

Inflación Estocástica: Simulación de Fluctuaciones Cuánticas Primordiales como Ruido Estocástico mediante Cadenas de Markov

Kayro Romero Ramírez - C37015*
Escuela de Física, Universidad de Costa Rica
(Dated: 8 de diciembre de 2025)

La inflación cósmica temprana constituye uno de los fenómenos más relevantes en la historia del universo, responsable de la expansión acelerada que definió su estructura a gran escala. Por lo tanto en este trabajo se estudia el comportamiento del campo inflatón —el campo escalar que impulsa dicha expansión— considerando sus fluctuaciones cuánticas como un proceso estocástico. A través de simulaciones numéricas basadas en métodos de Monte Carlo y cadenas de Markov, se analiza la evolución del campo bajo distintas condiciones iniciales resolviendo las ecuaciones de Langevin y de Fokker-Planck. Los resultados muestran que las fluctuaciones cuánticas pueden modelarse adecuadamente como ruido estocástico y que la dinámica del inflatón tiende hacia un régimen de desaceleración gradual (slow-roll), alcanzando un estado estacionario. Asimismo, las distribuciones de probabilidad del campo y de su momento conjugado presentan un carácter gaussiano, en concordancia con las predicciones de los modelos inflacionarios estándar. En conjunto, este estudio valida el enfoque estocástico como herramienta para explorar efectos cuánticos en cosmología y establece un vínculo entre la teoría y las posibles huellas observables en el fondo cósmico de microondas, con miras a futuras extensiones que, mediante mayor capacidad computacional, permitan contrastar con mayor precisión las predicciones numéricas y los datos cosmológicos reales.

1. Pregunta de Investigación

En el área de la cosmología, ha sido de vital importancia comprender los orígenes y la evolución temprana del universo. A lo largo de la historia, se han desarrollado diversos modelos teóricos que buscan describir con precisión el comportamiento del cosmos en sus primeros instantes. Dentro de este marco, surge la propuesta de un campo escalar denominado inflatón, responsable de impulsar la expansión acelerada del universo durante el periodo inflacionario.

El avance en la teoría cuántica de campos ha permitido profundizar en la naturaleza del inflatón y en las fluctuaciones que lo acompañan. En este contexto, se plantea la pregunta central que guía esta investigación: ¿Cómo afectan las diferentes condiciones iniciales a las soluciones de la inflación en el universo temprano y de qué manera la implementación de distintas trayectorias de Langevin se compara con las predicciones teóricas de la ecuación de Fokker-Planck?

Responder a esta pregunta requiere un abordaje cuidadoso, ya que el problema involucra fluctuaciones cuánticas inherentes a un régimen altamente aleatorio. Por ello, se recurre a la simulación numérica mediante los métodos de Monte Carlo, los cuales resultan adecuados para explorar sistemas estocásticos con múltiples trayectorias posibles. Considerando además que el inflatón puede des-

cribirse como un campo con propiedades markovianas, la aplicación de este enfoque permite representar su dinámica de manera estadísticamente consistente.

El estudio detallado de estos fenómenos posee gran relevancia, pues actúa como un puente hacia algunos de los problemas más profundos de la física contemporánea. A través del análisis de las fluctuaciones cuánticas en el universo primitivo, es posible conectar procesos microscópicos con observaciones cosmológicas, como las anisotropías en el fondo cósmico de microondas (CMB) o la formación de agujeros negros primordiales. Estos fenómenos reflejan la naturaleza cuántica del universo temprano y sustentan el modelo del inflatón como un componente fundamental en la descripción de la inflación cósmica.

2. Objetivos

2.1. Objetivo General

Analizar cómo las diferentes condiciones iniciales modifican las soluciones que describen la inflación en el universo temprano, así como implementar distintas trayectorias de Langevin para compararlas con las predicciones teóricas de la ecuación de Fokker-Planck.

2.2. Objetivos Específicos

- Determinar cómo las soluciones que describen la inflación del universo temprano, se ven afectadas por

* Electronic address: Kayro.Romero@ucr.ac.cr

distintas condiciones iniciales que son congruentes con datos preexistentes.

