Лабораторная работа №9 по курсу информатики

Цель работы — составление и отладка простейшей программы на языке С итеративного характера с целочисленными рекуррентными соотношениями, задающими некоторое регулярное движение точки в целочисленной системе координат (i, j) с дискретным временем k и динамическим параметром движения l.

Результатом работы программы должно быть сообщение об итоге движения: попадание в заданную область плоскости не более чем за 50 шагов и время попадания (номер шага, итерации) или сообщение о промахе, также в результат надо включить время окончания движения, конечные координаты точки и значение динамического параметра движения. Начальные данные движения и параметры соотношений задаются в виде *констант* программы.

Варианты заданий для соответствующих областей прибытия:

I. Кольцо, ограниченное двумя окружностями с центром в точке (10, 10), радиус внутренней окружности равен 5, а радиус внешней равен 10

1. $i_0 = 18, j_0 = -9, l_0 = 5$
   $i_{k+1} = i_k \max(j_k, l_k) \bmod 30 + j_k \min(i_k, l_k) \bmod 20 + k,$
   $j_{k+1} = \min(i_k, \max(j_k, \min(l_k, \max(i_k - l_k, j_k - l_k)))),$
   $l_{k+1} = \operatorname{sign}(k - 10)\,|i_k - j_k + l_k - k|$

2. $i_0 = 0, j_0 = -3, l_0 = -7$
   $i_{k+1} = \dfrac{|i_k - j_k + l_k|}{3 - \operatorname{sign}(i_k - j_k + k)} + 10,$
   $j_{k+1} = \dfrac{|i_k + j_k - l_k|}{3 - \operatorname{sign}(j_k - i_k + k)} + 10,$
   $l_{k+1} = \max(i_k j_k, j_k l_k)(k + 1) \bmod 40$

3. $i_0 = 1, j_0 = -30, l_0 = 1$
   $i_{k+1} = \max(\min(i_k + j_k - l_k - k, i_k - j_k + l_k - k), \min(k + i_k - j_k - l_k, k - i_k - j_k + l_k)),$
   $j_{k+1} = j_k + l_k \operatorname{sign} j_k \bmod 20 + k \operatorname{sign} i_k \bmod 10,$
   $l_{k+1} = |i_k - j_k + l_k - k| \operatorname{sign} i_k \operatorname{sign} j_k$

4. $i_0 = 26, j_0 = 8, l_0 = -3$
   $i_{k+1} = \min(i_k + j_k, i_k + l_k)(k + 1) \bmod 30,$
   $j_{k+1} = j_k + l_k \operatorname{sign} j_k \bmod 20 + k \operatorname{sign} i_k \bmod 10,$
   $l_{k+1} = \max(i_k j_k, i_k l_k, j_k l_k) \bmod 30$

5. $i_0 = -1, j_0 = -1, l_0 = -9$
   $i_{k+1} = \max(j_k - k, l_k - k) \bmod 30 + \max(i_k + l_k, j_k + k) \bmod 20,$
   $j_{k+1} = (|i_k - l_k| \operatorname{sign}(j_k + k) + |i_k - k|(j_k + k)) \bmod 20,$
   $l_{k+1} = (i_k + k)(j_k - k)(l_k + k) \bmod 25$

II. Квадрат с длиной стороны 10, стороны квадрата параллельны осям координат, центр квадрата в точке (10, −10)

6. $i_0 = 22, j_0 = 10, l_0 = 10$
   $i_{k+1} = \min(l_k \bmod 5, i_k k \bmod 5) + j_k + k/3,$
   $j_{k+1} = \max(-3i_k, 2j_k)/5 - |j_k - l_k|,$
   $l_{k+1} = j_k + l_k \bmod 7 + k \operatorname{sign} i_k \bmod 10$

7. $i_0 = 11, j_0 = 13, l_0 = 10$
   $i_{k+1} = |k - 15| - \min(i_k/3, (j_k + l_k) \bmod 10) - 20,$
   $j_{k+1} = -(j_k + k)/5 + |i_k l_k \bmod 8|,$
   $l_{k+1} = \max((i_k + j_k) \bmod 15, (l_k + k) \bmod 14)$

