Tutorium 07: Unifikation

Paul Brinkmeier

07. Dezember 2021

Tutorium Programmierparadigmen am KIT

Unifikation

Welche Probleme löst die Unifikation?

$$\begin{aligned} \texttt{state}(\texttt{l},\texttt{l},\texttt{l},\texttt{l}) &\stackrel{!}{=} \texttt{state}(M, W, Z, K) \\ \texttt{opposite}(M, M_2) &\stackrel{!}{=} \texttt{opposite}(\texttt{l},\texttt{r}) \\ Z &\stackrel{!}{=} K \end{aligned}$$

- Unifikation löst Gleichungssysteme von baumförmigen Termen (hier: Prolog-Terme).
- Eingabe: Menge $C = \{\theta_l^1 \stackrel{!}{=} \theta_r^1, ..., \theta_l^n \stackrel{!}{=} \theta_r^n\}$
  - Alle $\theta^i_{\{l,r\}}$ sind Bäume und können Variablen enthalten.
- Ausgabe: *Unifikator* σ, sodass $\sigma(\theta_l^i) = \sigma(\theta_r^i)$.
  - Wenn C nicht unifizierbar (bspw. $X = \texttt{f}(X)$): `fail`

Welche Probleme löst die Unifikation?

$$\mathtt{state}(\mathtt{l},\mathtt{l},\mathtt{l},\mathtt{l}) \stackrel{!}{=} \mathtt{state}(M, W, Z, K)$$

$$\mathtt{opposite}(M, M_2) \stackrel{!}{=} \mathtt{opposite}(\mathtt{l},\mathtt{r})$$

$$Z \stackrel{!}{=} K$$

Mehrere mögliche Lösungen:

$$\sigma_1 = [M_2 \Rightarrow \mathtt{r}] \circ [K \Rightarrow \mathtt{l}] \circ [Z \Rightarrow \mathtt{l}] \circ [W \Rightarrow \mathtt{l}] \circ [M \Rightarrow \mathtt{l}]$$

$$\sigma_2 = [M_2 \Rightarrow \mathtt{r}] \circ [K \Rightarrow \mathtt{l}] \circ [Z \Rightarrow \mathtt{K}] \circ [W \Rightarrow \mathtt{l}] \circ [M \Rightarrow \mathtt{l}]$$

- I.d.R. suchen wir nach *einem* allgemeinsten Unifikator (mgu).
- mgu $\approx$ minimaler Unifikator, der C löst.

Prolog-Unifikation

Unifiziert:

$$
\begin{aligned}
A &\stackrel{!}{=} \mathtt{x} \\
B &\stackrel{!}{=} \mathtt{f}(X) \\
C &\stackrel{!}{=} \mathtt{g}(C) \\
\mathtt{f}(\mathtt{x}, D, \mathtt{z}) &\stackrel{!}{=} \mathtt{f}(\mathtt{x}, \mathtt{y}, E) \\
\mathtt{func}(F, \mathtt{func}(G, \mathtt{z})) &\stackrel{!}{=} \mathtt{func}(\mathtt{x}, \mathtt{func}(\mathtt{y}, F)) \\
\mathtt{g}(\mathtt{x}, H, \mathtt{z}) &\stackrel{!}{=} \mathtt{f}(\mathtt{x}, H, H) \\
\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{z})) &\stackrel{!}{=} \mathtt{f}(J)
\end{aligned}
$$

Ergebnis: Entweder **fail** oder ein Unifikator.

Unifikation (Robinson, [Rob65])

