运动方程

经典力学中，我们已有针对所有刚体运动的牛顿欧拉方程。对于第i个刚体，m_i表示刚体质量，I_i表示刚体的惯性张量，$\vec{r}_i$表示位矢，$\vec{v}_i$表示质心线速度，四元数q_i表示刚体的朝向和$\vec{\omega}_i$表示角速度，$\vec{f}_i^{ext}$表示合外力，$\vec{\tau}_i^{ext}$表示合外力矩。对于质心为坐标原点的牛顿欧拉方程如下

$$\begin{bmatrix}\vec{f}_i\\ \vec{\tau}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_i\boldsymbol{E} & 0\\ 0 & I_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\vec{v}}_i\\ \dot{\vec{\omega}}_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \vec{\omega}_i\times I_i\vec{\omega}_i\end{bmatrix}$$

，换个方式看为

$$\dot{r}_i=\vec{v}_i$$

$$\dot{q}_i=\frac{1}{2}\vec{\omega}_i q_i$$

$$\dot{\vec{v}}_i=m_i{}^{-1}\sum_{j_k=i}\vec{f}_k-m_i{}^{-1}\sum_{i_k=i}\vec{f}_k+m_i{}^{-1}\vec{f}_i^{ext}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_i=I_i{}^{-1}\sum_{j_k=i}\vec{r}_{kj}\times\vec{f}_k-I_i{}^{-1}\sum_{i_k=i}\vec{r}_{ki}\times\vec{f}_k-I_i{}^{-1}\vec{\omega}_i\times I_i\vec{\omega}_i+I_i{}^{-1}\vec{\tau}_i^{ext}$$

其中$\vec{f}_k$表示第k个碰撞点的碰撞力，暂时先忽略关节约束和动力约束。为了描述方便，将介绍一个碰撞接触表。假设总共存在K个碰撞点并且每一个碰撞点都存在一个唯一值k。对于每一个碰撞点，可以获得两接触物体的索引值i_k和j_k，为了方便令$i_k<j_k$。另外，碰撞点还存在一个碰撞法线n_k和碰撞点p_k，均为世界坐标系下的值。为了方便，令碰撞法线方向为i_k物体指向j_k物体。注意：永远都不会存在$i_k=j_k$。对于碰撞点，可以计算出碰撞点p_k与索引为i物体质心$\vec{r}_i$的向量

$$\vec{r}_{ki}=p_k-\vec{r}_i$$

牛顿欧拉方程被重写为

$$\dot{\vec{s}}=\boldsymbol{S}\vec{u}$$

$$\dot{\vec{u}}=\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{CN}\vec{f}+\vec{f}_{ext})$$

接下来分析矩阵和向量的元素构成。$\vec{s}\in R^{7n\times1}$由n个物体的质心位矢和四元数朝向构成，即

$$\vec{s}=[\vec{r}_1,q_1,\vec{r}_2,q_2,\dots,\vec{r}_n\ q_n]^T$$

以及$\vec{u}\in R^{6n\times1}$由n个物体的线速度和角速度构成

$$\vec{u}=[\vec{v}_1,\vec{\omega}_1,\vec{v}_2,\vec{\omega}_2,\dots,\vec{v}_n,\vec{\omega}_n]^T$$

目前忽略了摩擦力，那么碰撞点接触力可重写为$\vec{f}_k=f_k n_k$，其中f_k表示力的大小，法向方向n_k表示力的方向。那么$\vec{f}\in R^{K\times1}$

$$\vec{f}=[f_1,f_2,\dots,f_K]^T$$

法向矩阵为$\boldsymbol{N}\in R^{3K\times K}$

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}n_1 & & \\ & \ddots & \\ & & n_K\end{bmatrix}$$

所有物体的外力和外力矩构成$\vec{f}_{ext} \in R^{6n\times 1}$

$$\vec{f}_{ext} = [\vec{f_1}^{ext}, \vec{\tau}_1^{ext} - \vec{\omega}_1 \times I_1\vec{\omega}_1, \vec{f_2}^{ext}, \vec{\tau}_2^{ext} - \vec{\omega}_2 \times I_2\vec{\omega}_2, \dots, \vec{f_n}^{ext}, \vec{\tau}_n^{ext} - \vec{\omega}_n \times I_n\vec{\omega}_n]^T$$

给定$q_i = [s_i, x_i, y_i, z_i]^T \in R^{4\times 1}$，构造旋转矩阵$Q_i \in R^{4\times 3}$为

$$Q_i = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -x_i & -y_i & -z_i \\ s_i & z_i & -y_i \\ -z_i & s_i & x_i \\ y_i & -x_i & s_i \end{bmatrix}$$

则$\frac{1}{2}\vec{\omega}_i q_i = Q_i\vec{\omega}_i$，那么旋转矩阵被构造成$\boldsymbol{S} \in R^{7n\times 6n}$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & & \\ & Q_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{1} & \\ & & & & Q_n \end{bmatrix}$$

质量矩阵$\boldsymbol{M} \in R^{6n\times 6n}$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1\mathbf{1} & & & & \\ & I_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_n\mathbf{1} & \\ & & & & I_n \end{bmatrix}$$

另外接触矩阵$\boldsymbol{C} \in R^{6n\times 3K}$

$$\boldsymbol{C_{lk}} = \begin{cases} \mathbf{-1} \quad \boldsymbol{l = 2i_k - 1} \\ \boldsymbol{-r_{ki_k}}^{\times} \quad \boldsymbol{l = 2i_k} \\ \mathbf{1} \quad \boldsymbol{l = 2j_k - 1} \\ \boldsymbol{r_{kj_k}}^{\times} \quad \boldsymbol{l = 2i_k} \\ \mathbf{0}\ \textbf{其他} \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{r}^{\times} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -r_3 & r_2 \\ r_3 & \mathbf{0} & -r_1 \\ r_2 & r_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{C}$每一列对应单个接触点并且每一行对应单个物体。

使用欧拉积分，离散运动方程描述如下

$$\vec{s}^{t+\Delta t} = \vec{s}^{t} + \Delta t\dot{\vec{s}} = \vec{s}^{t} + \Delta t\boldsymbol{S}\vec{u}^{t+\Delta t}$$
$$\vec{u}^{t+\Delta t} = \vec{u}^{t} + \Delta t\dot{\vec{u}} = \vec{u}^{t} + \Delta t\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{CN}\vec{f}^{t+\Delta t} + \vec{f}_{ext})$$

现在引入投影矩阵$\boldsymbol{P_k} \in R^{3K\times 3}$,用于分析第$k$个接触点，被定义为

$$\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{T}} = [\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}]$$

第k个3×3子矩阵为单位矩阵，其余均为零矩阵。那么第k个接触点的相对速度公式为

$$n_k{}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\vec{u} = n_k{}^{\boldsymbol{T}}\left(\vec{v}_{j_k} + \vec{\omega}_{j_k} \times \vec{v}_{kj_k}\right) - n_k{}^{\boldsymbol{T}}\left(\vec{v}_{i_k} + \vec{\omega}_{i_k} \times \vec{v}_{ki_k}\right)$$

乘以投影矩阵可以过滤出第k个碰撞点。如果物体B_{j_k}和B_{i_k}在t时刻的接触点为p_k，那么速度的互补条件需满足

$$n_k{}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\vec{u}^{t+\Delta t} \geq 0, f_k \geq 0$$

互补条件的意思是如果有两个条件，那么一个条件不为 0，另一个条件则必须为 0；反过来也如此。

如果在时刻t潜在碰撞点不再接触，那么需满足下式

$$n_k{}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P_k}{}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\vec{u}^{t+\Delta t} \geq \frac{v_k}{\Delta t}, f_k \geq 0$$

如果使所有的接触点$v_k = 0$，那么所有接触点的互补条件公式为

$$\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\vec{u}^{t+\Delta t} \geq \frac{\vec{v}}{\Delta t}, \vec{f} \geq 0$$

其中$\vec{v} = [v_1, v_2, \dots, v_K]^T \in R^{K\times 1}$。结合$\vec{u}^{t+\Delta t}$可得

$$\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}(\vec{u}^t + \Delta t\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{CN}\vec{f}^{t+\Delta t} + \vec{f}_{ext})) - \frac{\vec{v}}{\Delta t} \geq 0$$

重新整理得

$$\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{CN}\Delta t\vec{f}^{t+\Delta t} + \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}(\vec{u}^t + \Delta t\boldsymbol{M}^{-1}\vec{f}_{ext}) - \frac{\vec{v}}{\Delta t} \geq 0$$

令$A = \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{CN} \in R^{K\times K}$,$\vec{x} = \Delta t\vec{f}^{t+\Delta t} \in R^{K\times 1}$和$\vec{b} = \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}(\vec{u}^t + \Delta t\boldsymbol{M}^{-1}\vec{f}_{ext}) - \frac{\vec{v}}{\Delta t} \in R^{K\times 1}$，则化简的

$$A\vec{x} + \vec{b} \geq 0, \vec{x} \geq 0$$

即得到线性互补问题的形式。A中元素

$$\begin{aligned}A_{lk} = \delta_{i_k j_k} n_l{}^{\boldsymbol{T}}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{m_{i_k}} - \boldsymbol{r_{li_l}}{}^{\times}\boldsymbol{I_{i_k}}{}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{r_{ki_k}}{}^{\times}\right)n_k - \delta_{i_l j_k} n_l{}^{\boldsymbol{T}}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{m_{j_k}} - \boldsymbol{r_{li_l}}{}^{\times}\boldsymbol{I_{j_k}}{}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{r_{kj_k}}{}^{\times}\right)n_k \\ - \delta_{j_l i_k} n_l{}^{\boldsymbol{T}}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{m_{i_k}} - \boldsymbol{r_{lj_l}}{}^{\times}\boldsymbol{I_{i_k}}{}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{r_{ki_k}}{}^{\times}\right)n_k + \delta_{j_l j_k} n_l{}^{\boldsymbol{T}}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{m_{j_k}} - \boldsymbol{r_{lj_l}}{}^{\times}\boldsymbol{I_{j_k}}{}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{r_{kj_k}}{}^{\times}\right)n_k\end{aligned}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases}1 & i = j \\ 0 & i \neq j\end{cases}$$

