基于数学分析的非线性方程的数值解法

冯晓霞, 梁　娟

(闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘　要：针对非线性方程的数值解法中二分法、不动点迭代法和牛顿法,本文从数学分析角度明确了二分法和不动点迭代法的理论基础,同时,详尽地应用数学分析中相关知识研究了这三种方法的收敛性以及不动点迭代法和牛顿法的收敛速度.

关键词：不动点迭代法；收敛阶；零点定理；微分中值定理

中图分类号：O172; O242　文献标志码：A　文章编号：2095-7122(2017)04-0001-09

The Numerical Methods of the Nonlinear Equation Based on Mathematical Analysis

FENG Xiaoxia, LIANG Juan

(School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou, Fujian 363000, China)

Abstract: For the bisection, fixed-point iteration and Newton methods in the nonlinear equation, the theoretical foundations of the bisection and fixed-point iteration methods are made clear from the view of Mathematical analysis, by applying the related knowledge in Mathematical analysis in detail, the convergences of three methods are not only studied, but the convergence speeds of the fixed-point iteration and Newton methods are studied.

Key words: fixed-point iteration method; convergence order; zero point theorem; mean value theorem of differentials

DOI:10.16007/j.cnki.issn2095-7122.2017.04.001

数值分析是研究数值问题的算法,其理论分析主要是连续系统的离散化即离散型方程的数值求解问题,包括误差分析、稳定性、收敛性等,对近似算法要保证收敛性和数值稳定性,还需对误差进行分析,这些都建立在数学分析、高等代数及泛函分析等相应数学理论的基础上.

随着计算机科学和技术的迅猛发展,科学与工程技术中遇到的各类数学问题都有可能通过数值计算方法加以解决. 科学与工程技术中诸多问题往往都归结为求解某些特定的非线性方程, 然而除很特殊的情形外,直接法是很难求解非线性方程,需近似地求解;而且对于实际问题往往并不要求得到方程的真实解,只需求出其近似解. 由此可见,非线性方程的数值求解是科学与工程计算中一个常见且重要的问题,研究非线性方程的数值解法有着重要的理论意义和实际应用价值.

在非线性方程数值解法的相关理论中, 数学分析的相关知识给出了重要的理论保障. 若将数学分析与数值分析有机的结合来讲授数值分析,不仅能巩固数学分析的相关知识,深刻地知晓数学分析的重要性,而且有助于数值分析的相关知识的理解和掌握,培养学生的分析和解决问题的能力.

收稿日期：2017-10-25
基金项目：福建省教改课题(JAS151294)；闽南师范大学校教改课题(JG201717)
作者简介：冯晓霞(1969-)，女，吉林省蛟河市人，博士，教授.

本文针对非线性方程的数值解法:二分法、不动点迭代法、牛顿法,全面地应用数学分析的相关知识研究了它们的收敛性以及收敛速度.

1 数学分析在非线性方程的数值解法中应用

在非线性方程的数值解法中,例如二分法、不动点迭代法等的理论基础就是数学分析的一些相关理论,而且在讨论这些方法的收敛性和收敛速度时,微分中值定理和 Taylor 定理起到了关键作用. 在这一部分中,针对 3 个非线性方程的数值解法来阐述数学分析在其中的重要应用.

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,数值分析中主要研究求解实单变量的非线性方程

$$f(x)=0 \tag{1}$$

的数值解法.

非线性方程包括代数方程和超越方程,当代数方程的求根公式复杂难于使用,或者它的根无法用解析式给出时,需近似求解;超越方程除极少数情形外只能近似地求解,非线性方程的数值求解是科学与工程计算中一个常见且重要的问题.

1.1 二分法

二分法[1]是求解非线性方程(1)的简单有效方法之一,它的理论基础和保障就是数学分析中的零点定理和闭区间套定理[2].