Unifikationsalgorithmus: $\texttt{unify}(C) =$

$$
\begin{array}{l}
\texttt{if } C \texttt{ == } \emptyset \texttt{ then } [\,] \\
\texttt{else let } \{\theta_l = \theta_r\} \cup C' = C \texttt{ in} \\
\quad \texttt{if } \theta_l \texttt{ == } \theta_r \texttt{ then unify}(C') \\
\quad \texttt{else if } \theta_l \texttt{ == Y and Y} \notin FV(\theta_r) \texttt{ then unify}([\texttt{Y} \Rightarrow \theta_r]\, C') \circ [\texttt{Y} \Rightarrow \theta_r] \\
\quad \texttt{else if } \theta_r \texttt{ == Y and Y} \notin FV(\theta_l) \texttt{ then unify}([\texttt{Y} \Rightarrow \theta_l]\, C') \circ [\texttt{Y} \Rightarrow \theta_l] \\
\quad \texttt{else if } \theta_l \texttt{ == f}(\theta_l^1, \ldots, \theta_l^n) \texttt{ and } \theta_r \texttt{ == f}(\theta_r^1, \ldots, \theta_r^n) \\
\qquad\quad \texttt{then unify}(C' \cup \{\theta_l^1 = \theta_r^1, \ldots, \theta_l^n = \theta_r^n\}) \\
\quad \texttt{else } \mathbf{fail}
\end{array}
$$

$\texttt{Y} \in FV(\theta)$ occur check, verhindert zyklische Substitutionen

Korrektheitstheorem

$\texttt{unify}(C)$ terminiert und gibt *mgu* für C zurück, falls C unifizierbar, ansonsten **fail**.

Beweis: Siehe [Pie02]

Robinson-Algorithmus: Zeile für Zeile

$$\texttt{if } C == \emptyset \texttt{ then } []$$

$$\texttt{else let } \{\theta_l \stackrel{!}{=} \theta_r\} \cup C' = C \texttt{ in}$$

- Ist das Gleichungssystem C leer, ist es schon gelöst
  $\rightsquigarrow$ wir brauchen nichts zu ersetzen.
- Andernfalls betrachten wir *eine* der Gleichungen: $\theta_l \stackrel{!}{=} \theta_r$.
  - *Beliebige Auswahl möglich*.
  - Die restlichen Gleichungen merken wir uns als C'.
- Beispiel:
  $C = \{X \stackrel{!}{=} \mathtt{a}, Y \stackrel{!}{=} \mathtt{f}(X), \mathtt{f}(Z) \stackrel{!}{=} Y\}$
  $\theta_l = X, \theta_r = \mathtt{a}, C' = \{Y \stackrel{!}{=} \mathtt{f}(X), \mathtt{f}(Z) \stackrel{!}{=} Y\}$

Robinson-Algorithmus: Zeile für Zeile

$$\texttt{if } \theta_l == \theta_r \texttt{ then unify}(C')$$

- Wenn die Gleichung trivial ist (auf beiden Seiten steht schon das gleiche), brauchen wir auch nichts zu ersetzen.
- Wir müssen also nur C' unifizieren.
- Verschiedene Gleichheitsrelationen:
  - $A \stackrel{!}{=} B$: Element von C, behandeln wir wie eine Datenstruktur.
  - $A == B$: Vergleichsoperator
  - $A = B$: Meta-Gleichheitsoperator, Notation für Pattern-Matching

Robinson-Algorithmus: Zeile für Zeile

$$\texttt{else if}\ \theta_l == Y\ \texttt{and}\ Y \notin FV(\theta_r)$$
$$\texttt{then unify}([Y \Rightarrow \theta_r]\, C') \circ [Y \Rightarrow \theta_r]$$

- Steht auf der linken Seite eine Variable, so wird diese ersetzt.
  - $\theta_l == Y$: „Ist der Term θ_l eine Variable Y?“
  - $Y \notin FV(\theta_r)$: *occurs check*, Y darf sich nicht selbst einsetzen.
- Wir ersetzen in C' dann Y durch θ_r.
- Substitution $[Y \Rightarrow \theta_r]$ wird als Ergebnis vorgemerkt.
- Beispiel: $\theta_l = X$ ✓, $X \notin FV(\theta_r) = FV(\mathtt{a}) = \emptyset$ ✓, d.h. Ergebnis: $\texttt{unify}(\{Y \stackrel{!}{=} \mathtt{f}(\mathtt{a}), \mathtt{f}(Z) \stackrel{!}{=} Y\}) \circ [A \Rightarrow \mathtt{a}]$

Robinson-Algorithmus: Zeile für Zeile

$$\texttt{else if } \theta_r == Y \texttt{ and } Y \notin FV(\theta_l)$$

$$\texttt{then unify}([Y \Rightarrow \theta_l]\, C') \circ [Y \Rightarrow \theta_l]$$

