

# 基于 MATLAB 探讨舍入误差对数值计算的影响

景 杨 陈 艳

(扬州大学 数学科学学院 江苏 扬州 225002)

摘要:首先通过病态问题引入了研究数值计算误差的意义;接着介绍了计算误差的来源及分类;然后研究了何如运用稳定性分析来判断数值问题的优劣,从本质出发分析了舍入误差的产生、传递、积累和最终影响,让读者一目了然;最后结合实践总结出控制初始舍入误差的有效途径和舍入规则并用实例证明。

关键词:数值计算;计算误差;舍入误差;稳定性分析;舍入规则

中图分类号:TH325;TP391.9

文献标识码:A

文章编号:1673-1131(2015)05-0039-03

## 0 引言

随着计算机的发展与普及,继实验方法、理论方法之后,数值计算已成为科学实践的第三手段。它在物理、化学、力学、天文学、生命科学以及社会科学等各个领域得到了广泛的应用,成为科学研究领域中不可缺少的重要组成部分。而数值计算区别于数学理论求解的一个最明显的特点是“近似性”,也就意味着在此计算的每一步骤中均可能产生误差,并且在整个计算过程的所有计算步骤上发生误差的对消、传递和积累,造成最终计算结果复杂且难以预料,所以,本文就数值计算中产生的误差进行分析研究,从初始数据开始减弱误差的影响。

## 1 研究误差的意义

在现代科学研究中利用计算机解决科学问题要经过如下几个过程:实际问题—构造数学模型—选择数值计算方法—程序设计—进行实验—分析数据得出结论,其中在进行实验得到初始数据时或有人为的观测失误、或有机器的舍入失误,致使得到的实验数据总比真值偏差一点点,这种“一点点”可能是 0.01 也可能是 0.00001,甚至更小。可是,“一点点”的误差会不会对之后的数据分析产生影响呢?会产生多大的影响?我们通过一个实例分析:

在求方程组  $AX = b$   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix}$  的解时,我们借助 Matlab 软件进行方程组的数值求解来观测微小变化的  $b$  对方程的解产生的影响。发现当  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  时,  $AX=b$  的解为  $X$ , 当  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.01 \end{pmatrix}$  时  $AX=b$  的解为  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

由结果可得  $b$  的微小变化就引起  $X$  的很大变化,即  $X$  对  $b$  的扰动是敏感的,对于这样的方程组就称为病态的。此类病态问题是如何产生的呢?经查阅相关资料,病态问题产生的一种原因由实际问题得到的方程组的系数矩阵或者常数向量的元素,本身会存在一定的误差,这些初始数据的误差在计算过程中就会向前传播,从而影响到方程组的解。

通过上述实例分析,初始数据的准确性对实验的成败有着导向性,如何将误差最大限度地减小到可控状态是我们研究的关键。

## 2 对计算误差的分析研究

### 2.1 计算误差的来源及分类

绝大多数的数值计算结果都会有误差,这可能是由问题本身产生的,也可能是人为疏忽造成的,对数学问题做数值计算时可能产生的误差分为三大类——输入数据的误差、截断

误差以及舍入误差。

输入数据的误差是物理数据的不可靠性引起的,在数值计算中这种误差很难控制,而且它对计算结果的影响往往很大;截断误差是指求解数学问题的数值解时,用有限过程代替无限过程时产生的误差,常可人为控制,与运行的计算机无关;舍入误差是指在解决数学计算时只能对有限位数字进行运算,对原始数据、中间步骤和最终结果都不得进行舍入。

### 2.2 数值问题的误差分析

截断误差是算法的缺陷造成的,对于算法本身的问题,机器是无能为力的,选择好的数值方法是减小截断误差的主要着眼点,选择截断误差小的方法就是“良好”计算的开端。与截断误差不同,舍入误差在每一步计算中可能微不足道,但在整个的计算过程中,它会不断积累和传播,会造成最终计算结果产生较大误差。因此,舍入误差的分析是本文研究的重点。

由此可知,舍入误差的分析分为定量分析和定性分析,到目前为止提出了向后误差分析法、向前误差分析法、区间误差分析法和概率分析方法等几种定量分析法。向后误差分析法已经在矩阵计算的误差分析取得了一定的效果,但是其他三种还在发展中,这意味着定量分析存在着很大的局限性和特殊性。所以,数值计算中更关注于误差的定性分析,算法有“优”“劣”之分,数值问题有“好”“坏”之别,因此,即使不能定量地计算或者估计出最终误差,但如能判别算法能否使误差不任意放大,也就能放心地实施计算,这是研究定性分析的初衷。