- Calcular, mediante métodos de Monte Carlo basados en cadenas de Markov, grandes conjuntos de trayectorias de Langevin, para obtener una función de densidad de probabilidad (PDF) en función de las condiciones iniciales.
- Comparar las múltiples funciones de densidad de probabilidad obtenidas mediante métodos de Monte Carlo basados en cadenas de Markov con resultados analíticos y numéricos de las ecuaciones de Fokker-Planck bajo las mismas condiciones iniciales.

3. Marco Teórico

Diversos modelos a lo largo de la historia han intentado describir los momentos tempranos del universo, en especial su proceso de expansión. Con el desarrollo de la mecánica cuántica fue posible construir marcos teóricos más precisos que los disponibles en épocas anteriores, lo cual, ha permitido aproximarse de manera más rigurosa a la comprensión del universo primitivo. En este contexto, surge el estudio de la inflación cósmica como un fenómeno estocástico, en el que efectos cuánticos y clásicos interactúan de manera aleatoria durante la evolución de la expansión caracterizada por el radio de Hubble. Para comprender este enfoque estocástico de la inflación cósmica, es necesario reconocer que, a lo largo de la historia, muchos modelos teóricos diferían de los resultados observacionales, lo que impulsó a los físicos a perfeccionar sus propuestas. De esta manera, la inflación estocástica surge como un marco que logra describir de manera consistente —y en varios aspectos precisa— los datos observacionales disponibles en la actualidad.

El estudio de la inflación cósmica se ha logrado describir como un proceso estocástico debido a que no describe a un universo regido únicamente por efectos clásicos, sino que, debido a la mecánica cuántica, se ha logrado descifrar las fluctuaciones cuánticas del vacío y cómo “corriegen” la inflación al cruzar el radio de Hubble; con esto es importante saber que se entiende el radio de Hubble como la distancia maximala cual puede recorrer la luz en un tiempo característico sobre un universo en expansión. Este parámetro se puede definir como:

$$R_H = \frac{c}{H}; \quad H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (1)$$

con a siendo un factor de escala que depende del tiempo y determina cómo las distancias físicas en el universo

cambian [1]. Con esto, es importante destacar que la inflación, en una definición más rigurosa, es el proceso de altas energías que describe la expansión acelerada en los primeros momentos del universo; durante la inflación, las fluctuaciones cuánticas de vacío se estiraron a escalas astrofísicas, dando pie a perturbaciones cosmológicas que son anisotropías en el fondo cósmico de microondas. La inflación predice que estas perturbaciones deberían ser casi gaussianas [2].

El estudio de la inflación es sensible a física en la escala de Planck, por tanto se propone un potencial alusivo a la inflación, en donde se introduce la definición de un campo escalar determinado como inflatón ϕ , el cual es responsable de la expansión acelerada del universo en etapas tempranas, el inflatón se asegura que se encarga de expandir el universo mediante su energía potencial $V(\phi)$ [1]; asimismo es de vital importancia entender a grandes rasgos, debido a que su comprensión cae fuera del foco de la investigación, que el inflatón se encarga de expandir el universo mediante la gravedad repulsiva que se envuelve en su potencial [2]. Posterior a la inflación, la energía contenida en los campos oscilantes decrece a otros grados de libertad; esta época determinada como “recaleamiento” está gobernada por la interacción del inflatón con otros campos. Durante la inflación, las perturbaciones en el campo escalar son puestas en estados de dos modos apretados, los cuales pasan por una transición de cuántico a clásico en el sentido de escalas super-Hubble; esto sucede debido a que las partes no commutativas de los campos se vuelven muy pequeñas en comparación con sus partes anti-commutativas. Este es el pilar fundamental del análisis estocástico de la inflación; en este específico modelo, las fluctuaciones de longitud de onda corta se comportan como ruido clásico actuando sobre las dinámicas de las escalas super-Hubble conforme avanzan sobre un filtrado que se rige por las ecuaciones de Langevin que se abordarán más adelante [2].

