Tutorium 08: Typisierung, Prolog

Paul Brinkmeier

14. Dezember 2021

Tutorium Programmierparadigmen am KIT

ÜB 5, 6

5.1 — Klammerung im λ-Kalkül

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)c_5 =$$

5.1 — Klammerung im λ-Kalkül

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)c_5 = \qquad \underline{(}\underline{(}c_0\ c_1\underline{)}\ (\underline{(}c_2\ c_3\underline{)}\ c_4)\underline{)}\ c_5 \tag{1}$$

$$(c_0\ c_1\ c_2)\ (c_3\ c_4\ c_5) =$$

5.1 — Klammerung im λ-Kalkül

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)c_5 = \qquad ((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ c_5 \tag{1}$$

$$(c_0\ c_1\ c_2)\ (c_3\ c_4\ c_5) = \qquad ((c_0\ c_1)\ c_2)\ ((c_3\ c_4)\ c_5) \tag{2}$$

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)\ (c_5\ c_6) =$$

5.1 — Klammerung im λ-Kalkül

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)c_5 = \qquad ((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ c_5 \tag{1}$$

$$(c_0\ c_1\ c_2)\ (c_3\ c_4\ c_5) = \qquad ((c_0\ c_1)\ c_2)\ ((c_3\ c_4)\ c_5) \tag{2}$$

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)\ (c_5\ c_6) = \qquad ((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ (c_5\ c_6) \tag{3}$$

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)\ c_5\ c_6 =$$

5.1 — Klammerung im λ-Kalkül

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)c_5 = \qquad ((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ c_5 \tag{1}$$

$$(c_0\ c_1\ c_2)\ (c_3\ c_4\ c_5) = \qquad ((c_0\ c_1)\ c_2)\ ((c_3\ c_4)\ c_5) \tag{2}$$

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)\ (c_5\ c_6) = \qquad ((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ (c_5\ c_6) \tag{3}$$

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)\ c_5\ c_6 = \qquad (((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ c_5)\ c_6 \tag{4}$$

$$c_0\ (c_1\ (c_2\ c_3\ c_4))\ c_5\ c_6 =$$

5.1 — Klammerung im λ-Kalkül

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)c_5 = \quad ((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ c_5 \tag{1}$$

$$(c_0\ c_1\ c_2)\ (c_3\ c_4\ c_5) = \quad ((c_0\ c_1)\ c_2)\ ((c_3\ c_4)\ c_5) \tag{2}$$

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)\ (c_5\ c_6) = \quad ((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ (c_5\ c_6) \tag{3}$$

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)\ c_5\ c_6 = \quad (((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ c_5)\ c_6 \tag{4}$$

$$c_0\ (c_1\ (c_2\ c_3\ c_4))\ c_5\ c_6 = \quad ((c_0\ (c_1\ ((c_2\ c_3)\ c_4)))\ c_5)\ c_6 \tag{5}$$

$$(\lambda y.c_0\ c_1\ c_2)\ (c_3\ c_4\ c_5) =$$

5.1 — Klammerung im λ-Kalkül

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)c_5 = \quad (((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ c_5 \tag{1}$$

$$(c_0\ c_1\ c_2)\ (c_3\ c_4\ c_5) = \quad ((c_0\ c_1)\ c_2)\ ((c_3\ c_4)\ c_5) \tag{2}$$

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)\ (c_5\ c_6) = \quad ((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ (c_5\ c_6) \tag{3}$$

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)\ c_5\ c_6 = \quad (((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ c_5)\ c_6 \tag{4}$$

$$c_0\ (c_1\ (c_2\ c_3\ c_4))\ c_5\ c_6 = \quad ((c_0\ (c_1\ ((c_2\ c_3)\ c_4)))\ c_5)\ c_6 \tag{5}$$

$$(\lambda y.c_0\ c_1\ c_2)\ (c_3\ c_4\ c_5) = \quad (\lambda y.(c_0\ c_1)\ c_2)\ ((c_3\ c_4)\ c_5) \tag{6}$$

$$(\lambda y.(c_0\ (\lambda z.c_1\ c_2)))\ (c_3\ c_4\ c_5) =$$

5.1 — Klammerung im λ-Kalkül

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)c_5 = \quad ((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ c_5 \tag{1}$$

$$(c_0\ c_1\ c_2)\ (c_3\ c_4\ c_5) = \quad ((c_0\ c_1)\ c_2)\ ((c_3\ c_4)\ c_5) \tag{2}$$