### 2.3 数值稳定性分析

在误差定性分析中,核心是初始数据的误差和计算中产生的误差对最终输出数据影响。数值稳定便是指“初始数据的微小扰动不会引起输出解的大的变化”的性质,倘若输出解发生大的变化则证明数值问题的不稳定。我们通过一个例子说明:

例:计算积分  $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$ ,  $n = 0, 1, \dots, 20$ 。

解:首先,根据分部积分法得:

$$I_n = x^n e^{x-1} \Big|_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^{x-1} dx = 1 - n I_{n-1}$$

得到递推公式:

$$I_n = 1 - n I_{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots, 20. \quad (1)$$

由于  $I_0 = 1 - 1/e$ , 我们便可利用公式(1)计算得到  $I_0, \dots, I_{20}$ , 递推结果见表 1:

表 1 公式(1)递推结果

$n$	数值结果	$n$	数值结果
0	0.632121	11	0.077352
1	0.367879	12	0.071773
2	0.264241	13	0.066948
3	0.207277	14	0.062731
4	0.170893	15	0.059034
5	0.145533	16	0.055459
6	0.126802	17	0.057192
7	0.112384	18	-0.02945
8	0.100932	19	1.55962
9	0.091612	20	-30.1924
10	0.083877		

由表 1 可以看出  $I_{18}$  和  $I_{20}$  是负值,这对于积分值来说是不可能的,出现了很大的误差。故我们将递推公式(1)略作改造,成为:

$$I_{n-1} = (1 - I_n) / n, n = 0.1, \dots, 20. \quad (2)$$

$$\text{因为 } x^n / e \leq x^n e^{x-1} \leq x^n$$

$$\text{所以 } \frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \quad (3)$$

根据公式(3)我们可估算出  $I_{20} = 0.5 \times (1/e + 1) / 21 = 0.032569$ , 再利用公式(2)向前递推,结果见表 2:

表 2 公式(2)递推结果

$n$	数值结果	$n$	数值结果
20	0.032569	9	0.091612
19	0.048372	8	0.100932
18	0.050086	7	0.112384
17	0.052773	6	0.126802
16	0.055719	5	0.145533
15	0.059018	4	0.170893
14	0.062732	3	0.207277
13	0.066948	2	0.264241
12	0.071773	1	0.367879
11	0.077352	0	0.632121
10	0.083877		

分析表 1 和表 2,虽然表 1 的初始递推值  $I_0$  精度很高,但  $I_{10}$  之后的结果却有明显误差,表 2 的初始递推值由不等式估算而出,虽精度不高,但在递推计算出的  $I_0$  精度相当高。两个递推公式理论上完全等价,实际递推效果却有天壤之别,这是为什么呢?这是因为利用公式(1)递推虽然初始误差很小,但是之后的每步运算都会将误差成倍放大,以至于出现错误数据,而利用公式(2)虽然初始数据不够精确,但在运算过程中误差会逐步减小,以达到我们预期结果。

在一个数值算法中,舍入误差会在计算过程中恶性增大,我们变称该算法是数值不稳定的,否则称为数值稳定的,即如例中的公式(1)算法是数值不稳定的,公式(2)算法是数值稳定的,只有选择合适稳定的算法才能为之后的运算奠定成功的基石。

#### 2.4 控制初始舍入误差的有效途径

(1) 增加机器字长。最简单的方法就是从硬件角度减少舍入误差,用 64 位甚至更高位的机器,但是这样无疑要增加系统成本。因此,这种方法会受到限制,不被人们所接受。

(2) 增加有效数字位数,提高精度。对于我们一般的运算,计算机位数足够达到我们所需的精度,我们可以在运算数

字后多增加几位有效数字,以避免运算过程中有效位数消失。

例如,用 Seidel 迭代法求解方程组  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ( $\epsilon = 10^{-4}$ )

$$\text{Seidel 迭代公式为 } \begin{cases} x_1^{(m+1)} = (x_2^{(m)} + x_3^{(m)})/2 \\ x_2^{(m+1)} = (x_1^{(m+1)} + 1)/2 \\ x_3^{(m+1)} = (x_1^{(m+1)} - 2x_2^{(m+1)})/2 \end{cases}, x^{(0)} = [0 \ 0 \ 0]^T,$$

