Kay

约束

状态：已知某一时刻的位置和速度，由动力学方程能确定任意时刻的位置和速度。可理解为某一时刻的值为初值，因而能求出动力学方程的特解。

状态**约束方程**：

$$f(r_1, r_2, \ldots, r_n; \dot{r_1}, \dot{r_2}, \ldots, \dot{r_n}; t) = 0$$

或者

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{3n}; \dot{u_1}, \dot{u_2}, \ldots, \dot{u_{3n}}; t) = 0$$

约束条件：坐标和速度必须满足的条件。

几何约束：仅对系统的位形加以限制，不限制速度

运动约束：对速度也有限制。亦称为微分约束或速度约束。

完整约束：某些情形，几何约束求全微分，能得到运动约束；运动约束可通过积分成为几何约束。可积分的运动约束和几何约束在物理实质上没有区别。

非完整约束：并不是所有的运动约束的约束方程都可积。不可积的运动约束不能化为几何约束，他们在物理实质上不同于几何约束。

定常约束：不直接依赖于时间t，数学表达式不显含时间。对时间的偏导数为 0。

非定常约束：直接依赖于时间t，数学表达式显含时间。对时间的偏导数不为 0。

单侧约束：只在某一侧限制系统的运动，另一测的运动完全自由。其数学表达式为不等式，成为约束不等式。有可能解除，需求出约束力。约束 breakable。

双侧约束：等式约束，不论那一侧都受到限制。

约速力

一切影响质点机械运动的因素都归结为力，因此约束作用也可归结为力。迫使力学系统遵守约束条件的力称为**约束力**。

作用质点的力可分约束力和**主动力**(除约束力其余的力)。有时将约束力成为约束反力。

可分为**内力**和**外力**。内力在系统内是成对的，大小相等，共线且方向相反。

可分为**保守力**和**非保守力**。保守力做功可用势能的减少来表达。

自由度和广义坐标

n个质点组成的力学系统的位形可由n个位矢$r_1, r_2, \dots, r_n$确定，亦可以由$N = 3n$个直角坐标$u_1, u_2, \dots, u_{N=3n}$即$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$表示。如果该系统存在$m$个**完整约束**，

$$f_i(u_1, u_2, \dots, u_N; t) = 0, (i = 1,2, \dots, m)$$

那么，在N个坐标之中，有m个坐标可以从方程组"解出"，即有m个坐标可用其余的$N - m$个坐标表出，因此剩余$s = N - m$个独立坐标。力学系统的独立坐标的个数s叫做力学系统在有限运动中的**自由度**。每一个完整约束方程使力学系统减少一个独立坐标，也就是说，是有限运动的自由度降低一个。

这$s = N - m$个独立坐标并不一定在原来的N个独立坐标中挑选，完全可以任意组合。选取$s = N - m$个独立参数$q_1, q_2, \dots, q_s$，用以完全确定N个坐标的力学系统在m个完整约束下的几何位形。也就是说，$q_1, q_2, \dots, q_s$完全确定了$N = 3n$个坐标：

$$u_i = u_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)(i = 1,2, \dots, N)。$$

这一组独立参数q叫做力学系统的**广义坐标**。广义坐标的选定可以是各种各样的，但是选择恰当可能解算较简便。一般情况，尽可能选取使得变换式不显含时间的广义坐标。这在定常约束下，总是可以得到的。

广义坐标不再是三个一组地组成矢量，其量纲也不一定是长度量纲。广义坐标表征系统的位形，系统的运动可表示为广义坐标$q_1, q_2, \dots, q_s$随时间的变化，即有

$$q_i = q_i(t), i = 1,2, \dots, s$$

其随时间的变化率$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$称为广义速度。显然，广义速度的量纲也不一定是速度量纲。对于只有完整约束的力学系统，不仅s个广义坐标全是独立的，而且这s个广义速度也是独立的。

如果力学系统中除了完整约束外，还存在k个**非完整约束**

$$f_j(u_1, u_2, \dots, u_N; \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_N; t) = 0, (i = 1,2, \dots, k)$$

这时并不能"解出"k个坐标。可见非完整约束并不能减少独立坐标的个数。完整约束不仅减少独立坐标个数，还减少独立速度分量的个数。非完整约束虽不能减少独立坐标个数，但能减少独立坐标分量的个数。称独立速度分量的个数为力学系统在**无限小运动中的自由度**。

n个质点的力学系统，若存在m个完整约束和k个非完整约束，那么质点的直角坐标数$N = 3n$，广义坐标个数等于$N - m$，自由度等于$N - m - k$。对于只有完整约束，$k = 0$，广义坐标的个数就是自由度。如果存在非完整约束，$k > 0$，广义坐标的个数大于自由度。运用广义坐标后，不需要考虑完整约束，但非完整约束仍需要考虑，并应将它用相应的广义速度表示。

对于线性的速度约束，约束方程可表示为

$$\sum_{i=1}^{N} A_{ji}(u_1, u_2, \dots, u_N; t)\dot{u}_i + A_j(u_1, u_2, \dots, u_N; t) = 0$$

由于

$$u_i = u_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

则

$$\dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial u_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha$$

带入得

$$\sum_{i=1}^{N} A_{ji}\dot{u_i} + A_j = \sum_{i=1}^{N} A_{ji}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial u_i}{\partial q_\alpha}\dot{q_\alpha}\right) + A_j = \sum_{i=1}^{N} A_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} A_{ji}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial u_i}{\partial q_\alpha}\dot{q_\alpha} + A_j$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s}(\sum_{i=1}^{N} A_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial q_\alpha})\dot{q_\alpha} + \left(\sum_{i=1}^{N} A_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial t} + A_j\right) = \sum_{\alpha=1}^{s} B_{j\alpha}\dot{q_\alpha} + B_j = 0$$

其中

$$B_{j\alpha} = \sum_{i=1}^{N} A_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial q_\alpha} = B_{j\alpha}(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

$$B_j = \sum_{i=1}^{N} A_{ji}\frac{\partial u_i}{\partial t} + A_j = B_j(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

这样，在直角坐标系中，对速度是线性的约束方程，改用广义坐标和广义速度，仍然时广义速度的线性约束方程。

对于一般的非完整约束，利用$u_i = u_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$和

$$\dot{u_i} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial u_i}{\partial q_\alpha}\dot{q_\alpha}$$

立即可得

$$f(u_1, u_2, \dots, u_N; \dot{u_1}, \dot{u_2}, \dots, \dot{u_N}; t)|_{u\to q} = f(q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q_1}, \dot{q_2}, \dots, \dot{q_s}; t)。$$

虚功原理

虚位移和真实位移：对于定常约束(不显含时间t)，一切想象的符合约束条件的无限小的可能位移定义为**虚位移**。通场把第i个质点的虚位移记作δr_i，不同于真实位移dr_i。对于非定常约束，假定约束被瞬间冻结，符合该瞬时的约束条件的无限小可能位移就是相应于该瞬时的虚位移。对于定常约束的真实位移是虚位移中的一个。对于非定常约束，**真实位移**并非虚位移中的一个，它应满足时间并不冻结的约束条件。

设有n个质点的系统，存在m个完整约束，其约束方程为

$$f_j(r_1, r_2, \dots, r_n; t) = 0 (j = 1,2, \dots, m)$$

设$\delta r_1, \delta r_2, \dots, \delta r_n$是满足约束条件的虚位移，则

$$f_j(r_1 + \delta r_1, r_2 + \delta r_2, \dots, r_n + \delta r_n; t) = 0$$

对δr_i作多元函数的一阶泰勒展开，得

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla_i f_j \cdot \delta r_i = 0 \ (j = 1,2, \dots, m)$$