- Auch wenn rechts eine Variable steht muss sie ersetzt werden.
- Beispiel: $\theta_r = Y$ ✓, $X \notin FV(\theta_l) = FV(\mathtt{f}(Z)) = \{Z\}$ ✓, d.h. Ergebnis: $\texttt{unify}(\{\mathtt{f}(Z) \stackrel{!}{=} \mathtt{f}(\mathtt{a})\}) \circ [Y \Rightarrow f(Z)]$

Robinson-Algorithmus: Zeile für Zeile

$$\texttt{else if } \theta_l == \texttt{f}(\theta_l^1, ..., \theta_r^n) \texttt{ and } \theta_r == \texttt{f}(\theta_r^1, ..., \theta_r^n)$$

$$\texttt{then unify}(C' \cup \{\theta_l^1 \overset{!}{=} \theta_r^1, ..., \theta_l^n \overset{!}{=} \theta_r^n\})$$

- Steht auf beiden Seiten ein Funktor, extrahieren wir paarweise neue Gleichungen und unifizieren diese mitsamt C'.
  - Namen der Funktoren *müssen identisch sein*! (hier: `f`)
  - Parameterzahlen der Funktoren *müssen identisch sein*!
  - Für Atome: $n = 0$, aber schon abgedeckt durch den ersten Fall.
- Beispiel: $\theta_l = \texttt{f}(Z), \theta_r = \texttt{f}(\texttt{a})$ ✓, $C' = \emptyset$
  Ergebnis: $\texttt{unify}(\emptyset \cup \{Z \overset{!}{=} \texttt{a}\}) = [Z \Rightarrow \texttt{a}]$ (links Variable)

Typinferenz

Struktur von Lambda-Termen

Lambda-Terme bestehen aus

- Lambdas $\lambda p.\, b$
- Funktionsanwendungen $x\ y$
- Variablen x, Konstanten $\texttt{true}, 17$

$$\lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \texttt{true})$$

Struktur von Lambda-Termen

Lambda-Terme bestehen aus

- **Lambdas** $\lambda p.\, b$
- Funktionsanwendungen $x\ y$
- Variablen x, Konstanten $\texttt{true}, 17$

$$\underbrace{\lambda a.\ \underbrace{\lambda f.\, f\ (a\ \texttt{true})}_{\substack{\text{Lambda}\\ p=f,\, b=f\ (a\ \texttt{true})}}}_{\substack{\text{Lambda}\\ p=a,\, b=\lambda f.\, f\ (a\ \texttt{true})}}$$

Struktur von Lambda-Termen

Lambda-Terme bestehen aus

- Lambdas $\lambda p.\, b$
- **Funktionsanwendungen** $x\ y$
- Variablen x, Konstanten $\texttt{true}, 17$

$$\lambda a.\, \lambda f.\, \underbrace{f\ \underbrace{(a\ \texttt{true})}_{\substack{\text{Anwendung} \\ x=a, y=\texttt{true}}}}_{\substack{\text{Anwendung} \\ x=f, y=a\ \texttt{true}}}$$

Struktur von Lambda-Termen

Lambda-Terme bestehen aus

- Lambdas $\lambda p.\, b$
- Funktionsanwendungen $x\ y$
- **Variablen** x, Konstanten $\texttt{true}, 17$

$$\lambda a.\, \lambda f.\ \underbrace{f}_{\text{Variable}}\ (\ \underbrace{a}_{\text{Variable}}\ \texttt{true})$$

Struktur von Lambda-Termen

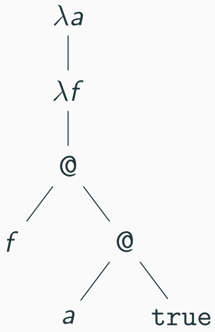
Lambda-Terme bestehen aus

- Lambdas $\lambda p.\, b$
- Funktionsanwendungen $x\ y$
- Variablen x, **Konstanten** $\texttt{true}, 17$

$$\lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \underbrace{\texttt{true}}_{\text{Konstante}})$$

