МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота № 3

З дисципліни: *“Дискретна математика”*

Виконав
студент групи КН 113
Карабін Я. В.

Викладач:
Мельникова Н. І.

Львів – 2019

Тема роботи

Побудова матриці бінарного відношення

Мета роботи: Набуття практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначені їх типів.

Короткі теоретичні відомості

Декартів добуток множин А і В (позначається $A \times B$) – це множина всіх упорядкованих пар елементів (a, b), де $a \in A, b \in B$. При цьому вважається, що $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Потужність декартового добутку дорівнює $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Бінарним відношенням R називається підмножина декартового добутку $A \times B$ (тобто $R \subset A \times B$). Якщо пара (a, b) належить відношенню R , то пишуть $(a, b) \in R$, або aRb . *Областю визначення* бінарного відношення $R \subset X \times Y$ називається множина $\delta_R = \{x | \exists y\ (x, y) \in R\}$, а *областю значень* – множина $\rho_R = \{y | \exists x\ (x, y) \in R\}$ ($\exists$- існує).

Для скінчених множин бінарне відношення $R \subset A \times B$ зручно задавати за допомогою *матриці відношення* $R_{m \times n} = (r_{ij})$, де $m = |A|$, а $n = |B|$.

Елементами матриці є значення $r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (a_i, b_j) \in R, \\ 0, & \text{якщо } (a_i, b_j) \notin R. \end{cases}$

<u>Види бінарних відношень.</u>

Нехай задано бінарне відношення R на множині $A^2 : R \subseteq A \times A = \{(a, b) | a \in A, b \in A\}$.

1. Бінарне відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ виконується aRa, тобто $(a, a) \in R$. Головна діагональ матриці рефлексивного відношення складається з одиниць. Граф рефлексивного відношення обов’язково має петлі у кожній вершині.

2. Бінарне відношення R на множині A називається *антирефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ не виконується aRa, тобто $(a, a) \notin R$. Головна діагональ

матриці антирефлексивного відношення складається з нулів. Граф антирефлексивного відношення не має петель.

3. Бінарне відношення R на множині A називається *симетричним*, якщо для будь яких $a, b \in A$ з aRb слідує bRa, тобто якщо $(a, b) \in R$ то і $(b, a) \in R$. Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Граф симетричного відношення не є орієнтованим.

4. Бінарне відношення R на множині A називається *антисиметричним*, якщо для будь яких $a, b \in A$ з aRb та bRa слідує що $a = b$. Тобто якщо $(a, b) \in R$ і $(b, a) \in R$, то $a = b$. Матриця антисиметричного відношення не має жодної пари одиниць, які знаходяться на симетричних місцях по відношенню до головної діагоналі. У графа антисиметричного відношення вершини з'єднуються тільки однією напрямною дугою.

5. Бінарне відношення R на множині A називається *транзитивним*, якщо для будь яких $a, b, c \in A$ з aRb та bRc слідує, що aRc . Тобто якщо $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, то $(a, c) \in R$. Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 1$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково є дуга з першої в третю вершину.

6. Бінарне відношення R на множині A називається *антитранзитивним*, якщо для будь яких $a, b, c \in A$ з aRb та bRc слідує що не виконується aRc . Тобто якщо $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, то $(a, c) \notin R$. Матриця антитранзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 0$. Граф антитранзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

Завдання варіанту №12 з додатку 1

1. Чи є вірною рівність $(A \cup B) \times (A \cup C) = A \times (B \cup C)$?

2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$:

$R = \{(x, y) | x \subset A \,\&\, y \subset B \,\&\, |x| + |y| = 3\}$ де $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3,5\}$.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \,\&\, x^2 + y^2 = 9\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$A(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Перевірити чи є дане відношення

рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \,\&\, x + y = 1\}$.

