16. Relacje równoważności

Trzecim ważnym typem relacji są relacje równoważności, których zadaniem jest utożsamianie obiektów zadanej klasy ze względu na pewne kryterium. Najsilniejszy tego typu związek daje identyczność. Nawiązując do aks. C2 definiujemy relacje równoważności w następujący sposób.

Definicja 16.1. Dla dowolnych $\mathcal{Z}$: $\underline{\mathrm{Univ}}$ i A : $\underline{\mathrm{Class}}$, $\mathcal{Z}$ nazywamy *relacją równoważności w klasie* A :⇔ $\mathcal{Z}$: $\underline{\mathrm{Rel}}$ i zachodzą następujące warunki:

(i) $x\mathcal{Z}x$ dla $x : A$ //zwrotność//;
(ii) $x\mathcal{Z}x \Rightarrow y\mathcal{Z}x$ dla $x, y : A$ //symetria//;
(iii) $x\mathcal{Z}x \wedge y\mathcal{Z}z \Rightarrow x\mathcal{Z}z$ dla $x, y, z : A$ //przechodniość//.

Klasę wszystkich struktur (A, R), gdzie R jest relacją równoważności w klasie A, będziemy oznaczać przez $\underline{\mathrm{EqRel}}$.

Przykład 16.2. Z aks. C2 wynika, że dla każdego $A : \underline{\mathrm{Class}} \setminus \{\varnothing\}$, $R := \{x \mapsto y | x : A \wedge x = y\}$ jest relacją równoważności w klasie A. W szczególności R jest relacją równoważności w klasie $A := \underline{\mathrm{Univ}}$.

Definicja 16.3. Dla dowolnych $\mathcal{Z}$: $\underline{\mathrm{Univ}}$, (A, R) : $\underline{\mathrm{EqRel}}$ i $a : A$, $\mathcal{Z}$ nazywamy *klasą abstrakcji* (alt. *warstwą*) *obiektu* a *względem struktury* (A, R) (alt. *obiektu* a *w klasie* A *względem relacji* R) :⇔ $\mathcal{Z} = [a/(A, R)] := \{x | x : A \wedge xRa\}$.

Definicja 16.4. Dla dowolnych $\mathcal{Z}$: $\underline{\mathrm{Univ}}$, (A, R) : $\underline{\mathrm{EqRel}}$ i K : $\underline{\mathrm{Class}}$, $\mathcal{Z}$ nazywamy *klasą ilorazową klasy* K *przez strukturę* (A, R) :⇔

$$\mathcal{Z} = K/(A, R) := \Big\{L \Big| \bigvee_{x : A \cap K} L = [x/(A, R)] \cap K\Big\}.$$

Ćwiczenie 16.5. Wykazać, że dla dowolnych (A, R) : $\underline{\mathrm{EqRel}}$, jeśli $\varnothing \neq B \subset A$ to (B, R) : $\underline{\mathrm{EqRel}}$.

Ćwiczenie 16.6. Wykazać, że dla dowolnych $(A, P), (A, R)$: $\underline{\mathrm{EqRel}}$ zachodzą własności:

(i) $(A, P \circ R)$: $\underline{\mathrm{EqRel}}$;
(ii) $(A, P \cup R)$: $\underline{\mathrm{EqRel}}$;
(iii) $(A, P \cap R)$: $\underline{\mathrm{EqRel}}$;
(iv) (A, R^{-1}) : $\underline{\mathrm{EqRel}}$;
(v) $[x/(A, R)] = R(\{x\}) \cap A = R^{-1}(\{x\}) \cap A$ dla $x : A$.

Następujące twierdzenie opisuje fundamentalne własności klas abstrakcji.

Twierdzenie 16.7. *Dla każdego* $S := (A, R)$: $\underline{\mathrm{EqRel}}$ *zachodzą następujące własności:*

(i) $[x/S] \cap [y/S] \neq \varnothing \Rightarrow xRy$ *dla* $x, y : A$;
(ii) $\sim xRy \Rightarrow [x/S] \cap [y/s] = \varnothing$ $x, y : A$;
(iii) $xRy \Rightarrow [x/S] = [y/S]$ *dla* $x, y : A$;
(iv) $A = \bigcup (A/S)$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $S := (A, R)$: $\underline{\mathrm{EqRel}}$.
Ad (i). Dla dowolnych $x, y : A$ mamy:

> $[x/S] \cap [y/s] \neq \varnothing$ —//Def. 12.1 (ii), Rem 12.12//→ $z : [x/S]$ and $z : [y/S]$ for a certain z : $\underline{\mathrm{Univ}}$ —//Def. 16.3//→ $z : A$, zRx and zRy —//Def. 16.1 (ii), (iii)//→ xRy,

co dowodzi własności (i).
Ad (ii) Własność (ii) wynika z własności (i) przez zastosowanie tautologii $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\sim \beta \Rightarrow \sim \alpha)$ //prawo kontrapozycji// oraz $\sim\sim \alpha \Leftrightarrow \alpha$ //prawo podwójnego przeczenia//.
Ad (iii). Dla dowolnych $x, y : A$ i z : $\underline{\mathrm{Univ}}$ mamy:

xRy i $z : [x/S]$ —//def. 16.3//→ xRy, $z : A$ i zRx —//Def. 16.1(iii)//→ $z : A$ i zRy —//Def. 16.3//→ $z : [y/S]$.

Stąd wobec dowolności wyboru $x, y : A$ i $z : \underline{\text{Univ}}$ stwierdzamy, że

$$xRy \Rightarrow [x/S] \subset [y/S] \quad \text{dla } x, y : A. \tag{16.8}$$

Zamieniając miejscami x z y dostajemy w (16.8) dostajemy

$$yRx \Rightarrow [y/S] \subset [x/S] \quad \text{dla } x, y : A. \tag{16.9}$$

Korzystając z własności symetrii relacji R //def. 16.1 (ii)// wnioskujemy z (16.8) i (16.9), że

$$xRy \Rightarrow [x/S] \subset [y/S] \wedge [y/S] \subset [x/S] \quad \text{dla } x, y : A.$$

Stąd na mocy ćw. 11.8 otrzymujemy własność (iii).

Ad (iv). Z def. 16.1(i) i def. 16.3 wynika, że $x : [x/S]$ dla $x : A$. Z def. 16.4 wynika zaś, że $[x/S] : A/S$ dla $x : A$. Stąd na mocy def. 12.7, $x : \bigcup(A/S)$ dla $x : A$, co daje inkluzję $A \subset \bigcup(A/S)$. Z drugiej strony na mocy def. 16.4 i def. 16.3 stwierdzamy, że $L \subset A$ dla $L : A/S$. Stąd $\bigcup(A/S) \subset A$, co łącznie z inkluzją przeciwną daje równość (iv) //ćw. 11.8//, c.n.d. □

Uwaga 16.10. Z tw. 16.7 wynika, że relacja równoważności R w klasie $A \neq \varnothing$ rozkłada klasę A na sumę parami rozłącznych warstw. Z własności (ii) i (iii) tw. 16.7 wynika bowiem, że $K \cap L = \varnothing$ albo $K = L$ dla $K, L : A/S$, zaś własność (iv) tw. 16.7 oznacza równość $A = \bigcup(A/S)$. Ponadto z ćw. 14.15 wynika istnienie dokładnie jednego qmap : $\underline{\text{Map}}$ o tej własności, że $\underline{\text{D}}(\text{qmap}) = \underline{\text{EqRel}}$ i dla każdego $(A, R) : \underline{\text{EqRel}}$ zachodzi równość

$$(A, R)\_\text{qmap} = \{x \mapsto [x/(A, R)] | x : A\}. \tag{16.11}$$

Z uwagi 14.21 wnioskujemy, że $(A, R)\_\text{qmap} : A \to A/(A, R)$ dla $(A, R) : \underline{\text{EqRel}}$ oraz $(A, R)\_\text{qmap}(x) = [x/(A, R)]$ dla $x : A$.

Definicja 16.12. Dla dowolnych $Z : \underline{\text{Univ}}$ i $S : \underline{\text{EqRel}}$, Z nazywamy *odwzorowaniem ilorazowym struktury* S :⇔ $Z = S\_\text{qmap}$.

Ćwiczenie 16.13. Wykazać, że dla każdego $f : \underline{\text{Map}}$, jeśli $\underline{\text{D}}(f) \neq \varnothing$ to obiekt

$$f\_\text{rel} := \{x \mapsto y | x, y : \underline{\text{D}}(f) \wedge f(x) = f(y)\} \tag{16.14}$$

jest relacją równoważności w klasie $\underline{\text{D}}(f)$, a zatem $(\underline{\text{D}}(f), f\_\text{rel}) : \underline{\text{EqRel}}$, o ile $\underline{\text{D}}(f) \cap \{\underline{\text{null}}\} = \varnothing$. Wykazać ponadto, że dla każdego $A : \underline{\text{Class}}$, jeśli $A \cap \{\underline{\text{null}}\} = \varnothing \neq A \subset \underline{\text{D}}(f)$ to $(A, f\_\text{rel}) : \underline{\text{EqRel}}$.