Para la simplicidad del análisis se asume que ϕ es un campo de prueba desacoplado lo suficiente de la métrica y perturbaciones de otros campos. Sabiendo esto, la estrategia para utilizar el formalismo estocástico es separar las longitudes de onda largas de las cortas introduciendo un corte dependiente del tiempo en el espacio de Fourier, definido como

$$k_\sigma = \sigma a H \quad (2)$$

En la ecuación anterior se define un número de onda que depende de la constante a , visitada anteriormente, la escala de Hubble y una variable σ que se puede interpretar como la suavidad de la separación del filtro, la cual pertenece a un intervalo definido que se explorará conforme se desarrolle más teoría. Gracias al formalismo hamiltoniano, al dividir dos variables cruciales en el análisis, el

inflatón ϕ y el momento del inflatón π_ϕ , en componentes de longitudes de onda largas y pequeñas expresadas por el conjunto de ecuaciones [2]:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi_Q \quad (3)$$

$$\pi_\phi = \bar{\pi} + \pi_Q \quad (4)$$

En estas ecuaciones el término con el subíndice Q refleja las longitudes de onda cortas. Con esto y al desarrollar la matemática en el *framework* hamiltoniano, se puede llegar a las ecuaciones de Langevin:

$$\dot{\phi} = \frac{N}{a^3} \pi + \xi_\phi(\tau) \quad (5)$$

$$\dot{\pi} = -Na^3 V_{,\phi}(\bar{\phi}) + \xi_\pi(\tau) \quad (6)$$

En las cuales el último término hace referencia a ruido cuántico, el cual se describe por:

$$\xi_\phi = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \dot{W} \left(\frac{k}{k_\sigma} \right) \left[a_k \phi_k(\tau) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_k^\dagger \phi_k^*(\tau) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right] \quad (7)$$

$$\xi_\pi = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \dot{W} \left(\frac{k}{k_\sigma} \right) \left[a_k \pi_k(\tau) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_k^\dagger \pi_k^*(\tau) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right] \quad (8)$$

Para entender estas integrales de ruido cuántico es de suma importancia entender cada parte que las conforma, es por ello que se parte entendiendo una integral tridimensional sobre la variable k , es que un vector de onda tridimensional debido a que estamos considerando un universo tridimensional (más adelante se discretizará y se abarcará mediante análisis en espacios de Fourier, sin embargo es de suma importancia entender su fundamento teórico y que representa). Una vez entendido como funciona el espacio donde se trabaja el problema se analiza la función ventana W y su derivada \dot{W} las cuales actúan como un filtro para las ondas que pasan a lo largo del radio de Hubble, es importante que en esta ecuación surga la derivada de la función ventana ya que esto determina que la mayoría de ruido esté sucediendo en el momento de transición cuántico-clásico que es pasar por el radio de Hubble debido al pico que poseerá la función en k_σ , el separador. De esta forma se comprende el actuar de los operadores de creación y aniquilación $a_k \wedge a_k^\dagger$ los cuales se encargan de crear y destruir los cuantos (referentes a la teoría cuántica de campos que pasa las fronteras de esta investigación, se utilizará únicamente su comportamiento); de igual manera se considera el campo del inflatón como un campo sin masa de de-Sitter, que expresa mediante teoría cuántica de campos como realmente el vacío se comportan como un conjunto de fluctuaciones cuánticas, para un universo expresado en un tiempo conforme,

el cual es un tiempo que al igual que el espacio conforme es constante con la expansión del universo y no sufre dilataciones temporales, de esta manera se obtienen los modos de Fourier de las perturbaciones del campo ϕ_k y los modos de Fourier del momento conjugado π_k que para que satisfagan la ecuación de Klein-Gordon se obtiene

$$\phi_k = \frac{1}{a\sqrt{2k}} (1 + \frac{i}{k\tau}) e^{ik\tau} \quad \text{siendo } \tau \text{ tiempo conforme} \quad (9)$$

$$\pi_k = \sqrt{\frac{k}{2}} i e^{ik\tau} \quad \text{siendo } \tau \text{ tiempo conforme} \quad (10)$$

Por último se entiende los términos exponenciales restantes como ondas planas que se propagan en dirección al radio de Hubble que son aquellas que se comportan cuántica o clásicamente dependiendo si pasaron el límite propuesto [2, 3].

