Tutorium 12: Syntaktische Analyse

Paul Brinkmeier

09. Februar 2021

Tutorium Programmierparadigmen am KIT

Heutiges Programm

Programm

- Typinferenz
  - Herleitungsbäume
  - Let-Polymorphismus

Typinferenz

Unifikation (Robinson, [Rob65])

Unifikationsalgorithmus: $\texttt{unify}(C) =$

$\texttt{if}$ C $\texttt{==}$ $\emptyset$ $\texttt{then}$ $[]$
$\texttt{else let}$ $\{\theta_l = \theta_r\} \cup C' = C$ $\texttt{in}$
  $\texttt{if}$ θ_l $\texttt{==}$ θ_r $\texttt{then unify}(C')$
  $\texttt{else if}$ θ_l $\texttt{==}$ $\texttt{Y}$ $\texttt{and}$ $\texttt{Y} \notin FV(\theta_r)$ $\texttt{then unify}([\texttt{Y} \Rightarrow \theta_r]\, C') \circ [\texttt{Y} \Rightarrow \theta_r]$
  $\texttt{else if}$ θ_r $\texttt{==}$ $\texttt{Y}$ $\texttt{and}$ $\texttt{Y} \notin FV(\theta_l)$ $\texttt{then unify}([\texttt{Y} \Rightarrow \theta_l]\, C') \circ [\texttt{Y} \Rightarrow \theta_l]$
  $\texttt{else if}$ θ_l $\texttt{==}$ $\texttt{f}(\theta_l^1, \ldots, \theta_l^n)$ $\texttt{and}$ θ_r $\texttt{==}$ $\texttt{f}(\theta_r^1, \ldots, \theta_r^n)$
    $\texttt{then unify}(C' \cup \{\theta_l^1 = \theta_r^1, \ldots, \theta_l^n = \theta_r^n\})$
  $\texttt{else}$ $\textbf{fail}$

$\texttt{Y} \in FV(\theta)$ occur check, verhindert zyklische Substitutionen

Korrektheitstheorem

$\texttt{unify}(C)$ terminiert und gibt *mgu* für C zurück, falls C unifizierbar, ansonsten **fail**.

Beweis: Siehe [Pie02]

Wiederholung: Unifikationsalgorithmus

$$C = \{X = \mathtt{a}, Y = \mathtt{f}(X), \mathtt{f}(Z) = Y\}$$

- Problemstellung: Gleichungssystem C mit baumförmigen Termen
  - Bspw. Prolog-Terme, Typen
- Liefert: Unifikator σ_1, der alle Gleichungen erfüllt
- Bspw. $\sigma_1 = [X \Rightarrow \mathtt{a}, Y \Rightarrow \mathtt{f}(X), Z \Rightarrow X]$

Wiederholung: Unifikationsalgorithmus

$$C = \{X = \mathrm{a}, Y = \mathtt{f}(X), \mathtt{f}(Z) = Y\}$$

$$\begin{aligned}
\mathtt{unify}(C) &= \mathtt{unify}(\{\underline{X = \mathrm{a}}, Y = \mathtt{f}(X), \mathtt{f}(Z) = Y\}) \\
&= \mathtt{unify}(\{Y = \mathtt{f}(\mathrm{a}), \underline{\mathtt{f}(Z) = Y}\}) \circ [X \Rightarrow \mathrm{a}] \\
&= \mathtt{unify}(\{\underline{\mathtt{f}(Z) = \mathtt{f}(\mathrm{a})}\}) \circ [Y \Rightarrow \mathtt{f}(Z)] \circ [X \Rightarrow \mathrm{a}] \\
&= \mathtt{unify}(\{\underline{Z = \mathrm{a}}\}) \circ [Y \Rightarrow \mathtt{f}(Z)] \circ [X \Rightarrow \mathrm{a}] \\
&= [Z \Rightarrow \mathrm{a}] \circ [Y \Rightarrow \mathtt{f}(Z)] \circ [X \Rightarrow \mathrm{a}] \\
&= [Z \Rightarrow \mathrm{a}, Y \Rightarrow \mathtt{f}(\mathrm{a}), X \Rightarrow \mathrm{a}]
\end{aligned}$$

