遗传算法求解一阶常微分方程的数值解

秦俭修

广西交通运输学校，广西南宁　　530007

摘　　要　由于几个经典的求一介常微分方程数值解的算法存在精确度不高，或者步长难以选择的特点，提出了用遗传算法求解的方法。随机生成种群，根据设定的适应度自动调节步长，经过多次迭代最终达到较精确的值。数值实验表明，该算法有效。

关 键 词　步长；误差；遗传算法；积分

中图分类号 O13　　　**文献标识码** A　　　**文章编号** 1674-6708（2010）25-0118-02

0 引言

常微分方程数值[1-2]解出现在科学与工程计算的许多领域，如生物繁殖、自动控制、卫星轨道等。目前已有许多数值解法：Eule：法、梯形法、数值积分方法、Runge-Kutta 法、多步法等。在这些解法中，单从每一步看，步长越小，截断误差就越小，但随着步长的缩小，在一定求解范围内所要完成的步数就增加了。步数的增加不但引起计算量的增大，而且可能导致舍入误差的严重积累。因此，微分方程的数值解法也有个选择步长的问题。

模拟自然界遗传机制和生物进化论形成的过程搜索最优解的遗传算法[3-5](Genetic Algorithms，简称 GA)，仅需要目标函数的信息，不受搜索空间是否连续或可微的限制，就可找到最优解。本文中，利用 GA 算法自动控制步长选择，然后由步长求出被积函数积分[6]，根据积分的值决定求解方程的精确度。最后数值实验了该方法，结果较好。

1 问题描述

本文讨论的是一阶常微分方程初值问题，如下：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), & a \le x \le b \\ y(a) = \eta \end{cases} \qquad (1)$$

如果用数值积分方法，在 [a，b] 上分为 N 份，每个小区间为 $[x_n, x_{n+1}]$，在之上对 $y'(x) = f(x, y(x))$ 积分得 $y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$。　（2）

对于积分项，分别利用数值积分的左、右矩形公式：

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \approx f(x_n, y(x_n)), \qquad (3)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \approx f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))。 \qquad (4)$$

若要使得数值解的公式阶数提高，就必须使上式右端积分的数值求积分公式精度提高，即必然要求增加求积节点。随着求积节点的增加，用传统的数值积分方法，在一定求解范围内所要完成的步数就增加了。步数的增加引起了计算量的增大，就会导致舍入误差的严重积累。

遗传算法是一种智能算法，它的特点决定了解决一些复杂问题时，可以较容易地求出具体数值。在本文中，通过在利用遗传算法的自适应的特点，在计算中自动调整每一步步长，最终达到精度要求，这是传统方法难以完成的。因此，要使得计算精确，就必须让积分的值达到精度，为此接着讨论如何解决积分的问题。

2 遗传算法对积分问题的求解

在求函数的积分时，不知道被积函数的形式，无法使用梯形公式，Newton-cotes，或 Simpson 等公式，因此对该函数一个点接着下一个点地求。本文使用左矩形方法计算随机生成子区间内的矩形面积。

在求每个小区间$[x_n, x_{n+1}]$内积分$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx$的值时，由于无法知道函数$f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$的值，因此我们通过左矩形公式（3）近似地求出该函数的积分，再由式（2）求出$y(x_{n+1})$的值，然后接着求下一个子区间的积分。

在对区间 [a，b] 求积分时，首先要知道被积函数单调区间。假设其中一个子区间 [a_1，b_1] 为单调递增区间。求$\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx$的值时，用左矩形面积公式计算 [a_1，b_1] 中划分的子区间的每一个小面积 s_n，再把所有的 s_n 累加得 S。求该函数的积分，即是求 S 的最大值，max（S）。反之，当为单调递减区间时，用左矩形公式则求 S 的最小值，min（S）。

