دانشگاه پیام نور تهران مرکز شمیرانات

دانشکده مهندسی کامپیوتر

مهندسی نرم‌افزار

عنوان سمینار

سیستم‌های فازی و هوش مصنوعی

استاد

دکتر مهدی خلیلی

دانشجو

کاوه شاه‌حسینی

شماره دانشجویی

۹۲۳۸۴۳۰۱۰

ترم ۳۹۵۱

فهرست مطالب

فهرست جداول

۱ مجموعه‌های فازی

۱.۱ مجموعه‌های کلاسیک

پیش از آنکه به توضیح مجموعه‌های فازی بپردازیم، نیاز است تا مروری بر مجموعه‌های کلاسیک داشته باشیم. همه‌ی ما کم و بیش با مفهموم مجموعه آشنا هستیم. به عنوان مثال مجموعه‌ای از دانشجویان یک رشته، مجموعه‌ای از اعداد بزرگ‌تر از صفر و... نمونه‌ای از مجموعه‌ها هستند. مجموعه‌ها گروهی از اشیاء متمایز هستند. به اشیاء درون هر مجموعه، اعضاء و یا عناصر آن مجموعه گفته می‌شود.

در ریاضیات مجموعه را با حروف بزرگ $A, B, C, \ldots$ و اعضای مجموعه را با حروف کوچک $a, b, c, \ldots$ نمایش می‌دهند. همچنین عضویت یک شیء در مجموعه با نماد $\in$ و عدم عضویت با نماد $\notin$ نمایش داده می‌شود. [۱]

مجموعه‌ای را که شامل همه‌ی اشیاء در یک کاربرد مشخص هستند را مجموعه‌ی جهانی [۱] یا مرجع گویند.

اگر مجموعه‌ی جهانی را با U نمایش دهیم، آنگاه نمایش مجموعه‌ی A در این مجموعه‌ی مرجع می‌تواند به دو روش صورت گیرد. در روش اول می‌توان تمامی عناصر موجود در مجموعه را با لیست کردن [۲] نمایش داد. به عنوان مثال اگر مجموعه‌ی A مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۵ باشد، می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد.

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \tag{۱}$$

و یا می‌توان با استفاده از روش دوم یعنی قانون عضویت [۳] بصورت زیر نمایش داد. [۲]

$$A = \{x \mid x \in N,\ x < 5\} \tag{۲}$$

روش دوم به این صورت خوانده می‌شود «مجموعه‌ی A، شامل اعضای x است، به قسمی که xها جزو اعداد طبیعی باشند و کوچک‌تر از ۵ باشند».

به صورت کلی تعریف مجموعه‌ها با استفاده از قوانین عضویت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A = \{x \in U \mid x \text{ meets some conditions}\} \tag{۳}$$

در مجموعه‌های کلاسیک عضویت یک شیء تنها دو حالت دارد بدین صورت که شیء x یا متعلق به مجموعه A هست و یا نیست. این مجموعه‌ها را به دلیل آنکه فضای آن با دقت ٪۱۰۰ قابل تشخیص است و عناصر آن دارای ارزش عضویت صفر و یا یک هستند، مجموعه‌های **قطعی** نیز می‌گویند.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & if \quad x \in A, \\ 0 & if \quad x \notin A. \end{cases} \tag{۴}$$

[۱] Universal Set
[۲] Listing Method
[۳] Membership Rule

در اینجا $\mu_A(x)$ تابع عضویت مجموعه‌ی قطعی A می‌باشد. تابع عضویت، تابعی است که ارزش عضویت یک شیء را در یک مجموعه، مشخص می‌کند. طبق آنچه در رابطه ۴ آمده است، تابع عضویت مجموعه‌های قطعی، تنها دو مقدار یک و یا صفر را برای مشخص کردن عضویت و یا عدم عضویت یک شیء در مجموعه، بازمی‌گرداند. تابع عضویت مجموعه‌ی جهانی همواره مقدار یک (۱) را بازمی‌گرداند. همچنین اگر مجموعه‌ای دارای هیچ عضوی نباشد، آن مجموعه را تهی [۴] می‌نامند و با علامت $\varnothing$ نمایش داده می‌شود. مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است. [۳]