Klausuraufgabe WS16/18 A3 a) (6P.)

$$C_1 = \{\alpha_9 = \alpha_{10} \to \alpha_8, \alpha_9 = \alpha_4, \alpha_{10} = \texttt{bool}\}$$
$$C_2 = \{\alpha_{12} = \alpha_{13} \to \alpha_{11}, \alpha_{12} = \alpha_4, \alpha_{13} = \texttt{int}\}$$

i. Geben Sie allgemeinste Unifikatoren σ_1 für C_1 und σ_2 für C_2 an.

ii. Ist auch $C_1 \cup C_2$ unifizierbar?

iii. Ist der Ausdruck

$$\lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \texttt{true})\ (a\ 17)$$

typisierbar? Begründen Sie ihre Antwort <u>kurz</u>.

Klausuraufgabe WS16/18 A3 a) (6P.)

$$C_1 = \{\alpha_9 = \alpha_{10} \to \alpha_8, \alpha_9 = \alpha_4, \alpha_{10} = \texttt{bool}\}$$

$$C_2 = \{\alpha_{12} = \alpha_{13} \to \alpha_{11}, \alpha_{12} = \alpha_4, \alpha_{13} = \texttt{int}\}$$

Geben Sie allgemeinste Unifikatoren σ_1 für C_1 und σ_2 für C_2 an.

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \texttt{unify}(\{\alpha_9 = \alpha_{10} \to \alpha_8, \alpha_9 = \alpha_4, \alpha_{10} = \texttt{bool}\}) \\
&= ... = [\alpha_9 \diamond \texttt{bool} \to \alpha_8, \alpha_4 \diamond \texttt{bool} \to \alpha_8, \alpha_{10} \diamond \texttt{bool}] \\
\sigma_2 &= \texttt{unify}(\{\alpha_{12} = \alpha_{13} \to \alpha_{11}, \alpha_{12} = \alpha_4, \alpha_{13} = \texttt{int}\}) \\
&= ... = [\alpha_{12} \diamond \texttt{int} \to \alpha_{11}, \alpha_4 \diamond \texttt{int} \to \alpha_{11}, \alpha_{13} \diamond \texttt{int}]
\end{aligned}$$

Klausuraufgabe WS16/18 A3 a) (6P.)

$$C_1 = \{\alpha_9 = \alpha_{10} \to \alpha_8, \alpha_9 = \alpha_4, \alpha_{10} = \texttt{bool}\}$$
$$C_2 = \{\alpha_{12} = \alpha_{13} \to \alpha_{11}, \alpha_{12} = \alpha_4, \alpha_{13} = \texttt{int}\}$$

Ist auch $C_1 \cup C_2$ unifizierbar?

$$\sigma_1 = ... = \left[\alpha_9 \mapsto \texttt{bool} \to \alpha_8, \underline{\alpha_4 \mapsto \texttt{bool} \to \alpha_8}, \alpha_{10} \mapsto \texttt{bool}\right]$$
$$\sigma_2 = ... = \left[\alpha_{12} \mapsto \texttt{int} \to \alpha_{11}, \underline{\alpha_4 \mapsto \texttt{int} \to \alpha_{11}}, \alpha_{13} \mapsto \texttt{int}\right]$$

A: Nein, da die <u>allgemeinsten Unifikatoren</u> σ_1 und σ_2 einen Konflikt für α_4 enthalten: $\texttt{unify}(\{\texttt{bool} = \texttt{int}\}) = \texttt{fail}$

Klausuraufgabe WS16/18 A3 a) (6P.)

$$C_1 = \{\alpha_9 = \alpha_{10} \to \alpha_8, \alpha_9 = \alpha_4, \alpha_{10} = \texttt{bool}\}$$
$$C_2 = \{\alpha_{12} = \alpha_{13} \to \alpha_{11}, \alpha_{12} = \alpha_4, \alpha_{13} = \texttt{int}\}$$

Ist der Ausdruck

$$\lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \texttt{true})\ (a\ 17)$$

typisierbar? Begründen Sie ihre Antwort kurz.

A: Nein, da a mit zwei verschiedenen Typen verwendet wird.

Typinferenz

Problemstellung bei Typinferenz: Zu einem gegebenen Term den passenden Typ finden.

