دانشگاه پیام نور تهران مرکز شمیرانات

دانشکده مهندسی کامپیوتر

مهندسی نرم‌افزار

عنوان سمینار

# سیستم‌های فازی و هوش مصنوعی

استاد

**دکتر مهدی خلیلی**

دانشجو

**کاوه شاه‌حسینی**

شماره دانشجویی

**۹۲۳۸۴۳۰۱۰**

ترم ۳۹۵۱

# فهرست مطالب

# فهرست جداول



# فهرست تصاویر

# ۱ مجموعه‌های فازی

## ۱.۱ مجموعه‌های کلاسیک

پیش از آنکه به توضیح مجموعه‌های فازی بپردازیم، نیاز است تا مروری بر مجموعه‌های کلاسیک داشته باشیم. همه‌ی ما کم و بیش با مفهموم مجموعه آشنا هستیم. به عنوان مثال مجموعه‌ای از دانشجویان یک رشته، مجموعه‌ای از اعداد بزرگ‌تر از صفر و... نمونه‌ای از مجموعه‌ها هستند. مجموعه‌ها گروهی از اشیاء متمایز هستند. به اشیاء درون هر مجموعه، اعضاء و یا عناصر آن مجموعه گفته می‌شود.

در ریاضیات مجموعه را با حروف بزرگ $A, B, C, \dots$ و اعضای مجموعه را با حروف کوچک $a, b, c, \dots$ نمایش می‌دهند. همچنین عضویت یک شیء در مجموعه با نماد $\in$ و عدم عضویت با نماد $\notin$ نمایش داده می‌شود. [۱]

مجموعه‌ای را که شامل همه‌ی اشیاء در یک کاربرد مشخص هستند را مجموعه‌ی جهانی [۱] یا مرجع گویند.

اگر مجموعه‌ی جهانی را با $U$ نمایش دهیم، آنگاه نمایش مجموعه‌ی $A$ در این مجموعه‌ی مرجع می‌تواند به دو روش صورت گیرد. در روش اول می‌توان تمامی عناصر موجود در مجموعه را با لیست کردن [۲] نمایش داد. به عنوان مثال اگر مجموعه‌ی $A$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۵ باشد، می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

و یا می‌توان با استفاده از روش دوم یعنی قانون عضویت [۳] بصورت زیر نمایش داد [۲]:

$$A = \{x \mid x \in N,\ x < 5\}$$

روش دوم به این صورت خوانده می‌شود «مجموعه‌ی $A$، شامل اعضای $x$ است، به قسمی که $x$ها جزو اعداد طبیعی باشند و کوچک‌تر از ۵ باشند».

به صورت کلی تعریف مجموعه‌ها با استفاده از قوانین عضویت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A = \{x \in U \mid x \text{ meets some conditions}\} \qquad (۱)$$

در مجموعه‌های کلاسیک عضویت یک شیء تنها دو حالت دارد؛ بدین صورت که شیء $x$ یا متعلق به مجموعه $A$ هست و یا نیست. این مجموعه‌ها را به دلیل آنکه فضای آن با دقت ٪۱۰۰ قابل تشخیص است و عناصر آن دارای ارزش عضویت صفر و یا یک هستند، مجموعه‌های **قطعی** نیز می‌گویند.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & if \quad x \in A, \\ 0 & if \quad x \notin A. \end{cases} \qquad (۲)$$

---

[۱] Universal Set

[۲] Listing Method

[۳] Membership Rule

در اینجا $\mu_A(x)$ تابع عضویت مجموعه‌ی قطعی $A$ می‌باشد. تابع عضویت، تابعی است که ارزش عضویت یک شیء را در یک مجموعه، مشخص می‌کند. طبق آنچه در رابطه ۲ آمده است، تابع عضویت مجموعه‌های قطعی، تنها دو مقدار یک و یا صفر را برای مشخص کردن عضویت و یا عدم عضویت یک شیء در مجموعه، بازمی‌گرداند. تابع عضویت مجموعه‌ی جهانی همواره مقدار یک (۱) را بازمی‌گرداند. همچنین اگر مجموعه‌ای دارای هیچ عضوی نباشد، آن مجموعه را تهی [۴] می‌نامند و با علامت $\varnothing$ نمایش داده می‌شود. طبیعی است که تابع عضویت مجموعه‌ی تهی نیز همواره مقدار صفر (۰) را بازمی‌گرداند. مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است. [۳]

فرض کنید دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ در مجموعه‌ی مرجع $U$ وجود دارد. در جدول ۱ **روابط بین مجموعه‌های کلاسیک** همراه با توضیح آورده شده است:

| عنوان | نماد | مثال | توضیح |
|---|---|---|---|
| زیر مجموعه | $\subseteq$ | $A \subseteq B$ | همه‌ی اعضای $A$ در $B$ نیز هست و یا دو مجموعه با یکدیگر مساوی هستند. |
| زیر مجموعه سره | $\subset$ | $A \subset B$ | همه‌ی اعضای $A$ در $B$ نیز هست. ولی حداقل یک عضو در $B$ هست که در $A$ نیست. |
| مساوی | $=$ | $A = B$ | همه‌ی اعضای $A$ در $B$ نیز هست و همه‌ی اعضای $B$ نیز در $A$ هست. |

جدول ۱: روابط بین مجموعه‌های کلاسیک

همچنین در جدول ۲ **عملیات بر روی مجموعه‌های کلاسیک** همراه با تعاریف هریک از آنها آورده شده است:

| عنوان | نماد | تعریف |
|---|---|---|
| اجتماع | $\cup$ | $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$ |
| اشتراک | $\cap$ | $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$ |
| مکمل | $\overline{A}$ | $\overline{A} = \{x \mid x \notin A, x \in U\}$ |
| تفاضل | $\mid$ | $A \mid B = A \cap \overline{B} = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$ |

جدول ۲: عملیات بر روی مجموعه‌های کلاسیک

در جدول ۳ **خواص عملیات بر روی مجموعه‌های کلاسیک** آورده شده است:

[۴] Empty Set

| تعریف | Title | عنوان |
|---|---|---|
| $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ | Commutativity | خاصیت جابجایی |
| $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$<br>$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | Associativity | خاصیت شرکت‌پذیری |
| $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$<br>$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | Distributivity | خاصیت توزیع‌پذیری |
| $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$ | Idempotency | خاصیت خودتوانی |
| $A \cup (A \cap B) = A$<br>$A \cap (A \cup B) = A$ | Absorption | خاصیت جذب |
| $A \cup U = U$<br>$A \cap \varnothing = \varnothing$ | Domination | قوانین سلطه |
| $A \cup \varnothing = A$<br>$A \cap U = A$ | Identity | قوانین هویت |
| $A \cup \overline{A} = U$<br>$A \cap \overline{A} = \varnothing$ | Complement | قوانین متمم |
| $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$<br>$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ | DeMorgan | قوانین دمورگان |

جدول ۳: خواص عملیات بر روی مجموعه‌های کلاسیک

## ۲.۱ تعریف مجموعه‌های فازی

در سال ۱۹۶۵ پروفسور لطفی‌زاده، مفهوم عضویت درجه‌بندی شده و غیردقیق را مطرح کرد. در این روش درجه عضویت اعضای یک مجموعه مانند مجموعه‌های قطعی محدود به صفر و یک نمی‌شود و می‌تواند شامل درجات عضویت بین صفر تا یک نیز باشد. لطفی‌زاده این مجموعه‌ها را **مجموعه‌های فازی** [۵] نامید. مفهوم کلمه‌ی فازی به معنای نادقیق و مبهم می‌باشد.

