経済・ファイナンスデータの計量時系列分析　章末問題解答例

第 1 章

問題 1.1　$\gamma_k = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \mathrm{Cov}(y_{t+k}, y_t) = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t+k}) = \gamma_{-k}$

問題 1.2　(1.8) の過程の期待値，分散，自己共分散はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
&E(y_t) = E(\mu) + E(\varepsilon_t) = \mu \\
&\mathrm{Var}(y_t) = \mathrm{Var}(\mu + \varepsilon_t) = \mathrm{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 \\
&\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \mathrm{Cov}(\mu + \varepsilon_t, \mu + \varepsilon_{t-k}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0, \ \ k \geq 1
\end{aligned}
$$

となるので，(1.8) の過程は定常であることがわかる．

問題 1.4　y_t を平均と分散が等しい互いに独立な系列とし，t が偶数と奇数で異なる分布に従うとすると，y_t は弱定常過程となるが，強定常過程とはならない．

第 2 章

問題 2.1　Hamilton (1994) の 1.2 節を参照

問題 2.2

定常なモデル：(a), (b), (c), (d), (e)

反転可能なモデル：(a),(d),(e), (f)

問題 2.3

(1)
$$
\begin{aligned}
E(y_t) &= E(\mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}) \\
&= \mu + E(\varepsilon_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= \mathrm{Var}(\mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}) \\
&= \mathrm{Var}(\varepsilon_t) + \theta_1^2\mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2^2\mathrm{Var}(\varepsilon_{t-2}) \\
&= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1}) \\
&= \mathrm{Cov}(\mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}, \mu + \varepsilon_{t-1} + \theta_1\varepsilon_{t-2} + \theta_2\varepsilon_{t-3}) \\
&= \mathrm{Cov}(\theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \mathrm{Cov}(\theta_2\varepsilon_{t-2}, \theta_1\varepsilon_{t-2}) \\
&= (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2
\end{aligned}
$$

(4)
$$
\begin{aligned}
\gamma_2 &= \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-2}) \\
&= \mathrm{Cov}(\mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}, \mu + \varepsilon_{t-2} + \theta_1\varepsilon_{t-3} + \theta_2\varepsilon_{t-4}) \\
&= \mathrm{Cov}(\theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2})
\end{aligned}
$$

$= \theta_2\sigma^2$

(5) $j \geq 3$ とすると，

$$\begin{aligned}\gamma_j &= \mathrm{Cov}(y_t,\ y_{t-j})\\ &= \mathrm{Cov}(\mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2},\ \mu + \varepsilon_{t-j} + \theta_1\varepsilon_{t-j-1} + \theta_2\varepsilon_{t-j-2})\\ &= 0\end{aligned}$$

問題 2.4

(1) $|\phi_1| < 1$

(2) $|\theta_1| < 1$

(3) $E(y_t) = c + \phi_1 E(y_{t-1})$ と $\mu = E(y_t) = E(y_{t-1})$ より確認できる．

(4) $\gamma_0 = \mathrm{Var}(y_t)$

$$\begin{aligned}&= \mathrm{Var}(c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1})\\ &= \phi_1^2\mathrm{Var}(y_{t-1}) + \mathrm{Var}(\varepsilon_t) + \theta_1^2\mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1}) + 2\mathrm{Cov}(\phi_1 y_{t-1}, \theta_1\varepsilon_{t-1})\\ &= \phi_1^2\gamma_0 + \sigma^2 + \theta_1^2\sigma^2 + 2\phi_1\theta_1\sigma^2\end{aligned}$$

$$\therefore \gamma_0 = \frac{(1 + 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2)\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

(5) $\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \theta_1\sigma^2$

$$\begin{aligned}&= \frac{(1 + 2\phi_1\theta_1\sigma^2 + \theta_1^2)\phi_1\sigma^2}{1 - \phi_1^2} + \theta_1\sigma^2\\ &= \frac{(1 + \phi_1\theta_1)(\phi_1 + \theta_1)\sigma^2}{1 - \phi_1^2}\end{aligned}$$

(6) $\rho_1 = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_0} = \dfrac{(1 + \phi_1\theta_1)(\phi_1 + \theta_1)}{1 + 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2}$

(7) 2 次以降の自己相関に関しては，ユール・ウォーカー方程式より，

$$\begin{aligned}\rho_j &= \phi_1\rho_{j-1} = \phi_1^2\rho_{j-2} = \cdots = \phi_1^{j-1}\rho_1\\ &= \frac{(1 + \phi_1\theta_1)(\phi_1 + \theta_1)\phi_1^{j-1}}{1 + 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2}\end{aligned}$$