- Struktur des Terms erkennen. Wo sind:
  - Lambdas?
  - Funktionsanwendungen?
  - Variablen/Konstanten?
- Entsprechenden Baum aufstellen.
- Typgleichungen finden.
- Gleichungssystem unifizieren.

Struktur von Lambda-Termen

Lambda-Terme bestehen aus

- Lambdas $\lambda p.\, b$
- Funktionsanwendungen $x\ y$
- Variablen x, Konstanten $\texttt{true}, 17$

$$\lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \texttt{true})$$

Struktur von Lambda-Termen

Lambda-Terme bestehen aus

- **Lambdas** $\lambda p.\, b$
- Funktionsanwendungen $x\ y$
- Variablen x, Konstanten $\mathtt{true}, 17$

$$\underbrace{\lambda a.\ \underbrace{\lambda f.\, f\ (a\ \mathtt{true})}_{\substack{\text{Lambda} \\ p=f,\, b=f\ (a\ \mathtt{true})}}}_{\substack{\text{Lambda} \\ p=a,\, b=\lambda f.\, f\ (a\ \mathtt{true})}}$$

Struktur von Lambda-Termen

Lambda-Terme bestehen aus

- Lambdas $\lambda p.\, b$
- **Funktionsanwendungen** $x\ y$
- Variablen x, Konstanten $\texttt{true}, 17$

$$\lambda a.\, \lambda f.\, \underbrace{f\ \underbrace{(a\ \texttt{true})}_{\substack{\text{Anwendung}\\ x=a, y=\texttt{true}}}}_{\substack{\text{Anwendung}\\ x=f, y=a\ \texttt{true}}}$$

Struktur von Lambda-Termen

Lambda-Terme bestehen aus

- Lambdas $\lambda p.\, b$
- Funktionsanwendungen $x\ y$
- **Variablen** x, Konstanten $\texttt{true}, 17$

$$\lambda a.\, \lambda f.\ \underbrace{f}_{\text{Variable}}\ (\underbrace{a}_{\text{Variable}}\ \texttt{true})$$

Struktur von Lambda-Termen

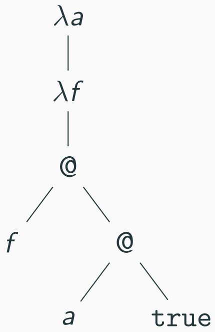
Lambda-Terme bestehen aus

- Lambdas $\lambda p.\, b$
- Funktionsanwendungen $x\ y$
- Variablen x, **Konstanten** $\texttt{true}, 17$

$$\lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \underbrace{\texttt{true}}_{\text{Konstante}})$$

Lambda-Terme als Bäume

Wir können Lambda-Terme also als Bäume mit Lambda- und Anwendungsknoten und Variablen- und Konstantenblättern betrachten, um ihre Struktur zu untersuchen:



$$\lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \mathtt{true})$$

Cheatsheet: Typisierter Lambda-Kalkül

$$\frac{\Gamma, p : \pi \vdash b : \rho}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \pi \to \rho}\textsc{Abs} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \phi \to \alpha \qquad \Gamma \vdash x : \phi}{\Gamma \vdash f\ x : \alpha}\textsc{App}$$

$$\frac{\Gamma(t) = \tau}{\Gamma \vdash t : \tau}\textsc{Var} \qquad \frac{c \in \textsc{Const}}{\Gamma \vdash c : \tau_c}\textsc{Const}$$

- Typvariablen: τ, α, π, ρ
- Funktionstypen: $\tau_1 \to \tau_2$, rechtsassoziativ
- Typisierungsregeln sind eindeutig: Eine Regel pro Termform

Was bedeuten eigentlich $\vdash$, Γ und :?

$$\lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \texttt{true})$$

Um zu einem solchen Term ein Typisierungsproblem zu beschreiben, notieren wir:

$$\Gamma \vdash \lambda a.\, \lambda f.\, f\ (a\ \texttt{true}) : \tau$$

„Im Typkontext Γ hat der Term den Typen τ."

- Γ: Enthält Typen für freie Variablen.
- ... $\vdash$ ... : ... — Notation für Typisierungsproblem.