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)\ (c_5\ c_6) = \quad ((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ (c_5\ c_6) \tag{3}$$

$$c_0\ c_1\ (c_2\ c_3\ c_4)\ c_5\ c_6 = \quad (((c_0\ c_1)\ ((c_2\ c_3)\ c_4))\ c_5)\ c_6 \tag{4}$$

$$c_0\ (c_1\ (c_2\ c_3\ c_4))\ c_5\ c_6 = \quad ((c_0\ (c_1\ ((c_2\ c_3)\ c_4)))\ c_5)\ c_6 \tag{5}$$

$$(\lambda y.c_0\ c_1\ c_2)\ (c_3\ c_4\ c_5) = \quad (\lambda y.(c_0\ c_1)\ c_2)\ ((c_3\ c_4)\ c_5) \tag{6}$$

$$(\lambda y.(c_0\ (\lambda z.c_1\ c_2)))\ (c_3\ c_4\ c_5) = \quad (\lambda y.(c_0\ (\lambda z.(c_1\ c_2))))\ ((c_3\ c_4)\ c_5) \tag{7}$$

- Funktionsanwendungen sind linksassoziativ, wie in Haskell
- Eigentlich: In Haskell sind Funktionsanwendungen linksassoziativ, wie im λ-Kalkül

5.1 — Klammerung im λ-Kalkül

$$(\lambda y.y)\ c_0 \stackrel{?}{=} \lambda y.y\ c_0 \tag{1}$$

$$\lambda y.(y\ c_0) \stackrel{?}{=} \lambda y.y\ c_0 \tag{2}$$

- Term 1 $\approx$ `App (Abs "y" (Var "y")) (Var "c0")`
- Term 2 $\approx$ `Abs "y" (App (Var "y") (Var "c0"))`
- Funktionsanwendung bindet am stärkesten $\rightsquigarrow$ (2)

5.1 — Klammerung im λ-Kalkül

$$(\lambda y.y)\ c_0 \stackrel{?}{=} \lambda y.y\ c_0 \tag{1}$$

$$\lambda y.(y\ c_0) \stackrel{?}{=} \lambda y.y\ c_0 \tag{2}$$

- Term 1 $\approx$ `app(abs(y, y), c0)`
- Term 2 $\approx$ `abs(y, app(y, c0))`
- Funktionsanwendung bindet am stärkesten $\rightsquigarrow$ (2)

1.3 — Klammerung im λ-Kalkül

$$((x)\ c_0)\,[x \to \lambda y.y] = \quad (\lambda y.y)\ c_0 \tag{1}$$

$$(x\ c_0)\,[x \to (\lambda y.y)] = \quad (\lambda y.y)\ c_0 \tag{2}$$

$$(x\ c_0)\,[x \to \lambda y.y] = \quad (\lambda y.y)\ c_0 \tag{3}$$

- Alle drei Substitutionen führen zum selben Ergebnis
- Klammern auf der rechten Seite haben nichts mit der Substution zu tun
- „Für beliebiges t repräsentieren t und (t) den gleichen λ-Term“ stimmt

1.4 — Klammerung im λ-Kalkül

Angenommen, $x = c_0\ c_1$.

Welche der folgenden Aussagen gelten?

$$c_0\ c_1\ c_2 = \quad x\ c_2 \tag{1}$$

$$c_2\ c_0\ c_1 = \quad c_2\ x \tag{2}$$

$$c_2\ (c_3\ c_4)\ c_0\ c_1 = \quad c_2\ (c_3\ c_4)\ x \tag{3}$$

$$c_2\ (c_0\ c_1\ c_3)c_4 = \quad c_2\ (x\ c_3)\ c_4 \tag{4}$$

1.4 — Klammerung im λ-Kalkül

Angenommen, $x = c_0\ c_1$.

Welche der folgenden Aussagen gelten?

$$c_0\ c_1\ c_2 = \quad x\ c_2 \tag{1}$$

$$c_2\ c_0\ c_1 = \quad c_2\ x \tag{2}$$

$$c_2\ (c_3\ c_4)\ c_0\ c_1 = \quad c_2\ (c_3\ c_4)\ x \tag{3}$$

$$c_2\ (c_0\ c_1\ c_3)c_4 = \quad c_2\ (x\ c_3)\ c_4 \tag{4}$$

- 1 und 4 gelten
- $c_2\ c_0\ c_1 = \underline{(}c_2\ c_0\underline{)}\ c_1 \neq c_2\ \underline{(}c_0\ c_1\underline{)} = c_2\ x$
- $c_2\ (c_3\ c_4)\ c_0\ c_1 \overset{*}{\neq} c_2\ (c_3\ c_4)\ x$

1.4 — Klammerung im λ-Kalkül

$$\underline{(\lambda a.\, a)}\ (\lambda b.\, b)\ (\underline{(\lambda c.\, c)}\ (\underline{(\lambda d.\, d)}\ (\lambda e.\, e)\ (\lambda f.\, f)))\ (\lambda g.\, g)\ (\underline{(\lambda h.\, h)}\ (\lambda i.\, i))$$

- Gute Übung um Redex zu finden
- Warum ist $\lambda g.\, g$ nicht die linke Seite eines Redex?

