29º Colóquio Brasileiro de Matemática

Rio de Janeiro – Julho, 2013

Otimização de Médias sobre Grafos Orientados

Aula 02 – Otimização de médias

Eduardo Garibaldi João Tiago Assunção Gomes

IMECC, Universidade Estadual de Campinas

Aula 02 – Otimização de médias

Resumo:

- Descreve-se o problema dos pontos de entrega como uma questão de minimização de um custo c sobre os ciclos de um grafo.
- Introduz-se o principal conceito, a constante cíclica minimal $m(c)$.
- Consideramos também o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ e explicamos estratégia para facilitar a identificação deste conjunto.

Monitoria: exercícios 2.1 a 2.8.

Aula 02 – Otimização de médias

Resumo:

- Descreve-se o problema dos pontos de entrega como uma questão de minimização de um custo c sobre os ciclos de um grafo.
- Introduz-se o principal conceito, a constante cíclica minimal $m(c)$.
- Consideramos também o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ e explicamos estratégia para facilitar a identificação deste conjunto.

Monitoria: exercícios 2.1 a 2.8.

Aula 02 – Otimização de médias

Resumo:

- Descreve-se o problema dos pontos de entrega como uma questão de minimização de um custo c sobre os ciclos de um grafo.
- Introduz-se o principal conceito, a constante cíclica minimal $m(c)$.
- Consideramos também o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ e explicamos estratégia para facilitar a identificação deste conjunto.

Monitoria: exercícios 2.1 a 2.8.

Aula 02 – Otimização de médias

Resumo:

- Descreve-se o problema dos pontos de entrega como uma questão de minimização de um custo c sobre os ciclos de um grafo.
- Introduz-se o principal conceito, a constante cíclica minimal $m(c)$.
- Consideramos também o conjunto cíclico minimal $\mathcal{M}(c)$ e explicamos estratégia para facilitar a identificação deste conjunto.

Monitoria: exercícios 2.1 a 2.8.

Sumário

Sumário

Constante cíclica minimal

Seja $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, A)$ um grafo orientado conexo.

Recorde que uma função custo $c : A \to \mathbb{R}$ (associados aos caminhos de comprimento 1 em G) estende-se sobre qualquer caminho P, descrito por $i_0 \xrightarrow{G} i_1 \xrightarrow{G} i_2 \xrightarrow{G} \ldots \xrightarrow{G} i_k$, da seguinte maneira,

$$c(P) := \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_\ell, i_{\ell+1}).$$

Introduzimos então a principal noção deste curso.

Definição

A *constante cíclica minimal* associada a um custo c é dada por

$$m(c) := \inf\{c(P) : P \text{ ciclo em } G\}.$$

Constante cíclica minimal

Seja $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, A)$ um grafo orientado conexo.

Recorde que uma função custo $c : A \to \mathbb{R}$ (associados aos caminhos de comprimento 1 em G) estende-se sobre qualquer caminho P, descrito por $i_0 \stackrel{G}{\to} i_1 \stackrel{G}{\to} i_2 \stackrel{G}{\to} \ldots \stackrel{G}{\to} i_k$, da seguinte maneira,

$$c(P) := \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_\ell, i_{\ell+1}).$$

Introduzimos então a principal noção deste curso.

Definição

A *constante cíclica minimal* associada a um custo c é dada por

$$m(c) := \inf\{c(P) : P \text{ ciclo em } G\}.$$

Constante cíclica minimal

Seja $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, A)$ um grafo orientado conexo.

Recorde que uma função custo $c : A \to \mathbb{R}$ (associados aos caminhos de comprimento 1 em G) estende-se sobre qualquer caminho P, descrito por $i_0 \overset{G}{\to} i_1 \overset{G}{\to} i_2 \overset{G}{\to} \ldots \overset{G}{\to} i_k$, da seguinte maneira,

$$c(P) := \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} c(i_\ell, i_{\ell+1}).$$

Introduzimos então a principal noção deste curso.

Definição

A *constante cíclica minimal* associada a um custo c é dada por

$$m(c) := \inf\{c(P) : P \text{ ciclo em } G\}.$$

Note que, para determinar tal constante, basta levar em conta apenas os ciclos simples.

Proposição

Temos que $m(c) = \min\{c(P) : P \text{ ciclo simples em } G\}$.

Figura: Busca recursiva por ciclo simples que minimiza o custo.