当 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且满足 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时,由零点定理知 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点 x^*,即方程(1)在 (a,b) 内至少有一个根 x^*,此时称 $[a,b]$ 为(1)的有根区间. 不妨假设方程(1)在 $[a,b]$ 上只有一个实根,对有根区间 $[a,b]$ 依次地二等分,得到有根区间序列间 $\{[a_k,b_k]\}$,它们满足

$$[a_k,b_k]\supset[a_{k+1},b_{k+1}],\ b_k-a_k=\frac{1}{2^k}(b-a);\forall k\in N^+. \tag{2}$$

并且

$$f(a_k)\cdot f(b_k)<0,\forall k\in N^+. \tag{3}$$

条件(2)确保了 $\{[a_k,b_k]\}$ 构成闭区间套,故由闭区间套定理知,存在唯一一点 $\bar{x}\in[a_k,b_k](\forall k\in N^+)$,同时有

$$\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}b_k=\bar{x}. \tag{4}$$

在应用闭区间套定理证明问题时,除构造闭区间套外,往往还需要给出与所证结论息息相关的额外性质 P[3],这里就是条件(3),它确保了 $\bar{x}$ 是方程(1)的根. 事实上,由数学分析中函数 $f(x)$ 的连续性、函数极限与数列极限的桥梁——归结原则、极限的不等式性质[3]和(3)知

$$\lim_{k\to\infty}f(a_k)\cdot f(b_k)=f^2(\bar{x})\le 0\Rightarrow f(\bar{x})=0,$$

即 $\bar{x}$ 是方程(1)的根,再由假设可知 $\bar{x}=x^*$.

由于 $\bar{x}=x^*\in[a_k,b_k](\forall k\in N^+)$,根据(4)知可用有根区间 $[a_k,b_k]$ 的中点 $x_k=\dfrac{a_k+b_k}{2}$ 作为根 x^* 的近似值,进而由(2)知其误差满足

$$\left|x_k - x^*\right| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}, \forall k \in N^+.$$

于是获得近似根序列 $\{x_k\}$，显然有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，这种方法称为二分法[1].

注 1）在目前我们所翻阅的教材中，还没有明确使用闭区间套定理来证明二分法的收敛性，应用闭区间套定理证明更严谨；

2）在说明闭区间套定理得到的唯一点 $\bar{x}$ 是方程（1）的根时，不仅用到函数的连续性，而且用到归结原则和极限的不等式性质.

二分法计算简单且总是收敛的，而且只要求函数连续即可，但是它的收敛速度慢，并且一个好的中间近似解也可能被无意丢弃掉[4]，因此它常用于确定方程根的粗略位置或为其他快速收敛的求根算法提供初始值.

1.2 不动点迭代法

迭代法是求解非线性方程近似解最为重要和便利的方法，这里基于数学分析中相关知识来讨论不动点迭代法的收敛性和收敛速度.

将方程（1）改写成等价形式

$$x = \varphi(x), \tag{5}$$

显然有 $f(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = \varphi(x^*)$，进而求解方程（1）的根 x^* 等价于求迭代函数 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*，这样更易于分析，并且由此可引出一些有影响的求根方法.

选择一个初始值 x_0，应用 $\varphi(x)$ 不断地迭代

$$x_{k+1} = \varphi(x),\ k = 0, 1, \cdots, \tag{6}$$

得到迭代序列 $\{x_k\}$，这种方法称为不动点迭代法[1]，也称为 Picard 迭代.

针对不动点迭代法有两个待解决问题为：1）当迭代函数 $\varphi(x)$ 满足什么条件时，迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*；2）当迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛时，研究 $\{x_k\}$ 的收敛速度.

1.2.1 不动点迭代法的收敛性

为了研究不动点迭代法的待解决问题 1），先给出迭代法收敛的相关定义.

定义 1[5]（局部收敛和全局收敛）设 x^* 为方程（1）的根，若存在 x^* 的某个闭邻域 $\overline{U(x^*;\delta)} = [x^*-\delta, x^*+\delta]$，对于任意的初始值 $x_0 \in \overline{U(x^*;\delta)}$，由迭代法（6）产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*，则称迭代法（6）局部收敛；若对于含根区间 $[a,b]$ 内任意点 x_0，迭代序列 $\{x_k\}$ 都收敛于 x^*，则称迭代法（6）全局收敛.

很多教材都说泛函分析中压缩映像原理是不动点迭代法收敛的理论基础，然而压缩映像原理主要借助于数学分析中的零点定理和微分中值定理[2]，因此我们有理由提出是零点定理和微分中值定理确保了不动点迭代法的收敛性，下面给出该定理.

定理 1[5]（不动点迭代法的收敛定理）设迭代函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，满足

(a) $\forall x \in [a,b]$,有 $a \le \varphi(x) \le b$;

(b) $\exists L : 0<L<1$,对于$\forall x \in [a,b]$,有

$$|\varphi'(x)| \le L,$$

则对于$\forall x_0 \in [a,b]$,由迭代法(6)产生的迭代序列$\{x_k\}$在$[a,b]$上收敛于 $\varphi(x)$的唯一不动点 x^*.