Γ in Aktion

$$\Gamma \vdash a + 42 : \texttt{int}$$

$$\textsc{Const} = \{42\}, \tau_{42} = \texttt{int}$$

Damit die Aussage „$a + 42$ hat in Γ den Typen `int`“ stimmt, müssen wir für Γ wählen:

Γ in Aktion

$$\Gamma \vdash a + 42 : \texttt{int}$$

$$\textsc{Const} = \{42\}, \tau_{42} = \texttt{int}$$

Damit die Aussage „$a + 42$ hat in Γ den Typen `int`“ stimmt, müssen wir für Γ wählen:

- $\Gamma = a : \texttt{int}, + : \texttt{int} \to \texttt{int} \to \texttt{int}$

Γ in Aktion

$$\Gamma \vdash a + 42 : \texttt{int}$$

$$\textsc{Const} = \{42\}, \tau_{42} = \texttt{int}$$

Damit die Aussage „$a + 42$ hat in Γ den Typen $\texttt{int}$“ stimmt, müssen wir für Γ wählen:

- $\Gamma = a : \texttt{int}, + : \texttt{int} \to \texttt{int} \to \texttt{int}$
- Allgemeiner: $\Gamma = a : \alpha, + : \alpha \to \texttt{int} \to \texttt{int}$

Typisierungsregel für Lambdas

- „Unter Einfügung des Typs π von p in den Kontext…“
- „… ist b als Funktion von p typisierbar.“

$$\frac{\boxed{\Gamma, p : \pi} \qquad \boxed{\vdash b : \rho}}{\boxed{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \pi \to \rho}}\ \textsc{Abs}$$

- Daraus folgt:
- „$\lambda p.\, b$ ist eine Funktion, die πs auf ρs abbildet“

Typisierungsregel für Funktionsanwendungen

- „f ist im Kontext Γ eine Funktion, die ϕs auf αs abbildet.“
- „x ist im Kontext Γ ein Term des Typs ϕ.“

$$\frac{\boxed{\Gamma \vdash f : \phi \to \alpha} \qquad \boxed{\Gamma \vdash x : \phi}}{\boxed{\Gamma \vdash f\ x : \alpha}}\ \textsc{App}$$

- Daraus folgt:
- „x eingesetzt in f ergibt einen Term des Typs α.“

Einfache Typisierungsregel für Variablen

- „Der Typkontext Γ enthält einen Typ τ für t."

$$\frac{\boxed{\Gamma(t) = \tau}}{\boxed{\Gamma \vdash t : \tau}}\,\textsc{Var}$$

- Daraus folgt:
- „Variable t hat im Kontext Γ den Typ τ."

Typisierung: Beispiel

$$x : \texttt{bool} \vdash \lambda f.\, f\ x : (\texttt{bool} \to \alpha) \to \alpha$$

„Unter der Annahme, dass x den Typ `bool` hat, hat $\lambda f.\, f\ x$ den Typ $(\texttt{bool} \to \alpha) \to \alpha$."

Typisierung: Beispiel

$$\frac{\underline{x : \texttt{bool}}, \underline{f} : \underline{\texttt{bool} \to \alpha} \vdash \underline{f\ x} : \underline{\alpha}}{\underline{x : \texttt{bool}} \vdash \lambda \underline{f}.\, \underline{f\ x} : (\underline{\texttt{bool} \to \alpha}) \to \underline{\alpha}}\textsc{Abs}$$

Pattern-Matching: Der äußerste Term ist ein Lambda, also wenden wir die Abs-Regel an.

$$\underline{\Gamma} = \underline{x : \texttt{bool}}$$

$$\underline{p} = \underline{f}, \underline{b} = \underline{f\ x}$$

$$\underline{\pi} = \underline{\texttt{bool} \to \alpha}$$

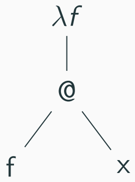
$$\underline{\rho} = \underline{\alpha}$$

$$\frac{\underline{\Gamma}, \underline{p} : \underline{\pi} \vdash \underline{b} : \underline{\rho}}{\underline{\Gamma} \vdash \lambda \underline{p}.\, \underline{b} : \underline{\pi} \to \underline{\rho}}\textsc{Abs}$$

