4. Systemy pozycyjne kodowania liczb

Podstawy teoretyczne pozycyjnego kodowania liczb daje następujące twierdzenie z arytmetyki liczb naturalnych.

Twierdzenie 4.1 (o rozwinięciu liczby naturalnej przy zadanej podstawie).

Dla dowolnych liczb naturalnych a i $p \geq 2$ istnieje dokładnie jedna liczba naturalna n i dokładnie jeden ciąg liczb całkowitych a_k, k=0,1,...,n-1, spełniający następujące dwie własności:

(4.2) $0 \leq a_k \leq p-1, \ \ k = 0,1,\ldots,n-1,$ i $a_{n-1} \neq 0$,

(4.3) $a = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k$.

Z twierdzenia tego wynika, że dowolnej liczbie naturalnej można przyporządkować skończony ciąg liczb całkowitych a_k z przedziału <0;p-1>, k=0,1,...,n-1. Każdemu takiemu ciągowi można z kolei przyporządkować skończony ciąg znaków przez zastąpienie każdego wyrazu a_k znakiem $f(a_k)$ gdzie f jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem zbioru {0,1,2,...,p-1} na pewien p-elementowy zbiór znaków c_0,c_1,...,c_{p-1}, zwanych dalej cyframi.

Zatem liczby naturalne można reprezentować poprzez skończone ciągi cyfr. Ta obserwacja prowadzi w naturalny sposób, po dokonaniu pewnych uogólnień, do następujących konstrukcji.

Ustalmy dowolnie liczbę naturalną $p \geq 2$ i rozważmy *p*-elementowy zbiór znaków *C*, dwuelementowy zbiór znaków *Z* oraz zbiór *R* złożony z jednego znaku. Zakładamy, że zbiory te są parami rozłączne. Niech *RP[C,Z,R]* oznacza zbiór wszystkich skończonych łańcuchów znaków *X* spełniających jeden z czterech warunków:

(4.4) $X = "c_{n-1}...c_1c_0"$ dla pewnego $n \in N$

i pewnych $c_k \in C$, $k = 0,1,...,n-1$;

(4.5) $X = "zc_{n-1}c_{n-2}...c_1c_0"$ dla pewnego $n \in N$

i pewnych $c_k \in C$, $k = 0,1,...,n-1$ oraz $z \in Z$;

(4.6) $X = "c_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0rc_{-1}c_{-2}\ldots c_{-m}$ dla pewnych *n*, $m \in N$ i pewnych $c_k \in C$,

k= -*m*, -*m*+1, ..., *n*-1, oraz $r \in R$;

(4.7) $X = "zc_{n-1}c_{n-2}\ldots c_1c_0rc_{-1}c_{-2}\ldots c_{-m}$ dla pewnych *n*, $m \in N$ i pewnych $c_k \in C$,

k= -*m*, -*m*+1 ,..., *n*-1, oraz $z \in Z$ i $r \in R$.

Zauważmy, że $C \subset RP[C,Z,R]$.

Definicja 4.8. Funkcję L nazywamy funkcja kodującą dla zbioru $RP[C,Z,R]$ jeśli odwzorowuje ona zbiór $RP[C,Z,R]$ w zbiór liczb rzeczywistych i spełnia następujące trzy warunki:

1) L odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie zbiór C na zbiór $\{0,1,2,3...,p\text{-}1\}$ kolejnych liczb całkowitych od 0 do p-1.
2) L odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie zbiór Z na zbiór $\{1,\text{-}1\}$.
3) Dla dowolnego $x \in RP[C,Z,R]$ ma miejsce jedna z czterech równości:

(4.4a) $L(x) = \sum_{k=0}^{n-1} L(c_k) \cdot p^k$ gdy x spełnia warunek (4.4);

(4.5a) $L(x) = L(z) \sum_{k=0}^{n-1} L(c_k) \cdot p^k$ gdy x spełnia warunek (4.5);

(4.6a) $L(x) = \sum_{k=-m}^{n-1} L(c_k) \cdot p^k$ gdy x spełnia warunek (4.6);

(4.7a) $L(x) = L(z) \sum_{k=-m}^{n-1} L(c_k) \cdot p^k$ gdy x spełnia warunek (4.7).