分析 先证不动点的存在性. 即需证明$\exists x^* \in [a,b]$,使得

$$\varphi(x^*)=x^* \Leftrightarrow \varphi(x^*)-x^*=0,$$

于是问题归结为讨论函数 $F(x)=\varphi(x)-x$ 的零点存在问题,自然需要使用零点定理. 如果$\exists x \in [a,b]$,满足 $\varphi(x)=a$ 或者 $\varphi(x)=b$,结论显然. 否则,由定理条件可得 $F(x)$在$[a,b]$上连续;根据条件(a),有$f(a)=\varphi(a)-a>0, f(b)=\varphi(b)-b<0$,于是由零点定理可得$\exists x^* \in (a, b)$,使得 $F(x^*)=0$,进而 $x^*=\varphi(x^*)$,即 $\varphi(x)$在$[a,b]$上存在不动点 x^*.

再证不动点 x^*的唯一性. 通常的方法是设 $\varphi(x)$有两个不动点x_1^*, x_2^*往证$x_1^*=x_2^* \Leftrightarrow |x_1^*-x_2^*|=0$,并且 $0=|x_1^*-x_2^*|=|\varphi(x_1^*)-\varphi(x_2^*)|$. 条件(b)给出 $\varphi(x)$导函数性质,要证明 $\varphi(x)$满足$|\varphi(x_1^*)-\varphi(x_2^*)|=0$,此时则需借助函数与导数的桥梁——微分中值定理. 于是由微分中值定理及(b)可得

$$|x_1^*-x_2^*|=|\varphi(x_1^*)-\varphi(x_2^*)|=|\varphi'(\xi)(x_1^*-x_2^*)| \le L|x_1^*-x_2^*|<|x_1^*-x_2^*|, \tag{7}$$

从而有$x_1^*=x_2^*$,即不动点 x^*是唯一的.

类似地,应用柯西收敛准则结合等比数列的极限$\lim\limits_{k\to\infty} L^k=0\ (0<L<1)$,易证对于$\forall x \in [a,b]$,由(6)产生的迭代序列$\{x_k\}$收敛于 $\varphi(x)$的不动点 x^*.

注 1)由定义 1 知,在定理 1 中迭代法(6)是全局收敛的;

2)条件(b)可以弱化为 $\varphi(x)$在$[a,b]$上满足利普希茨条件[2]:

(b1) $\exists L : 0<L<1$,对于$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$,有$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \le L|x_1-x_2|$,

当 $\varphi(x)$在$[a,b]$上满足条件(a)和(b)时, $\varphi(x)$是一个压缩映射;

3)应用函数的导数性质研究函数时,往往都是借助于微分中值定理.

条件(a)一般是很难验证的,由于初始值往往在 x^*附近选取,这属于局部问题,则需研究迭代法(6)的局部收敛性. 受(7)的启发,可将条件(b)弱化为局部条件:

(b2) $\exists L : 0<L<1$, $\exists \delta>0$,对于$\forall x \in \overline{U(x^*,\delta)}=[x^*-\delta,\ x^*+\delta]$,有$|\varphi'(x)| \le L$ 时,此时可达到一箭双雕的目的:不仅能确保不动点的唯一性,而且还能确保 $\varphi(x)$在在点 x^*的闭邻域$\overline{U(x^*,\delta)}$上满足(a). 事实上,对于$\forall x \in \overline{U(x^*,\delta)}$,根据微分中值定理可得

$$|\varphi(x)-x^*|=|\varphi(x)-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi)(x-x^*)| \le L|x-x^*|<|x-x^*| \le \delta,$$

故有 $\varphi(x) \in \overline{U(x^*,\delta)}$,即 $\varphi(x)$在$\overline{U(x^*,\delta)}$上满足条件(a)且满足(b). 由定理 1 可得迭代法(6)在

$\overline{U(x^*,\delta)}$ 上收敛，并且根据定义 1 知它是局部收敛的.

由条件(b2)，为了使$|\varphi'(x)|\leq L<1$ 在 x^*的闭邻域$\overline{U(x^*,\delta)}$上成立，根据数学分析中连续函数的局部保号性[2]知只需$\lim\limits_{x\to x^*}\varphi'(x)=\varphi'(x^*)<1$，即可将条件(b1)继续改进为：

(b3) $\varphi'(x)$在点 x^*附近连续，并且$|\varphi'(x^*)|<1$.