8. $i_0 = -11, j_0 = -6, l_0 = -5$
   $i_{k+1} = (i_k + j_k + l_k)(k + 1) \bmod 25 - i_k j_k l_k (k + 2) \bmod 10 + 10,$
   $j_{k+1} = \min((i_k + j_k + l_k)(k + 3) \bmod 25, i_k j_k l_k (k + 4) \bmod 25) + 10,$
   $l_{k+1} = 2 \operatorname{sign} l_k |(i_k + j_k + l_k)(k + 5) \bmod 10 - i_k j_k l_k (k + 6) \bmod 25|$

9. $i_0 = 10, j_0 = 20, l_0 = -1$
   $i_{k+1} = (|\max(i_k(k + 5), j_k(k + 6))| - |\min(j_k(k + 7), l_k(k + 8))|) \bmod 20,$
   $j_{k+1} = (3 - \operatorname{sign}(i_k - j_k))|\min(i_k l_k + 5, j_k l_k - 3, i_k j_k + 6)| \bmod 25 - 7,$
   $l_{k+1} = i_k \bmod 10 + j_k \bmod 10 + l_k \bmod 10$

10. $i_0 = 24, j_0 = -14, l_0 = 9$
    $i_{k+1} = (i_k + k)(j_k - k)(l_k + k) \bmod 25,$
    $j_{k+1} = \min(i_k + k, \max(j_k - k, l_k - k)) \bmod 30,$
    $l_{k+1} = |j_k - l_k| \operatorname{sign} i_k - |i_k - l_k| \operatorname{sign} j_k$

III. Лунка, являющаяся пересечением двух кругов радиуса 10, центр первого круга — в точке $(-10, -10)$, центр второго — в точке $(-20, -20)$

11. $i_0 = 5, j_0 = 5, l_0 = 4$
$i_{k+1} = i_k/3 - |i_k - k| \operatorname{sign}(l_k - j_k),$
$j_{k+1} = j_k \bmod 10 - \max(i_k, l_k) \bmod (k+1),$
$l_{k+1} = i_k + j_k k \bmod 5 + l_k/5 + 3$

12. $i_0 = -22, j_0 = 29, l_0 = 4$
$i_{k+1} = \operatorname{sign}\min(i_k, j_k)\max((i_k + k) \bmod 20, (j_k + l_k) \bmod 20),$
$j_{k+1} = |\max(i_k, j_k)| - k\min(j_k, l_k),$
$l_{k+1} = (k - l_k)/((i_k + j_k + l_k)(i_k + j_k + l_k) \bmod 5 + 1)$

13. $i_0 = 13, j_0 = -9, l_0 = -4$
$i_{k+1} = ((i_k + j_k) \bmod 30)/(|l_k| \bmod 5 + 1) + ((i_k + l_k) \bmod 30)/(|j_k| \bmod 5 + 1),$
$j_{k+1} = \max(k i_k, (k+1) j_k) \bmod 25 - |j_k - l_k|/10,$
$l_{k+1} = |j_k - l_k|/10 + \min((i_k + l_k) \bmod 20, j_k k \bmod 20) - 10$

14. $i_0 = 6, j_0 = 27, l_0 = -15$
$i_{k+1} = (i_k^3 - j_k^3 + l_k^3 - k) \bmod 20,$
$j_{k+1} = \min(i_k j_k j_k - k, i_k^2 l_k - k, j_k l_k^2 - k) \bmod 30,$
$l_{k+1} = \max(i_k j_k j_k - k, i_k^2 l_k - k, j_k l_k^2 - k) \bmod 30$

15. $i_0 = 7, j_0 = -4, l_0 = -10$
$i_{k+1} = \max(47 i_k \bmod 25, \min(47 j_k \bmod 30, 47 l_k \bmod 30)) - k \bmod 15,$
$j_{k+1} = \min(\max(47 i_k \bmod 25, 47 j_k \bmod 25), 47 l_k \bmod 30) + k \bmod 5,$
$l_{k+1} = 47 i_k j_k l_k \bmod 25 + k \bmod 5$