مجموعه‌های کلاسیک را می‌توان به عنوان نمونه‌ی خاصی از مجموعه‌های فازی درنظر گرفت که تمامی اعضای آن دارای درجه عضویت یک می‌باشند. [۱]

در برخی موارد برای تمایز بین مجموعه‌های کلاسیک و فازی، از علامت $\tilde{A}$ استفاده می‌شود [۶]. [۳]

اگر مجموعه‌ی $A$ را در مجموعه‌ی مرجع $U$، یک مجموعه فازی درنظر بگیریم، آنگاه $A$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in A, \mu_A(x) \in [0,1]\} \qquad (۳)$$

که در آن $\mu_A(x)$ تابع عضویت مجموعه‌ی $A$ می‌باشد و برای هر عضو درجه‌ی عضویت آن را مشخص می‌کند.

یک روش معمول برای نمایش مجموعه‌های فازی، استفاده از رابطه ۳ است که در آن لیست زوج مرتبی از عناصر مجموعه و درجه عضویت هریک از آنها نمایش داده می‌شود. اما در صورتی که مجموعه فازی پیوسته باشد توسط

[۵] Fuzzy Sets

[۶] در اینجا ما برای راحتی، از علامت $\sim$ بر روی نام مجموعه‌های فازی استفاده نمی‌کنیم.

رابطه ۴ می‌توان آن را نمایش داد:

$$A = \left\{ \int \frac{\mu_A(x)}{x} \right\} \tag{۴}$$

همچنین اگر مجموعه‌ی فازی گسسته باشد می‌توان آن را به صورت رابطه ۵ نیز نمایش داد: [۴]

$$A = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + ... \right\} = \left\{ \sum_i \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \right\} \tag{۵}$$

در راین روابط علامت / به معنی تقسیم نیست، بلکه روشی برای نمایش اعضای مجموعه است که در آن، عدد بالای این نماد درجه عضویت و عدد زیرین عضو مجموعه می‌باشد. [۱]

به عنوان مثال فرض کنید عناصر $x_i = 1, 2, ..., 5$ متعلق به مجموعه‌ی $A$ هستند و به ترتیب دارای درجات عضویت $1, 0.8, 0.3, 0.5, 0.1$ می‌باشند. این مجموعه فازی را می‌توان به صورت:

$$A = \{(1, 0.1), (2, 0.5), (3, 0.3), (4, 0.8), (5, 1)\}$$

نمایش داد. همچنین این مجموعه می‌تواند طبق رابطه ۵ به صورت:

$$A = 0.1/1 + 0.5/2 + 0.3/3 + 0.8/4 + 1/5;$$

نیز نمایش داده شود. در اینجا علامت + به معنی جمع نیست، بلکه به معنی اجتماع اعضاء می‌باشد. [۳]

**مثال ۱.۱. مجموعه‌ی افراد قد بلند:** فرض کنید بخواهیم مجموعه‌ی افراد قدبلند را با استفاده از مجموعه‌های کلاسیک تعریف کنیم. آنگاه افرادی که قد بالای ۱۸۰ سانتی‌متر دارند را قد بلند در نظر گرفته و در این مجموعه قرار می‌دهیم و سایر افراد با قدی کمتر از ۱۸۰ در این مجموعه قرار نمی‌گیرند. اگر مجموعه $U$ را بصورت زیر در نظر بگیریم:

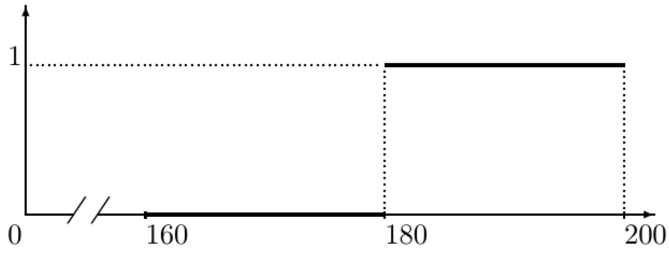
$$U = \{x \mid 160 \leq x \leq 200\}$$

و مجموعه‌ی $A$ را در مجموعه‌ی $U$، $A = \{\text{Tall men}\}$ در نظر بگیریم، آنگاه تابع عضویت این مجموعه‌ی قطعی به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & if \quad 180 \leq x \leq 200, \\ 0 & if \quad 160 \leq x < 180. \end{cases}$$

همانطور که در شکل ۱ نیز مشخص است، این تعریف نمی‌تواند مناسب باشد. زیرا اگر فردی داری قد ۱۷۹ سانتی‌متر باشد جزو افراد قد بلند نخواهد بود و فردی با یک سانتی‌متر بیشتر جزو این مجموعه خواهد بود. در حالی که تعریف بلندی قد، نسبی است.

حال همین مثال را در مجموعه‌های فازی تعریف می‌کنیم. مجموعه‌ی فازی $B = \{x, \mu_B(x)\}$ را در نظر بگیرید

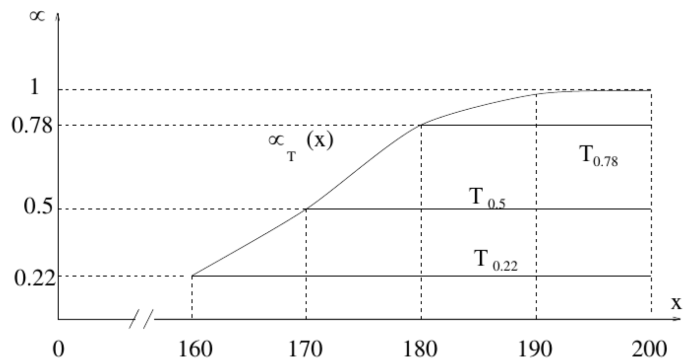



شکل ۱: تابع عضویت افراد قد بلند در مجموعه‌های کلاسیک

طوری که $x$ در بازه‌ی $[160, 200]$ قرار دارد و تابع عضویت $\mu_B(x)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(30)^2}(x-140)^2 & if \quad 160 \leq x < 170, \\ -\frac{1}{2(30)^2}(x-200)^2+1 & if \quad 170 \leq x \leq 200. \end{cases}$$

تابع $\mu_B(x)$ از نوع پیوسته قطعه به قطعه‌ی درجه دوم [۷] می‌باشد. حال همانطور که در شکل ۲ نمودار این تابع نمایش داده است، اگر فردی دارای قد ۱۶۰ سانتی‌متر باشد مقدار کمی قد بلند (۰,۲۲ درجه) محسوب می‌شود و اگر قد شخصی ۱۸۰ سانتی‌متر باشد مقدار زیادی (۰,۷۸ درجه) قد بلند محسوب می‌شود. همچنین شخصی با قد ۲۰۰ سانتی‌متر کاملا قد بلند خواهد بود. [۱]




