

# Tutorium 05: $\lambda$ -Kalkül

---

Paul Brinkmeier

18. November 2019

Tutorium Programmierparadigmen am KIT

# Heutiges Programm

---

- Übungsblatt 4
- $\lambda$ -Kalkül: Basics + Church-Zahlen

- Übungsblatt 4
- $\lambda$ -Kalkül: Basics + Church-Zahlen
- $\lambda$ -Kalkül in Haskell

# Übungsblatt 4

---

## 2.1, 2.3 — AST: Datenstruktur

```
module AstType where

data Exp t
  = Var t
  | Const Integer
  | Add (Exp t) (Exp t)
  | Less (Exp t) (Exp t)
  | And (Exp t) (Exp t)
  | Not (Exp t)
  | If (Exp t) (Exp t) (Exp t)
```

- $t$  ist Typvariable, um bspw. Ints als Namen zuzulassen
- Das kommt bspw. bei Compiler-Optimierungen zum Einsatz

## 2.2 — AST: Auswertung

```
module AstEval where
import AstType

type Env a = a -> Integer

eval :: Env a -> Exp a -> Integer
eval env (Var v) = env v
eval env (Const c) = c
eval env (Add e1 e2) = eval env e1 + eval env e2
```

## 2.3 — AST: Boolsche Ausdrücke

```
module AstEval2 where

eval :: Env a -> Exp a -> Integer
eval env (Less e1 e2) = b2i $
    (eval env e1) < (eval env e2)
eval env (And e1 e2) = b2i $
    (i2b $ eval env e1) && (i2b $ eval env e2)
eval env (Not e) = b2i $ not $ i2b $ eval env e

b2i b = if b then 0 else 1
i2b i = if i == 0 then False else True
```

- Aufgabe sorgfältig lesen, nur 0 ist „falsey“ in C
- $\rightsquigarrow$  kann einem in der Klausur in den Arsch beißen



## 2.4 — AST: Show

```
module AstShow where
import AstType

instance Show t => Show (Exp t) where
  show (Const c) = show c
  show (Var    v) = show v -- Darf man wegen Show t
  show (Add a b) =
    "(" ++ show a ++ " + " ++ show b ++ ")"
  -- etc.
```

- $\text{Show } t \Rightarrow \text{Show } (\text{Exp } t) \Leftrightarrow$  „Wenn man  $t$ s anzeigen kann, kann man auch  $\text{Exp } t$ s anzeigen“

## 3.1 — ropeLength

```
module RopeLength where
import RopeType

ropeLength :: Rope -> Int
ropeLength (Leaf s)      = length s
ropeLength (Inner l w r) = w + ropeLength r
```

## 3.2 — ropeConcat

```
module RopeConcat where
import RopeType
import RopeLength

ropeConcat :: Rope -> Rope -> Rope
ropeConcat r1 r2 = Inner r1 (ropeLength r1) r2

(+++) = ropeConcat
```

### 3.3 — ropeSplitAt

```
module RopeSplitAt where
import RopeType
import RopeConcat

ropeSplitAt :: Int -> Rope -> (Rope, Rope)
ropeSplitAt i (Leaf s)      = (Leaf sl, Leaf sr)
  where (sl, sr) = (take i s, drop i s)
ropeSplitAt i (Inner l w r)
  | i < w                    = (ll, lr ++ r)
  | i > w                    = (l ++ rl, rr)
  | otherwise                = (l, r)
  where (ll, lr) = ropeSplitAt i      l
        (rl, rr) = ropeSplitAt (i - w) r
```

## 3.4 — ropeInsert

```
module RopeInsert where
import RopeType
import RopeConcat
import RopeSplitAt

ropeInsert :: Int -> Rope -> Rope -> Rope
ropeInsert i toInsert rope =
    ropeL ++ toInsert ++ ropeR
    where (ropeL, ropeR) = ropeSplitAt i rope
```

