13. Relacje

Podstawowym dla matematyki pojęciem teorio-mnogościowym jest pojęcie pary uporządkowanej.

Definicja 13.1. //K. Kuratowski// Dla dowolnych Z, x, y : Univ, Z nazywamy *parą uporządkowaną obiektów x i y* //w tejże kolejności, czyli wyróżnionym obiektem x jako pierwszym// :⇔ $Z = (x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Klasę wszystkich par uporządkowanych będziemy oznaczać przez OPair, czyli OPair := $\left\{ z \,\middle|\, \bigvee_{x,y} z = (x, y) \right\}$.

Ćwiczenie 13.2. Wykazać, że dla dowolnych x, y, x', y' : Univ mają miejsce następujące własności:

(i) (x, y) : FClass;
(ii) $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$;
(iii) $(x, y) = (y, x) \Leftrightarrow x = y$.

//Wykażemy własność (ii). Dla dowolnych x, y, x', y' : Univ mamy:

$(x, y) = (x', y')$ —//def. 13.1//→ $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ —//aks. C3//→
$(\{x\} = \{x'\} \vee \{x\} = \{x', y'\}) \wedge (\{x, y\} = \{x'\} \vee \{x, y\} = \{x', y'\})$
$\wedge (\{x'\} = \{x\} \vee \{x'\} = \{x, y\}) \wedge (\{x', y'\} = \{x\} \vee \{x', y'\} = \{x, y\})$.
$(\{x\} = \{x'\} \vee \{x\} = \{x', y'\})$ —//aks. C3//→ $x = x' \vee (x' = x \wedge y' = x)$
—//aks. C2//→ $x = x'$.
$x = x'$ and $(\{x, y\} = \{x'\} \vee \{x, y\} = \{x', y'\}) \wedge (\{x', y'\} = \{x\} \vee \{x', y'\} = \{x, y\})$
—//aks. C3 and aks. C2//→ $x = x' \wedge y = y'$.

Własność (iii) jest bezpośrednią konsekwencją własności (ii).//

Definicja 13.3. Dla dowolnych Z : Univ i A, B : Class, Z nazywamy *iloczynem* (alt. produktem) kartezjańskim klas A i B //w tejże kolejności// :⇔ $Z = A \times B := \left\{ t \,\middle|\, \bigvee_{x:A} \bigvee_{y:B} t = (x, y) \right\}$.

Ćwiczenie 13.4. Wykazać, że dla dowolnych A, B, A', B' : Class zachodzą własności:

(i) $A \times B = A' \times B' \Leftrightarrow A = A' \wedge B = B'$;
(ii) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$.

Ćwiczenie 13.5. Wykazać, że dla dowolnych A, B, C : Class,

$$A \times (B * C) = (A \times B) * (A \times C) \quad \text{i} \quad (B * C) \times A = (B \times A) * (C \times A),$$

gdzie $*$ oznacza dowolnie wybraną operację spośród operacji $\cup, \cap, \setminus, \div$.

//Na przykład dla dowolnie zadanych x, y : Univ dostajemy:

$(x, y) : A \times (B \cup C)$ ←//def. 13.3//→ $x : A \wedge y : B \cup C$ ←//def. 12.1 (i)//→
$x : A \wedge (y : B \vee y : C)$ ←//$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$: Taut//→
$(x : A \wedge y : B) \vee (x : A \wedge y : C)$ ←//def. 13.3//→ $(x, y) : A \times B \vee (x, y) : A \times C$
←//def. 12.1 (i)//→ $(x, y) : (A \times B) \cup (A \times C)$.

Dlatego $(x, y) : A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x, y) : (A \times B) \cup (A \times C)$ dla x, y : Univ, skąd na mocy aks. C3 widzimy, że $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.//

Definicja 13.6. Dla dowolnego Z : Univ, Z nazywamy *relacją* :⇔ Z : Class i $Z \subset$ OPair //Z : PClass(OPair)//.

Klasę wszystkich relacji będziemy oznaczać przez Rel, czyli Rel := $\{R | R$: Class $\wedge R \subset$ OPair$\}$ //= PClass(OPair)//.

Definicja 13.7. Dla dowolnych $\text{Ƶ} : \underline{\mathrm{Univ}}$ i $R : \underline{\mathrm{Rel}}$, Ƶ nazywamy:

(i) *dziedziną relacji* $R :\Leftrightarrow \text{Ƶ} = \underline{\mathrm{D}}(R) := \left\{x \,\middle|\, \bigvee_{y} (x,y) : R\right\}$;

(ii) *przeciwdziedziną relacji* $R :\Leftrightarrow \text{Ƶ} = \underline{\text{ᗡ}}(R) := \left\{y \,\middle|\, \bigvee_{x} (x,y) : R\right\}$.

Definicja 13.8. Dla dowolnych $\text{Ƶ} : \underline{\mathrm{Univ}}$, $R : \underline{\mathrm{Rel}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, Ƶ nazywamy:

(i) *obrazem klasy A przez relację* $R :\Leftrightarrow R(A) := \left\{y \,\middle|\, \bigvee_{x:A} (x,y) : R\right\}$;

(ii) *przeciwobrazem klasy A przez relację* $R :\Leftrightarrow R^{-1}(A) := \left\{x \,\middle|\, \bigvee_{y:A} (x,y) : R\right\}$.

Definicja 13.9. Dla dowolnych $\text{Ƶ} : \underline{\mathrm{Univ}}$ i $P, R : \underline{\mathrm{Rel}}$, Ƶ nazywamy:

(i) *złożeniem relacji P z relacją R* //w tejże kolejności, czyli z R od wewnątrz (z prawej strony)// $:\Leftrightarrow \text{Ƶ} = P \circ R := \left\{t \,\middle|\, \bigvee_{x,y,z} (t = (x,z) \wedge (x,y) : R \wedge (y,z) : P\right\}$;

(ii) *relacją odwrotną do* $R :\Leftrightarrow \text{Ƶ} = R^{-1} := \left\{t \,\middle|\, \bigvee_{x,y} (t = (y,x) \wedge (x,y) : R)\right\}$.

