus 2 &= 2, &\qquad 2 \otimes -3 = -1.
\end{aligned}
$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97$$

$$\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a$.
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a$.
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$:	$a \otimes (-a) = 0, \; a \in \mathbb{R}$.
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty$.

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$\begin{aligned} 26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} &= -85, & 8 \otimes 4 = 8 + 4 = 12,\\ +\infty \oplus 37 &= 37, & 46 \otimes +\infty = +\infty,\\ 2 \oplus 2 &= 2, & 2 \otimes -3 = -1. \end{aligned}$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97$$
$$\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a$.
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a$.
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$:	$a \otimes (-a) = 0, \ a \in \mathbb{R}$.
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty$.

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$
\begin{aligned}
26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} &= -85, & \quad 8 \otimes 4 = 8 + 4 = 12,\\
+\infty \oplus 37 &= 37, & \quad 46 \otimes +\infty = +\infty,\\
2 \oplus 2 &= 2, & \quad 2 \otimes -3 = -1.
\end{aligned}
$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$
(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97
$$
$$
\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.
$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a$.
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a$.
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$:	$a \otimes (-a) = 0, \;\; a \in \mathbb{R}$.
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty$.

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$\begin{aligned} 26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} &= -85, &\quad 8 \otimes 4 = 8 + 4 &= 12, \\ +\infty \oplus 37 &= 37, & 46 \otimes +\infty &= +\infty, \\ 2 \oplus 2 &= 2, & 2 \otimes -3 &= -1. \end{aligned}$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97$$
$$\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a$.
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a$.
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$:	$a \otimes (-a) = 0, \ a \in \mathbb{R}$.
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty$.

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$\begin{aligned} 26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} &= -85, & 8 \otimes 4 = 8 + 4 &= 12, \\ +\infty \oplus 37 &= 37, & 46 \otimes +\infty &= +\infty, \\ 2 \oplus 2 &= 2, & 2 \otimes -3 &= -1. \end{aligned}$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97$$
$$\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a.$
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a.$
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c.$
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$:	$a \otimes (-a) = 0, \ a \in \mathbb{R}.$
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty.$

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$\begin{aligned} 26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} &= -85, & 8 \otimes 4 &= 8 + 4 = 12, \\ +\infty \oplus 37 &= 37, & 46 \otimes +\infty &= +\infty, \\ 2 \oplus 2 &= 2, & 2 \otimes -3 &= -1. \end{aligned}$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97$$
$$\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro: $a \otimes 0 = a$.
Comutatividade: $a \otimes b = b \otimes a$.
Associatividade: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$: $a \otimes (-a) = 0, \ a \in \mathbb{R}$.
Existência de elemento absorvente: $a \otimes +\infty = +\infty$.

Exemplo

Para se aclimatar com as notações e as operações apresentadas verificamos que

$$\begin{aligned} 26 \oplus -85 = \min\{26, -85\} &= -85, \qquad & 8 \otimes 4 = 8 + 4 = 12,\\ +\infty \oplus 37 &= 37, & 46 \otimes +\infty = +\infty,\\ 2 \oplus 2 &= 2, & 2 \otimes -3 = -1. \end{aligned}$$

Além disso, note, por exemplo, que

$$(3 \otimes 5) \oplus (90 \otimes +\infty) \oplus (3 \otimes -100) = \min\{8, +\infty, -97\} = -97$$
$$\text{e} \quad (7 \otimes x) \oplus -5 = \min\{7 + x, -5\}.$$

Destacamos em listagem abaixo algumas propriedades da adição $\otimes$.

Existência de elemento neutro:	$a \otimes 0 = a.$
Comutatividade:	$a \otimes b = b \otimes a.$
Associatividade:	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c.$
Existência de elemento inverso em $\mathbb{R}$:	$a \otimes (-a) = 0, \ a \in \mathbb{R}.$
Existência de elemento absorvente:	$a \otimes +\infty = +\infty.$

Subjacente ao conceito de mínimo, encontramos a ordem herdada por $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ da ordem usual sobre $\mathbb{R}$, ou melhor,

$$a \leq b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \oplus b = a.$$

Salientamos que o mínimo $\oplus$ também satisfaz algumas das propriedades anteriores.

Existência de elemento neutro:	$a \oplus +\infty = a.$
Comutatividade:	$a \oplus b = b \oplus a.$
Associatividade:	$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c.$

Idempotência:	$a \oplus a = \min\{a, a\} = a.$

Subjacente ao conceito de mínimo, encontramos a ordem herdada por $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ da ordem usual sobre $\mathbb{R}$, ou melhor,

$$a \leq b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \oplus b = a.$$

Salientamos que o mínimo $\oplus$ também satisfaz algumas das propriedades anteriores.

Existência de elemento neutro: $a \oplus +\infty = a.$
Comutatividade: $a \oplus b = b \oplus a.$
Associatividade: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c.$

Porém, do ponto de vista teórico, uma das mais importantes características de $\oplus$ é descrita abaixo.

Idempotência: $a \oplus a = \min\{a, a\} = a.$

Subjacente ao conceito de mínimo, encontramos a ordem herdada por $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ da ordem usual sobre $\mathbb{R}$, ou melhor,

$$a \leq b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \oplus b = a.$$

Salientamos que o mínimo $\oplus$ também satisfaz algumas das propriedades anteriores.

Existência de elemento neutro: $a \oplus +\infty = a.$
Comutatividade: $a \oplus b = b \oplus a.$
Associatividade: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c.$

Porém, do ponto de vista teórico, uma das mais importantes características de $\oplus$ é descrita abaixo.

Idempotência: $a \oplus a = \min\{a, a\} = a.$

Subjacente ao conceito de mínimo, encontramos a ordem herdada por $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ da ordem usual sobre $\mathbb{R}$, ou melhor,

$$a \leq b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \oplus b = a.$$

Salientamos que o mínimo $\oplus$ também satisfaz algumas das propriedades anteriores.

Existência de elemento neutro: $a \oplus +\infty = a.$
Comutatividade: $a \oplus b = b \oplus a.$
Associatividade: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c.$

Porém, do ponto de vista teórico, uma das mais importantes características de $\oplus$ é descrita abaixo.

Idempotência: $a \oplus a = \min\{a, a\} = a.$

Subjacente ao conceito de mínimo, encontramos a ordem herdada por $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ da ordem usual sobre $\mathbb{R}$, ou melhor,

$$a \leq b \qquad \Leftrightarrow \qquad a \oplus b = a.$$

Salientamos que o mínimo $\oplus$ também satisfaz algumas das propriedades anteriores.

Existência de elemento neutro:	$a \oplus +\infty = a.$
Comutatividade:	$a \oplus b = b \oplus a.$
Associatividade:	$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c.$

Porém, do ponto de vista teórico, uma das mais importantes características de $\oplus$ é descrita abaixo.

Idempotência: $\quad a \oplus a = \min\{a, a\} = a.$

Observação

A lei do cancelamento, $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ (sempre é satisfeita em $(\mathbb{R}, +, \cdot)$) não é uma afirmação verdadeira em geral sobre $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$, como pode ser visto na seguinte exemplificação

$$-2 \otimes +\infty = +\infty = 5 \otimes +\infty \qquad \text{e} \qquad -2 \neq 5.$$

As operações de mínimo e de adição estão bem relacionadas pela propriedade distributiva de $\otimes$ com respeito a $\oplus$, isto é,

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \otimes c &= \min\{a,\ b\} + c = \min\{a + c,\ b + c\} \\ &= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c).\end{aligned}$$

Observação

A distributividade de $\oplus$ com respeito a $\otimes$ não é em geral válida, como pode ser visto, por exemplo, para os seguintes valores

$$(-3 \otimes 8) \oplus 5 = 5 \neq 2 = (-3 \oplus 5) \otimes (8 \oplus 5).$$

Observação

A lei do cancelamento, $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ (sempre é satisfeita em $(\mathbb{R}, +, \cdot)$) não é uma afirmação verdadeira em geral sobre $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$, como pode ser visto na seguinte exemplificação

$$-2 \otimes +\infty = +\infty = 5 \otimes +\infty \qquad \text{e} \qquad -2 \neq 5.$$

As operações de mínimo e de adição estão bem relacionadas pela propriedade distributiva de $\otimes$ com respeito a $\oplus$, isto é,

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \otimes c &= \min\{a,\, b\} + c = \min\{a + c,\, b + c\} \\ &= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c).\end{aligned}$$

Observação

A distributividade de $\oplus$ com respeito a $\otimes$ não é em geral válida, como pode ser visto, por exemplo, para os seguintes valores

$$(-3 \otimes 8) \oplus 5 = 5 \neq 2 = (-3 \oplus 5) \otimes (8 \oplus 5).$$

Observação

A lei do cancelamento, $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ (sempre é satisfeita em $(\mathbb{R}, +, \cdot)$) não é uma afirmação verdadeira em geral sobre $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$, como pode ser visto na seguinte exemplificação

$$-2 \otimes +\infty = +\infty = 5 \otimes +\infty \qquad \text{e} \qquad -2 \neq 5.$$

As operações de mínimo e de adição estão bem relacionadas pela propriedade distributiva de $\otimes$ com respeito a $\oplus$, isto é,

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \otimes c &= \min\{a, b\} + c = \min\{a + c, b + c\} \\ &= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c).\end{aligned}$$

Observação

A distributividade de $\oplus$ com respeito a $\otimes$ não é em geral válida, como pode ser visto, por exemplo, para os seguintes valores

$$(-3 \otimes 8) \oplus 5 = 5 \neq 2 = (-3 \oplus 5) \otimes (8 \oplus 5).$$

Para uma equação de primeiro grau, a impossibilidade de se definir operação inversa à $\oplus$, tem como efeito a diversificação de possíveis soluções.