我们分别保留 5 位有效数字和 6 位有效数字进行逐次近似求解,求解结果对比如表 3:

表 3 保留不同有效位数的迭代结果对比

$m$	$x^{(m)}$ (5 位有效数字)			$x^{(m)}$ (6 位有效数字)		
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0.50000	-1.0000	0	0.500000	-1.00000
2	-0.25000	0.37500	-1.0000	-0.250000	0.375000	-1.00000
3	-0.31250	0.34375	-1.0000	-0.312500	0.343750	-1.00000
4	-0.32813	0.33594	-1.0000	-0.332031	0.333985	-1.00000
5	-0.33204	0.33398	-1.0000	-0.333008	0.333496	-1.00000
6	-0.33301	0.33350	-1.0000	-0.333252	0.333374	-1.00000
7	-0.33326	0.33337	-1.0000	-0.333313	0.333344	-1.00000
8	-0.33332	0.33334	-1.0000	-0.333328	0.333336	-1.00000
9				-0.333332	0.333334	-1.00000
相对误差	0.004%	0.002%	0	0.0004%	0.0002%	0

此方程组的真值解为  $[x_1, x_2, x_3]^T = (-1/3, 1/3, -1)^T$ , 通过表格数据分析可知,增加一位有效数字后  $x_1, x_2$  的相对误差分别由原来的 0.004% 减小到 0.0004% 和原来的 0.002% 减小到 0.0002%, 都将误差减小到原来的 10%。实例证明,增加有效数字的位数可以有效地减小误差。

(3) 改变舍入规则。一般舍入方法有收尾法(只入不舍),去尾法(只舍不入)和四舍五入法。这些舍入方法造成的误差相对较大,为之后的运算带来了很大的不稳定因素,结合文<sup>[4]</sup>和有效数字总结出改善的舍入规则:

若舍去部分的数值大于保留部分的末位的半个单位,则末位加 1;若小于保留部分末位的半个单位,则末位不变;若等于保留部分末位的半个单位,则末位凑成偶数,即末位为偶数则不变,末位为奇数则加 1。

按照上述规则进行数字舍入,其舍入误差均不超过保留数字最末位的半个单位,在大量运算时,舍入误差的均值将趋于零。

我们以上文(2)中的方程求解为例,若用改善后的舍入规则求解方程,运算步骤及结果如表 4:

表 4 改善舍入方法后求解结果

$m$	$x^{(m)}$		
0	0	0	0
1	0	0.50000	-1.0000
2	-0.25000	0.37500	-1.0000
3	-0.31250	0.34375	-1.0000
4	-0.32812	0.33594	-1.0000
5	-0.33203	0.33398	-0.99999
6	-0.33300	0.33350	-1.0000
7	-0.33325	0.33338	-1.0000
8	-0.33331	0.33334	-1.0000
9	-0.33333	0.33334	-1.0000
相对误差	0.001%	0.002%	0

通过表 4 计算结果分析,使用改善后的舍入规则可将  $x_1$  的相对误差由原来的 0.004% 减小到 0.001%, 误差减小到原来的 25%, 从而误差的减小可以看到舍入规则的改变可以有效地控制误差。

# 基于无线电层析成像的目标定位

匡仁炳<sup>1</sup>, 宋和平<sup>2</sup>

(1. 国家知识产权局专利局专利审查协作广东中心 广东 广州 510530 2. 江苏大学 计算机科学与通信工程学院 江苏 镇江 212013)

**摘要** 无线电层析成像(RTI)是通过分析因环境改变引起无线链路接收信号强度(RSS)的变化情况来推测场景信息的过程。文章运用一种新的链路分析方法,通过分别分析场景目标对链路的两种影响,即因阻挡而阴影衰减的影响和因反射而使链路多径分量增加的功率增强影响,得到不同的场景信息,最后综合两种信息得到场景信息,大大减少无线信号噪声干扰,通过实验证实该方法能减少噪声对 RTI 的干扰,实验结果有较好的收敛度。