满足上式的一组δr_i就是虚位移。而真实位移dr_i是一个在时间dt间隔中完成的位移，为使其满足约束条件，则

$$f_j(r_1 + dr_1, r_2 + dr_2, \dots, r_n + dr_n; t + dt) = 0$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}(\nabla_i f_j \cdot dr_i + \frac{\partial f_j}{\partial t}dt) = 0\ (j = 1,2,\dots,m)$$

理想约束：力和位移的标积成为力所做的功。力与虚位移的标积自然称为**虚功**。把系统的第i个质点所受约束力记为N_i，虚位移记为δr_i，则系统约束力的虚功即约束力系在虚位移下所做功的总和为

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} N_i \cdot \delta r_i$$

值得指出的是存在着相当多类的约束，其约束力的虚功为零，即

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} N_i \cdot \delta r_i = 0$$

这样的约束称为**理想约束**。理想约束针对系统中所有的约束力而不是其中的一个或几个约束力。

静力学：即力学系统处于平衡。这说明系统的每一部分都处于平衡，即每个质点都处于平衡。这样作用在第i个质点的主动力F_i和约束力N_i的合力应为零，即

$$F_i + N_i = 0$$

于是作用于第i个质点所有各力的虚功之和$\delta W_i = 0$，

$$\delta W_i = (F_i + N_i) \cdot \delta r_i = F_i \cdot \delta r_i + N_i \cdot \delta r_i = 0$$

就所有质点进行累加，即

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \delta W_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^{n} N_i \cdot \delta r_i = 0$$

在理想约束下$\sum_{i=1}^{n} N_i \cdot \delta r_i = 0$，则

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta r_i = 0$$

这就是**虚功原理**。

虚功原理说明，当一个**只有理想约束**的力学系统**处于平衡**状态时，作用于该力学系统的**所有主动力的虚功之和**为零。

广义坐标下的虚功原理：运用虚功原理研究平衡问题，诚然不需考虑约束力（确切说是理想约束的约束力）。但是，虚功原理牵涉到虚位移，而虚位移带有很大的任意性。另外，虚位移并不独立，假如虚位移独立，则$\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta r_i = 0$可得$F_i = 0$，那么处于平衡状态的质点所受约束力$N_i = 0$，这是矛盾的。为解决这个问题，引入广义坐标。任意一个质点的径矢r_i都可用s个广义坐标表示

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

因而质点的虚位移可用广义坐标的虚位移（**广义虚位移**）表示

$$\delta r_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$$

带入虚功原理，得到广义坐标下的虚功原理

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{s}(\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha})\delta q_\alpha = 0$$

这里将广义虚位移δq_α的系数记为Q_α，即

$$Q_\alpha=\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}$$

由于Q_α与广义坐标的乘积的量纲为功的量纲，所以通常把Q_α称为**广义力**。既然广义坐标的量纲未必是长度的量纲，所以广义力的量纲未必是力的量纲。虚功原理用广义力与广义虚位移表示为

$$\delta W=\sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha=0$$

对于完整约束，这s个广义虚位移δq_α都是独立的。于是，虚功原理的系数广义力Q_α应分别为零。

$$Q_\alpha=\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}=0\ (\alpha=1,2,\dots,s)$$

这就是终于舍去了虚位移之后所得的平衡方程组。

主动力全是保守力的系统的平衡方程: 若主动力全是保守力的情况下，广义力Q_α的表达式很容易求得。根据势能V的定义，$\delta W=-\delta V$，即

$$\delta V=-\sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha$$

这就是说(V是广义坐标q_α的函数)，

$$Q_\alpha=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\ \ (\alpha=1,2,\dots,s)$$

上面的V是所考虑的系统的势能。当用广义坐标表示时，V通场不再可视为系统各部分势能之和，也即V中的某一项或几项不在表示为系统中的某一部分的势能。那么，系统平衡方程可表示为

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}=0\ \ (\alpha=1,2,\dots,s)$$

该式子表明，势力作用下的力学系统，如处于平衡，则势能取极值。

约束力求解—拉格朗日乘子法: 引用广义坐标并应用虚功原理研究静力学问题的好处是不必考虑约束力，而且平衡方程的个数也少。但是有时候却要求计算某些约束力。如果我们一开始就把所有约束作为事实而接受，按照约束条件选取广义坐标，就不可能求解约束力。为了计算某些约束力，显然一开始可以不承认相应的约束条件。在选取广义坐标时，可以暂时不考虑相应的约束条件，这样选取的广义坐标实际上不独立，它们之间有相应的约束条件相联系。这种情况下，广义坐标的个数将超过系统的自由度。尽管在理想约束条件下，也可得到广义坐标表出的虚功原理

$$\delta W=\sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha=0$$

但由于q_α并不独立，从而δq_α不独立。因此平衡方程不再是$Q_\alpha=0$。这s个q_α之间存在着选取广义坐标时没有考虑的约束条件(设l个)

$$f_j(q_1,q_2,\dots,q_s,t)=0\ (j=1,2,\dots,l)$$

它们的微分形式是

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha}dq_\alpha+\frac{\partial f_j}{\partial t}dt=0\ (j=1,2,\dots,l)$$

因为虚位移不是时间中的过程，所以$\delta t=0$，广义虚位移之间的联系是

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=0\ (j=1,2,\dots,l)$$

把方程组中各个方程分别乘以待定常数λ_j，并与虚功原理相加，可得

$$\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha})\delta q_\alpha=0$$

这s个δq_α并不独立，只有$s-l$个δq_α是独立的。因此，我们不能立即断定各个$Q_\alpha+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha}$分别为零。不过，我们总是可以选取这$l$个乘子$\lambda_j$，使得其中$l$个括号中值为零。例如使前$l$个括号的值为零，即

$$\begin{cases}Q_1+\lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial q_1}+\lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial q_1}+\cdots+\lambda_l\dfrac{\partial f_l}{\partial q_1}=0\\ Q_2+\lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial q_2}+\lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial q_2}+\cdots+\lambda_l\dfrac{\partial f_l}{\partial q_2}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ Q_l+\lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial q_l}+\lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial q_l}+\cdots+\lambda_l\dfrac{\partial f_l}{\partial q_l}=0\end{cases}$$

若已知q的值，由上面的方程组可解得l个λ_j。这样一来，虚功原理的表达式中已不出现前l个δq_α，只剩下后$s-l$个δq_α的项，并可认为这$s-l$个δq_α是独立的。作为它们的系数，后$s-l$个括号应分别为零。这样，各个括号的值都为零。即

$$Q_\alpha+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha}=0\ (\alpha=1,2,\dots,s)$$

该平衡方程组中含有l个待定的拉格朗日乘子λ_j。将平衡方程组与约束方程组联立得$s+l$个方程，就可以解出s个q_α和l个待定乘子λ_j。

平衡条件不再是广义主动力$Q_\alpha=0$，因为选取广义坐标时未计及的约束条件引起的约束力也在起作用。可以看出，**上式中$\boldsymbol{\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_\alpha}}$表示保证第$\boldsymbol{j}$个约束的广义约束力的各个分力。$\boldsymbol{Q_\alpha}$则是以广义力形式表示的主动力的分力。广义力属于整个系统，其分量是按广义坐标分解的，而不是按各质点的坐标分解**。如果要求知道第j个约束条件给予第i个质点的约束力，则选取广义坐标时，应将此质点单独考虑：取此质点的三个坐标(直角坐标系x,y,z)作为三个特定的广义坐标，而其余部分的广义坐标仍任意选取。此时，第j个约束条件（几何约束）对第i个质点的约束力的三个分量分别为$\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$，$\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial y_i}$，$\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial z_i}$，或写成矢量形式

$$\boldsymbol{N_i}=\lambda_j\boldsymbol{\nabla_i f_j}\text{，}\boldsymbol{\nabla_i}=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y_i}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z_i}$$

达朗贝尔原理：以上研究的是静力学问题，现在转到动力学问题的研究。按照牛顿运动定律，力学系统的第i个质点的运动方程是

$$\boldsymbol{F_i}+\boldsymbol{N_i}=m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