Por último, se desarrolla la ecuación de Fokker-Planck, la cual será fundamental para la aplicación estadística debido a su alta relación con la PDF que describe el problema. Primero se parte de la linealidad intrínseca del problema, en donde se puede trabajar con notación vectorial de la forma:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \bar{\phi} \\ \pi \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_\phi \\ \xi_\pi \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Con esto se logra escribir la ecuación de Langevin

$$\dot{\Phi} = A(\tau)\Phi + \xi(\tau) \quad \text{con} \quad A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & N/a^3 \\ -m^2 Na^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Con el conjunto de ecuaciones anteriores se puede desarrollar la ecuación de Fokker-Planck, la cual relaciona la PDF con lo anterior visto, de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\Phi, \tau)}{\partial \tau} = & - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial \Phi_i} [A_{ij} \Phi_j P(\Phi, \tau)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 D_{ij}(\tau) \frac{\partial^2 P(\Phi, \tau)}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \end{aligned} \quad (13)$$

La ecuación anterior siendo la piedra angular que define el avance temporal de la PDF en el fenómeno que estamos estudiando. Dicha ecuación se compone del primer término, siendo el de deriva, que se encarga de la parte determinista del fenómeno, y el segundo término, siendo la difusividad, que se encarga del componente estocástico de la evolución, donde D_{ij} es la matriz de difusión que se puede describir en función de la matriz:

$$\Xi(\vec{x}_1, \tau_1; \vec{x}_2, \tau_2) = \begin{pmatrix} \langle 0 | \xi_\phi(\vec{x}_1, \tau_1) \xi_\phi(\vec{x}_2, \tau_2) | 0 \rangle & \langle 0 | \xi_\phi(\vec{x}_1, \tau_1) \xi_\pi(\vec{x}_2, \tau_2) | 0 \rangle \\ \langle 0 | \xi_\pi(\vec{x}_1, \tau_1) \xi_\phi(\vec{x}_2, \tau_2) | 0 \rangle & \langle 0 | \xi_\pi(\vec{x}_1, \tau_1) \xi_\pi(\vec{x}_2, \tau_2) | 0 \rangle \end{pmatrix} \quad (14)$$

Con esto se puede demostrar que $D = \frac{1}{2}(\Xi_{\phi,\phi} + \Xi_{\pi,\pi})I + \frac{1}{2}(\Xi_{\phi,\pi} + \Xi_{\pi,\phi})J_x + \frac{1}{2}(\Xi_{\phi,\phi} - \Xi_{\pi,\pi})J_z$, con J_i siendo las matrices de Pauli. [2]

Es importante denotar que todo el desarrollo de este modelo ha demostrado que las teorías completamente cuánticas y completamente estocásticas coinciden casi en su totalidad; para ver una divergencia se necesitan términos cuárticos, y aún así esta diferencia entre ambos modelos se puede cancelar al elegir un σ específico que se mencionó antes, siendo

$$\sigma \ll \left(\frac{m}{H}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (15)$$

4. Metodología

Con el fin de responder satisfactoriamente a la pregunta que motiva esta investigación, se propuso resolver de manera numérica las ecuaciones de Langevin y la ecuación de Fokker–Planck, haciendo amplio uso de métodos de Monte Carlo.

Inicialmente, se analiza la dinámica del campo inflatón, en la cual, a partir de las ecuaciones 5 y 6, se evidencia una clara dependencia con el ruido cuántico. Este término surge de las integrales mostradas en las ecuaciones 7 y 8, las cuales derivan del comportamiento de los operadores de creación y aniquilación. Dichos operadores se modelan como distribuciones de probabilidad gaussianas complejas, que son muestreadas mediante el método de Monte Carlo.