摩擦力情况

这里将展开上式包含摩擦项。对第k个碰撞点，可以用两个正交向量t_{1_k}和t_{2_k}构造切平面，再加上碰撞点的法向量构造正交坐标空间。第k个碰撞点的摩擦锥区域由η个离散方向向量$\vec{d}_{\mathrm{h}_k}(h = 1,2,..,\eta), \eta = 2i, i \in R, i \geq 2$。其中$d_{\mathrm{h}_k}$公式为

$$\vec{d}_{\mathrm{h}_k} = \cos\left(\frac{2(h-1)\pi}{\eta}\right)t_{1_k} + \sin\left(\frac{2(h-1)\pi}{\eta}\right)t_{2_k}$$

由这些方向组成矩阵$D_k \in R^{3\times\eta}$

$$D_k = [\vec{d}_{1_k}, \vec{d}_{2_k}, \dots, \vec{d}_{\eta_k}]$$

假设每一个摩擦方向d_{h_k}的摩擦力大小为β_{h_k}，则构建摩擦力大小向量$\beta_k \in R^{\eta\times 1}$,

$$\vec{\beta}_k = [\beta_{1_k}, \beta_{2_k}, \dots, \beta_{\eta_k}]^T$$

那么第k个碰撞点加入摩擦力为

$$\vec{f}_k = f_k\vec{n}_k + D_k\vec{\beta}_k$$

改写加速度方程，得

$$\dot{\vec{u}} = \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{N}\vec{f} + D\beta) + \vec{f}_{ext})$$

其中$\beta \in R^{\eta K\times 1}$

$$\beta = [\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_K]^T$$

且$D \in R^{3K\times \eta K}$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_K \end{bmatrix}$$

则利用欧拉积分得

$$\vec{u}^{t+\Delta t} = \vec{u}^t + \Delta t\dot{\vec{u}} = \vec{u}^t + \Delta t\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{N}\vec{f} + D\beta) + \vec{f}_{ext})$$

对于之前碰撞法线构造的线性互补问题，这里针对摩擦力添加两个互补条件。针对第k个碰撞点，有三个互补条件

$$\lambda_k\vec{e}_k + {D_k}^T\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\vec{u}^{t+\Delta t} \geq 0, \qquad st.\ \vec{\beta}_k \geq 0$$

$$\mu_k f_k - {\vec{e}_k}^T\vec{\beta}_k \geq 0, \qquad st.\ \lambda_k \geq 0$$

$${n_k}^T\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\vec{u}^{t+\Delta t} - \frac{v_k}{\Delta t} \geq 0, \qquad st. f_k \geq 0$$

其中μ_k为摩擦系数，$\vec{e}_k = [1,1,\dots,1]^T \in R^{\eta\times 1}$，$\lambda_k$为拉格朗日乘子，描述切向相对速度大小。

由上式可以有如下情况：

分离状态：如果${n_k}^T\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\vec{u}^{t+\Delta t} - \frac{v_k}{\Delta t} > 0$，则$f_k = 0$，从而可得$\vec{\beta}_k = 0$，表示没有摩擦力，那么$\lambda_k$可为任意值。

滑动状态：如果${D_k}^T\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\vec{u}^{t+\Delta t}$不为 0，由于$D_k$的所有列向量可以覆盖整个接触切平面，则必定存在一个方向向量$\vec{d}_{\mathrm{h}_k}\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\vec{u}^{t+\Delta t} < 0$。对应的摩擦力$\beta_{\mathrm{h}_k} > 0$，在$\lambda_k > 0$。从而$\vec{\beta}_{\mathrm{h}_k} = \mu_k f_k$。

滚动状态：如果${D_k}^T\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\vec{u}^{t+\Delta t} = 0$，则$\lambda_k \geq 0$。接下来有两种有趣的情况：

第一种：$\lambda_k = 0$。表明$\vec{\beta}_k \geq 0$。这意味着接触冲量的范围能超过内部或表面的摩擦锥区域。

第二种：$\lambda_k > 0$。表明$\vec{\beta}_k = 0$。这意味着$\mu_k f_k = 0$.当$\mu_k = 0$时，不存在摩擦冲量，一般不会出现这种情况。

接下来改写公式，将$\vec{u}^{t+\Delta t}$带入得

$$\lambda_k\vec{e}_k + {D_k}^T\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}(\vec{u}^t + \Delta t\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{N}\vec{f} + D\beta) + \vec{f}_{ext})) \geq 0, \qquad st.\ \vec{\beta}_k \geq 0$$

$${n_k}^T\boldsymbol{P_k}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}(\vec{u}^t + \Delta t\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{N}\vec{f} + D\beta) + \vec{f}_{ext})) - \frac{v_k}{\Delta t} \geq 0, \qquad st. f_k \geq 0$$

最终整理得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D^T C^T M^{-1} C D} & \boldsymbol{D^T C^T M^{-1} C N} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{N^T C^T M^{-1} C D} & \boldsymbol{N^T C^T M^{-1} C N} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E^T} & \mu & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta t\vec{\beta} \\ \Delta t\vec{f} \\ \vec{\lambda}_{aux} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{D^T C^T}(\vec{u}^t + \Delta t\boldsymbol{M}^{-1}\vec{f}_{ext}) \\ \boldsymbol{N^T C^T}\left(\vec{u}^t + \Delta t\boldsymbol{M}^{-1}\vec{f}_{ext}\right) - \dfrac{v}{\Delta t} \\ 0 \end{bmatrix} \geq \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta t\vec{\beta} \\ \Delta t\vec{f} \\ \vec{\lambda}_{aux} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

其中$\mu \in R^{K\times K}$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_K \end{bmatrix}$$

，$\boldsymbol{E} \in R^{\eta K\times K}$

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e_K \end{bmatrix}$$

，$\vec{\lambda}_{aux} \in R^{K\times 1}$

$$\vec{\lambda}_{aux} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K]^T$$

令$\boldsymbol{A} \in R^{(\eta+2)K\times(\eta+2)K}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D^T C^T M^{-1} C D} & \boldsymbol{D^T C^T M^{-1} C N} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{N^T C^T M^{-1} C D} & \boldsymbol{N^T C^T M^{-1} C N} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E^T} & \mu & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

，$\vec{x} \in R^{(\eta+2)K\times 1}$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \Delta t\vec{\beta} \\ \Delta t\vec{f} \\ \vec{\lambda}_{aux} \end{bmatrix}$$

，$\vec{b} \in R^{(\eta+2)K\times 1}$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D^T C^T}(\vec{u}^t + \Delta t \boldsymbol{M}^{-1}\vec{f}_{ext}) \\ \boldsymbol{N^T C^T}(\vec{u}^t + \Delta t \boldsymbol{M}^{-1}\vec{f}_{ext}) - \dfrac{v}{\Delta t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

那么可得LCP问题

$$\boldsymbol{A}\vec{x} + \vec{b} \geq 0, \qquad \vec{x} \geq 0$$

关节约束

约束除了上面介绍的接触约束，摩擦约束还有关节约束。针对接触约束，使用不等式“≥”约束;接下来将使用等式约束“=”，等式约束被用于两物体连接的关节模型。先介绍完整约束，非完整约束和雅可比矩阵。系统运动，需要知道描述系统的自由度，参数集合的最小数量。比如，一个自由运动的物体有 6 个自由度，因为至少 3 个参数能描述其位置，以及至少 3 个参数描述其朝向。对于两个自由运动的物体，就有 12 个自由度。

对于由第l个关节连接的两个物体B_{i_l}和B_{j_l}的空间位矢$\vec{s_l} \in R^{14\times 1}$

$$\vec{s_l} = [r_{i_l}, q_{i_l}, r_{j_l}, q_{j_l}]^T$$

注意：这里并不是由系统自由度构造，因为引用的是四元数。一般地，不考虑关节约束定义空间位矢$\vec{s} = [r_i, q_i, r_j, q_j]^T$。然而，需要构造类似之前介绍的变换

$$\dot{\vec{s}} = \boldsymbol{S}\vec{u}$$

此处$\vec{u} = [\vec{v}_i, \vec{\omega}_i, \vec{v}_j, \vec{\omega}_j]^T$，$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & Q_i & & \\ & & \mathbf{1} & \\ & & & Q_j \end{bmatrix}$。现定义位矢$\vec{r} = [\vec{r}_i, \vec{\theta}_i, \vec{r}_j, \vec{\theta}_j]^T \in R^{12\times 1}$

$$\vec{r} = [x_i, y_i, z_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, x_j, y_j, z_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j]^T$$

这里$\vec{\theta}_i$是$\vec{\omega}_i$的积分变量，并没有实际的物理含义，不能像欧拉角用来作为旋转矩阵使用，可以看成是占位符变量，其意义表明角速度作为被积函数的原函数的三个独立变量。

$$\vec{u} = \frac{d}{dt}\vec{r}$$

当用关节约束连接两个刚体时，将减少一些系统的自由度，并用更少的广义坐标量来描述整个力学系统。

两个物体B_i和B_j之间的完整约束定义为关于时间t和空间坐标$\vec{s}$的函数Φ，即

$$\Phi(\mathrm{t}, \vec{s}) = 0$$

这里提到的所有关节约束均为与时间无关的完整约束，意味着第l个关节存在m个完整约束

$$\Phi_1(\vec{s}) = 0$$
$$\Phi_2(\vec{s}) = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$\Phi_m(\vec{s}) = 0$$

完整约束下，每个约束会减少系统的一个自由度，这里会减少m个自由度。

$$\Phi(\vec{s}) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\vec{s}) \\ \Phi_2(\vec{s}) \\ \vdots \\ \Phi_m(\vec{s}) \end{bmatrix} = 0$$

对时间求导，可得完整约束的运动公式

$$\frac{d}{dt}\Phi(\vec{s}) = \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{s}}\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{s}}S\vec{u} = 0$$

记$J_\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{s}}S \in R^{m\times 12}, \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{s}} \in R^{m\times 14}$，则

$$J_\Phi\overrightarrow{u_l} = 0$$

从经典力学，完整约束的约束力可表示为

$$F_\Phi = {J_\Phi}^T\vec{\lambda}_\Phi$$

其中$\vec{\lambda}_\Phi$为拉格朗日乘子，向量的元素数量为关节约束的约束数量。元素的值可为正或负，描述了约束力的大小，约束力的方向为雅可比元素的方向。