则

$$\boldsymbol{F_i}+\boldsymbol{N_i}-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{0}$$

若将$-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$理解为一种力,上式的平衡方程就变成静力学方程。$-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$类似于熟悉的惯性力。但它不是选取的参考系为非惯性系而出现的惯性力。不过按习惯称为惯性力(或称为**达朗贝尔力**)。上式仍然是惯性系中的关系，叫做**达朗贝尔原理**。

既然是一种平衡方程，当然可以用虚功原理的形式表出。在理想约束下，主动力和惯性力的虚功之总和为零

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}(F_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

这就是达朗贝尔原理的常用形式，也称为**动力学普遍方程**。

达朗贝尔原理是以牛顿定律加上理想约束假定作为逻辑推理的出发点导出的。从这个基本方程触发再利用约束对虚位移的限制关系式，可以导出力学系统的动力学方程。当存在非完整约束时，达朗贝尔原理也适用，可叙述为：主动力和非理想约束力及惯性力的虚功之总和为零。对于完整约束和非完整约束，这个原理都适用，因此它可以称为分析动力学的普遍原理。

拉格朗日动力学

一个力学系统的性质可用单个函数-拉格朗日函数来概括。

坐标变换关系与拉格朗日关系：由达朗贝尔原理

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

由于约束条件，n个矢径$\boldsymbol{r}_i(i=1,2,\dots,n)$并不独立。现在引入独立的广义坐标$q_\alpha(\alpha=1,2,\dots,s)$，把矢径$\boldsymbol{r}_i$用广义坐标表出

$$r_i=r_i(q_1,q_2,\dots,q_s;t)\ (i=1,2,\dots,n)$$

即前面所说的坐标换标关系。为把上式代入达朗贝尔原理，本来需要对上式对时间t求导两次以求得$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$表达式。不过下面将采用一种类似于分部积分的运算，因而只需要$\dot{r}_i$的表达式

$$\dot{r}_i=\frac{dr_i}{dt}=\frac{\partial r_i(q,t)}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial r_i(q,t)}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha$$

为了书写简便，上式$r_i(q_1,q_2,\dots,q_s;t)$表示为$r_i(q,t)$。下面计算它的偏导数。

$\dot{r}_i$对$\dot{q}_\beta$求偏导数得

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}_\beta}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\beta}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\beta}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right)=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial\boldsymbol{q}_\beta}$$

推到中利用了$\frac{\partial r_i}{\partial t}$和$\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}$只是$q,t$的函数，而和$\dot{q}$无关的性质，即有

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\beta}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)=0,\qquad\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\beta}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\right)=0$$

$\dot{r}_i$对q_β求偏导数，得

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_\beta}=\frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)=\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_\beta \partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial^2 r_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\right)+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\alpha$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\right)$$

即

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial q_\beta}}(\boldsymbol{\frac{d}{dt}r_i})=\boldsymbol{\frac{d}{dt}}\left(\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial q_\beta}r_i}\right)$$

上面两个等式称为拉格朗日关系。

拉格朗日方程：将坐标变换带入达朗贝尔原理，其主动力部分是

$$\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{s}(\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha})\delta q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{s}Q_\alpha\delta q_\alpha$$

其中广义力

$$Q_\alpha=\sum_{i=1}^{n}F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}$$

惯性力部分是

$$-\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=-\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)=-\sum_{\alpha=1}^{s}(\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha})\delta q_\alpha$$

上式中的$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$尚待用广义坐标q_α及其时间变化率$\dot{q}_\alpha$和$\ddot{q}_\alpha$表出。

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\dot{r}_i}{dt}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d}{dt}\left(\dot{r}_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\right)-\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{r}_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q_\alpha}r_i\right)$$

将拉格朗日关系公式带入得

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d}{dt}\left(\dot{r}_i\cdot\boldsymbol{\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}}\right)-\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{r}_i\cdot\boldsymbol{\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_\alpha}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\frac{1}{2}\partial}(\dot{r}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i)}{\boldsymbol{\partial \dot{q}_\alpha}}\right)-\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{\boldsymbol{\frac{1}{2}\partial}(\dot{r}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i)}{\boldsymbol{\partial q_\alpha}}$$

$$=\frac{d}{dt}\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}}(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\frac{1}{2}}m_i\dot{r}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i)-\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial q_\alpha}}(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\frac{1}{2}}m_i\dot{r}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i)$$

由

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\frac{1}{2}}m_i\dot{r}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\frac{1}{2}}m_i\,|v_i|^2=T$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$$

将式子整合，得到达朗贝尔原理表为

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i - m_i\ddot{r}_i)\cdot\delta r_i = \sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \delta q_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{s}\left(Q_\alpha - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha = 0$$

对于完整系统，广义虚位移是独立的，则上式括号全为零，得

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1,2,\dots,s)$$

这一组方程就是**拉格朗日方程**。这里已经一劳永逸地甩掉了虚位移，因为T和Q_α都是q_α，$\dot{q}_\alpha$和t的已知函数。所以这是关于s个未知函数的常微分方程，其中每个方程一般都含有这s个个未知函数的二阶导数。如果把$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$叫做广义动量(确切的定义是$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$)，$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$可以叫做拉格朗日力，于是方程可读作：**广义动量的时间变化率等于广义主动力和拉格朗日力之和。**

主动力全是保守力的系统的拉格朗日方程：当主动力F_i全是保守力时，存在一个势能函数$V(r_1, r_2, \dots, r_n, t)$使得

$$F_i = -\nabla_i V$$

则广义力Q_α可表示为

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_i V \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1,2,\dots,s)$$

最后一个$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$势能函数。则$Q_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$变化为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial (T - \boldsymbol{V})}{\partial q_\alpha} = 0 \ (\alpha = 1,2,\dots,s)$$

势能$\boldsymbol{V}$只是广义坐标的函数而与广义速度无关，则$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$，上式改写为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T - \boldsymbol{V})}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial (T - \boldsymbol{V})}{\partial q_\alpha} = 0 \ (\alpha = 1,2,\dots,s)$$

定义拉格朗日函数

$$L = T - \boldsymbol{V}$$

就得到主动力全是保守力情况下的完整系统的**拉格朗日方程**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \ (\alpha = 1,2,\dots,s)$$

这种类型的拉格朗日方程还可以通过哈密顿原理得到，它的**哈密顿作用量**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

取极值时所满足的欧拉-拉格朗日方程。

系统的拉格朗日函数是不唯一的。第一，因为对于同一系统，广义坐标有多种选取方式，而每种方式都有相应的拉格朗日函数。第二，即使对于同一组广义坐标，仍可以有不同形式的拉格朗日函数。

运动积分：拉格朗日方程是关于广义坐标的二阶微分方程。对于某些问题，在系统运动过程中，存在q_α和$\dot{q}_\alpha$的函数，他们不随时间而变。这些函数称为系统的**运动积分**。运动积分通场是守恒律（如动量守恒定律，角动量守恒定律，机械能守恒定律）概念的推广。运动积

分相对于拉格朗日方程而言降了一阶，是一阶的微分方程，故运动积分有时也称为**第一次积分**。运动积分的存在与否与系统的对称性有密切的关系。一个系统如果有尽可能多的运动积分将对问题的求解带来极大的方便。

可遗坐标与广义动量积分：如拉格朗日函数L不包含某个广义坐标q_β，即$\frac{\partial L}{\partial q_\beta}=0$，这种广义坐标叫做**可遗坐标**（也称为循环坐标）。于是拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}-\frac{\partial L}{\partial q_\beta}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}=0$$

