刚体运动-无约束

Kay

这里将主要介绍模拟刚体在无约束情况下运动的物理基础。所谓无约束，主要是指刚体之间无碰撞和关节等约束。在无约束情况下，物体的运动模拟会变得简单。由于刚体运动几乎与质点运动一样，是特殊的质点系，本节将从质点运动开始。

质点

质点带有质量的物体，其运动状态包括了位移，速度，加速度，动量，冲量等。考虑1个质点，其质量为m，在t时刻下的世界坐标系下的位置为x，速度为v，受合外力为F。向量

$$X = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

描述质点的运动状态，则其微分表示为

$$\frac{d}{dt}X = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{F}{m} \end{pmatrix}。$$

其中

$$\dot{x} = v$$

和

$$\dot{v} = a = \frac{F}{m}。$$

牛顿第二定律

$$F = ma = m\frac{dv}{dt},$$

转化得

$$Fdt = mdv,$$

两边同时积分得

$$\int_{t_1}^{t_2} Fdt = \int_{t_1}^{t_2} mdv = mv_2 - mv_1。$$

动量定理：质点所受合力对时间的积分，等于质点质量与质点末、初态速度之差的乘积。其实等式左边即为质点在这一时间段内受到的**冲量**

$$I_{impulse} = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$

等式右边即为质点**动量**

$$p = mv$$

的变化量。微分形式

$$dp = Fdt = dI$$

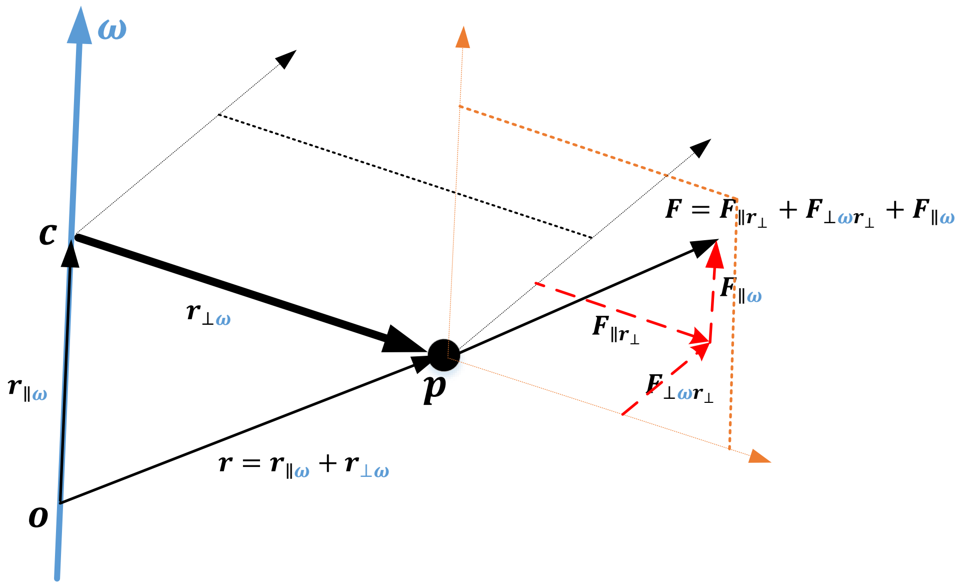
和积分形式

$$p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} Fdt = I_{impulse}。$$

定点力矩：见图，任意定点O，力F作用点为点A，点A相对于定点O的位置矢量$\boldsymbol{r}$，则F相对

点O的力矩为$\boldsymbol{r}$与F的叉积，记为

$$M = r \times F。$$



定轴力矩：见图，取任意轴，轴的单位方向为ω，以及任取轴上一点O，力F作用点为点A，点A相对于定点O的位置矢量$\boldsymbol{r}$，则F相对于轴的力矩为F相对任意点O的力矩在轴方向ω上的分量，记为

$$M = ((r \times F) \cdot \omega)\omega。$$

进一步分析，设

$$\boldsymbol{r}_{\perp\omega} \times \boldsymbol{F}_{\perp\omega r_\perp} = \boldsymbol{k\omega},$$