Wiederholung: Auswertungsstrategien

$$\overbrace{\underline{\text{succ}}\ \overbrace{(\underline{\text{succ}}\ c_0)}^{\text{Redex 2}}}^{\text{Redex 1}}$$

mit

$$\begin{aligned} c_0 &= \lambda s.\, \lambda z.\, z \\ \text{succ} &= \lambda n.\, \lambda s.\, \lambda z.\, s\ (n\ s\ z) \end{aligned}$$

- Welcher Redex soll zuerst ausgewertet werden?
- $\rightsquigarrow$ verschiedene Auswertungsstrategien

Wiederholung: Normalreihenfolge

$$
\begin{aligned}
& \underline{\mathsf{succ}}\ (\underline{\mathsf{succ}}\ c_0) \\
\Rightarrow_\beta \quad & \lambda s.\, \lambda z.\, s\ ((\underline{\mathsf{succ}}\ c_0)\ s\ z) \\
\Rightarrow_\beta \quad & \lambda s.\, \lambda z.\, s\ (\underline{(\lambda s.\, \lambda z.\, s\ (\underline{c_0}\ s\ z))}\ s\ z) \\
\Rightarrow_\beta^2 \quad & \lambda s.\, \lambda z.\, s\ (s\ (\underline{c_0}\ s\ z)) \\
\Rightarrow_\beta^2 \quad & \lambda s.\, \lambda z.\, s\ (s\ z) \not\Rightarrow
\end{aligned}
$$

Normalreihenfolge: Linkester Redex zuerst.

Wiederholung: Call-by-Name

$$\underline{\text{succ}}\ (\underline{\text{succ}}\ c_0)$$

$$\Rightarrow_\beta \quad \lambda s.\, \lambda z.\, s\ ((\underline{\text{succ}}\ c_0)\ s\ z) \quad \not\Rightarrow_{\text{CbN}}$$

Call-by-Name: Linkester Redex zuerst, aber:

- Funktions*inhalte* werden nicht weiter reduziert
- $\rightsquigarrow$ Betrachte nur Redexe, die nicht von einem λ umgeben sind
- So (ähnlich) funktioniert auch Laziness in Haskell

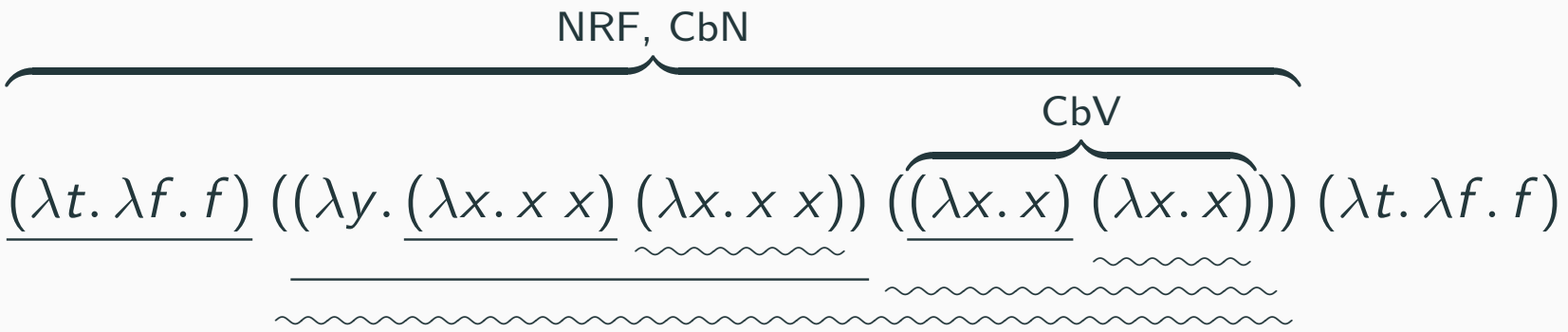
Wiederholung: Call-by-Value

$$
\begin{aligned}
& \underline{\mathsf{succ}}\ (\underline{\mathsf{succ}}\ c_0) \\
\Rightarrow_\beta \quad & \underline{\mathsf{succ}}\ (\lambda s.\, \lambda z.\, s\ (\underline{c_0}\ s\ z)) \\
\Rightarrow_\beta \quad & \lambda s.\, \lambda z.\, \underline{(\lambda s.\, \lambda z.\, s\ (\underline{c_0}\ s\ z))}\ s\ z \not\Rightarrow_{\mathsf{CbV}}
\end{aligned}
$$

Call-by-Value: Linkester Redex zuerst, aber:

- Funktionsinhalte werden nicht weiter reduziert
- $\leadsto$ Betrachte nur Redexe, die nicht von einem λ umgeben sind
- Berechne *Argumente vor dem Einsetzen*
- $\leadsto$ Betrachte nur Redexe, deren Argument *unter CbV* nicht weiter reduziert werden muss

5.2 — Redexe, Auswertungsstrategie



- NRF: Linkester Redex
- CbN: Linkester Redex, nicht in Lambda
- CbV: Linkester Redex, nicht in Lambda, Argumente zuerst

5.2 — Redexe, Auswertungsstrategie

$$\lambda y.\ \overbrace{(\lambda z.\ \underline{(\lambda x.\, x)}\ \underset{\sim}{\underline{(\lambda x.\, x)}}\ z)\ \underset{\sim}{y}}^{\text{NRF}}$$