Note que, para determinar tal constante, basta levar em conta apenas os ciclos simples.

Proposição

Temos que $\quad m(c) = \min\{c(P) : P \text{ ciclo simples em } G\}$.

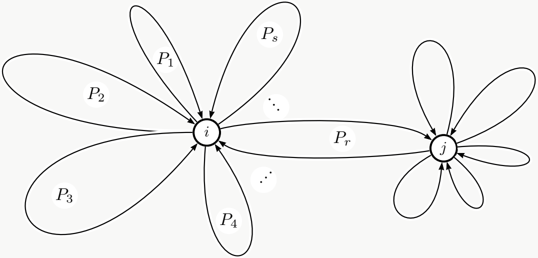


Figura: Busca recursiva por ciclo simples que minimiza o custo.

O exemplo abaixo mostra que uma mera comparação dos valores de c sobre os ciclos simples pode não vir a ser a abordagem mais eficiente para determinar a constante $m(c)$.

Exemplo

Considere o grafo completo com n vértices, isto é, o grafo

$$G = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{1, 2, \ldots, n\}^2).$$

Há exatamente n ciclos simples de comprimento 1:

$$1 \xrightarrow{G} 1, \qquad 2 \xrightarrow{G} 2, \qquad \cdots \qquad n \xrightarrow{G} n.$$

Fixado o ponto inicial, existem $n - 1$ ciclos simples de comprimento 2 contendo-o:

$$i \xrightarrow{G} j \xrightarrow{G} i, \qquad j \neq i$$

O exemplo abaixo mostra que uma mera comparação dos valores de c sobre os ciclos simples pode não vir a ser a abordagem mais eficiente para determinar a constante $m(c)$.

Exemplo

Considere o grafo completo com n vértices, isto é, o grafo

$$G = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{1, 2, \ldots, n\}^2).$$

Há exatamente n ciclos simples de comprimento 1:

$$1 \xrightarrow{G} 1, \qquad 2 \xrightarrow{G} 2, \quad \cdots \quad n \xrightarrow{G} n.$$

Fixado o ponto inicial, existem $n-1$ ciclos simples de comprimento 2 contendo-o:

$$i \xrightarrow{G} j \xrightarrow{G} i, \qquad j \neq i.$$

Porém, $i \xrightarrow{G} j \xrightarrow{G} i$ e $j \xrightarrow{G} i \xrightarrow{G} j$ representam o mesmo ciclo. Logo, há exatamente $n(n-1)/2$ ciclos simples de comprimento igual a 2.

O exemplo abaixo mostra que uma mera comparação dos valores de c sobre os ciclos simples pode não vir a ser a abordagem mais eficiente para determinar a constante $m(c)$.

Exemplo

Considere o grafo completo com n vértices, isto é, o grafo

$$G = (\{1, 2, \dots, n\}, \{1, 2, \dots, n\}^2).$$

Há exatamente n ciclos simples de comprimento 1:

$$1 \overset{G}{\to} 1, \qquad 2 \overset{G}{\to} 2, \quad \cdots \quad n \overset{G}{\to} n.$$

Fixado o ponto inicial, existem $n-1$ ciclos simples de comprimento 2 contendo-o:

$$i \overset{G}{\to} j \overset{G}{\to} i, \qquad j \neq i.$$

Porém, $i \overset{G}{\to} j \overset{G}{\to} i$ e $j \overset{G}{\to} i \overset{G}{\to} j$ representam o mesmo ciclo. Logo, há exatamente $n(n-1)/2$ ciclos simples de comprimento igual a 2.

O exemplo abaixo mostra que uma mera comparação dos valores de c sobre os ciclos simples pode não vir a ser a abordagem mais eficiente para determinar a constante $m(c)$.

Exemplo

Considere o grafo completo com n vértices, isto é, o grafo

$$G = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{1, 2, \ldots, n\}^2).$$

Há exatamente n ciclos simples de comprimento 1:

$$1 \xrightarrow{G} 1, \qquad 2 \xrightarrow{G} 2, \quad \cdots \quad n \xrightarrow{G} n.$$

Fixado o ponto inicial, existem $n-1$ ciclos simples de comprimento 2 contendo-o:

$$i \xrightarrow{G} j \xrightarrow{G} i, \qquad j \neq i.$$

Porém, $i \xrightarrow{G} j \xrightarrow{G} i$ e $j \xrightarrow{G} i \xrightarrow{G} j$ representam o mesmo ciclo. Logo, há exatamente $n(n-1)/2$ ciclos simples de comprimento igual a 2.