事实上，取正数 L 使得$|\varphi'(x^*)|<L<1$，由 $\varphi'(x)$在点 x^*连续知，$\exists\delta_1>0$，对于$\forall x\in U(x^*,\delta_1)=(x^*-\delta_1,x^*+\delta_1)$，有$|\varphi'(x)|<L$. 于是$\exists\delta:0<\delta<\delta_1$，对于$\forall x\in\overline{U(x^*,\delta)}\subset U(x^*,\delta_1)$，使得$|\varphi'(x)|<L$，即(b2)成立，由此得到不动点迭代法的局部收敛定理，相应的结果是由 Ostrowski 于 1960 年得到的.

定理 2[1](迭代法的局部收敛定理)设 x^*是迭代函数 $\varphi(x)$的不动点，$\varphi'(x)$在 x^*的某个邻域连续，且$|\varphi'(x^*)|<1$，则迭代法(6)局部收敛.

研究了不动点迭代法待解决问题 1)之后，接下来考虑待解决问题 2).

1.2.2 不动点迭代法的收敛阶

收敛速度是评价迭代法好坏的重要标志之一，为了衡量迭代法的收敛速度，Traub 于 1966 年给出下面给出收敛阶定义.

定义 2[1] 设迭代法(6)收敛于迭代函数 $\varphi(x)$的不动点 x^*，如果$\exists p\geq 1$ 及 $C\neq 0$，使得迭代误差$e_k=x_k-x^*$满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=C, \tag{8}$$

则称迭代法(6)是 p 阶收敛的. 特别地，当 $p=1$ ($|C|<1$)时，称为线性收敛；当 $p>1$ 时，称为超线收敛；当 $p=2$ 时，称为平方收敛.

假设迭代法(6)满足定理 2 的条件，则有$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$，由(8)和数学分析中无穷小量阶的比较[2]知此时 e_{k+1} 与e_k^p是同阶无穷小量，由此可见收敛阶是迭代法收敛速度的一种度量，p 越大，收敛速度越快.

由微分中值定理得

$$e_{k+1}=x_{k+1}-x^*=\varphi(x_k)-\varphi(x^*)=\varphi'(\xi_k)(x_k-x^*)=\varphi'(\xi_k)e_k, \tag{9}$$

其中ξ_k 介于 x_k 与 x^*之间. 若进一步假设 $\varphi'(x)\neq 0$，取初始值 $x_0\neq x^*$ ($e_0\neq 0$)，由(9)知 $e_k\neq 0$ ($k\in N^+$)，于是

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi'(\xi_k)(x_k-x^*)}{(x_k-x^*)^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi'(\xi_k)}{(x_k-x^*)^{p-1}}. \tag{10}$$

由(10)、$\varphi'(x)$的连续性及归结原则得当 $p=1$ 时，有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k}=\lim_{k\to\infty}\varphi'(\xi_k)=\varphi'(x^*)=C,$$

由定理 2 的条件以及进一步的假设知 $0<|C|<1$，于是通过定义 2 可得迭代法(6)是线性收敛，也即迭代法(6)至少是线性收敛的.

注 1)应用同阶无穷小量理解收敛阶的概念更加直观；

2)借助微分中值定理，通过(10)直接说明迭代法(6)至少是线性收敛的，不仅自然而且易于理解.

通过上述分析可见要想获得超线性收敛的迭代法，必须使得 $\varphi'(x^*)=0$，于是对于一般情况有下面定理.

定理 3[6] 对于迭代法(6)以及正整数 $p>1$，如果 $\varphi^{(p)}(x)$ 在所求根 x^* 附近连续，则迭代法(6)在点 x^* 附近是 p 阶收敛的充要条件是

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0 \tag{11}$$

并且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0. \tag{12}$$

分析 定理 1–2 是根据迭代函数 $\varphi(x)$ 的一阶导数的性质来研究函数 $\varphi(x)$，它们皆需借助于函数与导数的桥梁——微分中值定理来处理. 然而，定理 3 的充分性是借助 $\varphi(x)$ 的高阶导数的性质来研究迭代法(6)的收敛阶，此时则需借助于数学分析中的 Taylor 定理[2]，在应用 Taylor 定理时，需确定将函数在哪一点做 Taylor 展开，另外使用哪种形式的余项.