Lambda-Terme als Bäume

Wir können Lambda-Terme also als Bäume mit Lambda- und Anwendungsknoten und Variablen- und Konstantenblättern betrachten, um ihre Struktur zu untersuchen:



$\lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \mathtt{true})$

Cheatsheet: Typisierter Lambda-Kalkül

$$\frac{\Gamma(t) = \tau}{\Gamma \vdash t : \tau}\textsc{Var} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \phi \to \alpha \qquad \Gamma \vdash x : \phi}{\Gamma \vdash f\ x : \alpha}\textsc{App}$$

$$\frac{\Gamma, p : \pi \vdash b : \rho}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \pi \to \rho}\textsc{Abs}$$

- Typvariablen: τ, α, π, ρ
- Funktionstypen: $\tau_1 \to \tau_2$, rechtsassoziativ
- (Weitere Typen: Listen, Tupel, etc.)
- *Typisierungsregeln sind eindeutig*: Eine Regel pro Termform

(Allgemeine) Typisierungsregel für Variablen

- „Der Typkontext Γ enthält einen Typ τ für t."

$$\frac{\boxed{\Gamma(t) = \tau}}{\boxed{\Gamma \vdash t : \tau}}\ \textsc{Var}$$

- Daraus folgt:
- „Variable t hat im Kontext Γ den Typ τ."

Typisierungsregel für Funktionsanwendungen

- „f ist im Kontext Γ eine Funktion, die ϕs auf αs abbildet."
- „x ist im Kontext Γ ein Term des Typs ϕ."

$$\frac{\boxed{\Gamma \vdash f : \phi \to \alpha} \qquad \boxed{\Gamma \vdash x : \phi}}{\boxed{\Gamma \vdash f\ x : \alpha}}\ \textsc{App}$$

- Daraus folgt:
- „x eingesetzt in f ergibt einen Term des Typs α."

Typisierungsregel für Lambdas

- „Unter Einfügung des Typs π von p in den Kontext…"
- „… ist b als Funktion von p typisierbar."

$$\dfrac{\boxed{\Gamma, p : \pi} \qquad \boxed{\vdash b : \rho}}{\boxed{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \pi \to \rho}}\ \textsc{Abs}$$

- Daraus folgt:
- „$\lambda p.\, b$ ist eine Funktion, die πs auf ρs abbildet"

Typinferenz

Vorgehensweise zur Typinferenz:

- Stelle Typherleitungsbaum auf
  - In jedem Schritt werden neue Typvariablen α_i angelegt
  - Statt die Typen direkt im Baum einzutragen, werden Gleichungen in einem Constraint-System eingetragen
- Unifiziere Constraint-System zu einem Unifikator
  - Robinson-Algorithmus, im Grunde wie bei Prolog
  - I.d.R.: Allgemeinster Unifikator (findet man per Robinson)

Unifikation (Robinson, [Rob65])

Unifikationsalgorithmus: $\mathtt{unify}(C) =$

$$
\begin{array}{l}
\mathtt{if}\ C\ \mathtt{==}\ \emptyset\ \mathtt{then}\ []\\
\mathtt{else\ let}\ \{\theta_l = \theta_r\} \cup C' = C\ \mathtt{in}\\
\quad \mathtt{if}\ \theta_l\ \mathtt{==}\ \theta_r\ \mathtt{then\ unify}(C')\\
\quad \mathtt{else\ if}\ \theta_l\ \mathtt{==}\ \mathtt{Y}\ \mathtt{and}\ \mathtt{Y} \notin FV(\theta_r)\ \mathtt{then\ unify}([\mathtt{Y} \Rightarrow \theta_r]\, C') \circ [\mathtt{Y} \Rightarrow \theta_r]\\
\quad \mathtt{else\ if}\ \theta_r\ \mathtt{==}\ \mathtt{Y}\ \mathtt{and}\ \mathtt{Y} \notin FV(\theta_l)\ \mathtt{then\ unify}([\mathtt{Y} \Rightarrow \theta_l]\, C') \circ [\mathtt{Y} \Rightarrow \theta_l]\\
\quad \mathtt{else\ if}\ \theta_l\ \mathtt{==}\ \mathtt{f}(\theta_l^1, \ldots, \theta_l^n)\ \mathtt{and}\ \theta_r\ \mathtt{==}\ \mathtt{f}(\theta_r^1, \ldots, \theta_r^n)\\
\qquad\qquad \mathtt{then\ unify}(C' \cup \{\theta_l^1 = \theta_r^1, \ldots, \theta_l^n = \theta_r^n\})\\
\quad \mathtt{else}\ \mathbf{fail}
\end{array}
$$

