9. Prawa rachunku kwantyfikatorów.

Podobnie jak w przypadku formuł log. możemy rozważać formuły kwantyfikatorowe, których wartość log. nie zależy od wartościowania log. predykatów, użytych do utworzenia tych formuł kwantyfik. Takie formuły nazywamy prawami rachunku kwantyfikatorowego. Klasę wszystkich praw rachunku kwantyfik. oznaczamy przez QTaut

Do podst. praw rachunku kwantyfikatorowego należą:

1.1) Prawo dictum de omni

$$\bigwedge_x P(x) \Rightarrow P(x)$$ // uogólnienie prawa $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$

2) Prawo generalizacji egzystencjalnej

$$P(x) \Rightarrow \bigvee_x P(x)$$ // uogólnienie prawa $\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$

3) Prawo subalternacji

$$\bigwedge_x P(x) \Rightarrow \bigvee_x P(x)$$ // uogólnienie prawa $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \vee \beta$

4) Prawa zamiany zmiennych indywidualnych

$$\bigwedge_x P(x) \Leftrightarrow \bigwedge_y P(y)$$

$$\bigvee_x P(x) \Leftrightarrow \bigvee_y P(y)$$

(9.5) Prawo nakładania kwantyfikatorów

$$\bigwedge_x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\bigwedge_x P(x) \Rightarrow \bigwedge_x Q(x));$$

$$\cancel{\bigvee}\bigwedge_x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\bigvee_x P(x) \Rightarrow \bigvee_x Q(x));$$

$$\bigwedge_x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\bigwedge_x P(x) \wedge \bigwedge_x Q(x));$$

$$\bigvee_x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\bigvee_x P(x) \wedge \bigvee_x Q(x));$$

$$\bigwedge_x (P(x) \vee \bigwedge_x Q(x)) \Rightarrow \bigwedge_x (P(x) \vee Q(x));$$

$$\bigvee_x (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\bigvee_x P(x) \vee \bigvee_x Q(x))$$

(9.6) Prawo de'Morgana dla kw

$\sim \bigwedge_x P(x) \Leftrightarrow \bigvee_x \sim P(x)$ // uogólnienie prawa $\sim(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \sim\alpha \vee$

$\sim \bigvee_x P(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim P(x)$ // uogól. prawa $\sim(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \sim\alpha \wedge \sim\beta$

(9.7) Prawa przestawiania kw

$\bigwedge_x \bigwedge_y P(x,y) \Leftrightarrow \bigwedge_y \bigwedge_x P(x,y)$ // uogól. prawa $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$

$\bigvee_x \bigvee_y P(x,y) \Leftrightarrow \bigvee_y \bigvee_x P(x,y)$ // uogól. pr. $\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \beta \vee \alpha$

$\bigvee_x \bigwedge_y P(x,y) \Rightarrow \bigwedge_y \bigvee_x P(x,y)$

W celu uzasadnienia praw rachunku kwantyfikatorów możemy stosować reguły wartościowania log. kwantyfikatorów oraz reguły wartościowania log. negacji i spójników log.

Dla przykładu rozważmy pierwsze z praw (9.5)

$$\bigwedge_x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\bigwedge_x P(x) \Rightarrow \bigwedge_x Q(x))$$

0 1 *

1 1 $\bar{x}$, 1 1 $\bar{x}$ 1 1 1 $\bar{x}$ 1 1 1 $\bar{x}$

1 0 x 1 0 0 x 1 *

Inną metodą weryfikacji praw rachunku kwantyfikatorowego jest stosowanie reguł, które zastosowan do praw rachunku kwantyfi[katorów] zwracają w wyniku prawo kwantyfikatorowe.