### 3.5 — ropeDelete

```
module RopeInsert where
import RopeType
import RopeConcat
import RopeSplitAt

ropeDelete :: Int -> Int -> Rope -> Rope
ropeDelete from to rope =
    left ++ right
    where (left, _ ) = ropeSplitAt from rope
          (_, right) = ropeSplitAt to   rope
```

# Wiederholung

---

```
module DataExamples where

data Bool = True | False

data Category = Jackets | Pants | Shoes
  deriving Show

data Filter
  = InSale
  | IsCategory Category
  | PriceRange Float Float
```

- Keyword `data` definiert *neuen* Typ
- „enum auf Meth“



```
module TypeClassExamples where

-- Ersatz für null in C-likes
-- Auch bekannt als "Maybe"
data Optional a = Present a | NoValue

instance Show a => Show (Optional a) where
    show (Present x) = show x
    show NoValue     = "null"
```

- Typklassen stellen globale Operationen für Typen bereit
- Bspw. Eq und Ord für Vergleiche, Enum für Aufzählbarkeit

# $\lambda$ -Kalkül

---

- Funktionales Gegenstück zur Turingmaschine
- Entsprechend theoretisch
- Wurde u.a. genutzt um Unlösbarkeit des Halteproblems zu zeigen
- Gibt saftig Punkte in der Klausur
  - 13P. im 19SS
  - 10P. (+15P.) im 18WS
  - 20P. (+15P.) im 18SS
- Nicht kompliziert aber „schwierig“ (wie bspw. Go oder Schach)

Ein Term im  $\lambda$ -Kalkül hat eine der drei folgenden Formen:

Notation	Besteht aus	Bezeichnung
$x$	$x$ : Variablenname	Variable
$\lambda p.b$	$p$ : Variablenname $b$ : $\lambda$ -Term	Abstraktion
$f a$	$f, a$ : $\lambda$ -Terme	Funktionsanwendung

- „ $\lambda$ -Term“: rekursive Datenstruktur
- Semantik definieren wir später

Ein Term im  $\lambda$ -Kalkül hat eine der drei folgenden Formen:

Notation	Besteht aus	Bezeichnung
$x$	$x$ : Variablenname	Variable
$\lambda p.b$	$p$ : Variablenname $b$ : $\lambda$ -Term	Abstraktion
$f\ a$	$f, a$ : $\lambda$ -Terme	Funktionsanwendung

- „ $\lambda$ -Term“: rekursive Datenstruktur
- Semantik definieren wir später
- Jetzt: Ergänzt das Modul Lambda um die fehlenden Typen
  - +Fragen zur ÜB-Korrektur

```
module Lambda where

data LambdaTerm
  = Var String    -- Variable
  | App () ()     -- Funktionsanwendung: f a
  | Abs () ()     -- Abstraktion: \p.b
```

- [//github.com/pbrinkmeier/pp-tut](https://github.com/pbrinkmeier/pp-tut)
- Modul x liegt in slides/demos/x.hs

# Begriffe im $\lambda$ -Kalkül

Begriff	Formel	Bedeutung
$\alpha$ -Äquivalenz	$t_1 \stackrel{\alpha}{=} t_2$	$t_1, t_2$ sind gleicher Struktur
$\eta$ -Äquivalenz	$\lambda x.f \stackrel{\eta}{=} f$	„Unterversorgung“
Freie Variablen	$fv(\lambda p.b) = b$	Menge der nicht durch $\lambda$ s gebundenen Variablen
Substitution	$(\lambda p.b) [b \rightarrow c] = \lambda p.c$	Ersetzung nicht-freier Variablen
Redex	$(\lambda p.b) t$	„Reducible expression“
$\beta$ -Reduktion	$(\lambda p.b) t \Rightarrow b [p \rightarrow t]$	„Funktionsanwendung“