非完整约束是不可积分约束，不能插入到完整约束的形式。两个物体B_i和B_j之间的非完整约束定义为关于时间t和空间坐标$\vec{s}$的函数Ψ，即

$$\Psi(\mathrm{t}, \vec{s}) \geq 0$$

碰撞条件可用时间独立的不完整约束表示，即

$$\Psi(\vec{s}) \geq 0$$

这种形式与之前描述碰撞接触点看上去非常不同，后面会介绍两者之间的联系。对时间求导，可得第k个碰撞约束方程

$$\frac{d}{dt}\Psi(\vec{s}) = \frac{\partial\Psi}{\partial\vec{s}}\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial\vec{s}}S\vec{u} = J_{\Psi}\overrightarrow{u_k} \geq 0$$

一般的，碰撞约束力可表示为

$$F_{\Psi} = J_{\Psi}{}^{T}\vec{\lambda}_{\Psi}$$

这里$\vec{\lambda}_{\Psi} \in R^{(1+\eta)\times 1}$,表示一个法向和$\eta$个摩擦方向的力大小。与关节约束不同的是，这里的拉格朗日乘子需要大于等于零,即

$$\vec{\lambda}_{\Psi} \geq 0$$

这里需要注意$\frac{d}{dt}\Psi(\vec{s}) \geq 0$的含义。如果$\Psi(\vec{s}) > 0$，只是表明两物体不接触，但如果两物体相向而行，可能存在潜在的碰撞点。只有$\Psi(\vec{s}) = 0$时，表明物体接触，此时$\frac{d}{dt}\Psi(\vec{s}) \geq 0$表明两物体之间的相对速度能使得两物体分离或者滑动等。现在，对第k个接触点构造运动约束方程和约束力为

$$J_{\Psi_k}\vec{u}_{\mathrm{k}} \geq 0, J_{\Psi_k} \in R^{(1+\eta)\times 12}$$

$$\vec{f}_{\Psi_k} = J_{\Psi_k}{}^{T}\vec{\lambda}_{\Psi_k}, \vec{\lambda}_{\Psi_k} \in R^{(1+\eta)\times 1}$$

然后将所有集成到一个矩阵方程

$$J_{contact}\vec{u} = 0, \vec{u} \in R^{6n\times 1},\ J_{contact} \in R^{K(1+\eta)\times 6n}$$

$$\vec{f}_{contact} = J_{contact}{}^{T}\vec{\lambda}_{\mathrm{contact}}, \vec{\lambda}_{\mathrm{contact}} \in R^{K(1+\eta)\times 1}$$

其中

$$\vec{u} = [\vec{v}_1, \vec{\omega}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_2, \dots, \vec{v}_n, \vec{\omega}_n]^{T}$$

$$\vec{\lambda}_{\mathrm{contact}} = [\vec{\lambda}_{\Psi_1}{}^{1}, \dots, \vec{\lambda}_{\Psi_1}{}^{1+\eta}, \dots, \vec{\lambda}_{\Psi_K}{}^{1}, \dots, \vec{\lambda}_{\Psi_K}{}^{1+\eta}]^{T}$$

$$J_{\mathrm{contact}} = \begin{bmatrix} J_{\Psi_1}{}^{1} & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & J_{\Psi_1}{}^{n} \\ \vdots & & & & & & & \\ J_{\Psi_k}{}^{1} & \dots & J_{\Psi_k}{}^{i} & & \dots & J_{\Psi_k}{}^{j} & \dots & J_{\Psi_k}{}^{n} \\ \vdots & & & & & & & \\ J_{\Psi_K}{}^{1} & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & J_{\Psi_K}{}^{n} \end{bmatrix}$$

这个雅可比矩阵时非常稀疏的，对于第k个接触点仅包含两个物体i和j。这意味着第k行的非零元素为物体的索引i和j列。

$$J_{\Psi_k} = [J_{\Psi_k}{}^{i} \quad J_{\Psi_k}{}^{j}]$$

接下来证明$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{N}\vec{f} + D\beta) \equiv J_{contact}{}^{T}\vec{\lambda}_{\mathrm{contact}}$。

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{N}\vec{f} + D\beta) = [\boldsymbol{CN}\ \boldsymbol{CD}]\begin{bmatrix}\vec{f} \\ \beta\end{bmatrix} = \pi(J_{contact}{}^{T}\vec{\lambda}_{\mathrm{contact}})$$

如此，

$$\vec{\lambda}_{\Psi_k}{}^{1} = f_k$$

$$\vec{\lambda}_{\Psi_k}{}^{2} = \beta_{1_k}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\vec{\lambda}_{\Psi_k}{}^{1+\eta} = \beta_{\eta_k}$$

等式和不等式约束统一符号: 接下来展示通过雅可比和拉格朗日乘子将等式和不等式约束统一到系统的运动方程中。假设现在有K个接触点和L个关节约束，所有的运动约束和约束力描述为

$$J_{\Phi_l}\vec{u}_l = 0, J_{\Phi_l} \in R^{m_l \times 12}$$
$$J_{\Psi_k}\vec{u}_\mathrm{k} \geq 0, J_{\Psi_k} \in R^{(1+\eta)\times 12}$$
$$\vec{f}_{\Phi_l} = {J_{\Phi_l}}^T \vec{\lambda}_{\Phi_l}, \vec{\lambda}_{\Phi_l} \in R^{m_l \times 1}$$
$$\vec{f}_{\Psi_k} = {J_{\Psi_k}}^T \vec{\lambda}_{\Psi_k}, \vec{\lambda}_{\Psi_k} \in R^{(1+\eta)\times 1}$$

现将所有方程整合在一个矩阵，可得

$$J_{joint}\vec{u} = 0, J_{joint} \in R^{(\sum m_l)\times 12}$$
$$J_{contact}\vec{u} \geq 0, J_{contact} \in R^{K(1+\eta)\times 6n}$$
$$\vec{f}_{joint} = {J_{joint}}^T \vec{\lambda}_{joint}, \vec{\lambda}_{joint} \in R^{(\sum m_l)\times 1}$$
$$\vec{f}_{contact} = {J_{contact}}^T \vec{\lambda}_\mathrm{contact}, \vec{\lambda}_\mathrm{contact} \in R^{K(1+\eta)\times 1}$$

雅可比J_{joint}和$\vec{\lambda}_{joint}$针对系统的关节约束，雅可比$J_{contact}$和$\vec{\lambda}_\mathrm{contact}$针对系统的碰撞约束。同样的，

$$J_{joint} = \begin{bmatrix} {J_{\Phi_1}}^1 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & {J_{\Phi_1}}^n \\ \vdots & & & & & & & \\ {J_{\Phi_l}}^1 & \cdots & {J_{\Phi_l}}^i & & \cdots & {J_{\Phi_l}}^j & \cdots & {J_{\Phi_l}}^n \\ \vdots & & & & & & & \\ {J_{\Phi_L}}^1 & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & {J_{\Phi_L}}^n \end{bmatrix}$$

该矩阵是一个稀疏矩阵，对于第l个关节仅包含两个物体i和j。这意味着第k行的非零元素为物体的索引i和j列。

$$J_{\Phi_l} = [{J_{\Phi_l}}^i \quad {J_{\Phi_l}}^j]$$

并且

$$\vec{\lambda}_{joint} = [{\vec{\lambda}_{\Phi_1}}^1, \ldots, {\vec{\lambda}_{\Phi_1}}^{m_1}, \ldots, {\vec{\lambda}_{\Phi_L}}^1, \ldots, {\vec{\lambda}_{\Phi_L}}^{m_L}]^T$$

重新整理加速度关于约束力的公式为

$$\dot{\vec{u}} = \boldsymbol{M}^{-1}(\vec{f}_{joint} + \vec{f}_{contact} + \vec{f}_{ext}) = \boldsymbol{M}^{-1}({J_{joint}}^T \vec{\lambda}_{joint} + {J_{contact}}^T \vec{\lambda}_\mathrm{contact} + \vec{f}_{ext})$$

关节模型

对于第l个约束其运动约束方程可写为

$$J_l \vec{u}_l = 0$$

后面将集中于关节类别来讨论关节约束方程。对于任意关节约束，其运动方程均可写为$J\vec{u} = 0$。这里的雅可比矩阵为之前大矩阵的子矩阵块，实际上$J\vec{u} = 0$即为

$$\begin{bmatrix} J_{lin}{}^{i} & J_{ang}{}^{i} & J_{lin}{}^{j} & J_{ang}{}^{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_i \\ \vec{\omega}_i \\ \vec{v}_j \\ \vec{\omega}_j \end{bmatrix} = 0$$

可见，方程中雅可比矩阵中的一部分只影响物体i的线速度$J_{lin}{}^{i}$和角速度$J_{ang}{}^{i}$，即

$$J_{lin}{}^{i}\vec{v}_i + J_{ang}{}^{i}\vec{\omega}_i$$

同样的，对于物体j可表示为

$$J_{lin}{}^{j}\vec{v}_j + J_{ang}{}^{j}\vec{\omega}_j$$

可以看出，关节相连的两物体移动速度大小相等，但是总和为零。这个观察提供了设计雅可比矩阵的一个策略:给定物体速度，设置矩阵方程，并且在关节轴承上的相对速度总是为零。目前为止，应该清晰的认识到运动约束是对于速度的约束，而不是位置。这就意味着数值计算错误和内部近似计算错误都会带入到位置模拟计算。接下来，将会介绍错误修正的一般思路，并且在后面会进一步详细介绍基于错误修正的投影方法。假想位置错误已经产生，比如轴承未对齐。这种错误可丢正轴承速度项来减少，比如进入下一次模拟时，错误会越来越小。

