МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота № 2

З дисципліни: *“Дискретна математика”*

Виконав
студент групи КН 113
Карабін Я. В.

Викладач:
Мельникова Н. І.

Львів – 2019

Тема роботи

Моделювання основних операцій для числових множин

Мета роботи: Ознайомитись на практиці із основними поняттями теорії множин, навчитись будувати діаграми Ейлера-Венна операцій над множинами, використовувати закони алгебри множин, освоїти принцип включень-виключень для двох і трьох множин та комп'ютерне подання множин.

Короткі теоретичні відомості

Множина – це сукупність об'єктів, які називають елементами.

Кажуть, що множина A є **підмножиною** множини S (цей факт позначають $A \subseteq S$, де $\subseteq$ – знак нестрогого включення), якщо кожен її елемент автоматично є елементом множини S. Досить часто при цьому кажуть, що множина A міститься в множині S.

Якщо $A \subseteq S$ і $S \neq A$, то A називають **власною (строгою, істинною) підмножиною** S (позначають $A \subset S$, де $\subset$ – знак строгого включення).

Дві множини A та S називаються **рівними**, якщо вони складаються з однакових елементів. У цьому випадку пишуть $A = S$.

Якщо розглядувані множини є підмножинами деякої множини, то її називають **універсумом** або **універсальною множиною** і позначають літерою U (зауважимо, що універсальна множина існує не у всіх випадках). Множини як об'єкти можуть бути елементами інших множин, Множину, елементами якої є множини, інколи називають **сімейством**.

Множину, елементами якої є всі підмножини множини A і тільки вони (включно з порожньою множиною та самою множиною A), називають **булеаном** або **множиною-степенем** множини A і позначають $P(A)$. **Потужністю** скінченної множини A називають число її елементів, позначають $|A|$.

Множина, яка не має жодного елемента, називається *порожньою* і позначається $\emptyset$. Вважається, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини, а також $A \subset A$.

Над множинами можна виконувати дії: об'єднання, переріз, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток. **Об'єднанням** двох множин A і B називають множину $A \cup B = \{x: (x \in A) \vee (x \in B)\}$. **Перетином (перерізом)** двох множин A і B називають множину $A \cap B = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}$. **Різницею** множин A та B називають множину $A \setminus B = \{x: (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$. **Симетричною різницею** множин A та B називають множину $A \triangle B = \{x: ((x \in A) \wedge (x \notin B) \vee (x \in B) \wedge (x \notin A))\}$. Для підмножини A універсальної множини U можна розглядати доповнення A до U, тобто $U \setminus A$, її позначають $\overline{A} = \{x: (x \notin A)\}$ і називають **доповненням множини** A.

Завдання варіанту №12 з додатку 1

1. Для даних скінчених множин $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{1,2,3,8,9,10\}$ та універсума $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ знайти множину, яку задано за допомогою операцій: а) $(A \setminus C) \cap \overline{B}$; б) $\overline{C} \triangle B$. Розв'язати, використовуючи комп'ютерне подання множин.
2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{A} \setminus (\overline{B} \triangle C)$. Знайти його потужність.
3. Нехай маємо множини: N – множина натуральних чисел, Z – множина цілих чисел, Q – множина раціональних чисел, R – множина дійсних чисел; A, B, C – будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне – навести доведення):

   а) $\{1\} \subset \{\{1, 2, 3\}, 4\}$; б) $Q \cap N = N$;

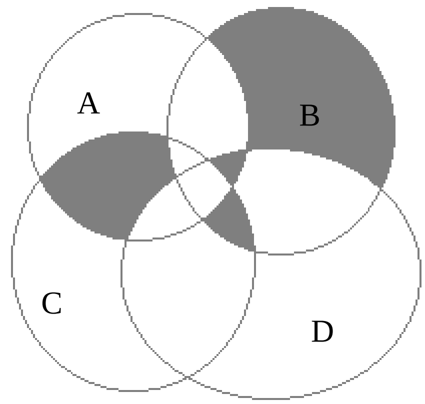
   в) $Q \setminus N \subset Z$; г) $(R \setminus Q) \cap N = \emptyset$;

д) якщо A ⊂ B, то C \ B ⊂ C \ A.

4. Логічним методом довести тотожність: $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:
$((A \cup B) \cup (C \Delta B)) \setminus (A \setminus B)$.