Exemplo

Considere a equação linear *min-plus* dada por

$$(7 \otimes x) \oplus -5 = 7.$$

Não é difícil perceber que sempre ocorre

$$\min\{7 + x, -5\} \leq -5,$$

logo tal equação não possui solução. Por outro lado, as equações

$$(7 \otimes x) \oplus -5 = -7 \qquad \text{e} \qquad (7 \otimes x) \oplus -5 = -5$$

possuem soluções descritas, respectivamente, ora por um único valor $x = -14$, ora por infinitos valores $x \in [-12, +\infty[$.

Para uma equação de primeiro grau, a impossibilidade de se definir operação inversa à $\oplus$, tem como efeito a diversificação de possíveis soluções.

Exemplo

Considere a equação linear *min-plus* dada por

$$(7 \otimes x) \oplus -5 = 7.$$

Não é difícil perceber que sempre ocorre

$$\min\{7 + x, -5\} \leq -5,$$

logo tal equação não possui solução. Por outro lado, as equações

$$(7 \otimes x) \oplus -5 = -7 \qquad \text{e} \qquad (7 \otimes x) \oplus -5 = -5$$

possuem soluções descritas, respectivamente, ora por um único valor $x = -14$, ora por infinitos valores $x \in [-12, +\infty]$.

Para uma equação de primeiro grau, a impossibilidade de se definir operação inversa à $\oplus$, tem como efeito a diversificação de possíveis soluções.

Exemplo

Considere a equação linear *min-plus* dada por

$$(7 \otimes x) \oplus -5 = 7.$$

Não é difícil perceber que sempre ocorre

$$\min\{7 + x, -5\} \leq -5,$$

logo tal equação não possui solução. Por outro lado, as equações

$$(7 \otimes x) \oplus -5 = -7 \qquad \text{e} \qquad (7 \otimes x) \oplus -5 = -5$$

possuem soluções descritas, respectivamente, ora por um único valor $x = -14$, ora por infinitos valores $x \in [-12, +\infty]$.

Sumário

Espaço n-dimensional *min-plus*

No contexto *min-plus*, o conceito análogo ao de espaço vetorial é apresentado a seguir.

Definição

O espaço n-dimensional real *min-plus* é definido considerando o conjunto $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$, cujos elementos são representados por

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^{\mathsf{T}}, \quad \text{com} \quad v_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

munido de um produto por escalar a em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ dado por

$$\begin{aligned} a \odot \vec{v} &:= (a \otimes v_1, \dots, a \otimes v_n)^{\mathsf{T}} \\ &= (a + v_1, \dots, a + v_n)^{\mathsf{T}}, \quad \forall\, \vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \end{aligned}$$

Espaço n-dimensional *min-plus*

No contexto *min-plus*, o conceito análogo ao de espaço vetorial é apresentado a seguir.

Definição

O espaço n-dimensional real *min-plus* é definido considerando o conjunto $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$, cujos elementos são representados por

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^\mathsf{T}, \quad \text{com} \quad v_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

munido de um produto por escalar a em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ dado por

$$\begin{aligned} a \odot \vec{v} &:= (a \otimes v_1, \dots, a \otimes v_n)^\mathsf{T} \\ &= (a + v_1, \dots, a + v_n)^\mathsf{T}, \quad \forall\, \vec{v} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \end{aligned}$$

Definição

e uma adição vetorial

$$\vec{v} \oplus \vec{w} := (v_1 \oplus w_1, \ldots, v_n \oplus w_n)^\intercal$$
$$= \big(\min\{v_1, w_1\}, \ldots, \min\{v_n, w_n\}\big)^\intercal, \quad \forall\, \vec{v}, \vec{w} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n,$$

Tal espaço será denotada por $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$.

Observação

Várias propriedades operacionais de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ são naturalmente herdadas pelo espaço n-dimensional *min-plus*.

Além disso, a ordem lexicográfica sobre $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ pode certas vezes ser ratificada de forma operacional através

$$\vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} \leq \vec{w}.$$

Definição

e uma adição vetorial

$$\begin{aligned}\vec{v} \oplus \vec{w} &:= (v_1 \oplus w_1, \ldots, v_n \oplus w_n)^\mathsf{T} \\ &= \big(\min\{v_1, w_1\}, \ldots, \min\{v_n, w_n\}\big)^\mathsf{T}, \quad \forall\, \vec{v}, \vec{w} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n,\end{aligned}$$

Tal espaço será denotada por $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$.

Observação

Várias propriedades operacionais de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ são naturalmente herdadas pelo espaço n-dimensional *min-plus*.

Além disso, a ordem lexicográfica sobre $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ pode certas vezes ser ratificada de forma operacional através

$$\vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} \leq \vec{w}.$$

Definição

e uma adição vetorial

$$\begin{aligned}\vec{v} \oplus \vec{w} &:= (v_1 \oplus w_1, \ldots, v_n \oplus w_n)^\mathsf{T} \\ &= \big(\min\{v_1, w_1\}, \ldots, \min\{v_n, w_n\}\big)^\mathsf{T}, \quad \forall\, \vec{v}, \vec{w} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n,\end{aligned}$$

Tal espaço será denotada por $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$.

Observação

Várias propriedades operacionais de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ são naturalmente herdadas pelo espaço n-dimensional *min-plus*.

Além disso, a ordem lexicográfica sobre $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ pode certas vezes ser ratificada de forma operacional através

$$\vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} \leq \vec{w}.$$

Definição

e uma adição vetorial

$$\begin{aligned}\vec{v} \oplus \vec{w} &:= (v_1 \oplus w_1, \ldots, v_n \oplus w_n)^{\mathsf{T}} \\ &= \big(\min\{v_1, w_1\}, \ldots, \min\{v_n, w_n\}\big)^{\mathsf{T}}, \quad \forall\, \vec{v}, \vec{w} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n,\end{aligned}$$

Tal espaço será denotada por $((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$.

Observação

Várias propriedades operacionais de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ são naturalmente herdadas pelo espaço n-dimensional *min-plus*.

Além disso, a ordem lexicográfica sobre $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ pode certas vezes ser ratificada de forma operacional através

$$\vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v} \leq \vec{w}.$$

Exemplo

Apresentamos alguns cálculos elementares:

$$3 \odot (+\infty, 4, -5)^\intercal = (3 \otimes +\infty, 3 \otimes 4, 3 \otimes -5)^\intercal = (+\infty, 7, -2)^\intercal,$$

$$+\infty \odot (89, +\infty, 56, -23)^\intercal = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\begin{aligned} &(15, -4 + \infty, +\infty)^\intercal \oplus (0, 85, 7, +\infty)^\intercal = \\ &\quad = (15 \oplus 0, -4 \oplus 85, +\infty \oplus 7, +\infty \oplus +\infty)^\intercal \\ &\quad\quad = (0, -4, 7, +\infty)^\intercal. \end{aligned}$$

Exemplo

Damos também uma amostra da ordem lexicográfica

$$\begin{aligned} &(4, 120, -1)^\intercal \oplus (4, +\infty, -3)^\intercal = (4, 120, -1)^\intercal \quad \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \quad (4, 120, -1)^\intercal \leq (4, +\infty, -3)^\intercal. \end{aligned}$$

Exemplo

Apresentamos alguns cálculos elementares:

$$3 \odot (+\infty, 4, -5)^\intercal = (3 \otimes +\infty, 3 \otimes 4, 3 \otimes -5)^\intercal = (+\infty, 7, -2)^\intercal,$$

$$+\infty \odot (89, +\infty, 56, -23)^\intercal = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\begin{aligned}(15, -4 + \infty, +\infty)^\intercal \oplus (0, 85, 7, +\infty)^\intercal = \\ = (15 \oplus 0, -4 \oplus 85, +\infty \oplus 7, +\infty \oplus +\infty)^\intercal \\ = (0, -4, 7, +\infty)^\intercal.\end{aligned}$$

Exemplo

Damos também uma amostra da ordem lexicográfica

$$\begin{aligned}(4, 120, -1)^\intercal \oplus (4, +\infty, -3)^\intercal = (4, 120, -1)^\intercal \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad (4, 120, -1)^\intercal \preceq (4, +\infty, -3)^\intercal.\end{aligned}$$

Exemplo

Apresentamos alguns cálculos elementares:

$$3 \odot (+\infty, 4, -5)^{\intercal} = (3 \otimes +\infty, 3 \otimes 4, 3 \otimes -5)^{\intercal} = (+\infty, 7, -2)^{\intercal},$$

$$+\infty \odot (89, +\infty, 56, -23)^{\intercal} = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty)^{\intercal},$$

$$\begin{aligned}(15, -4 + \infty, +\infty)^{\intercal} \oplus (0, 85, 7, +\infty)^{\intercal} &= \\ &= (15 \oplus 0, -4 \oplus 85, +\infty \oplus 7, +\infty \oplus +\infty)^{\intercal} \\ &= (0, -4, 7, +\infty)^{\intercal}.\end{aligned}$$

Exemplo

Damos também uma amostra da ordem lexicográfica

$$\begin{aligned}(4, 120, -1)^{\intercal} \oplus (4, +\infty, -3)^{\intercal} = (4, 120, -1)^{\intercal} \quad &\Rightarrow \\ \Rightarrow \quad (4, 120, -1)^{\intercal} \leq (4, +\infty, -3)^{\intercal}.\end{aligned}$$