具体算法：

1）随机生成 N 个种群，每个种群都对被积区间进行随机划分。

2）计算每个 $□x = |x_{n+1} - x_n|$ 的值作为区间的长度。用左矩形公式即 $s_n = □x□y_n$ 计算每个矩形的面积，于是 $y(x_{n+1}) = y(x_n) + s_n$。条件判断是否 $f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) - f(x_n, y(x_n)) > 0$，即判断被积函数的单调性。如果这些点单调性相同，则将其种群区间面积相加为 S_1。如果到某一点之后单调性相反时，从那一点开始计算之后相同单调区间的矩形面积记为 S_2。直到计算出被积区间的所有小矩形的面积 $S_3 \cdots S_m$，记为，（$m \in N$）。

3）计算各个种群的适应度。适应度函数定义为 $f_i = \sum_{i=1}^{a} S_i + \sum_{j=1}^{b} \frac{1}{S_j}$，单调递增区间部分的函数的适应度，$\frac{1}{S_j}$ 为单调递减部分的函数的适应度。

4）根据适应度选择种群，用比例选择或者退火选择。

5）进行洗牌交叉，单点变异，重组算子的操作。

6）判断是否达到精度要求，或者满足迭代次数，是则结束程序，否则执行 2）。

3 数值实验

用本文提出的遗传算法对以下几个实例（均来自文献 [1]）进行数值实验。种群大小 20，采用比例选择算子，交叉概率为 0.8，变异概率为 0.05。分别与 Euler 算法，经典 R-K 算法 $y(x_n)$，Milne 算法比较，具体结果见表 1，2，3。

例 1

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Euler 算法取步长 h=0.1。

x_n	准确值 y_n	Euler 算法 y（x_n）	本文算法 y（x_n）	本文误差
0.1	1.095445	1.1000	1.095442	3.0E-6
0.2	1.183160	1.1918	1.183365	-1.5E-4
0.3	1.264911	1.2774	1.264951	-4.1E-5
0.4	1.341641	1.3582	1.341618	2.8E-4
0.5	1.414213	1.4351	1.414387	-1.7E-4
0.6	1.483240	1.5090	1.483129	1.1E-4
0.7	1.549193	1.5803	1.549146	4.7E-5
0.8	1.612451	1.6498	1.612435	1.5E-5
0.9	1.673320	1.7178	1.673428	-1.1E-4
1.0	1.732051	1.7848	1.732175	-1.2E-4

表 1 例 1 方程中 Euler 算法与本文算法比较

作者简介：秦俭修，讲师，工作单位：广西交通运输学校，主要从事自动控制理论与应用，研究方向：企业生产过程控制

例 2

$$\begin{cases} y' = -y + x - e^{-1} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

经典 R-K 算法中取步长 h=1。

x_n	经典 R-K 算法 y（x_n）	本文算法 y（x_n）	准确值	本文误差
1	0	0	0	0
3	1.6839	1.681845	1.681908	−6.3E−5
5	3.6394	3.638541	3.638859	−3.2E−4
7	5.6331	5.633075	5.633032	4.3E−5
9	7.6323	7.632350	7.632244	1.0E−5
11	9.6321	9.632204	9.632137	6.6E−6
13	11.6321	11.632248	11.632123	1.2E−4

表 2 例 2 方程中经典 R-K 算法与本文算法比较

Milne 算法取步长 h=2。

x_n	Milne 算法 y（x_n）	误差	本文算法 y（x_n）	本文误差
7	5.645754	−1.3E−2	5.633075	4.3E−5
9	7.382325	2.5E−1	7.632350	1.0E−5
11	10.905316	−1.3	9.632204	6.6E−6
13	11.632625	−5.0E−4	11.632248	1.2E−4
15	13.632289	−1.7E−4	13.632454	3.3E−4
17	15.632177	−5.6E−5	15.632816	6.9E−4
19	17.632139	−1.9E−5	17.632182	6.4E−5
21	19.632127	−6.2E−6	19.632092	−2.8E−5

表 3 例 2 方程中 Milne 算法与本文算法比较

从以上表可以看出，无论是 Eule，四阶经典的 R-K 算法，精度都不是很高。而 Milne 算法精度还可以，但是会出现不稳定的震荡。而本文算法比前两种经典算法精度高，也比 Milne 算法稳定，都能在 $O(h^4)$ ：$O(h^5)$ 之间。

4 结论

我们把遗传算法求积分的方法用于求解常微分方程，根据被积函数的单调性选择合适的适应度函数。这种算法在求解区间较小的常微分方程时，未必比现有的 Milne 算法精度高，但是当区间变得较大时，经典的算法精度就会出现不稳定状况。因此，在较大范围内求解时，用本文算法较好。

参考文献

[1]吴勃英.数值分析[M].北京：高等教育出版社，2007.