- $fv(t)$  bezeichnet die frei vorkommenden Variablen im Term  $t$
- Frei vorkommend  $\approx$  nicht durch ein  $\lambda$  gebunden
  - $fv(x) = \{x\}$ , wenn  $x$  Variable
  - $fv(f\ x) = fv(f) \cup fv(x)$
  - $fv(\lambda p.b) = fv(b) \setminus \{p\}$
- Beispiele:
  - $fv(\lambda x.x) = \emptyset$
  - $fv(\lambda x.y) = \{y\}$



- $fv(t)$  bezeichnet die frei vorkommenden Variablen im Term  $t$
- Frei vorkommend  $\approx$  nicht durch ein  $\lambda$  gebunden
  - $fv(x) = \{x\}$ , wenn  $x$  Variable
  - $fv(f\ x) = fv(f) \cup fv(x)$
  - $fv(\lambda p.b) = fv(b) \setminus \{p\}$
- Beispiele:
  - $fv(\lambda x.x) = \emptyset$
  - $fv(\lambda x.y) = \{y\}$
- Implementiert `fv :: LambdaTerm -> Set String`
  - Benutzt `Set`, `union`, `delete` und `fromList` aus `Data.Set`

# Substitution

- Substitution ersetzt alle *freien* Variablen in einem Term
- $t[a \rightarrow b]$  — Ersetze  $a$  durch  $b$  in  $t$
- Beispiele:
  - $a[a \rightarrow b] = b$
  - $a[b \rightarrow c] = a$
  - $(f\ x)[f \rightarrow g][x \rightarrow y] = g\ y$

# Substitution

- Substitution ersetzt alle *freien* Variablen in einem Term
- $t[a \rightarrow b]$  — Ersetze  $a$  durch  $b$  in  $t$
- Beispiele:
  - $a[a \rightarrow b] = b$
  - $a[b \rightarrow c] = a$
  - $(f\ x)[f \rightarrow g][x \rightarrow y] = g\ y$
  - $(\lambda x.f\ x)[x \rightarrow y] = \lambda x.f\ x$  ( $x$  ist nicht frei)
  - $(\lambda x.f\ x)[f \rightarrow g] = \lambda x.g\ x$  ( $f$  ist frei)

# Substitution

- Substitution ersetzt alle *freien* Variablen in einem Term
- $t[a \rightarrow b]$  — Ersetze  $a$  durch  $b$  in  $t$
- Beispiele:
  - $a[a \rightarrow b] = b$
  - $a[b \rightarrow c] = a$
  - $(f\ x)[f \rightarrow g][x \rightarrow y] = g\ y$
  - $(\lambda x.f\ x)[x \rightarrow y] = \lambda x.f\ x$  ( $x$  ist nicht frei)
  - $(\lambda x.f\ x)[f \rightarrow g] = \lambda x.g\ x$  ( $f$  ist frei)
- Implementiert

```
substitute :: (String, Term) -> Term -> Term
```

  - `type Term = LambdaTerm`
  - `fv` braucht ihr dafür nicht

- $t_1 \stackrel{\alpha}{=} t_2$  — Strukturelle Äquivalenz der Terme  $t_1$  und  $t_2$
- Umformung von  $t_1$  in  $t_2$  allein durch Substitution der (gebundenen) Variablen möglich

- $t_1 \stackrel{\alpha}{=} t_2$  — Strukturelle Äquivalenz der Terme  $t_1$  und  $t_2$
- Umformung von  $t_1$  in  $t_2$  allein durch Substitution der (gebundenen) Variablen möglich
- Bspw.:
  - $x \stackrel{\alpha}{\neq} y$ , da  $x$  und  $y$  frei sind
  - $\lambda x.x \stackrel{\alpha}{=} \lambda y.y$ , durch Umbenennen von  $x$  zu  $y$
  - $f (\lambda x.y) \stackrel{\alpha}{=} f (\lambda p.y)$
  - $\lambda x.y \stackrel{\alpha}{\neq} \lambda x.z$

