第 20 卷第 6 期　　西安文理学院学报(自然科学版)　　Vol. 20　No. 6
2017 年 11 月　　Journal of Xi'an University (Natural Science Edition)　　Nov. 2017

文章编号: 1008-5564(2017)06-0011-04

基于最小二乘法的圆柱体油罐装置拟合

王亚妮，胡有宁，李广文
(西安文理学院 生物与环境工程学院，西安 710065)

摘　要: 实际工程应用中，常需要对石化厂区内的圆柱形储油(气)罐进行精确定位，而利用三点成圆法生成的油罐圆形投影无法满足高精度工作的需要. 文中提出对油罐装置采取冗余观测，然后利用最小二乘法拟合出圆(弧)形装置的圆心坐标及半径的方法. 对基于最小二乘法拟合圆进行了理论推导，并据此提出可行的程序设计流程. 实际数据的检核证明结果具有较高精度，满足工程需要.

关键词: 冗余观测; 最小二乘法; 拟合圆

中图分类号: {O241.2}; TP391.41　　　**文献标志码:** A

Fitting to the Cylindrical Oil Storage Equipments Based on Least Square Method

WANG Ya-ni, HU You-ning, LI Guang-wen
(School of Biological and Environmental Engineering, Xi'an University, Xi'an 710065, China)

Abstract: In the engineering application, it is usually required to make an accurate measurement on the cylindrical oil storage tanks in the petrochemical plant. However, the manner of using three points to generate circle projection of oil tanks cannot satisfy the demand for the high precision work. This article puts forward the method that measures the tanks with redundancy observations, and fits to the center and the radius with least square method. The theoretical derivation of fitting to circle with least square method has been proposed, to which according the practicable programming process has been brought forward. The data checking proves that the result is highly accurate and satisfies the engineering requirement.

Key words: redundancy observations; least square method; fitting-circle

化工厂区内的油(气)贮存罐多为圆柱体，其附属装置(如罐梯等)，平面投影为相应的圆弧形. 在实际的工程应用中，常需要对圆(弧)形装置进行精确测量. 理论上对圆(弧)上的三点进行数据采集，可以确定圆心坐标及半径. 但在实际测量工作中，由于系统误差、偶然误差、人为误差等误差干扰，很难保证油(气)罐定位的精确性，无法满足对高精度要求的工作，如油罐存储量的精确计算、油罐占地面积的计算、附属设施的定位安装等. 本文提出对油罐装置采取冗余观测，然后利用最小二乘法拟合出圆(弧)形装置的圆心坐标及半径的方法.

收稿日期: 2017-06-15
作者简介: 王亚妮(1980—)，女，陕西宝鸡人，西安文理学院生物与环境工程学院讲师，博士，主要从事测绘学研究.

1 拟合圆的最小二乘法模型

最小二乘法通过最小化误差的平方和找到一组数据的最佳函数匹配. 利用最小二乘法对冗余观测的多组数据进行处理,可以求得圆(弧)心坐标及半径,并使得这些求得的数据与实际数据之间误差的平方和为最小.

圆的方程为:

$$R^2 = (x - A)^2 + (y - B)^2,$$

其中圆心坐标为(A, B),半径为R.

对圆方程进行变换,得到另外一个形式,如式(1)所示:

$$R^2 = x^2 - 2Ax + A^2 + y^2 - 2By + B^2 \tag{1}$$

令:

$$a = -2A, \quad b = -2B, \quad c = A^2 + B^2 - R^2$$

得到圆方程的简化形式,如式(2)所示

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{2}$$

在式(2)中,只需要求出未知参数a, b, c,就可以求得圆心坐标及半径,如式(3):

$$A = -\frac{a}{2}, \quad B = -\frac{b}{2}, \quad R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \tag{3}$$

设对油罐采集的点样本集为(X_i, Y_i),点个数为N,样本集中各点到圆心距离的平方与半径平方的差为:

$$\delta_i = d_i^{\ 2} - R^2 = (X_i - A)^2 + (Y_i - B)^2 - R^2 = X_i^{\ 2} + Y_i^{\ 2} + aX_i + bY_i + c \tag{4}$$

利用最小二乘法拟合圆即求得参数a, b, c,使得平方和

$$F(a,b,c) = \sum \delta_i^{\ 2} = \sum (X_i^{\ 2} + Y_i^{\ 2} + aX_i + bY + c_i)^2$$ 为最小.