と求めることができる．

第 3 章

問題 3.1

$$\begin{aligned}E\left(y_{t+h} - \hat{y}_{t+h|t}\middle|\Omega_t\right)^2 &= E\left(y_{t+h} - \mu_{t+h|t} + \mu_{t+h|t} - \hat{y}_{t+h|t}\middle|\Omega_t\right)^2\\ &= E\left(y_{t+h} - \mu_{t+h|t}\middle|\Omega_t\right)^2 + E\left(\mu_{t+h|t} - \hat{y}_{t+h|t}\middle|\Omega_t\right)^2\\ &\quad + 2E\left[\left(y_{t+h} - \mu_{t+h|t}\right)\left(\mu_{t+h|t} - \hat{y}_{t+h|t}\right)|\Omega_t\right]\end{aligned}$$

ここで，$\mu_{t+h|t}$ と $\hat{y}_{t+h|t}$ が Ω_t に含まれる変数の関数であること注意すると，

$$E\left[\left(y_{t+h} - \mu_{t+h|t}\right)\left(\mu_{t+h|t} - \hat{y}_{t+h|t}\right)|\Omega_t\right] = \left(\mu_{t+h|t} - \hat{y}_{t+h|t}\right)E\left(y_{t+h} - \mu_{t+h|t}|\Omega_t)\right) = 0$$

であるので，(3.4) が成立することが確認できる．

問題 3.2　(3.14) に (3.11) を代入すると,

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+2|t} &= c + \phi_1 \hat{y}_{t+1|t} + \phi_2 y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p+2} \\ &= c + \phi_1(c + \phi_1 y_t + \phi_2 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p+1}) + \phi_2 y_t + \cdots + \phi_p y_{t-p+2} \\ &= (1+\phi_1)c + (\phi_1^2 + \phi_2) y_t + (\phi_1\phi_2 + \phi_3) y_{t-1} + \cdots + \phi_1 \phi_p y_{t-p+1}\end{aligned}$$

となるので，(3.13) と (3.14) が一致することがわかる.

問題 3.3

(1) $\hat{y}_{t+1|t} = 2, \mathrm{MSE}(\hat{y}_{t+1|t}) = 4$

(2) $(2 - 1.96 \times 2,\ 2 + 1.96 \times 2) = (-1.9, 5.9)$

(3) $\hat{y}_{t+2|t} = 1, \mathrm{MSE}(\hat{y}_{t+1|t}) = 5$

(4) $(1 - 1.96\sqrt{5},\ 2 + 1.96\sqrt{5}) = (-3.4, 5.4)$

(5) どの解答も変わらない.

問題 3.4

(1) $\hat{y}_{t+1|t} = 1.4, \mathrm{MSE}(\hat{y}_{t+1|t}) = 9$

(2) $(-4.5, 7.3)$

(3) $\hat{y}_{t+2|t} = 0.7$

(4) すべて変わる.

問題 3.5

(1) $\hat{\varepsilon}_1 = y_1 - \mu = 0.4$

$\hat{\varepsilon}_2 = y_2 - \mu - \theta_1 \hat{\varepsilon}_1 = 0.88$

$\hat{\varepsilon}_3 = y_3 - \mu - \theta_1 \hat{\varepsilon}_2 - \theta_2 \hat{\varepsilon}_1 = 1.38$

以下同様にして,

$\hat{\varepsilon}_4 = -0.16, \hat{\varepsilon}_5 = 1.00, \hat{\varepsilon}_6 = -0.63, \hat{\varepsilon}_7 = -0.21, \hat{\varepsilon}_8 = -0.18, \hat{\varepsilon}_9 = 0.84, \hat{\varepsilon}_{10} = -0.38$

したがって，$\hat{y}_{t+1|t} = 0.1 + 0.3 \times (-0.38) + 0.4 \times 0.84 = 0.32.$

(2) $\hat{y}_{t+2|t} = 0.1 + 0.4 \times (-0.38) = -0.05$

(3) 0.1

(4) (1) と (2) が変わる.

第 4 章

問題 4.1　$\mathbf{\Gamma}_k$ の (i,j) 成分は $\mathbf{\Gamma}_{k,ij} = \mathrm{Cov}(y_{it}, y_{j,t-k})$. また，$\mathbf{\Gamma}_{-k}$ の (j,i) 成分は $\mathbf{\Gamma}_{-k,ji} = \mathrm{Cov}(y_{jt}, y_{i,t+k}) = \mathrm{Cov}(y_{j,t-k}, y_{it})$. したがって，$\mathbf{\Gamma}_k = \mathbf{\Gamma}'_{-k}$ が成立することがわかる.