Exemplo

Apresentamos alguns cálculos elementares:

$$3 \odot (+\infty, 4, -5)^{\intercal} = (3 \otimes +\infty, 3 \otimes 4, 3 \otimes -5)^{\intercal} = (+\infty, 7, -2)^{\intercal},$$

$$+\infty \odot (89, +\infty, 56, -23)^{\intercal} = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty)^{\intercal},$$

$$(15, -4 + \infty, +\infty)^{\intercal} \oplus (0, 85, 7, +\infty)^{\intercal} =$$
$$= (15 \oplus 0, -4 \oplus 85, +\infty \oplus 7, +\infty \oplus +\infty)^{\intercal}$$
$$= (0, -4, 7, +\infty)^{\intercal}.$$

Exemplo

Damos também uma amostra da ordem lexicográfica

$$(4, 120, -1)^{\intercal} \oplus (4, +\infty, -3)^{\intercal} = (4, 120, -1)^{\intercal} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (4, 120, -1)^{\intercal} \preceq (4, +\infty, -3)^{\intercal}.$$

Exemplo

Apresentamos alguns cálculos elementares:

$$3 \odot (+\infty, 4, -5)^\intercal = (3 \otimes +\infty, 3 \otimes 4, 3 \otimes -5)^\intercal = (+\infty, 7, -2)^\intercal,$$

$$+\infty \odot (89, +\infty, 56, -23)^\intercal = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\begin{aligned}(15, -4 + \infty, +\infty)^\intercal \oplus (0, 85, 7, +\infty)^\intercal &= \\ = (15 \oplus 0, -4 \oplus 85, +\infty \oplus 7, +\infty \oplus +\infty)^\intercal & \\ = (0, -4, 7, +\infty)^\intercal.\end{aligned}$$

Exemplo

Damos também uma amostra da ordem lexicográfica

$$\begin{aligned}(4, 120, -1)^\intercal \oplus (4, +\infty, -3)^\intercal = (4, 120, -1)^\intercal \quad &\Rightarrow \\ \Rightarrow \quad (4, 120, -1)^\intercal \leq (4, +\infty, -3)^\intercal.\end{aligned}$$

Exemplo

Apresentamos alguns cálculos elementares:

$$3 \odot (+\infty, 4, -5)^\intercal = (3 \otimes +\infty, 3 \otimes 4, 3 \otimes -5)^\intercal = (+\infty, 7, -2)^\intercal,$$

$$+\infty \odot (89, +\infty, 56, -23)^\intercal = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\begin{aligned}(15, -4+\infty, +\infty)^\intercal \oplus (0, 85, 7, +\infty)^\intercal &= \\ &= (15 \oplus 0, -4 \oplus 85, +\infty \oplus 7, +\infty \oplus +\infty)^\intercal \\ &= (0, -4, 7, +\infty)^\intercal.\end{aligned}$$

Exemplo

Damos também uma amostra da ordem lexicográfica

$$\begin{aligned}(4, 120, -1)^\intercal \oplus (4, +\infty, -3)^\intercal = (4, 120, -1)^\intercal \quad &\Rightarrow \\ \Rightarrow \quad (4, 120, -1)^\intercal \leq (4, +\infty, -3)^\intercal.\end{aligned}$$

Exemplo

Apresentamos alguns cálculos elementares:

$$3 \odot (+\infty, 4, -5)^\intercal = (3 \otimes +\infty, 3 \otimes 4, 3 \otimes -5)^\intercal = (+\infty, 7, -2)^\intercal,$$

$$+\infty \odot (89, +\infty, 56, -23)^\intercal = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\begin{aligned}(15, -4 + \infty, +\infty)^\intercal \oplus (0, 85, 7, +\infty)^\intercal &= \\ = (15 \oplus 0, -4 \oplus 85, +\infty \oplus 7, +\infty \oplus +\infty)^\intercal & \\ = (0, -4, 7, +\infty)^\intercal.&\end{aligned}$$

Exemplo

Damos também uma amostra da ordem lexicográfica

$$(4, 120, -1)^\intercal \oplus (4, +\infty, -3)^\intercal = (4, 120, -1)^\intercal \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (4, 120, -1)^\intercal \leq (4, +\infty, -3)^\intercal.$$

Exemplo

Apresentamos alguns cálculos elementares:

$$3 \odot (+\infty, 4, -5)^\intercal = (3 \otimes +\infty, 3 \otimes 4, 3 \otimes -5)^\intercal = (+\infty, 7, -2)^\intercal,$$

$$+\infty \odot (89, +\infty, 56, -23)^\intercal = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\begin{aligned}(15, -4 + \infty, +\infty)^\intercal \oplus (0, 85, 7, +\infty)^\intercal &= \\ &= (15 \oplus 0, -4 \oplus 85, +\infty \oplus 7, +\infty \oplus +\infty)^\intercal \\ &= (0, -4, 7, +\infty)^\intercal.\end{aligned}$$

Exemplo

Damos também uma amostra da ordem lexicográfica

$$\begin{aligned}(4, 120, -1)^\intercal \oplus (4, +\infty, -3)^\intercal = (4, 120, -1)^\intercal \quad &\Rightarrow \\ \Rightarrow \quad (4, 120, -1)^\intercal \leq (4, +\infty, -3)^\intercal.\end{aligned}$$

Exemplo

Ademais, frisamos a seguinte decomposição

$$
\begin{aligned}
(1, 3, +\infty)^\intercal &= \\
&= (\min\{1, +\infty\}, \min\{3, +\infty\}, \min\{+\infty, +\infty\})^\intercal \\
&= (1, +\infty, +\infty)^\intercal \oplus (+\infty, 3, +\infty)^\intercal \oplus (+\infty, +\infty, +\infty)^\intercal \\
&= 1 \odot (0, +\infty, +\infty)^\intercal \oplus 3 \odot (+\infty, 0, +\infty)^\intercal \oplus +\infty \odot (+\infty, +\infty, 0)^\intercal.
\end{aligned}
$$

Tal equação nada tem de particular. Destacamos que todo elemento do espaço n-dimensional *min-plus* possui reescritura dada por

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= (v_1, \ldots, v_n)^\intercal \\
&= (\min\{v_1, +\infty\}, \ldots, \min\{v_n, +\infty\})^\intercal \\
&= (v_1, +\infty, \ldots, +\infty)^\intercal \oplus \ldots \oplus (+\infty, +\infty, \ldots, v_n)^\intercal \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot (+\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)^\intercal.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Ademais, frisamos a seguinte decomposição

$$\begin{aligned}
&(1, 3, +\infty)^\intercal = \\
&\quad = (\min\{1, +\infty\}, \min\{3, +\infty\}, \min\{+\infty, +\infty\})^\intercal \\
&\quad = (1, +\infty, +\infty)^\intercal \oplus (+\infty, 3, +\infty)^\intercal \oplus (+\infty, +\infty, +\infty)^\intercal \\
&\quad = 1 \odot (0, +\infty, +\infty)^\intercal \oplus 3 \odot (+\infty, 0, +\infty)^\intercal \oplus +\infty \odot (+\infty, +\infty, 0)^\intercal.
\end{aligned}$$

Tal equação nada tem de particular. Destacamos que todo elemento do espaço n-dimensional *min-plus* possui reescritura dada por

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= (v_1, \ldots, v_n)^\intercal \\
&= (\min\{v_1, +\infty\}, \ldots, \min\{v_n, +\infty\})^\intercal \\
&= (v_1, +\infty, \ldots, +\infty)^\intercal \oplus \ldots \oplus (+\infty, +\infty, \ldots, v_n)^\intercal \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot (+\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)^\intercal.
\end{aligned}$$

Exemplo

Ademais, frisamos a seguinte decomposição

$$
\begin{aligned}
&(1, 3, +\infty)^{\intercal} = \\
&\quad = (\min\{1, +\infty\}, \min\{3, +\infty\}, \min\{+\infty, +\infty\})^{\intercal} \\
&\quad = (1, +\infty, +\infty)^{\intercal} \oplus (+\infty, 3, +\infty)^{\intercal} \oplus (+\infty, +\infty, +\infty)^{\intercal} \\
&\quad = 1 \odot (0, +\infty, +\infty)^{\intercal} \oplus 3 \odot (+\infty, 0, +\infty)^{\intercal} \oplus +\infty \odot (+\infty, +\infty, 0)^{\intercal}.
\end{aligned}
$$

Tal equação nada tem de particular. Destacamos que todo elemento do espaço n-dimensional *min-plus* possui reescritura dada por

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= (v_1, \ldots, v_n)^{\intercal} \\
&= (\min\{v_1, +\infty\}, \ldots, \min\{v_n, +\infty\})^{\intercal} \\
&= (v_1, +\infty, \ldots, +\infty)^{\intercal} \oplus \ldots \oplus (+\infty, +\infty, \ldots, v_n)^{\intercal} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot (+\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)^{\intercal}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Ademais, frisamos a seguinte decomposição

$$
\begin{aligned}
&(1, 3, +\infty)^{\intercal} = \\
&\quad = (\min\{1, +\infty\}, \min\{3, +\infty\}, \min\{+\infty, +\infty\})^{\intercal} \\
&\quad = (1, +\infty, +\infty)^{\intercal} \oplus (+\infty, 3, +\infty)^{\intercal} \oplus (+\infty, +\infty, +\infty)^{\intercal} \\
&\quad = 1 \odot (0, +\infty, +\infty)^{\intercal} \oplus 3 \odot (+\infty, 0, +\infty)^{\intercal} \oplus +\infty \odot (+\infty, +\infty, 0)^{\intercal}.
\end{aligned}
$$