IV. Полоса, ограниченная прямыми $\mathbf{i + j + 10 = 0}$ и $\mathbf{i + j + 20 = 0}$

16. $i_0 = -30, j_0 = -4, l_0 = 12$
$i_{k+1} = |i_k - l_k| + \min(j_k \bmod 10, l_k k \bmod 10) - 20,$
$j_{k+1} = \max(k - i_k, \min(j_k, \max(i_k - l_k, j_k - l_k))) \bmod 30,$
$l_{k+1} = l_k^2 \bmod 20 - \max(i_k, j_k) \bmod (k+1)$

17. $i_0 = 13, j_0 = 19, l_0 = 14$
$i_{k+1} = \operatorname{sign}(i_k + 1)\,||k - j_k| - |i_k - l_k||,$
$j_{k+1} = j_k \bmod 20 + \max(i_k \bmod 20, \min(j_k - k, l_k - k)) - 10,$
$l_{k+1} = k(i_k + 1)(j_k + 2)(l_k + 3) \bmod 20$

18. $i_0 = 12, j_0 = 4, l_0 = 3$
$i_{k+1} = (i_k j_k/(|l_k| + 1) + j_k l_k/(|i_k| + 1) + i_k l_k/(|j_k| + 1)) \bmod 30,$
$j_{k+1} = i_k \max(j_k, l_k) \bmod 20 + j_k \min(i_k, l_k) \bmod 30 - k,$
$l_{k+1} = \max(i_k j_k, i_k l_k, j_k l_k) \bmod 30 + 20$

19. $i_0 = -22, j_0 = 14, l_0 = -14$
$i_{k+1} = (i_k \min(j_k, l_k) + j_k \min(i_k, l_k) + k^2) \bmod 20,$
$j_{k+1} = (i_k \bmod 10 - k)(j_k \bmod 10 + k)(l_k \bmod 10 - k) \bmod 25,$
$l_{k+1} = \max(\min(i_k + j_k, i_k + l_k) \bmod 25, \max(i_k + l_k, j_k + k) \bmod 20) + 10$

20. $i_0 = -25, j_0 = -9, l_0 = -8$
$i_{k+1} = (|i_k - j_k| l_k - |j_k - l_k| i_k + |i_k - l_k| j_k) \bmod 20 - k,$
$j_{k+1} = \min(i_k, j_k)\max(j_k, l_k)\min(i_k, l_k) \bmod 25 + 5\operatorname{sign} i_k + k,$
$l_{k+1} = |l_k| \operatorname{sign}(i_k - j_k) - |i_k| \operatorname{sign}(j_k - l_k) + |j_k| \operatorname{sign}(i_k - l_k)$

V. Треугольник с вершинами в точках $(-10, 0)$, $(0, 10)$, $(-10, 20)$

21. $i_0 = -12, j_0 = -22, l_0 = 11$
$i_{k+1} = \max(\min(i_k - j_k, j_k - l_k) \bmod 20, \min(i_k - l_k, j_k - k) \bmod 20) + 10,$
$j_{k+1} = \operatorname{sign}(i_k - j_k)\min(i_k \bmod 20, j_k \bmod 20) - \max(|i_k - l_k|, |k - 20|) \bmod 20 + 20,$
$l_{k+1} = (i_k \bmod 10)(j_k \bmod 10) + l_k \bmod 10$