O exemplo abaixo mostra que uma mera comparação dos valores de c sobre os ciclos simples pode não vir a ser a abordagem mais eficiente para determinar a constante $m(c)$.

Exemplo

Considere o grafo completo com n vértices, isto é, o grafo

$$G = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{1, 2, \ldots, n\}^2).$$

Há exatamente n ciclos simples de comprimento 1:

$$1 \xrightarrow{G} 1, \qquad 2 \xrightarrow{G} 2, \quad \cdots \quad n \xrightarrow{G} n.$$

Fixado o ponto inicial, existem $n - 1$ ciclos simples de comprimento 2 contendo-o:

$$i \xrightarrow{G} j \xrightarrow{G} i, \qquad j \neq i.$$

Porém, $i \xrightarrow{G} j \xrightarrow{G} i$ e $j \xrightarrow{G} i \xrightarrow{G} j$ representam o mesmo ciclo. Logo, há exatamente $n(n-1)/2$ ciclos simples de comprimento igual a 2.

Exemplo

Analogamente, observamos que há

$$n(n-1)(n-2)/3 \text{ ciclos simples com comprimento } 3,$$
$$n(n-1)(n-2)(n-3)/4 \text{ ciclos simples com comprimento } 4,$$
$$\vdots$$
$$(n-1)! \text{ ciclos simples com comprimento } n.$$

Temos então

$$n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \ldots + (n-1)!$$

ciclos simples em $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{1, 2, \ldots, n\}^2)$.

É possível desenvolver procedimento simples
para encontrar a constante $m(c)$?

Exemplo

Analogamente, observamos que há

$$\begin{aligned} n(n-1)(n-2)/3 &\text{ ciclos simples com comprimento } 3, \\ n(n-1)(n-2)(n-3)/4 &\text{ ciclos simples com comprimento } 4, \\ &\vdots \\ (n-1)! &\text{ ciclos simples com comprimento } n. \end{aligned}$$

Temos então

$$n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \ldots + (n-1)!$$

ciclos simples em $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{1, 2, \ldots, n\}^2)$.

É possível desenvolver procedimento simples para encontrar a constante $m(c)$?

Exemplo

Analogamente, observamos que há

$$
\begin{aligned}
n(n-1)(n-2)/3 &\text{ ciclos simples com comprimento } 3,\\
n(n-1)(n-2)(n-3)/4 &\text{ ciclos simples com comprimento } 4,\\
&\vdots\\
(n-1)! &\text{ ciclos simples com comprimento } n.
\end{aligned}
$$

Temos então

$$n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \ldots + (n-1)!$$

ciclos simples em $G = (\{1,2,\ldots,n\},\{1,2,\ldots,n\}^2)$.

É possível desenvolver procedimento simples
para encontrar a constante $m(c)$?

Exemplo

Analogamente, observamos que há

$$\begin{aligned} n(n-1)(n-2)/3 &\text{ ciclos simples com comprimento } 3, \\ n(n-1)(n-2)(n-3)/4 &\text{ ciclos simples com comprimento } 4, \\ &\vdots \\ (n-1)! &\text{ ciclos simples com comprimento } n. \end{aligned}$$

Temos então

$$n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \ldots + (n-1)!$$

ciclos simples em $G = (\{1,2,\ldots,n\},\{1,2,\ldots,n\}^2)$.

É possível desenvolver procedimento simples
para encontrar a constante $m(c)$?

Exemplo

Analogamente, observamos que há

$$\begin{aligned}
n(n-1)(n-2)/3 &\text{ ciclos simples com comprimento } 3,\\
n(n-1)(n-2)(n-3)/4 &\text{ ciclos simples com comprimento } 4,\\
&\vdots\\
(n-1)! &\text{ ciclos simples com comprimento } n.
\end{aligned}$$

Temos então

$$n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}+\ldots+(n-1)!$$

ciclos simples em $G=(\{1,2,\ldots,n\},\{1,2,\ldots,n\}^2)$.

É possível desenvolver procedimento simples
para encontrar a constante $m(c)$?

Algoritmo de Karp

Método algorítmico para encontrar a constante cíclica minimal.