- NRF: Linkester Redex
- CbN: Linkester Redex, nicht in Lambda
- CbV: Linkester Redex, nicht in Lambda, Argumente zuerst

5.3 — Church-Zahlen in Haskell

```
module ChurchNumbers where

type Church t = (t -> t) -> t -> t

int2church 0 = \s z -> z
int2church n = \s z -> s (int2church (n - 1) s z)

church2int cn = cn (+1) 0
```

- Alte Klausuraufgabe
- Typisch: Lambda-Wissen hilft beim Lösen

5.4 — Church-Paare

$$pair = \lambda a.\, \lambda b.\, \lambda p.\, p\ a\ b$$

$$(3, 5) \approx pair\ c_3\ c_5 \Rightarrow_\beta^2 \lambda p.\, p\ c_3\ c_5$$

$$fst = \lambda p.\, p\ (\lambda a.\, \lambda b.\, a)$$

- „Fertiges“ Paar nimmt Funktion p als Argument
- p wählt ersten oder zweiten Eintrag

5.4 — Church-Paare

$$pair = \lambda a.\, \lambda b.\, \lambda p.\, p\ a\ b$$

$$(3, 5) \approx pair\ c_3\ c_5 \Rightarrow_\beta^2 \lambda p.\, p\ c_3\ c_5$$

$$fst = \lambda p.\, p\ (\lambda a.\, \lambda b.\, a)$$

- $snd = \lambda p.\, p\ (\lambda a.\, \lambda b.\, b)$
- *next*: Berechne zu (n, m): $(m, m + 1)$
- $next = \lambda p.\, pair\ (snd\ p)\ (succ\ (snd\ p))$
- $pred = \lambda n.\, fst\ (n\ next\ (pair\ c_0\ c_0))$
- $sub = \lambda m.\, \lambda n.\, n\ pred\ m$

Typisierung

Klausuraufgabe WS16/18 A3 a) (6P.)

$$C_1 = \{\alpha_9 = \alpha_{10} \to \alpha_8, \alpha_9 = \alpha_4, \alpha_{10} = \texttt{bool}\}$$
$$C_2 = \{\alpha_{12} = \alpha_{13} \to \alpha_{11}, \alpha_{12} = \alpha_4, \alpha_{13} = \texttt{int}\}$$

i. Geben Sie allgemeinste Unifikatoren σ_1 für C_1 und σ_2 für C_2 an.

ii. Ist auch $C_1 \cup C_2$ unifizierbar?

iii. Ist der Ausdruck

$$\lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \texttt{true})\ (a\ 17)$$

typisierbar? Begründen Sie ihre Antwort *kurz*.

Klausuraufgabe WS16/18 A3 a) (6P.)

$$C_1 = \{\alpha_9 = \alpha_{10} \to \alpha_8, \alpha_9 = \alpha_4, \alpha_{10} = \texttt{bool}\}$$
$$C_2 = \{\alpha_{12} = \alpha_{13} \to \alpha_{11}, \alpha_{12} = \alpha_4, \alpha_{13} = \texttt{int}\}$$

Geben Sie allgemeinste Unifikatoren σ_1 für C_1 und σ_2 für C_2 an.

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \texttt{unify}(\{\alpha_9 = \alpha_{10} \to \alpha_8, \alpha_9 = \alpha_4, \alpha_{10} = \texttt{bool}\}) \\
&= \ldots = [\alpha_9 \mapsto \texttt{bool} \to \alpha_8, \alpha_4 \mapsto \texttt{bool} \to \alpha_8, \alpha_{10} \mapsto \texttt{bool}] \\
\sigma_2 &= \texttt{unify}(\{\alpha_{12} = \alpha_{13} \to \alpha_{11}, \alpha_{12} = \alpha_4, \alpha_{13} = \texttt{int}\}) \\
&= \ldots = [\alpha_{12} \mapsto \texttt{int} \to \alpha_{11}, \alpha_4 \mapsto \texttt{int} \to \alpha_{11}, \alpha_{13} \mapsto \texttt{int}]
\end{aligned}$$

Klausuraufgabe WS16/18 A3 a) (6P.)

$$C_1 = \{\alpha_9 = \alpha_{10} \to \alpha_8, \alpha_9 = \alpha_4, \alpha_{10} = \texttt{bool}\}$$
$$C_2 = \{\alpha_{12} = \alpha_{13} \to \alpha_{11}, \alpha_{12} = \alpha_4, \alpha_{13} = \texttt{int}\}$$

Ist auch $C_1 \cup C_2$ unifizierbar?

$$\sigma_1 = ... = \left[\alpha_9 \Rightarrow \texttt{bool} \to \alpha_8, \underline{\alpha_4 \Rightarrow \texttt{bool} \to \alpha_8}, \alpha_{10} \Rightarrow \texttt{bool}\right]$$
$$\sigma_2 = ... = \left[\alpha_{12} \Rightarrow \texttt{int} \to \alpha_{11}, \underline{\alpha_4 \Rightarrow \texttt{int} \to \alpha_{11}}, \alpha_{13} \Rightarrow \texttt{int}\right]$$