Розв'язки

1. Нехай $(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \,\&\, y \in (B \cup C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \,\&\, y \in B \cup x \in A \,\&\, y \in C \Leftrightarrow$ (закон дистрибутивності)

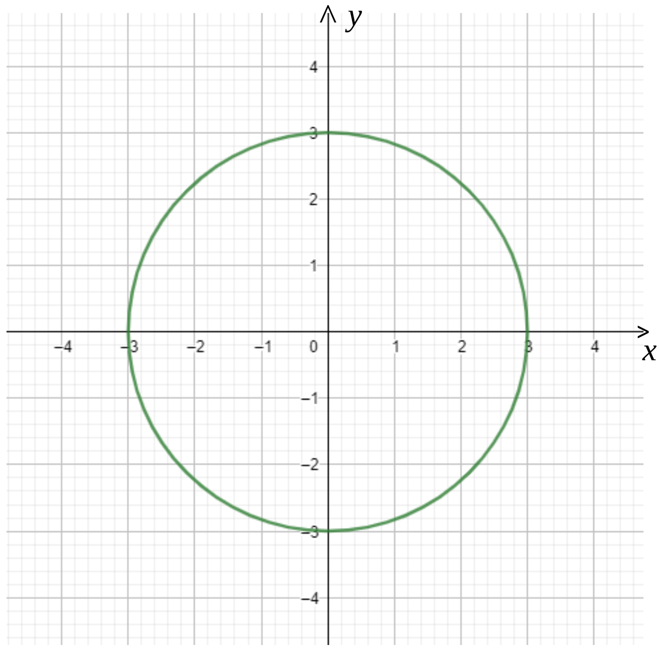
$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (x, y) \in (A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \not\Leftrightarrow$

$\not\Leftrightarrow (A \cup B) \times (A \cup C)$. Отже, рівність є невірною.

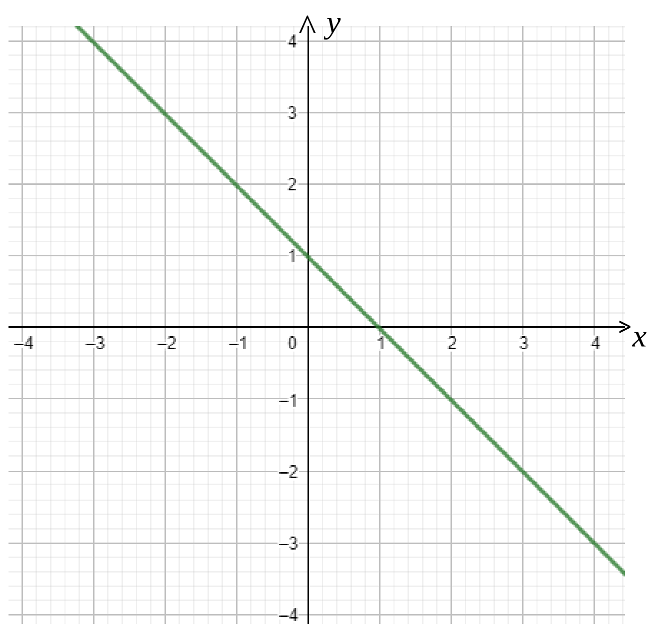
2. Якщо $A = \{1,2\}$ і $B = \{1,3,5\}$, то $A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,1), (2,3), (2,5)\}$, а $R = \{(2,1)\}$. Таким чином, матриця відношення має наступний вигляд:

$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Щоб зобразити графічно відношення $\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \,\&\, x^2 + y^2 = 9\}$, побудуємо графік рівняння $x^2 + y^2 = 9$ у декартовій системі координат.



4. Оскільки не всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1, то відношення не є рефлексивним. Для будь яких $a, b \in A$ з aRb слідує bRa, тому дане відношення є симетричним. За означенням транзитивності для будь яких $a, b, c \in A$ з aRb та bRc слідує, що aRc, проте $r_{1,2} = 1$ і $r_{2,4} = 1$, але $r_{1,4} = 0$. Отже матриця не є транзитивною. І врешті, при деяких значеннях x та y в даному відношенні є водночас пари (x, y) та (y, x), коли $x \neq y$, тому можна зробити висновок, що відношення не антисиметричне.
5. Побудуємо графік рівняння $x + y = 1$.



Як бачимо кожен елемент області визначення зв'язаний з єдиним і кожним елементом області значень, тому відношення $\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ x + y = 1\}$ є функціональним і бієктивним.

Додаток 2

Написати програму, яка знаходить матрицю бінарного відношення $\rho \subset A \times B$, заданого на двох числових множинах. Реалізувати введення цих множин, та виведення на екран матриці відношення. Перевірити програмно якого типу є задане відношення. Навести різні варіанти тестових прикладів. Відношення обрати згідно варіанту:

12. $\rho = \{(a, b) | a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ b < a^2\}$.