فرض کنید دو مجموعه‌ی A و B در مجموعه‌ی مرجع U وجود دارد. در جدول ۱ **روابط بین مجموعه‌های کلاسیک** همراه با توضیح آورده شده است:

عنوان	نماد	مثال	توضیح
زیر مجموعه	$\subseteq$	$A \subseteq B$	همه‌ی اعضای A در B نیز هست و یا دو مجموعه با یکدیگر مساوی هستند.
زیر مجموعه سره	$\subset$	$A \subset B$	همه‌ی اعضای A در B نیز هست. ولی حداقل یک عضو در B هست که در A نیست.
مساوی	$=$	$A = B$	همه‌ی اعضای A در B نیز هست و همه‌ی اعضای B نیز در A هست.

جدول ۱: روابط بین مجموعه‌های کلاسیک

همچنین در جدول ۲ **عملیات بر روی مجموعه‌های کلاسیک** همراه با تعاریف هریک از آنها آورده شده است:

عنوان	نماد	تعریف
اجتماع	$\cup$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$
اشتراک	$\cap$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$
تفاضل	$-$	$A - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$
مکمل	$\overline{A}$	$\overline{A} = \{x \mid x \notin A, x \in U\}$

جدول ۲: عملیات بر روی مجموعه‌های کلاسیک

۲.۱ تعریف مجموعه‌های فازی

در سال ۱۹۶۵ پروفسور لطفی‌زاده، مفهوم عضویت درجه‌بندی شده و غیردقیق را مطرح کرد. در این روش درجه عضویت اعضای یک مجموعه مانند مجموعه‌های قطعی محدود به صفر و یک نمی‌شود و می‌تواند شامل درجات عضویت بین صفر تا یک نیز باشد. لطفی‌زاده این مجموعه‌ها را **مجموعه‌های فازی** [۵] نامید. مفهوم کلمه‌ی فازی

[۴] Empty Set
[۵] Fuzzy Sets

به معنای نادقیق و مبهم می‌باشد.
مجموعه‌های کلاسیک را می‌توان به عنوان نمونه‌ی خاصی از مجموعه‌های فازی درنظر گرفت که تمامی اعضای آن دارای درجه عضویت یک می‌باشند. [۱]
در برخی موارد برای تمایز بین مجموعه‌های کلاسیک و فازی، از علامت $\widetilde{A}$ استفاده می‌شود. [۳] در اینجا ما برای راحتی، از علامت $\sim$ بر روی نام مجموعه‌های فازی استفاده نمی‌کنیم.
اگر مجموعه‌ی A را در مجموعه‌ی مرجع U، یک مجموعه فازی درنظر بگیریم، آنگاه A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in A, \mu_A(x) \in [0, 1]\} \tag{۵}$$

که در آن $\mu_A(x)$ تابع عضویت مجموعه‌ی A می‌باشد و برای هر عضو درجه‌ی عضویت آن را مشخص می‌کند.
یک روش معمول برای نمایش مجموعه‌های فازی، استفاده از رابطه ۵ است که در آن لیست زوج مرتبی از عناصر مجموعه و درجه عضویت هریک از آنها نمایش داده می‌شود. اما در صورتی که مجموعه فازی پیوسته باشد توسط رابطه ۶ می‌توان آن را نمایش داد.

$$A = \left\{ \int \frac{\mu_A(x)}{x} \right\} \tag{۶}$$

همچنین اگر مجموعه‌ی فازی گسسته باشد می‌توان آن را به صورت رابطه ۷ نیز نمایش داد. [۴]

$$A = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots \right\} = \left\{ \sum_i \frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \right\} \tag{۷}$$

در راین روابط علامت / به معنی تقسیم نیست، بلکه روشی دیگر برای نمایش اعضای مجموعه است که در آن، عدد بالای این نماد درجه عضویت و عدد زیرین عضو مجموعه می‌باشد. [۱]
به عنوان مثال فرض کنید عناصر $x_i = 1, 2, \ldots, 5$ متعلق به مجموعه‌ی A هستند و به ترتیب دارای درجات عضویت $1, 0.8, 0.3, 0.5, 0.1$ می‌باشند. این مجموعه فازی را می‌توان به صورت:

$$A = \{(1, 0.1), (2, 0.5), (3, 0.3), (4, 0.8), (5, 1)\} \tag{۸}$$

نمایش داد. همچنین این مجموعه می‌تواند طبق رابطه ۷ به صورت:

$$A = 0.1/1 + 0.5/2 + 0.3/3 + 0.8/4 + 1/5; \tag{۹}$$

نیز نمایش داده شود. در اینجا علامت + به معنی جمع نیست، بلکه به معنی اجتماع اعضاء می‌باشد. [۳]