由条件(11)知应该将 $\varphi(x)$ 在点 x^* 做 Taylor 展开，然后根据下面的分析可知直接将 $\varphi(x_k)$ 在点 x^* 进行 Taylor 展开. 当 $p>1$ 时，由于 $|\varphi'(x^*)|=0<1$，根据定理 2 断定迭代法(6)具有局部收敛性. 不妨假设 $x_k\neq x^*(k\in N)$，从条件(12)出发，应用数学分析中数列极限与无穷小量关系[2]可得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0\Rightarrow\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)+\alpha_k, \tag{13}$$

其中 $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=0$，将 $e_k=x_k-x^*$ 及 $e_{k+1}=x_{k+1}-x^*=\varphi(x_k)-\varphi(x^*)$ 代入(13)有

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}(x_k-x^*)^p+\alpha_k. \tag{14}$$

定理给出的条件是 $\varphi(x)$ 在点 x^* 直到 p 阶导数的性质，并且由(12)知这属于定量的描述，再联合(14)，由 Taylor 定理只需将 $\varphi(x_k)$ 在点 x^* 做 Taylor 展开到 $p-1$ 次，同时由(12)知属于定量的描述，故使用拉格朗日型余项，于是有

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\cdots+\frac{\varphi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x_k-x^*)^{p-1}+\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p,$$

其中 ξ_k 介于 x_k 与 x^* 之间. 利用(6)(11)及 $\varphi(x^*)=x^*$ 可得

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p=x^*+\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k-x^*)^p. \tag{15}$$

再由 $x_k\neq x^*(k\in N)$、(15)、$\varphi^{(p)}(x)$的连续性及归结原则知

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0,$$

由定义 2 知迭代法(6)是 p 阶收敛的，并且(12)成立.

必要性借助于已经证明的结论以及反证法很容易得到，此处省略.

注 1)当应用函数高阶导数的性质来研究函数本身时，往往都是借助于 Taylor 定理，此时需确定在哪点做 Taylor 展开，还需选择合适的余项表示；

2)当确定了在 x^* 做 Taylor 展开之后，应用数列极限与无穷小量的关系具体确定将 $\varphi(x_k)$在点 x^* 做 Taylor 展开.

借助于数学分析中相关理论，讨论了不动点迭代法待解决的问题 1)–2)之后，接下来继续研究具体超线性收敛的迭代法.

1.3 Newton 法

由定理 3 可知利用 Taylor 定理可以构造具有更快收敛速度的迭代法，Newton 法就是其中之一，并且 Newton 法是解决求根问题的最有影响力和最著名的一种方法.

Newton 法又称为切线法，当假设 $f(x)$可导，且 x_k 是方程(1)的根 x^*之近似值时，其思想就是使用曲线 $y=f(x)$在点$(x_k,f(x_k))$处切线与 x 轴交点的横坐标来近似代替 x^*，也即数学分析中以直代曲的思想，x^*近似满足线性方程

$$f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)\approx 0, \tag{16}$$

由此可得 $x^*\approx x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，将 $x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$作为 x^*的下一个近似值，得到 Newton 法的迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ k=0,1,2,\cdots. \tag{17}$$

假设 $f''(x)$在点 x^*某邻域内连续，并且 $f'(x)\neq 0$，类似定理 3 充分性的分析，使用(17)给出的 x_{k+1} 近似 x^*，相应的误差亦需使用 Taylor 定理来讨论. 由于 x^*近似满足(16)，同时 x^*是方程(1)的根，即 $f(x^*)=0$，于是有

$$0=f(x^*)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k).$$

由此可见应将 $f(x^*)$在 x_k 做 Taylor 展开，并且也应用拉格朗日型余项，有

$$0=f(x^*)=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2!}(x^*-x_k)^2, \tag{18}$$

其中ξ_k介于x_k与x^*之间. 当x_k与x^*充分接近时,我们发现(16)可视为应用 Taylor 展开式(18)中线性部分近似代替$f(x^*)=0$或者忽略误差项得到的,这就是 Newton 法的又一种引入方法.

当x^*是方程(1)的单根时,即$f(x^*)=0$且$f'(x^*)\neq 0$,令$\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$,于是有

$$\varphi(x^*)=x^*-\frac{f(x^*)}{f'(x^*)}=x^*;\quad \varphi'(x^*)=\frac{f(x^*)f''(x^*)}{\left(f'(x^*)\right)^2}=0,$$

由此可见,Newton 法(17)就是迭代函数为$\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$的不动点迭代法,而且由定理 2 知Newton 法是局部收敛的.