شکل ۲: تابع عضویت افراد قد بلند در مجموعه‌های فازی

**مثال ۲.۱. اعداد نزدیک به صفر:** مجموعه‌ی $Z$ را مجموعه‌ی «اعداد نزدیک به صفر» در نظر بگیرید. آنگاه یک تابع عضویت ممکن برای این مجموعه به صورت زیر خواهد بود:

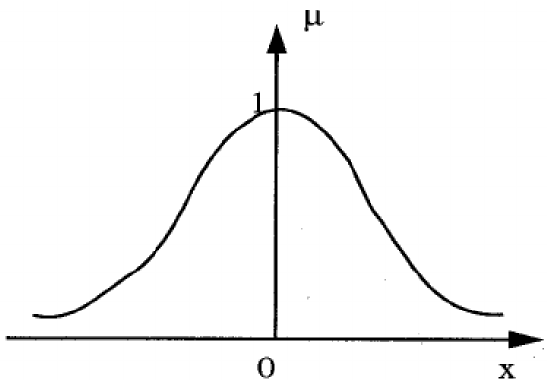
$$\mu_Z(x) = e^{-x^2}$$

[۷] continous piecewise-quadratic function

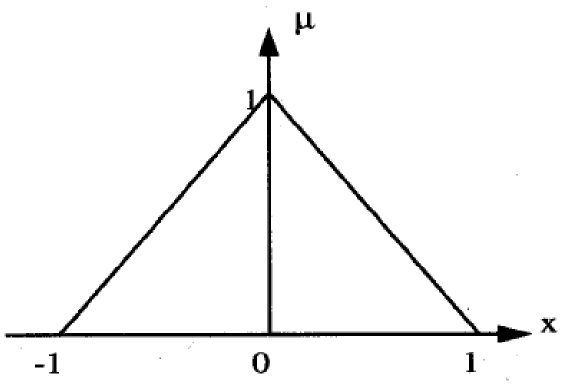
طبق رابطه بالا اعداد صفر و ۲ به ترتیب با درجات عضویت $e^0 = 1$ و $e^{-4}$ عضو مجموعه خواهند بود. همچنین ما می‌توانیم رابطه زیر را نیز به عنوان تابع عضویت مجموعه‌ی اعداد نزدیک به صفر در نظر بگیریم:

$$\mu_Z(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x < -1, \\ x+1 & if \quad -1 \leq x < 0, \\ 1-x & if \quad 0 \leq x < 1, \\ 0 & if \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

که در آن اعداد صفر و ۲ به ترتیب دارای درجات عضویت ۱ و صفر در این مجموعه هستند. نمودار این دو تابع در ادامه آورده شده است. طبق این مثال برای هر مجموعه‌ی فازی می‌توان توابع عضویت متفاوتی را در نظر گرفت. کلماتی که یک مجموعه فازی را تعریف می‌کنند، خود نیز فازی هستند. به عنوان مثال اعداد نزدیک به صفر، تعریف دقیقی را ارائه نمی‌کند و به همین دلیل می‌توان توابع عضویت متفاوتی را برای تعریف توضیح ارائه شده برای این مجموعه در نظر گرفت. البته این نکته را نیز باید بخاطر داشت که توابع عضویت فازی نیستند و آنها یک تابع ریاضی دقیق هستند. بنابراین همانطور که در این مثال نشان داده شد، یک توضیح فازی ارائه شد و توسط توابع عضویت، به غیرفازی تبدیل شدند. در برخی مواقع این ابهام وجود دارد که نظریه مجموعه‌های فازی برای این است که همه مسائل را فازی کند، اما خواهیم دید که در مقابل مجموعه‌های فازی برای غیرفازی کردن مسائل استفاده خواهد شد. [۲]




شکل ۳: یک تابع عضویت ممکن برای مجموعه فازی «اعداد نزدیک به صفر»




شکل ۴: یک تابع عضویت دیگر برای مجموعه فازی «اعداد نزدیک به صفر»

## ۳.۱ مفاهیم پایه مجموعه‌های فازی

**پشتیبان** پشتیبان مجموعه‌ی فازی $A$، مجموعه‌ای قطعی است که شامل همه‌ی اعضایی از $A$ است که دارای درجه عضویت بزرگتر از صفر هستند.

$$Supp(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\} \tag{۶}$$

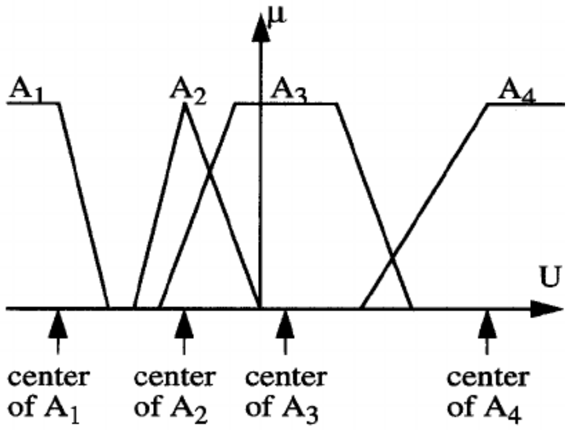
**مجموعه فازی تهی** اگر پشتیبان یک مجموعه‌ی فازی تهی باشد، آنگاه آن مجموعه‌ی فازی نیز تهی است.

**مجموعه فازی منفرد** مجموعه‌ی فازی که پشتیبان آن تنها یک عضو دارد را مجموعه‌ی فازی منفرد [۸] گویند.

**مرکز مجموعه فازی** اگر مقدار میانگین تمام نقاطی که در آنها تابع عضویت مقدار ماکزیمم دارد، محدود باشد، در این صورت این مقدار میانگین مرکز مجموعه‌ی فازی می‌باشد. اگر مقدار میانگین مثبت بی‌نهایت (منفی بی‌نهایت) باشد، در این صورت مرکز مجموعه، کوچکترین (بزرگترین) نقطه‌ای است که در آن تابع عضویت به حداکثر مقدار خود می‌رسد. در شکل ۵ مرکز چندین مجموعه نمایش داده شده است.

**نقطه تقاطع** نقطه‌ی گذر یا تقاطع [۹] مجموعه‌ی فازی $A$ نقطه‌ای در مجموعه‌ی $U$ است که ارزش عضویت آن در مجموعه‌ی $A$ برابر ۰٫۵ باشد.

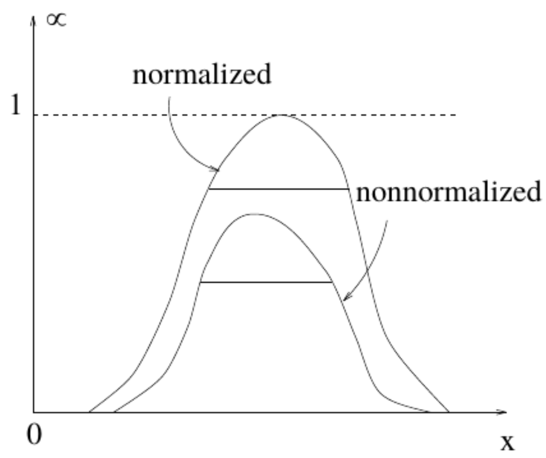
[۸] Fuzzy Singleton
[۹] Crossover Point




شکل ۵: مرکز چند مجموعه‌ی فازی متداول

**ارتفاع** ارتفاع یک مجموعه فازی برابر است با بزرگترین درجه عضویت اعضای آن مجموعه.

**مجموعه فازی نرمال** اگر ارتفاع یک مجموعه فازی برابر یک باشد، آن مجموعه فازی نرمال است. در شکل ۶ مجموعه‌ی فازی نرمال و غیرنرمال نمایش داده شده است.