Rozwinięciem tej idei jest – podobnie jak w przypadku rachunku zdań – opisanie systemów aksjomatycznych rachunku kwantyfikatorowego. Jednym z takich systemów jest system aksjomatyczny Q_1 określony następująco:

I. Terminy pierwotne: Char, ~, ∧, ∨, =>, <=>, ⋀, ⋁, (,).

II. Aksjomaty: wszystkie prawa klasycznego rachunku zdań, czyli Taut ⊂ Con(Q_1)

III. Reguły wnioskowania

Q_1/R_1 := {F, x, y, ..., F_x, F_y, ...: Var | x, y, ...: Char, F(x, y, ...): Taut, F_x, F_y, ...: QForm ↦ F(F_x, F_y, ...): Con(Q_1)}: Rul(Q_1);
// reguła podstawiania

Q_1/R_2 := {F, x, y: Var | x, y: Char, F(x): Con(Q_1) ↦ F(y): Con(Q_1)}, gdzie zmienną indyw. x zastępujemy przez zm. ind. y we wszystkich lokalizacjach niezwiązanych zm. x w F i po zastąpieniu zm. y, żadna nie będzie w tych lokalizacjach związana }: Rul(Q_1) // reguła zamiany zm. ind.;

Q_1/R_3 := {F, G: Var | F=>G, F: Con(Q_1) ↦ G: Con(Q_1)}: Rul(Q_1) // reguła odrywania dla form. zdań

/R_4 := {F, G: Var | F => ⋀G: Con(Q_1) ↦ F=>G: Con(Q_1)}: Rul(Q_1) // reguła opuszczania kwantyfikatora ogólnego w następniku implikacji

/R_5 := {F, G, x: Var | $\bigvee_x$ F=>G: Con(Q_1) ↦ F=>G: Con(Q_1)}: Rul(Q_1) // reguła opuszczania kwantyf. szczegółowego w poprzedniku.

/R_6 := {F, G, x: Var | F=>G: Con(Q_1), x jest zm. ind. która nie występuje w F bądź wszystkie lokalizacje zm. x są związane ~~...~~ w F ↦ F=>$\bigwedge_x$G: Con(Q_1)}: Rul(Q_1) // reguła dołączania kw. ogólnego w następniku implikacji.

/R_7 := {F, G, x: Var | F=>G: Con(Q_1), x jest zm. ind. która nie występuje w G bądź wszystkie lokalizacje zm. x są związane w G ↦ $\bigvee_x$ F=>G: Con(Q_1)}: Rul(Q_1) //

/R_8 := {F, x: Var | F: Con(Q_1), x: Char ↦ $\bigwedge_x$ F: Con(Q_1)}: Rul(Q_1)

IV. Reguły def.: reguły definiujące spójniki V, /, ↓ - analogicznie do tych w systemach aksj. rachunku zdań.

Uwaga 9.8.

Na podst. reguł systemu Q_1 stwierdzamy, że klasa konsekwencji $Cn(Q_1) \subseteq$ QTaut, czyli każdy wniosek systemu ~~Na podst.~~ Q_1, jest prawem rachunku kwantyfikatorów.

Ćw. 9.9.

Podać przykłady świadczące o tym, że ograniczenia co do zakresu zm. ind. w regułach Q_1/R_2, Q_1/R_6 i Q_1/R_7 są konieczne. W przeciwnym wypadku nasze reguły także nie musiałyby wyrażać ~~w systemie~~ prawa rachunku kwantyf.

Przykład 9.10.

Wykażemy, ~~dla~~ przykłady, że

(9.10a) $:= \bigwedge_x P(x) \Rightarrow P(x) : Cn(Q_1)$;

(9.10b) $:= P(x) \Rightarrow \bigvee_x P(x) : Cn(Q_1)$

Dowód[9.10a]:=(K1:= $\bigwedge_x P(x) \Rightarrow \bigwedge_x P(x) : Cn(Q_1) \Leftarrow Q_1/R_1, \alpha := \bigwedge_x P(x) \vdash \alpha \Rightarrow \alpha : Taut$

