14. Funkcje

Funkcje są specjalnymi typami relacji określonymi następująco.

Definicja 14.1. Dla dowolnego $Z : \underline{\mathrm{Univ}}$, Z nazywamy *funkcją* (alt. *odwzorowaniem, przekształceniem, operacją, transformacją*) $:\Leftrightarrow Z : \underline{\mathrm{Rel}}$ i spełniony jest warunek jednoznacznego przyporządkowania

$$(x,y) : Z \wedge (x,z) : Z \Rightarrow y = z \quad \text{dla} \quad x,y,z : \underline{\mathrm{Univ}}\,. \tag{14.2}$$

Klasę wszystkich funkcji będziemy oznaczać przez $\underline{\mathrm{Map}}$. //Np. $\{(1,2),(1,3)\} : \underline{\mathrm{Rel}} \setminus \underline{\mathrm{Map}}$, $\{(2,1),(3,1)\} : \underline{\mathrm{Map}}$.//

Uwaga 14.3. Ponieważ $\underline{\mathrm{Map}} \subset \underline{\mathrm{Rel}}$, więc wszystkie pojęcia zdefiniowane dla relacji obowiązują również dla funkcji, czyli np. pojęcia określone w def. 13.7, def. 13.8 i def. 13.9.

Definicja 14.4. Dla dowolnych $Z : \underline{\mathrm{Univ}}$, $F : \underline{\mathrm{Map}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, Z nazywamy *obcięciem* (alt. *zawężeniem*) *funkcji F do klasy A* $:\Leftrightarrow Z = F|_A := F \cap (A \times \underline{\mathrm{Univ}})$.

Ćwiczenie 14.5. Wykazać, że dla dowolnych $F : \underline{\mathrm{Map}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, $F|_A : \underline{\mathrm{Map}}$ i zachodzą równości

$$F|_A = \Big\{ z \,\Big|\, \bigvee_{x,y} (z = (x,y) : F \wedge x : A) \Big\} = \{x \mapsto y | (x,y) : F \wedge x : A\}.$$

Definicja 14.6. Dla dowolnych $Z : \underline{\mathrm{Univ}}$ i $F : \underline{\mathrm{Map}}$, Z nazywamy *funkcją odwrotną do funkcji F* $:\Leftrightarrow Z = F^{-1}$ i $Z : \underline{\mathrm{Map}}$.

Definicja 14.7. Dla dowolnego $Z : \underline{\mathrm{Univ}}$, Z nazywamy *funkcją różnowartościową* (alt. *funkcją odwracalną*) $:\Leftrightarrow Z : \underline{\mathrm{Map}}$ i $Z^{-1} : \underline{\mathrm{Map}}$.

Definicja 14.8. Dla dowolnych $Z : \underline{\mathrm{Univ}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, Z nazywamy *funkcją różnowartościową* (alt. *funkcją odwracalną*) *w klasie A* $:\Leftrightarrow Z : \underline{\mathrm{Map}}$, $A \subset \underline{\mathrm{D}}(Z)$ i $Z|_A$ jest funkcją różnowartościową.

Ćwiczenie 14.9. Wykazać, że dla dowolnych $F : \underline{\mathrm{Map}}$ i $A, B : \underline{\mathrm{Class}}$, jeśli $\varnothing \neq B \subset A$ i F jest funkcją różnowartościową w klasie A, to F jest funkcją różnowartościową w klasie B.

Definicja 14.10. Dla dowolnych $Z : \underline{\mathrm{Univ}}$ i $A, B : \underline{\mathrm{Class}}$, Z nazywamy:

(i) *funkcją odwzorowującą klasę A w klasę B* (alt. *funkcją określoną na klasie A o wartościach w klasie B*) $:\Leftrightarrow$
$$Z : A \to B := \{f | f : \underline{\mathrm{Map}} \wedge \underline{\mathrm{D}}(f) = A \wedge \underline{\mathrm{G}}(F) \subset B\};$$

(ii) *funkcją różnowartościową odwzorowującą klasę A w klasę B* (alt. *iniekcją klasy A w klasę B*) $:\Leftrightarrow$
$$Z : A \xrightarrow{1-1} B := \{f | f : A \to B \wedge f^{-1} : \underline{\mathrm{Map}}\};$$

(iii) *funkcją odwzorowującą klasę A na klasę B* (alt. *surjekcją klasy A na klasę B*) $:\Leftrightarrow$
$$Z : A \xrightarrow{\text{on}} B := \{f | f : A \to B \wedge \underline{\mathrm{G}}(f) = B\};$$