شکل ۶: مجموعه فازی نرمال و غیرنرمال

**نرمال سازی مجموعه فازی** در صورتی که $\max \mu_A(x) < 1$ باشد، آنگاه مجموعه $A$ غیرنرمال است. برای نرمال سازی این مجموعه کافیست طبق رابطه ۷ درجه عضویت همه‌ی اعضا را بر ماکزیمم درجه عضویت آن مجموعه تقسیم کنیم.

$$\frac{\mu_A(x)}{\max \mu_A(x)} \tag{۷}$$

**برش $\alpha$** یک برش آلفای [10] مجموعه فازی $A$ برابر است با مجموعه‌ای قطعی که در آن اعضا با درجه عضویت بزرگتر و یا مساوی $\alpha$ قرار دارند. مقدار $\alpha$ می‌تواند در بازه‌ی $[0,1]$ باشد.

$$A_\alpha = \{x \in U|\, \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1] \tag{8}$$

**برش $\alpha$ قوی** اگر رابطه‌ی ۸ را به صورت زیر تعریف کنیم، آنگاه یک برش آلفای قوی خواهیم داشت. یعنی همانند برش آلفا ولی با این تفاوت که اعضای با درجه عضویت مساوی $\alpha$ را در نظر نگیریم.

$$A_\alpha = \{x \in U|\, \mu_A(x) > \alpha\}, \alpha \in [0,1] \tag{9}$$

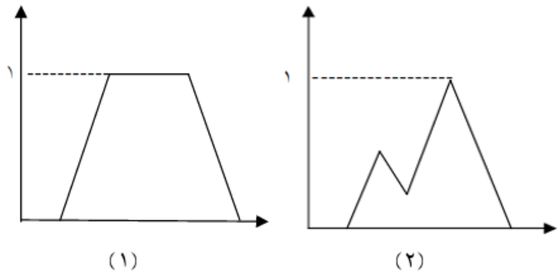
**نکته:** در برش آلفای قوی، اگر $\alpha$ را برابر با صفر در نظر بگیریم مجموعه‌ی پشتیبان بدست خواهد آمد.

**مجموعه فازی محدب** مجموعه فازی $A$ را در $R^n$ محدب [11] گویند، اگر و تنها اگر:

$$\mu_A\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \geq min\left[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\right] \tag{10}$$

برای همه‌ی $x_1, x_2 \in R^n$ و همه‌ی $\lambda \in [0,1]$.

به طور شهودی مجموعه‌ی $A$ در صورتی محدب خواهد بود که شکل آن دارای دره نباشد. به عبارت دیگر مجموعه می‌تواند صعود کند و سپس نزول کند، ولی دیگر اجازه صعود ندارد. مثالی از این مجموعه‌ها در شکل ۷ نشان داده شده است.




شکل ۷: (۱) مجموعه فازی محدب (۲) مجموعه فازی غیرمحدب

**کاردینالیتی** کاردینالیتی [12] یا عدد اصلی یک مجموعه برابر است با مجموع درجات عضویت اعضای آن:

$$|A| = \sum_i \mu_A(x_i) \tag{11}$$

[10] $\alpha$-cut
[11] Convex Fuzzy Set
[12] Cardinality

## ۴.۱ روابط بین مجموعه‌های فازی

همانند آنچه که در جدول ۱ برای روابط بین مجموعه‌های کلاسیک مطرح شد، برای مجموعه‌های فازی نیز در ادامه تعریف خواهند شد. فرض کنید دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ در مجموعه‌ی جهانی $U$ به صورت زیر باشد:

$$A = \{(x, \mu_A(x))\}, \mu_A(x) \in [0,1],$$
$$B = \{(x, \mu_B(x))\}, \mu_B(x) \in [0,1].$$

تعریف روابط بین این دو مجموعه در ادامه آورده شده است.

**تساوی** دو مجموعه‌ی فازی $A$ و $B$ مساوی خواهند بود ($A = B$)، اگر و تنها اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \qquad \forall x \in U \tag{۱۲}$$

**زیرمجموعه** مجموعه‌ی فازی $A$ زیرمجموعه‌ی $B$ خواهد بود ($A \subseteq B$)، اگر و تنها اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \qquad \forall x \in U \tag{۱۳}$$

**زیرمجموعه سره** مجموعه‌ی فازی $A$ زیرمجموعه‌ی سره $B$ خواهد بود ($A \subset B$)، اگر مجموعه‌ی $A$ زیر مجموعه‌ی $B$ باشد ولی این دو مجموعه با یکدیگر مساوی نباشند. این رابطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \mu_A(x) \leq \mu_B(x) & \text{for every } x \in U, \\ \mu_A(x) < \mu_B(x) & \text{for at least one } x \in U. \end{cases} \tag{۱۴}$$

## ۵.۱ عملیات بر روی مجموعه‌های فازی

مجموعه‌های فازی $A$ و $B$ را در مجموعه‌ی جهانی $U$ در نظر بگیرید. عملیات مکمل، اشتراک و اجتماع برای این مجموعه‌ها در ادامه تعریف شده است.

**اجتماع** اجتماع دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ برابر است با ماکزیمم درجه عضویت $x \in U$ در $A$ و $B$:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{Max}\,[\mu_A(x), \mu_B(x)] \tag{۱۵}$$

**اشتراک** اشتراک دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ برابر است با می‌نیمم درجه عضویت $x \in U$ در $A$ و $B$:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \text{Min}\,[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad (۱۶)$$

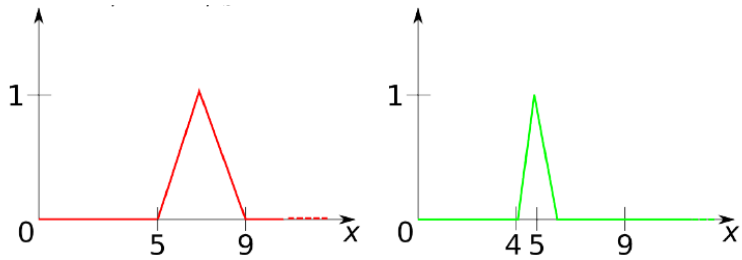
**مکمل** مکمل مجموعه‌ی $A$ برابر است با تفاضل درجه عضویت $x \in U$ در $A$ از ماکزیمم درجه عضویت یعنی ۱:

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (۱۷)$$

**تفاضل** تفاضل مجموعه‌ی $A$ و $B$ برابر است با اشتراک مجموعه‌ی $A$ و مجموعه‌ی مکمل $B$:

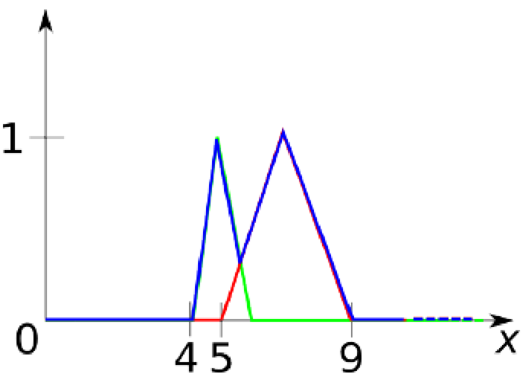
$$\mu_{A|B}(x) = \mu_{A\cap\overline{B}}(x) = \mu_A(x) \cap [1 - \mu_B(x)] \qquad (۱۸)$$

**مثال ۳.۱.** فرض کنید دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ به صورت زیر باشند:

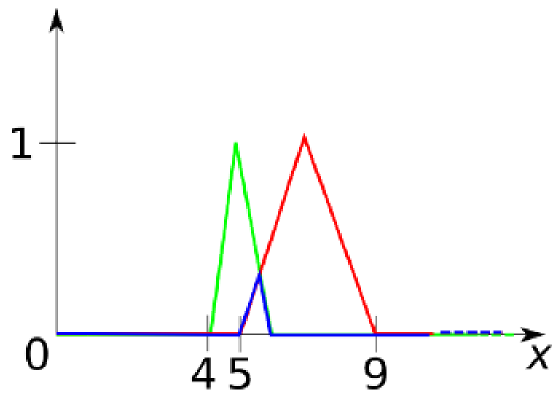



شکل ۸: دو مجموعه‌ی فازی $A$ و $B$

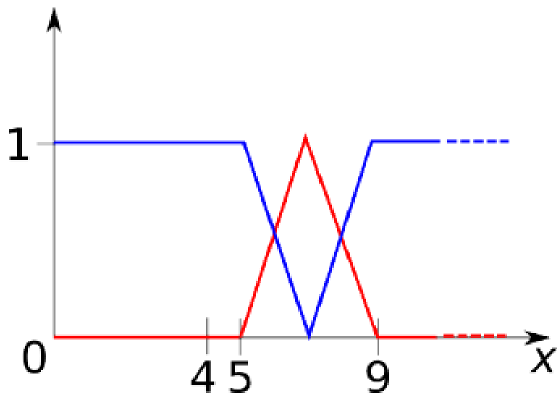
تعریف اجتماع، اشتراک و مکمل برای این مجموعه‌ها بر روی نمودار، در ادامه آورده شده است. [۵]




شکل ۹: اجتماع دو مجموعه‌ی فازی $A$ و $B$



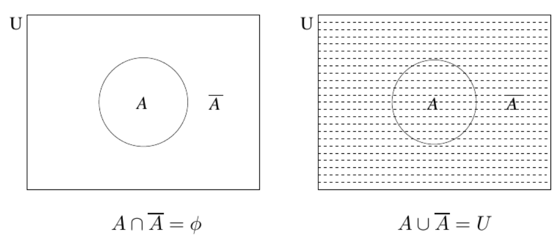

شکل ۱۰: اشتراک دو مجموعه‌ی فازی $A$ و $B$




شکل ۱۱: مکمل مجموعه‌ی فازی $A$

## ۶.۱ خواص عملیات در مجموعه‌های فازی

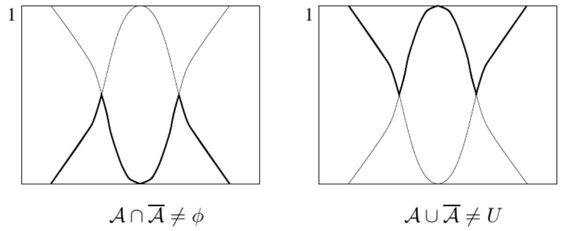
همه‌ی خواصی که برای مجموعه‌های کلاسیک در جدول ۳ آورده شد، به جز «قوانین متمم» برای مجموعه‌های فازی نیز صادق هستند. قوانین متمم در مجموعه های کلاسیک به صورت $A \cap \overline{A} = \varnothing$ And $A \cup \overline{A} = U$ تعریف می‌شوند. این قوانین توسط نمودار ون نیز در شکل ۱۲ نشان داده شده‌اند.




شکل ۱۲: قوانین متمم برای مجموعه‌های کلاسیک

واضح است در مجموعه‌های فازی این قانون معتبر نمی‌باشد. نبود این قانون در مجموعه‌های فازی باعث می‌شود

که آنها نسبت به مجموعه‌های کلاسیک دقت کمتری داشته باشند ولی این موضوع باعث انعطاف‌پذیری بیشتر مجموعه‌های فازی می‌شود و باعث می‌شود مجموعه‌های فازی برای توصیف ابهام و فرایندهای حاوی اطلاعات ناقص، مناسب باشند. [۱]




شکل ۱۳: عدم اعتبار قانون متمم برای مجموعه‌های فازی

## ۷.۱ توابع عضویت

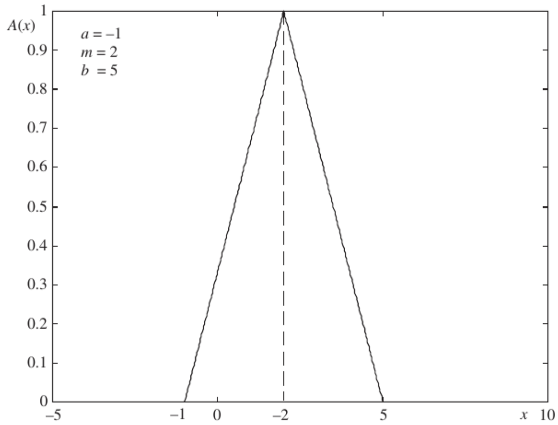
نحوه ایجاد مجموعه‌های فازی و تعریف تابع عضویت آنها بستگی به زمینه و دامنه کاربری آنها دارد. تعریف یک مجموعه فازی برای مفهوم مورد نظر با تعریف یک تابع عضویت مناسب برای آن کامل می‌شود. تعریف تابع عضویت مناسب بسیار مهم است؛ زیرا اگر تابع عضویت تعریف شده برای مجموعه فازی مناسب نباشد، کلیه تحلیل‌ها و بررسی‌ها پس از آن دچار انحراف می‌شوند. در ادامه چندین تابع عضویت متداول در مجموعه‌های فازی آورده شده است.