得

$$(\boldsymbol{r} \times \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\omega} = [(\boldsymbol{r}_{\parallel\omega} + \boldsymbol{r}_{\perp\omega}) \times \mathbf{F}] \cdot \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{r}_{\parallel\omega} \times \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{r}_{\perp\omega} \times \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \left(\boldsymbol{r}_{\parallel\omega} \times \left(\boldsymbol{F}_{\parallel r_\perp} + \boldsymbol{F}_{\perp\omega r_\perp} + \boldsymbol{F}_{\parallel\omega}\right)\right) \cdot \boldsymbol{\omega} + \left(\boldsymbol{r}_{\perp\omega} \times \left(\boldsymbol{F}_{\parallel r_\perp} + \boldsymbol{F}_{\perp\omega r_\perp} + \boldsymbol{F}_{\parallel\omega}\right)\right) \cdot \boldsymbol{\omega} = \left(\boldsymbol{r}_{\parallel\omega} \times \boldsymbol{F}_{\parallel r_\perp}\right) \cdot \boldsymbol{\omega} + \left(\boldsymbol{r}_{\parallel\omega} \times \boldsymbol{F}_{\perp\omega r_\perp}\right) \cdot \boldsymbol{\omega} + \left(\boldsymbol{r}_{\perp\omega} \times \boldsymbol{F}_{\perp\omega r_\perp}\right) \cdot \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{r}_{\perp\omega} \times \boldsymbol{F}_{\parallel\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \boldsymbol{k\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{0} = \boldsymbol{k},$$

则

$$M = \left((r \times F) \cdot \omega\right)\omega = \boldsymbol{k\omega} = \boldsymbol{r}_{\perp\omega} \times \boldsymbol{F}_{\perp\omega r_\perp}。$$

冲量矩：（定点或定轴）力矩M在时间上的积分$\boldsymbol{\tau_{impulse}} = \int_{t_1}^{t_2} M dt$。

定点角动量：任意定点O，质量为m，速度为v的质点相对于定点O的位置矢量$\boldsymbol{r}$，则质点相对点O的角动量为$\boldsymbol{r}$与动量$\boldsymbol{P} = mv$的叉积，记为

$$L = r \times \boldsymbol{P}。$$

定轴角动量：取任意轴，轴的单位方向为ω，以及任取轴上一点O，质量为m，速度为v的质点相对于定点O的位置矢量$\boldsymbol{r}$，则质点相对定轴角动量为定点角动量在轴方向ω上的分量，将上图中力$\boldsymbol{F}$替换成动量$\boldsymbol{P}$记为

$$M = ((r \times P) \cdot \omega)\omega = \boldsymbol{r}_{\perp\omega} \times \boldsymbol{P}_{\perp\omega r_\perp}。$$

角动量定理：质点在某一过程中角动量的变化量等于质点在这个过程中所受的冲量矩。微分形式

$$dL = Mdt$$

和积分形式

$$L_2 - L_1 = \int_{t_1}^{t_2} Mdt。$$

简单推导:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times mv) = v \times mv + r \times F = M。$$

刚体

刚体对比质点而言要更加复杂，除了平移运动，还有旋转变换。

1 位置和朝向

由于刚体能平移和旋转，定义刚体在局部坐标系下是固定且不变的，定义平移$\boldsymbol{x}$和旋转$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{x}'\ \boldsymbol{y}'\ \boldsymbol{z}']$表示刚体从局部坐标系到世界坐标系的变换。便于简化分析，假设刚体的质心与局部坐标系的原点重合，即质心坐标系。在后面会更多的介绍质心，现在先认为质心为刚体的几何中心点，则局部坐标系的原点即为刚体的几何中心点。根据旋转变换$\boldsymbol{R}$可知，刚体绕质心旋转，那么在本地坐标系下的向量$\boldsymbol{p_i}$将会旋转到世界坐标系下的$\boldsymbol{Rp_i}$。从而，刚体上的任意一点$\boldsymbol{p_i}$经过旋转和平移得到世界坐标系下的点$\boldsymbol{p_i}'$，计算公式为

$$\boldsymbol{p_i}' = \boldsymbol{Rp_i} + \boldsymbol{x}。$$

刚体在本地坐标系下的质心与坐标原点重合，那么刚体在世界坐标系下的质心即为$\boldsymbol{x}$。并且，旋转矩阵

$$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{x}'\ \boldsymbol{y}'\ \boldsymbol{z}'] = \begin{pmatrix} r_{xx} & r_{yx} & r_{zx} \\ r_{xy} & r_{yy} & r_{zy} \\ r_{xz} & r_{yz} & r_{zz} \end{pmatrix}$$

，刚体的本地坐标系坐标轴$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})^{\boldsymbol{T}}$ 在世界坐标系下的向量表示为

$$\boldsymbol{Rx} = (r_{xx}, r_{xy}, r_{xz})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{x}'。$$