Tal equação nada tem de particular. Destacamos que todo elemento do espaço n-dimensional *min-plus* possui reescritura dada por

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= (v_1, \ldots, v_n)^{\intercal} \\
&= (\min\{v_1, +\infty\}, \ldots, \min\{v_n, +\infty\})^{\intercal} \\
&= (v_1, +\infty, \ldots, +\infty)^{\intercal} \oplus \ldots \oplus (+\infty, +\infty, \ldots, v_n)^{\intercal} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot (+\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)^{\intercal}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Ademais, frisamos a seguinte decomposição

$$
\begin{aligned}
&(1, 3, +\infty)^\intercal = \\
&\quad = (\min\{1, +\infty\}, \min\{3, +\infty\}, \min\{+\infty, +\infty\})^\intercal \\
&\quad = (1, +\infty, +\infty)^\intercal \oplus (+\infty, 3, +\infty)^\intercal \oplus (+\infty, +\infty, +\infty)^\intercal \\
&\quad = 1 \odot (0, +\infty, +\infty)^\intercal \oplus 3 \odot (+\infty, 0, +\infty)^\intercal \oplus +\infty \odot (+\infty, +\infty, 0)^\intercal.
\end{aligned}
$$

Tal equação nada tem de particular. Destacamos que todo elemento do espaço n-dimensional *min-plus* possui reescritura dada por

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= (v_1, \ldots, v_n)^\intercal \\
&= (\min\{v_1, +\infty\}, \ldots, \min\{v_n, +\infty\})^\intercal \\
&= (v_1, +\infty, \ldots, +\infty)^\intercal \oplus \ldots \oplus (+\infty, +\infty, \ldots, v_n)^\intercal \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot (+\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)^\intercal.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Ademais, frisamos a seguinte decomposição

$$
\begin{aligned}
&(1, 3, +\infty)^\intercal = \\
&\quad = (\min\{1, +\infty\}, \min\{3, +\infty\}, \min\{+\infty, +\infty\})^\intercal \\
&\quad = (1, +\infty, +\infty)^\intercal \oplus (+\infty, 3, +\infty)^\intercal \oplus (+\infty, +\infty, +\infty)^\intercal \\
&\quad = 1 \odot (0, +\infty, +\infty)^\intercal \oplus 3 \odot (+\infty, 0, +\infty)^\intercal \oplus +\infty \odot (+\infty, +\infty, 0)^\intercal .
\end{aligned}
$$

Tal equação nada tem de particular. Destacamos que todo elemento do espaço n-dimensional *min-plus* possui reescritura dada por

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= (v_1, \ldots, v_n)^\intercal \\
&= (\min\{v_1, +\infty\}, \ldots, \min\{v_n, +\infty\})^\intercal \\
&= (v_1, +\infty, \ldots, +\infty)^\intercal \oplus \ldots \oplus (+\infty, +\infty, \ldots, v_n)^\intercal \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot (+\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)^\intercal .
\end{aligned}
$$

Exemplo

Ademais, frisamos a seguinte decomposição

$$\begin{aligned}
&(1, 3, +\infty)^\intercal = \\
&\quad = (\min\{1, +\infty\}, \min\{3, +\infty\}, \min\{+\infty, +\infty\})^\intercal \\
&\quad = (1, +\infty, +\infty)^\intercal \oplus (+\infty, 3, +\infty)^\intercal \oplus (+\infty, +\infty, +\infty)^\intercal \\
&\quad = 1 \odot (0, +\infty, +\infty)^\intercal \oplus 3 \odot (+\infty, 0, +\infty)^\intercal \oplus +\infty \odot (+\infty, +\infty, 0)^\intercal .
\end{aligned}$$

Tal equação nada tem de particular. Destacamos que todo elemento do espaço n-dimensional *min-plus* possui reescritura dada por

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= (v_1, \ldots, v_n)^\intercal \\
&= (\min\{v_1, +\infty\}, \ldots, \min\{v_n, +\infty\})^\intercal \\
&= (v_1, +\infty, \ldots, +\infty)^\intercal \oplus \ldots \oplus (+\infty, +\infty, \ldots, v_n)^\intercal \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot (+\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)^\intercal .
\end{aligned}$$

Exemplo

Ademais, frisamos a seguinte decomposição

$$
\begin{aligned}
&(1, 3, +\infty)^\intercal = \\
&\quad = (\min\{1, +\infty\}, \min\{3, +\infty\}, \min\{+\infty, +\infty\})^\intercal \\
&\quad = (1, +\infty, +\infty)^\intercal \oplus (+\infty, 3, +\infty)^\intercal \oplus (+\infty, +\infty, +\infty)^\intercal \\
&\quad = 1 \odot (0, +\infty, +\infty)^\intercal \oplus 3 \odot (+\infty, 0, +\infty)^\intercal \oplus +\infty \odot (+\infty, +\infty, 0)^\intercal.
\end{aligned}
$$

Tal equação nada tem de particular. Destacamos que todo elemento do espaço n-dimensional *min-plus* possui reescritura dada por

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= (v_1, \ldots, v_n)^\intercal \\
&= (\min\{v_1, +\infty\}, \ldots, \min\{v_n, +\infty\})^\intercal \\
&= (v_1, +\infty, \ldots, +\infty)^\intercal \oplus \ldots \oplus (+\infty, +\infty, \ldots, v_n)^\intercal \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot (+\infty, \ldots, 0, \ldots, +\infty)^\intercal.
\end{aligned}
$$

Isto motiva a introdução da seguinte base canônica

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (0, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^{\mathsf{T}}, \\
\vec{e}_2 &= (+\infty, 0, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^{\mathsf{T}}, \\
\vec{e}_3 &= (+\infty, +\infty, 0, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^{\mathsf{T}}, \\
\vec{e}_4 &= (+\infty, +\infty, +\infty, 0, \ldots, +\infty, +\infty)^{\mathsf{T}}, \\
&\vdots \\
\vec{e}_{n-1} &= (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, 0, +\infty,)^{\mathsf{T}}, \\
\vec{e}_n &= (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, 0)^{\mathsf{T}}.
\end{aligned}$$

Isto motiva a introdução da seguinte base canônica

$$\vec{e}_1 = (0, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\vec{e}_2 = (+\infty, 0, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\vec{e}_3 = (+\infty, +\infty, 0, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\vec{e}_4 = (+\infty, +\infty, +\infty, 0, \ldots, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\vdots$$

$$\vec{e}_{n-1} = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, 0, +\infty,)^\intercal,$$

$$\vec{e}_n = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, 0)^\intercal.$$

Isto motiva a introdução da seguinte base canônica

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (0, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^{\intercal},\\
\vec{e}_2 &= (+\infty, 0, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^{\intercal},\\
\vec{e}_3 &= (+\infty, +\infty, 0, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^{\intercal},\\
\vec{e}_4 &= (+\infty, +\infty, +\infty, 0, \ldots, +\infty, +\infty)^{\intercal},\\
&\vdots\\
\vec{e}_{n-1} &= (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, 0, +\infty,)^{\intercal},\\
\vec{e}_n &= (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, 0)^{\intercal}.
\end{aligned}
$$

Isto motiva a introdução da seguinte base canônica

$$\vec{e}_1 = (0, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\vec{e}_2 = (+\infty, 0, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\vec{e}_3 = (+\infty, +\infty, 0, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\vec{e}_4 = (+\infty, +\infty, +\infty, 0, \ldots, +\infty, +\infty)^\intercal,$$

$$\vdots$$

$$\vec{e}_{n-1} = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, 0, +\infty,)^\intercal,$$

$$\vec{e}_n = (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, 0)^\intercal.$$

Isto motiva a introdução da seguinte base canônica

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (0, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^{\intercal}, \\
\vec{e}_2 &= (+\infty, 0, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^{\intercal}, \\
\vec{e}_3 &= (+\infty, +\infty, 0, +\infty, \ldots, +\infty, +\infty)^{\intercal}, \\
\vec{e}_4 &= (+\infty, +\infty, +\infty, 0, \ldots, +\infty, +\infty)^{\intercal}, \\
&\vdots \\
\vec{e}_{n-1} &= (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, 0, +\infty,)^{\intercal}, \\
\vec{e}_n &= (+\infty, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty, 0)^{\intercal}.
\end{aligned}
$$

Transformações lineares

Procurando por outros atributos que igualmente aproximem a estrutura

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$$

da noção de espaço vetorial, passaremos a examinar as transformações lineares no espaço n-dimensional *min-plus*.

Definição

Dizemos que

$$T : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$$

é uma aplicação linear se satisfaz

$$T(a \odot \vec{v}) = a \odot T(\vec{v}) \quad \text{e} \quad T(\vec{v} \oplus \vec{w}) = T(\vec{v}) \oplus T(\vec{w}),$$

para todo $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$.

Transformações lineares

Procurando por outros atributos que igualmente aproximem a estrutura

$$((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n, \odot, \oplus)$$

da noção de espaço vetorial, passaremos a examinar as transformações lineares no espaço n-dimensional *min-plus*.

Definição

Dizemos que

$$T : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$$

é uma aplicação linear se satisfaz

$$T(a \odot \vec{v}) = a \odot T(\vec{v}) \quad \text{e} \quad T(\vec{v} \oplus \vec{w}) = T(\vec{v}) \oplus T(\vec{w}),$$

para todo $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$.