**تابع عضویت مثلثی** تابع عضویت مثلثی [۱۳] با سه پارامتر تعریف می‌شود که به شرح ذیل است:

$$triangle(x : a, m, b) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \dfrac{x-a}{m-a} & a \leq x \leq m, \\ \dfrac{b-x}{b-m} & m \leq x \leq b, \\ 0 & x > b. \end{cases} \qquad (۱۹)$$

پارامترهای $a$ و $b$، به ترتیب ابتدا و انتهای بازه هستند و پارامتر $m$ بیانگر رأس مثلث می‌باشد.(شکل ۱۴) [۶]

[۱۳] Triangular



شکل ۱۴: نمونه‌ای از تابع عضویت مثلثی

**تابع عضویت ذوزنقه‌ای** تابع عضویت ذوزنقه‌ای [۱۴]، نوعی تابع خطی قطعه به قطعه است که با ۴ پارامتر $(a, m, n, b)$ تعریف می‌شود. هر یک از این پارامترها، یکی از چهار قسمت تابع عضویت را مشخص می‌کنند. تعریف این تابع به شرح ذیل است:

$$trapezoidal(x : a, m, n, b) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{m-a} & a < x < m, \\ 1 & m \leq x \leq n, \\ \dfrac{b-x}{b-n} & n < x < b, \\ 0 & x \geq b. \end{cases} \quad (۲۰)$$

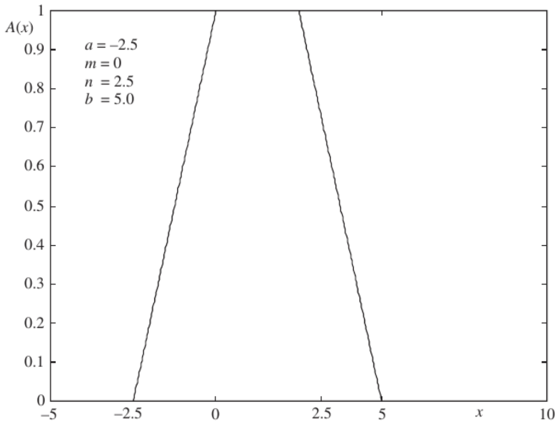
پارامترهای $a$ و $b$، به ترتیب ابتدا و انتهای بازه هستند و پارامترهای $m$ و $n$، بیانگر قسمت هم سطح تابع می‌باشند.(شکل ۱۵) [۶]

**تابع عضویت گوسی** تابع عضویت گوسی [۱۵]، با استفاده از دو پارامتر $(a, \sigma)$ تعریف می‌شود. این تابع به شرح ذیل است:

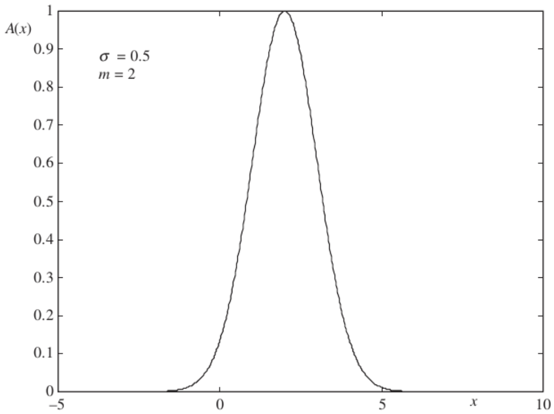
$$gaussian(x : a, \sigma) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right) \quad (۲۱)$$

پارامتر $a$، نقطه‌ی رأس تابع و $\sigma$ میزان پهنای تابع عضویت را مشخص می‌کند. مقادیر بالاتر $\sigma$، باعث گستره‌ی بیشتر تابع عضویت می‌شود.(شکل ۱۶) [۶]

[۱۴] Trapezoidal
[۱۵] Gaussian




شکل ۱۵: نمونه‌ای از تابع عضویت ذوزنقه‌ای




شکل ۱۶: نمونه‌ای از تابع عضویت گوسی

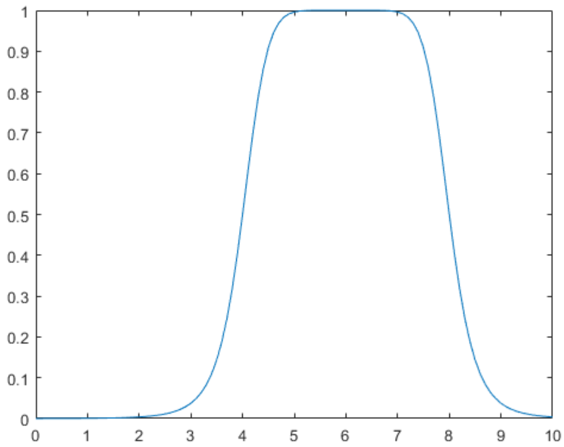
**تابع عضویت زنگوله‌ای** تابع عضویت زنگوله‌ای [۱۶]، با استفاده از سه پارامتر $(a, b, c)$ تعریف می‌شود. این تابع به شرح ذیل است:

$$bell\ shape(x : a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}} \tag{۲۲}$$

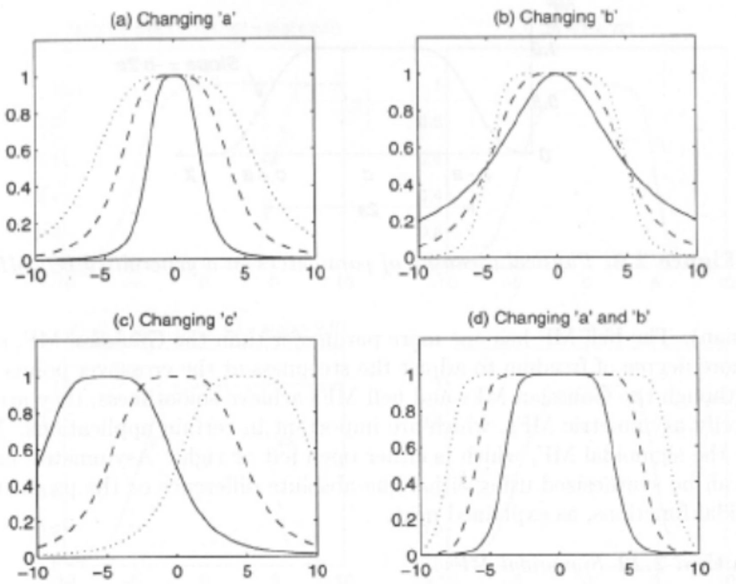
پارامتر $c$، مرکز تابع عضویت را نشان می‌دهد. همچنین پارامتر $b$، شیب و پارامتر $a$ پهنای تابع را مشخص می‌کند.(شکل ۱۷)

در شکل ۱۸ نیز تغییرات پارامترهای تابع و نحوه‌ی تاثیر آنها نشان داده شده است. [۷]

[۱۶] Bell Shape




شکل ۱۷: نمونه‌ای از تابع عضویت زنگوله‌ای



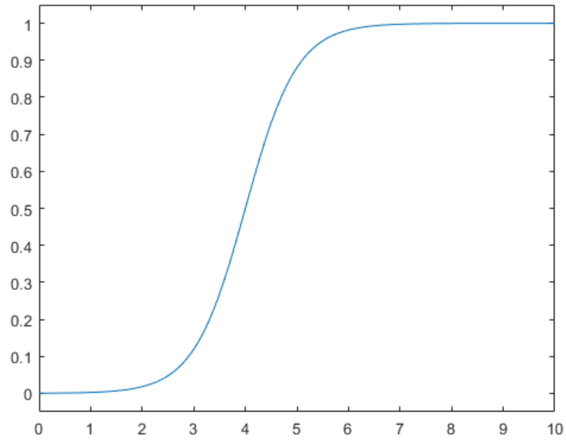

شکل ۱۸: تغییر پارامترهای تابع زنگوله‌ای و نحوه تاثیر آنها بر تابع

**تابع عضویت سیگمویدال** تابع عضویت سیگمویدال [۱۷]، با استفاده از دو پارامتر $(a, c)$ تعریف می‌شود. این تابع به شرح ذیل است:

$$sigmoidal(x : a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}} \tag{۲۳}$$