当$f''(x^*)$在点$\varphi''(x^*)$某邻域$U(x^*)$内连续时,不能像[1]那样通过计算$\varphi''(x^*)\neq 0$来讨论 Newton 法的收敛阶,这是因为计算$\varphi''(x)$需用到的$f(x)$三阶导数,但可根据(17)利用(18)来讨论. 在(18)中出现$\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$,于是有

$$0=\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}+x^*-x_k+\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x^*-x_k)^2\Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x^*+\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(x^*-x_k)^2.$$

由于$f''(x^*)$在$U(x^*)$内连续,故$f'(x)$在$U(x^*)$内连续,从而由$f'(x)$和$f''(x^*)$的连续性以及归结原则可得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x^*-x_k)^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\neq 0,$$

根据定义 2 可知 Newton 法是平方收敛的,于是得到下面定理

定理 4[7] (Newton 法的局部收敛性)设x^*是方程(1)的根,$f''(x)$在点x^*某邻域$U(x^*)$内连续且$f'(x^*)\neq 0$,则$\exists\delta>0$,$\forall x_0\in U(x^*,\delta)\subset U(x^*)$,由 Newton 法产生的序列$\{x_k\}$收敛于$x^*$;当$f''(x^*)\neq 0$且$x_0\neq x^*$时,则 Newton 法是平方收敛的,并且有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x^*-x_k)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.$$

注 1)由(16)知 Newton 法的获得体现了数学分析中以直代曲的思想,然后应用 Taylor 定理来讨论其收敛速度;

2)Newton 法的引入有很多方法,当x_k与x^*充分接近时,也可在由 Taylor 定理得到的(18)中忽略高阶无穷小的误差项得到(16).

Newton 法的收敛速度快,它不仅能计算方程(1)的实根和复根,还能计算多重根. 但是它的一个弱点

就是对初始值 x_0 敏感，此外，在每步近似计算时需计算 $f(x)$ 的导数值 $f'(x)$，通常计算 $f'(x)$ 比 $f(x)$ 更困难.

2 结束语

本文针对非线性方程的三个数值解法：二分法、不动点迭代法和 Newton 迭代法，应用数学分析中相关知识给出了前两种方法的理论基础，并讨论了后两种的收敛速度.

首先，从数学分析角度明确了闭区间套定理是二分法的理论基础，尽管文[8]说明了闭区间套定理及函数极限的相关性确保了二分法的收敛性，但是其没有给出详细的证明；而且明确了不动点迭代法收敛的理论基础是零点定理和微分中值定理. 其次，在讨论不动点迭代法的收敛定理时，数学分析中利普希茨条件、连续函数的局部保号性给出了定理条件依次削弱的依据；在研究后两种方法的收敛阶时，借助于数学分析中同阶无穷小量更容易理解该概念的实质；在研究不动点迭代法的超线性收敛时，应用了数学分析中 Taylor 定理；在用数学分析中以直代曲的思想引入 Newton 法时，结合了 Taylor 定理的引入方法，并应 Taylor 定理研究了其收敛阶. 最后，本文重点分析了在什么情形使用闭区间套定理、零点定理和微分中值定理，以及怎么应用这些定理证明问题；此外，数学分析中函数的连续性、归结原则、极限的不等式性质、数列极限与无穷小量关系在研究这三种方法时也起到了相应的作用.

从对这三种方法的探讨中可见数学分析的相关知识提供了重要的理论保障，将数学分析与数值分析有机的结合来讲授数值分析，可达到一箭双雕的目的.

参考文献:

[1] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析(第 5 版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2014.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析(第四版上)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[3] 刘玉琏, 傅沛仁, 数学分析讲义(第三版上)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997.

[4] Richard L, Burden. J, Douglas Faires. 数值分析(第七版)[M]. 冯烟利, 朱海燕, 译. 北京: 高等教育出版社, 2005.

[5] 李乃成, 梅立权, 数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2011.

[6] 黄云清, 舒 适, 陈燕萍, 等. 数值计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[7] 颜庆津, 数值分析(第三版)[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006.

[8] 邹 进, 数学分析在函数方程求解中的应用[J]. 乐山师范学院学报, 2013, 28(5): 6–8.

［责任编辑：钟国翔］