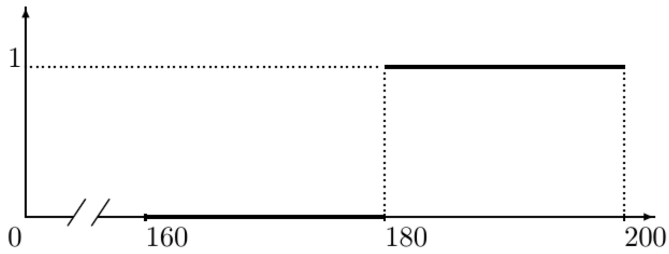
مثال ۱.۱. مجموعه‌ی افراد قد بلند: فرض کنید بخواهیم مجموعه‌ی افراد قدبلند را با استفاده از مجموعه‌های کلاسیک تعریف کنیم. آنگاه افرادی که قد بالای ۱۸۰ سانتی‌متر دارند را قد بلند در نظر گرفته و در این مجموعه قرار

می‌دهیم و سایر افراد با قدی کمتر از ۱۸۰ در این مجموعه قرار نمی‌گیرند. اگر مجموعه U را $U = \{x \mid 160 \leq x \leq 200\}$ در نظر بگیریم و مجموعه‌ی A را در مجموعه‌ی U، $A = \{\text{Tall men}\}$ در نظر بگیریم، آنگاه تابع عضویت این مجموعه‌ی قطعی به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & if \quad 180 \leq x \leq 200, \\ 0 & if \quad 160 \leq x < 180. \end{cases} \tag{۱۰}$$

همانطور که در شکل ۱ نیز مشخص است، این تعریف نمی‌تواند مناسب باشد. زیرا اگر فردی داری قد ۱۷۹ سانتی‌متر باشد جزو افراد قد بلند نخواهد بود و فردی با یک سانتی‌متر بیشتر جزو این مجموعه خواهد بود. در حالی که تعریف بلندی قد، نسبی است.

حال همین مثال را در مجموعه‌های فازی تعریف می‌کنیم. مجموعه‌ی فازی $B = \{x,\ mu_B(x)\}$ را در نظر



شکل ۱: تابع عضویت افراد قد بلند در مجموعه‌های کلاسیک

بگیرید طوری که x در بازه‌ی $[160, 200]$ قرار دارد و تابع عضویت $\mu_B(x)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

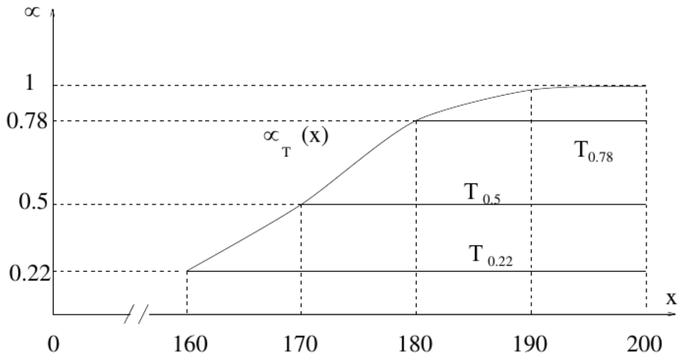
$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(30)^2}(x-140)^2 & if \quad 160 \leq x < 170, \\ -\frac{1}{2(30)^2}(x-200)^2 + 1 & if \quad 170 \leq x \leq 200. \end{cases} \tag{۱۱}$$

تابع $\mu_B(x)$ از نوع پیوسته قطعه به قطعه‌ی درجه دوم [۶] می‌باشد. حال همانطور که در شکل ۲ نمودار این تابع نمایش داده است، اگر فردی دارای قد ۱۶۰ سانتی‌متر باشد مقدار کمی قد بلند (۰٫۲۲ درجه) محسوب می‌شود و اگر قد شخصی ۱۸۰ سانتی‌متر باشد مقدار زیادی (۰٫۷۸ درجه) قد بلند محسوب می‌شود. همچنین شخصی با قد ۲۰۰ سانتی‌متر کاملا قد بلند خواهد بود. [۱]