- $t_1 \stackrel{\alpha}{=} t_2$  — Strukturelle Äquivalenz der Terme  $t_1$  und  $t_2$
- Umformung von  $t_1$  in  $t_2$  allein durch Substitution der (gebundenen) Variablen möglich
- Bspw.:
  - $x \stackrel{\alpha}{\neq} y$ , da  $x$  und  $y$  frei sind
  - $\lambda x.x \stackrel{\alpha}{=} \lambda y.y$ , durch Umbenennen von  $x$  zu  $y$
  - $f (\lambda x.y) \stackrel{\alpha}{=} f (\lambda p.y)$
  - $\lambda x.y \stackrel{\alpha}{\neq} \lambda x.z$
- Aufgabe: Implementiert instance Eq Term als  $\alpha$ -Äquivalenz
  - Benutzt substitute!

- $\lambda x.f \ x \stackrel{\eta}{=} f$ , wenn  $x \notin fv(f)$
- Wie bei Haskell:  
all list = foldl (&&) True list  $\Leftrightarrow$   
all = \list -> foldl (&&) True list  $\Leftrightarrow$   
all = foldl (&&) True
- Also:
  - $\eta$ -Äquivalenz: eher Umformungsschritt als Gleichheitskriterium
  - Formelle Definition von Unterversorgung



- Bisher:  $\lambda$ -Terme als (seltsame) Datenstruktur  
Jetzt: Ausführungssemantik

- Bisher:  $\lambda$ -Terme als (seltsame) Datenstruktur  
Jetzt: Ausführungssemantik
- RedEx: „Reducible expression“  $\Leftrightarrow$   
Funktionsanwendung  $(f\ a)$ , mit  $f = \lambda p.b$
- $(\lambda p.b)\ a$

- Bisher:  $\lambda$ -Terme als (seltsame) Datenstruktur  
Jetzt: Ausführungssemantik
- RedEx: „Reducible expression“  $\Leftrightarrow$   
Funktionsanwendung  $(f\ a)$ , mit  $f = \lambda p.b$
- $(\lambda p.b)\ a \Longrightarrow b[p \rightarrow a]$

- Bisher:  $\lambda$ -Terme als (seltsame) Datenstruktur  
Jetzt: Ausführungssemantik
- RedEx: „Reducible expression“  $\Leftrightarrow$   
Funktionsanwendung  $(f\ a)$ , mit  $f = \lambda p.b$
- $(\lambda p.b)\ a \implies b[p \rightarrow a]$
- „Ausführung“ (besser: Auswertung) von  $\lambda$ -Termen: Anwenden der  $\beta$ -Reduktion, bis Term „konvergiert“
- Term konvergiert  $\approx$  Normalform  $\approx$  enthält keinen Redex mehr
  - Notation:  $t \not\Rightarrow$

- Bisher:  $\lambda$ -Terme als (seltsame) Datenstruktur  
Jetzt: Ausführungssemantik
- RedEx: „Reducible expression“  $\Leftrightarrow$   
Funktionsanwendung  $(f\ a)$ , mit  $f = \lambda p.b$
- $(\lambda p.b)\ a \Longrightarrow b[p \rightarrow a]$
- „Ausführung“ (besser: Auswertung) von  $\lambda$ -Termen: Anwenden der  $\beta$ -Reduktion, bis Term „konvergiert“
- Term konvergiert  $\approx$  Normalform  $\approx$  enthält keinen Redex mehr
  - Notation:  $t \not\Rightarrow$
- $id\ a = (\lambda x.x)\ a \Longrightarrow x[x \rightarrow a] = a \not\Rightarrow$

- Welcher Redex soll zuerst ausgewertet werden?
- $\rightsquigarrow$  verschiedene Auswertungsstrategien