这里，引入运动约束偏置项$\vec{b}$，使得

$$J\vec{u} = \vec{b}$$

这里举一个简单的例子来描述这个问题：假想在一维空间，两个质点之间有一个关节约束，使得沿着同一条直线移动，并且他们的相对位置始终不变，那么有运动方程

$$\vec{v}_i - \vec{v}_j = 0$$

现在一些错误产生了，

$$\vec{r}_{err} = \vec{v}_i - \vec{v}_j$$

且$|\vec{r}_{err}| > 0$。调整速度，在一定的时间内Δt消除错误，则

$$J\vec{u} = \vec{v}_i - \vec{v}_j = \frac{\vec{r}_{err}}{\Delta t} = \vec{b}$$

但如过关节或者限制条件最初就存在错误，并且铰链为静止状态，然后错误偏置项将使得铰链加速运动。这样，不只是错误被修正，但是物体将继续移动下去，这并不是预期的效果。错误修正不能给系统添加机械能，否则通过关节链接的物体可能会以非预期的效果加速运动。事实上，错误修正同样可用牛顿碰撞定律同时处理碰撞问题。有一个能被接受且实用的方法是提供错误修正率参数来控制错误修正的力度。

　　锚点和关节轴向来描述关节的连接性和移动性。锚点是一个点，这个点对于每个物体空间会是两个点，这两个点一直都保持对齐。锚点相对于物体i的位置定义为$\vec{r}_{anc}{}^{i}$。这个物体i的锚点在世界系(WCS)表示为

$$\vec{r}_{anc}{}^{wcs} = \vec{r}_i + R(q_i)\vec{r}_{anc}{}^{i}$$

关节轴向被用来限制物体运动的方向，比如旋转轴或者滑动方向。关节轴向被定义为 3 维单位向量，$\vec{s}_{axis}{}^{wcs}$。在后面章节将详细介绍使用关节的锚点和轴向的不同关节类别。这里介绍的连接性非常类似 Featherstone 算法的双关节坐标系。对比之下，锚点定义坐标系原点，关节轴向定义了坐标系朝向，比如关节坐标系z轴。

　　这里介绍关于错误修正项，需要乘以错误修正系数k_{cor}，测量错误修正率。这个方法简单描述为：对于每个关节，错误修正参数为k_{erp}

$$0 \le k_{erp} \le 1$$

这个值确定了下一次模拟时错误的修正量。若值为 0 意味着不做错误修正；若值为 1 意味着错误将全部被处理。如果一次模拟计算时长为Δt，那么下面公式衡量了变化频率

$$k_{fps} = \frac{1}{\Delta t}$$

那么错误修正系数k_{cor}可计算为

$$k_{cor} = k_{erp}k_{fps}$$

其中k_{erp}不建议设置为$k_{erp} = 1$。

关节类型

这节将分析每一种关节的雅可比矩阵,

球窝关节(BallInSocket)：球窝关节存在 3 个约束条件，即两个物体空间对应的锚点在世界系下的坐标相等。即

$$\Phi(\vec{s}) = \left(\vec{r}_i + R(q_i)\vec{r}_{anc}{}^i\right) - \left(\vec{r}_j + R(q_j)\vec{r}_{anc}{}^j\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

如果套用

$$\frac{d}{dt}\Phi(\vec{s}) = \frac{\partial\Phi(\vec{s})}{\partial\vec{s}}\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{\partial\Phi(\vec{s})}{\partial\vec{s}}S\vec{u} = 0$$

则

$$J_{ball} = \frac{\partial\Phi(\vec{s})}{\partial\vec{s}}S = [J_{lin}{}^i\, J_{ang}{}^i\, J_{lin}{}^j\, J_{ang}{}^j]$$

其中

$$\frac{\partial\Phi(\vec{s})}{\partial\vec{s}} = \left[\frac{\partial\Phi(\vec{s})}{\partial\vec{r}_i}\ \frac{\partial\Phi(\vec{s})}{\partial q_i}\ \frac{\partial\Phi(\vec{s})}{\partial\vec{r}_j}\ \frac{\partial\Phi(\vec{s})}{\partial q_j}\right]$$

$\frac{\partial\Phi(\vec{s})}{\partial q_i}$不易求得，采用全导数的形式提出雅可比矩阵，计算如下

$$\frac{d}{dt}\Phi(\vec{s}) = \frac{d}{dt}\left[\left(\vec{r}_i + R_i\vec{r}_{anc}{}^i\right) - \left(\vec{r}_j + R_j\vec{r}_{anc}{}^j\right)\right] = \vec{v}_i + \omega_i \times \left(R_i\vec{r}_{anc}{}^i\right) - \vec{v}_j - \omega_j \times \left(R_j\vec{r}_{anc}{}^j\right)$$

$$= \vec{v}_i - \left(R_i\vec{r}_{anc}{}^i\right)^{\times}\omega_i - \vec{v}_j + \left(R_j\vec{r}_{anc}{}^j\right)^{\times}\omega_j$$

$$= \left[E\ \ -\left(R_i\vec{r}_{anc}{}^i\right)^{\times}\ -E\ \ \left(R_j\vec{r}_{anc}{}^j\right)^{\times}\right]\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\\omega_i\\\vec{v}_j\\\omega_j\end{bmatrix} = (\frac{\partial\Phi(\vec{s})}{\partial\vec{s}}S)\vec{u}$$

可以看出

$$\frac{\partial\Phi(\vec{s})}{\partial q_i}Q_i = -\left(R_i\vec{r}_{anc}{}^i\right)^{\times}$$

最终可得

$$J_{lin}{}^i = E \in R^{3\times3}$$

$$J_{ang}{}^i = -\left(R_i\vec{r}_{anc}{}^i\right)^{\times} \in R^{3\times3}$$

$$J_{lin}{}^j = -E \in R^{3\times3}$$

$$J_{ang}{}^{j} = \left(R_j \vec{r}_{anc}{}^{j}\right)^{\times} \in R^{3\times3}$$

接下来速度错误修正项公式为

$$\vec{b}_{ball} = k_{cor}\left[\left(\vec{r}_j + R_j \vec{r}_{anc}{}^{j}\right) - \left(\vec{r}_i + R_i \vec{r}_{anc}{}^{i}\right)\right]$$

Hinge**铰链(公转Revolute)关节**：只允许相对于指定关节轴旋转。描述一个关节轴为一个锚点和一个关节旋转轴$\vec{s}_{axis}{}^{wcs}$(世界坐标系下的单位向量)。这种关节只存在一个自由度，存在 5 个运动约束，如此雅可比矩阵$\mathrm{J_{hinge}} \in R^{5\times12}$，

$$\mathrm{J_{hinge}} = \left[J_{lin}{}^{i}\, J_{ang}{}^{i}\, J_{lin}{}^{j}\, J_{ang}{}^{j}\right]$$

其中$J_{lin}{}^{i}$，$J_{ang}{}^{i}$，$J_{lin}{}^{j}$，$J_{ang}{}^{j} \in R^{5\times3}$，$\vec{b}_{hinge} \in R^{5\times1}$。Hinge与BallInSocket有同样的位置约束，所以Hinge关节直接使用BallInSocket雅可比矩阵的 3 行数据和错误测量，那么只需要再增加关于指定轴旋转的约束方程。其约束方程为

$$\overrightarrow{t_1}_{axis}{}^{wcs} \cdot (\omega_i - \omega_j) = 0$$

$$\overrightarrow{t_2}_{axis}{}^{wcs} \cdot (\omega_i - \omega_j) = 0$$

其中$\overrightarrow{t_1}_{axis}{}^{wcs}$和$\overrightarrow{t_2}_{axis}{}^{wcs}$与$\vec{s}_{axis}{}^{wcs}$构建为3D直角坐标系，约束方程表明两物体的相对角速度在$\vec{s}_{axis}{}^{wcs}$确定的平面上的投影为零，即不存在相对角速度，只能绕$\vec{s}_{axis}{}^{wcs}$旋转。则雅可比矩阵为

$$J_{lin}{}^{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{lin}{}^{j} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{ang}{}^{i} = \begin{bmatrix} -\left(R_i \vec{r}_{anc}{}^{i}\right)^{\times} \\ (\overrightarrow{t_1}_{axis}{}^{wcs})^T \\ (\overrightarrow{t_2}_{axis}{}^{wcs})^T \end{bmatrix}$$

$$J_{ang}{}^{j} = \begin{bmatrix} \left(R_j \vec{r}_{anc}{}^{j}\right)^{\times} \\ -(\overrightarrow{t_1}_{axis}{}^{wcs})^T \\ -(\overrightarrow{t_2}_{axis}{}^{wcs})^T \end{bmatrix}$$

接下来看下错误修正项，这里只考察旋转错误。假设两物体的旋转轴在本地系下为$\vec{s}_{axis}{}^{i}$和$\vec{s}_{axis}{}^{j}$，那么可计算出物体旋转轴在世界系下表示为

$$\vec{s}_i{}^{wcs} = R_i \vec{s}_{axis}{}^{i}$$

$$\vec{s}_j{}^{wcs} = R_j \vec{s}_{axis}{}^{j}$$

如果$\vec{s_i}^{wcs}=\vec{s_j}^{wcs}$，（$\vec{s}_{axis}{}^{i}$初始化为世界旋转轴$\vec{s_i}^{wcs}$转化过来，并且在本地系始终不变）显然两物体之间的关节旋转约束没有错误。如果有错误，那么两物体肯定分别会绕$\vec{s_i}^{wcs}$和$\vec{s_j}^{wcs}$旋转。这种情况可以处理为：假设θ_{err}是$\vec{s_i}^{wcs}$和$\vec{s_j}^{wcs}$之间的夹角，那么错误可定义为绕$\vec{u}$轴旋转了θ_{err}，其中$\vec{u}=\vec{s_i}^{wcs}\times\vec{s_j}^{wcs}$($||\vec{u}||=\left||\vec{s_i}^{wcs}|\right|||\vec{s_j}^{wcs}||\sin\theta_{err}$)。定义修正项为$\theta_{cor}$并且在时间间隔$\Delta t$内完成修正。相对角速度大小为

$$||\vec{\omega}_{cor}||=\frac{\theta_{cor}}{\Delta t}=\frac{k_{erp}\theta_{err}}{\Delta t}=k_{erp}k_{fps}\theta_{err}=k_{cor}\theta_{err}$$

改修正角速度方向由$\vec{u}$确定，即

$$\vec{\omega}_{cor}=||\vec{\omega}_{cor}||\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}=k_{cor}\theta_{err}\frac{\vec{u}}{sin\theta_{err}}=\frac{\theta_{err}}{sin\theta_{err}}k_{cor}\vec{u}$$