Exemplo

Para a matriz com entradas em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ +\infty & 16 & +\infty \end{bmatrix},$$

considere a aplicação $T_S : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ definida por

$$T_S \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3) \\ v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3 \\ 16 \otimes v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min\{v_2 - 3, 4 + v_3\} \\ \min\{v_1, v_2 - 6, v_3\} \\ 16 + v_2 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que T_S é uma transformação linear. Com efeito, denotando $a \otimes \vec{v} = (a \otimes v_1, a \otimes v_2, a \otimes v_3)^T$, obtemos

$$T_S(a \otimes \vec{v}) =$$

Exemplo

Para a matriz com entradas em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ +\infty & 16 & +\infty \end{bmatrix},$$

considere a aplicação $T_S : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ definida por

$$T_S \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3) \\ v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3 \\ 16 \otimes v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min\{v_2 - 3, 4 + v_3\} \\ \min\{v_1, v_2 - 6, v_3\} \\ 16 + v_2 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que T_S é uma transformação linear. Com efeito, denotando $a \odot \vec{v} = (a \otimes v_1, a \otimes v_2, a \otimes v_3)^T$, obtemos

$$T_S(a \odot \vec{v}) = \begin{pmatrix} a \otimes [(-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3)] \\ a \otimes [v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3] \\ a \otimes (16 \otimes v_2) \end{pmatrix}$$

Exemplo

Para a matriz com entradas em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ +\infty & 16 & +\infty \end{bmatrix},$$

considere a aplicação $T_S : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ definida por

$$T_S \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3) \\ v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3 \\ 16 \otimes v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min\{v_2 - 3, 4 + v_3\} \\ \min\{v_1, v_2 - 6, v_3\} \\ 16 + v_2 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que T_S é uma transformação linear. Com efeito, denotando $a \odot \vec{v} = (a \otimes v_1, a \otimes v_2, a \otimes v_3)^T$, obtemos

Exemplo

Para a matriz com entradas em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ +\infty & 16 & +\infty \end{bmatrix},$$

considere a aplicação $T_S : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ definida por

$$T_S \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3) \\ v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3 \\ 16 \otimes v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min\{v_2 - 3, 4 + v_3\} \\ \min\{v_1, v_2 - 6, v_3\} \\ 16 + v_2 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que T_S é uma transformação linear. Com efeito, denotando $a \odot \vec{v} = (a \otimes v_1, a \otimes v_2, a \otimes v_3)^\intercal$, obtemos

$$T_S(a \odot \vec{v}) = \begin{pmatrix} a \otimes [(-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3)] \\ a \otimes [v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3] \\ a \otimes (16 \otimes v_2) \end{pmatrix} = a \odot T_S(\vec{v}).$$

Exemplo

Para a matriz com entradas em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ +\infty & 16 & +\infty \end{bmatrix},$$

considere a aplicação $T_S : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ definida por

$$T_S \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3) \\ v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3 \\ 16 \otimes v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min\{v_2 - 3, 4 + v_3\} \\ \min\{v_1, v_2 - 6, v_3\} \\ 16 + v_2 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que T_S é uma transformação linear. Com efeito, denotando $a \odot \vec{v} = (a \otimes v_1, a \otimes v_2, a \otimes v_3)^\intercal$, obtemos

$$T_S(a \odot \vec{v}) = \begin{pmatrix} a \otimes [(-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3)] \\ a \otimes [v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3] \\ a \otimes (16 \otimes v_2) \end{pmatrix} = a \odot T_S(\vec{v}).$$

Exemplo

Para a matriz com entradas em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ +\infty & 16 & +\infty \end{bmatrix},$$

considere a aplicação $T_S : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ definida por

$$T_S \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3) \\ v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3 \\ 16 \otimes v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min\{v_2 - 3, 4 + v_3\} \\ \min\{v_1, v_2 - 6, v_3\} \\ 16 + v_2 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que T_S é uma transformação linear. Com efeito, denotando $a \odot \vec{v} = (a \otimes v_1, a \otimes v_2, a \otimes v_3)^\intercal$, obtemos

$$T_S(a \odot \vec{v}) = \begin{pmatrix} a \otimes [(-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3)] \\ a \otimes [v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3] \\ a \otimes (16 \otimes v_2) \end{pmatrix} = a \odot T_S(\vec{v}),$$

Exemplo

Para a matriz com entradas em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$S = \begin{bmatrix} +\infty & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ +\infty & 16 & +\infty \end{bmatrix},$$

considere a aplicação $T_S : (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ definida por

$$T_S \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3) \\ v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3 \\ 16 \otimes v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min\{v_2 - 3, 4 + v_3\} \\ \min\{v_1, v_2 - 6, v_3\} \\ 16 + v_2 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que T_S é uma transformação linear. Com efeito, denotando $a \odot \vec{v} = (a \otimes v_1, a \otimes v_2, a \otimes v_3)^\intercal$, obtemos

$$T_S(a \odot \vec{v}) = \begin{pmatrix} a \otimes [(-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3)] \\ a \otimes [v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3] \\ a \otimes (16 \otimes v_2) \end{pmatrix} = a \odot T_S(\vec{v}),$$

Exemplo

enquanto para $\vec{v} \oplus \vec{w} = (v_1 \oplus w_1, v_2 \oplus w_2, v_3 \oplus w_3)^\intercal$, temos

$$\begin{aligned}
T_S(\vec{v} \oplus \vec{w}) &= \begin{pmatrix} [-3 \otimes (v_2 \oplus w_2)] \oplus [4 \otimes (v_3 \oplus w_3)] \\ (v_1 \oplus w_1) \oplus [-6 \otimes (v_2 \oplus w_2)] \oplus (v_3 \oplus w_3) \\ 16 \otimes (v_2 \oplus w_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [(-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3)] \oplus [(-3 \otimes w_2) \oplus (4 \otimes w_3)] \\ [v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3] \oplus [w_1 \oplus (-6 \otimes w_2) \oplus w_3] \\ (16 \otimes v_2) \oplus (16 \otimes w_2) \end{pmatrix} \\
&= T_S(\vec{v}) \oplus T_S(\vec{w}).
\end{aligned}$$

Mais geralmente, para qualquer matriz $n \times n$, $S = (\zeta_{ij})$, com entradas no conjunto real *min-plus* $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$, introduzimos o operador

$$T_S(\vec{v}) := \bigoplus_{j=1}^{n} v_j \odot (\zeta_{1j}, \zeta_{2j}, \ldots, \zeta_{nj})^\intercal$$

o qual é linear.

Exemplo

enquanto para $\vec{v} \oplus \vec{w} = (v_1 \oplus w_1, v_2 \oplus w_2, v_3 \oplus w_3)^\intercal$, temos

$$\begin{aligned} T_S(\vec{v} \oplus \vec{w}) &= \begin{pmatrix} [-3 \otimes (v_2 \oplus w_2)] \oplus [4 \otimes (v_3 \oplus w_3)] \\ (v_1 \oplus w_1) \oplus [-6 \otimes (v_2 \oplus w_2)] \oplus (v_3 \oplus w_3) \\ 16 \otimes (v_2 \oplus w_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [(-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3)] \oplus [(-3 \otimes w_2) \oplus (4 \otimes w_3)] \\ [v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3] \oplus [w_1 \oplus (-6 \otimes w_2) \oplus w_3] \\ (16 \otimes v_2) \oplus (16 \otimes w_2) \end{pmatrix} \\ &= T_S(\vec{v}) \oplus T_S(\vec{w}). \end{aligned}$$

Mais geralmente, para qualquer matriz $n \times n$, $S = (\zeta_{ij})$, com entradas no conjunto real *min-plus* $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$, introduzimos o operador

$$T_S(\vec{v}) := \bigoplus_{j=1}^{n} v_j \odot (\zeta_{1j}, \zeta_{2j}, \ldots, \zeta_{nj})^\intercal$$

o qual é linear.

Exemplo

enquanto para $\vec{v} \oplus \vec{w} = (v_1 \oplus w_1, v_2 \oplus w_2, v_3 \oplus w_3)^\intercal$, temos

$$\begin{aligned} T_S(\vec{v} \oplus \vec{w}) &= \begin{pmatrix} [-3 \otimes (v_2 \oplus w_2)] \oplus [4 \otimes (v_3 \oplus w_3)] \\ (v_1 \oplus w_1) \oplus [-6 \otimes (v_2 \oplus w_2)] \oplus (v_3 \oplus w_3) \\ 16 \otimes (v_2 \oplus w_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [(-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3)] \oplus [(-3 \otimes w_2) \oplus (4 \otimes w_3)] \\ [v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3] \oplus [w_1 \oplus (-6 \otimes w_2) \oplus w_3] \\ (16 \otimes v_2) \oplus (16 \otimes w_2) \end{pmatrix} \\ &= T_S(\vec{v}) \oplus T_S(\vec{w}). \end{aligned}$$

Mais geralmente, para qualquer matriz $n \times n$, $S = (\zeta_{ij})$, com entradas no conjunto real *min-plus* $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$, introduzimos o operador

$$T_S(\vec{v}) := \bigoplus_{j=1}^{n} v_j \odot (\zeta_{1j}, \zeta_{2j}, \ldots, \zeta_{nj})^\intercal$$

o qual é linear.