22. $i_0 = 8, j_0 = 15, l_0 = 10$
$i_{k+1} = ((i_k + j_k) \bmod (|\min(j_k - l_k, l_k - k)| + 1) - k) \bmod 20 + 10,$
$j_{k+1} = \max((i_k + j_k)/(2 + \mathrm{sign}(j_k l_k - i_k k)), (j_k + l_k)/(2 + \mathrm{sign}(i_k j_k - l_k k))) - 10,$
$l_{k+1} = \max(i_k, j_k)\min(i_k, l_k) \bmod 30$
23. $i_0 = 29, j_0 = -6, l_0 = 1$
$i_{k+1} = \min(\max(\min(i_k - j_k, i_k - l_k), j_k - l_k), i_k - k) \bmod 30,$
$j_{k+1} = \max(\min(\max(i_k - j_k, i_k - l_k), j_k - l_k), i_k - k) \bmod 30,$
$l_{k+1} = i_k \bmod 30 - j_k \bmod 30 + l_k \bmod 30 - k \bmod 30$
24. $i_0 = 20, j_0 = 0, l_0 = 11$
$i_{k+1} = ((i_k - k)\max(j_k, l_k) + (j_k - k)\min(i_k, l_k) + (l_k - k)\max(i_k, j_k)) \bmod 23,$
$j_{k+1} = -((i_k - k)\min(j_k, l_k) + (j_k - k)\max(i_k, l_k) + (l_k - k)\min(i_k, j_k)) \bmod 27,$
$l_{k+1} = |i_k + j_k - l_k - k|\,\mathrm{sign}(i_k - j_k + l_k - k)$
25. $i_0 = -8, j_0 = -5, l_0 = 12$
$i_{k+1} = (i_k^2/(|j_k - l_k| + k + 1) - j_k^2/(|i_k - l_k| + k + 1)) \bmod 30,$
$j_{k+1} = \mathrm{sign}\, l_k \min(i_k, j_k) - \mathrm{sign}\, j_k \max(i_k, l_k) + k,$
$l_{k+1} = (i_k - j_k)(j_k - l_k)(l_k - i_k) \bmod 20$

VI. Эллипс с центром в точке (20, 0) и проходящий через точки (10, 0), (30, 0), (20, 5) и (20, −5)

26. $i_0 = -10, j_0 = -10, l_0 = 6$
$i_{k+1} = |\max(\min(i_k + j_k, i_k + l_k) \bmod 30, \max(i_k + l_k, j_k + k) \bmod 25)|,$
$j_{k+1} = |i_k + k| \bmod 10 + |j_k + k| \bmod 10 + |l_k + k| \bmod 10,$
$l_{k+1} = (i_k^3 + j_k^3 + l_k^3 - k) \bmod 35$
27. $i_0 = -24, j_0 = 4, l_0 = -3$
$i_{k+1} = |(i_k + k)(j_k + 2k)(l_k + 3k)| \bmod 35,$
$j_{k+1} = \mathrm{sign}\max(i_k, j_k)\min((i_k + k) \bmod 20, (j_k + l_k) \bmod 20),$
$l_{k+1} = i_k/3 - |i_k - k|\,\mathrm{sign}(l_k - j_k)$
28. $i_0 = -29, j_0 = 3, l_0 = 9$
$i_{k+1} = i_k \max(j_k, l_k) \bmod 20 + j_k \min(i_k, l_k) \bmod 30 + k,$
$j_{k+1} = |i_k - j_k + l_k - k|\,\mathrm{sign}(k - 10) \bmod 20,$
$l_{k+1} = (|i_k - j_k| l_k - |j_k - l_k| i_k + |i_k - l_k| j_k) \bmod 20 - k$
29. $i_0 = -7, j_0 = -19, l_0 = 4$
$i_{k+1} = \max(i_k j_k, i_k l_k, j_k l_k) \bmod 30 + k,$
$j_{k+1} = |j_k - l_k|\,\mathrm{sign}\, i_k - |i_k - l_k|\,\mathrm{sign}\, j_k,$
$l_{k+1} = \min(i_k, \max(j_k, \min(l_k, \max(i_k - l_k, j_k - l_k))))$
30. $i_0 = -1, j_0 = 2, l_0 = -1$
$i_{k+1} = |\mathrm{sign}(i_k - j_k) l_k - \mathrm{sign}(j_k - l_k) i_k + \mathrm{sign}(i_k - l_k) j_k - k| \bmod 35,$
$j_{k+1} = i_k \max(j_k, l_k) \bmod 30 + j_k \min(i_k, l_k) \bmod 20 - k,$
$l_{k+1} = (i_k + k)(j_k - k)(l_k + k) \bmod 25$