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу): $(A \cup B) \cap C \cup (\overline{A} \cap \overline{B \cap C}) \cup (A \cap B \cap C)$.

8. Нехай a1, a2,...,an – взаємно прості натуральні числа, N – деяке натуральне число. Знайти кількість додатніх натуральних чисел, які не перевищують N і не діляться на жодне з чисел a1, a2,..., an.

Розв'язки

1. Комп'ютерне подання множин A, B, C, має наступний вигляд:

$A = (1111111000)$, $B = (0000111111)$, $C = (1110000111)$

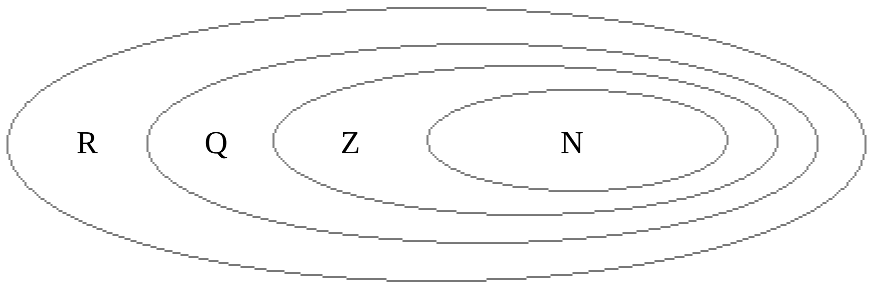
Щоб знайти множину розв'язків варіантів а) та б) знайдемо проміжні значення:

$A \setminus C = (0001111000)$, $\overline{B} = (1111000000)$, $\overline{C} = (0001111000)$. Отже,

а) $(A \setminus C) \cap \overline{B} = (0001000000)$;

б) $\overline{C} \triangle B = (0001000111)$.

2. Щоб знайти саму множину і побудувати її булеан, знайдемо проміжні значення: $\overline{A} = (0000000111)$, $\overline{B} \vartriangle C = (0001000111)$. Отже, $D = \overline{A} \backslash \left(\overline{B} \vartriangle C\right) = (0000000000) = \{\emptyset\}$. Таким чином, $P(D) = \{\emptyset\}$ і $|D| = 1$.
3. За допомогою діаграм Ейлера-Венна зобразимо множини N, Z, Q, R:



а) {1}⊂ {{1, 2, 3}, 4}; T (твердження істинне)

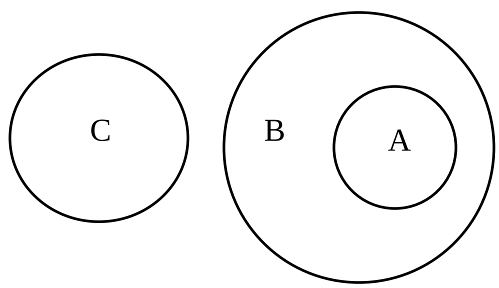
б) Q ∩ N = N ; T

в) Q \ N ⊂ Z ; F (твердження хибне)

г) (R \ Q) ∩ N = ∅ ; T

д) якщо A ⊂ B, то C \ B ⊂ C \ A.

Щоб довести хибність твердження варіанту д), наведемо контрприклад за допомогою діаграм Ейлера-Венна:



Для цього випадку якщо $A \subset B$, то $C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

4. Доведемо задану тотожність логічним методом, тобто з використанням основних законів логіки:

$(A \setminus C)\backslash(B \backslash C) = (A \cap \overline{C})\backslash(B \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B \cap \overline{C}} =$ (закон де Моргана)

$= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) = A \cap (\overline{C} \cap (\overline{B} \cup C)) =$ (закон асоціативності)

$= A \cap \left((\overline{C} \cap \overline{B}) \cup (\overline{C} \cap C)\right) =$ (закон дистрибутивності)

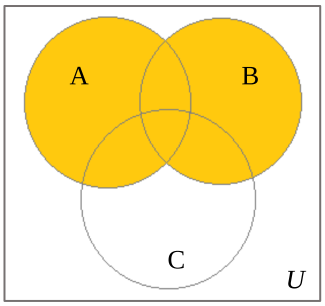
$= A \cap \left(\left(\overline{C} \cap \overline{B}\right) \cup \emptyset\right) = A \cap \left(\overline{C} \cap \overline{B}\right)$ (закон доповнення і тотожності)

$= \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \overline{C} =$ (закон асоціативності)

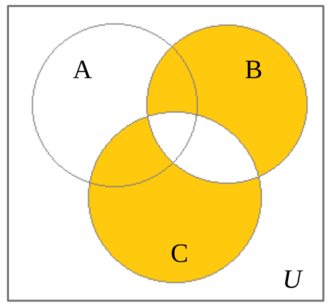
$= (A \backslash B) \backslash C \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$

5.