Para la resolución de las ecuaciones de Langevin, se empleó el método de Euler–Maruyama, una adaptación del método de Euler clásico, especializado para el tratamiento de ecuaciones diferenciales estocásticas. Con este esquema, se obtienen múltiples trayectorias del inflatón, interpretadas como distintos universos posibles. En esta primera parte, se realiza un muestreo que genera diferentes universos a partir de perturbaciones en las condiciones iniciales, también implementadas mediante Monte Carlo. De esta forma, al obtener un conjunto de realizaciones independientes con condiciones iniciales perturbadas, se construye una distribución de probabilidad empírica (PDF), la cual se compara posteriormente con la obtenida al resolver la ecuación de difusión de Fokker–Planck.

Para el desarrollo de la solución mediante la ecuación de difusión, se plantean numéricamente las matrices fundamentales del método, comenzando con la implementación de la matriz Ξ , regida completamente por el ruido cuántico. Esta matriz se modela nuevamente como un proceso aleatorio utilizando muestreo de Monte Carlo, de modo que al promediar sobre las distintas realizaciones

de la simulación se obtienen los valores de expectación correspondientes a cada una de sus entradas.

Posteriormente, se construye la matriz de difusión, elemento esencial para la resolución de la ecuación de Fokker–Planck, la cual incluye tanto un término determinista como otro estocástico. Para resolver numéricamente esta ecuación diferencial y obtener la PDF asociada, se emplea la técnica de diferencias finitas, lo que permite aproximar de manera estable la evolución temporal de la distribución de probabilidad del campo inflatón.

5. Resultados y Análisis

La simulación numérica de la dinámica del campo cuántico inflatón mediante modelado estocástico se divide en tres partes en este trabajo. Comenzamos con la visualización de la dinámica del universo desde la perspectiva del inflatón. Como se puede apreciar en la simulación, en los primeros momentos de la inflación se observa un color más intenso (rojo), lo que indica valores altos del campo ϕ y, por tanto, una fuente significativa de ruido cuántico. Posteriormente, al alcanzar aproximadamente la mitad de la simulación, la tonalidad disminuye, reflejando que los modos de vibración se han ido congelando a medida que superan la longitud de onda de Hubble. Finalmente, en la última etapa, el color se atenúa notablemente, implicando que la mayoría de las ondas han cruzado el horizonte de Hubble. Esta simulación muestra el comportamiento predicho teóricamente: el decaimiento de las fluctuaciones cuánticas, usualmente referido como *congelamiento*, ocurre porque el universo se ha expandido lo suficiente para que las interacciones entre ellas sean despreciables. Esta es una conclusión directa del modelo utilizado, basado en un potencial de *slow-roll*, que explica la aproximación a un estado aparentemente estacionario.

Por otro lado, la segunda parte se enfoca en la resolución de las ecuaciones de Langevin 5 y 6. En la Figura 2 se observa que las distribuciones de ϕ y π son gaussianas. Esto se debe a múltiples factores, comenzando por la naturaleza cuántica del fenómeno. Además, estas gráficas reflejan la independencia de cada fuente de ruido en el espacio, lo que, gracias al teorema del límite central, conduce a una distribución gaussiana. Asimismo, es importante notar que la varianza es un número pequeño, lo cual indica que las fluctuaciones cuánticas no son muy significativas. Esto, al observar el Marco Teórico, se debe a la función ventana y a la configuración de sus parámetros. Al explorar diferentes valores de σ , se podrían estudiar diferentes escenarios de universos donde las fluctuaciones se regulen de manera distinta.

Asimismo, al observar las distribuciones de las Figuras

2a y 2b, se aprecia que la varianza del momento conjugado π es pequeña. Esto indica que el modelo se encuentra en el régimen de *slow-roll*, ya que las tasas de cambio del campo inflatón están concentradas cerca de un valor pequeño. Esta característica implica una difusión lenta del campo, como se observa en la Figura 1.

