第 41 卷 第 5 期
2018 年 5 月
测绘与空间地理信息
GEOMATICS & SPATIAL INFORMATION TECHNOLOGY
Vol.41,No.5
May,2018

三种点云数据平面拟合方法的精度比较与分析

薄怀志

(山东省鲁南地质工程勘察院,山东 兖州 272100)

摘 要:详细地介绍了基于最小二乘法、特征值法及总体最小二乘法的点云数据平面拟合方法。通过 Matlab 编制其算法程序,对模拟的等精度与不等精度点云仿真数据进行计算,结合算例对比分析了 3 种方法的点云平面拟合效果。拟合结果表明:3 种方法在等精度点云平面拟合中的效果较好,在不等精度点云平面拟合中的效果较差,且特征值法与总体最小二乘法的点云平面拟合精度远高于最小二乘法。

关键词:点云数据;平面拟合;最小二乘法;特征值法;总体最小二乘法;精度分析

中图分类号:P207　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-5867(2018)05-0206-03

Accuracy Comparison and Analysis of Three Kinds of Point Cloud Data Plane Fitting Methods

BO Huaizhi

(Lunan Geo-engineering Exploration Institute, Yanzhou 272100, China)

Abstract: In this paper, the method of plane fitting of point cloud data based on least squares, characteristic value and total least squares is introduced in detail. The algorithm is programmed by Matlab, and the simulated data such as equal precision and unequal precision are calculated .The fitting results show that the three method have good effect in the fitting of the same precision point cloud plane, and the effect is poor in the unequal precision point cloud plane fitting, and the precision of the characteristic value method and the total least squares method is much higher than that of the least squares method.

Key words: point clouds; plane fitting; least squares; characteristic value method; total least squares; accuracy analysis

0 引 言

点云平面拟合作为散乱点云拟合算法的基础,国内外学者对其进行了大量的研究,并提出了各种点云平面拟合的方法。以往点云平面拟合常用的方法是最小二乘法[1],是根据两个参数求取另一个参数的估值,最终完成平面参数的解算。然而在三维激光扫描仪获取点云数据时,由于仪器设备、外界环境、地物特性等因素的影响,使得获取的点云数据在 X、Y、Z 三个方向均存在误差,对此,Fernand[2] 提出的特征值法通过设置一个质量标准可以在很大程度上优化平面参数的解算。此外,顾及观测向量及系数矩阵均含有偶然误差,通过 Golub[3] 提出的总体最小二乘估计方法拟合得到的点云平面是最优的、无偏的。虽然国内外对这 3 种点云平面拟合的方法做了很多研究,但是,这 3 种点云平面拟合方法的适用范围与拟合精度并不相同,缺少对点云平面拟合方法的对比分析。本文针对这一问题,通过模拟的等精度与不等精度点云平面数据对比分析了最小二乘法、特征值法及总体最小二乘法的平面拟合效果,本文的研究对于三维建模具有重要的意义。

1 常用点云平面拟合方法

1.1 基于最小二乘法拟合点云平面

通过传统最小二乘法对点云数据进行平面拟合时,可将误差只归因于一个方向上,本文假设误差只存在于 Z 轴方向上,设点云拟合的平面方程为[4]:

$$z = ax + by + c \tag{1}$$

当观测点数目为 n 时,以 z 坐标为观测值,则其观测值方程为

$$z + V = ax + by + c \tag{2}$$

将式(2)改写为误差方程

$$V = B\hat{X} - l \tag{3}$$

其中,

收稿日期:2017-02-20

作者简介:薄怀志(1983-),男,山东日照人,工程师,注册测绘师,学士,主要从事工程测量方面的应用研究工作。

$$B=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_n & y_n & 1\end{bmatrix},\hat{X}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix},l=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{bmatrix}$$

根据最小二乘准则 $V^TPV=\min$，通过式(4)进行等权平差解得参数值 $\hat{X}$，即

$$\hat{X}=(B^TB)^{-1}B^Tl \tag{4}$$

将计算得到的平面参数值代入式(1)，可得到点云拟合的平面方程。

1.2　基于特征值法拟合点云平面

在实际工作中，我们所获得的点云数据事实上不仅仅在 Z 轴上偏离真实位置，即在 X、Y、Z 3 个方向上均存在误差[5]，而最小二乘法只将误差归因于一个方向上，为了解决这个问题，我们可以采用特征值法计算点云平面的拟合参数，设点云拟合平面的方程为:

$$ax+by+cz=d \tag{5}$$

式中，a、b、c 为拟合平面的单位法向量，即满足 $a^2+b^2+c^2=1$，d 为坐标原点到该拟合平面的距离。设对某一平面扫描得到的 n 个数据点的坐标为 (x_i,y_i,z_i)，则任意数据点至该拟合平面的距离为:

$$d_i=|ax_i+by_i+cz_i-d| \tag{6}$$

若要获得最佳拟合平面，则应在条件 $a^2+b^2+c^2=1$ 下，满足 $\sum_{i=1}^{n}d_i^2=\min$。因此，采用拉格朗日乘数法计算拟合平面参数的最优估值。