同理可知矩阵$\boldsymbol{R}$的$\boldsymbol{y}'$和$\boldsymbol{z}'$列向量。对于平移$\boldsymbol{x}$和旋转$\boldsymbol{R}$，称为刚体的位置$\boldsymbol{position}$和朝向$\boldsymbol{orientation}$。

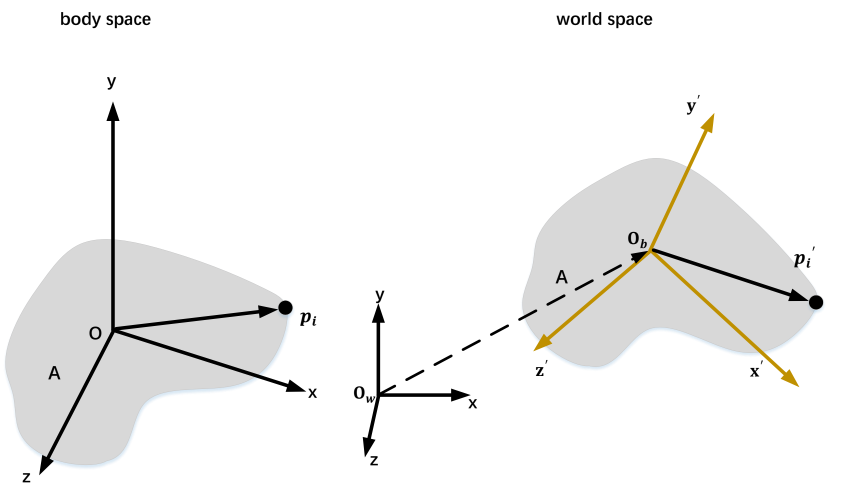


图 1　物体在本地坐标系和世界坐标系下表示

2 线速度和角速度

刚体有了位置和朝向，接下来需要分析随时间的变化率$\dot{x}$和$\dot{R}$。$\boldsymbol{x}$是刚体质心在世界坐标系下位置，$\dot{x}$为刚体质心在世界坐标系下的速度，定义为

$$v = \dot{x}。$$

如果刚体的朝向是不变的，只存在位移变化，那么v表示为平移的速度。

除了平移外刚体能旋转，如果刚体不发生平移，即质心位置不变，那么刚体上的任意一点的运动只通过绕过质心的旋转轴旋转产生。定义旋转轴为$\boldsymbol{\omega}$，它的方向$\boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$描述刚体旋转轴的方向，它的大小$|\boldsymbol{\omega}|$描述物体绕轴旋转的快慢。如此，如果$|\boldsymbol{\omega}|$为常值，则正比于与刚体在一定时间内的旋转角度，$\boldsymbol{\omega}$定义为刚体的角速度。

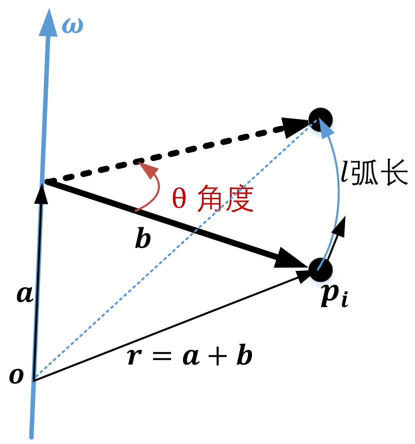


图 2　质点圆周运动

$\dot{R}$与$\boldsymbol{\omega}$存在什么关系？已知$\boldsymbol{R}$的列向量表示为刚体的本地坐标轴在一定时间的变换值，那么$\dot{R}$的列向量描述了刚体的本地坐标轴变换的变化率，接下来考察一下刚体的本地坐标系下的任意一个向量在角速度作用下的变化。假设刚体质心在世界坐标系下为点O，角速度$\boldsymbol{\omega}$，点$\boldsymbol{p_i}$为刚体上一点在世界坐标系的位置，相对于质心的矢量为$\boldsymbol{r}$，见图 2。途中$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{\omega}$方向