Por último, se analiza la dinámica obtenida mediante la solución de la ecuación de Fokker-Planck 13. En este caso, se visualiza el diagrama de fase entre el inflatón y su momento conjugado, que representa mapas de densidad de probabilidad (Figura 3). Esta configuración permite observar cómo las condiciones iniciales gaussianas se difunden a lo largo del diagrama de fase conforme avanza el tiempo, implicando directamente la transición de lo cuántico a lo clásico, ya que esta transición ocurre al cruzar el radio de Hubble. Por otro lado, es de alta relevancia observar los patrones de líneas que se forman en la figura, ya que estos cambios de color y patrones diagonales representan en el espacio de fase cómo estas variables no son independientes, reflejando un sistema de ecuaciones acopladas y mostrando su relación directa con el método de Langevin 5 y 6.

Finalmente, es valioso analizar la Figura 4, ya que expone tres regímenes bien definidos a lo largo de la simulación: un régimen temprano dominado por las condiciones iniciales, seguido de una etapa de transición donde las fluctuaciones estocásticas generan correlaciones fuertes y comportamientos no gaussianos, y finalmente un régimen casi estacionario donde los momentos se estabilizan alrededor de cero.

6. Conclusiones y sugerencias

En este trabajo se desarrolló una aproximación numérica a la inflación estocástica mediante la resolución de las ecuaciones de Langevin y de Fokker-Planck, analizando el comportamiento del campo inflatón y su momento conjugado en el universo temprano. Los resultados obtenidos demuestran coherencia entre ambas formulaciones, revelando la tendencia del campo inflatón hacia un régimen de slow-roll y la estabilización progresiva de sus fluctuaciones cuánticas. A partir de las simulaciones realizadas, se identificó un comportamiento gaussiano bien definido en las distribuciones del campo y su momento, acompañado de una evolución hacia un régimen estacionario, en concordancia con las predicciones teóricas. Estos hallazgos refuerzan la validez del tratamiento estocástico para describir las dinámicas inflacionarias en presencia de ruido cuántico, proporcionando una herramienta robusta para modelar la transición desde condiciones iniciales fluctuantes hacia un universo homogenizado.

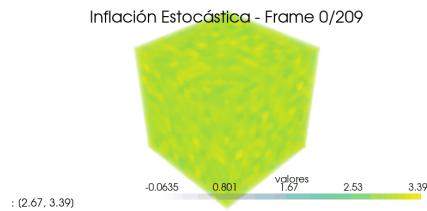
No obstante, las limitaciones computacionales impusieron restricciones significativas al alcance del estudio. Para incrementar la precisión y realismo físico de futuras investigaciones, se requiere la implementación de simulaciones a mayor escala mediante clústeres de cómputo, lo que permitiría considerar universos expandidos y reducir los efectos de borde, mejorando así la estadística de fluctuaciones a gran escala. Asimismo, sería fundamental explorar condiciones de frontera más realistas, no periódicas, y estudiar su impacto en la dinámica de homogenización, particularmente en regiones próximas a los límites del volumen simulado.

Una dirección esencial consiste en extender el análisis hacia predicciones cuantitativas de fenómenos observables, con especial atención a dos aspectos clave: la conexión con el Fondo Cósmico de Microondas (CMB) y la posible formación de agujeros negros primordiales (PBHs). Respecto al CMB, es crucial cuantificar cómo las fluctuaciones residuales del inflatón se traducen en anisotropías de temperatura y polarización, permitiendo comparaciones directas con datos de misiones como Planck y futuros experimentos. En cuanto a los PBHs, se debe investigar si inhomogeneidades significativas durante la inflación estocástica pueden generar sobredensidades críticas que colapsen en agujeros negros primordiales, vinculando así la dinámica del inflatón con posibles firmas observacionales en ondas gravitacionales y fenómenos de microlente.