Introduzimos o conceito de menor custo dentre os caminhos de comprimento fixado $k > 0$ com ponto final i,

$$S_k(i) = \min\left\{ c(P) \; : \; \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \text{ de comprimento } k \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}.$$

Teorema (Algoritmo de Karp)

Seja $G = (\{1, \dots, n-1\}, A)$ grafo orientado conexo com função custo $c : A \to \mathbb{R}$. Então a constante cíclica minimal é dada explicitamente por

$$m(c) = \min_{1 \le i \le n-1} \; \max_{1 \le k \le n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right].$$

Algoritmo de Karp

Método algorítmico para encontrar a constante cíclica minimal.

Introduzimos o conceito de menor custo dentre os caminhos de comprimento fixado $k > 0$ com ponto final i,

$$S_k(i) = \min \left\{ c(P) \ : \ \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \text{ de comprimento } k \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}.$$

Teorema (Algoritmo de Karp)

Seja $G = (\{1, \dots, n-1\}, A)$ grafo orientado conexo com função custo $c : A \to \mathbb{R}$. Então a constante cíclica minimal é dada explicitamente por

$$m(c) = \min_{1 \le i \le n-1} \ \max_{1 \le k \le n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right].$$

Para demonstração deste resultado, veja a **Monitoria (Aula02)**.

Algoritmo de Karp

Método algorítmico para encontrar a constante cíclica minimal.

Introduzimos o conceito de menor custo dentre os caminhos de comprimento fixado $k > 0$ com ponto final i,

$$S_k(i) = \min \left\{ c(P) \ : \ \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \text{ de comprimento } k \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}.$$

Teorema (Algoritmo de Karp)

Seja $G = (\{1, \dots, n-1\}, A)$ grafo orientado conexo com função custo $c : A \to \mathbb{R}$. Então a constante cíclica minimal é dada explicitamente por

$$m(c) = \min_{1 \leq i \leq n-1} \ \max_{1 \leq k \leq n-1} \left[\frac{n}{n-k} S_n(i) - \frac{k}{n-k} S_k(i) \right].$$

Para demonstração deste resultado, veja a **Monitoria (Aula02)**.

Outras caracterizações

É útil constatar a existência de outras maneiras de caracterizar a constante cíclica minimal $m(c)$.

$$m(c) = \min\{c(P) : P \text{ ciclo simples em } G\}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \min\left\{ c(P) \ : \ \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\}$$

$$= \sup_{k\geq 1} \min\left\{ c(P) \ : \ \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\} =$$

$$= \sup_{f:V(G)\to\mathbb{R}} \min_{i\xrightarrow{G}j} \left[c(i,j) + f(i) - f(j)\right],$$

sendo esta última uma importante fórmula de representação dual.

Outras caracterizações

É útil constatar a existência de outras maneiras de caracterizar a constante cíclica minimal $m(c)$.

$$m(c) = \min\{c(P) : P \text{ ciclo simples em } G\}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \min\left\{ c(P) \ : \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\}$$

$$= \sup_{k\geq 1} \min\left\{ c(P) \ : \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\} =$$

$$= \sup_{f:V(G)\to\mathbb{R}} \min_{i\xrightarrow{G}j} \left[c(i,j) + f(i) - f(j)\right],$$

sendo esta última uma importante fórmula de representação dual.

Outras caracterizações

É útil constatar a existência de outras maneiras de caracterizar a constante cíclica minimal $m(c)$.

$$m(c) = \min\{c(P) : P \text{ ciclo simples em } G\}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \min \left\{ c(P) \;:\; \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\}$$

$$= \sup_{k\geq 1} \min \left\{ c(P) \;:\; \begin{array}{c} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{array} \right\} =$$

$$= \sup_{f:V(G)\to\mathbb{R}} \min_{i \xrightarrow{G} j} \left[c(i,j) + f(i) - f(j)\right],$$

sendo esta última uma importante fórmula de representação dual.

Outras caracterizações

É útil constatar a existência de outras maneiras de caracterizar a constante cíclica minimal $m(c)$.

$$
\begin{aligned}
m(c) &= \min\{c(P) : P \text{ ciclo simples em } G\} \\
&= \lim_{k\to\infty} \min\left\{ c(P) \ : \ \begin{matrix} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{matrix} \right\} \\
&= \sup_{k\geq 1} \min\left\{ c(P) \ : \ \begin{matrix} P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \end{matrix} \right\} = \\
&= \sup_{f:V(G)\to\mathbb{R}} \min_{i \xrightarrow{G} j} \left[c(i,j) + f(i) - f(j)\right],
\end{aligned}
$$

sendo esta última uma importante fórmula de representação dual.