这就是说，广义动量$p_\beta=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}$是守恒的$\frac{dp_\beta}{dt}=0$。

$$p_\beta=\text{常数}(\text{如}L\text{不含}q_\beta)$$

这叫做**广义动量积分**。q_β表示系统整体平移坐标，则拉格朗日函数对于整体平移不变，广义动量积分就归结为**动量守恒定律**。q_β表示系统整体旋转坐标，拉格朗日函数对于整体旋转不变，广义动量积分就归结为**角动量守恒定律**。

广义能量积分：拉格朗日函数L是时间t，广义坐标q和广义速度$\dot{q}$的函数，L的时间变化率为

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{d\dot{q}_\alpha}{dt}$$

在主动力全是保守力的情况下，利用完整系统的拉格朗日方程以及拉格朗日关系改写$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$得

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{d\dot{q}_\alpha}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)$$

这里$\boldsymbol{\frac{d}{dt}(xy)=x\frac{d}{dt}(y)+y\frac{d}{dt}(x)}$。另外广义动量$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$(如果动量$p=mv$，动能$T=\frac{1}{2}mv^2$，则$pv-L=T+V$)，这样将上式整理得

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L\right)=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

定义**广义能量函数**(如机械能：动能加势能。但并非机械能)

$$H=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)-L$$

则

$$\frac{dH}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

若拉格朗日函数L不是显含时间t，$L=L(q,\dot{q})$，即

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

则有**广义能量积分**(或称为**雅可比积分**)

$$H=\text{常数}$$

弄清楚广义能量函数的意义，显然是很重要的。

势能V是与广义速度无关的，因此H的定义式中的$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$。设变换式$r_i=r_i(q)$不显含时间，即$\frac{\partial r_i}{\partial t}=0$，则

$$\dot{r}_i=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)$$

于是

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i\cdot\dot{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\cdot\sum_{\beta=1}^{s}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right)==\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}\frac{1}{2}m_i\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$$

这是广义速度的二次齐次多项式，根据齐次函数的欧拉定理(见 p_72)

$$\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha=2T$$

由此，广义能量函数

$$H=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)-L=2T-L=2T-(T-V)=T+V$$

此时，广义能量函数H就是机械能。

如果约束是非定常的，则变换式$r_i=r_i(q,t)$难免显含时间，即使约束是稳定的，也可能由于选择了某些广义坐标例如(平移坐标系)，变换式$r_i=r_i(q,t)$显含时间t，在变换式显含时间t的情况下

$$\dot{r}_i=\frac{\partial r_i}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)$$

于是

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{r}_i\cdot\dot{r}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}+\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\cdot\sum_{\beta=1}^{s}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}+\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\{\frac{1}{2}m_i\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right)^2+\sum_{\beta=1}^{s}m_i\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right)+\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}\frac{1}{2}m_i\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta\}$$

这包含三个部分，它们分别是广义速度的零次，一次和二次的齐次多项式。今分别记作T_0,T_1和T_2。根据齐次函数的欧拉定理，

$$\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha=0T_0+1T_1+2T_2$$

由此广义能量函数

$$H=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)-L=(T_1+2T_2)-(T_0+T_1+T_2-V)=T_2-T_0+V$$

则在变换式显含时间的条件下，广义能量函数H并非机械能，但是具有机械能的量纲，故名

之为**广义能量**。

现在，**总结一下用拉格朗日方程求解完整系统的力学问题的一般程序：**

a. **分析系统所有的约束。如系统确为完整系统，就根据系统的自由度选择相同数目的恰当的广义坐标$\boldsymbol{q}$**
b. **建立各质点的径矢$\boldsymbol{r}$与广义坐标$\boldsymbol{q_\alpha}$的变换方程：$\boldsymbol{r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t}$。为方便期间，尽可能使变换方程不显含时间$\boldsymbol{t}$。如果能直接完成下一步(c)，则此步骤可以省略。**
c. **用广义坐标和广义速度表示动能$\boldsymbol{T}$。用广义坐标表示广义力$\boldsymbol{Q_\alpha}$；对于保守系统，则写出广义坐标表示的施恩那个$\boldsymbol{V}$。最后写出系统的拉格朗日函数$\boldsymbol{L = T - L}$。注意：这里的$\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{V}$一般是指惯性系中的动能和势能。若使用非惯性系，则应加上与惯性力相应的势能，它可能不是只依赖于广义坐标$\boldsymbol{q}$和时间$\boldsymbol{t}$的普通势，而是和广义速度有关的广义势。**
d. **列出拉格朗日方程：$\boldsymbol{Q_\alpha = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}}$。对保守系统，$\boldsymbol{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0}$。$\boldsymbol{s}$个$\boldsymbol{q_\alpha}$的二阶常微分方程组就是完整系统的动力学方程。**
e. **解微分方程组，得$\boldsymbol{q_\alpha = q_\alpha(C_1, C_2, \dots, C_{2s}; t)}$**
f. **利用初始条件定积分常数$\boldsymbol{C_1, C_2, \dots, C_{2s}}$，最后求得$\boldsymbol{q_\alpha = q_\alpha(t)}$**
g. **对结论进行讨论。**

小振动

保守力学系统在它的稳定平衡位形附近作小幅的振动，这类问题虽然可以用牛顿定律来解，但这类问题的一般性讨论却以拉格朗日动力学方法更为适宜。

对于N自由度系统，如果能找到N个独立的变量，它们可以确定系统的位置，并且当系统振动时，这些变量各自独立的作**谐振动**，这些变量叫做系统的**简正坐标**。各个简正坐标的谐振动频率叫做**简正频率**。某一简正坐标作谐振动，其他简正坐标保持为零，就叫做振动系统的一个**模式**或简称为**模**。

刚体力学

刚体即形状不变的物体，可以看作一种特殊的质点系，其中各质点间的距离保持不变。这里主要介绍刚体顶点运动。

欧拉动力学方程：自由刚体可以有六个独立的虚位移。这里不妨取质心的虚位移δr_0和刚体绕质心转动的角虚位移$\delta\varphi\boldsymbol{n}$共计六个分量。按照刚体第$i$个质点的速度公式$\dot{r}_i = v_i + \omega \times (r_i - r_0)$，虚位移表示为

$$\delta r_i = \delta r_0 + \boldsymbol{n}\delta\varphi \times (r_i - r_0)$$

根据达朗贝尔原理

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = 0$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\big(\delta r_0+\boldsymbol{n}\delta\varphi\times(r_i-r_0)\big)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}F_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\right)\cdot\delta r_0+\left[\sum_{i=1}^{n}(r_i-r_0)\times F_i-\sum_{i=1}^{n}(r_i-r_0)\times m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\right]\cdot\delta\varphi\boldsymbol{n}$$

$$=(\boldsymbol{F}-m\ddot{\boldsymbol{r}}_0)\cdot\delta r_0+\big(\boldsymbol{M}-\dot{L}\big)\cdot\delta\varphi\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$$

其中

$$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}F_i\,,\;\; m=\sum_{i=1}^{n}m_i\,,\;\; \boldsymbol{M}=\sum_{i=1}^{n}(r_i-r_0)\times F_i\,,\;\; L=\sum_{i=1}^{n}(r_i-r_0)\times m_i\dot{r}_i$$

即$\boldsymbol{F}$表示外力系的主矢，$\boldsymbol{M}$表示以质心O为中心的外力系的主矩，L表示刚体对质心O的角动量。因为δr_0和$\delta\varphi\boldsymbol{n}$是任意的，所以

$$\boldsymbol{F}=m\ddot{\boldsymbol{r}}_0,\;\;\boldsymbol{M}=\dot{L}$$

这样，这样又兜回到矢量力学的质心运动定理和角动量定理。这完全是由于运用很一般的虚位移δr_0和$\boldsymbol{n}\delta\varphi$。所以只能获得很泛泛的运动定律，即质心运动定理和角动量定理。如果采用具体的广义坐标例如欧拉角来表达虚位移，就会获得较具体的运动方程。