垂直（$|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{\omega}|=|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}|$）以及$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{\omega}$方向平行（$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}=0$）。由角速度公式

$$|\theta|=|\boldsymbol{\omega}|t$$

以及弧长公式

$$|l|=|\boldsymbol{b}||\theta|$$

得

$$|l|=|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}|t。$$

又

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},$$

得

$$|l|=|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|t,$$

则（考虑方向）

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}。$$

使用叉乘矩阵，也是反对称矩阵（$\omega^*=-\omega^{*\mathrm{T}}$），表示为

$$skew(\omega)=\omega^*=\begin{pmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\omega^*\boldsymbol{r}=skew(\omega)\boldsymbol{r}。$$

综上，在时间$\boldsymbol{t}$，刚体局部坐标系$\boldsymbol{x}$轴在世界坐标系下表示为旋转矩阵$\boldsymbol{R}$的第一列

$$\boldsymbol{x}'=(r_{xx},r_{xy},r_{xz})^{\boldsymbol{T}},$$

那么此向量的变化率为

$$\dot{\boldsymbol{x}}'=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}'。$$

同样使用另外的两坐标轴，则得出

$$\dot{R}=[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}'\ \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{y}'\ \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{z}']=\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{x}'\ \boldsymbol{y}'\ \boldsymbol{z}']=\boldsymbol{\omega}\times R。$$

对于刚体第i个质点在本地坐标系下位置$\boldsymbol{p_i}$，在世界坐标系下位置$\boldsymbol{p_i}'$，其世界坐标系下的速度定义为$\dot{\boldsymbol{p_i}}'$。由

$$\boldsymbol{p_i}'=R\boldsymbol{p_i}+\boldsymbol{x}$$

得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p_i}}'=(R\dot{\boldsymbol{p_i}+x})&=\dot{R}\boldsymbol{p_i}+\dot{x}=\boldsymbol{\omega}\times R\boldsymbol{p_i}+v\\&=\boldsymbol{\omega}\times(R\boldsymbol{p_i}+x-x)+v\\&=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{p_i}'-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}\\&=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v},\end{aligned}$$

表明质点的速度由线速度和角速度两部分组成。

3 质量和质心

假设刚体离散化为无数个质点构成（比如n个），$\boldsymbol{m_i}$表示第i个质点的质量，则刚体的质量定义为

$$M=\sum m_i。$$

$\boldsymbol{p_i}$表示第i个质点在局部坐标系下位置，则质心在本地坐标系的位置c_{body}定义为

$$c_{body} = \frac{\sum m_i p_i}{M}。$$

$\boldsymbol{p_i}'$表示第i个质点在世界坐标系下位置，则质心在世界坐标系的位置c_w定义为

$$c_w = \frac{\sum m_i \boldsymbol{p_i}'}{M}。$$

由$\boldsymbol{p_i}' = R\boldsymbol{p_i} + x$得

$$c_w = \frac{\sum m_i(R\boldsymbol{p_i}+x)}{M} = \frac{R\sum m_i \boldsymbol{p_i} + x\sum m_i}{M} = Rc_{body} + x。$$

如果$c_{body} = \mathbf{0}$即质心与本地坐标系原点重合，则$c_w = x$。另外

$$\sum m_i \boldsymbol{r} = \sum m_i (R\boldsymbol{p_i} + x - x) = R\sum m_i p_i = 0。$$

4 力和力矩，线动量和角动量，惯性张量

当刚体受力时，可以认为力作用在某一个质点上。因为刚体是实心的，这个受力作用的质点也可以刚体内部的点，而不仅仅是刚体几何体表面上的点。假设m_i表示第i个质点质量，$\boldsymbol{p_i}'$表示质点世界坐标位置，f_i表示所受外力，$\boldsymbol{r_i}$表示质心到质点的矢量，τ_i表示外力矩，则$\tau_i = \boldsymbol{r_i} \times f_i$。刚体所有合外力为

$$F = \sum f_i$$

和合外力矩为

$$\boldsymbol{\tau} = \sum \tau_i = \sum r_i \times f_i。$$

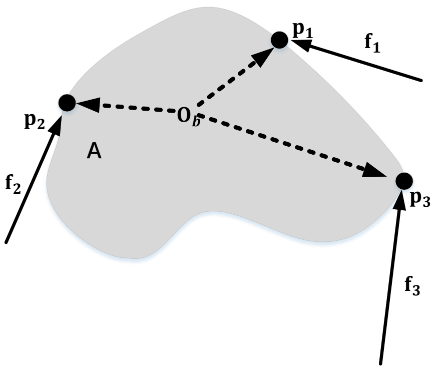


图 3 力和力矩

质量为m，速度为v的质点，则动量为

$$p = mv。$$

刚体的线动量为所有质点的质量和速度乘积的总和

$$P = \sum m_i \dot{\boldsymbol{p_i}}'。$$

由

$$\dot{\boldsymbol{p_i}}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{v}$$