首先解算齐次线性方程组式(7)，可得到拟合平面的参数 a、b、c。

$$(A-\lambda_{\min}I)X=0 \tag{7}$$

式中，

$$A=\begin{bmatrix}\sum_i\Delta x_i\Delta x_i & \sum_i\Delta x_i\Delta y_i & \sum_i\Delta x_i\Delta z_i\\ \sum_i\Delta x_i\Delta y_i & \sum_i\Delta y_i\Delta y_i & \sum_i\Delta y_i\Delta z_i\\ \sum_i\Delta x_i\Delta z_i & \sum_i\Delta y_i\Delta z_i & \sum_i\Delta z_i\Delta z_i\end{bmatrix},$$

$$X=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix},\lambda_{\min}=\min\sum_{i=1}^{n}d_i^2$$

然后通过式(8)计算拟合平面的参数 d。

$$d=a\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}+b\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}+c\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i}{n} \tag{8}$$

将计算得到的 a、b、c、d 代入式(5)，最终完成点云平面的拟合。

1.3　基于总体最小二乘法拟合点云平面

在上面的求解中，我们认为点云数据系数矩阵不存在误差，然而由于观测条件的限制，观测向量、系数矩阵都有可能存在误差，那么上述两种方法就不再是最优的，而是有偏的，因此，我们可以采用总体最小二乘法拟合点云平面，并通过奇异值分解法解算拟合平面的参数[6]。

假设对某一平面扫描得到 n 个点的坐标为 (x_i,y_i,z_i)，考虑到观测数据在 x、y、z 方向上均存在误差，则将式(2)改写为

$$z_i+V_{z_i}=a(x_i+V_{x_i})+b(y_i+V_{y_i})+c \tag{9}$$

式中，V_x、V_y、V_z 分别为 x、y、z 方向上的改正数，将上式整理可得

$$(A+E_A)X=L+E_L \tag{10}$$

式中，

$$A=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_n & y_n & 1\end{bmatrix},E_A=\begin{bmatrix}V_{x_1} & V_{y_1} & 1\\ V_{x_2} & V_{y_2} & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ V_{x_n} & V_{y_n} & 1\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix},L=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{bmatrix},E_L=\begin{bmatrix}V_{z_1}\\ V_{z_2}\\ \vdots\\ V_{z_n}\end{bmatrix}$$

将式(10)表示为误差方程式的形式为

$$(A+E_A)X=L+e \tag{11}$$

可以改写为

$$[A+E_A\quad L+e]\begin{bmatrix}X\\ -1\end{bmatrix}=([A\quad L]+E)\begin{bmatrix}X\\ -1\end{bmatrix}=0 \tag{12}$$

式中，$E=[E_A\quad e]$，用其表示的限制约束条件为

$$tr(EE^T)=tr(E_AE_A^T+ee^T)=vec(E_A)^Tvec(E_A)+e^Te=\min \tag{13}$$

对增广矩阵 $[A\quad L]$ 进行奇异值分解

$$[A\quad L]=[U_1\quad U_2]\begin{bmatrix}\Sigma\\ 0\end{bmatrix}V^T=U_1\Sigma V^T \tag{14}$$

式中，

$$V^T=\begin{bmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix},U_1=[U_{11}\quad U_{12}],\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_1 & 0\\ 0 & \Sigma_2\end{bmatrix}$$

$$V_{12}=[v_{1,m+1}\quad v_{2,m+1}\quad \cdots\quad v_{m,m+1}]^T,V_{22}=[v_{m+1,m+1}]$$

由矩阵逼近理论可知，参数的总体最小二乘估值为

$$X=-V_{12}V_{22}^{-1}=\frac{-1}{v_{m+1,m+1}}V_{12} \tag{15}$$

由于 v_i 为矩阵 $[A\quad L]^T[A\quad L]$ 的特征向量，所以奇异值与特征向量满足关系

$$\begin{bmatrix}A^TA & A^TL\\ L^TA & L^TL\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ -1\end{bmatrix}=\sigma_{m+1}^2\begin{bmatrix}X\\ -1\end{bmatrix} \tag{16}$$