Sumário

Conjunto cíclico minimal

Introduzimos outro importante conceito, cuja compreensão vem a ser uma chave para todas as respostas acerca de otimização de ciclos.

Definição

Definimos o *conjunto cíclico minimal* pondo

$$\mathcal{M}(c) := \{P \ \text{ciclo em } \ G \ : \ c(P) = m(c)\}\,.$$

Nossa estratégia consistirá em renormalizar a função custo original c.

- Primeiramente, obtém-se $\tilde{c} \geq 0$ tal que

$$\tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(c) \quad \text{(entre os ciclos em } G\text{)}.$$

- A partir de $\tilde{c}$ encontra-se, em seguida, $\hat{c} \geq 0$ satisfazendo

$$\hat{c}^{-1}(0) = \mathcal{M}(c) \quad \text{(entre os ciclos em } \ G\text{)}.$$

Conjunto cíclico minimal

Introduzimos outro importante conceito, cuja compreensão vem a ser uma chave para todas as respostas acerca de otimização de ciclos.

Definição

Definimos o *conjunto cíclico minimal* pondo

$$\mathcal{M}(c) := \{P \text{ ciclo em } G \;:\; c(P) = m(c)\}\,.$$

Nossa estratégia consistirá em renormalizar a função custo original c.

- Primeiramente, obtém-se $\tilde{c} \geq 0$ tal que

$$\tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(c) \quad \text{(entre os ciclos em } G\text{)}.$$

- A partir de $\tilde{c}$ encontra-se, em seguida, $\hat{c} \geq 0$ satisfazendo

$$\hat{c}^{-1}(0) = \mathcal{M}(c) \quad \text{(entre os ciclos em } G\text{)}.$$

Tal renormalização se dará de modo algorítmico

Conjunto cíclico minimal

Introduzimos outro importante conceito, cuja compreensão vem a ser uma chave para todas as respostas acerca de otimização de ciclos.

Definição

Definimos o *conjunto cíclico minimal* pondo

$$\mathcal{M}(c) := \{P \text{ ciclo em } G \ : \ c(P) = m(c)\} .$$

Nossa estratégia consistirá em renormalizar a função custo original c.

- Primeiramente, obtém-se $\tilde{c} \geq 0$ tal que

$$\tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(c) \quad \text{(entre os ciclos em } G\text{)}.$$

- A partir de $\tilde{c}$ encontra-se, em seguida, $\hat{c} \geq 0$ satisfazendo

$$\hat{c}^{-1}(0) = \mathcal{M}(c) \quad \text{(entre os ciclos em } G\text{)}.$$

Tal renormalização se dará de modo algorítmico

Conjunto cíclico minimal

Introduzimos outro importante conceito, cuja compreensão vem a ser uma chave para todas as respostas acerca de otimização de ciclos.

Definição

Definimos o *conjunto cíclico minimal* pondo

$$\mathcal{M}(c) := \{P \text{ ciclo em } G \;:\; c(P) = m(c)\}\,.$$

Nossa estratégia consistirá em renormalizar a função custo original c.

- Primeiramente, obtém-se $\tilde{c} \geq 0$ tal que

$$\tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(c) \quad \text{(entre os ciclos em } G\text{)}.$$

- A partir de $\tilde{c}$ encontra-se, em seguida, $\hat{c} \geq 0$ satisfazendo

$$\hat{c}^{-1}(0) = \mathcal{M}(c) \quad \text{(entre os ciclos em } G\text{)}.$$

Tal renormalização se dará de modo algorítmico

Sumário

Corretores

Para o processo de renormalização, faremos uso do seguinte conceito.

Definition

Uma função $u : V(G) \to \mathbb{R}$ é dita ser um *corretor* associado à função custo c se verificar

$$c(i,j) + u(i) - u(j) \geq m(c), \qquad \forall\, (i,j) \in A(G).$$

Se u é um corretor associado a c, seja

$$\tilde{c}(i,j) := c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0, \qquad \forall\, (i,j) \in A(G)$$

e estenda $\tilde{c}$ sobre os caminhos em G da maneira usual.

- Para qualquer ciclo Q, temos $\tilde{c}(Q) = c(Q) - m(c)$.