Примечания

1. Следует различать операции деления по модулю и нахождения остатка. Деление по модулю обычно обозначают *modulo*, а остаток от деления — *remainder*, при этом $remainder(a, b) = a - [a/b] \times b$ и $modulo(a, b) = a - \lfloor a/b \rfloor \times b$, т. е. отличие заключается в операции целочисленного деления, которая может быть определена как $\lfloor a/b \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor = floor(x)$ (*пол*) — наибольшее целое, меньшее или равное x) или как $[a/b]$, где $[x] = trunc(x)$ — целая часть x. В Питоне оператор % находит *modulo* (т. к. целочисленное деление определено через *floor*), а в Си — *remainder*. В Scheme и Common Lisp-е (диалекты Лиспа) есть оба оператора. Например, в Scheme (*modulo* -2 3) вернет 1, а (*remainder* -2 3) — -2. См. п. 3.4 книги Р. Грэхема, Д. Кнута и О. Паташника «Конкретная математика». Кстати, в MS Excel целое деление определено через отброс дробной части.

С другой стороны, при программировании на Паскале, если i и/или j отрицательны, формула делимое = частное × делитель + остаток может дать неожиданные результаты: $5 \bmod 3 = 2$, $5 \bmod$

$-3 = -1$, $-5 \bmod 3 = 1$ и $-5 \bmod -3 = -2$, а согласно стандарту языка Паскаль ISO 7185, возникает ошибка — отказ от выполнения операции целочисленного деления, такой же, как при делении на нуль.

2. Стандарт языка С ISO/IEC 9899:1999 четко определяет поведение при делении целых чисел:

   > When integers are divided, the result of the `/` operator is the algebraic quotient with any fractional part discarded. If the quotient `a/b` is representable, the expression `(a/b)*b + a%b` shall equal `a`.

   Стандарт языка С++ ISO/IEC 14882:2003 следует стандарту С в вопросах выполнения деления целых чисел.

При составлении программы необходимо обосновать выбранный для реализации тип оператора цикла, рассмотреть инварианты цикла, пред- и постусловия и другие средства доказательства его завершимости и корректности (теоретические: анализ уравнений движения, метод математической индукции по числу повторений цикла и др. и практические: вычерчивание траектории на клетчатой бумаге или визуализация с применением ЭВМ).

Дополнительные задания

1. Вывести траекторию движения в выходной текстовый файл для визуализации gnuplot.

2. Решить олимпиадную задачу «Бильярд» (проф. Титов В. К., 1983 г.):

   Бильярд представляет собой клеточный прямоугольник $m \times n$. В клетке с координатами (i, j) находится шар. В переменной k задано значение, определяющее направление по диагонали, в котором начинает двигаться шар. Направление кодируется следующим образом: 1 — вправо-вверх, 2 — вправо-вниз, 3 — влево-вниз, 4 — влево-вверх. Шар движется по диагонали до стенки бильярда и отражается от нее, продолжая движение по перпендикулярному диагональному направлению. Движение шара заканчивается выходом из бильярда, если он попадает в одну из его луз (угловых клеток). Требуется по заданным m, n, i, j, k определить, выйдет ли шар за край бильярда, и если выйдет, то через какой угол и за сколько ударов о стенку бильярда. Если шар не выйдет за пределы бильярда, надо проследить его движение до попадания в начальную точку с начальным направлением движения и подсчитать число ударов в одном цикле траектории.

   Составленная программа должна обрабатывать тесты вплоть до конца файла.

   Исходные данные: В каждой строке входного файла задается отдельный тест: 5 целых чисел, разделенных пробелами: четыре двузначных числа и одно однозначное. Исходные данные корректны $m, n \geqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant 4$. Результат для каждого теста должен содержать число ударов о стенку и название угла, если шар попадает в лупку.

3. Прочитать книгу Г.-Г. Кориолиса «Математическая теория явлений бильярдной игры», ISBN: 5-88988-030-6. Первое издание на русском языке —М.: ГИТТЛ, 1956.

4. Ознакомиться с современными достижениями математической биллиардистики (по изданиям РАН).

5. Оттестировать программу в системе автоматического тестирования test9^{9^9}, строго соблюдая заданный формат ввода и вывода.

Для выполнения задания также весьма полезна книга Г. Уоррена-мл. Алгоритмические трюки для программистов. —М.: Вильямс, 2004.

Задание подготовили: проф. Зайцев В. Е., проф. Титов В. К., доц. Сошников Д. В., ст. преп. Калинин А. Л., Лебедев А. В. и Перетягин И. А.