Exemplo

enquanto para $\vec{v} \oplus \vec{w} = (v_1 \oplus w_1, v_2 \oplus w_2, v_3 \oplus w_3)^\intercal$, temos

$$\begin{aligned}
T_S(\vec{v} \oplus \vec{w}) &= \begin{pmatrix} [-3 \otimes (v_2 \oplus w_2)] \oplus [4 \otimes (v_3 \oplus w_3)] \\ (v_1 \oplus w_1) \oplus [-6 \otimes (v_2 \oplus w_2)] \oplus (v_3 \oplus w_3) \\ 16 \otimes (v_2 \oplus w_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [(-3 \otimes v_2) \oplus (4 \otimes v_3)] \oplus [(-3 \otimes w_2) \oplus (4 \otimes w_3)] \\ [v_1 \oplus (-6 \otimes v_2) \oplus v_3] \oplus [w_1 \oplus (-6 \otimes w_2) \oplus w_3] \\ (16 \otimes v_2) \oplus (16 \otimes w_2) \end{pmatrix} \\
&= T_S(\vec{v}) \oplus T_S(\vec{w}).
\end{aligned}$$

Mais geralmente, para qualquer matriz $n \times n$, $S = (\zeta_{ij})$, com entradas no conjunto real *min-plus* $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$, introduzimos o operador

$$T_S(\vec{v}) := \bigoplus_{j=1}^{n} v_j \odot (\zeta_{1j}, \zeta_{2j}, \ldots, \zeta_{nj})^\intercal$$

o qual é linear.

Utilizando reescritura dos vetores de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ com relação à base canônica $\{\vec{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$, segue de imediato que

$$T(\vec{v}) = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot T(\vec{e}_i),$$

para qualquer $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$. Tal relação, por sua vez, justifica a seguinte representação matricial

$$S_T := \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \ldots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix},$$

onde o vetor $T(\vec{e}_i)$ é visto como a i-ésima coluna para a matriz S_T.

$$T(\vec{v}) = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot T(\vec{e}_i) = T_{S_T}(\vec{v}).$$

Utilizando reescritura dos vetores de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ com relação à base canônica $\{\vec{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$, segue de imediato que

$$T(\vec{v}) = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot T(\vec{e}_i),$$

para qualquer $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$. Tal relação, por sua vez, justifica a seguinte representação matricial

$$S_T := \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \ldots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix},$$

onde o vetor $T(\vec{e}_i)$ é visto como a i-ésima coluna para a matriz S_T.

Assim, de maneira recíproca à associação entre matrizes S e transformações lineares T_S, temos

$$T(\vec{v}) = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot T(\vec{e}_i) = T_{S_T}(\vec{v}).$$

Utilizando reescritura dos vetores de $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$ com relação à base canônica $\{\vec{e}_i\}_{1 \leq i \leq n}$, segue de imediato que

$$T(\vec{v}) = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot T(\vec{e}_i),$$

para qualquer $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^n$. Tal relação, por sua vez, justifica a seguinte representação matricial

$$S_T := \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \ldots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix},$$

onde o vetor $T(\vec{e}_i)$ é visto como a i-ésima coluna para a matriz S_T. Assim, de maneira recíproca à associação entre matrizes S e transformações lineares T_S, temos

$$T(\vec{v}) = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot T(\vec{e}_i) = T_{S_T}(\vec{v}).$$

Sumário

Álgebra matricial *min-plus*

Concluímos que as matrizes e as transformações lineares também são conceito equivalentes sob o ponto de vista *min-plus*, isto é,

$$\mathscr{L}\big((\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^n,(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^n\big) = (\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^{n\times n}.$$

Isto nos conduz de modo natural à seguinte estrutura algébrica.

Definição

O conjunto $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^{n\times n}$ formará a álgebra das transformações lineares *min-plus* ou álgebra matricial *min-plus*, quando estiver munido das três operações a seguir:

- um produto por escalar em $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\},\oplus,\otimes)$ dado por

$$a\odot S := \big(a\otimes S(i,j)\big)_{1\leq i,j\leq n} = \big(a+S(i,j)\big)_{1\leq i,j\leq n}$$

  para todo $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ e qualquer $S\in(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^{n\times n}$;

Álgebra matricial *min-plus*

Concluímos que as matrizes e as transformações lineares também são conceito equivalentes sob o ponto de vista *min-plus*, isto é,

$$\mathscr{L}\big((\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^n, (\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^n\big) = (\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^{n\times n}.$$

Isto nos conduz de modo natural à seguinte estrutura algébrica.

Definição

O conjunto $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^{n\times n}$ formará a álgebra das transformações lineares *min-plus* ou álgebra matricial *min-plus*, quando estiver munido das três operações a seguir:

- um produto por escalar em $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ dado por

$$a \odot S := \big(a \otimes S(i,j)\big)_{1\leq i,j\leq n} = \big(a + S(i,j)\big)_{1\leq i,j\leq n}$$

  para todo $a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ e qualquer $S \in (\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^{n\times n}$;

Álgebra matricial *min-plus*

Concluímos que as matrizes e as transformações lineares também são conceito equivalentes sob o ponto de vista *min-plus*, isto é,

$$\mathscr{L}\big((\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^n,(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^n\big) = (\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^{n\times n}.$$

Isto nos conduz de modo natural à seguinte estrutura algébrica.

Definição

O conjunto $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^{n\times n}$ formará a álgebra das transformações lineares *min-plus* ou álgebra matricial *min-plus*, quando estiver munido das três operações a seguir:

- um produto por escalar em $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\},\oplus,\otimes)$ dado por

$$a\odot S := \big(a\otimes S(i,j)\big)_{1\leq i,j\leq n} = \big(a+S(i,j)\big)_{1\leq i,j\leq n}$$

  para todo $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ e qualquer $S\in(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})^{n\times n}$;

Definição

- uma adição comutativa entre elementos definida por

$$\begin{aligned} S \oplus R &:= (S(i,j) \oplus R(i,j))_{1 \le i,j \le n} \\ &= \big(\min\{S(i,j), R(i,j)\}\big)_{1 \le i,j \le n} \end{aligned}$$

  para quaisquer $S, R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$;

- um produto matricial não comutativo dado por

$$\begin{aligned} S \otimes R &:= \Big(\bigoplus_{k=1}^{n} S(i,k) \otimes R(k,j)\Big)_{1 \le i,j \le n} \\ &= \big(\min_{1 \le k \le n} \{S(i,k) + R(k,j)\}\big)_{1 \le i,j \le n} \end{aligned}$$

  para quaisquer $S, R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$;

Denotaremos por $\big((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}, \odot, \oplus, \otimes\big)$.

Definição

- uma adição comutativa entre elementos definida por

$$\begin{aligned} S \oplus R &:= \big(S(i,j) \oplus R(i,j)\big)_{1\le i,j\le n} \\ &= \Big(\min\{S(i,j), R(i,j)\}\Big)_{1\le i,j\le n} \end{aligned}$$

  para quaisquer $S, R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$;

- um produto matricial não comutativo dado por

$$\begin{aligned} S \otimes R &:= \Big(\bigoplus_{k=1}^{n} S(i,k) \otimes R(k,j)\Big)_{1\le i,j\le n} \\ &= \Big(\min_{1\le k\le n}\{S(i,k) + R(k,j)\}\Big)_{1\le i,j\le n} \end{aligned}$$

  para quaisquer $S, R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$;

Denotaremos por $\big((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}, \odot, \oplus, \otimes\big)$.

Definição

- uma adição comutativa entre elementos definida por

$$\begin{aligned} S \oplus R &:= \big(S(i,j) \oplus R(i,j)\big)_{1\le i,j\le n} \\ &= \Big(\min\{S(i,j), R(i,j)\}\Big)_{1\le i,j\le n} \end{aligned}$$

  para quaisquer $S, R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$;

- um produto matricial não comutativo dado por

$$\begin{aligned} S \otimes R &:= \Big(\bigoplus_{k=1}^{n} S(i,k) \otimes R(k,j)\Big)_{1\le i,j\le n} \\ &= \Big(\min_{1\le k\le n}\{S(i,k) + R(k,j)\}\Big)_{1\le i,j\le n} \end{aligned}$$

  para quaisquer $S, R \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$;

Denotaremos por $\big((\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}, \odot, \oplus, \otimes\big)$.

Como no caso vetorial, a ordem lexicográfica em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ obedece

$$S \oplus R = S \qquad \Rightarrow \qquad S \leq R.$$

Exemplo

Abaixo visualizamos as operações da álgebra *min-plus* em notação matricial:

- $a \odot \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \cdots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \zeta_{11} & \cdots & a + \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a + \zeta_{n1} & \cdots & a + \zeta_{nn} \end{bmatrix};$

- $\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \cdots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \eta_{11} & \cdots & \eta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \cdots & \eta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min\{\zeta_{11}, \eta_{11}\} & \cdots & \min\{\zeta_{1n}, \eta_{1n}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\{\zeta_{n1}, \eta_{n1}\} & \cdots & \min\{\zeta_{nn}, \eta_{nn}\} \end{bmatrix}.$

Como no caso vetorial, a ordem lexicográfica em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ obedece

$$S \oplus R = S \qquad \Rightarrow \qquad S \leq R.$$

Exemplo

Abaixo visualizamos as operações da álgebra *min-plus* em notação matricial:

- $a \odot \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \cdots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \zeta_{11} & \cdots & a + \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a + \zeta_{n1} & \cdots & a + \zeta_{nn} \end{bmatrix};$
- $\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \cdots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \eta_{11} & \cdots & \eta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \cdots & \eta_{nn} \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \min\{\zeta_{11}, \eta_{11}\} & \cdots & \min\{\zeta_{1n}, \eta_{1n}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\{\zeta_{n1}, \eta_{n1}\} & \cdots & \min\{\zeta_{nn}, \eta_{nn}\} \end{bmatrix}.$$

Como no caso vetorial, a ordem lexicográfica em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ obedece

$$S \oplus R = S \qquad \Rightarrow \qquad S \leq R.$$

Exemplo

Abaixo visualizamos as operações da álgebra *min-plus* em notação matricial:

- $$a \odot \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \dots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \dots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \zeta_{11} & \dots & a + \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a + \zeta_{n1} & \dots & a + \zeta_{nn} \end{bmatrix};$$

- $$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \dots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \dots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \eta_{11} & \dots & \eta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \dots & \eta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \min\{\zeta_{11}, \eta_{11}\} & \dots & \min\{\zeta_{1n}, \eta_{1n}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\{\zeta_{n1}, \eta_{n1}\} & \dots & \min\{\zeta_{nn}, \eta_{nn}\} \end{bmatrix};$$

Como no caso vetorial, a ordem lexicográfica em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$ obedece

$$S \oplus R = S \qquad \Rightarrow \qquad S \leq R.$$

Exemplo

Abaixo visualizamos as operações da álgebra *min-plus* em notação matricial:

- $$a \odot \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \dots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \dots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \zeta_{11} & \dots & a + \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a + \zeta_{n1} & \dots & a + \zeta_{nn} \end{bmatrix};$$
- $$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \dots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \dots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \eta_{11} & \dots & \eta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \dots & \eta_{nn} \end{bmatrix} =$$
  $$= \begin{bmatrix} \min\{\zeta_{11}, \eta_{11}\} & \dots & \min\{\zeta_{1n}, \eta_{1n}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\{\zeta_{n1}, \eta_{n1}\} & \dots & \min\{\zeta_{nn}, \eta_{nn}\} \end{bmatrix};$$

Como no caso vetorial, a ordem lexicográfica em $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$ obedece

$$S \oplus R = S \qquad \Rightarrow \qquad S \leq R.$$

Exemplo

Abaixo visualizamos as operações da álgebra *min-plus* em notação matricial:

- $$a \odot \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \dots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \dots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+\zeta_{11} & \dots & a+\zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a+\zeta_{n1} & \dots & a+\zeta_{nn} \end{bmatrix};$$

- $$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \dots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \dots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \eta_{11} & \dots & \eta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \dots & \eta_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \min\{\zeta_{11}, \eta_{11}\} & \dots & \min\{\zeta_{1n}, \eta_{1n}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\{\zeta_{n1}, \eta_{n1}\} & \dots & \min\{\zeta_{nn}, \eta_{nn}\} \end{bmatrix};$$

Exemplo

- $$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \cdots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \eta_{11} & \cdots & \eta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \cdots & \eta_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \min\limits_{1 \le k \le n} \{\zeta_{1k} + \eta_{k1}\} & \cdots & \min\limits_{1 \le k \le n} \{\zeta_{1k} + \eta_{kn}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\limits_{1 \le k \le n} \{\zeta_{nk} + \eta_{k1}\} & \cdots & \min\limits_{1 \le k \le n} \{\zeta_{nk} + \eta_{kn}\} \end{bmatrix}.$$

Abaixo introduzimos a matriz nula (elemento neutro para $\oplus$) e a matriz identidade (elemento neutro para $\otimes$),

$$O := \begin{bmatrix} +\infty & \cdots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \cdots & +\infty \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I := \begin{bmatrix} 0 & +\infty & \cdots & +\infty \\ +\infty & 0 & \cdots & +\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & +\infty & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- $$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \cdots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \eta_{11} & \cdots & \eta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \cdots & \eta_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \min\limits_{1\le k\le n} \{\zeta_{1k} + \eta_{k1}\} & \cdots & \min\limits_{1\le k\le n} \{\zeta_{1k} + \eta_{kn}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\limits_{1\le k\le n} \{\zeta_{nk} + \eta_{k1}\} & \cdots & \min\limits_{1\le k\le n} \{\zeta_{nk} + \eta_{kn}\} \end{bmatrix}.$$

Abaixo introduzimos a matriz nula (elemento neutro para $\oplus$) e a matriz identidade (elemento neutro para $\otimes$),

$$O := \begin{bmatrix} +\infty & \cdots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \cdots & +\infty \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I := \begin{bmatrix} 0 & +\infty & \cdots & +\infty \\ +\infty & 0 & \cdots & +\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & +\infty & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- $$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \dots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \dots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \eta_{11} & \dots & \eta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \dots & \eta_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \min\limits_{1\le k\le n} \{\zeta_{1k} + \eta_{k1}\} & \dots & \min\limits_{1\le k\le n} \{\zeta_{1k} + \eta_{kn}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\limits_{1\le k\le n} \{\zeta_{nk} + \eta_{k1}\} & \dots & \min\limits_{1\le k\le n} \{\zeta_{nk} + \eta_{kn}\} \end{bmatrix}.$$

Abaixo introduzimos a matriz nula (elemento neutro para $\oplus$) e a matriz identidade (elemento neutro para $\otimes$),

$$O := \begin{bmatrix} +\infty & \dots & +\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & \dots & +\infty \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I := \begin{bmatrix} 0 & +\infty & \dots & +\infty \\ +\infty & 0 & \dots & +\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ +\infty & +\infty & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos identificar

$$\text{matriz } S = (\zeta_{ij}) \qquad \longleftrightarrow \qquad \text{aplicação linear } T_S$$

e assim apresentar o produto de uma matriz com um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^{\mathsf{T}}$ simplesmente colocando

$$S \otimes \vec{v} := T_S(\vec{v}) = \bigoplus_{j=1}^{n} v_j \odot (\zeta_{1j}, \zeta_{2j}, \ldots, \zeta_{nj})^{\mathsf{T}},$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \cdots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min\limits_{1 \le k \le n} \{\zeta_{1k} + v_k\} \\ \vdots \\ \min\limits_{1 \le k \le n} \{\zeta_{nk} + v_k\} \end{pmatrix}.$$

Podemos identificar

$$\text{matriz } S = (\zeta_{ij}) \qquad \longleftrightarrow \qquad \text{aplicação linear } T_S$$

e assim apresentar o produto de uma matriz com um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\mathsf{T}$ simplesmente colocando

$$S \otimes \vec{v} := T_S(\vec{v}) = \bigoplus_{j=1}^{n} v_j \odot (\zeta_{1j}, \zeta_{2j}, \ldots, \zeta_{nj})^\mathsf{T},$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \cdots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min\limits_{1\le k\le n} \{\zeta_{1k} + v_k\} \\ \vdots \\ \min\limits_{1\le k\le n} \{\zeta_{nk} + v_k\} \end{pmatrix}.$$

Podemos identificar

$$\text{matriz } S = (\zeta_{ij}) \quad \longleftrightarrow \quad \text{aplicação linear } T_S$$

e assim apresentar o produto de uma matriz com um vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\mathsf{T}$ simplesmente colocando

$$S \otimes \vec{v} := T_S(\vec{v}) = \bigoplus_{j=1}^{n} v_j \odot (\zeta_{1j}, \zeta_{2j}, \ldots, \zeta_{nj})^\mathsf{T},$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \cdots & \zeta_{nn} \end{bmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min\limits_{1 \le k \le n} \{\zeta_{1k} + v_k\} \\ \vdots \\ \min\limits_{1 \le k \le n} \{\zeta_{nk} + v_k\} \end{pmatrix}.$$

Notação

A matriz $S^{k^{\otimes}}$ denotará o produto matricial *min-plus* da matriz S por si mesma k vezes, ou seja,

$$S^{k^{\otimes}} = \overbrace{S \otimes S \otimes \cdots \otimes S \otimes S}^{k}.$$

Observe que, para toda entrada (i, j),

$$\begin{aligned} S^{k^{\otimes}}(i,j) &= \bigoplus_{i_1=1}^{n} \bigoplus_{i_2=1}^{n} \cdots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^{n} \left[S(i, i_1) \otimes S(i_1, i_2) \otimes \ldots \otimes S(i_{k-1}, j) \right] \\ &= \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \; : \; \begin{matrix} 1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i \quad \text{e} \quad i_k = j \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Convenciona-se ainda que $S^{0^{\otimes}} = I$.

Notação

A matriz $S^{k^{\otimes}}$ denotará o produto matricial *min-plus* da matriz S por si mesma k vezes, ou seja,

$$S^{k^{\otimes}} = \overbrace{S \otimes S \otimes \cdots \otimes S \otimes S}^{k}.$$

Observe que, para toda entrada (i,j),

$$S^{k^{\otimes}}(i,j) = \bigoplus_{i_1=1}^{n} \bigoplus_{i_2=1}^{n} \cdots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^{n} \left[S(i,i_1) \otimes S(i_1,i_2) \otimes \ldots \otimes S(i_{k-1},j) \right]$$

$$= \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n, \\ i_0 = i \quad \text{e} \quad i_k = j \end{array} \right\}.$$

Convenciona-se ainda que $S^{0^{\otimes}} = I$.

Notação

A matriz $S^{k^{\otimes}}$ denotará o produto matricial *min-plus* da matriz S por si mesma k vezes, ou seja,

$$S^{k^{\otimes}} = \overbrace{S \otimes S \otimes \cdots \otimes S \otimes S}^{k}.$$

Observe que, para toda entrada (i, j),

$$\begin{aligned} S^{k^{\otimes}}(i,j) &= \bigoplus_{i_1=1}^{n} \bigoplus_{i_2=1}^{n} \cdots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^{n} \left[S(i, i_1) \otimes S(i_1, i_2) \otimes \ldots \otimes S(i_{k-1}, j) \right] \\ &= \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \le i_1, \ldots, i_{k-1} \le n, \\ i_0 = i \quad \text{e} \quad i_k = j \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Convenciona-se ainda que $S^{0^{\otimes}} = I$.

