МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота № 6

З дисципліни: *“Дискретна математика”*

Виконав
студент групи КН 113
Карабін Я. В.

Викладач:
Мельникова Н. І.

Львів – 2019

Тема роботи

Генерація комбінаторних конфігурацій

Мета роботи: набути практичних вмінь та навичок при комп'ютерній реалізації комбінаторних задач.

Короткі теоретичні відомості

Головна задача комбінаторики – підрахунок та перелік елементів у скінчених множинах.

Правило додавання: якщо елемент - x може бути вибрано n способами, а y - іншими m способами, тоді вибір „ x або y" може бути здійснено (m+n) способами.

Правило добутку: якщо елемент - x може бути вибрано n способами, після чого y - m способами, тоді вибір упорядкованої пари (x, y) може бути здійснено (m*n) способами.

Набір елементів $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$ з множини $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ називається вибіркою об'єму m з n елементів - (n, m) - *вибіркою*.

Упорядкована (n, m) - вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається *(n, m) - розміщеням*, кількість всіх можливих розміщень обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} .$$

Упорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n, m) – розміщеням з повторюваннями*, кількість всіх можливих таких розміщень обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^m} = n^m.$$

Неупорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається *(n, m) – сполученням,* кількість всіх можливих сполучень обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{m!}{m!\,(n-m)!}$$

Неупорядкована (n, m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається *(n,m)- сполученням з повторюваннями*, кількість всіх можливих таких сполучень обчислюється за формулою:

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$$

$A_n^m -$ називається *перестановкою*, а кількість різних перестановок позначається та обчислюється за формулою:

$$P_n = n!\,.$$

Якщо в перестановках є однакові елементи, а саме перший елемент присутній n_1 разів , другий елемент – n_2 разів , ... , k-ий елемент - n_k разів, причому $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, то їх називають *перестановками з повторенням* та кількість їх можна знайти за формулою:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \dots\, n_k!}$$

Нехай $X = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ - *розбиття множини* $X(X = n)$ на k підмножин таких, що: $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X$, $X_i \cap X_j = 0$ при i ≠ j , $|X_i| = n_i$.

Їх кількість при фіксованих ni та *упорядкованих* $X_1, X_2, \dots, X_k$ обчислюється за формулою:

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \dots\, n_k!}$$

Якщо ж множину $X(|X| = n)$ потрібно розбити на підмножини, серед яких для усіх i=1, …, n є $m_i \geq 0$ підмножин з i елементами, де $\sum_{i=1}^{n} i * m_i = n$, та при цьому набір підмножин в розбитті *не є упорядкованим*, тоді їх кількість обчислюється за формулою: n!

$$N(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1!, m_2! \ \dots m_k! \, (1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}}.$$

Формула включень та виключень. Нехай X_i – скінчені множини, де i=1,…,n, тоді:

$|X_1 \cup \dots \cup X_n| = (|X_1| + \dots + |X_n|) - (|X_1 \cap X_2| + \dots + |X_{n-1} \cap X_n|) +$
$(|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \dots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|) - \dots + (-1)^{(n-1)}(|X_1 \cap \dots \cap X_n|.$

Наслідок. $|X/(X_1 \cup \dots \cup X_n)\,| = |X| - (|X_1| + \dots + |X_n|) + (|X_1 \cap X_2| + \dots + |X_{n-1} \cap X_n\,|) - \dots + (-1)^n |X_1 \cap \dots \cap X_n|.$

Приведемо ще одну форму запису формули включень та виключень. Нехай X – скінчена множина з N елементів , $a_1, \dots, a_n$ – деякі властивості, якими володіють чи ні елементи з X. Позначимо через $X_i = \{x \in X | a_i(x)\}$ – множину елементів в X, які володіють властивістю a_i , а $N(a_{i1}, \dots, a_{ik})$ =| $X_{i1} \cap \dots \cap X_{ik}$ |= $x \in X | a_{i1}(x)$^ $\dots$ ^$a_{ik}(x)\}|$ – кількість елементів в X, які володіють одночасно властивостями $a_{i1}, \dots, a_{ik}$, $N_0 = |X \backslash (X_1 \cup \dots \cup X_n)|$ - кількість елементів, що не володіють жодною з властивостей $a_{i1}, \dots, a_{ik}$. Тоді маємо формулу:

$N_0 = N - S_1 + S_2 - \dots + (-1)^n S_n$, де $S_{ik} = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le n} N(a_{i1}, \dots, a_{ik}), k = 1,2, \dots, n.$

Якщо треба знайти кількість елементів, які володіють рівно m властивостями, тоді використовують наступну формулу:

$$\widetilde{N_m} = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^m S_{m+k}.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ. ДОДАТОК 1

Варіант №12

1. В дитячому садку 10 хлопчиків. Скільки є способів одягнути їх в новорічні костюми: а) якщо є 10 різних костюмів; б) є 2 костюми зайців, 5 - ведмежат і 3 - білочок.