مثال ۲.۱. اعداد نزدیک به صفر: مجموعه‌ی Z را مجموعه‌ی «اعداد نزدیک به صفر» در نظر بگیرید. آنگاه یک تابع عضویت ممکن برای این مجموعه به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_Z(x) = e^{-x^2} \tag{۱۲}$$

[۶] continous piecewise-quadratic function

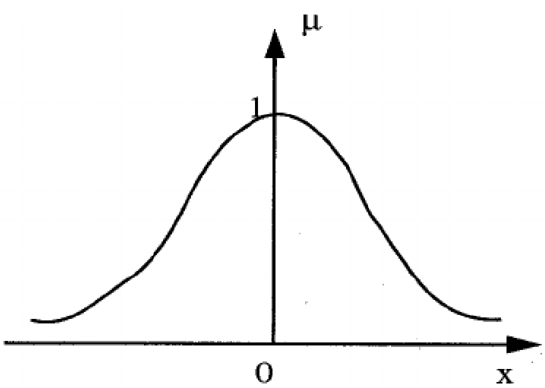


شکل ۲: تابع عضویت افراد قد بلند در مجموعه‌های فازی

طبق رابطه ۱۲ اعداد صفر و ۲ به ترتیب با درجات عضویت $e^0 = 1$ و e^{-4} عضو مجموعه خواهند بود. علاوه بر رابطه‌ی فوق ما می‌توانیم رابطه ۱۳ را نیز به عنوان تابع عضویت مجموعه‌ی اعداد نزدیک به صفر در نظر بگیریم.

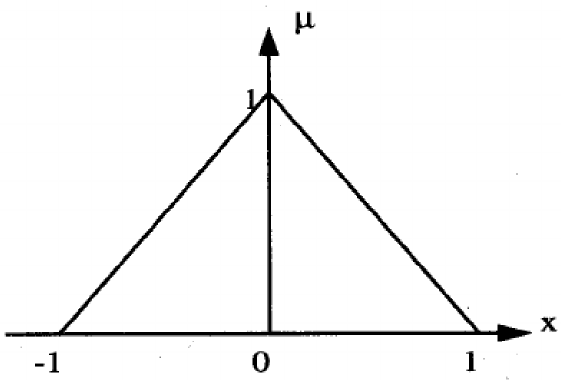
$$\mu_Z(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x < -1, \\ x+1 & if \quad -1 \leq x < 0, \\ 1-x & if \quad 0 \leq x < 1, \\ 0 & if \quad 1 \leq x. \end{cases} \qquad (۱۳)$$

که در آن اعداد صفر و ۲ به ترتیب دارای درجات عضویت ۱ و صفر در این مجموعه هستند. نمودار این دو تابع در ادامه آورده شده است. طبق این مثال برای هر مجموعه‌ی فازی می‌توان توابع عضویت متفاوتی را در نظر گرفت. کلماتی که یک مجموعه فازی را تعریف می‌کنند، خود نیز فازی هستند. به عنوان مثال اعداد نزدیک به صفر، تعریف دقیقی را ارائه نمی‌کند و به همین دلیل می‌توان توابع عضویت متفاوتی را برای تعریف توضیح ارائه شده برای این مجموعه در نظر گرفت. البته این نکته را نیز باید بخاطر داشت که توابع عضویت فازی نیستند و آنها یک تابع



شکل ۳: یک تابع عضویت ممکن برای مجموعه فازی «اعداد نزدیک به صفر»

ریاضی دقیق هستند. بنابراین همانطور که در این مثال نشان داده شد، یک توضیح فازی ارائه شد و توسط توابع عضویت، به غیرفازی تبدیل شدند. در برخی مواقع این ابهام وجود دارد که نظریه مجموعه‌های فازی برای این است که همه مسائل را فازی کند، اما خواهیم دید که در مقابل مجموعه‌های فازی برای غیرفازی کردن مسائل استفاده خواهد شد. [۲]