Corretores

Para o processo de renormalização, faremos uso do seguinte conceito.

Definition

Uma função $u : V(G) \to \mathbb{R}$ é dita ser um *corretor* associado à função custo c se verificar

$$c(i,j) + u(i) - u(j) \geq m(c), \qquad \forall\, (i,j) \in A(G).$$

Se u é um corretor associado a c, seja

$$\tilde{c}(i,j) := c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0, \qquad \forall\, (i,j) \in A(G)$$

e estenda $\tilde{c}$ sobre os caminhos em G da maneira usual.

- Para qualquer ciclo Q, temos $\tilde{c}(Q) = c(Q) - m(c)$.
- Consequentemente,

$$m(\tilde{c}) = 0 \qquad \text{e} \qquad \tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}(c).$$

Corretores

Para o processo de renormalização, faremos uso do seguinte conceito.

Definition

Uma função $u : V(G) \to \mathbb{R}$ é dita ser um *corretor* associado à função custo c se verificar

$$c(i,j) + u(i) - u(j) \geq m(c), \qquad \forall\, (i,j) \in A(G).$$

Se u é um corretor associado a c, seja

$$\tilde{c}(i,j) := c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0, \qquad \forall\, (i,j) \in A(G)$$

e estenda $\tilde{c}$ sobre os caminhos em G da maneira usual.

- Para qualquer ciclo Q, temos $\tilde{c}(Q) = c(Q) - m(c)$.
- Consequentemente,

$$m(\tilde{c}) = 0 \qquad \text{e} \qquad \tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}(c).$$

Corretores

Para o processo de renormalização, faremos uso do seguinte conceito.

Definition

Uma função $u : V(G) \to \mathbb{R}$ é dita ser um *corretor* associado à função custo c se verificar

$$c(i,j) + u(i) - u(j) \geq m(c), \qquad \forall\,(i,j) \in A(G).$$

Se u é um corretor associado a c, seja

$$\tilde{c}(i,j) := c(i,j) + u(i) - u(j) - m(c) \geq 0, \qquad \forall\,(i,j) \in A(G)$$

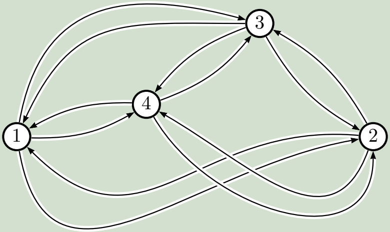
e estenda $\tilde{c}$ sobre os caminhos em G da maneira usual.

- Para qualquer ciclo Q, temos $\tilde{c}(Q) = c(Q) - m(c)$.
- Consequentemente,

$$m(\tilde{c}) = 0 \qquad \text{e} \qquad \tilde{c}^{-1}(0) \supset \mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}(c).$$

Exemplo

Consideremos o problema de distribuição com quatro pontos de entrega.

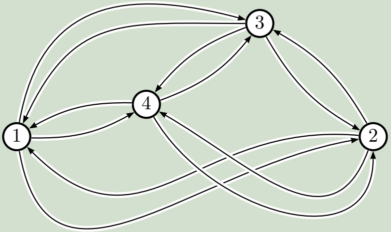


Isto significa levar em conta a seguinte matriz de transição irredutível

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Consideremos o problema de distribuição com quatro pontos de entrega.

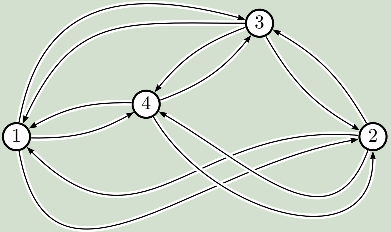


Isto significa levar em conta a seguinte matriz de transição irredutível

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Listamos todos os ciclos simples neste caso.

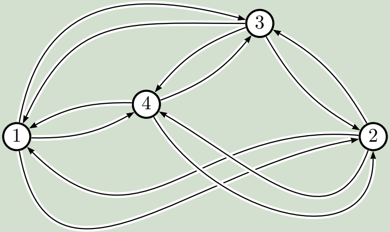


- Ciclos simples com comprimento igual a 2:

$$1 \to 2 \to 1, \quad 2 \to 3 \to 2, \quad 3 \to 4 \to 3.$$
$$1 \to 3 \to 1, \quad 2 \to 4 \to 2,$$
$$1 \to 4 \to 1,$$

Exemplo

Listamos todos os ciclos simples neste caso.