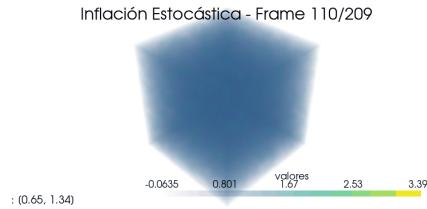
Como perspectivas futuras, se propone profundizar en la comparación cuantitativa entre las soluciones obtenidas por ambos métodos, explorar el impacto de ruidos no-gaussianos y extender el análisis a modelos inflacionarios con potenciales más complejos. Estas mejoras permitirán fortalecer la conexión entre simulaciones numéricas y predicciones observacionales, contribuyendo a una comprensión más completa de la física del universo temprano y sus manifestaciones en la cosmología moderna.

Referencias

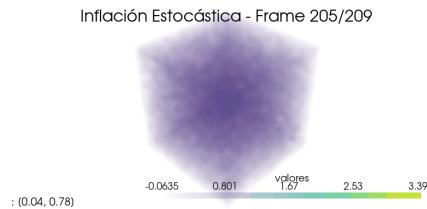
- [1] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, Oxford, 2008).
- [2] V. Vennin, arXiv preprint arXiv:2009.08715 (2020).
- [3] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).



(a) Configuración inicial del campo inflatón ($\tau = 0$). Se observan inhomogeneidades significativas (regiones rojas, correspondientes a valores altos de ϕ), reflejando las condiciones iniciales estocásticas.

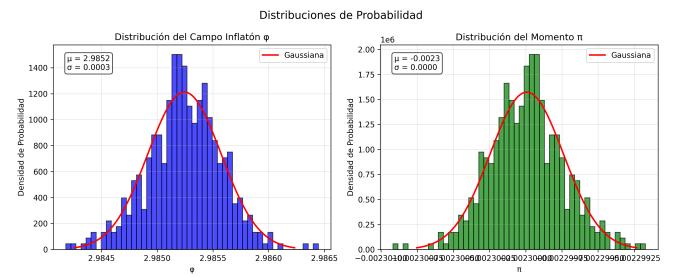


(b) Evolución intermedia ($\tau = \tau_{22}$). Notable reducción en la amplitud y extensión espacial de las fluctuaciones (disminución de tonos rojos), indicando el inicio del proceso de homogenización impulsado por la expansión.

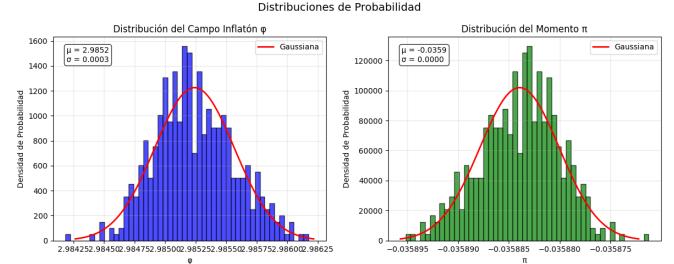


(c) Configuración tardía ($\tau = \tau_{41}$). El campo converge hacia valores homogéneos y bajos (predominio de tonos azules/verdes). Las inhomogeneidades residuales son mínimas, demostrando la eficacia del mecanismo de *slow-roll* estocástico.

Figura 1: Evolución temporal de la configuración espacial del campo inflatón $\phi(\vec{x}, t)$ en una simulación representativa. La escala de color representa la amplitud del campo (rojo: valores altos; azul/verde: valores bajos). La secuencia completa ilustra el proceso de homogenización dinámica a partir de fluctuaciones iniciales.



(a) Realización A. Distribuciones marginales y conjunta del campo inflatón ϕ y su momento conjugado π .



(b) Realización B. Distribución estadística independiente obtenida bajo las mismas condiciones físicas pero con una semilla estocástica diferente.

Figura 2: Distribución de probabilidad para el campo inflatón y su momento conjugado. Ambas realizaciones muestran distribuciones gaussianas para ϕ y π , confirmando la reproducibilidad estadística del proceso estocástico.