A: Nein, da die *allgemeinsten Unifikatoren* σ_1 und σ_2 einen Konflikt für α_4 enthalten: $\texttt{unify}(\{\texttt{bool} = \texttt{int}\}) = \texttt{fail}$

Klausuraufgabe WS16/18 A3 a) (6P.)

$$C_1 = \{\alpha_9 = \alpha_{10} \to \alpha_8, \alpha_9 = \alpha_4, \alpha_{10} = \texttt{bool}\}$$
$$C_2 = \{\alpha_{12} = \alpha_{13} \to \alpha_{11}, \alpha_{12} = \alpha_4, \alpha_{13} = \texttt{int}\}$$

Ist der Ausdruck

$$\lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \texttt{true})\ (a\ 17)$$

typisierbar? Begründen Sie ihre Antwort *kurz*.

A: Nein, da *a* mit zwei verschiedenen Typen verwendet wird.

Cheatsheet: Typisierter Lambda-Kalkül

$$\frac{\Gamma, p : \pi \vdash b : \rho}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \pi \to \rho}\textsc{Abs} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \phi \to \alpha \qquad \Gamma \vdash x : \phi}{\Gamma \vdash f\ x : \alpha}\textsc{App}$$

$$\frac{\Gamma(t) = \tau}{\Gamma \vdash t : \tau}\textsc{Var} \qquad \frac{c \in \textsc{Const}}{\Gamma \vdash c : \tau_c}\textsc{Const}$$

- Typvariablen: τ, α, π, ρ
- Funktionstypen: $\tau_1 \to \tau_2$, rechtsassoziativ
- *Typisierungsregeln sind eindeutig*: Eine Regel pro Termform

Was bedeuten eigentlich $\vdash$, Γ und $:$?

$$\lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \texttt{true})$$

Um zu einem solchen Term ein Typisierungsproblem zu beschreiben, notieren wir:

$$\Gamma \vdash \lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \texttt{true}) : \tau$$

„Im *Typkontext* Γ hat der Term den Typen τ.“

- Γ: Enthält Typen für freie Variablen.
- $\ldots \vdash \ldots : \ldots$ — Notation für Typisierungsproblem.

Γ in Aktion

$$\Gamma \vdash a + 42 : \texttt{int}$$

$$\textsc{Const} = \{42\}, \tau_{42} = \texttt{int}$$

Damit die Aussage „$a + 42$ hat in Γ den Typen `int`“ stimmt, müssen wir für Γ wählen:

Γ in Aktion

$$\Gamma \vdash a + 42 : \texttt{int}$$
$$\textsc{Const} = \{42\}, \tau_{42} = \texttt{int}$$

Damit die Aussage „$a + 42$ hat in Γ den Typen $\texttt{int}$“ stimmt, müssen wir für Γ wählen:

- $\Gamma = a : \texttt{int}, + : \texttt{int} \to \texttt{int} \to \texttt{int}$

Γ in Aktion

$$\Gamma \vdash a + 42 : \texttt{int}$$

$$\textsc{Const} = \{42\}, \tau_{42} = \texttt{int}$$

Damit die Aussage „$a + 42$ hat in Γ den Typen $\texttt{int}$“ stimmt, müssen wir für Γ wählen:

- $\Gamma = a : \texttt{int}, + : \texttt{int} \to \texttt{int} \to \texttt{int}$
- Allgemeiner: $\Gamma = a : \alpha, + : \alpha \to \texttt{int} \to \texttt{int}$

Typisierungsregel für Lambdas

- „Unter Einfügung des Typs π von p in den Kontext...“
- „... ist b als Funktion von p typisierbar.“

$$\frac{\Gamma, p : \pi \qquad \vdash b : \rho}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \pi \to \rho}\ \textsc{Abs}$$

- Daraus folgt:
- „$\lambda p.\, b$ ist eine Funktion, die πs auf ρs abbildet“

Typisierungsregel für Funktionsanwendungen

- „f ist im Kontext Γ eine Funktion, die ϕs auf αs abbildet.“
- „x ist im Kontext Γ ein Term des Typs ϕ.“

$$\frac{\Gamma \vdash f : \phi \to \alpha \qquad \Gamma \vdash x : \phi}{\Gamma \vdash f\ x : \alpha}\ \textsc{App}$$

- Daraus folgt:
- „x eingesetzt in f ergibt einen Term des Typs α.“

Einfache Typisierungsregel für Variablen

- „Der Typkontext Γ enthält einen Typ τ für t.“

$$\frac{\Gamma(t) = \tau}{\Gamma \vdash t : \tau}\,\textsc{Var}$$

- Daraus folgt:
- „Variable t hat im Kontext Γ den Typ τ.“

Typisierung: Beispiel

$$x : \texttt{bool} \vdash \lambda f.\, f\ x : (\texttt{bool} \to \alpha) \to \alpha$$