$\mathtt{Y} \in FV(\theta)$ occur check, verhindert zyklische Substitutionen

Korrektheitstheorem

$\mathtt{unify}(C)$ terminiert und gibt *mgu* für C zurück, falls C unifizierbar, ansonsten **`fail`**.

Beweis: Siehe [Pie02]

Unifikation

Unifikationsalgorithmus: $\texttt{unify}(C) =$

$$
\begin{array}{l}
\texttt{if}\ C\ \texttt{==}\ \emptyset\ \texttt{then}\ []\\
\texttt{else let}\ \{\tau_1 = \tau_2\} \cup C' = C\ \texttt{in}\\
\quad \texttt{if}\ \tau_1\ \texttt{==}\ \tau_2\ \texttt{then unify}(C')\\
\quad \texttt{else if}\ \tau_1\ \texttt{==}\ \alpha\ \texttt{and}\ \alpha \notin FV(\tau_2)\ \texttt{then unify}([\alpha \Rightarrow \tau_2]\,C') \circ [\alpha \Rightarrow \tau_2]\\
\quad \texttt{else if}\ \tau_2\ \texttt{==}\ \alpha\ \texttt{and}\ \alpha \notin FV(\tau_1)\ \texttt{then unify}([\alpha \Rightarrow \tau_1]\,C') \circ [\alpha \Rightarrow \tau_1]\\
\quad \texttt{else if}\ \tau_1\ \texttt{==}\ (\tau_1' \to \tau_1'')\ \texttt{and}\ \tau_2\ \texttt{==}\ (\tau_2' \to \tau_2'')\\
\qquad\quad \texttt{then unify}(C' \cup \{\tau_1' = \tau_2', \tau_1'' = \tau_2''\})\\
\quad \texttt{else}\ \textbf{fail}
\end{array}
$$

$\alpha \in FV(\tau)$ occur check, verhindert zyklische Substitutionen

Korrektheitstheorem

$\texttt{unify}(C)$ terminiert und gibt *mgu* für C zurück, falls C unifizierbar, ansonsten **`fail`**.

Beweis: Siehe Literatur

Unifikation für Typinferenz

Typen kann man auch als Funktoren darstellen:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 \to \tau_2 &\quad\equiv\quad \texttt{func}(\tau_1, \tau_2) \\
[\tau] &\quad\equiv\quad \texttt{list}(\tau) \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Typinferenz: Übungsaufgaben

$$\frac{\dots}{f : \mathrm{int} \to \beta \vdash \lambda x.\, f\ x : \alpha_1}\textsc{Abs}$$

- „Finde den allgemeinsten Typen α_1 von $\lambda x.\, f\ x$"

Erinnerung:

- Baum mit durchnummerierten α_i aufstellen
- Constraints sammeln:

$$\frac{\Gamma(t) = \alpha_j}{\Gamma \vdash t : \alpha_i}\textsc{Var} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \alpha_j \qquad \Gamma \vdash x : \alpha_k}{\Gamma \vdash f\ x : \alpha_i}\textsc{App} \qquad \frac{\Gamma, p : \alpha_j \vdash b : \alpha_k}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \alpha_i}\textsc{Abs}$$

Constraint: $\{\alpha_i = \alpha_j\}$	Constraint: $\{\alpha_j = \alpha_k \to \alpha_i\}$	Constraint: $\{\alpha_i = \alpha_j \to \alpha_k\}$

- Constraint-System auflösen

Typinferenz: Übungsaufgaben

$$\frac{\cdots}{\vdash \lambda f.\, \lambda x.\, (f\ x)\ x : \alpha_1}\textsc{Abs}$$

- „Finde den allgemeinsten Typen α_1 von $\lambda f.\, \lambda x.\, (f\ x)\ x$"