K2 := $\bigwedge_x P(x) \Rightarrow P(x) : Cn(Q_1) \Leftarrow Q_1/R_4, F := \bigwedge_x P(x), G := P(x) \Vdash K1$)

Dowód[9.10b]:=(K1:= $\bigvee_x P(x) \Rightarrow \bigvee_x P(x) : Cn(Q_1) \Leftarrow Q_1/R_1, \alpha := \bigvee_y P(y) \vdash \alpha \Rightarrow \alpha : Taut$

K2:= $P(x) \Rightarrow \bigvee_x P(x) : Cn(Q_1) \Leftarrow Q_1/R_5, F := P(x), G := \bigvee_x P(x) \Vdash K1$);

Ćw. 9.11.

Wykazać, że:

(9.11a):= $\bigwedge_x P(x) \Rightarrow \bigvee_x P(x) : Cn(Q_1)$;

(9.11b):= $\sim \bigwedge_x P(x) \Rightarrow \bigvee_x \sim P(x) : Cn(Q_1)$;

(9.11c):= $\sim \bigvee_x P(x) \Rightarrow \bigwedge_x \sim P(x) : Cn(Q_1)$;

Poza systemem Q_1 można rozważać inne systemy aksjomatyczne rachunku kwantyf., które są mu równoważne, czyli dają tą samą klasę konsekwencji. Przykładem takim jest system Q_2 opisany następująco

I. Terminy pierwotne: Char, ~, $\wedge$, $\bigwedge$,), =>.

II. Aksjomaty. Niech K oznacza klasę wszystkich formuł kwantyf. zbudowanych wyłącznie przy użyciu terminów pierwotnych systemu Q_2

Q_2/A_1 := [F,G: Var: F,G: K ↦ F => (G => F) : Con(Q_2)] : Rul(Q_2);

Q_2/A_2 := [F,G,H: Var: F,G,H: K ↦ (F => (G => H)) => ((F => G) => (F => H)) : Con(Q_2)] : Rul(Q_2);

Q_2/A_3 := [F,G: Var: F,G: K ↦ (~F => ~G) => (G => F) : Con(Q_2)] : Rul(Q_2)

Q_2/A_4 := [F,x,y: Var: x,y: Char, F: K ↦ $\bigwedge_x$ F => F_y : Con(Q_2), gdzie F_y powstaje przez zastąpienie zm. ind. x zmienną y w F we wszystkich lokalizacjach zm. x, które nie są związane w F i po zastąpieniu nie będą wówczas lokalizacje związane zm. y w F_y] : Rul(Q_2);

Q_2/A_5 := [F,x: Var: x: Char, F: K ↦ F => $\bigwedge_x$ F : Con(Q_2), gdzie zm. ind. x nie występuje w F bądź każda lokalizacja zm. ind. x jest związana w F] : Rul(Q_2);

Q_2/A_6 := [F,x,G: Var: x: Char; F,G: K ↦ $\bigwedge_x$ (F => G) => ($\bigwedge_x$ F => $\bigwedge_x$ G) : Con(Q_2)] : Rul(Q_2)

III. Reguły wnioskowania:

Q_2/R_1 := [F,G: Var: F, F => G : Con(Q_2) ↦ G : Con(Q_2)] : Rul(Q_2); // reguła odrywania

Q_2/R_2 := [F,x: Var: x: Char, F: Con(Q_2) ↦ $\bigwedge_x$ F : Con(Q_2)] : Rul(Q_2) // reguła uogólniania

IV. Reguły definicyjne: reguły definiujące spójniki $\wedge$, $\vee$, <=>, $\vee$, $\wedge$, $\vee$ oraz reguła określająca kwantyfikator szczegółowy za pomocą prawa de Morgana

<--|-->

Q_2/D_6 [F,x: Var: x: Char ↦ ($\bigvee_x$ F : Con(Q_2)) => ~$\bigwedge_x$ ~F : Con(Q_2)] : Rul(Q_2);