„Unter der Annahme, dass x den Typ `bool` hat, hat $\lambda f.\, f\ x$ den Typ $(\texttt{bool} \to \alpha) \to \alpha$.“

Typisierung: Beispiel

$$\frac{x : \texttt{bool}, f : \texttt{bool} \to \alpha \vdash f\ x : \alpha}{x : \texttt{bool} \vdash \lambda f.\, f\ x : (\texttt{bool} \to \alpha) \to \alpha}\ \textsc{Abs}$$

Pattern-Matching: Der äußerste Term ist ein Lambda, also wenden wir die Abs-Regel an.

$$\Gamma = x : \texttt{bool}$$

$$p = f, b = f\ x$$

$$\pi = \texttt{bool} \to \alpha$$

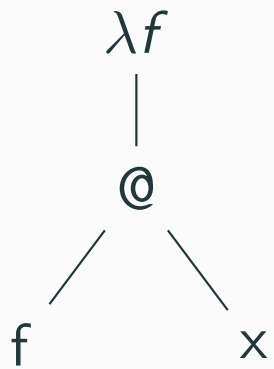
$$\rho = \alpha$$

$$\frac{\Gamma, p : \pi \vdash b : \rho}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \pi \to \rho}\ \textsc{Abs}$$

Typisierung: Beispiel

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma(f) = \texttt{bool} \to \alpha}{\Gamma \vdash f : \texttt{bool} \to \alpha}\textsc{Var} \qquad \dfrac{\Gamma(x) = \texttt{bool}}{\Gamma \vdash x : \texttt{bool}}\textsc{Var}}{x : \texttt{bool}, f : \texttt{bool} \to \alpha \vdash f\ x : \alpha}\textsc{App}}{x : \texttt{bool} \vdash \lambda f.\, f\ x : (\texttt{bool} \to \alpha) \to \alpha}\textsc{Abs}$$

$$\Gamma = x : \texttt{bool}, f : \texttt{bool} \to \alpha$$



$\lambda f.\, f\ x$

Typinferenz

Problemstellung bei Typinferenz: Zu einem gegebenen Term den passenden Typ finden.

- Struktur des Terms erkennen. Wo sind:
  - Lambdas?
  - Funktionsanwendungen?
  - Variablen/Konstanten?
- Entsprechenden Baum aufstellen.
- Typgleichungen finden.
- Gleichungssystem unifizieren.

Von Typisierungsregeln zu Typinferenz

Beim inferieren wird das Pattern-matching der Typen durch die *Unifikation* übernommen. Deswegen schreiben wir anstelle von konkreten Typen immer α_i und merken uns die Gleichungen für später:

$$\frac{\Gamma, p : \pi \vdash b : \rho}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \pi \to \rho}\textsc{Abs} \quad \leadsto \quad \frac{\Gamma, p : \alpha_j \vdash b : \alpha_k}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \alpha_i}\textsc{Abs} \quad \{\alpha_i = \alpha_j \to \alpha_k\}$$

Von Typisierungsregeln zu Typinferenz

Beim inferieren wird das Pattern-matching der Typen durch die *Unifikation* übernommen. Deswegen schreiben wir anstelle von konkreten Typen immer α_i und merken uns die Gleichungen für später:

$$\frac{\Gamma \vdash f : \phi \to \alpha \qquad \Gamma \vdash x : \phi}{\Gamma \vdash f\ x : \alpha}\textsc{App} \quad \leadsto \quad \frac{\Gamma \vdash f : \alpha_j \qquad \Gamma \vdash x : \alpha_k}{\begin{array}{l}\Gamma \vdash f\ x : \alpha_i \\ \{\alpha_j = \alpha_k \to \alpha_i\}\end{array}}\textsc{App}$$

Von Typisierungsregeln zu Typinferenz

Beim inferieren wird das Pattern-matching der Typen durch die *Unifikation* übernommen. Deswegen schreiben wir anstelle von konkreten Typen immer α_i und merken uns die Gleichungen für später:

$$\frac{\Gamma(t) = \tau}{\Gamma \vdash t : \tau}\textsc{Var} \quad \leadsto \quad \frac{\Gamma(t) = \alpha_j}{\Gamma \vdash t : \alpha_i}\textsc{Var} \quad \{\alpha_i = \alpha_j\}$$

Algorithmus zur Typinferenz

- Stelle Typherleitungsbaum auf
  - In jedem Schritt werden neue Typvariablen α_i angelegt
  - Statt die Typen direkt im Baum einzutragen, werden Gleichungen in einem Constraint-System eingetragen
- Unifiziere Constraint-System zu einem Unifikator
  - Robinson-Algorithmus, im Grunde wie bei Prolog
  - I.d.R.: Allgemeinster Unifikator (mgu)

$$\frac{\Gamma(t) = \alpha_j}{\Gamma \vdash t : \alpha_i}\,\textsc{Var}$$

Constraint:
$\{\alpha_i = \alpha_j\}$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \alpha_j \qquad \Gamma \vdash x : \alpha_k}{\Gamma \vdash f\ x : \alpha_i}\,\textsc{App}$$

Constraint:
$\{\alpha_j = \alpha_k \to \alpha_i\}$

$$\frac{\Gamma, p : \alpha_j \vdash b : \alpha_k}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \alpha_i}\,\textsc{Abs}$$

Constraint:
$\{\alpha_i = \alpha_j \to \alpha_k\}$

Herleitungsbaum: Beispiel

$$\vdash \lambda x.\, \lambda y.\, x : \alpha_1$$

Beispielhafte Aufgabenstellung: Finde den Typen α_1.