//Dla przykładu, przyjmując $P := \{(0,1),(1,2),(1,3)\}, R := \{(1,0),(2,2)\}$ i
$A := \{1\}$ mamy : $\underline{\mathrm{D}}(P) = \{0,1\}, \underline{\mathrm{D}}(R) = \{1,2\}, \underline{\text{ᗡ}}(P) = \{1,2,3\}, \underline{\text{ᗡ}}(R) = \{0,2\}$,
$P(A) = \{2,3\}, R(A) = \{0\}, P^{-1}(A) = \{0\}, R^{-1}(A) = \varnothing$,
$P \circ R = \{(1,1)\}, R \circ P = \{(0,0),(1,2)\}, P^{-1} = \{(1,0),(2,1),(3,1)\}$ i $R^{-1} = \{(0,1),(2,2)\}$.//

Ćwiczenie 13.10. Wykazać, że dla dowolnych $P, R : \underline{\mathrm{Rel}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$,

$$R^{-1}, P \circ R, P \cup R, P \cap R, P \backslash R, P \div R, R \cap A : \underline{\mathrm{Rel}}\,.$$

Ćwiczenie 13.11. Wykazać, że dla dowolnych $R : \underline{\mathrm{Rel}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$ zachodzą następujące własności:

(i) $R^{-1}(A) = (R^{-1})(A)$;
(ii) $R(\underline{\mathrm{D}}(R)) = \underline{\text{ᗡ}}(R)$;
(iii) $R^{-1}(\underline{\text{ᗡ}}(R)) = \underline{\mathrm{D}}(R)$;
(iv) $\underline{\mathrm{D}}(R) = R^{-1}(\underline{\mathrm{Univ}})$;
(v) $\underline{\text{ᗡ}}(R) = R(\underline{\mathrm{Univ}})$.

Uwaga 13.12. W celu uproszczenia notacji często – w kontekście relacji – korzysta się z notacji binarnej: " xRy ":=" $(x,y) : R$" dla $x, y, R : \underline{\mathrm{Var}}$. Stosujemy ją, gdy R jest relacją //czyli piszemy np. $x \leqslant y$ zamiast $(x,y) :\leqslant$ dla liczb rzeczywistych x i y//.

Definicja 13.13. Dla dowolnego $\text{Ƶ} : \underline{\mathrm{Univ}}$, Ƶ nazywamy *strukturą* $:\Leftrightarrow \text{Ƶ} = (A, R)$ dla pewnych $A : \underline{\mathrm{Class}}$ i $R : \underline{\mathrm{Rel}}$, gdzie $A \neq \varnothing = A \cap \{\underline{\mathrm{null}}\}$.

Klasę wszystkich struktur będziemy oznaczać przez $\underline{\mathrm{Str}}$, czyli

$$\underline{\mathrm{Str}} := \left\{S \,\middle|\, \bigvee_{A:\underline{\mathrm{Class}}} \bigvee_{R:\underline{\mathrm{Rel}}} (S = (A,R) \wedge A \neq \varnothing = A \cap \{\underline{\mathrm{null}}\})\right\}.$$

Uwaga 13.14. Relacje z reguły zadajemy poprzez wylistowanie wszystkich par tworzących tę relację, o ile jest to możliwe, czyli gdy relacja składa się z małej ilości par uporządkowanych. W przeciwnym przypadku relację określamy poprzez warunek logiczny, który pary uporządkowane tworzące tę relację mają spełniać. Postępujemy tu podobnie jak w przypadku definiowania klas za pomocą funkcji logicznej; por. aks. C6, def. 11.1 i uwaga 11.2. Załóżmy, że $\Phi_x(y) : \underline{\mathrm{LFun}}(y)$ dla $x : \underline{\mathrm{Univ}}$. Wtedy na mocy uwagi 11.2 możemy zdefiniować klasę

$$\{x \mapsto y | \Phi_x(y)\} := \left\{t \,\middle|\, \bigvee_{x,y} (t = (x,y) \wedge \Phi_x(y))\right\}. \tag{13.15}$$

Stosujemy tutaj uwagę 11.2 dla funkcji logicznej $\Phi(t) :=$ " $\bigvee_{x,y}(t = (x, y) \wedge \Phi_x(y))$ " : $\underline{\mathrm{LFun}}(t)$. Ze wzoru (13.15) wynika, że $\{x \mapsto y | \Phi_x(y)\} : \underline{\mathrm{Rel}}$ oraz

(13.16) $$(u, v) := \{x \mapsto y | \Phi_x(y)\} \Leftrightarrow \Phi_u(v) \quad \text{dla} \quad u, v : \underline{\mathrm{Univ}}\,.$$

Ponadto,

(13.17) $$\{x \mapsto y | \Phi_x(y)\} = \bigcup\Big(\Big\{K \,\Big|\, \bigvee_x K = \Big\{t \,\Big|\, \bigvee_y (t = (x, y) \wedge \Phi_x(y))\Big\}\Big\}\Big)$$

oraz

(13.18) $$\underline{\mathrm{D}}(\{x \mapsto y | \Phi_x(y)\}) = \Big\{x \,\Big|\, \bigvee_y \Phi_x(y)\Big\} \quad \text{i} \quad \underline{\mathrm{C\!I}}(\{x \mapsto y | \Phi_x(y)\}) = \Big\{y \,\Big|\, \bigvee_x \Phi_x(y)\Big\}.$$