Typisierung: Beispiel

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\Gamma(f) = \texttt{bool} \to \alpha}{\Gamma \vdash f : \texttt{bool} \to \alpha}\,\textsc{Var}
    \qquad
    \dfrac{\Gamma(x) = \texttt{bool}}{\Gamma \vdash x : \texttt{bool}}\,\textsc{Var}
  }{x : \texttt{bool}, f : \texttt{bool} \to \alpha \vdash f\ x : \alpha}\,\textsc{App}
}{x : \texttt{bool} \vdash \lambda f.\, f\ x : (\texttt{bool} \to \alpha) \to \alpha}\,\textsc{Abs}
$$

$$\Gamma = x : \texttt{bool}, f : \texttt{bool} \to \alpha$$



$\lambda f.\, f\ x$

Von Typisierungsregeln zu Typinferenz

Beim inferieren wird das Pattern-matching der Typen durch die Unifikation übernommen. Deswegen schreiben wir anstelle von konkreten Typen immer α_i und merken uns die Gleichungen für später:

$$\frac{\Gamma, p : \pi \vdash b : \rho}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \pi \to \rho}\textsc{Abs} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \dfrac{\Gamma, p : \alpha_j \vdash b : \alpha_k}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \alpha_i}\textsc{Abs} \\ \{\alpha_i = \alpha_j \to \alpha_k\} \end{array}$$

Von Typisierungsregeln zu Typinferenz

Beim inferieren wird das Pattern-matching der Typen durch die Unifikation übernommen. Deswegen schreiben wir anstelle von konkreten Typen immer α_i und merken uns die Gleichungen für später:

$$\frac{\Gamma \vdash f : \phi \to \alpha \qquad \Gamma \vdash x : \phi}{\Gamma \vdash f\ x : \alpha}\textsc{App} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Gamma \vdash f : \alpha_j \qquad \Gamma \vdash x : \alpha_k}{\begin{array}{c}\Gamma \vdash f\ x : \alpha_i \\ \{\alpha_j = \alpha_k \to \alpha_i\}\end{array}}\textsc{App}$$

Von Typisierungsregeln zu Typinferenz

Beim inferieren wird das Pattern-matching der Typen durch die Unifikation übernommen. Deswegen schreiben wir anstelle von konkreten Typen immer α_i und merken uns die Gleichungen für später:

$$\frac{\Gamma(t) = \tau}{\Gamma \vdash t : \tau}\textsc{Var} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \dfrac{\Gamma(t) = \alpha_j}{\Gamma \vdash t : \alpha_i}\textsc{Var} \\ \{\alpha_i = \alpha_j\} \end{array}$$

Algorithmus zur Typinferenz

- Stelle Typherleitungsbaum auf
  - In jedem Schritt werden neue Typvariablen α_i angelegt
  - Statt die Typen direkt im Baum einzutragen, werden Gleichungen in einem Constraint-System eingetragen
- Unifiziere Constraint-System zu einem Unifikator
  - Robinson-Algorithmus, im Grunde wie bei Prolog
  - I.d.R.: Allgemeinster Unifikator (mgu)

$$\frac{\Gamma(t) = \alpha_j}{\Gamma \vdash t : \alpha_i}\textsc{Var}$$

Constraint:
$\{\alpha_i = \alpha_j\}$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \alpha_j \qquad \Gamma \vdash x : \alpha_k}{\Gamma \vdash f\ x : \alpha_i}\textsc{App}$$

Constraint:
$\{\alpha_j = \alpha_k \to \alpha_i\}$

$$\frac{\Gamma, p : \alpha_j \vdash b : \alpha_k}{\Gamma \vdash \lambda p.\, b : \alpha_i}\textsc{Abs}$$

Constraint:
$\{\alpha_i = \alpha_j \to \alpha_k\}$

Herleitungsbaum: Beispiel

$$\vdash \lambda x.\, \lambda y.\, x : \alpha_1$$

Beispielhafte Aufgabenstellung: Finde den Typen α_1.