Z definicji 4.8 i twierdzenia 4.1 można wywnioskować następujące twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności funkcji kodującej.

Twierdzenie 4.9. Dla dowolnej funkcji f odwzorowującej wzajemnie jednoznacznie zbiór liczb $\{0,1,2..., p\text{-}1\}$ na zbiór C oraz dowolnej funkcji g odwzorowującej wzajemnie jednoznacznie zbiór Z na zbiór $\{-1,1\}$ istnieje dokładnie jedna funkcja kodująca L dla zbioru $RP[C,Z,R]$ spełniająca równości $L(f(x))=x$ dla $x=0,1,...,p\text{-}1$, oraz $L(z)=g(z)$ dla $z\in Z$.

Definicja 4.10. Parę $(RP[C,Z,R], L)$ nazywamy systemem pozycyjnym kodowania liczb (systemem pozycyjnym liczenia) przy podstawie p i funkcji kodującej L. Elementy zbiorów C, Z i R nazywamy odpowiednio cyframi, znakami liczb i znakiem rozdzielającym część całkowitą od części ułamkowej systemu $(RP[C,Z,R], L)$. Zbiór $RP[C,Z,R]$ nazywamy zbiorem reprezentacji pozycyjnych liczb rzeczywistych przy podstawie p. Reprezentację $x\in RP[C,Z,R]$ nazywamy reprezentacją pozycyjną liczby $L(x)$ przy podstawie p.

Nawiązując do równości (4.4a) – (4.7a) widzimy że dla dowolnego $x \in RP[C,Z,R]$,

(4.11) $$|L(x)| = \sum_{k=0}^{n-1} L(c_k) \cdot p^k ,$$

gdy x spełnia warunek (4.4) lub (4.5) oraz

(4.12) $$|L(x)| = \sum_{k=-m}^{n-1} L(c_k) \cdot p^k ,$$

gdy x spełnia warunek (4.6) lub (4.7).

Z równości (4.11), (4.12), (4.5a) lub (4.5b) wynika, że $L(x)=L(z)\ |L(x)|$, a zatem znak $z \in Z$ reprezentuje znak liczby $L(x)$. To uzasadnia nazwanie elementów zbioru Z znakami liczb. Z równości (4.12) wynika ,że

$$|L(x)| = \sum_{k=0}^{n-1} L(c_k) \cdot p^k + \sum_{k=-m}^{-1} L(c_k) p^k = \sum_{k=0}^{n-1} L(c_k) p^k + \sum_{k=1}^{m} L(c_{-k}) p^{-k}$$

Ponieważ $\sum_{k=0}^{n-1} L(c_k) \cdot p^k$ jest liczbą całkowitą nieujemną, zaś

$$0 \le \sum_{k=1}^{m} L(c_{-k}) p^{-k} \le \sum_{k=1}^{m} (p-1) p^{-k} = \frac{p-1}{p} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (\frac{1}{p})^k$$

$$= \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1-(\frac{1}{p})^m}{1-\frac{1}{p}} = 1-(\frac{1}{p})^m < 1 \qquad ,$$

więc znak r rozdziela reprezentację x liczby $L(x)$ na lewą część od znaku, reprezentującą część całkowitą liczby $L(x)$

oraz na prawą część od znaku r reprezentującą część ułamkową liczby $|L(x)|$. To uzasadnia nazwanie znaku r znakiem rozdzielającym część całkowitą od części ułamkowej liczby.