Розв'язання:

а) Оскільки в нас 10 різних костюмів, тоді нам потрібно обчислити всі перестановки з n елементів: $P_{10} = 10! = 3\ 628\ 800$.

б) Скористаємося формулою перестановки з n елементів з повтореннями: $P(2,5,3) = \frac{10!}{2!5!3!} = 2520$.

2. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо кожну з них використовувати при записи числа лише один раз?

Розв'язання:

Розглянемо чотири комірки для кожної цифри чотирицифрового числа.

На першу позицію ми можемо поставити 6 цифр, на другу – 5 , на третю – 4, і на п'яту позицію 3 цифри, що залишилися. Отже, відповіддю на умову завдання буде число, яке є добутком 6, 5, 4 і 3(задача про дороги).

Відповідь: 6*5*4*3=360.

3. У вазі стоїть пронумеровані 10 червоних і 5 рожевих гвоздик. Скількома способами можна вибрати з вази три квітки?

Розв'язання:

Оскільки квіти є пронумерованими, то вони всі різні. Тому потрібно знайти вибірку з 15-ти по 3, тобто $C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{15*14*13}{1*2*3} = 455$.

4. У чемпіонаті України з футболу грає 18 команд. Скількома способами можуть розподілити місця, якщо відомо, що команди «Динамо», «Дніпро», «Шахтар», «Чорноморець» і «Таврія» займуть перші п'ять місць?

Розв'язання:

5 команд вже зайняли перші п'ять місць, тому залишається порахувати усі можливі перестановки решти 13 команд, що дорівнює $P_{13} = 13!$. Проте, ще потрібно врахувати і усі розміщення перших п'яти команд між собою. Це буде $P_5 = 5!$.

Відповідь: $13!\,5! = 747\,242\,496\,000$.

5. Скількома способами можна поділити 15 однакових цукерок між п'ятьма дітьми?

Розв'язання:

Оскільки 15 цукерок були поділені між п'ятьма дітьми, тоді точно кожен із них отримав хоча б одну цукерку.

Розмістимо всі цукерки в ряд і поставимо 4 перегородки між ними. Таким чином, вийде 5 куп, які будуть розподілені п'ятьом дітям. А кількість можливих варіантів розміщення перегородок і буде дорівнювати кількісті варіантів розподілення цукерок. Так як місць на перегородки є 14 і треба поставити чотири, то за формулою C_{14}^4 ми знайдемо розв'язок.

Відповідь: $C_{14}^4 = \frac{14!}{4!10!} = \frac{14*13*12*11}{1*2*3*4} = 1001$.

6. Дванадцять атлетів треба розподілити на 2 групи по 3 атлета, та 3 групи по 2 атлета для змагань на різні дистанції, при цьому кожна з цих груп може поїхати на змагання в одне з трьох можливих міст. Скількома способами можна розподілити атлетів на необхідні групи та для кожної з них вибрати місто для змагання?

Розв'язання:

Спершу знайдемо кількість способів розміщення п'яти груп по трьом містам. Це буде $\overline{C_3^5} = C_7^5 = C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 21$.

Далі знайдемо кількість варіантів розподілення 12 атлетів на 2 групи по 3 атлета: $C_{12}^{3,3}(3,3) = \frac{12!}{3!3!} = 13\,305\,600$.

І врешті, знайдемо кількість варіантів розподілення шести атлетів, що залишилися на 3 групи по 2 атлета: $C_6^{2,2,2}(2,2,2) = \frac{6!}{2!2!2!} = 90.$

Перемноживши отримані значення, одержимо відповідь: $21 * 13\,305\,600 * 90 = 25\,147\,584\,000.$

7. На одній з кафедр університету працює 13 чоловік, кожен з яких знає хоча б одну іноземну мову. 10 чоловік знають англійську, 7 – німецьку, 6 – французьку, 5 – англійську та німецьку, 4 – англійську та французьку, 3 – німецьку та французьку. Скільки чоловік: а) знають всі три мови; б) знають тільки дві мови; в) знають лише англійську?

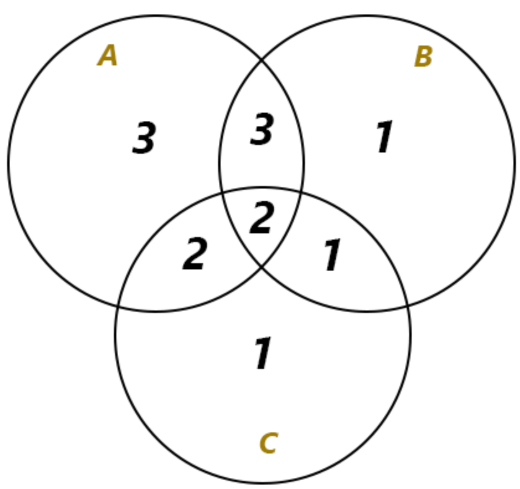
Розв'язання:

Нехай множина А – це ті, хто знають англійську, В – це ті, які знають німецьку, а множина С – це ті, хто володіють французькою. Запишемо наступну формулу включень і виключень:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Підставивши значення, отримаємо, що кількість тих, які знають усі три мови буде $|A \cap B \cap C| = 13 - 10 - 7 - 6 + 5 + 4 + 3 = 2.$

Для легшого знаходження відповідей на наступні запитання побудуємо діаграму Ейлера-Венна для даної задачі:



Тепер легко побачити, що 6 людей знають тільки дві мови, а троє знають лише англійську.

Додаток 2

Запрограмувати за варіантом обчислення кількості розміщення(перестановок, комбінацій, алгоритму визначення наступної лексикографічної сполуки, перестановки) та формулу Ньютона і побудувати за допомогою неї розклад згідно свого варіанту:

1. Задане додатне ціле число n. Розташувати у лексикографічному порядку всі перестановки множини $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Побудувати розклад $(x - y)^{11}$.

Програмна реалізація завдання 1:

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

bool next_permutation(int* a, int n)
{
	int j = n - 2;
	while (j != -1 && a[j] >= a[j + 1]) {
		j--;
	}
	if (j == -1) return 0;
	int k = n - 1;

	while (a[j] >= a[k]) {
		k--;
	}
	swap(a[j], a[k]);
	int l = j + 1, r = n - 1;
	while (l < r) {
		swap(a[l++], a[r--]);
	}
	return 1;
}
void Print(int* matr, int n)
{
	for (int i = 0; i < n; i++) {
		cout << matr[i] << " ";
	}
	cout << endl;
}
int main()
{
	int n, * matr;
	cout << "Enter n: ";
	cin >> n;
	matr = new int[n];
	for (int i = 0; i < n; i++) {
		matr[i] = i + 1;
	}
```

```
	Print(matr, n);
	while (next_permutation(matr, n) == 1) {
		Print(matr, n);
	}

	return 0;
}
```

Результати виконання програми

"C:\Users\Admin\Desktop\New folder\–шёъЁхЄър\diskretlab6\bin\Debug\diskretlab6.exe"

```
Enter n: 3
1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

Process returned 0 (0x0)   execution time : 1.957 s
Press any key to continue.
```

"C:\Users\Admin\Desktop\New folder\–шёъЁхЄър\diskretlab6\bin\Debug\diskretlab6.exe"

```
Enter n: 4
1 2 3 4
1 2 4 3
1 3 2 4
1 3 4 2
1 4 2 3
1 4 3 2
2 1 3 4
2 1 4 3
2 3 1 4
2 3 4 1
2 4 1 3
2 4 3 1
3 1 2 4
3 1 4 2
3 2 1 4
3 2 4 1
3 4 1 2
3 4 2 1
4 1 2 3
4 1 3 2
4 2 1 3
4 2 3 1
4 3 1 2
4 3 2 1

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.585 s
Press any key to continue.
```

Програмна реалізація завдання 2:

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
long fact(int n) {
	long res = 1;
	for (int i = 1; i <= n; i++) {
		res *= i;
	}
	return res;
}
int main()
{
	int k, n, i, valn, valk, valn_k, C;
	char ch;
	cout << "(x - y)^";
	cin >> n >> ch;
	cout << " = ";
	for (k = 0; k <= n; k++)
	{
		valn = valk = valn_k = 1;
		valn = fact(n);
		valk = fact(k);
		valn_k = fact(n - k);
		C = valn / (valk * valn_k);
		if (k != 0 && k % 2 == 0) cout << " + ";
		if (k % 2 != 0) cout << " - ";
		if (C != 1) cout << C;
		if ((n - k) != 0)
		{
			if (k > 0) cout << "*x"; else cout << "x";
			if ((n - k) != 1) cout << "^" << n - k;
		}
		if (k != 0)
		{
			if (k < n) cout << "*y"; else cout << "y";
			if (k != 1) cout << "^" << k;
		}

	}
	return 0;
}
```

Результат виконання програми

```
"C:\Users\Admin\Desktop\New folder\–шёъЁхЄър\diskretlab6\bin\Debug\diskretlab6.exe"
(x - y)^11=
 = x^11 - 11*x^10*y + 55*x^9*y^2 - 165*x^8*y^3 + 330*x^7*y^4 - 462*x^6*y^5 + 462*x^5*y^6 - 330*x^4*y^7 + 165*x^3*y^8 -
 55*x^2*y^9 + 11*x*y^10 - y^11
Process returned 0 (0x0)   execution time : 9.638 s
Press any key to continue.
```

Висновки

Ми набули практичних вмінь та навичок при комп’ютерній реалізації комбінаторних задач.