Herleitungsbaum: Beispiel

$$\dfrac{\underline{x} : \alpha_2 \vdash \underline{\lambda y.\, x} : \alpha_3}{\vdash \lambda \underline{x}.\, \underline{\lambda y.\, x} : \alpha_1}\,\textsc{Abs}$$

Typgleichungen:

$$C = \{\underline{\alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_3}\}$$

Herleitungsbaum: Beispiel

$$\dfrac{\dfrac{\underline{x : \alpha_2}, \underline{y} : \alpha_4 \vdash \underline{x} : \alpha_5}{\underline{x : \alpha_2} \vdash \lambda \underline{y}. \underline{x} : \alpha_3}\textsc{Abs}}{\vdash \lambda x. \lambda y. x : \alpha_1}\textsc{Abs}$$

Typgleichungen:

$$\begin{aligned} C = \{&\alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_3 \\ ,&\underline{\alpha_3 = \alpha_4 \to \alpha_5}\} \end{aligned}$$

Herleitungsbaum: Beispiel

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\underline{x : \alpha_2, y : \alpha_4})(\underline{x}) = \alpha_2}{\underline{x : \alpha_2, y : \alpha_4} \vdash \underline{x} : \alpha_5}\ \textsc{Var}}{x : \alpha_2 \vdash \lambda y.\, x : \alpha_3}\ \textsc{Abs}}{\vdash \lambda x.\, \lambda y.\, x : \alpha_1}\ \textsc{Abs}$$

Typgleichungen:

$$\begin{aligned} C = \{&\alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_3 \\ ,&\alpha_3 = \alpha_4 \to \alpha_5 \\ ,&\underline{\alpha_5 = \alpha_2}\} \end{aligned}$$

Herleitungsbaum: Aufgabe

$$\frac{\dots}{\vdash \lambda f.\, f\ (\lambda x.\, x) : \alpha_1}\textsc{Abs}$$

Findet den Typen α_1. Teilpunkte gibt es für:

- Herleitungsbaum,
- Typgleichungsmenge C,
- Unifikation per Robinsonalgorithmus.

Herleitungsbaum: Aufgabe

$$\dfrac{\dfrac{(f:\alpha_2)(f)=\alpha_2}{f:\alpha_2 \vdash f:\alpha_4}\textsc{Var} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma(x)=\alpha_6}{\Gamma \vdash x:\alpha_7}\textsc{Var}}{f:\alpha_2 \vdash \lambda x.\, x:\alpha_5}\textsc{Abs}}{\dfrac{f:\alpha_2 \vdash f\ (\lambda x.\, x):\alpha_3}{\vdash \lambda f.\, f\ (\lambda x.\, x):\alpha_1}\textsc{Abs}}\textsc{App}$$

$$\Gamma = f:\alpha_2, x:\alpha_6$$

$$\begin{aligned} C = \{&\alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_3, \alpha_4 = \alpha_5 \to \alpha_3,\\ &\alpha_2 = \alpha_4,\\ &\alpha_5 = \alpha_6 \to \alpha_7, \alpha_6 = \alpha_7\}\end{aligned}$$

Let-Polymorphismus

Let-Polymorphismus: Motivation

$$\lambda f.\, f\ f$$

- Diese Funktion verwendet f auf zwei Arten:
  - $\alpha \to \alpha$: Rechte Seite.
  - $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$: Linke Seite, nimmt f als Argument und gibt es zurück.

Let-Polymorphismus: Motivation

$$\lambda f.\, f\ f$$

- Diese Funktion verwendet f auf zwei Arten:
  - $\alpha \to \alpha$: Rechte Seite.
  - $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$: Linke Seite, nimmt f als Argument und gibt es zurück.
- Problem: $\alpha \to \alpha$ und $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ sind nicht unifizierbar!
  - „occurs check": α darf sich nicht selbst einsetzen.
- Idee: Bei jeder Verwendung eines polymorphen Typen erzeugen wir neue Typvariablen, um diese Beschränkung zu umgehen.