特别讨论定点运动，它有三个自由度。此时，取固定点为基点，即$r_0=0$，则刚体绕改定点的虚角位移为$\boldsymbol{n}\delta\varphi$，则质点$i$的虚位移为

$$\delta r_i=\boldsymbol{n}\delta\varphi\times r_i$$

由达朗贝尔原理，类似上面的推到过程，可得

$$\dot{L}=\boldsymbol{M}$$

这里L是相对于定点的角动量$I\omega$，$\boldsymbol{M}$是相对于定点的外力系的主矩。用分量形式写出得到

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\big(+I_{11}\omega_x-I_{12}\omega_y-I_{13}\omega_z\big)=\boldsymbol{M}_x\\ \dfrac{d}{dt}\big(-I_{21}\omega_x+I_{22}\omega_y-I_{23}\omega_z\big)=\boldsymbol{M}_y\\ \dfrac{d}{dt}\big(-I_{31}\omega_x-I_{32}\omega_y+I_{33}\omega_z\big)=\boldsymbol{M}_z\end{cases}$$

这里提供的三个方程，正好足以决定三个转动自由度的运动。

如果选用的坐标系O_{xyz}是不转动的(坐标轴在空间中的指向不变)，则随着刚体的转动，刚体里每一质点坐标不停的变化，从而惯性张量不停地变化。这样一来，方程组左边不仅要考虑角速度的变化，还要考虑惯性张量的变化，这给计算带来相当大的困难。实际上惯性张量的求导是可推导出来的。

针对这个问题，通常采用一种变通办法：所研究的L虽然是“绝对”角动量，却采用本地坐标系（即随刚体一同转动的坐标系）$O_{x_1'x_2'x_3'}$以表出L的分量。或者说，将角动量矢量L对本地坐标系进行投影分解。相对于本地坐标系，刚体里的质点坐标不变，从而惯性张量是常数。则有

$$\begin{cases}\boldsymbol{L}_1=+I_{11}\omega_1-I_{12}\omega_2-I_{13}\omega_3\\ \boldsymbol{L}_2=-I_{21}\omega_1+I_{22}\omega_2-I_{23}\omega_3\\ \boldsymbol{L}_3=-I_{31}\omega_1-I_{32}\omega_2+I_{33}\omega_3\end{cases}$$

将上式对时间t求导，就得到L在这个坐标系中的时间变化率，或者说“绝对”角动量L的相对变化率$\dot{L}$，

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{L}}_1 = +I_{11}\dot{\omega}_1 - I_{12}\dot{\omega}_2 - I_{13}\dot{\omega}_3 \\ \dot{\boldsymbol{L}}_2 = -I_{21}\dot{\omega}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 - I_{23}\dot{\omega}_3 \\ \dot{\boldsymbol{L}}_3 = -I_{31}\dot{\omega}_1 - I_{32}\dot{\omega}_2 + I_{33}\dot{\omega}_3\end{cases}$$

这里暂且把字母上方的点号和$\frac{d}{dt}$作为两种不同的记号使用。点号表示相对变化率，$\frac{d}{dt}$表示"绝对"变化率。角动量定理里的$\frac{d}{dt}$是"绝对"变化率，上式$\dot{L}$表示相对变化率需加上牵连变化率才等于"绝对"变化率，L的牵连变化率为$\omega \times L$，因此

$$\frac{d}{dt}L = \dot{L} + \omega \times L$$

角动量定理就可改写为$\dot{L} + \omega \times L = \boldsymbol{M}$

则

$$\dot{L} = \boldsymbol{M} + L \times \omega$$

这叫做刚体定点运动的**欧拉动力学方程**。欧拉动力学方程是角动量定理的变通表达式。从物理函数来说，它研究的是绝对角动量L和绝对角速度ω，换句话说，用的是不转动的参考系；但在数学上用用分量表示L和ω时，却用本地坐标系。把欧拉动力学方程用分量写出

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{L}}_1 = +I_{11}\dot{\omega}_1 - I_{12}\dot{\omega}_2 - I_{13}\dot{\omega}_3 = M_1 + I_{13}\omega_1\omega_2 - I_{12}\omega_1\omega_3 + I_{23}({\omega_2}^2 - {\omega_3}^2) + (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 \\ \dot{\boldsymbol{L}}_2 = -I_{21}\dot{\omega}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 - I_{23}\dot{\omega}_3 = M_2 + I_{12}\omega_2\omega_3 - I_{23}\omega_2\omega_1 + I_{13}({\omega_3}^2 - {\omega_1}^2) + (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 \\ \dot{\boldsymbol{L}}_3 = -I_{31}\dot{\omega}_1 - I_{32}\dot{\omega}_2 + I_{33}\dot{\omega}_3 = M_3 + I_{23}\omega_3\omega_1 - I_{13}\omega_3\omega_2 + I_{12}({\omega_1}^2 - {\omega_2}^2) + (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2\end{cases}$$

约定取主轴坐标系，使所有惯量积为零，上面方程简化为

$$\begin{cases}I_{11}\dot{\omega}_1 = M_1 + (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 \\ I_{22}\dot{\omega}_2 = M_2 + (I_{33} - I_{11})\omega_1\omega_3 \\ I_{33}\dot{\omega}_3 = M_3 + (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2\end{cases}$$

通常**刚体定点运动的欧拉动力学方程**为上式。

定点运动的动能定理：欧拉动力学方程可说是刚体定点运动的运动过程。有些时候，运动刚体的动能定理会带来计算上的便利。在刚体问题中内力功的代数和等于零，因为动能定理可表示为

$$dT = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot d\boldsymbol{r}_i$$

其中F_i是作用于刚体中第i个质点的外力。对于刚体的定点运动，有

$$d\boldsymbol{r}_i = \omega \times \boldsymbol{r}_i dt$$

则动能定理可改写为

$$dT = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot d\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot (\omega \times \boldsymbol{r}_i)dt = \omega \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times F_i)\right)dt = \omega \cdot Mdt$$

这就是刚体定点运动的**动能定理**。从推导过程可以看出

$$\omega \cdot M = \omega \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times F_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{v}_i \cdot F_i)$$

或者

$$\omega \cdot Mdt = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot d\boldsymbol{r}_i$$

这是外力所做功，有时干脆叫做“外力矩所做的功”，可表述为：定点运动刚体动能的该变量等于外力矩所做的功。

动平衡：若角动量与角速度方向平行，称为动平衡。一般为刚体绕惯性张量的主轴转动。

无外力矩的定点运动（欧拉-潘索）：从角动量定理来看，在没有外力矩的条件下，角动量L守恒，除非是绕惯量主轴转动，否则角动量L和角速度ω的方向并不一致，所以L保持守恒，并不一定意味着ω也守恒，亦即并不意味着转动轴不变。

对称刚体：惯性张量存在主轴转动惯量相等时的情形。

非对称刚体：待续。

动平衡的稳定性：总结来说，主转动惯量最大或最小的惯量主轴是稳定转动轴。惯量主轴量即非最大也非最小的惯量主轴则是不稳定转动轴。

对称重刚体的定点运动（拉格朗日-泊松）：**陀螺**分析。

哈密顿力学

拉格朗日动力学方程用广义坐标和广义速度描写力学系统的运动。哈密顿动力学则用广义坐标和广义动量描写力学系统的运动。从量纲上看，这样做是有利的，因为

$$[q_\alpha \dot{q}_\alpha] = [q_\alpha]\left[\frac{q_\alpha}{t}\right] = [{q_\alpha}^2/t]$$

$$[p_\alpha q_\alpha] = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} q_\alpha\right] = \left[\frac{L}{q_\alpha/t} q_\alpha\right] = [Lt]$$

前者视q_α的量纲而定，后者则与q_α的量纲无关。总是“能量*时间”的量纲，该量纲将被定义为“作用量”的量纲，而量子论中的量子化条件正式把作用量加以量子化。可见哈密顿动力学可作为从经典力学到量子力学的“跳板”。