Najprostszym systemem pozycyjnym jest system pozycyjny przy podstawie $p = 2$ zwany systemem dwójkowym lub też systemem binarnym, gdyż wymaga najmniejszej liczby cyfr do kodowania liczb, czyli tylko dwóch.

Def. 4.13
Systemem pozycyjnym dwójkowym nazywamy system pozycyjny $(RP[C,Z,R], L)$, gdzie C:= {”0”,”1”},
Z: = {”+”,”–”}, R: = {”,”}, zaś funkcja kodująca L jest jednoznacznie określona na podstawie twierdzenia 4.9 poprzez równości L(”0”):=0 i L(”1”):=1 oraz L(”+”):=1 i L(”–”):= –1.

Najpowszechniej używanym systemem pozycyjnym jest system pozycyjny dziesiętny.

Def. 4.14

Systemem pozycyjnym dziesiętnym nazywamy system pozycyjny *(RP[C,Z,R], L)*, gdzie zbiór *RP[C,Z,R]* składa się z reprezentacji określonych warunkami (4.4)-(4.7) na podstawie zbiorów znaków *C*:={ ”0”, ”1”, ”2”, ”3”, ”4”, ”5”, ”6”, ”7”, ”8”, ”9”}, *Z*: = {”+”,”-”} i *R*: = {”,”},

zaś funkcja kodująca *L* jest jednoznacznie określona na podstawie twierdzenia 4.9 poprzez

równości *L*(”+”):=1 i *L*(”–”):= –1 oraz zadanie jej wartości na zbiorze *C*:

L(”0”):=0, *L*(”1”):=1+*L*(”0”), *L*(”2”):=1+*L*(”1”), *L*(”3”):=1+*L*(”2”), *L*(”4”):=1+*L*(”3”), *L*(”5”):=1+*L*(”4”), *L*(”6”):=1+*L*(”5”), L(”7”):=1+*L*(”6”), *L*(”8”):=1+*L*(”7”), *L*(”9”):=1+*L*(”8”).

Elementy zbioru *C* nazywamy cyframi arabskimi, zaś podstawa systemu *p* = *L*(”10”) jest równa ilości cyfr arabskich. W dalszym ciągu system dziesiętny będzie traktowany jako domyślny i dla uproszczenia oznaczeń reprezentacja *x* będzie utożsamiana z wartością liczbową *L*(*x*).

Def. 4.15

Systemem pozycyjnym szesnastkowym nazywamy system pozycyjny *(RP[C,Z,R], L)*, gdzie zbiór *RP[C,Z,R]* składa się z reprezentacji określonych warunkami (4.4)-(4.7) na podstawie zbiorów znaków *C*:={ ”0”, ”1”, ”2”, ”3”, ”4”, ”5”, ”6”, ”7”, ”8”, ”9”, ”A” , ”B” , ”C” , ”D” , ”E” , ”F”}, *Z*: = {”+”,”-”} i *R*: = {”,”}, zaś funkcja kodująca *L* jest jednoznacznie określona na podstawie twierdzenia 4.9 poprzez równości *L*(”+”):=1 i *L*(”–”):=–1 oraz zadanie jej wartości na zbiorze *C*: *L*(”x”):=x, x=0,1,2,...,9,

L(”A”):=10, *L*(”B”):=11, *L*(”C”):=12,

L(”D”):=13, *L*(”E”):=14, *L*(”F”):=15,

Podstawa systemu p = *L*(”10”) jest równa 16.

System pozycyjny szesnastkowy zwany jest często systemem heksagonalnym. Jest on zgodny z systemem binarnym, gdyż $16=2^4$. Dzięki temu łatwo można zamienić reprezentację binarną na heksagonalną i na odwrót korzystając z tego, że każdej 4-pozycyjnej reprezentacji binarnej liczby x odpowiada dokładnie jedna 1-pozycyjna reprezentacja heksagonalna liczby x, gdzie x jest dowolną spośród liczb całkowitych od 0 do 15.