预期θ_{err}是比较小的，那么可以使用小角度近似计算，即可认为$\theta_{err}=sin\theta_{err}$，那么

$$\vec{\omega}_{cor}=k_{cor}\vec{u}$$

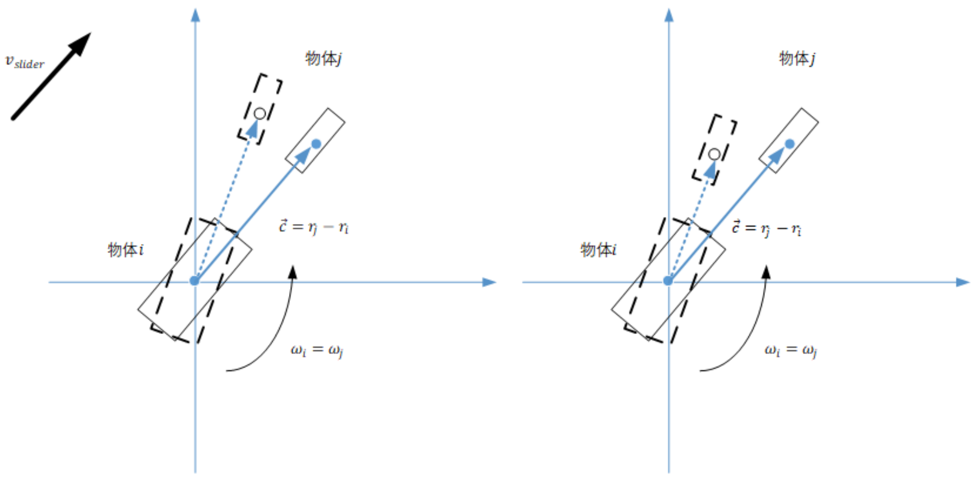
另外$\vec{u}$正交于$\vec{s}_{axis}{}^{wcs}$，如此将错误项投影到$\vec{t_1}_{axis}{}^{wcs}$和$\vec{t_2}_{axis}{}^{wcs}$进行修正，最终得到整体错误修正项为

$$\vec{b}_{hinge}=k_{cor}\begin{bmatrix}\left(\vec{r_j}+R_j\vec{r}_{anc}{}^{j}\right)-\left(\vec{r_i}+R_i\vec{r}_{anc}{}^{i}\right)\\ \vec{t_1}_{axis}{}^{wcs}\cdot\vec{u}\\ \vec{t_2}_{axis}{}^{wcs}\cdot\vec{u}\end{bmatrix}$$

滑动约束：滑动关节只允许物体在一个方向上移动。约束只有一个自由度，那么存在 5 个约束方程。同样，雅可比矩阵可写为

$$J_{slider}=\left[J_{lin}{}^{i}\;J_{ang}{}^{i}\;J_{lin}{}^{j}\;J_{ang}{}^{j}\right]$$

其中$J_{lin}{}^{i}$，$J_{ang}{}^{i}$，$J_{lin}{}^{j}$，$J_{ang}{}^{j}\in R^{5\times3}$，$\vec{b}_{slider}\in R^{5\times1}$。接下来将用雅可比矩阵的前 3 行保证两物体之间不存在相对旋转，后两行保证两物体只在关节轴向$\vec{s}_{axis}{}^{wcs}$上移动。方法如下：线速度方程为则



$$\vec{v_j}=\vec{v_i}+\omega_i\times\vec{c}+\vec{v}_{slider}$$

其中$\vec{c}=\vec{r_j}-\vec{r_i}$，$\vec{v}_{slider}$是关节沿轴向滑动的速度。那么

$$-\vec{v}_{slider}=\vec{v}_i+\omega_i\times\vec{c}-\vec{v}_j=\vec{v}_i-\vec{v}_j+\frac{\omega_i+\omega_j}{2}\times\vec{c}=\left[\mathrm{E}\quad-\frac{1}{2}\vec{c}^{\times}\quad-\mathrm{E}\quad-\frac{1}{2}\vec{c}^{\times}\right]\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \omega_i\\ \vec{v}_j\\ \omega_j\end{bmatrix}$$

由关节轴向$\vec{s}_{axis}{}^{wcs}$可计算出两个正交向量$\overrightarrow{t_1}^{wcs}$和$\overrightarrow{t_2}^{wcs}$。根据滑动关节约束的定义可知，在$\overrightarrow{t_1}^{wcs}$和$\overrightarrow{t_2}^{wcs}$方向上两物体永远不会出现相对速度值，即

$$0=\overrightarrow{t_1}^{wcs}\cdot(-\vec{v}_{slider})=-\left(\overrightarrow{t_1}^{wcs}\right)^T\vec{v}_{slider}$$

$$=\left[\left(\overrightarrow{t_1}^{wcs}\right)^T\quad-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{t_1}^{wcs}\right)^T\vec{c}^{\times}\quad-\left(\overrightarrow{t_1}^{wcs}\right)^T\quad-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{t_1}^{wcs}\right)^T\vec{c}^{\times}\right]\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \omega_i\\ \vec{v}_j\\ \omega_j\end{bmatrix}$$

$$0=\overrightarrow{t_2}^{wcs}\cdot(-\vec{v}_{slider})=-(\overrightarrow{t_2}^{wcs})^T\vec{v}_{slider}$$

$$=\left[\left(\overrightarrow{t_2}^{wcs}\right)^T\quad-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{t_2}^{wcs}\right)^T\vec{c}^{\times}\quad-\left(\overrightarrow{t_2}^{wcs}\right)^T\quad-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{t_2}^{wcs}\right)^T\vec{c}^{\times}\right]\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \omega_i\\ \vec{v}_j\\ \omega_j\end{bmatrix}$$

上式可确定雅可比矩阵后两行约束矩阵，结合$\omega_i-\omega_j=0$可得$[0\ \mathrm{E}\ 0\ -\mathrm{E}]\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \omega_i\\ \vec{v}_j\\ \omega_j\end{bmatrix}=0$。

$$-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{t_1}^{wcs}\right)^T\vec{c}^{\times}\omega_i=-\frac{1}{2}(\vec{c}\times\omega_i)\cdot\overrightarrow{t_1}^{wcs}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{t_1}^{wcs}\times\vec{c}\right)\cdot\omega_i=\frac{1}{2}\left(\vec{c}\times\overrightarrow{t_1}^{wcs}\right)\cdot\omega_i$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{c}\times\overrightarrow{t_1}^{wcs}\right)^T\omega_i$$

另外雅可比前三行约束矩阵。整理得

$$J_{lin}{}^i=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\&(\overrightarrow{t_1}^{wcs})^T&\\&(\overrightarrow{t_2}^{wcs})^T&\end{bmatrix}$$

$$J_{ang}{}^i=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\&\frac{1}{2}\left(\vec{c}\times\overrightarrow{t_1}^{wcs}\right)^T&\\&\frac{1}{2}\left(\vec{c}\times\overrightarrow{t_2}^{wcs}\right)^T&\end{bmatrix}$$

$$J_{lin}{}^j=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\&-(\overrightarrow{t_1}^{wcs})^T&\\&-(\overrightarrow{t_2}^{wcs})^T&\end{bmatrix}$$

$$
J_{ang}{}^{j} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ & 0 & \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\vec{c} \times \overrightarrow{t_1}^{wcs}\right)^T & -1 \\ & \frac{1}{2}\left(\vec{c} \times \overrightarrow{t_2}^{wcs}\right)^T & \end{bmatrix}
$$

接下来考察错误项$\vec{b}_{slider} \in R^{5\times1}$。前三行用于旋转对齐错误项，后两行用于修正移动未沿指定方向错误项。对于铰链关节，角速度错误为θ_{err}，若角速度方向为一个单位向量$\vec{u}$，角速度修正项为

$$
\vec{\omega}_{cor} = \left|\left|\vec{\omega}_{cor}\right|\right|\vec{u} = \frac{k_{erp}}{\Delta t}\theta_{err}\vec{u} = k_{cor}\theta_{err}\vec{u}
$$

这里并不这样处理，方法如下：定义旋转错误为一个四元素q_{err},则有

$$
q_{err} = [s, \vec{v}] = [\cos\left(\frac{\theta_{err}}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta_{err}}{2}\right)\vec{u}]
$$

根据小角近似，

$$
\frac{\theta_{err}}{2}\vec{u} \approx \sin\left(\frac{\theta_{err}}{2}\right)\vec{u} = \vec{v}
$$

则

$$
\vec{\omega}_{cor} = k_{cor}2\vec{v}
$$

这里的修正项作为$\vec{b}_{slider}$的前三行。通过偏移向量来描述滑动关节当前位置$\overrightarrow{r_{off}}^{wcs}$，这个也是两物体中心位置差，

$$
\overrightarrow{r_{off}}^{j} = R_j{}^T(\vec{r}_j - \vec{r}_i)
$$

这里$\overrightarrow{r_{off}}^{j}$为初始化时就设置好，以常量保存在物体j坐标系。对应在世界坐标系的值为

$$
\overrightarrow{r_{off}}^{wcs} = R_j\overrightarrow{r_{off}}^{j}
$$

注意：$\overrightarrow{r_{off}}^{wcs}$后面会频繁计算，这里$R_j$可能是变化的。如果平行关节轴向上无位移，那么$\vec{c} - \overrightarrow{r_{off}}^{wcs}$在正交于关节轴向上分量为 0。最终整理偏置项为

$$
\vec{b}_{slider} = k_{cor}\begin{bmatrix} 2\vec{v} \\ \overrightarrow{t_1}^{wcs} \cdot (\vec{c} - \overrightarrow{r_{off}}^{wcs}) \\ \overrightarrow{t_2}^{wcs} \cdot (\vec{c} - \overrightarrow{r_{off}}^{wcs}) \end{bmatrix}
$$