得

$$P = \sum m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\omega} \times (\sum m_i \boldsymbol{r_i}) + \boldsymbol{v}\sum m_i。$$

又

$$\sum m_i \boldsymbol{r_i} = \sum m_i(\boldsymbol{p_i}' - x) = 0$$

得

$$P = M\boldsymbol{v}。$$

从这个结果可看出，刚体的总动量可将刚体看成是一个质量为M和速度为$\boldsymbol{v}$的质点的动量。因此，如果质量M是定值，则刚体的动量P与速度$\boldsymbol{v}$的关系可得

$$\dot{P} = M\dot{\boldsymbol{v}} = F,$$

刚体的动量定理与质点的动量定理保持一致：刚体所受合力对时间的积分，等于刚体质量与质点末、初态线速度之差的乘积。

质量为m，速度为v的质点，相对于定点的矢量为r，则角动量为

$$l = r \times p = r \times mv。$$

刚体绕质心的角动量为所有质点绕质心的角动量之和

$$L = \sum r_i \times m_i \dot{\boldsymbol{p_i}}' = \sum r_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_i} + \boldsymbol{v}) = \sum m_i r_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_i}) + \left(\sum m_i r_i\right) \times \boldsymbol{v}。$$

由于

$$\sum m_i r_i = 0$$

得

$$L = \sum m_i r_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r_i})。$$

又由于

$$r \times (\omega \times r) = (r \cdot r)\omega - (r \cdot \omega)r = (r'r)\omega - (rr')\omega = (r'r - rr')\omega = \begin{bmatrix} r_y^2 + r_z^2 & -r_x r_y & -r_x r_z \\ -r_y r_x & r_z^2 + r_x^2 & -r_y r_z \\ -r_z r_x & -r_z r_y & r_x^2 + r_y^2 \end{bmatrix} \omega,$$

得

$$L = \sum m_i \begin{bmatrix} r_{iy}^2 + r_{iz}^2 & -r_{ix} r_{iy} & -r_{ix} r_{iz} \\ -r_{iy} r_{ix} & r_{iz}^2 + r_{ix}^2 & -r_{iy} r_{iz} \\ -r_{iz} r_{ix} & -r_{iz} r_{iy} & r_{ix}^2 + r_{iy}^2 \end{bmatrix} \omega = \begin{bmatrix} \sum m_i (r_{iy}^2 + r_{iz}^2) & -\sum m_i r_{ix} r_{iy} & -\sum m_i r_{ix} r_{iz} \\ -\sum m_i r_{iy} r_{ix} & \sum m_i (r_{iz}^2 + r_{ix}^2) & -\sum m_i r_{iy} r_{iz} \\ -\sum m_i r_{iz} r_{ix} & -\sum m_i r_{iz} r_{iy} & \sum m_i (r_{ix}^2 + r_{iy}^2) \end{bmatrix} \omega。$$

设

$$I_{xx} = \sum m_i (r_{iy}^2 + r_{iz}^2), I_{yy} = \sum m_i (r_{iz}^2 + r_{ix}^2), I_{zz} = \sum m_i (r_{ix}^2 + r_{iy}^2)$$

以及

$$I_{xy} = I_{yx} = \sum m_i r_{ix} r_{iy}，\ I_{xz} = I_{zx} = \sum m_i r_{ix} r_{iz}，\ I_{yz} = I_{zy} = \sum m_i r_{iz} r_{iy},$$

并且

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix},$$

则

$$L = I\omega。$$

其中I绕质心的惯性张量且为对称矩阵，并且逆矩阵也是对称矩阵，

$$(I^{-1})^T = (I^T)^{-1} = I^{-1}。$$

非主对角线元素称为惯量积。惯性张量的计算与选取的旋转参考点相关。由线动量得知$\dot{P}=F$，现在考察

$$\frac{d}{dt}L=\frac{d}{dt}\sum r_i\times m_i\dot{\boldsymbol{p}_i}'=\sum\frac{d}{dt}(r_i\times m_i\dot{\boldsymbol{p}_i}')=\sum(\boldsymbol{\omega}\times r_i)\times m_i\dot{\boldsymbol{p}_i}'+\sum r_i\times m_i\ddot{\boldsymbol{p}_i}'=$$

$$\sum m_i(\boldsymbol{\omega}\times r_i)\times(\boldsymbol{\omega}\times r_i+v)+\sum r_i\times m_i\ddot{\boldsymbol{p}_i}'=\sum m_i(\boldsymbol{\omega}\times r_i)\times v+\sum r_i\times m_i\ddot{\boldsymbol{p}_i}'=$$

$$\left(\boldsymbol{\omega}\times\left(\sum m_i r_i\right)\right)\times v+\sum r_i\times m_i\ddot{\boldsymbol{p}_i}'=\sum r_i\times m_i\ddot{\boldsymbol{p}_i}'=\sum r_i\times f_i=\boldsymbol{\tau},$$