**关键词** 无线射频网络;实时定位;无携带定位;DFL;分类分析无线层析成像

**中图分类号** TP391.41

**文献标识码** A

**文章编号** :1673-1131(2015)05-0041-03

## Target Localization via Radio Tomographic Imaging

KUANG Ren-bing<sup>1</sup>, SONG He-ping<sup>2</sup>

(1. Patent Examination Cooperation Center of the Patent office, SIPO, GuangDong;

2. School of Computer Science and Telecommunication engineering, Jiangsu University, Zhenjiang, 212013)

**Abstract** Radio tomographic imaging (RTI) is a process of infer scene information by analyzing the changes of wireless link's received signal strength (RSS) due to environmental change. Here propose a new approach for link RSS analysis which classification the RSS difference into two parts, the links which RSS attenuation due to shadow by target and the links which RSS enhances for the reason of have additional multipath components made by target's reflected, get the different scene information and then comprehensive analysis scene information. Through comprehensive analysis, greatly reducing the effect of wireless signal noise, Experiment results are presented.

**Key Words:** Wireless RF Sensor Network; Real-Time Location; device-free passive localization; DFL; Classification Analysis Radio Tomographic Imaging (CARTI)

### 0 引言

传统的定位方法需要定位目标携带相关设备来配合定位系统来定位,如需要用户携带 GPS 跟踪仪。目前一种不需要目标携带节点的定位方法(device-free passive localization, DFL)吸引了大量的研究讨论,其是利用传感器网络来对目标的跟踪定位,如通过热释电红外传感来感知人体的红外线实现定位<sup>[1]</sup>,同时,另一种利用无线电成像(Radio tomographic imaging, RTI)方式定位也为 DFL 定位提供新的思路,RTI 是通过训练人场景的不同位置对无线网络各链路信号的影响,得到不同位置的训练样本集,定位时用现场接收的各节点信号强度集合和样本集比照,从而得出定位目标的位置信息<sup>[2,3]</sup>,但是由于无线传输受环境影响较大,不同时段的环境不同,导致定位结果偏差较大,并且该方式需要大量的训练样本。Wilson 提出分析信号接收功率方差(VRTI)的算法<sup>[4,5,6]</sup>,实现了空旷草地

上的运动跟踪,而不需要进行样本训练。但是由于无线传输的多径复杂性,得到的场景定位结果收敛度较低。本文发现当定位目标出现在无线网络中,LOS 链路的 RSS 会因为定位目标的阻挡而出现较大的阴影衰减,同时目标对其他非阻挡链路会因定位目标对链路的反射而使该节点链路间的多径分量增加,从而使这些折射作用的节点链路产生微弱的 RSS 增强作用。因此将这两种作用效果进行综合分析,得到的定位结果收敛度将大大提升<sup>[7]</sup>。

在第二节中将描述 RTI 的线性公式,分类分析具体算法将在第三节中细致讲述,第四节将会演示试验过程和数据分析结果。在第五节中回顾主要的工作和结论。

### 1 无线电层析成像

#### 1.1 RTI 系统表示

在无线传感网络中,链路受该链路附近的定位目标影响,由

### 3 结语

数值计算在我们的各项科学研究中占据越来越重要的位置,而误差分析是其主要内容之一,通过本文的研究让我们理解的更加深刻!在今后的学习过程中,我们要对每一处误差抱有严谨的态度,不能存有丝毫懈怠的心理;做好误差分析既可以为研究增添胜利的筹码,也可以及时停止错误的研究节省时间少走弯路,牢记一些小技巧,为数值计算奠定良好的基础。

**参考文献:**

- [1] 周国标,宋宝瑞,谢建利.数值计算[M].北京:高等教育出版社,2008
- [2] 任玉杰.数值分析及其 MATLAB 实现:MATLAB6.X,7.X

版[M].北京:高等教育出版社,2007

- [3] 张德丰, MATLAB 数值分析与应用[M].北京:国防工业出版社,2009
- [4] 费业泰,误差理论与数据处理[M].北京:机械工业出版社,2010
- [5] 姜剑飞,胡良剑,唐俭.数值分析及其 MATLAB 实验[M].北京:科学出版社,2004

**基金项目** 全国大学生创新创业训练计划项目(编号 201311117022Z)。

**作者简介** 景杨(1992-),女,山西太原人,研究方向为信息与计算科学。