[2]张丽娟.常微分方程的Euler解法及其计算机实现[J].长春师范学院学报，2005，24(6)：11-14.

[3]云庆夏.进化算法[M].北京：冶金工业出版社，2000.

[4]Forrest S.Genetic algorithms: principles of natural selection applied to computation [J].Science，1993(261)：872-878.

[5]JoseL，Ribeiro Filhoetc.Genetic-algorithms programming environments[J].ComputerJane，1994：28-43.

[6]曾永忠，龙驹.基于改进遗传算法的调速器优化设计[J].农机化研究，2007(10)：186-188.

（上接第117页）

一致。

2.3 水样减失量分析

对比电解水样和未电解水样减失量，发现电解水样减少 200mL，未电解水样减少 150mL。未电解水样减少是因为其在敞开的条件，水样会自然挥发。电解水样减少则既包括水样的自然挥发有包括电解所消耗的部分水量，由对比实验可知，电解所消耗的部分水量只占水样总的减失量的一小部分。

2.4 悬浮沉淀物的分析

取处理后的污水的悬浮沉淀物做质谱分析，结果表明其中含有大量的铝离子、钠离子，还有少量的甲基离子，由此可见悬浮沉淀物中大部分为无机物，做 EI+ 分析见不到有机物峰。即此方法已经将有机物很好的转化去除了。

2.5 能量消耗

前 48h，电压 5V，电流 0.2A，所耗电能：

W1=5×0.2×48×0.001=0.048(度)

中间 24 小时，电压 10V，电流 0.2A，所耗电能：

W2=10×0.2×24×0.001=0.048(度)

改用铜电极后 24 小时，电压 10V，电流 0.1A，所耗电能：

W3=10×0.1×24×0.001=0.024(度)

总的耗电量为：

W= W1+ W2+ W3 =0.048+0.048+0.024=0.120(度)

由此可见，电化学处理废水的方法是需要消耗一定电量的。在用电供应紧张的地区不宜采用，但是随着水电和风电的不断开发利用，这就给这一处理污水的方法提供了较大的发展空间，同时这一污水处理方法也将为用电条件较好的地区的环境治理提供又一选择，也将为我国的经济发展做出贡献。

3 结论

电化学的方法处理化纤厂废水，可以分两次进行，用碳棒为阳极，铝和铜为阴极，加入少量电解质 NaCl，可获得满意的处理效果：原水水质为 CODcr=2 198 mg/L，pH 值为 13-14，色度为 3 600，处理后水质为 CODcr=117.1mg/L，pH 值为 6~8，色度为 30。由此可见，CODcr 降低 25 倍左右，pH 值由处理前的强碱性降低至中性偏酸或偏碱，色度降低 120 倍左右。处理后污水的各项指标均达到国家污水处理允许排放指标的二级标准要求。

参考文献

[1]杨学富主编.制浆造纸工业废水处理.环境科学与工程出版中心.化学工业出版社.

[2]Eljarrat E.PhD Thesis,Analytical Methodologies for the Determination of Dioxins and Related Compounds in Environmental samples,University of Barcelona，1999.

[3]李晶，刘清华，丁大伟. 浅谈城市大气污染现状及其综合防治[J].环境科学，2000，19(1)：43-45.

[4]杨辉，卢文庆主编.应用电化学.科学出版社.

[5]将展鹏主编.环境工程学.高等教育出版社.

（上接第116页）

2010，36（8）：353-365.

[2]黄惠芳，胡广书.虹膜识别算法的研究及实现[J].红外与激光工程，2002，5(31)：404-409.

[3]李佳慧.基于声音识别的身份认证系统[D].长春：吉林大学，2002.

[4]陈振学.基于特征显著性的目标识别方法及其应用研究[D].武汉：华中科技大学，2007.