شکل ۴: یک تابع عضویت دیگر برای مجموعه فازی «اعداد نزدیک به صفر»

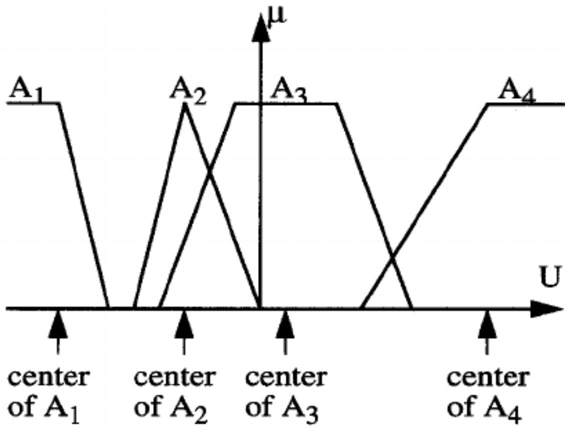
۳.۱ مفاهیم پایه مجموعه‌های فازی

در ادامه‌ی مبحث مجموعه‌های فازی، برخی مفاهیم پایه‌ی این نظریه را توضیح خواهیم داد.
پشتیبان: پشتیبان مجموعه‌ی فازی A، مجموعه‌ای قطعی است که شامل همه‌ی اعضایی از A است که دارای درجه عضویت بزرگتر از صفر هستند.

$$Supp(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (۱۴)$$

مجموعه فازی تهی: اگر پشتیبان یک مجموعه‌ی فازی تهی باشد، آنگاه آن مجموعه‌ی فازی نیز تهی است.
مجموعه فازی منفرد[۷]: مجموعه‌ی فازی که پشتیبان آن تنها یک عضو دارد را مجموعه‌ی فازی منفرد یا یگانه گویند.
مرکز مجموعه فازی: اگر مقدار میانگین تمام نقاطی که در آنها تابع عضویت مقدار ماکزیمم دارد، محدود باشد، در این صورت این مقدار میانگین مرکز مجموعه‌ی فازی می‌باشد. اگر مقدار میانگین مثبت بی‌نهایت (منفی بی‌نهایت) باشد، در این صورت مرکز مجموعه، کوچکترین (بزرگترین) نقطه‌ای است که در آن تابع عضویت به حداکثر مقدار خود می‌رسد. در شکل ۵ مرکز چندین مجموعه نمایش داده شده است.
نقطه تقاطع[۸]: نقطه‌ی گذر یا تقاطع مجموعه‌ی فازی A نقطه‌ای در مجموعه‌ی U است که ارزش عضویت أن در

[۷] Fuzzy Singleton
[۸] Crossover Point

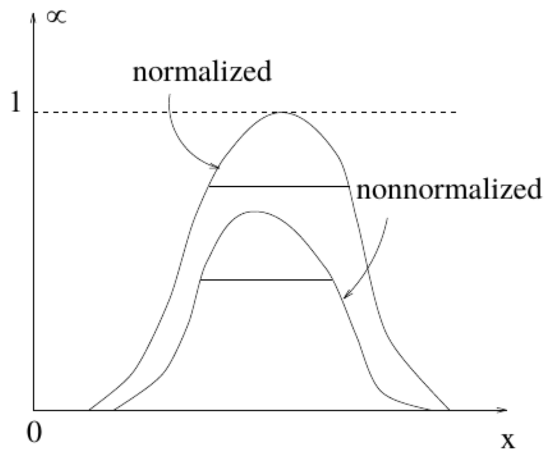


شکل ۵: مرکز چند مجموعه‌ی فازی متداول

مجموعه‌ی A برابر ۰٫۵ باشد.

ارتفاع: ارتفاع یک مجموعه فازی برابر است با بزرگترین درجه عضویت اعضای آن مجموعه.

مجموعه فازی نرمال: اگر ارتفاع یک مجموعه فازی برابر یک باشد، آن مجموعه فازی نرمال است. در شکل ۶ مجموعه‌ی فازی نرمال و غیرنرمال نمایش داده شده است.