进一步可以计算得到单位权方差为

$$\sigma_0^2(TLS)=\sigma_{m+1}^2/(n-m) \tag{17}$$

2　模拟数据与试验

由于工程实测数据十分复杂，在进行平面拟合前需要进行数据预处理，所以本文采用模拟平面 $Z=-5X-$

$7Y + 15$ 的点云数据，用式(18)生成等精度的观测数据，用式(19)生成不等精度的观测数据，之后根据模拟的平面方程计算 Z，并在 Z 上添加随机误差，两组模拟的平面数据如图 1 所示。

$$\begin{cases} X(i+1) = X(i) + 0.1 \times normrnd(1) \\ Y(j+1) = Y(i) + 0.1 \times normrnd(1) \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} X(i+1) = X(i) + 0.1 \times normrnd(0, rand(1)) \\ Y(j+1) = Y(i) + 0.1 \times normrnd(0, rand(1)) \end{cases} \tag{19}$$

分别采用最小二乘法、特征值法、总体最小二乘法对图 1 中的两组平面数据进行拟合，所求平面方程为 $Z = aX + bY + c$，拟合结果见表 1 和表 2。

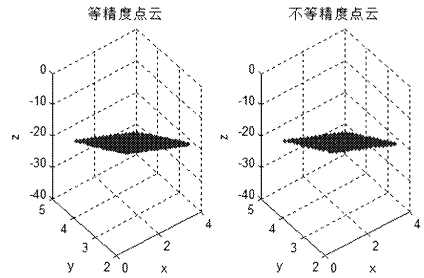

图 1 两组模拟平面数据

Fig.1 Two sets of simulation plane data

表 1 等精度平面数据拟合参数及精度

Tab.1 Equal precision plane data fitting parameters and accuracy

拟合方法	a(m)	b(m)	c(m)	d(m)	σ_0(m)	max(d_i)(m)	$\bar{d}$(m)
最小二乘法	−4.995	−7.002	15.016	0.000	0.049	0.019	0.004
特征值法	0.577	0.809	0.115	1.734	0.003	0.019	0.004
总体最小二乘法	−4.996	−7.003	15.021	0.000	0.003	0.019	0.004

表 2 不等精度平面数据拟合参数及精度

Tab.2 Unequal precision plane data fitting parameters and accuracy

拟合方法	a(m)	b(m)	c(m)	d(m)	σ_0(m)	max(d_i)(m)	$\bar{d}$(m)
最小二乘法	−4.978	−6.986	14.995	0.000	0.062	0.024	0.004
特征值法	0.569	0.797	0.105	1.724	0.005	0.024	0.004
总体最小二乘法	−4.989	−6.997	15.009	0.000	0.005	0.024	0.004

分析表 1 与表 2，可以看出最小二乘法对于两组模拟数据的拟合精度均远低于特征值法，因此，最小二乘法不适合用于点云数据的平面拟合。而从表 1、表 2 中可以看出特征值法与总体最小二乘法精度相差不大，但是表 2 中特征值法与总体最小二乘法的拟合精度明显低于表 1 中两种方法的拟合精度，因此，两种方法在等精度点云平面拟合中的效果较好，在不等精度点云平面拟合中的效果较差。

3 结束语

本文详细地阐述了点云平面拟合的 3 种方法，在考虑观测向量误差的条件下探讨了最小二乘法拟合点云平面，在同时考虑观测向量误差与系数矩阵误差的等精度影响下探讨了基于特征值法与总体最小二乘法的点云平面拟合。最后，通过编制的 Matlab 算法程序对模拟的点云数据进行计算，将平面拟合中误差作为拟合效果的指标，分析表明：最小二乘法的点云平面拟合精度最低，特征值法与总体最小二乘法的点云平面拟合精度差别并不明显。

参考文献：

[1] Acharya P K, Henderson T C. Parameter estimation and error analysis of range data [C] //Robotics and Automation, 1988.Proceedings. 1988 IEEE International Conference on. IEEE, 1988.

[2] Fernandez O. Obtaining a best fitting plane through 3D georeferenced data [J]. Journal of Structural Geology, 2005, 27(5): 855-858.

[3] Golub G H, Loan C F V. An analysis of the Total Least Squares problem [J]. Siam Journal on Numerical Analysis, 1980, 17(6): 883-893.

[4] 程效军，唐建波. 基于最小二乘拟合的墙面平整度检测方法 [J]. 遥感信息工程，2007, 32(4): 19-20.

[5] 陈汉清，王乐洋. 点云数据平面拟合的加权总体最小二乘方法 [J]. 工程勘察，2015(11): 59-63.

[6] 李明峰，欧江霞，檀丁，等. 加权总体最小二乘点云平面拟合定权方法探讨 [J]. 大地测量与地球动力学，2015, 35(3): 428-432.

[编辑：任亚茹]