得

$$\dot{L}=\boldsymbol{\tau}。$$

上述惯性张量的计算与坐标系有关，假设本地坐标系下的惯性张量为I_b，世界坐标系的惯性张量为I_w，考察I_b由I_w的关系。由

$$\boldsymbol{p_i}'=R\boldsymbol{p_i}+x$$

和

$$\boldsymbol{r_i}'=\boldsymbol{p_i}'-x=R\boldsymbol{p_i},$$

且

$$R^TR=RR^T=E$$

得

$$\boldsymbol{r_i'^T r_i'}=\boldsymbol{r_{ix}'^2}+\boldsymbol{r_{iy}'^2}+\boldsymbol{r_{iz}'^2}$$

和

$$r_i'r_i'^T=\begin{bmatrix}r_{ix}'\\ r_{iy}'\\ r_{iz}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{ix}' & r_{iy}' & r_{iz}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{ix}'^2 & r_{ix}'r_{iy}' & r_{ix}'r_{iz}'\\ r_{iy}'r_{ix}' & r_{iy}'^2 & r_{iy}'r_{iz}'\\ r_{iz}'r_{ix}' & r_{iz}'r_{iy}' & r_{iz}'^2\end{bmatrix}。$$

那么惯性张量

$$I_w=\begin{bmatrix}\sum m_i(\boldsymbol{r_{iy}^2}+\boldsymbol{r_{iz}^2}) & -\sum m_i\,\boldsymbol{r_{ix}r_{iy}} & -\sum m_i\,\boldsymbol{r_{ix}r_{iz}}\\ -\sum m_i\,\boldsymbol{r_{iy}r_{ix}} & \sum m_i\,(\boldsymbol{r_{iz}^2}+\boldsymbol{r_{ix}^2}) & -\sum m_i\,\boldsymbol{r_{iy}r_{iz}}\\ -\sum m_i\,\boldsymbol{r_{iz}r_{ix}} & -\sum m_i\,\boldsymbol{r_{iz}r_{iy}} & \sum m_i\,(\boldsymbol{r_{ix}^2}+\boldsymbol{r_{iy}^2})\end{bmatrix}=\sum m_i\left(\boldsymbol{r_i'^T r_i'E}-\boldsymbol{r_i'r_i'^T}\right)$$

$$=\sum m_i((Rr_{i0})^T(Rr_{i0})\boldsymbol{E}-(Rr_{i0})(Rr_{i0})^T)=\sum m_i\left(r_{i0}^TR^TRr_{i0}\boldsymbol{E}-Rr_{i0}r_{i0}^TR^T\right)$$

$$=\sum m_i\left(r_{i0}^Tr_{i0}RR^T-Rr_{i0}r_{i0}^TR^T\right)=\sum m_i\left(Rr_{i0}^Tr_{i0}R^T-Rr_{i0}r_{i0}^TR^T\right)$$

$$=R\left(\sum m_i\left(r_{i0}^Tr_{i0}\boldsymbol{E}-r_{i0}r_{i0}^T\right)\right)R^T=RI_bR^T,$$

并且

$$I_w^{-1}=(RI_bR^T)^{-1}=R^{T^{-1}}I_b^{-1}R^{-1}=RI_b^{-1}R^T。$$

转动惯量垂直轴定理：对于一个刚体薄片关于一条与其垂直的轴（称为**垂直轴**）的转动惯量I_z，可以在薄片上取两个互相垂直且与垂直轴相交的轴，分别计算薄片关于这两条轴的转动惯量I_x和I_y，这样可得$I_z=I_x+I_y$。

转动惯量平行轴定理：若I_1是刚体对于质心轴w_1的转动惯量，M表示刚体质量，另一条旋转轴w_2且平行于w_1，d表示w_2和w_1的距离，则刚体对于旋转轴w_2的转动惯量$I_2=I_1+Md^2$。