2 铰链关节：车轮关节，这里存在两个自由度，四个约束方程，雅可比矩阵可写为

$$
J_{wheel} = [J_{lin}{}^{i}\,J_{ang}{}^{i}\,J_{lin}{}^{j}\,J_{ang}{}^{j}]
$$

其中$J_{lin}{}^{i}$，$J_{ang}{}^{i}$，$J_{lin}{}^{j}$，$J_{ang}{}^{j} \in R^{4\times3}$，$\vec{b}_{wheel} \in R^{4\times1}$。这里重用球窝关节关于位置的约束作为雅可比矩阵的前三行，接下来确定第四行。现在计算世界系下关节轴向

$$
\vec{s}_i{}^{wcs} = R_i\vec{s}_{axis}{}^{i}
$$

$$
\vec{s}_j{}^{wcs} = R_j\vec{s}_{axis}{}^{j}
$$

约束物体旋转轴为

$$
\vec{u} = \vec{s}_i{}^{wcs} \times \vec{s}_j{}^{wcs}
$$

为了保持铰链轴向，必须保证在$\vec{u}$上没有相对旋转量，即

$$0 = \vec{u} \cdot \left(\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_i\right) = -\vec{u}^T \vec{\omega}_i + \vec{u}^T \vec{\omega}_j$$

可得

$$J_{lin}{}^{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{lin}{}^{j} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{ang}{}^{i} = \begin{bmatrix} -\left(R_i \vec{r}_{anc}{}^{i}\right)^{\times} \\ -\vec{u}^T \end{bmatrix}$$

$$J_{ang}{}^{j} = \begin{bmatrix} \left(R_j \vec{r}_{anc}{}^{j}\right)^{\times} \\ \vec{u}^T \end{bmatrix}$$

对于错误修正项，使用球窝关节作为$\vec{b}_{wheel}$前三行，接下来讨论第四行。假设两hinge轴夹角为θ，而现在夹角为∅。那么角速度错误大小为

$$\left|\left|\vec{\omega}_{cor}\right|\right| = \frac{k_{erp}(\theta - \emptyset)}{\Delta t} = k_{cor}(\theta - \emptyset)$$

最后整理得车轮错误修正项为

$$\vec{b}_{wheel} = k_{cor} \begin{bmatrix} \vec{b}_{ball} \\ (\theta - \emptyset) \end{bmatrix}$$

万向接头(Universal)关节：万向接头关节很想车轮关节，描述为两个关节轴向$\vec{s}_{axis}{}^{i}$和$\vec{s}_{axis}{}^{j}$，并且关节锚点为两轴线的交点。与车轮关节不同的是，两关节轴向夹角为 90°。这里存在两个自由度，四个约束方程，雅可比矩阵可写为

$$\mathrm{J}_{\mathrm{universal}} = \left[J_{lin}{}^{i}\ J_{ang}{}^{i}\ J_{lin}{}^{j}\ J_{ang}{}^{j}\right]$$

其中$J_{lin}{}^{i}$，$J_{ang}{}^{i}$，$J_{lin}{}^{j}$，$J_{ang}{}^{j} \in R^{4\times3}$，$\vec{b}_{\mathrm{universal}} \in R^{4\times1}$。由于这种关节很像车轮关节，这里就快速给出推导。重用球窝关节的位置约束，并且限制旋转轴

$$\vec{u} = \vec{s}_i{}^{wcs} \times \vec{s}_j{}^{wcs}$$

上无相对旋转角速度

$$J_{lin}{}^{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{lin}{}^{j} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{ang}{}^{i} = \begin{bmatrix} -\left(R_i \vec{r}_{anc}{}^{i}\right)^{\times} \\ -\vec{u}^T \end{bmatrix}$$

$$J_{ang}{}^{j} = \begin{bmatrix} \left(R_j \vec{r}_{anc}{}^{j}\right)^{\times} \\ \vec{u}^{T} \end{bmatrix}$$

这里可以知道错误修正项$\vec{b}_{\text{universal}}$前三项，接下来也只需要确定第四项。将上述车轮的θ取值为$\frac{\pi}{2}$，则

$$\left|\left|\vec{\omega}_{cor}\right|\right| = k_{cor}(\theta - \emptyset) = k_{cor}\left(\frac{\pi}{2} - \emptyset\right) \approx k_{cor}\cos(\emptyset) = k_{cor}(\vec{s}_i{}^{wcs} \cdot \vec{s}_j{}^{wcs})$$

那么最终偏置项为

$$\vec{b}_{\text{universal}} = k_{cor}\begin{bmatrix} \vec{b}_{ball} \\ \vec{s}_i{}^{wcs} \cdot \vec{s}_j{}^{wcs} \end{bmatrix}$$

固连(Fixed)关节：由于固连关节限制两物体任何的运动，那么自由度为 0，则存在 6 个约束方程。雅可比矩阵可写为

$$\mathrm{J}_{fixed} = \left[J_{lin}{}^{i}\, J_{ang}{}^{i}\, J_{lin}{}^{j}\, J_{ang}{}^{j}\right]$$

其中$J_{lin}{}^{i}$，$J_{ang}{}^{i}$，$J_{lin}{}^{j}$，$J_{ang}{}^{j} \in R^{6\times 3}$，$\vec{b}_{fixed} \in R^{6\times 1}$。两物体的角速度相等，得

$$\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_j = 0$$

相对距离保持不变，现将相对位移保存在物体i中，即

$$\overrightarrow{r_{off}}^{j} = R_i{}^{T}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

这个值作为常量保存，若变换到世界系，公式为

$$\overrightarrow{r_{off}}^{wcs} = R_i \overrightarrow{r_{off}}^{j}$$

两物体的线速度需保证

$$\vec{v}_j = \vec{v}_i + \omega_i \times \overrightarrow{r_{off}}^{wcs}$$

即

$$\vec{v}_i - (\overrightarrow{r_{off}}^{wcs})^{\times}\omega_i - \vec{v}_j = 0$$

再结合

$$\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_j = 0$$

最后可得雅可比矩阵为

$$J_{lin}{}^{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{lin}{}^{j} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{ang}{}^{i} = \begin{bmatrix} -(\overrightarrow{r_{off}}^{wcs})^{\times} & & \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{ang}{}^{j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

对于错误修正项，将球窝关节对于位置的修正项作为$\vec{b}_{fixed}$前三行，将滑动关节关于旋转的修正项作为后三行，则

$$\vec{b}_{fixed} = k_{cor}\begin{bmatrix} \vec{b}_{ball} \\ 2\vec{v} \end{bmatrix}$$

此处$\vec{v}$表示四元素旋转错误

$$q_{cor} = [s, \vec{v}]$$

接触(Contact)关节：之前已经介绍过，接触约束不同于关节约束，但也可以用雅可比矩阵来描述。接下来，将接触雅可比矩阵作为关节雅可比矩阵的形式给出子矩阵形式。从前面介绍已知接触雅可比矩阵有$1+\eta$个约束，那么雅可比矩阵维数为$(1+\eta)\times 12$，

$$\mathrm{J}_{contact} = \left[J_{lin}{}^{i}\ J_{ang}{}^{i}\ J_{lin}{}^{j}\ J_{ang}{}^{j}\right]$$

这里的第一行对应碰撞法线的约束力和后η行对应切向摩擦约束，则给出公式为

$$J_{lin}{}^{i} = \begin{bmatrix} -\vec{n}^{t} \\ -D_k{}^{T} \end{bmatrix}$$

$$J_{lin}{}^{j} = \begin{bmatrix} \vec{n}^{t} \\ D_k{}^{T} \end{bmatrix}$$

$$J_{ang}{}^{i} = \begin{bmatrix} -(r_i{}^{\times}\vec{n})^{t} \\ -(r_i{}^{\times}D_k)^{T} \end{bmatrix}$$

$$J_{ang}{}^{j} = \begin{bmatrix} (r_j{}^{\times}\vec{n})^{t} \\ (r_j{}^{\times}D_k)^{T} \end{bmatrix}$$

对于穿透约束修正项，使用$\vec{b}_{contact} \in R^{(1+\eta)\times 1}$，公式为

$$\vec{b}_{contact} = k_{cor}\begin{bmatrix} d_{penetration} \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中$d_{penetration}$为两物体的穿透深度值。

关节限制 Joint Limits

现实世界中并不能找到一种滑动关节无限制沿着关节轴向运动，那么对于滑动关节需要额外加以限制。接下来将对关节加以限制重新建模，特别地，将只针对滑动关节和铰链关节。

滑动关节限制：回顾滑动关节，指定滑动关节时通过使用相对偏移向量来确定初始化时两物体的位置差。就是说，初始化偏移向量计算为（物体j位置在物体i下的相对位置）

$$\overrightarrow{r_{off}}^{j} = R_i{}^{T}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

后面计算偏移位置时，通过公式

$$\overrightarrow{r_{off}}^{wcs} = R_i\overrightarrow{r_{off}}^{j}$$

现在令实时计算的偏移值$\vec{c}=\vec{r}_j-\vec{r}_i$，计算相对位置的改变量为$\vec{r}_{dis}$，即

$$\vec{r}_{dis}=\vec{c}-\overrightarrow{r_{off}}^{wcs}$$

在轴方向$\vec{s}^{wcs}$的变化量为

$$d_{dis}=\vec{s}^{wcs}\cdot\vec{r}_{dis}$$

当对滑动关节施加限制，可指定在关节轴向上指定滑动最小距离d_{lo}和最大距离d_{hi}。如果有一个条件被违反，比如

$$d_{dis}\le d_{lo}$$

那么将添加一个不等式约束来保证正确性。该约束确保在关节轴向上的相对速度不能超过限制范围。对于滑动关节意味着需要满足

$$\vec{s}^{wcs}\cdot\left(\vec{v}_j-\vec{v}_i\right)\ge 0$$

表明在移动距离小于最小值后，需要保证相对速度在轴向上是非负值，如此将会慢慢靠近最小值而不超过。通过这个式子可看出雅可比矩阵为1×12，给出公式为

$$J_{lin}{}^{i}=-\vec{s}^{wcs^{t}}$$
$$J_{lin}{}^{j}=\vec{s}^{wcs^{t}}$$
$$J_{ang}{}^{i}=0$$
$$J_{ang}{}^{j}=0$$