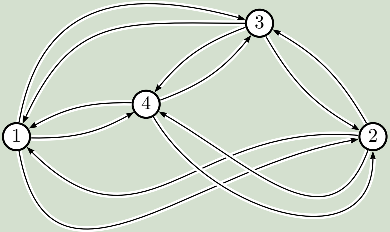


- Ciclos simples com comprimento igual a 2:

$$
\begin{array}{lll}
1 \to 2 \to 1, & 2 \to 3 \to 2, & 3 \to 4 \to 3. \\
1 \to 3 \to 1, & 2 \to 4 \to 2, & \\
1 \to 4 \to 1, & &
\end{array}
$$

Exemplo

Listamos todos os ciclos simples neste caso.

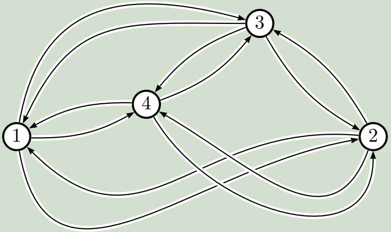


- Ciclos simples com comprimento igual a 3:

$$1 \to 2 \to 3 \to 1, \quad 1 \to 3 \to 4 \to 1, \quad 2 \to 3 \to 4 \to 2,$$
$$1 \to 2 \to 4 \to 1, \quad 1 \to 4 \to 2 \to 1, \quad 2 \to 4 \to 3 \to 2.$$
$$1 \to 3 \to 2 \to 1, \quad 1 \to 4 \to 3 \to 1,$$

Exemplo

Listamos todos os ciclos simples neste caso.



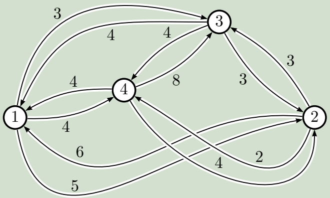
- Ciclos simples com comprimento igual a 4:

$$
\begin{aligned}
&1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1, \qquad && 1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1,\\
&1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1, \qquad && 1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1,\\
&1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1, \qquad && 1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Seja então

$$c = \begin{bmatrix} * & 5 & 3 & 4 \\ 6 & * & 3 & 2 \\ 4 & 3 & * & 4 \\ 4 & 4 & 8 & * \end{bmatrix}$$



Inspeção direta garante que

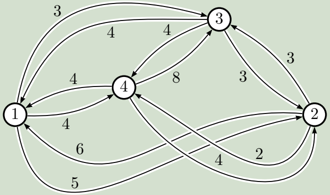
$$m(c) = 3 \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(c) = \left\{ \text{concatenações de} \begin{array}{c} 2 \to 3 \to 2, \\ 2 \to 4 \to 2 \quad \text{e} \\ 1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1 \end{array} \right\}.$$

(Note que todas as trajetórias fechadas com custo médio minimal passam pelo ponto de entrega 2.)

Exemplo

Seja então

$$c = \begin{bmatrix} * & 5 & 3 & 4 \\ 6 & * & 3 & 2 \\ 4 & 3 & * & 4 \\ 4 & 4 & 8 & * \end{bmatrix}$$



Inspeção direta garante que

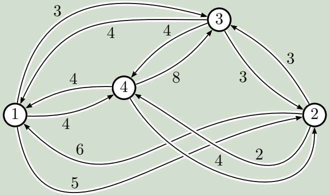
$$m(c) = 3 \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(c) = \left\{ \text{concatenações de} \quad \begin{matrix} 2 \to 3 \to 2, \\ 2 \to 4 \to 2 \quad \text{e} \\ 1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1 \end{matrix} \right\}.$$

(Note que todas as trajetórias fechadas com custo médio minimal passam pelo ponto de entrega 2.)

Exemplo

Seja então

$$c = \begin{bmatrix} * & 5 & 3 & 4 \\ 6 & * & 3 & 2 \\ 4 & 3 & * & 4 \\ 4 & 4 & 8 & * \end{bmatrix}$$



Além disso, $u = (1, 1, 1, 0)$ é um corretor associado a c e que, neste caso, basta a etapa intermediária de renormalização para já obter

$$\tilde{c} = \hat{c} = \begin{bmatrix} * & 2 & 0 & 2 \\ 3 & * & 0 & 0 \\ 1 & 0 & * & 2 \\ 0 & 0 & 4 & * \end{bmatrix}.$$

Sobre a existência de corretores, temos o seguinte resultado.