现在从$L=I\omega$考虑，

$$\frac{d}{dt}L=\frac{d}{dt}(I\omega)=I\dot{\omega}+\dot{I}\omega。$$

若惯性张量非定值，则

$$\dot{I}=(R\dot{I_b}R^T)=\dot{R}I_bR^T+RI_b\dot{R^T}=skew(w)RI_bR^T+RI_b(skew(w)R)^T$$
$$=skew(w)RI_bR^T+RI_bR^Tskew(w)^T=skew(w)I-Iskew(w),$$

那么

$$\dot{I}w=(skew(w)I+Iskew(w)^T)w=$$
$$skew(w)Iw-Iskew(w)w=\omega\times I\omega-I(\omega\times\omega)$$
$$=\omega\times I\omega,$$

则

$$\dot{L}=\frac{d}{dt}(I\omega)=I\dot{\omega}+\omega\times I\omega,$$

最终得

$$\dot{L}=\boldsymbol{\tau}=I\dot{\omega}+\omega\times I\omega。$$

其中$\omega\times I\omega$称为陀螺力，一般可关闭此项，即考虑$\omega\times I\omega=0$。由角动能公式

$$\mathrm{T}=\frac{1}{2}\omega^TI\omega,$$

可知惯性张量I是正定矩阵，则其特征值均为正数。当$\omega\times I\omega=0$时，则ω是矩阵I的特征向量，即$I\omega=\lambda\omega$，λ是矩阵的特征值。

5 线冲量和角冲量

对于所受合外力F的质点，在时间t_1到t_2之间的冲量定义为

$$f_{impulse}=\int_{t_1}^{t_2}f\,dt=f\Delta t。$$

刚体的线性冲量定义为合外力与时间间隔的乘积

$$F_{impulse}=\sum f_i\Delta t=\Delta t\sum f_i=F\Delta t=Ma\Delta t=M\Delta v。$$

刚体的定点角冲量定义为定点合外力矩与时间间隔的乘积

$$\boldsymbol{\tau}_{impulse}=\sum\boldsymbol{\tau}_i\Delta t=\Delta t\sum\boldsymbol{\tau}_i=\boldsymbol{\tau}\Delta t=I\omega\Delta t=I\Delta\omega。$$

由线性冲量和角冲量易知

$$\Delta v=\frac{F_{impulse}}{M}$$

和

$$\Delta\omega=I^{-1}\boldsymbol{\tau}_{impulse}。$$

6 四元素

在上面的介绍中使用R表示旋转矩阵，现在替换成四元素

$$q(t)=(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}))^{\boldsymbol{T}}$$

表示刚体绕轴方向为$u = \omega(t)/\|\omega(t)\|$旋转且旋转速度大小为$\|\omega(t)\|$。定义$q(t,h)$表示为$t$时刻旋转时长h的四元素，那么旋转角度为

$$\theta(t,h) = \|\omega(t)\|h,$$

则$q(t,h)$各元素表示为

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})^{\boldsymbol{T}} = \sin\frac{\theta(t,h)}{2}u$$

和

$$\boldsymbol{w} = \cos\frac{\theta(t,h)}{2},$$

即

$$q(t,\mathrm{h}) = \left[\cos\frac{\|\omega(t)\|h}{2},\sin\frac{\|\omega(t)\|h}{2}u\right]^T。$$

四元素$t+\mathrm{h}$时刻四元素可表示为

$$q(t+\mathrm{h}) = q(t,\mathrm{h})q(t) = \left[\cos\frac{\|\omega(t)\|h}{2},\sin\frac{\|\omega(t)\|h}{2}u\right]^T q(t)。$$

设$q(t,0)$表示绕轴u旋转$h=0$的角度为$\theta(t,0)=0$，则

$$q(t,0) = [1,0,0,0]^T$$

且

$$q(t) = q(t+0) = q(t,0)q(t),$$

又

$$\frac{d}{dt}q(t) = \lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{q(t+h)-q(t)}{h},$$

则带入$q(t+\mathrm{h})$和$q(t,0)q(t)$得

$$\frac{d}{dt}q(t) = \lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\left[\cos\frac{\|\omega(t)\|h}{2},\sin\frac{\|\omega(t)\|h}{2}u\right]^T q(t)-q(t,0)q(t)}{h} = (\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\left[\cos\frac{\|\omega(t)\|h}{2}-1,\sin\frac{\|\omega(t)\|h}{2}u\right]^T}{h})q(t)。$$