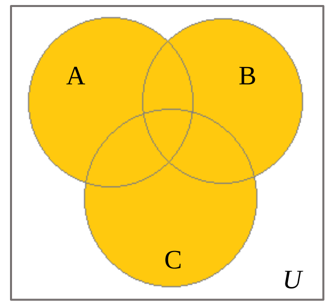
$A \cup B$



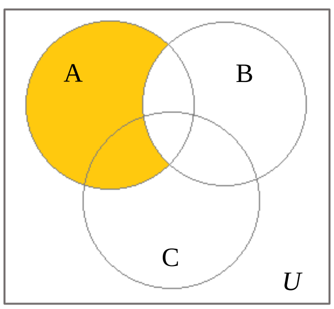
$C \Delta B$



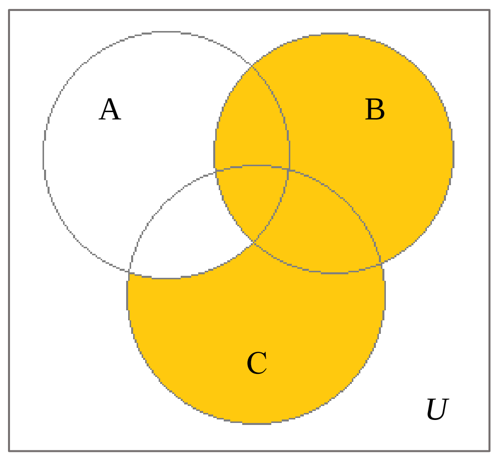
$(A \cup B) \cup (C \Delta B)$



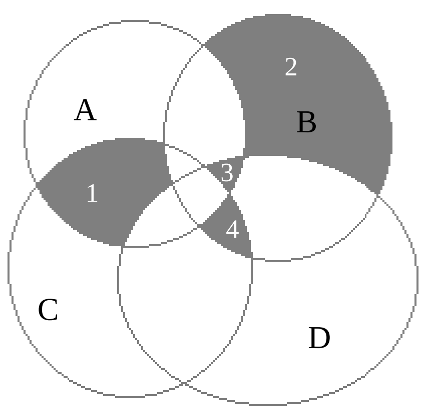
$A \setminus B$



$((A \cup B) \cup (C \Delta B)) \setminus (A \setminus B)$



6.



Нехай $A \cap B \cap C \cap D = X$, а M – це результуюча множина. Тоді об’єднання зафарбованих чотирьох частин можна записати наступним чином:

$M = (A \cap C \overset{1}{\cap} \overline{B} \cap \overline{D}) \cup (B \cap \overset{2}{\overline{A}} \cap \overline{D}) \cup (A \cap B \overset{3}{\cap} D \cap \overline{X}) \cup (C \cap B \overset{4}{\cap} D \cap \overline{X})$

7. $(A \cup B) \cap C \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B \cap C}\right) \cup (A \cap B \cap C) =$

$= (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B \cap C}\right) \cup (A \cap B \cap C) =$ (закон дистрибутивності)

Нехай $B \cap C = D$. Тоді формула набуває такого вигляду $(A \cap C) \cup D \cup \left(\overline{A} \cap \overline{D}\right) \cup (A \cap D) = (A \cap C) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{D}\right) \cup D \cup (A \cap D) =$

$= (A \cap C) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{D}\right) \cup D =$ (закон поглинання)

$= (A \cap C) \cup \left(\overline{A} \cup D\right) \cap (\overline{D} \cup D) =$ (закон дистрибутивності)

$= (A \cap C) \cup \left(\overline{A} \cup D\right) \cap U = (A \cap C) \cup \overline{A} \cup D =$ (закон доповнення і тотожності)

$= \left(A \cup \overline{A}\right) \cap \left(C \cup \overline{A}\right) \cup D =$

$= U \cap \left(C \cup \overline{A}\right) \cup D = \overline{A} \cup C \cup D =$ (закон доповнення і тотожності)

$= \overline{A} \cup C \cup (B \cap C) = \overline{A} \cup C$ (закон поглинання)

8. Нехай $A_1, A_2 \dots\ A_n$ – це множини, які містять елементи, що діляться на $a_1, a_2 \dots\ a_n$ відповідно. Запишемо формулу включення-виключення для такої кількість додатніх натуральних чисел, які не перевищують N і діляться на хоча бодне з чисел $a_1, a_2 \dots\ a_n$.