Herleitungsbaum: Beispiel

$$\frac{x : \alpha_2 \vdash \lambda y.\, x : \alpha_3}{\vdash \lambda x.\, \lambda y.\, x : \alpha_1}\textsc{Abs}$$

Typgleichungen:

$$C = \{\alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_3\}$$

Herleitungsbaum: Beispiel

$$\dfrac{\dfrac{x : \alpha_2, y : \alpha_4 \vdash x : \alpha_5}{x : \alpha_2 \vdash \lambda y.\, x : \alpha_3}\textsc{Abs}}{\vdash \lambda x.\, \lambda y.\, x : \alpha_1}\textsc{Abs}$$

Typgleichungen:

$$C = \{\alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_3$$
$$,\alpha_3 = \alpha_4 \to \alpha_5\}$$

Herleitungsbaum: Beispiel

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(x : \alpha_2, y : \alpha_4)(x) = \alpha_2}{x : \alpha_2, y : \alpha_4 \vdash x : \alpha_5}\textsc{Var}}{x : \alpha_2 \vdash \lambda y.\, x : \alpha_3}\textsc{Abs}}{\vdash \lambda x.\, \lambda y.\, x : \alpha_1}\textsc{Abs}$$

Typgleichungen:

$$\begin{aligned} C = \{&\alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_3 \\ ,&\alpha_3 = \alpha_4 \to \alpha_5 \\ ,&\alpha_5 = \alpha_2\} \end{aligned}$$

Herleitungsbaum: Aufgabe

$$\frac{\dots}{\vdash \lambda f.\, f\ (\lambda x.\, x) : \alpha_1}\textsc{Abs}$$

Findet den Typen α_1. Teilpunkte gibt es für:

- Herleitungsbaum,
- Typgleichungsmenge C,
- Unifikation per Robinsonalgorithmus.

Herleitungsbaum: Aufgabe

$$\dfrac{\dfrac{(f : \alpha_2)(f) = \alpha_2}{f : \alpha_2 \vdash f : \alpha_4}\textsc{Var} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma(x) = \alpha_6}{\Gamma \vdash x : \alpha_7}\textsc{Var}}{f : \alpha_2 \vdash \lambda x.\, x : \alpha_5}\textsc{Abs}}{\dfrac{f : \alpha_2 \vdash f\ (\lambda x.\, x) : \alpha_3}{\vdash \lambda f.\, f\ (\lambda x.\, x) : \alpha_1}\textsc{Abs}}\textsc{App}$$

$$\Gamma = f : \alpha_2, x : \alpha_6$$

$$\begin{aligned} C = \{&\alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_3, \alpha_4 = \alpha_5 \to \alpha_3, \\ &\alpha_2 = \alpha_4, \\ &\alpha_5 = \alpha_6 \to \alpha_7, \alpha_6 = \alpha_7\} \end{aligned}$$

Let-Polymorphismus

Let-Polymorphismus: Motivation

$$\lambda f\,.\,f\ f$$

- Diese Funktion verwendet f auf zwei Arten:
  - $\alpha \to \alpha$: Rechte Seite.
  - $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$: Linke Seite, nimmt f als Argument und gibt es zurück.

Let-Polymorphismus: Motivation

$$\lambda f\,.\,f\ f$$

- Diese Funktion verwendet f auf zwei Arten:
  - $\alpha \to \alpha$: Rechte Seite.
  - $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$: Linke Seite, nimmt f als Argument und gibt es zurück.
- Problem: $\alpha \to \alpha$ und $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ sind nicht unifizierbar!
  - „occurs check“: α darf sich nicht selbst einsetzen.
- Idee: Bei jeder Verwendung eines polymorphen Typen erzeugen wir *neue Typvariablen*, um diese Beschränkung zu umgehen.