پارامتر $a$، شیب و پارامتر $c$، مرکز تابع را مشخص می‌کند.(شکل ۱۹) [۷]

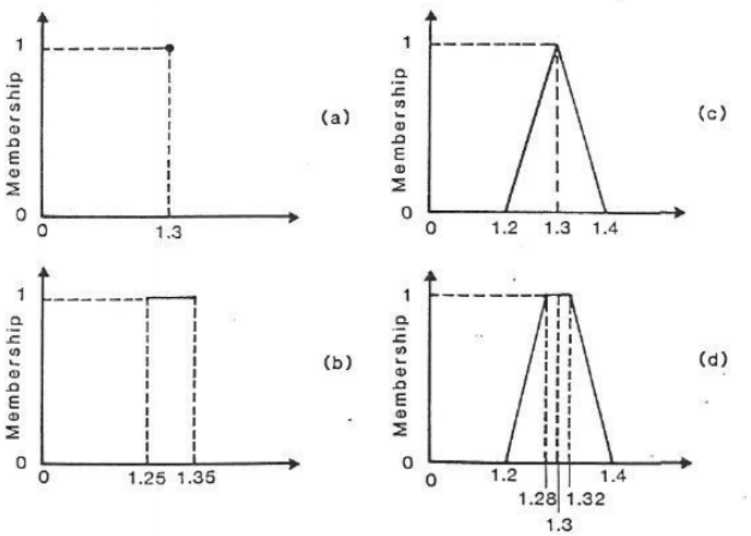
[۱۷] Sigmoidal




شکل ۱۹: نمونه‌ای از تابع عضویت سیگمویدال

## ۸.۱ اعداد فازی

اگر یک مجموعه‌ی فازی *محدب* و *نرمال* باشد و تابع عضویت آن در $\Re$ تعریف شود، به آن عدد فازی گویند. بنابراین عدد فازی (مجموعه فازی)، بازه‌ی عددی حقیقی را نشان می‌دهد که ابتدا و انتهای بازه، فازی هستند. [۳] اعداد فازی برای توصیف غیردقیق اعداد استفاده می‌شوند. توابع عضویت متداولی که در بخش قبل گفته شد، برای اعداد فازی بسیار پرکاربرد هستند. در شکل ۲۰ نمونه‌ای از (a) عدد حقیقی ۱٫۳، (b) بازه‌ی قطعی بسته [۱٫۲۵، ۱٫۳۵]، (c) عدد فازی نزدیک به ۱٫۳ و (d) بازه فازی نمایش داده شده است. [۸]




شکل ۲۰: مقایسه عدد حقیقی، بازه‌ی قطعی، عدد فازی مثلثی و عدد فازی ذوزنقه‌ای

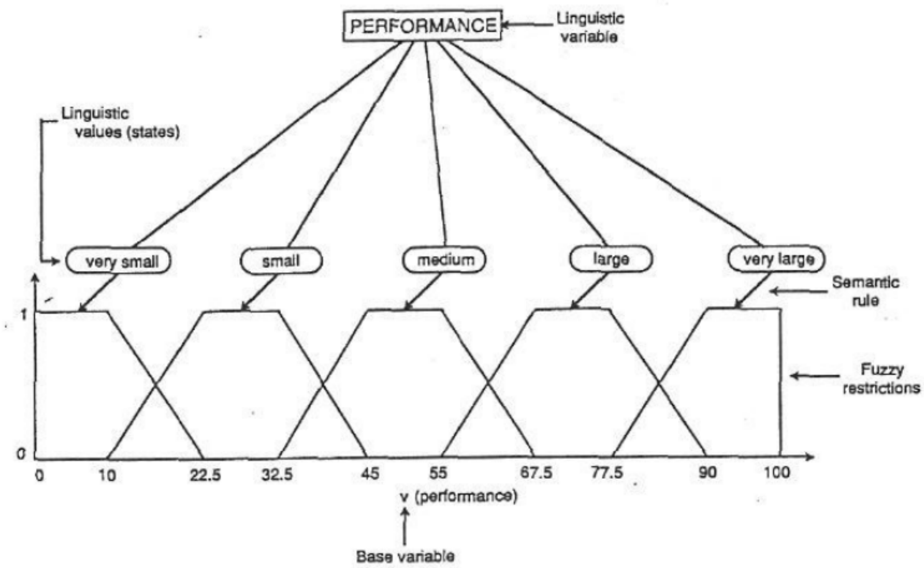
## ۹.۱ متغیرهای کلامی

مفهوم اعداد فازی، نقش مهمی در فرموله کردن کمی متغیرهای فازی دارند. اعداد فازی می‌توانند بیانگر مفاهیم کلامی مانند خیلی کوچک، کوچک، متوسط و... باشند. بدین ترتیب می‌توان با استفاده از اعداد فازی متغیرهای کلامی [۱۸] را ایجاد کرد.

هر متغیر کلامی شامل حالت‌هایی است که توسط عبارات کلامی [۱۹] بیان می‌شوند. هریک از این عبارات، عددی فازی هستند که بر پایه‌ی آن متغیر، در بازه‌ای مشخص تعریف می‌شوند و مقادیر تقریبی از متغیر کلامی را نشان می‌دهند.

مثالی از متغیر کلامی در شکل ۲۱ آورده شده است. در این مثال، «عملکرد» [۲۰] متغیری کلامی است که توسط عبارات کلامی «خیلی کم، کم، متوسط، زیاد، خیلی زیاد» تعریف شده است. این عبارات هر کدام توسط عددی فازی مشخص شده‌اند. تابع عضویت این مجموعه‌های فازی، یک تابع ذوزنقه‌ای در نظر گرفته شده است. بازه‌ی متغیر کلامی نیز [۱،۱۰۰] می‌باشد. [۸]

به عنوان مثال اگر میزان عملکرد (انسان، ماشین، سازمان، روش و...)، برابر ۸۳,۷۵ باشد، با درجه عضویت ۰,۵ به مجموعه‌ی «عملکرد خیلی زیاد» و با درجه عضویت ۰,۵ به مجموعه‌ی «عملکرد زیاد» تعلق دارد. همچنین این میزان عملکرد نه متوسط است، نه کم و نه خیلی کم.