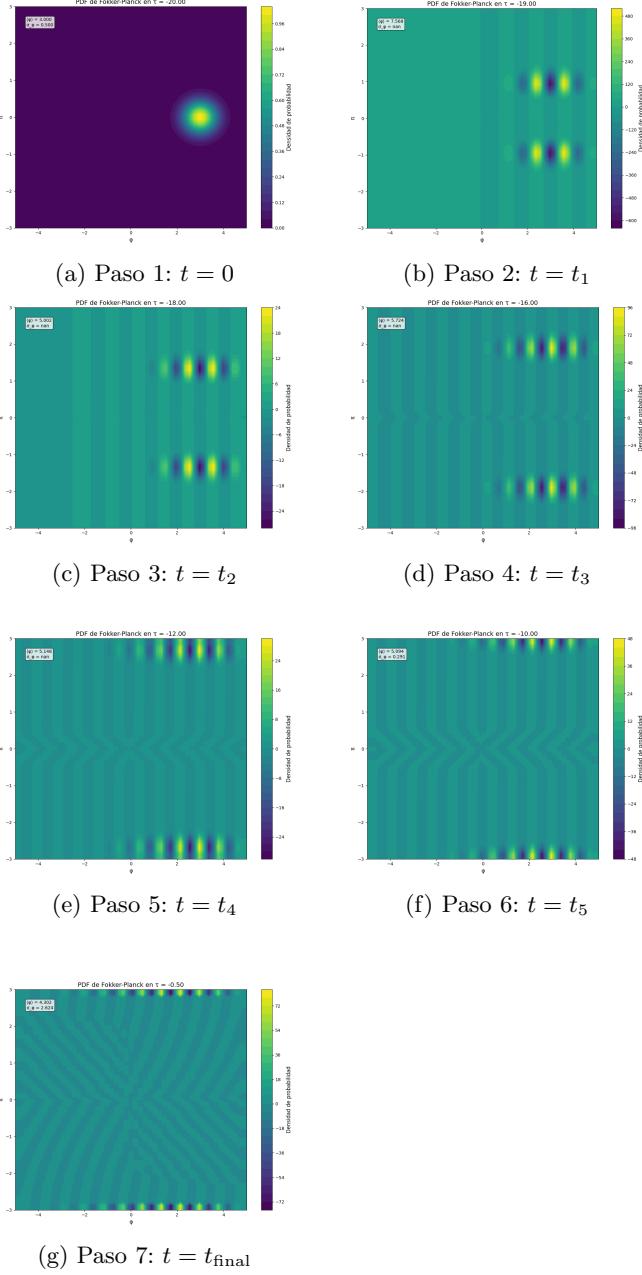


Figura 3: Evolución temporal de la solución de la ecuación de Fokker-Planck para la distribución de probabilidad $P(\phi, t)$. La secuencia muestra el avance desde el estado inicial hasta el estado final estacionario, ilustrando el proceso completo de difusión y deriva que conduce a la homogenización del campo inflatón.

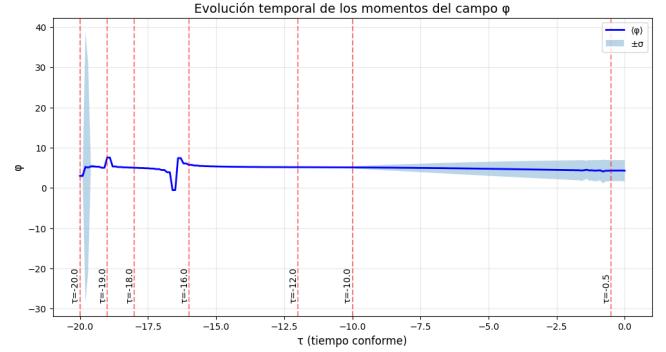


Figura 4: Evolución temporal de los momentos estadísticos de π . Se observan tres regímenes: inicial (dominado por condiciones iniciales), transitorio (con correlaciones fuertes y no-gaussianidad) y estacionario (estabilización alrededor de cero).