Erinnerung:

- Baum mit durchnummerierten α_i aufstellen
- Constraints sammeln:

$$\frac{\Gamma(t) = \alpha_j}{\Gamma \vdash t : \alpha_i}\textsc{Var} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \alpha_j \qquad \Gamma \vdash x : \alpha_k}{\Gamma \vdash f\ x : \alpha_i}\textsc{App} \qquad \frac{\Gamma, p : \alpha_j \vdash b : \alpha_k}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \alpha_i}\textsc{Abs}$$

Constraint:	Constraint:	Constraint:
$\{\alpha_i = \alpha_j\}$	$\{\alpha_j = \alpha_k \to \alpha_i\}$	$\{\alpha_i = \alpha_j \to \alpha_k\}$

- Constraint-System auflösen

Prolog

Cheatsheet: Prolog

- Terme:
  - Variablen: `Var`, `X`, `X2`
  - Funktoren/Atome: `f(a, b, c)`, `app(f, x)`, `main`
  - Arithmetische Ausdrücke: `17 + 25`, `6 * 7`
- Regeln: `rule(P1, ..., PN) :- Goal1, ..., GoalM.`
- Ziele:
  - Funktor: `member(X, [1,2,3])`
  - Unifikation: `X = Y`
  - Arithmetik: `N is M + 1`
  - Verneinung: `not(G)`
  - Arithmetischer Vergleich: `X =:= Y`, `X =\= Y`, etc.
  - Cut: `!`
- Konzepte: *Unifikation*, *Resolution*

Prolog — Regelsysteme als Programmiersprache

```
grandparent(X, Y) :- parent(X, Z), parent(Z, Y).
parent(X, Y) :- mother(X, Y).
parent(X, Y) :- father(X, Y).

mother(inge, emil).
mother(inge, petra).
father(emil, kunibert).
```

`?- grandparent(inge, kunibert).` $\rightsquigarrow$ `yes.`

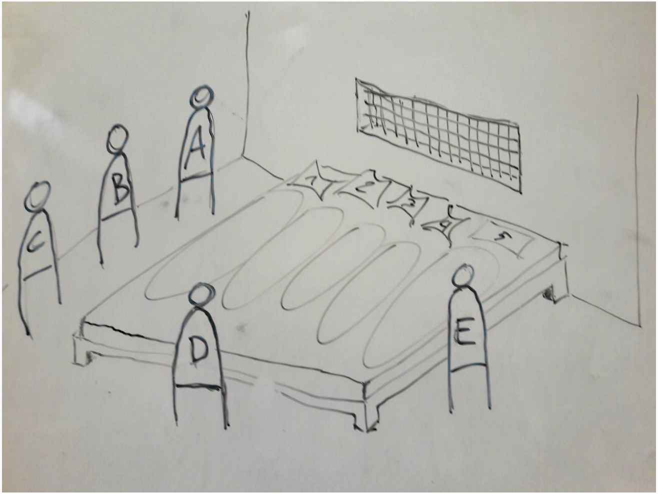
Prolog — Regelsysteme als Programmiersprache

```
grandparent(X, Y) :- parent(X, Z), parent(Z, Y).
parent(X, Y) :- mother(X, Y).
parent(X, Y) :- father(X, Y).

mother(inge, emil).
mother(inge, petra).
father(emil, kunibert).
```

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{\texttt{mother(inge, emil)}}}{\texttt{parent(inge, emil)}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\texttt{father(emil, kunibert)}}}{\texttt{parent(emil, kunibert)}}}{\texttt{grandparent(inge, kunibert)}}$$

Schlafplätze im Gefängnis



Dinesman's multiple-dwelling problem

Bob kommt nun ins Gefängnis. Aaron, Bob, Connor, David und Edison müssen sich zu fünft ein sehr breites Bett teilen.

- Aaron will nicht am rechten Ende liegen
- Bob will nicht am linken Ende liegen
- Connor will an keinem der beiden Enden liegen
- David will weiter rechts liegen als Bob
- Connor schnarcht sehr laut;
  Bob und Edison sind sehr geräuschempfindlich
  - $\rightsquigarrow$ Bob will nicht direkt neben Connor liegen
  - $\rightsquigarrow$ Edison will nicht direkt neben Connor liegen

Wie können die 5 Schlafplätze verteilt werden?