$F(a,b,c)$分别对a, b, c求偏导,令偏导为0,即得到极值点. 如式(5)所示:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(a,b,c)}{\partial a} = \sum 2(X_i^{\ 2} + Y_i^{\ 2} + aX_i + bY_i + c) X_i = 0 \\ \dfrac{\partial F(a,b,c)}{\partial b} = \sum 2(X_i^{\ 2} + Y_i^{\ 2} + aX_i + bY_i + c) Y_i = 0 \\ \dfrac{\partial F(a,b,c)}{\partial c} = \sum 2(X_i^{\ 2} + Y_i^{\ 2} + aX_i + bY_i + c) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

解此线性方程组得:

$$\begin{aligned} a &= \frac{HD - EG}{CG - D^2} \\ b &= \frac{ED - HC}{CG - D^2} \\ c &= \frac{\sum (X_i^{\ 2} + Y_i^{\ 2}) + a\sum X_i + b\sum Y_i}{N} \end{aligned} \tag{6}$$

其中,

$$C = (N\sum X_i^{\ 2} - \sum X_i \sum X_i)$$

$$D = (N\sum X_iY_i - \sum X_i \sum Y_i)$$

$$E = N\sum X_i^{\ 3} + N\sum X_iY_i^{\ 2} - \sum (X_i^{\ 2} + Y_i^{\ 2}) \sum X_i$$

$$G = (N\sum Y_i^{\ 2} - \sum Y_i \sum Y_i)$$

$$H = N\sum X_i^{\ 2}Y_i + N\sum Y_i^{\ 3} - \sum (X_i^{\ 2} + Y_i^{\ 2}) \sum Y_i$$

解得参数 a，b，c 后，代入式(3)中，即可得到圆心坐标(A，B)及半径 R 的值.

2　计算程序的流程设计

根据最小二乘法拟合圆的理论推导，进行程序的工作流程设计：首先输入油罐样本采集点(X_i，Y_i)，判断点数是否大于 3 个. 点数大于 3 则利用式(5)分别对未知数进行求偏导，解得未知参数 a，b，c，代入式(3)中，从而得到圆心坐标及半径，最终输出圆形油罐模型. 如图 1 所示.

3　最小二乘法拟合圆的程序实现与试验

利用 C# 工具对上述流程进行编程实现，然后对表 1 中的数据进行测试.

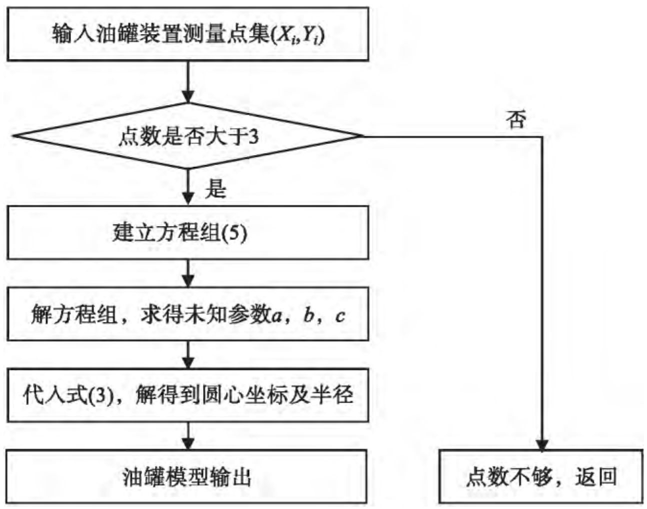

图 1　最小二乘法拟合油罐设计流程图

表 1　油罐测点坐标集

点号	坐标 x/m	坐标 y/m
P_1	x_1 = 814.80	y_1 = 187.29
P_2	x_2 = 812.30	y_2 = 180.65
P_3	x_3 = 803.72	y_3 = 176.79
P_4	x_4 = 793.27	y_4 = 186.84
P_5	x_5 = 796.85	y_5 = 195.82
P_6	x_6 = 806.28	y_6 = 197.97

利用程序计算结果如下：

A = 803.98，B = 187.55，R = 10.79. 测量点集与拟合圆位置关系如图 2 所示.