(iv) *funkcją odwzorowującą wzajemnie jednoznacznie klasę A na klasę B* (alt. *bijekcją klasy A na klasę B*) $:\Leftrightarrow$
$$Z : A \xrightarrow[\text{on}]{1-1} B := \{f | f : A \xrightarrow{1-1} B \wedge f : A \xrightarrow{\text{on}} B\}.$$

Ponadto w dalszym ciągu będziemy używać następujących klas:
$\underline{\mathrm{Map}}(A,B) := \{f | f : \underline{\mathrm{Map}} \wedge \underline{\mathrm{D}}(f) \subset A \wedge \underline{\mathrm{G}}(f) \subset B\}$ oraz $\underline{\mathrm{Map}}(A) := \underline{\mathrm{Map}}(A,A)$ dla $A, B : \underline{\mathrm{Class}}$.

Ćwiczenie 14.11. Wykazać, że dla dowolnych $f : \underline{\mathrm{Map}}$ i $A, B : \underline{\mathrm{Class}}$ zachodzą następujące zależności:

(i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ i $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ i $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
(iii) $f^{-1}(A \backslash B) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$ i $f(A \backslash B) \supset f(A) \backslash f(B)$;
(iv) $f^{-1}(A \div B) = f^{-1}(A) \div f^{-1}(B)$ i $f(A \div B) \supset f(A) \div f(B)$.

Ponadto podać przykłady pokazujące, że inkluzje w zależnościach (ii), (iii) i (iv) nie mogą być na ogół zastąpione przez równości.

Definicja 14.12. Dla dowolnych $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}' : \underline{\text{Univ}}$ i $F : \underline{\text{Map}}$,
(i) $\mathfrak{z}$ nazywamy *argumentem funkcji* $F :\Leftrightarrow \mathfrak{z} : \underline{\text{D}}(F)$;
(ii) $\mathfrak{z}'$ nazywamy *wartością funkcji* $F :\Leftrightarrow \mathfrak{z}' : \underline{\text{ᗡ}}(F)$;
(iii) $\mathfrak{z}'$ nazywamy *wartością funkcji* F *dla argumentu* $\mathfrak{z} :\Leftrightarrow (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}') : F$.

Uwaga 14.13. Ze względu na warunek jednoznacznego przyporządkowania (14.2) wartość $\mathfrak{z}'$ funkcji F dla argumentu $\mathfrak{z} : \underline{\text{D}}(F)$ jest wyznaczona z dokładnością do identyczności, czyli $\mathfrak{z}'$ jest jedynym obiektem spełniającym warunek $(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}') : F$. Będziemy go oznaczać przez $F(\mathfrak{z}) := \mathfrak{z}'$, bądź – stosując notację beznawiasową – przez $\mathfrak{z}\_F := \mathfrak{z}'$. //Druga notacja jest zapożyczona z obiektowych języków programowania, np. $x \to f \to g$ w $C++$//. Dodatkowo przyjmujemy $F(\mathfrak{z}) := \underline{\text{null}}$ oraz $\mathfrak{z}\_F := \underline{\text{null}}$ dla $\mathfrak{z} : \underline{\text{Univ}} \setminus \underline{\text{D}}(F)$. Z określenia symboli $F(\mathfrak{z})$ i $\mathfrak{z}\_F$ wynikają implikacje

$$F(\mathfrak{z}) \neq \underline{\text{null}} \Rightarrow \mathfrak{z} : \underline{\text{D}}(F) \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{z}\_F \neq \underline{\text{null}} \Rightarrow \mathfrak{z} : \underline{\text{D}}(F) \quad \text{dla } \mathfrak{z} : \underline{\text{Univ}}$$

//wynika to z prawa kontrapozycji $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\sim \beta \Rightarrow \sim \alpha)$//.

Ćwiczenie 14.14. Wykazać, że dla każdego $F : \underline{\text{Map}}$ następujące warunki są parami równoważne:
(i) F jest funkcją różnowartościową;
(ii) $F^{-1} : \underline{\text{Map}}$;
(iii) $F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$ dla $x, y : \underline{\text{D}}(F)$;
(iv) $x \neq y \Rightarrow F(x) \neq F(y)$ dla $x, y : \underline{\text{D}}(F)$;

Ćwiczenie 14.15. Wykazać, że dla dowolnych $f, g : \underline{\text{Map}}$ zachodzą równoważności:
(i) $f = g \Leftrightarrow \underline{\text{D}}(f) = \underline{\text{D}}(g) \wedge \bigwedge_x f(x) = g(x)$;
(ii) $f = g \Leftrightarrow \bigwedge_y f^{-1}(\{y\}) = g^{-1}(\{y\})$.