但是，这是个错误的雅可比矩阵，因为这里存在约束力但公式中并没有将约束力矩包含进来。接下来将重新构建雅可比矩阵，同时包含力和力矩。设刚好在关节限制时，物体的质心坐标分别为$\vec{r}_{lim_i}{}^{wcs}$和$\vec{r}_{lim_j}{}^{wcs}$。这两个坐标是物体质心的移动得到并且是世界系下表示的。现假设作用在物体i上的力为$\vec{F}$，并且这个力必须要与关节轴向$\vec{s}^{wcs}$平行；根据牛顿定律，作用在物体j上的力为$-\vec{F}$。那么限制力对物体i的力矩为

$$\vec{\tau}_{lim_i}=\vec{r}_{lim_i}{}^{wcs}\times\vec{F}$$

对物体j的力矩为

$$\vec{\tau}_{lim_j}=-\vec{r}_{lim_j}{}^{wcs}\times\vec{F}$$

另外，力矩不能影响两物体之间的相对角速度值，意味着系统角动量保持不变，所以

$$\vec{\tau}_{lim_i}\mathrm{t}+\vec{\tau}_{lim_j}\mathrm{t}=0$$

即

$$\vec{\tau}_{lim_i}+\vec{\tau}_{lim_j}=0$$

回顾$\vec{F}_{slider}{}^{lo}$方向与$\vec{s}^{wcs}$一致，可得

$$\vec{F}_{slider}{}^{lo}=\lambda_{lo}\vec{s}^{wcs}$$

带入上式可得

$$\vec{r}_{lim_i}{}^{wcs}\times\vec{s}^{wcs}\lambda_{lo}-\vec{r}_{lim_j}{}^{wcs}\times\vec{s}^{wcs}\lambda_{lo}=0$$

又$\vec{\omega}_i=\vec{\omega}_j$，可得

$$(\vec{r}_{lim_i}{}^{wcs}\times\vec{s}^{wcs})^T\vec{\omega}_i-(\vec{r}_{lim_j}{}^{wcs}\times\vec{s}^{wcs})^T\vec{\omega}_j=0$$

这里λ_{lo}为非负的拉格朗日乘子。如此雅可比矩阵可能是

$$J_{lin}{}^{i} = -\vec{s}^{wcs^{t}}$$
$$J_{lin}{}^{j} = \vec{s}^{wcs^{t}}$$
$$J_{ang}{}^{i} = (\vec{r}_{lim_i}{}^{wcs} \times \vec{s}^{wcs})^T$$
$$J_{ang}{}^{j} = -(\vec{r}_{lim_j}{}^{wcs} \times \vec{s}^{wcs})^T$$

现简化雅可比，消除$\vec{r}_{lim_i}{}^{wcs}$和$\vec{r}_{lim_j}{}^{wcs}$。已知此时$\vec{c} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$可改写为$\vec{c} = \vec{r}_{lim_j}{}^{wcs} - \vec{r}_{lim_i}{}^{wcs}$。现在令

$$\vec{r}_{lim_i}{}^{wcs} \times \vec{F} = (\vec{r}_{lim_j}{}^{wcs} - \vec{c}) \times \vec{F} = \vec{r}_{lim_j}{}^{wcs} \times \vec{F} - \vec{c} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{lim_j}{}^{wcs} \times \vec{F} = \left(\vec{r}_{lim_i}{}^{wcs} + \vec{c}\right) \times \vec{F} = \vec{r}_{lim_i}{}^{wcs} \times \vec{F} + \vec{c} \times \vec{F}$$

这里取(主要是力矩值相等，存在多种叉积)

$$\vec{\tau}_{lim_i} = \vec{r}_{lim_i}{}^{wcs} \times \vec{F} = -\frac{1}{2}\vec{c} \times \vec{F} = -\frac{1}{2}\vec{c} \times \vec{s}^{wcs}\lambda_{lo}$$

则

$$\vec{\tau}_{lim_j} = \vec{r}_{lim_j}{}^{wcs} \times \vec{F} = \frac{1}{2}\vec{c} \times \vec{s}^{wcs}\lambda_{lo}$$

最后$\vec{\tau}_{lim_i} + \vec{\tau}_{lim_j} = 0$，可变化为

$$(\frac{1}{2}\vec{c} \times \vec{s}^{wcs})^T\vec{\omega}_i - \frac{1}{2}\vec{c} \times \vec{s}^{wcs})^T\vec{\omega}_j = 0$$

得

$$J_{lin}{}^{i} = -\vec{s}^{wcs^{t}}$$
$$J_{lin}{}^{j} = \vec{s}^{wcs^{t}}$$
$$J_{ang}{}^{i} = (\frac{1}{2}\vec{c} \times \vec{s}^{wcs})^T$$
$$J_{ang}{}^{j} = -\frac{1}{2}\vec{c} \times \vec{s}^{wcs})^T$$

添加错误偏置项，错误值为$d_{err} = d_{lo} - d_{dis}$

$$\vec{b}_{slider}{}^{lo} = k_{erp}\frac{d_{err}}{\Delta t} = k_{cor}d_{err}$$

如此计算出滑动约束最低值时的单个线性互补约束。针对最高值时，容易得

$$J_{slider}{}^{\hbar i} = -J_{slider}{}^{lo}$$

错误偏置项为

$$\vec{b}_{slider}{}^{lo} = k_{erp}\frac{d_{\hbar i} - d_{dis}}{\Delta t} = k_{cor}d_{err}$$

铰链关节限制：对比滑动关节和铰链关节限制并没什么不同，主要差别在于铰链关节轴描述为旋转轴，并且使用角度替代距离来测量。如果一开始保存两物体之间的相对旋转四元素表示为$q_{ini} = q_j q_i{}^*$，意义为将物体j相对于物体i的旋转量，其中物体j旋转为q_j，物体i旋转为q_i。q_{ini}表示的意义为在物体j旋转量的基础上逆旋转物体i的量。接下来，实时计算两物体的相对旋转量为

$$q_{rel} = (q_j q_i{}^*)^* q_{ini} = q_i q_j{}^* q_{ini}$$

表示当前物体j旋转量相对于物体i的旋转量为$q_j q_i{}^*$，这个相对量对于初始相对量的变化量为

q_{rel}。如果这个变化量为绕单位旋转轴$\vec{v}$旋转角度为θ，那么物体j对于物体i的相对改变量为

$$q_{rel} = [\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{v}]$$

这里容易计算得到$\frac{\theta}{2}$值。像处理滑动关节那样，对铰链关节限制最低θ_{lo}和最高值θ_{hi}。假设

$$\theta \le \theta_{lo}$$

即比限制的最低值还小，违反了限制条件。为了保证物体相对旋转在规定范围内，那么当低于最小值时，意味着

$$\vec{s}_{axis}{}^{wcs} \cdot (\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_i) \ge 0$$

那么可得

$$J_{lin}{}^{i} = 0$$
$$J_{lin}{}^{j} = 0$$
$$J_{ang}{}^{i} = -(\vec{s}^{wcs})^T$$
$$J_{ang}{}^{j} = (\vec{s}^{wcs})^T$$

对应的约束力为

$$\vec{F}_{hinge}{}^{lo} = (J_{hinge}{}^{lo})^T \lambda_{lo}$$

这里λ_{lo}为非负值拉格朗日乘子，因此有互补约束公式

$$(J_{hinge}{}^{lo})^T \vec{u} \ge 0, \lambda_{lo} \ge 0$$

错误修正项

$$\vec{b}_{hinge}{}^{lo} = k_{erp} \frac{\theta_{lo} - \theta}{\Delta t} = k_{cor}\theta_{err}$$

其中$\theta_{err} = \theta_{lo} - \theta$。对于最大值限制问题，简单处理为

$$J_{hinge}{}^{hi} = -J_{hinge}{}^{lo}$$

并且错误修正项为

$$\vec{b}_{hinge}{}^{hi} = k_{erp} \frac{\theta_{hi} - \theta}{\Delta t} = k_{cor}\theta_{err}$$

其中$\theta_{err} = \theta_{hi} - \theta$。

关节限制泛化：之前章节中指定了滑动和铰链关节的上下限制并得到约束方程，幸运地，存在更加通用的模式来处理这一类情况。实际上，可以对关节允许配置空间或可达区域构造为隐函数，$C(\ldots) \in R$的参数项。这里将指定的位置和角度统一为关节参数向量$\vec{q}$，作为广义坐标$\vec{s}$的函数。构造为如下隐函数

$$C(\vec{q}(\vec{s})) < 0 \text{ 在外面}$$

$$C(\vec{q}(\vec{s})) = 0 \text{ 在边界}$$

$$C(\vec{q}(\vec{s})) > 0 \text{ 在里面}$$

现在重新构造位置约束为

$$C(\vec{q}(\vec{s})) \ge 0$$

微分形式构造运动约束方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{C}\big(\vec{\mathrm{q}}(\vec{\mathrm{s}})\big) = \frac{\mathrm{dC}\big(\vec{\mathrm{q}}(\vec{\mathrm{s}})\big)}{\mathrm{d}\vec{\mathrm{q}}}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{q}}}{\mathrm{d}\vec{\mathrm{s}}}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{s}}}{\mathrm{dt}} = J_C\vec{\mathrm{u}} \geq 0$$

另外构造错误修正项$\overrightarrow{b_C}$使得

$$J_C\vec{\mathrm{u}} \geq \overrightarrow{b_C}$$

约束力被确定为

$$\vec{F}_{reaction}{}^{C} = J_C{}^T\lambda_C$$

其中λ_C为非负数拉格朗日乘子向量。最终，可得出互补约束为

$$J_C\vec{\mathrm{u}} - \overrightarrow{b_C} \geq 0 \;\; \vec{\lambda}_C \geq 0$$

不管关节限制是否违反或者到达边界，带雅可比和错误项的约束方程必须添加到系统方程中。这与碰撞检测完全一致，强制关节限制用这种形式与查找接触点并计算法线并无不同。

关节驱动(Joint Motors)

通过关节和关节限制，能构建两物体相对运动的范围接下来将寻找一种控制运动的方案来替换之前的方法。关节驱动能对关节的某一自由度施加力矩或力来促使物体运动。这种关节驱动模型使用两种参数：期望速度$v_{desired}$和能被应用达到期望速度的最大力矩或力λ_{max}。在之前的几节中可知错误修正偏置项能被用于调整速度。同样的原理被用于驱动一个关节达到预期的速度，公式如下

$$J_{motor}\vec{\mathrm{u}} \geq \overrightarrow{b_{motor}}$$

即

$$\left[J_{lin}{}^{i}\; J_{ang}{}^{i}\; J_{lin}{}^{j}\; J_{ang}{}^{j}\right]\vec{\mathrm{u}} \geq \overrightarrow{b_{motor}}$$