Proposição

Toda função custo admite corretores.

Demostração.

Se $\#V(G) = n$, basta verificar que

$$u(i) = \min \left\{ k\left[c(P) - m(c)\right] \ : \ \begin{array}{c} 1 \leq k \leq n, \ P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}, \ \forall\, i$$

caracteriza um corretor para o custo c. $\square$

Observação

Note que, para o corretor acima, é necessário conhecer a constante cíclica minimal e uma lista (não necessariamente breve) de possíveis caminhos. Estes aspectos levantam questões sobre a efetiva computabilidade de tal corretor em determinadas situações práticas.

Sobre a existência de corretores, temos o seguinte resultado.

Proposição

Toda função custo admite corretores.

Demostração.

Se $\#V(G) = n$, basta verificar que

$$u(i) = \min \left\{ k\left[c(P) - m(c)\right] \;:\; \begin{array}{c} 1 \leq k \leq n,\ P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}, \ \forall\, i$$

caracteriza um corretor para o custo c. $\square$

Observação

Note que, para o corretor acima, é necessário conhecer a constante cíclica minimal e uma lista (não necessariamente breve) de possíveis caminhos. Estes aspectos levantam questões sobre a efetiva computabilidade de tal corretor em determinadas situações práticas.

Sobre a existência de corretores, temos o seguinte resultado.

Proposição

Toda função custo admite corretores.

Demostração.

Se $\#V(G) = n$, basta verificar que

$$u(i) = \min \left\{ k\left[c(P) - m(c)\right] \;:\; \begin{array}{c} 1 \le k \le n,\ P \text{ caminho em } G \\ \text{de comprimento } k \\ \text{com ponto final } i \end{array} \right\}, \ \forall\, i$$

caracteriza um corretor para o custo c. $\square$

Observação

Note que, para o corretor acima, é necessário conhecer a constante cíclica minimal e uma lista (não necessariamente breve) de possíveis caminhos. Estes aspectos levantam questões sobre a efetiva computabilidade de tal corretor em determinadas situações práticas.

Bibliografia

E. Garibaldi e J. T. A. Gomes,
Otimização de Médias sobre Grafos Orientados,
Coleção publicações matemáticas (29 CBM) **12**, IMPA, 2013.

Seções: 2.1 (páginas 13 a 16) e 2.2 (páginas 30 a 35);

F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder e J. P. Quadrat,
Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems,
Wiley series in probability and mathematical statistics, John Wiley & Sons, 1992.

E. Garibaldi e Ph. Thieullen,
Description of some ground states by Puiseux techniques,
Journal of Statistical Physics **146** (2012), 125-180.

Sinopse da Monitoria (Aula 02)

- Demonstramos o clássico algoritmo de Karp.
- Discorre-se sobre a regularidade de $m(c)$ com respeito à variação do custo c e uma forma de representação dual para constante cíclica minimal.

Sinopse da Monitoria (Aula 02)

- Demonstramos o clássico algoritmo de Karp.
- Discorre-se sobre a regularidade de $m(c)$ com respeito à variação do custo c e uma forma de representação dual para constante cíclica minimal.

Sinopse da Aula 03

- Apresenta-se o operador de Lax-Oleinik T_c.
- Detalha-se o algoritmo de Floría-Griffiths, cuja saída retorna simultaneamente a constante cíclica minimal $m(c)$ e um corretor u.
- Discutimos aspectos sobre a validação deste algoritmo, os quais ressaltam propriedades importantes do operador de Lax-Oleinik.

Sinopse da Aula 03

- Apresenta-se o operador de Lax-Oleinik T_c.
- Detalha-se o algoritmo de Floría-Griffiths, cuja saída retorna simultaneamente a constante cíclica minimal $m(c)$ e um corretor u.
- Discutimos aspectos sobre a validação deste algoritmo, os quais ressaltam propriedades importantes do operador de Lax-Oleinik.

Sinopse da Aula 03

- Apresenta-se o operador de Lax-Oleinik T_c.
- Detalha-se o algoritmo de Floría-Griffiths, cuja saída retorna simultaneamente a constante cíclica minimal $m(c)$ e um corretor u.
- Discutimos aspectos sobre a validação deste algoritmo, os quais ressaltam propriedades importantes do operador de Lax-Oleinik.

Até a próxima aula!