Notação

A matriz $S^{k^{\otimes}}$ denotará o produto matricial *min-plus* da matriz S por si mesma k vezes, ou seja,

$$S^{k^{\otimes}} = \overbrace{S \otimes S \otimes \cdots \otimes S \otimes S}^{k}.$$

Observe que, para toda entrada (i, j),

$$\begin{aligned} S^{k^{\otimes}}(i,j) &= \bigoplus_{i_1=1}^{n} \bigoplus_{i_2=1}^{n} \cdots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^{n} \left[S(i,i_1) \otimes S(i_1,i_2) \otimes \ldots \otimes S(i_{k-1},j) \right] \\ &= \min \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} S(i_\ell, i_{\ell+1}) \ : \ \begin{array}{c} 1 \le i_1, \ldots, i_{k-1} \le n, \\ i_0 = i \quad \text{e} \quad i_k = j \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Convenciona-se ainda que $S^{0^{\otimes}} = I$.

Observação

Por fim, destacamos isomorfismos envolvendo a álgebra *min-plus*

$$(\mathbb{R}_+, \max, \cdot) \xleftrightarrow{-\log x} (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +) \xleftrightarrow{-x} (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +),$$

onde a primeira estrutura recebe a denominação de álgebra *max* e a terceira, de álgebra *max-plus*.

- Tais álgebras também gozam das mesmas propriedades discutidas anteriormente, além de admitirem extensões naturais em termos de estruturas vetoriais e matriciais.
- A formalização abstrata sob a qual estão incluídas tais álgebras compreende a teoria dos semianéis, diodos, semimódulos, *etc.*, que tem como propriedade chave a idempotência.

Observação

Por fim, destacamos isomorfismos envolvendo a álgebra *min-plus*

$$(\mathbb{R}_+, \max, \cdot) \xleftrightarrow{-\log x} (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +) \xleftrightarrow{-x} (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +),$$

onde a primeira estrutura recebe a denominação de álgebra *max* e a terceira, de álgebra *max-plus*.

- Tais álgebras também gozam das mesmas propriedades discutidas anteriormente, além de admitirem extensões naturais em termos de estruturas vetoriais e matriciais.
- A formalização abstrata sob a qual estão incluídas tais álgebras compreende a teoria dos semianéis, diodos, semimódulos, *etc.*, que tem como propriedade chave a idempotência.

Observação

Por fim, destacamos isomorfismos envolvendo a álgebra *min-plus*

$$(\mathbb{R}_+, \max, \cdot) \xleftrightarrow{-\log x} (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +) \xleftrightarrow{-x} (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +),$$

onde a primeira estrutura recebe a denominação de álgebra *max* e a terceira, de álgebra *max-plus*.

- Tais álgebras também gozam das mesmas propriedades discutidas anteriormente, além de admitirem extensões naturais em termos de estruturas vetoriais e matriciais.
- A formalização abstrata sob a qual estão incluídas tais álgebras compreende a teoria dos semianéis, diodos, semimódulos, *etc.*, que tem como propriedade chave a idempotência.

Observação

Por fim, destacamos isomorfismos envolvendo a álgebra *min-plus*

$$(\mathbb{R}_+, \max, \cdot) \xleftrightarrow{-\log x} (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +) \xleftrightarrow{-x} (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +),$$

onde a primeira estrutura recebe a denominação de álgebra *max* e a terceira, de álgebra *max-plus*.

- Tais álgebras também gozam das mesmas propriedades discutidas anteriormente, além de admitirem extensões naturais em termos de estruturas vetoriais e matriciais.
- A formalização abstrata sob a qual estão incluídas tais álgebras compreende a teoria dos semianéis, diodos, semimódulos, *etc.*, que tem como propriedade chave a idempotência.

Observação

Por fim, destacamos isomorfismos envolvendo a álgebra *min-plus*

$$(\mathbb{R}_+, \max, \cdot) \overset{-\log x}{\longleftrightarrow} (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +) \overset{-x}{\longleftrightarrow} (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +),$$

onde a primeira estrutura recebe a denominação de álgebra *max* e a terceira, de álgebra *max-plus*.

- Tais álgebras também gozam das mesmas propriedades discutidas anteriormente, além de admitirem extensões naturais em termos de estruturas vetoriais e matriciais.
- A formalização abstrata sob a qual estão incluídas tais álgebras compreende a teoria dos semianéis, diodos, semimódulos, *etc.*, que tem como propriedade chave a idempotência.

Bibliografia

E. Garibaldi e J. T. A. Gomes,
Otimização de Médias sobre Grafos Orientados,
Coleção publicações matemáticas (29 CBM) **12**, IMPA, 2013.

Seções: 5.1 (páginas 83 a 94);

F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder e J. P. Quadrat,
Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems,
Wiley series in probability and mathematical statistics, John Wiley & Sons, 1992.

M. Gondran e M. Minoux,
Graphs, dioïds and semirings: new models and algorithms,
Springer, 2008.

Até este ponto, apresentamos as principais definições relativas à álgebra *min-plus*, as quais nos permitirão tirar proveito de

problema de autovalor e autovetor segundo esta álgebra.

Dada matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$, a equação

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

possui a seguinte reescritura na notação habitual,

$$\begin{cases} \min\{S(1,1)+v_1,\, S(1,2)+v_2,\, \ldots,\, S(1,n)+v_n\} & = \tau + v_1 \\ \min\{S(2,1)+v_1,\, S(2,2)+v_2,\, \ldots,\, S(2,n)+v_n\} & = \tau + v_2 \\ & \vdots \\ \min\{S(n,1)+v_1,\, S(n,2)+v_2,\, \ldots,\, S(n,n)+v_n\} & = \tau + v_n \end{cases},$$

$$\min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i)+c(i,j)] = m(c)+u(j) \qquad \forall j \in V(G).$$

Até este ponto, apresentamos as principais definições relativas à álgebra *min-plus*, as quais nos permitirão tirar proveito de

problema de autovalor e autovetor segundo esta álgebra.

Dada matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n \times n}$, a equação

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

possui a seguinte reescritura na notação habitual,

$$\begin{cases} \min\{S(1,1) + v_1,\ S(1,2) + v_2,\ \ldots,\ S(1,n) + v_n\} & = \tau + v_1 \\ \min\{S(2,1) + v_1,\ S(2,2) + v_2,\ \ldots,\ S(2,n) + v_n\} & = \tau + v_2 \\ & \vdots \\ \min\{S(n,1) + v_1,\ S(n,2) + v_2,\ \ldots,\ S(n,n) + v_n\} & = \tau + v_n \end{cases},$$

Atente para semelhança com a definição de corretor calibrado,

$$\min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i) + c(i,j)] = m(c) + u(j) \qquad \forall j \in V(G).$$

Até este ponto, apresentamos as principais definições relativas à álgebra *min-plus*, as quais nos permitirão tirar proveito de

problema de autovalor e autovetor segundo esta álgebra.

Dada matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$, a equação

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

possui a seguinte reescritura na notação habitual,

$$\begin{cases} \min\{S(1,1)+v_1,\ S(1,2)+v_2,\ \dots,\ S(1,n)+v_n\} & = \tau + v_1 \\ \min\{S(2,1)+v_1,\ S(2,2)+v_2,\ \dots,\ S(2,n)+v_n\} & = \tau + v_2 \\ & \vdots \\ \min\{S(n,1)+v_1,\ S(n,2)+v_2,\ \dots,\ S(n,n)+v_n\} & = \tau + v_n \end{cases},$$

Atente para semelhança com a definição de corretor calibrado,

$$\min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i) + c(i,j)] = m(c) + u(j) \qquad \forall j \in V(G).$$

Até este ponto, apresentamos as principais definições relativas à álgebra *min-plus*, as quais nos permitirão tirar proveito de

problema de autovalor e autovetor segundo esta álgebra.

Dada matriz $S \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^{n\times n}$, a equação

$$S \otimes \vec{v} = \tau \odot \vec{v}$$

possui a seguinte reescritura na notação habitual,

$$\begin{cases} \min\{S(1,1)+v_1,\ S(1,2)+v_2,\ \ldots,\ S(1,n)+v_n\} & = \tau + v_1 \\ \min\{S(2,1)+v_1,\ S(2,2)+v_2,\ \ldots,\ S(2,n)+v_n\} & = \tau + v_2 \\ & \vdots \\ \min\{S(n,1)+v_1,\ S(n,2)+v_2,\ \ldots,\ S(n,n)+v_n\} & = \tau + v_n \end{cases},$$

Atente para semelhança com a definição de corretor calibrado,

$$\min_{i \xrightarrow{G} j}[u(i)+c(i,j)] = m(c)+u(j) \qquad \forall j \in V(G).$$

Sinopse da Aula 07

- Dedicaremos atenção ao problema espectral *min-plus*: determinar autovalor τ_S e caracterizar autovetor $\vec{v}$ em

$$S \otimes \vec{v} = \tau_S \odot \vec{v},$$

onde consideraremos as respectivas operações da álgebra *min-plus*.

- Reduziremos o problema dos pontos de entrega a um problema espectral segundo esta álgebra, associando os principais conceitos.

Sinopse da Aula 07

- Dedicaremos atenção ao problema espectral *min-plus*: determinar autovalor τ_S e caracterizar autovetor $\vec{v}$ em

$$S \otimes \vec{v} = \tau_S \odot \vec{v},$$

  onde consideraremos as respectivas operações da álgebra *min-plus*.
- Reduziremos o problema dos pontos de entrega a um problema espectral segundo esta álgebra, associando os principais conceitos.

Até a próxima aula!