对于一个自由度的滑动和铰链关节，驱动关节雅可比维度是1×12维，并且右边项将是一个标量。事实上，

$$\overrightarrow{b_{motor}} = v_{desired}$$

滑动和铰链的雅可比矩阵矩阵很容易得出为

$$J_{motor}{}^{slider} = [\vec{s}_{axis}{}^{wcs}, 0, -\vec{s}_{axis}{}^{wcs}, 0]$$
$$J_{motor}{}^{hinge} = [0, -\vec{s}_{axis}{}^{wcs}, 0, \vec{s}_{axis}{}^{wcs}]$$

驱动力公式为

$$\vec{F}_{motor} = J_{motor}{}^{T}\lambda_{motor}$$

其中λ_{motor}是拉格朗日乘子，意义为关节约束力在关节轴向上的大小。设置λ_{motor}的上下限，则可得构建最大的力，得出

$$-\lambda_{max} \leq \lambda_{motor} \leq \lambda_{max}$$

最后，构造力和期望速度为互补变量，需满足

$$J_{motor}\vec{\mathrm{u}} \geq \overrightarrow{b_{motor}}, \qquad |\lambda_{motor}| \leq \lambda_{max}$$

这里的基本思路为如果速度超过期望速度，那么驱动力以最大值将速度拉回到期望速度。另一方面，如果达到期望速度，驱动力为 0 到λ_{max}之间任意值来保持期望速度。对于存在上下限制的驱动关节，已经得出线性互补约束方程。这种理论很容易扩展到更复杂的关节类别，简单构造自由度上的雅可比矩阵。另外一面，关节驱动的摩擦模型很容易获得。设置期望速度为 0 并且设置一个常量最大力。那么所有关节运动将被摩擦驱动力减速到 0。为了驱动关

节到一个指定位置，这个位置关节驱动将是关节限制模型和关节驱动模型的混合。这里的技巧是设置最小最大关节显示等于期望的位置坐标，并且限制驱动力。

物体约束统一设计

前面章节已经介绍了 4 种能用雅可比矩阵描述的约束类别:关节约束，接触约束，关节限制和关节驱动。对这些约束类别，使用如下运动约束方程

$$J_{joint}\vec{u} = \vec{b}_{joint}$$

$$J_{contact}\vec{u} \geq \vec{b}_{contact}$$
$$J_{limit}\vec{u} \geq \vec{b}_{limit}$$
$$J_{motor}\vec{u} \geq \vec{b}_{motor}$$

添加外力到方程中，得泛化加速度方程为

$$\dot{\vec{u}} = M^{-1}({J_{joint}}^T\vec{\lambda}_{joint} + {J_{contact}}^T\vec{\lambda}_{contact} + {J_{limit}}^T\vec{\lambda}_{limit} + {J_{motor}}^T\vec{\lambda}_{motor} + \vec{f}_{ext})$$

其中拉格朗日乘子需满足条件为

$$-\infty \leq \vec{\lambda}_{joint} \leq \infty$$

$$0 \leq \vec{\lambda}_{contact} \leq \infty$$
$$0 \leq \vec{\lambda}_{limit} \leq \infty$$
$$-\vec{\lambda}_{max} \leq \vec{\lambda}_{motor} \leq \vec{\lambda}_{max}$$

使用一般的离散步进模拟能得到如下互补公式

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{joint}M^{-1}{J_{joint}}^T & J_{joint}M^{-1}{J_{contact}}^T & J_{joint}M^{-1}{J_{limit}}^T & J_{joint}M^{-1}{J_{motor}}^T \\ J_{contact}M^{-1}{J_{joint}}^T & J_{contact}M^{-1}{J_{contact}}^T & J_{contact}M^{-1}{J_{limit}}^T & J_{contact}M^{-1}{J_{motor}}^T \\ J_{limit}M^{-1}{J_{joint}}^T & J_{limit}M^{-1}{J_{contact}}^T & J_{limit}M^{-1}{J_{limit}}^T & J_{limit}M^{-1}{J_{motor}}^T \\ J_{motor}M^{-1}{J_{joint}}^T & J_{motor}M^{-1}{J_{contact}}^T & J_{motor}M^{-1}{J_{limit}}^T & J_{motor}M^{-1}{J_{motor}}^T \end{bmatrix} & A_{aux} \\ A_{aux} & A_{aux} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\lambda}_{joint} \\ \vec{\lambda}_{contact} \\ \vec{\lambda}_{limit} \\ \vec{\lambda}_{motor} \\ \vec{\lambda}_{aux} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} J_{joint}(\vec{u} + \Delta t M^{-1}\vec{f}_{ext}) - \vec{b}_{joint} \\ J_{contact}(\vec{u} + \Delta t M^{-1}\vec{f}_{ext}) - \vec{b}_{joint} \\ J_{limit}(\vec{u} + \Delta t M^{-1}\vec{f}_{ext}) - \vec{b}_{joint} \\ J_{motor}(\vec{u} + \Delta t M^{-1}\vec{f}_{ext}) - \vec{b}_{joint} \\ \vec{b}_{aux} \end{bmatrix} \geq 0$$

其中互补变量为

$$\begin{bmatrix} -\infty \\ 0 \\ 0 \\ -\vec{\lambda}_{max} \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \vec{\lambda}_{joint} \\ \vec{\lambda}_{contact} \\ \vec{\lambda}_{limit} \\ \vec{\lambda}_{motor} \\ \vec{\lambda}_{aux} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \vec{\lambda}_{max} \\ \infty \end{bmatrix}$$

其中A_{aux}和$\vec{b}_{aux}$为之前介绍摩擦力的辅助约束量。现将所有雅可比矩阵统一到一个矩阵，表示为

$$J=\begin{bmatrix} J_{joint} \\ J_{contact} \\ J_{limit} \\ J_{motor} \end{bmatrix}$$

所有的错误偏置项统一为一个错误项，表示为

$$\vec{b}_{error}=\begin{bmatrix} \vec{b}_{joint} \\ \vec{b}_{contact} \\ \vec{b}_{limit} \\ \vec{b}_{motot} \end{bmatrix}$$

并且拉格朗日乘子构成一个向量，表示为

$$\vec{\lambda}=\begin{bmatrix} \vec{\lambda}_{joint} \\ \vec{\lambda}_{contact} \\ \vec{\lambda}_{limit} \\ \vec{\lambda}_{motor} \\ \vec{\lambda}_{aux} \end{bmatrix}$$

可得

$$\underbrace{\begin{bmatrix} JM^{-1}J^{T} & A_{aux} \\ A_{aux} & A_{aux} \end{bmatrix}}_{A}\vec{\lambda}+\underbrace{\begin{bmatrix} J\left(\vec{u}+\Delta t M^{-1}\vec{f}_{ext}\right)-\vec{b}_{error} \\ \vec{b}_{aux} \end{bmatrix}}_{b}\geq 0$$

互补为

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\infty \\ 0 \\ 0 \\ -\vec{\lambda}_{max} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{\lambda}_{low}}\leq\vec{\lambda}\leq\underbrace{\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \vec{\lambda}_{max} \\ \infty \end{bmatrix}}_{\vec{\lambda}_{high}}$$

重写互补公式得

$$A\vec{\lambda}+b\geq 0,\vec{\lambda}_{low}\leq\vec{\lambda}\leq\vec{\lambda}_{high}$$

如此可计算出$\vec{\lambda}$值。另外，重写加速度公式为

$$\dot{\vec{u}}=M^{-1}(J^{T}\vec{\lambda}+\vec{f}_{ext})$$

位置更新

广义坐标计算为

$$\vec{s}^{t+\Delta t}=\vec{s}^{t}+\Delta tS\vec{u}^{t+\Delta t}$$

称为广义坐标更行公式。上式种，将使用无穷小朝向更新方案。上式计算快速，但对于高速

旋转的物体更新，很容易造成准确性问题，特别当使用关节约束的情形。例如，对于车的模拟种，4 个车轮可能通过车轮关节被绑定到车身。当车行驶时，车轮可能在不正确的方向旋转，致使关节变得失效。这种情况当车行驶很快和转弯的时候，能被观察到。车轮变得脱离正确的轴旋转。但如果车轮旋转很慢，或者转弯很慢的时候，该问题基本不明显。这种问题主要是车轮的高速旋转造成数值计算错误。有限的朝向更新能用来减少准确性问题。这需要更多的计算开销，但是对告诉旋转物体会更加精确。

约束力混合

关节约束方程的形式为

$$J\vec{u} = \vec{b}$$

其中$\vec{u}$包含所有物体速度的向量，雅可比矩阵J中的每一行都对系统自由度降一，$\vec{b}$为错误偏置项。关节轴承的约束力计算公式为

$$\vec{F} = J^T\vec{\lambda}$$

这里$\vec{\lambda}$与$\vec{b}$有相同维数的拉格朗日乘子向量。接下来添加一个新项来重写约束方程为

$$J\vec{u} = \vec{b} - K_{cmf}\vec{\lambda}$$

其中K_{cmf}为对角方阵。矩阵K_{cmf}混合约束力，对角元素为非负值表示允许原始约束方程存在一定的错误，该错误与$K_{cmf}\vec{\lambda}$成一定的比列。运动方程为

$$M\dot{\vec{u}} = M\frac{\vec{u}^{t+\Delta t} - \vec{u}^t}{\Delta t} = J^T\vec{\lambda}$$

并且

$$\vec{u}^{t+\Delta t} = \vec{u}^t + \Delta t M^{-1}J^T\vec{\lambda}$$

假设方程在$t + \Delta t$成立，替换表达式$\vec{u}^{t+\Delta t}$到约束方程，可得

$$J\vec{u}^{t+\Delta t} = \vec{b} - K_{cmf}\vec{\lambda}$$

进而得

$$J\vec{u}^t + \Delta t J M^{-1}J^T\vec{\lambda} = \vec{b} - K_{cmf}\vec{\lambda}$$

那么

$$\left(JM^{-1}J^T + \frac{1}{\Delta t}K_{cmf}\right)\vec{\lambda} = \frac{1}{\Delta t}(\vec{b} - J\vec{u}^t)$$

从这里可值K_{cmf}被添加到原始系统矩阵的对角线上。K_{cmf}对角线上只是用正值能消失原始系统矩阵奇异性和提升准确性。