Typschemata und Instanziierung

- Idee: Bei jeder Verwendung eines polymorphen Typen erzeugen wir *neue Typvariablen*, um diese Beschränkung zu umgehen.
- Ein *Typschema* ist ein Typ, in dem manche Typvariablen allquantifiziert sind:

$$\phi = \forall\alpha_1. \ldots \forall\alpha_n.\tau$$
$$\alpha_i \in FV(\tau)$$

- *Typschemata kommen bei uns immer nur in Kontexten vor!*
- Beispiele:
  - $\forall\alpha.\alpha \to \alpha$
  - $\forall\alpha.\alpha \to \beta \to \alpha$

Typschemata und Instanziierung

- Ein Typschema spannt eine Menge von Typen auf, mit denen es *instanziiert* werden kann:

$$\forall\alpha.\alpha \to \alpha \succeq \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$
$$\forall\alpha.\alpha \to \alpha \succeq \tau \to \tau$$
$$\forall\alpha.\alpha \to \alpha \not\succeq \tau \to \sigma$$
$$\forall\alpha.\alpha \to \alpha \not\succeq \tau \to \tau \to \tau$$
$$\forall\alpha.\alpha \to \alpha \succeq (\tau \to \tau) \to (\tau \to \tau)$$

Let-Polymorphismus

Um Typschemata bei der Inferenz zu verwenden, müssen wir zunächst die Regel für Variablen anpassen:

$$\frac{\Gamma(x) = \phi \qquad \phi \succeq_{\text{frische } \alpha_i} \tau}{\Gamma \vdash x : \alpha_j}\,\textsc{Var}$$

Constraint: $\{\alpha_j = \tau\}$

- $\succeq_{\text{frische } \alpha_i}$ instanziiert ein Typschema mit α_i, die noch nicht im Baum vorkommen.
- Jetzt brauchen wir noch eine Möglichkeit, Typschemata zu erzeugen.

Let-Polymorphismus

Mit einen $\textsc{Let}$-Term wird ein Typschema eingeführt:

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \alpha_i \qquad \Gamma' \vdash t_2 : \alpha_j}{\Gamma \vdash \texttt{let}\ x = t_1\ \texttt{in}\ t_2 : \alpha_k}\,\textsc{Let}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{let} &= mgu(C_{let}) \\
\Gamma' &= \sigma_{let}(\Gamma), x : ta(\sigma_{let}(\alpha_i), \sigma_{let}(\Gamma)) \\
C'_{let} &= \{\alpha_n = \sigma_{let}(\alpha_n) \mid \sigma_{let}(\alpha_n) \text{ ist definiert}\}
\end{aligned}$$

Constraints: $C'_{let} \cup C_{body} \cup \{a_j = a_k\}$

Beispiel: Let-Polymorphismus

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\vdash \lambda x.\, x : \alpha_2}\textsc{Abs} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma'(f) = \forall\alpha_5.\alpha_5 \to \alpha_5 \quad \succeq \alpha_8 \to \alpha_8}{\Gamma' \vdash f : \alpha_6}\textsc{Var} \qquad \dfrac{\Gamma'(f) = \forall\alpha_5.\alpha_5 \to \alpha_5 \quad \succeq \alpha_9 \to \alpha_9}{\Gamma' \vdash f : \alpha_7}\textsc{Var}}{\Gamma' \vdash f\ f : \alpha_3}\textsc{App}}{\vdash \texttt{let}\ \ f = \lambda x.\, x\ \ \texttt{in}\ \ f\ f : \alpha_1}\textsc{Let}$$

$$\begin{aligned}
C_{let} &= \{\alpha_2 = \alpha_4 \to \alpha_5, \alpha_4 \to \alpha_5\} \\
\sigma_{let} &= [\alpha_2 \Rightarrow \alpha_5 \to \alpha_5, \alpha_4 \Rightarrow \alpha_5] \\
\Gamma' &= x : \forall\alpha_5.\alpha_5 \to \alpha_5 \\
C'_{let} &= \{\alpha_2 = \alpha_5 \to \alpha_5, \alpha_4 = \alpha_5\} \\
C_{body} &= \{\alpha_6 = \alpha_7 \to \alpha_3, \alpha_6 = \alpha_8 \to \alpha_8, \alpha_7 = \alpha_9 \to \alpha_9\} \\
C &= C'_{let} \cup C_{body} \cup \{\alpha_3 = \alpha_1\}
\end{aligned}$$

Prolog-Aufgaben

Freie Variablen in λ-Termen

Schreibt ein Prädikat `fv/2`, das die freien Variablen eines Lambda-Terms generiert. Beispiel:

```
?- fv(abs(x, app(f, x)), Vars).
Vars = [f].
```

- Ein Variablenterm x enthält genau die freie Variable x
- Eine Funktionsanwendung enthält die freien Variablen der Funktion und des Argument
- Ein Lambda enthält die freien Variablen seines Funktionskörpers außer der gebundenen Variable

Nützlich: `atom/1`, `append/3`, `subtract/3` bzw. `delete/3`

Maximum-Funktion

Schreibt ein Prädikat `max/3`, das die größere von zwei Zahlen auswählt:

```
?- max(15, 27, X).
X = 27.
```

- Schreibt die Funktion zuerst in Haskell
  - Verwendet die Guard-Notation
  - Wie viele Vergleiche benötigt man?
- Lässt sich die Haskell-Version 1:1 übersetzen?
- Wenn nein, wieso? Wie kann man das Problem lösen?

Klausur SS15: Haus vom Nikolaus