上面极限可分成两个极限求解，也可以用向量组合构造一个向量求解，这里采用两个求解的方式处理，即分别求解

$$\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\cos\frac{\|\omega(t)\|h}{2}-1}{h} = (-\frac{\|\omega(t)\|}{2}\sin\frac{\|\omega(t)\|h}{2})|_{h=0} = 0$$

和

$$\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{(\sin\frac{\|\omega(t)\|h}{2}u)^T}{h} = \left(\frac{\|\omega(t)\|}{2}\cos\frac{\|\omega(t)\|h}{2}\frac{\omega(t)}{\|\omega(t)\|}\right)^T|_{h=0} = \frac{\omega(t)}{2}$$

带入得

$$\frac{d}{dt}q(t) = \frac{\omega(t)}{2}q(t)。$$

这里$\omega(t)$是一个三维向量，与四元素$q(t)$相乘时，需构造成四元素$[\boldsymbol{0},\omega(t)]^T$，则

$$\omega(t)q(t) = [\boldsymbol{0},\omega(t)]^T q(t)。$$

最终整理得

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{2}\omega(t)q(t)。$$

上面提到了刚体的位置x，朝向R或者q，线动量P和角动量L，这些物理量定义为刚体的状态变量；线速度v，角速度ω和惯性张量逆矩阵I^{-1}，这些物理量定义为刚体的微分物理量，而力F和力矩τ，这些物理量定义为刚体的计算物理量。刚体的状态为

$$X = \begin{pmatrix} x \\ R \\ P \\ L \end{pmatrix},$$

则

$$\frac{d}{dt}X = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ R \\ P \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \omega^{*}R \\ F \\ \tau \end{pmatrix}。$$

用四元素q替朝向R得

$$X = \begin{pmatrix} x \\ q \\ P \\ L \end{pmatrix}$$

和

$$\dot{X} = \frac{d}{dt}X = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ q \\ P \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{2}\omega q \\ F \\ \tau \end{pmatrix}。$$

刚体当前时刻t_1状态经过dt时间到下一个时刻t_2状态的转化，先计算出刚体的合外力F和合外力矩τ，然后利用公式$\mathrm{d}P = Fdt$和$dL = \tau dt$计算出线动量P和角动量L，然后利用$v = P/M$和$\omega = I^{-1}L$计算出线速度和角速度，再利用$\mathrm{d}x = vdt$和$R = \omega^{*}R$计算出刚体的位置和朝向。整个计算为

$$X(t_2) = X(t_1) + \dot{X}dt。$$

其中位移和朝向为

$$x(t_2) = x(t_1) + vdt$$

和

$$R(t_2) = R(t_1) + \omega^{*}Rdt = R(t_1) + (\omega dt) \times R。$$

在物理引擎模拟中，用差分近似表示微分$dt = \Delta t$进行计算，力在Δt时间内累积作用，从而$F\Delta t$表示线冲量，$\tau\Delta t$表示角冲量。基于冲量$F_{impulse}$和$\boldsymbol{\tau}_{impulse}$计算，因此有

$$\Delta v = \frac{F_{impulse}}{M}$$

和

$$\Delta\omega = I^{-1}\boldsymbol{\tau}_{impulse},$$

速度更新计算式子

$$v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = v(t_1) + \frac{F_{impulse}}{M}$$

和

$$\omega(t_2) = \omega(t_1) + \Delta\omega = \omega(t_1) + I^{-1}\boldsymbol{\tau}_{impulse}。$$

上述速度更新计算为欧拉积分，一般物理引擎使用半隐式欧拉积分计算：先用显示欧拉积分，从当前的速度和角速度分别计算得到新的速度和角速度后，再用新的速度值来计算位置和朝

向，其表达式为

$$x(t_2) = x(t_1) + v(t_2)\Delta t$$

和

$$R(t_2) = R(t_1) + \omega(t_2)\Delta t。$$

注意这里是$v(t_2)$和$\omega(t_2)$，而不是$v(t_1)$和$\omega(t_1)$。在位置和朝向计算中，用到了下一个速度值，这是一个隐式公式，整个积分过程，称为半隐式欧拉积分。可见，对一个刚体的操作参数只需要添加力或力矩，间接计算得到冲量（物理引擎以固定的时间间隔Δt计算，比如 0.02 秒），或者直接添加冲量，进而求得速度，最后可更新坐标和朝向。