問題 4.2　AR 特性方程式 (4.3) を計算すると，

$$0 = |\mathbf{I}_2 - \mathbf{\Phi}_1 z| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & -\gamma z \\ 0 & 1-z \end{bmatrix} \right| = 1 - z$$

となるので，AR 特性方程式の解は $z = 1$ となる．したがって，この VAR(1) 過程は定常ではない．

問題 4.3

(1)
$$\begin{cases} y_{1t} = c_1 + \phi_{11}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{12}^{(1)} y_{2,t-1} + \phi_{13}^{(1)} y_{3,t-1} + \phi_{11}^{(2)} y_{1,t-2} + \phi_{12}^{(2)} y_{2,t-2} + \phi_{13}^{(2)} y_{3,t-2} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = c_2 + \phi_{21}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{22}^{(1)} y_{2,t-1} + \phi_{23}^{(1)} y_{3,t-1} + \phi_{21}^{(2)} y_{1,t-2} + \phi_{22}^{(2)} y_{2,t-2} + \phi_{23}^{(2)} y_{3,t-2} + \varepsilon_{2t} \\ y_{3t} = c_3 + \phi_{31}^{(1)} y_{1,t-1} + \phi_{32}^{(1)} y_{2,t-1} + \phi_{33}^{(1)} y_{3,t-1} + \phi_{31}^{(2)} y_{1,t-2} + \phi_{32}^{(2)} y_{2,t-2} + \phi_{33}^{(2)} y_{3,t-2} + \varepsilon_{3t} \end{cases}$$

(2) 27

(3) $\phi_{13}^{(1)} = \phi_{13}^{(2)} = 0$

(4) $\phi_{31}^{(1)} = \phi_{31}^{(2)} = \phi_{32}^{(1)} = \phi_{32}^{(2)} = 0$

問題 4.4

(1) 0.32

(2) 0.48

(3) $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0.64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) 1.16

(5) 0.26

(6) 0

(7) 0.02

(8) 0.76

(9) 順に $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2.56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1.2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 0.77, 0.91, 0.36, 0.43, 0.31

第 5 章

問題 5.1

(1) $\hat{y}_{t+1|t} = 121.1$, $\mathrm{MSE}(\hat{y}_{t+1|t}) = 4$

(2) $(117.2, 125.0)$

(3) $\hat{y}_{t+2|t} = 122.6$, $\mathrm{MSE}(\hat{y}_{t+1|t}) = 8$

(4) $(117.1, 128.1)$

(5) $\hat{y}_{t+100|t} = 161.6$, $\mathrm{MSE}(\hat{y}_{t+1|t}) = 40$

問題 5.2　株価 : [場合 3]，為替レート : [場合 2]，GDP : [場合 3]，CPI : [場合 3]，コールレート : [場合 2]，失業率 : [場合 2]，消費 : [場合 2]

問題 5.3　ADF 単位根検定の結果は，失業率が単位根過程であることを意味しているので，差分系列に ARMA モデルを当てはめ，予測なども分析を行えばよい．

問題 5.4　(5.20) より，

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1 y_{t-1} + \cdots + (\phi_{p-1} + \phi_p) y_{t-p+1} - \phi_p \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1 y_{t-1} + \cdots + (\phi_{p-2} + \phi_{p-1} + \phi_p) y_{t-p+2} - (\phi_{p-1} + \phi_p)\Delta y_{t-p+1} - \phi_p \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \\
&= \cdots \\
&= (\phi_1 + \cdots + \phi_p) y_{t-1} - (\phi_2 + \cdots + \phi_p)\Delta y_{t-1} - \cdots \\
&\qquad - (\phi_{p-2} + \phi_{p-1} + \phi_p) y_{t-p+2} - (\phi_{p-1} + \phi_p)\Delta y_{t-p+1} - \phi_p \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t
\end{aligned}
$$

となるので，(5.22) の関係が確認できる．

第 6 章

問題 6.1

(1) OLS 残差を用いて，Engle-Granger の共和分検定を行えばよい

(2) 見せかけの回帰の関係にある

(3) x_t と y_t の差分系列を用いて，解析を行えばよい

問題 6.2

(1) (6.6) より，

$$
\begin{aligned}
x_t + 2y_t - s_t &= w_{1t} + u_{1t} + 2(w_{2t} + u_{2t}) - (w_{1t} + 2w_{2t} + u_{3t}) = u_{1t} + 2u_{2t} - u_{3t} \sim \mathrm{I}(0) \\
2x_t + y_t - v_t &= 2(w_{1t} + u_{1t}) + w_{2t} + u_{2t} - (2w_{1t} + w_{2t} + u_{4t}) = 2u_{1t} + u_{2t} - u_{4t} \sim \mathrm{I}(0)
\end{aligned}
$$