哈密顿动力学为用几何方法描述系统的运行并给出运动的几何图像奠定了基础，它也是现代物理理论特别是量力理论的重要基础。

哈密顿正则方程：后面将限于研究这样一种力学系统，它只有完整约束，并且主动力都是具有势能或广义势能的，总之它的动力学方程就是拉格朗日方程。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\dots,s)$$

该动力学方程关于q_α的s个二阶常微分方程，它们又可改写为(**广义力**)

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \ (\alpha = 1,2,\dots,s)$$

其中p_α按定义为(**广义动量**)

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (\alpha = 1,2,\dots,s)$$

这样。力学系统的动力学方程又可以归结为2s个一阶常微分方程。

现在尝试改用广义坐标q_α和广义动量p_α以代替q_α和$\dot{q}_\alpha$，这意思是说，把拉格朗日函数$\mathrm{L}(q,\dot{q},\mathrm{t})$看做复合函数

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}(q,\dot{q}(q,p),\mathrm{t})$$

为了得到直接用q_α和p_α表示的拉格朗日函数$\bar{\mathrm{L}}(q,\mathrm{p},\mathrm{t})$，应消去$\dot{q}_\alpha$。为此，从$p_\alpha$的定义式“解出”广义速度，

$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(q,p,t) \ (\alpha = 1,2,\dots,s)$$

用上式带入就得到直接用q_α和p_α表示的拉格朗日函数。

$$\bar{\mathrm{L}}(q,\mathrm{p},\mathrm{t})=\mathrm{L}(q,\dot{q}(q,p,t),\mathrm{t})$$

按照多元复合函数的偏导数计算规则，上式得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{\mathrm{L}}}{\partial q_\alpha}=\dfrac{\partial\mathrm{L}}{\partial q_\alpha}+\sum\limits_{\beta=1}^{s}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_\beta}\left(\dfrac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha}\right)\\ \dfrac{\partial\bar{\mathrm{L}}}{\partial p_\alpha}=\sum\limits_{\beta=1}^{s}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_\beta}\left(\dfrac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha}\right)\end{cases}$$

注意：尽管$\bar{\mathrm{L}}=L$，但是$\frac{\partial\bar{\mathrm{L}}}{\partial q_\alpha}\neq\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial q_\alpha}$。

将$\dot{p}_\alpha$和p_α带入上式得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{\mathrm{L}}}{\partial q_\alpha}=\dot{p}_\alpha+\sum\limits_{\beta=1}^{s}p_\beta\left(\dfrac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha}\right)\\ \dfrac{\partial\bar{\mathrm{L}}}{\partial p_\alpha}=\sum\limits_{\beta=1}^{s}p_\beta\left(\dfrac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha}\right)\end{cases}$$

上式描述了保守力或广义势的力作用下并且只有完整约束的力学系统的动力学方程，或者说，反映了这种系统一般的运动规律。可是在外观上，它含有$\frac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha}$和$\frac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha}$，这两种偏导数取决于具体的关系式，这归根结底又取决于广义坐标q_α的具体选择。作为一般规律，外观上却取决于具体的选择，这无疑是不恰当的，因此，我们应当设法消除这个内容与外观的不相称。

仔细观察上式，右边的累加分别是

$$\sum_{\beta=1}^{s}p_\beta\left(\frac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial q_\alpha}\right)=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(p_\beta\dot{q}_\beta\right)=\frac{\partial}{\partial q_\alpha}(\sum_{\beta=1}^{s}\left(p_\beta\dot{q}_\beta\right))$$

$$\sum_{\beta=1}^{s}p_\beta\left(\frac{\partial\dot{q}_\beta}{\partial p_\alpha}\right)=\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(p_\beta\dot{q}_\beta\right)-\dot{q}_\alpha=\frac{\partial}{\partial p_\alpha}(\sum_{\beta=1}^{s}\left(p_\beta\dot{q}_\beta\right))-\dot{q}_\alpha$$

其中p_β是不关于q_α的函数，则偏导为 0；当$\alpha=\beta$时，p_β对p_α偏导为 1。这样，总式子可写成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum\limits_{\beta=1}^{s}p_\beta\dot{q}_\beta-\bar{\mathrm{L}}\right)=-\dot{p}_\alpha\\ \dfrac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\sum\limits_{\beta=1}^{s}p_\beta\dot{q}_\beta-\bar{\mathrm{L}}\right)=\dot{q}_\alpha\end{cases}$$

式子$\sum_{\beta=1}^{s}p_\beta\dot{q}_\beta-\bar{\mathrm{L}}$之前定义为广义能量函数H，但现在它是广义坐标和广义动量的函数，成为**哈密顿函数$\mathbf{H(p,q,t)}$**，因此式子成为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}=-\dot{p}_\alpha\\ \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha\end{cases}\quad(\alpha=1,2,\ldots,s)$$

这就是说，用广义坐标和广义速度描写运动时，拉格朗日函数L起着支配作用，运动的规律表为拉格朗日方程；但用广义坐标和广义动量描写运动时，拉格朗日函数不再起支配作用，

哈密顿函数H代替它起支配作用。

运动规律如上式叫做**哈密顿正则方程**，“正则”是说形式简单而对称。相应地，也将满足哈密顿正则方程的变量q_α、p_α成为**正则变量**。哈密顿正则方程是描写实际运动的正则变量的2s个一阶常微分方程；但为了写出这些方程，需要先计算偏导数$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$和$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$，这就是说，哈密顿函数$\mathbf{H(p,q,t)}$中的$q_\alpha, p_\alpha$描写的是瞬时“冻结”的约束条件所允许的一切可能运动。

勒让德变换与哈密顿正则方程：偏导数的计算，如果不留心，比较容易发生错误。微分式则比较不容易发生错误。这里改用微分式子重新推导哈密顿正则方程。在数学上，拉格朗日函数$\mathrm{L}(q,\dot{q},\mathrm{t})$的微分为

$$\mathrm{d}L(q,\dot{q},\mathrm{t})=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}dq_\alpha\right)+=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}d\dot{q}_\alpha\right)+\frac{\partial L}{\partial t}$$

将$\dot{p}_\alpha$和p_α带入上式得

$$\mathrm{d}L(q,\dot{q},\mathrm{t})=\sum_{\alpha=1}^{s}(\dot{p}_\alpha dq_\alpha)+=\sum_{\alpha=1}^{s}(p_\alpha d\dot{q}_\alpha)+\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

这可说是动力学方程的另一种表示。虽然$\bar{\mathrm{L}}$与L的宗量不同，他们的微分形式是一样的，即

$$\mathrm{d}\bar{\mathrm{L}}=\mathrm{d}L=\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{p}_\alpha dq_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha d\dot{q}_\alpha+\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

既然用广义坐标和广义动量描写运动，而不是用广义速度，那就应当设法消除上式中的$d\dot{q}_\alpha$而引入$d\dot{p}_\alpha$。为此，考察微分式

$$d\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha d\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha dp_\alpha$$

则哈密顿函数的微分形式为

$$dH=d\left(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{q}_\alpha dp_\alpha-\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{p}_\alpha dq_\alpha-\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

又

$$dH=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}dp_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}dq_\alpha+\frac{\partial H}{\partial t}dt$$

则可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}=-\dot{p}_\alpha\\ \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}=\dot{q}_\alpha\end{cases}\quad(\alpha=1,2,\dots,s)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

这就简便地导出了哈密顿正则方程。另外，还得到$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$，指出哈密顿函数H是否显含时间完全取决于拉格朗日函数L是否显含时间而定。利用微分式子$d(\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha)$把变量从$q,\dot{q},\mathrm{t}$改为$q,\mathrm{p},\mathrm{t}$，同时把起支配作用的函数L变为函数H,这种方法叫做**勒让德变换**。勒让德变换是