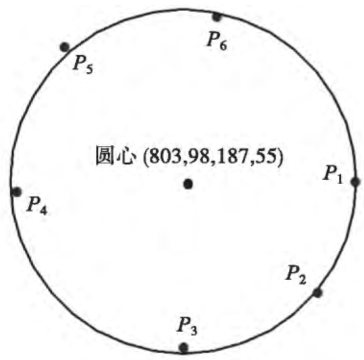

图 2　测量点集与拟合圆位置关系示意图

表 2　测量值与拟合圆边距差值

点号	至圆心距与半径差 /m	差值平方 /m²
P_1	0.033 123	0.001 097
P_2	0.018 904	0.000 357
P_3	−0.026 86	0.000 721
P_4	−0.056 49	0.003 191
P_5	0.129 24	0.016 703
P_6	−0.119 18	0.014 204

根据利用最小二乘法拟合出圆心坐标及半径，计算出各测量点至圆心的距离与半径的差值及其平方的数据，如表 2 所示.

对拟合圆的精度进行定量检验，可以利用式(7)计算各测量点偏离拟合圆的标准差.

$$a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - A)^2 + (y_i - B)^2 - R^2\right]}{n-1}} \tag{7}$$

将表2中所列数据代入式(7),计算得标准差为0.085 m,相对误差为0.085 m/10.79 m = 0.007. 试验结果证明,利用最小二乘法拟合得到的圆具有较高精度,满足工程需要.

4 结语

基于最小二乘法拟合得到的圆柱体油罐平面投影的圆心及半径,在最大程度上逼近了其实际的空间位置与大小,经数据检验证实有较高的精度. 对于平面投影为圆弧形的装置,如罐梯等,原理及计算方法与圆形装置相同.

本文利用最小二乘法进行求解时,没有讨论方程组产生奇异解的有关问题. 测量点的误差不会导致结果的畸形. 但如果在测量或录入过程中出现错误,例如测量的所有点位于同一条直线上时,则解线性方程组时会产生奇异解,导致最终结果的错误. 所以在进行样本点测量时,点集分布应该尽量均匀,理论上测量点个数与精确度成正比. 此外,对于有明显偏差的点,在数据录入之前应该采取手段予以剔除,防止错误的数据对最终结果产生干扰. 这些工作都还有待于更加深入细致的研究.

参考文献

[1] 余代俊,耿留勇. 基于Delaunay三角形实现面状要素自动注记[J]. 测绘通报,2006(11):26-28.

[2] 邵黎霞,何宗宜,艾自兴,等. 基于BP神经网络的河系自动综合研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2004,29(6):555-557.

[3] 张年生. 基于图论的树状河流空间关系表达[J]. 测绘信息与工程,2009,34(3):43-44.

[4] 丁克良,欧吉坤,陈义. 整体最小二乘法及其在测量数据处理中的应用[C]//中国测绘学会第九次全国会员代表大会暨学会成立50周年纪念大会论文集. 北京:中国测绘学会,2009:400-405.

[5] 祝国瑞,郭礼珍,尹贡白,等. 地图设计与编绘[M]. 武汉:武汉大学出版社,2001.

[6] 胡鹏,游涟,杨传勇,等. 地图代数[M]. 武汉:武汉大学出版社,2002.

[7] 赵春燕. 水系河网的Horton编码与图形综合研究[D]. 武汉:武汉大学,2004.

[8] 张刚,李东. 水系自动制图综合算法研究[J]. 水利科技与经济,2009,15(4):302-304.

[9] 张青年. 线状要素的动态分段与制图综合[J]. 中山大学学报(自然科学版),2004,43(2):104-107.

[责任编辑 王新奇]