$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| + \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$

Тоді кількість додатніх натуральних чисел, які не перевищують N і не діляться на жодне з чисел $a_1, a_2 \dots\ a_n$ дорівнює $N - 1 - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$.

Додаток 2

12. Ввести з клавіатури дві множини цілих даних. Реалізувати операцію симетричної різниці над цими множинами. Вивести на екран новоутворену множину. Реалізувати програмно побудову булеану цієї множини.

Програмна реалізація

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
void bubblesort(int *matr, int x){
  for (int i=0; i<x-1; i++)
  for (int j=i+1; j<x; j++)
    if (matr[i]>matr[j]) swap(matr[i],matr[j]);
}
int removeDuplicates(int *matr, int n)
{
  if (n==0 || n==1)
    return n;
  int temp[n],j = 0;
  for (int i=0; i<n-1; i++)
    if (matr[i] != matr[i+1]) temp[j++] = matr[i];

  temp[j++] = matr[n-1];
  for (int i=0; i<j; i++)
    matr[i] = temp[i];

  return j;
}

int main()
{
  int n,m;
  cout <<"Enter size of set A : "; cin >> n;
  int A[n];
  for (int i = 0 ; i < n; i++)
    cin >> A[i];
```

```
bubblesort(&A[0], n);
cout <<"Enter size of set B : "; cin >> m;
int B[m];
for (int i = 0 ; i < m; i++)
   cin >> B[i];

bubblesort(&B[0], m);

n = removeDuplicates(&A[0],n);
m = removeDuplicates(&B[0],m);
int t,w=n+m;
cout<<"A = {";
for (int i = 0; i<n; i++)
   if (i!=n-1) cout<<A[i]<<", "; else cout<<A[i];
cout<<"}"<<endl;

cout<<"B = {";
for (int i = 0; i<m; i++)
   if (i!=m-1) cout<<B[i]<<", "; else cout<<B[i];
cout<<"}"<<endl;

int M[w];
int j=0;
for (int i = 0 ; i < n; i++)
   M[j++]=A[i];

for (int i = 0 ; i < m; i++)
   M[j++]=B[i];

bubblesort(&M[0], w);

cout<<"RES = {";
int u = 0, Q[100];
for (int i=0; i<w-1; i++){
   if (M[i]==M[i+1]) i++;
     else {cout<<M[i]<<", "; Q[u++] = M[i];}
}
if (M[w-2]!=M[w-1]) {cout<<M[w-1]<<"}"; Q[u] = M[w-1];}
```

```
    cout<<endl;
    cout<<"P(RES) = {"<<endl;
    int p;
    p = pow(2, ++u);
    for (int i = 0; i < p; i++ )
    {
        printf("{");
        for (int j = 0; j < u; j++ )
            if ( i & (1 << j) )
                printf("%d ", Q[j]);
        printf("}\n");
    }
    cout<<"}";
    return 0;
}
```

Результати

```
"C:\Users\Admin\Desktop\New folder'
Enter size of set A : 5
2 1 3 5 5
Enter size of set B : 6
2 1 7 6 7 5
A = {1, 2, 3, 5}
B = {1, 2, 5, 6, 7}
RES = {3, 6, 7}
P(RES) = {
{}
{3 }
{6 }
{3 6 }
{7 }
{3 7 }
{6 7 }
{3 6 7 }
}
```

```
"C:\Users\Admin\Desktop\New
Enter size of set A : 6
1 9 1 2 3 5
Enter size of set B : 8
1 5 2 3 2 6 7 7
A = {1, 2, 3, 5, 9}
B = {1, 2, 3, 5, 6, 7}
RES = {6, 7, 9}
P(RES) = {
{}
{6 }
{7 }
{6 7 }
{9 }
{6 9 }
{7 9 }
{6 7 9 }
}
```

Висновки

Ми ознайомились на практиці із основними поняттями теорії множин, навчились будувати діаграми Ейлера-Венна операцій над множинами, використовувати закони алгебри множин, освоїли принцип включень-виключень для двох і трьох множин та комп’ютерне подання множин.