对称的，即也可以从q,p,t和H变换为$q,\dot{q},\mathrm{t}$和L。勒让德变换是很有用的，特别是热力学中频繁地加以应用以导出各种热力学关系，并由一个描述热力学系统性质的特征函数得到其他特征函数。

运动积分：拉格朗日动力学中有广义动量积分和广义能量积分等运动积分。哈密顿力学同样也有运动积分。不含于L和H的的广义坐标q_α叫做可遗坐标。哈密顿动力学更适宜处理可遗坐标，拉格朗日函数虽然不含有可遗坐标，但可以含有相应的广义速度这个变量，问题仍然是s个自由度的问题。哈密顿函数H不仅不含有可遗坐标，而且所含的广义动量是常数。因此这一个自由度可以说已解出，只要解算其他自由度就行了。可见在哈密顿动力学中，可遗坐标真正是可忽略的。

相空间：哈密顿动力学用广义坐标和广义动量来描述力学系统的运动。拿一个自由度的谐振子来说，它的运动用一个广义坐标x和广义动量p来描述，它在某一时刻的状况用该时刻它的x和p值表示，或者说，用xp平面上的一个点表示。随着时间的推移，谐振子的运动状况不断发生变化，它在xp平面上的代表点也随着时间而变，从而描出一条曲线。这个xp平面叫做**相平面**，代表点在相平面上描出的曲线叫做**相轨道**。

多自由度的情况也可类似处理。对于s个自由度的力学系统，我们把广义坐标和广义动量当做直角坐标而构成2s维的空间叫做**相空间**。

泊松括号：力学量$\varphi(\mathrm{p},\mathrm{q},\mathrm{t})$的时间变化率

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{t}}+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right)$$

将哈密顿正则方程代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{t}}+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial q_\alpha}\right)$$

可以定义力学系统的两个力学量$\varphi(\mathrm{p},\mathrm{q},\mathrm{t})$和$\psi(\mathrm{p},\mathrm{q},\mathrm{t})$的**泊松括号**$[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}]$如下：

$$[\varphi,\psi]=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}\right)$$

则力学量φ的时间变化率可用泊松括号表为：

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}=\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{t}}+[\varphi,\mathrm{H}]$$

力学变分原理

牛顿动力学方程、拉格朗日动力学方程、哈密顿动力学方程都是微分方程，本章用另一种形式即变分原理的形式来研究力学系统的动力学。

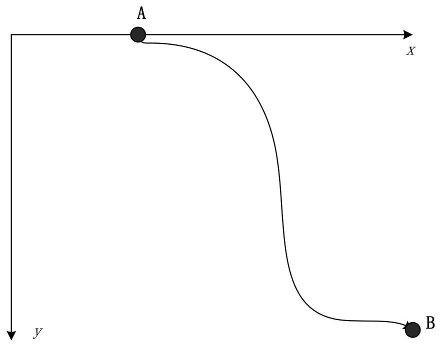
变分原理是一种极值原理：力学系统的实际运动（静态平衡作为一种特殊的运动状态也包括在内），比起“邻近的各种可能的”运动，总是使某种泛函取极值。变分原理的形式十分紧凑，它不牵涉广义坐标的具体选择，因而在广义坐标变换下，变分原理乃至其推论是不变的。

在力学范围内，变分形式的力学原理当然和其他形式的动力学是等价的。但是，在更广的范围里，这些原本彼此等价的形式却可能不再等价：有的仍然成立，有的需要改造，有的则完全不适合。能够适应更广泛的形式当然被认为具有更大的概括性。变分原理和其他形式

的动力学相比就具有更大的概括性。

此外，变分问题的求解比起微分方程的求解，可以适应更广的函数类。由于计算机的广泛应用，求解变分问题的直接法有了很大发展，所以变分原理除了具有理论意义外，还提供了求解实际运动的一条有效路径。

本章论述的变分原理可说是积分形式的变分原理。其实，虚功原理与达朗贝尔原理中的δr_i与δq_α也都是一种变分，所以虚功原理与达朗贝尔原理也说是变分原理，只不过是微分形式的变分原理。



变分发初步：质点沿着光化轨道$y = y(x)$从A自由下滑到B，如上图，所需时间

$$J = \int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

式中$y' = \frac{dy}{dx}$。如选取另一轨道，从A自由下滑到B所需时间J即随之而异。这样，时间J取决于整个轨道的形状。注意：这里J不是取决于y的值，而是取决于函数关系$y = y(x)$。

一般地说，一个变量J，如果其值取决于函数关系$y = y(x)$，就叫做函数$y(x)$的**泛函**，记作$J[y(x)]$。

试考察所谓捷线问题，即选取适当的轨道$y = y(x)$，使质点从A自由下滑到B所需时间最短。这就是泛函

$$J[y(x)] = \int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

的极值问题。求泛函的极值问题就叫做**变分问题**。函数，如果它定义在闭区间上且连续，其极值问题总是有解的。而泛函的极值问题即变分问题的解却未必存在。不过，在力学和物理学问题中，常常从问题的提法就可断定是否有解。

变分问题所必须满足的必要条件-**欧拉方程**。欧拉方程是微分方程，这样，我们就把变分问题转化为求解微分方程。先研究较简单的情况，泛函J只依赖于单个自变量x，单个函数$y(x)$及其倒数$y'(x)$，即

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

其中函数F对于x, y, y'都是二阶连续可导的，y的二阶倒数y''也是连续的。设想函数关系$y(x)$稍有变动，从y变为$y + \delta y$，这里δy称为函数$y(x)$的**变分**。泛函的值也随之而变，其增量

$$J[y+\delta y] - J[y] = \int_a^b (F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x,y,y'))dx \approx \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y')dx$$

上式右边叫泛函的变分，记作$\delta J[y]$

$$\delta J[y]=\int_a^b(\frac{\partial F}{\partial \mathrm{y}}\delta \mathrm{y}+\frac{\partial F}{\partial \mathrm{y}'}\delta \mathrm{y}')dx$$

设变分问题有解

$$y=y(x)$$

设想y从解稍稍变动到$y+\delta \mathrm{y}$。现在，我们可把变分$\delta \mathrm{y(x)}$记作$\epsilon\eta(x)$，y'响应变为$y'+\epsilon\eta'$，则

$$\phi(\epsilon)=J[y+\epsilon\eta]=\int_a^b F(x,y+\epsilon\eta,y'+\epsilon\eta')dx$$

其中$\eta(\mathrm{x})$在两端点取值为$\boldsymbol{\eta(a)=\eta(b)=0}$，$\epsilon$是一个小参数，且$\epsilon=0$时$J[y+\epsilon\eta]=J[y]$正好对应于解$y=y(x)$。泛函$J[y+\epsilon\eta]$成为参数$\epsilon$的函数$\phi(\epsilon)$。

这里，泛函$J[y+\epsilon\eta]$的极值即为$\phi(\epsilon)$的极值，又$J[y+\epsilon\eta]$在$\epsilon=0$时取得极值$y=y(x)$，则$\phi(\epsilon)$在$\epsilon=0$时取得极值，则可得

$$\frac{d\phi(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}=0$$

进一步，积分的微分等于微分的积分，得

$$\frac{d\phi(\epsilon)}{d\epsilon}=\frac{d}{d\epsilon}\left(\int_a^b F(x,y+\epsilon\eta,y'+\epsilon\eta')dx\right)=\int_a^b\frac{d}{d\epsilon}\big(F(x,y+\epsilon\eta,y'+\epsilon\eta')\big)dx$$

$$=\int_a^b(\frac{\partial F}{\partial \mathrm{y}}\frac{d(y+\epsilon\eta)}{d\epsilon}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d(y'+\epsilon\eta')}{d\epsilon})dx=\int_a^b(\frac{\partial F}{\partial \mathrm{y}}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta')dx$$