شکل ۲۱: مثالی از متغیرهای کلامی

[۱۸] Linguistic Variable
[۱۹] Linguistic Terms
[۲۰] Performance

## ۱۰.۱ رابطه‌های فازی

اگر $U$ و $V$ دو مجموعه‌ی کلاسیک دلخواه باشند، ضرب کارتزین [۲۱] این دو مجموعه بصورت $V \times U$، بیان می‌شود. حاصل این ضرب مجموعه‌ای غیرفازی از زوج مرتب‌های $(u,v)$ است، طوری که $u \in U$ و $v \in V$، و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U \times V = \{(u,v) \mid u \in U \text{and } v \in V\} \tag{۲۴}$$

به یاد داشته باشید که در اینجا ترتیب $U$ و $V$ اهمیت دارد و در صورتی که $V \neq U$، آنگاه $U \times V \neq V \times U$.
به صورت کلی ضرب کارتزین $n$ مجموعه‌ی فازی $U_1, U_2, \cdots, U_n$، به صورت $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ بیان می‌شود و مجموعه‌ای غیرفازی از همه‌ی چندتایی‌های $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ است، طوری که $u_i \in U_i$، و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n = \{(u_1, u_2, \cdots, u_n) | \; u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \cdots, u_n \in U_n\} \tag{۲۵}$$

اگر برای فضای یک مجموعه ضرب کارتزینی، یک زیر مجموعه با شرایط خاص تعریف شود، به آن یک **رابطه R** [۲۲] گفته می‌شود. [۲]
روابط، وابستگی بین اشیاء را توصیف می‌کنند. آنها ابزاری را فراهم می‌کنند که بتوان تعامل و وابستگی بین متغیرها، مؤلفه‌ها، ماژول ها و ... را توصیف کرد. همانطور که مجموعه‌های فازی، تعمیمی بر مجموعه‌های کلاسیک بود، روابط فازی نیز، مفهوم رابطه‌ها را تعمیم می‌دهد. روابط فازی در مسائلی مانند بازیابی اطلاعات، کنترل و تصمیم‌گیری کاربرد دارند. [۶]
دو مجموعه‌ی جهانی $X$ و $Y$ را در نظر بگیرید. آنگاه:

$$R = \{(x,y), \mu_R(x,y) \mid (x,y) \in X \times Y, \mu_R(x,y) \in [0,1]\} \tag{۲۶}$$

یک رابطه فازی روی $X \times Y$ نامیده می‌شود.
در رابطه‌ی ۲۶ $\mu_R(x,y)$ یک تابع عضویت دو متغیره است و درجه عضویت هر زوج مرتب را به صورت یک عدد حقیقی در بازه $[0,1]$ نشان می‌دهد. درجه عضویت برای زوج مرتب $(x,y)$ ، میزان ارتباط $x$ با $y$ را ارائه می‌کند.

**مثال ۴.۱.** فرض کنید $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ و $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ باشد و رابطه R بصورت زیر تعریف شود:

$R =$ $x$ به طرز قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از $y$ باشد

[۲۱] Cartesian Product
[۲۲] Relation

آنگاه رابطه $R$ بصورت ماتریس زیر می‌تواند تعریف شود:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

در واقع تعمیمی که روابط فازی به روابط کلاسیک می‌دهند این است که آنها می‌توانند وابستگی‌های جزئی را نیز توصیف نماید.

## ۱۱.۱ روابط بین رابطه‌های فازی

در بخش ۴.۱ روابط بین مجموعه‌های فازی شرح داده شد. در این قسمت نیز این روابط بین رابطه‌های فازی توضیح داده خواهد شد.

فرض کنید $R_1$ و $R_2$ دو رابطه فازی بر روی $X \times Y$ هستند:

$$R_1 = \{(x,y), \mu_{R_1}(x,y) \mid (x,y) \in X \times Y\}$$
$$R_2 = \{(x,y), \mu_{R_2}(x,y) \mid (x,y) \in X \times Y\}$$

روابط بین $R_1$ و $R_2$ در ادامه آورده شده است.

**تساوی** دو رابطه $R_1$ و $R_2$ مساوی خواهند بود $(R_1 = R_2)$ اگر و تنها اگر برای هر زوج مرتب $(x,y) \in A \times B$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\mu_{R_1}(x,y) = \mu_{R_2}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in A \times B \tag{۲۷}$$

**زیرمجموعه** رابطه $R_1$ زیرمجموعه $R_2$ خواهد بود اگر $(R_1 \subseteq R_2)$ اگر و تنها اگر برای هر زوج مرتب $(x,y) \in A \times B$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\mu_{R_1}(x,y) \leq \mu_{R_2}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in A \times B \tag{۲۸}$$

**زیرمجموعه سره** رابطه $R_1$ زیرمجموعه سره $R_2$ خواهد بود اگر ($R_1 \subset R_2$) اگر و تنها اگر برای هر زوج مرتب $(x,y) \in A \times B$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \mu_{R_1}(x,y) \leq \mu_{R_2}(x,y) & \text{for every } (x,y) \in A \times B, \\ \mu_{R_1}(x,y) < \mu_{R_2}(x,y) & \text{for at least one } (x,y) \in A \times B. \end{cases} \quad (۲۹)$$

## ۱۲.۱ عملیات بر روی رابطه‌های فازی

فرض کنید $R_1$ و $R_2$ دو رابطه فازی بر روی $X \times Y$ هستند:

$$R_1 = \{(x,y), \mu_{R_1}(x,y) \mid (x,y) \in X \times Y\}$$
$$R_2 = \{(x,y), \mu_{R_2}(x,y) \mid (x,y) \in X \times Y\}$$

عملیات اجتماع، اشتراک، مکمل و ترانهاده برای این رابطه‌ها در ادامه تعریف شده است.

**اجتماع** اجتماع دو رابطه $R_1$ و $R_2$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(x) = \text{Max}\left[\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)\right] \quad (۳۰)$$

**اشتراک** اشتراک دو رابطه $R_1$ و $R_2$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(x,y) = \text{Min}\left[\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)\right] \quad (۳۱)$$

**مکمل** مکمل رابطه $R_1$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\bar{R}_1}(x,y) = 1 - \mu_{R_1}(x,y) \quad (۳۲)$$

**نکته** از آنجا که یک رابطه فازی، خود یک مجموعه‌ی فازی می‌باشد، لذا تمامی خواص گفته شده برای مجموعه‌های فازی و همچنین روابط و عملیات تعریف شده برای آنها برای روابط فازی نیز صادق می‌باشند.

**۲ منطق فازی**

**۳ کاربرد میانگین فازی برای پیش‌بینی**

**۴ تصمیم‌گیری در محیط فازی**

**۵ کاربرد کنترل فازی**

**۶ مفاهیم اولیه هوش مصنوعی**

**۷ جستجوی آگاهانه و ناآگاهانه**

# مراجع


[1] G. Bojadziev and M. Bojadziev. *Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management.* Hackensack, NJ :: World Scientific, 2007. 6, 8, 9, 10, 18

[2] L.-X. Wang. *A Course in Fuzzy Systems and Control.* Upper Saddle River NJ: Prentice Hall PTR, 1997. 6, 11, 24

[3] K. H. Lee. *First Course on Fuzzy Theory and Applications.* Berlin, Heidelberg :: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. 7, 8, 9, 22

[4] T. J. Ross. *Fuzzy Logic with Engineering Applications.* Hoboken, NJ :: John Wiley, 2004. 9

[5] L. Spada, "Introduction to Fuzzy Sets and Fuzzy Logic," *REASON PARK.* 16

[6] W. Pedrycz and F. Gomide. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing.* Hoboken, N.J.: John Wiley, 2007. 18, 19, 24

[7] J. Yen and R. Langari. *Fuzzy Logic: Intelligence, Control, and Information.* Prentice Hall, 1999. 20, 21

[8] G. J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy Sets And Fuzzy Logic: Theory And Applications.* Upper Saddle River N.J.: Prentice Hall PTR, 1995. 22, 23