شکل ۶: مجموعه فازی نرمال و غیرنرمال

نرمال سازی مجموعه‌ی فازی: در صورتی که $max\ \mu_A(x) < 1$ باشد، آنگاه مجموعه A غیرنرمال است. برای نرمال سازی این مجموعه کافیست طبق رابطه ۱۵ درجه عضویت همه‌ی اعضا را بر ماکزیمم درجه عضویت آن مجموعه تقسیم کنیم.

$$\frac{\mu_A(x)}{max\ \mu_A(x)} \tag{۱۵}$$

برش α[۹]: یک برش آلفای مجموعه فازی A برابر است با مجموعه‌ای قطعی که در آن اعضا با درجه عضویت بزرگتر و یا مساوی α قرار دارند. مقدار α می‌تواند در بازه‌ی $[0,1]$ باشد.

$$A_\alpha = \{x \in U |\ \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1] \tag{۱۶}$$

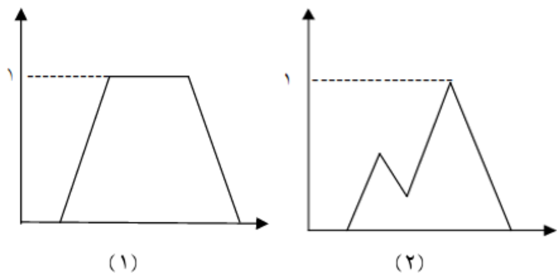
برش α اکید: اگر رابطه‌ی ۱۶ را به صورت زیر تعریف کنیم، آنگاه یک برش آلفای اکید خواهیم داشت. یعنی اعضای با درجه عضویت مساوی α را در نظر نگیریم.

$$A_\alpha = \{x \in U |\ \mu_A(x) > \alpha\}, \alpha \in [0,1] \tag{۱۷}$$

نکته: در برش اکید آلفا، اگر α را برابر با صفر در نظر بگیریم مجموعه‌ی پشتیبان بدست خواهد آمد.
مجموعه فازی محدب[۱۰]: مجموعه فازی A را در R^n محدب گویند، اگر و تنها اگر:

$$\mu_A\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \geq min\left[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\right] \tag{۱۸}$$

برای همه‌ی $x_1, x_2 \in R^n$ و همه‌ی $\lambda \in [0,1]$.
به طور شهودی مجموعه‌ی A در صورتی محدب خواهد بود که شکل آن دارای دره نباشد. به عبارت دیگر مجموعه می‌تواند صعود کند و سپس نزول کند، ولی دیگر اجازه صعود ندارد. مثالی از این مجموعه‌ها در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل ۷: (۱) مجموعه محدب (۲) مجموعه غیرمحدب

کاردینالیتی [۱۱]: کاردینالیتی یا عدد اصلی یک مجموعه برابر است با مجموع درجات عضویت اعضای آن:

$$|A| = \sum_i \mu_A(x_i) \tag{۱۹}$$

---
[۹] α-cut
[۱۰] Convex Fuzzy Set
[۱۱] Cardinality

۴.۱ روابط بین مجموعه‌های فازی

Equality Subset Proper Subset

۵.۱ عملیات بر روی مجموعه‌های فازی

۶.۱ اعداد فازی

۱.۶.۱ اعداد فازی قطعه به قطعه درجه دوم

۲.۶.۱ اعداد فازی مثلثی

۳.۶.۱ اعداد فازی ذوزنقه‌ای

۷.۱ رابطه‌های فازی

۸.۱ عملیات بر روی رابطه‌های فازی

۲ منطق فازی

۳ کاربرد میانگین فازی برای پیش‌بینی

۴ تصمیم‌گیری در محیط فازی

۵ کاربرد کنترل فازی

۶ مفاهیم اولیه هوش مصنوعی

۷ جستجوی آگاهانه و ناآگاهانه

مراجع

[1] G. Bojadziev and M. Bojadziev. *Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management.* Hackensack, NJ :: World Scientific, 2007. 5, 7, 8

[2] L.-X. Wang. *A Course in Fuzzy Systems and Control.* Upper Saddle River NJ: Prentice Hall PTR, 1997. 5, 10

[3] K. H. Lee. *First Course on Fuzzy Theory and Applications.* Berlin, Heidelberg :: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. 6, 7

[4] T. J. Ross. *Fuzzy Logic with Engineering Applications.* Hoboken, NJ :: John Wiley, 2004. 7