Програмна реалізація

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
int IfnExist(int **matr, int n, int m){
   int k = 0;
   for (int i=0; i<n; i++)
      for (int j=0; j<m; j++)
      if (matr[i][j]==0) k++;
   if (k==n*m) return -1;
}
void IsRefx(int **matr, int n, int m){
   int count0 = 0, count1 = 0;
   if (n == m) {
   for (int i=0; i<n; i++)
      for (int j=0; j<m; j++){
         if (i==j) if (matr[i][j]==1) count1++; else count0++;
      }
     if (count1==n) cout<<"reflexive"<<"\n";
     if (count0==n) cout<<"antireflexive"<<"\n";
   }
```

```
}
void IsSymt(int **matr, int n, int m){
   int counter = 0;
   if (n == m){
     int temp = 0;
     for (int i=0; i<n; i++){
        temp++;
        for (int j=temp; j<m; j++){
          if (matr[i][j]==matr[j][i]) counter++;
        }
     }
     if (counter==(n*n-n)/2) cout<<"symmetric"<<"\n";else
     if (counter==0) cout<<"antisymmetric"<<"\n";else
      cout<<"asymmetric"<<"\n";
   }
}
void transitiveClosure(int **matr, int n, int m)
{
   int i, j, k;
   for (k = 0; k < n; k++)
   {
      for (i = 0; i < n; i++)
      {
       for (j = 0; j < n; j++)
        {
         matr[i][j] = matr[i][j] || (matr[i][k] && matr[k][j]);
        }
      }
   }
}

int main()
```

```
{


  int a[100],b[100];
  int n,m,k = 0;
  cout<<"Enter the size of array A: ";
  cin>>n;
  for (int i=0; i<n; i++)
    cin>>a[i];
  cout<<"Enter the size of array B: ";
  cin>>m;
  for (int j=0; j<m; j++)
    cin>>b[j];

  int **matr = new int* [n];
  for (int i = 0; i<n; i++)
    *(matr + i) = new int[m];

  int **matrix = new int* [n];
  for (int i = 0; i<n; i++)
    *(matrix + i) = new int[m];

  for (int i=0; i<n; i++)
    for (int j=0; j<m; j++)
    if (b[i]<a[i]*a[i]) matr[i][j]=1; else matr[i][j]=0;

  for (int i=0; i<n; i++)
    for (int j=0; j<m; j++){
      matrix[i][j] = matr[i][j];
    }
  cout<<endl;
  for (int i=0; i<n; i++){
```

```
        for (int j=0; j<m; j++){
            cout<<matr[i][j]<<" ";
        }
        cout<<endl;
    }
    if (IfnExist(matr,n,m)==-1) {cout<<"antireflexive"<<"\n"; return 0;}
    IsRefx(matr,n,m);
    IsSymt(matr,n,m);
    transitiveClosure(matr,n,m);
    for (int i=0; i<n; i++)
        for (int j=0; j<m; j++){
            if (matrix[i][j]==matr[i][j]) k++;
        }

    if (k==n*n) cout<<"transitive"<<"\n";
    for (int i=0; i<n; i++)
        for (int j=0; j<m; j++){
            for (int k=0; k<m; k++){
                if (matrix[i][k]==1 && matrix[k][j]==1 && matrix[i][j]!=0) return 0;


            }
        }
    cout<<"antitransitive"<<"\n";
    return 0;

}
```

Результати

```
"C:\Users\Admin\Desktop\New folder\–
Enter the size of array A: 5
2 44 5 12 9
Enter the size of array B: 5
56 2 33 1 7

0 0 0 0 0
1 1 1 1 1
0 0 0 0 0
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
asymmetric
transitive
```

```
"C:\Users\Admin\Desktop\New folder\-
Enter the size of array A: 6
1 2 2 3 5 4
Enter the size of array B: 6
67 88 54 99 93 79

0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
antireflexive
```

```
"C:\Users\Admin\Desktop\New folder\–
Enter the size of array A: 4
3 2 2 5
Enter the size of array B: 4
1 2 1 3

1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
reflexive
symmetric
transitive
```

Висновки

Ми набули практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначені їх типів.