Schlafplätze im Gefängnis

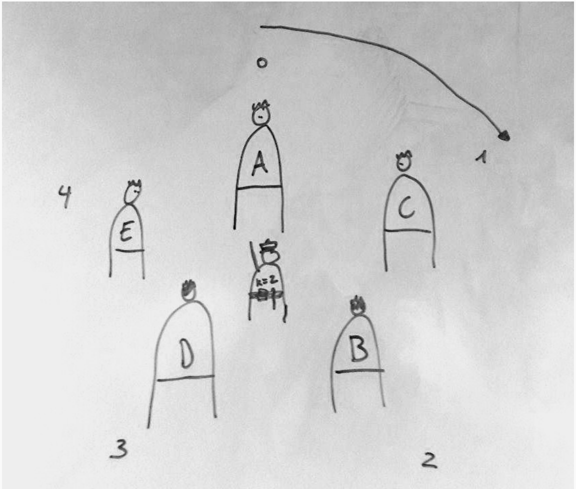
```
% schlafplaetze.pl

bett(X) :- member(X, [1, 2, 3, 4, 5]).

schlafplaetze(A, B, C, D, E) :-
  bett(A), bett(B), bett(C), bett(D), bett(E),
  distinct([A, B, C, D, E]),
  % weitere Tests
```

- Fügt weitere benötigte Tests ein
- Implementiert:
  - `distinct/1` prüft Listenelemente auf paarweise Ungleichheit
  - `adjacent/2` prüft, ob $|A - B| = 1$

Putzdienst



Putzdienst

- Aaron, Bob, Connor, David und Edison sollen 4 Einheiten Putzdienst übernehmen
- Da sie sich nicht einigen können, wer aussetzen darf, wendet ein Wärter folgendes Vorgehen an:
  - Die fünf werden im Kreis aufgestellt
  - Der Wärter stellt sich in die Mitte
  - Beginnend bei 12 Uhr dreht er sich im Uhrzeigersinn und teilt jeden k-ten (bspw. $k = 2$) Insassen zum Putzdienst ein
    - D.h. es werden immer $k - 1$ Insassen übersprungen

An welcher Stelle muss Bob stehen, um nicht putzen zu müssen?

Putzdienst

- Aaron, Bob, Connor, David und Edison sollen 4 Einheiten Putzdienst übernehmen
- Da sie sich nicht einigen können, wer aussetzen darf, wendet ein Wärter folgendes Vorgehen an:
  - Die fünf werden im Kreis aufgestellt
  - Der Wärter stellt sich in die Mitte
  - Beginnend bei 12 Uhr dreht er sich im Uhrzeigersinn und teilt jeden k-ten (bspw. $k = 2$) Insassen zum Putzdienst ein
    - D.h. es werden immer $k - 1$ Insassen übersprungen

An welcher Stelle muss Bob stehen, um nicht putzen zu müssen?
An welcher Stelle muss Bob bei 41 Insassen und $k = 3$ stehen?

Putzdienst

```
% putzdienst.pl

% Bspw.
% ?- keinPutzdienstFuer([a, b, c, d, e], 2, X)
keinPutzdienstFuer(L, K, X) :-
  Countdown is K - 1,
  helper(L, Countdown, K, X).

helper([X], _C, _K, X) :- !.
...
```

- Weitere Fälle für `helper/4`:
  - `C = 0` $\rightsquigarrow$ Element entfernen
  - Ansonsten: Element hinten wieder anhängen

Quellen der Aufgaben

Zum Nachlesen und Vergleichen mit Lösungen in anderen Programmiersprachen:

- WG — Rosetta Code: Department Numbers
- Detektiv — github.com/Anniepoo/prolog-examples
- Schlafplätze — SICP, S. 418
- Putzdienst — Rosetta Code: Josephus problem

Nächste Woche (14. Dezember 2021)

- Blätter 5-7
- Mehr...
  - ...Prolog?
  - ...Typisierung?
  - ...Haskell?