であるので，$\mathbf{a} = (1, 2, -1, 0)'$ と $\mathbf{b} = (2, 1, 0, -1)'$ が共和分ベクトルであることがわかる．

問題 6.3

(1) 存在する．共和分ベクトルは $(1, -1/2)'$

(2) 存在しない

(3) 存在する．共和分ベクトルは $(1, -1/2, 0)'$

(4) 存在する．共和分ベクトルの例は $(1, -1/2, 0, 0)'$ と $(1, 0, 2, -1)'$

第 7 章

問題 7.2　1 期先予測とその MSE を一般的に求めると，

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{t+1|t} &= 0.4 + 0.5y_t \\
\mathrm{MSE}(\hat{y}_{t+1|t}) &= 0.6 + 0.4h_t + 0.3u_t^2 + 0.2u_t^2 \cdot I_t \\
&= 0.6 + 0.4 + 0.3(y_t - 0.4 - 0.5y_{t-1})^2 + 0.2(y_t - 0.4 - 0.5y_{t-1})^2 \cdot I_t \\
&= 1 + 0.3(y_t - 1)^2 + 0.2(y_t - 1)^2 \cdot I_t
\end{aligned}$$

となるので，1 期先 95% 区間予測は一般的に，

$$\left(0.4 + 0.5y_t - 1.96\sqrt{1 + 0.3(y_t - 1)^2 + 0.2(y_t - 1)^2 \cdot I_t},\ 0.4 + 0.5y_t + 1.96\sqrt{1 + 0.3(y_t - 1)^2 + 0.2(y_t - 1)^2 \cdot I_t}\right)$$

と求めることができる．

問題 7.3

- VEC モデル：$n(n+1)(n^2+n+1)/2$
- DVEC モデル：$3n(n+1)/2$
- BEKK モデル：$n(5n+1)/2$
- CCC モデル：$n(n+5)/2$
- DCC モデル：$(n^2+5n+4)/2$

第 8 章

問題 8.1

(1) $y_t = -1 + 0.5y_{t-1} + 3.00\varepsilon_t$

(2) $y_t = 2 + \varepsilon_t$

(3) $y_{t-1} = -5$: $y_t = -0.99 + 0.50y_{t-1} + 3.00\varepsilon_t$

$y_{t-1} = -4$: $y_t = -0.98 + 0.50y_{t-1} + 2.99\varepsilon_t$

$y_{t-1} = -3$: $y_t = -0.95 + 0.49y_{t-1} + 2.96\varepsilon_t$

$y_{t-1} = -2$: $y_t = -0.86 + 0.48y_{t-1} + 2.91\varepsilon_t$

$y_{t-1} = 1$: $y_t = -0.64 + 0.44y_{t-1} + 2.76\varepsilon_t$

$y_{t-1} = 0$: $y_t = -0.19 + 0.37y_{t-1} + 2.46\varepsilon_t$

$y_{t-1} = 1$: $y_t = 0.50 + 0.25y_{t-1} + 2.00\varepsilon_t$

$y_{t-1} = 2$: $y_t = 1.19 + 0.13y_{t-1} + 1.53\varepsilon_t$

$y_{t-1} = 3$: $y_t = 1.64 + 0.06y_{t-1} + 1.24\varepsilon_t$

$y_{t-1} = 4$: $y_t = 1.86 + 0.02y_{t-1} + 1.09\varepsilon_t$

$y_{t-1} = 5$: $y_t = 1.95 + 0.01y_{t-1} + 1.04\varepsilon_t$

(4) 状態 1 はベア市場をモデル化しており，状態 2 はブル市場をモデル化している．

問題 8.2

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \frac{1-p_{22}}{2-p_{11}-p_{22}} \times p_{11} + \left(1 - \frac{1-p_{22}}{2-p_{11}-p_{22}}\right) \times (1-p_{22}) \\
&= \frac{p_{11}(1-p_{22}) + (1-p_{11})(1-p_{22})}{2-p_{11}-p_{22}} \\
&= \frac{1-p_{22}}{2-p_{11}-p_{22}} \\
&= p^*
\end{aligned}
$$

問題 8.3　Kim and Nelson (1999) の 4.3 節を参照