- Welcher Redex soll zuerst ausgewertet werden?
- $\rightsquigarrow$  verschiedene Auswertungsstrategien
- **Volle  $\beta$ -Reduktion** — Beliebiger Redex
- **Normalreihenfolge** — „Linkester“ Redex

- Welcher Redex soll zuerst ausgewertet werden?
- $\rightsquigarrow$  verschiedene Auswertungsstrategien
- **Volle  $\beta$ -Reduktion** — Beliebiger Redex
- **Normalreihenfolge** — „Linkester“ Redex
- **Call-by-Name** — *Nur äußerster* „linkester Redex“
- **Call-by-Value** — „Linkester Redex“, der eine Normalform als Argument hat



# Normalreihenfolge

```
module LambdaN where

data LambdaTerm
  = Var String
  | App LambdaTerm LambdaTerm
  | Abs String LambdaTerm
```

- Implementiert  
normalBeta :: LambdaTerm -> LambdaTerm
- Führt einen  $\beta$ -Reduktionsschritt in Normalreihenfolge (linkester Redex) aus
- Wenn kein Redex vorkommt, wird derselbe Term zurückgegeben
- Bindet LambdaShow ein für instance Show LambdaTerm

# Begriffe im $\lambda$ -Kalkül

Begriff	Formel	Bedeutung
$\alpha$ -Äquivalenz	$t_1 \stackrel{\alpha}{=} t_2$	$t_1, t_2$ sind gleicher Struktur
$\eta$ -Äquivalenz	$\lambda x.f \stackrel{\eta}{=} f$	„Unterversorgung“
Freie Variablen	$fv(\lambda p.b) = b$	Menge der nicht durch $\lambda$ s gebundenen Variablen
Substitution	$(\lambda p.b) [b \rightarrow c] = \lambda p.c$	Ersetzung nicht-freier Variablen
Redex	$(\lambda p.b) t$	„Reducible expression“
$\beta$ -Reduktion	$(\lambda p.b) t \Rightarrow b [p \rightarrow t]$	„Funktionsanwendung“

# Church-Zahlen im $\lambda$ -Kalkül

---

$$\begin{aligned}c_0 &= ? \\c_1 &= s(c_0) \\c_2 &= s(s(c_0)) \\c_3 &= s(s(s(c_0))) \\c_8 &= s(s(s(s(s(s(s(s(c_0))))))))\end{aligned}$$

1. Die 0 ist Teil der natürlichen Zahlen
2. Wenn  $n$  Teil der natürlichen Zahlen ist,  
ist auch  $s(n) = n + 1$  Teil der natürlichen Zahlen

- „Zahlen“ im  $\lambda$ -Kalkül werden durch Funktionen in Normalform dargestellt
- $n\ f\ x = f\ n$ -mal angewendet auf  $x$
- Bspw.  $(3\ g\ y) = g\ (g\ (g\ y)) = g^3\ y$   
Mit  $3 = \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x)$
- Schreibt eine  $\lambda$ -Funktion *succ*, die eine Church-Zahl nimmt und zu deren Nachfolger auswertet

- „Zahlen“ im  $\lambda$ -Kalkül werden durch Funktionen in Normalform dargestellt
- $n\ f\ x = f\ n$ -mal angewendet auf  $x$
- Bspw.  $(3\ g\ y) = g\ (g\ (g\ y)) = g^3\ y$   
Mit  $3 = \lambda f.\lambda x.f\ (f\ (f\ x))$
- Schreibt eine  $\lambda$ -Funktion *succ*, die eine Church-Zahl nimmt und zu deren Nachfolger auswertet
- Überträgt die Funktion in euren Haskell-Code und wertet *succ*  $c_0$  durch wiederholtes Anwenden von *normalBeta* aus
- Vergleicht euer Ergebnis mit dem von Wavelength.
  - [//pp.ipd.kit.edu/lehre/misc/lambda-ide/Wavelength.html](http://pp.ipd.kit.edu/lehre/misc/lambda-ide/Wavelength.html)