また，撹乱項の分散 σ^2 の OLS 推定量 s^2 は以下の OLS 残差に基づいた不偏分散で与えられる[*6)].

$$s^2 = \frac{1}{T-2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{c} - \hat{\phi}y_{t-1})^2 \tag{2.29}$$

以上の議論を AR(p) モデルに拡張するのは容易であろう．ここでは具体的な導出はしないが，AR モデルにおける OLS 推定量の性質を定理としてまとめておこう．

定理 2.4 （OLS 推定量の性質） AR モデルにおける OLS 推定量は以下の性質をもつ．

1）OLS 推定量は**一致推定量** (consistent estimator) である．
2）OLS 推定量を基準化したものは漸近的に正規分布に従う．
3）$\varepsilon_t \sim$ iid $N(0,\sigma^2)$ のとき，OLS 推定量は一致推定量の中で漸近的に最小の分散共分散行列をもつ[*7)].

性質 (1) は，標本数が大きくなったときに，OLS 推定量が真の値に限りなく近づいていくことを意味しており，例えば，$\hat{\phi}$ が漸近的に ϕ に収束することを意味している．性質 (2) は仮説検定に用いることができ，5 章で簡単に導出法を述べる．また，性質 (3) は正規性の下での OLS の**漸近有効性** (asymptotic efficiency) を表している．

回帰分析の標準的な仮定の下では，以上の性質に加えて，OLS 推定量は**不偏推定量** (unbiased estimator) であり，すべての線形不偏推定量の中で，最小の分散共分散行列をもつ**最良線形不偏推定量** (BLUE: best linear unbiased estimator) となることが知られている[*8)]．しかしながら，AR 過程の場合は，説明変数が過去の誤差項と相関をもつため，OLS 推定量は不偏推定量とならないことに注

---

*6) 下で述べるように，AR モデルにおける OLS 推定量は不偏推定量とはならないので，不偏分散も不偏ではないことに注意されたい．

*7) ここでいう最小とは行列の意味であり，具体的には OLS 推定量の漸近分散共分散行列を $\mathbf{\Omega}$ とし，任意の一致推定量の漸近分散共分散行列を $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ とするとき，$\tilde{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{\Omega}$ が必ず半正定値になることを意味する．

*8) OLS 推定量が BLUE となることは，Gauss-Markov の定理と呼ばれることがある．また，正規性の下では，OLS 推定量はすべての不偏推定量の中で，最小の分散共分散行列をもつ．

意されたい[*9)].

以上からわかるように，AR モデルに対しては，OLS 推定量は一部の望ましい性質をもたないが，統計的推測を行うのに十分な性質をもつ．しかも，ε_t の分布を定めずに，統計的推測を行うことができるという利点もある．したがって，OLS は時系列分析において最もよく用いられる手法の 1 つとなっている．しかしながら，時系列モデルの中には，ARMA モデルや後述する GARCH モデル，マルコフ転換モデルなど，OLS を単純に適用できないモデルも複数存在する．そのようなモデルに対しては，OLS の代わりに次に述べる最尤法が用いられることが多い．

[*9)] 様々な仮定における OLS 推定量の性質については，例えば，Hamilton (1994) の第 8 章を参照されたい．