令$\epsilon=0$，

$$\frac{d\phi(\epsilon)}{d\epsilon}=\int_a^b(\frac{\partial F}{\partial \mathrm{y}}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta')dx=0$$

进一步，分部积分得

$$\int_a^b(\frac{\partial F}{\partial \mathrm{y}}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta')dx=\int_a^b F_y\eta dx+\int_a^b F_{y'}\eta' dx=\int_a^b F_y\eta dx+\int_a^b F_{y'}d\eta$$

$$=\int_a^b F_y\eta dx+F_{y'}(\eta(x)|_a^b)-\int_a^b \eta d\big(F_{y'}\big)=\int_a^b F_y\eta dx-\int_a^b\eta\left(\frac{F'_{y'}}{dx}\right)dx$$

$$=\int_a^b\eta\left(F_y-\left(\frac{F'_{y'}}{dx}\right)\right)dx+F_{y'}(\eta(x)|_a^b)=0$$

$\boldsymbol{\eta(a)=\eta(b)=0}$可得$F_{y'}(\eta(x)|_a^b)=0$，最后得

$$\int_a^b\eta(x)\left(F_y-\left(\frac{F'_{y'}}{dx}\right)\right)dx=0$$

由于对于任意的$\eta(x)$且满足$\boldsymbol{\eta(a)=\eta(b)=0}$上式均成立，则$F_y-\left(\frac{F'_{y'}}{dx}\right)=0$，即

$$F_y-\frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big)=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

这就是**欧拉方程**。注意到

$$\frac{dF(x,y,y')}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{dF}{dx}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}-\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-y'[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})]$$

将欧拉方程带入可得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{d}{dx}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

这称为**第二种形式的欧拉方程**。当F不显含x时，即$\frac{\partial F}{\partial x}=0$，则上式给出

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=常数$$

泛函导数：设函数$y(x)$的变分δy只在$x=x_0$附近不为零，我们把曲线$y(x)$与曲线$y(x)+\delta y(x)$之间所夹面积记作δσ。我们把δσ → 0时泛函$J(x,y,y')$的变分δJ与δσ之比的极限，定义为泛函J在点$x=x_0$的**泛函导数**，记作$\left(\frac{\delta J}{\delta\sigma}\right)|_{x_0}$或$\left(\frac{\eth J}{\eth\sigma}\right)|_{x_0}$

$$\left(\frac{\delta J}{\delta\sigma}\right)|_{x_0}=\left(\frac{\eth J}{\eth\sigma}\right)|_{x_0}=\lim_{\delta\sigma\to 0}\frac{\delta J}{\delta\sigma}$$

不难算出，

$$\frac{\delta J}{\delta\sigma}|_{x_0}=\frac{\eth J}{\eth\sigma}|_{x_0}=\lim_{\delta\sigma\to 0}\{\frac{1}{\delta\sigma}\int_c^d[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)]\delta y dx\}=\lim_{\delta\sigma\to 0}\{[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)]|_{x_0}\frac{1}{\delta\sigma}\int_c^d\delta y dx\}$$
$$=[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)]|_{x_0}$$

这样，欧拉方程也可以说泛函J在任一点的泛函导数等于零。

较复杂情况下的欧拉方程举例如下：

（1） **泛函J取决于单个自变量x，s个函数$y_\alpha(x)$及其导数$y'_\alpha(x)$**，这时变分问题

$$\delta\int_a^b F(x,y_1,y_2,\ldots,y_s,y'_1,y'_2,\ldots,y'_s)dx=0$$

在固定边界条件$\delta y_\alpha|_{x=a}=\delta y_\alpha|_{x=b}=0$下可化为

$$\int_a^b\sum_{\alpha=1}^{s}[\frac{\partial F}{\partial y_\alpha}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha}\right)]\delta y_\alpha\,dx=0$$

因为各个δy_α是任意的，所以微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial y_\alpha}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha}\right)=0\ (\alpha=1,2,\ldots,s)$$

（2） **泛函J取决于单个自变量x，s个函数$y(x)$及其高阶导数y',y'',y'''**.这时变分问题

$$\delta\int_a^b F(x,y,y',y'',y''')dx=0$$

的欧拉方程是

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)-\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right)=0$$

(3) **泛函J取决于两个自变量x和y，单个二元函数$u(x,y)$**.这时变分问题

$$\delta\int_a^b\int_c^d F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})dx\,dy=0$$

的欧拉方程是

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial(\frac{\partial u}{\partial x})}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial(\frac{\partial u}{\partial y})}\right)=0$$

约束条件下的变分问题：设泛函J取决于单个自变量x，s个函数$y_\alpha(x)$及其导数$y'_\alpha(x)$，这里研究变分问题

$$\delta \mathrm{J} = \delta \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_s, y'_1, y'_2, \dots, y'_s) dx = 0$$

但是存在者$\mathrm{k}(\mathrm{k} < \mathrm{s})$个约束条件。

$$\int_a^b G_j(x, y_1, y_2, \dots, y_s, y'_1, y'_2, \dots, y'_s) dx = c_j \ (j = 1,2, \dots, k)$$

其中c_j是给定的常数。在这种情况下，变分问题固然可以化为

$$\int_a^b \sum_{\alpha=1}^{s} [\frac{\partial F}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha}\right)] \delta y_\alpha \, dx = 0$$

然而其中s个函数δy_α并不独立，所以不能由此得出欧拉方程。运用拉格朗日乘子法，约束条件式可化为

$$\int_a^b \sum_{\alpha=1}^{s} [\frac{\partial G_j}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G_j}{\partial y'_\alpha}\right)] \delta y_\alpha \, dx = 0 \ (j = 1,2, \dots, k)$$

按照拉格朗日乘子法，把上式的k个方程分别乘以待定的常数$\lambda_j \ (j = 1,2, \dots, k)$并与目标变分问题累加起来，

$$\int_a^b \sum_{\alpha=1}^{s} \{\left[\frac{\partial F}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha}\right)\right] + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_j [\frac{\partial G_j}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G_j}{\partial y'_\alpha}\right)]\} \delta y_\alpha \, dx = 0$$

于是得

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\left(F + \lambda_j \frac{\partial G_j}{\partial y_\alpha}\right) - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'_\alpha}\left[F + \lambda_j G_j\right] = 0 \ (\alpha = 1,2, \dots, s)$$

上式的s个方程和k个约束条件式合起来正好可已决定s个函数$y_\alpha(x)$和k个乘子λ_j。

位形空间的哈密顿原理：或许已经注意到拉格朗日方程的形式与欧拉方程完全一样，这就是说，拉格朗日方程是下列变分问题

$$\delta \int_{t1}^{t2} L(x, q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s) dt = 0$$

的欧拉方程。

这样，力学系统的动力学就归结为一个变分原理：力学系统从时刻$t1$到时刻$t2$的一切可能的运动之中，使**哈密顿作用量**

$$S = \int_{t1}^{t2} L(t, q, \dot{q}) dt$$

取极值的运动才是实际发生的运动，这叫做**哈密顿原理**。

以s个广义坐标为直角坐标的空间叫做**位形空间**。力学系统在任意时刻的位形可用位形空间的一点来表明。随着事件的推移，力学系统的位形发生演变，位形空间中的代表点描出相应曲线。在一切可能的曲线中，是作用量取极值的那一条曲线就代表真实的运动。

在位形空间中描述力学系统的运动，这时时间t是外加的参数。我们还可以增添时间轴，把s维的位形空间改为$s + 1$维的推广位形世界。在这世界中，力学系统的演变历史完全由一根曲线所代表，这曲线叫做力学系统的“世界线”。哈密顿变分原理形式十分紧凑，在坐标变换下显然不变，容易移植于无限个自由度的力学系统甚至非力学系统。不妨认为，哈密顿变分原理与牛顿运动定律相比乃是更为基本，更为普遍的原理。