Typschemata und Instanziierung

- Idee: Bei jeder Verwendung eines polymorphen Typen erzeugen wir neue Typvariablen, um diese Beschränkung zu umgehen.
- Ein Typschema ist ein Typ, in dem manche Typvariablen allquantifiziert sind:

$$\phi = \forall \alpha_1. \dots \forall \alpha_n.\tau$$
$$\alpha_i \in FV(\tau)$$

- Typschemata kommen bei uns immer nur in Kontexten vor!
- Beispiele:
  - $\forall \alpha.\alpha \to \alpha$
  - $\forall \alpha.\alpha \to \beta \to \alpha$

Typschemata und Instanziierung

- Ein Typschema spannt eine Menge von Typen auf, mit denen es instanziiert werden kann:

$$\forall\alpha.\alpha \to \alpha \succeq \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

$$\forall\alpha.\alpha \to \alpha \succeq \tau \to \tau$$

$$\forall\alpha.\alpha \to \alpha \not\succeq \tau \to \sigma$$

$$\forall\alpha.\alpha \to \alpha \not\succeq \tau \to \tau \to \tau$$

$$\forall\alpha.\alpha \to \alpha \succeq (\tau \to \tau) \to (\tau \to \tau)$$

Let-Polymorphismus

Um Typschemata bei der Inferenz zu verwenden, müssen wir zunächst die Regel für Variablen anpassen:

$$\frac{\Gamma(x) = \phi \qquad \phi \succeq_{\text{frische } \alpha_i} \tau}{\Gamma \vdash x : \alpha_j}\textsc{Var}$$

Constraint: $\{\alpha_j = \tau\}$

- $\succeq_{\text{frische } \alpha_i}$ instanziiert ein Typschema mit α_i, die noch nicht im Baum vorkommen.
- Jetzt brauchen wir noch eine Möglichkeit, Typschemata zu erzeugen.

Let-Polymorphismus

Mit einen $\textsc{Let}$-Term wird ein Typschema eingeführt:

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \alpha_i \qquad \Gamma' \vdash t_2 : \alpha_j}{\Gamma \vdash \texttt{let}\ x = t_1\ \texttt{in}\ t_2 : \alpha_k}\textsc{Let}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{let} &= mgu(C_{let}) \\
\Gamma' &= \sigma_{let}(\Gamma), x : ta(\sigma_{let}(\alpha_i), \sigma_{let}(\Gamma)) \\
C'_{let} &= \{\alpha_n = \sigma_{let}(\alpha_n) \mid \sigma_{let}(\alpha_n)\ \text{ist definiert}\}
\end{aligned}$$

Constraints: $C'_{let} \cup C_{body} \cup \{a_j = a_k\}$

Beispiel: Let-Polymorphismus

$$
\dfrac{
\dfrac{\dots}{\vdash \lambda x.\, x : \alpha_2}\,\textsc{Abs}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma'(f) = \forall \alpha_5.\alpha_5 \to \alpha_5 \\ \succeq \alpha_8 \to \alpha_8\end{array}}{\Gamma' \vdash f : \alpha_6}\,\textsc{Var}
\qquad
\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma'(f) = \forall \alpha_5.\alpha_5 \to \alpha_5 \\ \succeq \alpha_9 \to \alpha_9\end{array}}{\Gamma' \vdash f : \alpha_7}\,\textsc{Var}
}{\Gamma' \vdash f\ f : \alpha_3}\,\textsc{App}
}{\vdash \texttt{let}\ f = \lambda x.\, x\ \texttt{in}\ f\ f : \alpha_1}\,\textsc{Let}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{let} &= \{\alpha_2 = \alpha_4 \to \alpha_5, \alpha_4 \to \alpha_5\} \\
\sigma_{let} &= [\alpha_2 \Rightarrow \alpha_5 \to \alpha_5, \alpha_4 \Rightarrow \alpha_5] \\
\Gamma' &= x : \forall \alpha_5.\alpha_5 \to \alpha_5 \\
C'_{let} &= \{\alpha_2 = \alpha_5 \to \alpha_5, \alpha_4 = \alpha_5\} \\
C_{body} &= \{\alpha_6 = \alpha_7 \to \alpha_3, \alpha_6 = \alpha_8 \to \alpha_8, \alpha_7 = \alpha_9 \to \alpha_9\} \\
C &= C'_{let} \cup C_{body} \cup \{\alpha_3 = \alpha_1\}
\end{aligned}
$$

Ende

Ende

- Di, 16.02.: Letztes Tut
- Mi, 17.02.: Letzte Vorlesung
- Themen: Mehr Syntaxanalyse (Beispiele), Codeerzeugung