//Dla przykładu wykażemy równoważność (i) w kierunku ($\Rightarrow$). Dla dowolnie zadanych $f, g : \underline{\text{Map}}$ mamy:

$f = g \longleftarrow\!/\!/ f, g : \underline{\text{Class}}$, aks. C3$/\!/\!\longrightarrow \bigwedge_t (t : f \Leftrightarrow t : g) \longleftarrow\!/\!/ f, g \subset \underline{\text{OPair}}/\!/\!\longrightarrow$
$(*)$:='$\bigwedge_{x,y} [(x, y) : f \Leftrightarrow (x, y) : g]$'.
Dla każdego $x : \underline{\text{Univ}}$ dostajemy:
$x : \underline{\text{D}}(f)$ —//def. klasy $\underline{\text{D}}(f)$//→ $(x, y) : f$ dla pewnego $y : \underline{\text{Univ}}$ —//$(*)$//→ $(x, y) : g$ —//def. klasy $\underline{\text{D}}(g)$//→ $x : \underline{\text{D}}(g)$
oraz
$x : \underline{\text{D}}(g)$ —//def. klasy $\underline{\text{D}}(g)$//→ $(x, y) : g$ dla pewnego $y : \underline{\text{Univ}}$ —//$(*)$//→ $(x, y) : f$ —//def. klasy $\underline{\text{D}}(f)$//→ $x : \underline{\text{D}}(f)$.
Stąd
$x : \underline{\text{D}}(f) \Leftrightarrow x : \underline{\text{D}}(g)$ dla $x : \underline{\text{Univ}}$ ←//aks. C3//→ $\underline{\text{D}}(f) = \underline{\text{D}}(g)$.
Ponadto,
$x : \underline{\text{D}}(f)$ —//def. obiektu $f(x)$//→ $(x, f(x)) : f$ —//$(*)$, $y := f(x)$//→ $(x, f(x)) : g$ —//$g : \underline{\text{Map}}$//→ $f(x) = g(x)$
oraz
$x : \underline{\text{Univ}} \setminus \underline{\text{D}}(f)$ —//$\underline{\text{D}}(f) = \underline{\text{D}}(g)$//→ $f(x) = \underline{\text{null}} = g(x)$,

co dowaodzi implikacji $f = g \Rightarrow \underline{\mathrm{D}}(f) = \underline{\mathrm{D}}(g) \wedge \bigwedge_x f(x) = g(x)$.//

Przykład 14.16. Posługując się własnościami par uporządkowanych //ćw. 13.2// można wykazać, że

$$\text{(14.17)} \qquad \mathrm{fir} := \Big\{ z \,\Big|\, \bigvee_{x,y} z = ((x,y),x) \Big\} : \underline{\mathrm{OPair}} \to \underline{\mathrm{Univ}}$$

oraz

$$\text{(14.18)} \qquad \mathrm{sec} := \Big\{ z \,\Big|\, \bigvee_{x,y} z = ((x,y),y) \Big\} : \underline{\mathrm{OPair}} \to \underline{\mathrm{Univ}}\,.$$

Z określenia obiektu fir wynika, że fir : $\underline{\mathrm{Rel}}$. Ponadto dla dowolnych $p, q, r : \underline{\mathrm{Univ}}$ mamy:

(p,q) : fir i (p,r) : fir —//(14.17)//→ $(p,q) = ((x,y),x)$ and $(p,r) = ((x',y'),x')$ dla pewnych $x, y, x', y' : \underline{\mathrm{Univ}}$ —//ćw. 13.2//→ $p = (x,y)$, $q = x$, $p = (x',y')$ i $r = x'$ —//aks. C2//→ $(x,y) = (x',y')$ —//ćw. 13.2//→ $x = x'$ —//aks. C2, $q = x$, $r = x'$//→ $q = x = x' = r$.

Zatem relacja fir spełnia warunek jednoznacznego przyporządkowania

$$(p,q) : \mathrm{fir} \wedge (p,r) : \mathrm{fir} \Rightarrow q = r \quad \text{for } p, q, r : \underline{\mathrm{Univ}},$$

skąd na mocy def. 14.1, fir : $\underline{\mathrm{Map}}$. Ponadto $\underline{\mathrm{D}}(\mathrm{fir}) = \underline{\mathrm{OPair}}$, a więc fir : $\underline{\mathrm{OPair}} \to \underline{\mathrm{Univ}}$. Podobnie dowodzimy, że sec : $\underline{\mathrm{OPair}} \to \underline{\mathrm{Univ}}$. Ze wzorów (14.17) i (14.18) wynika, że $(x,y)\_\mathrm{fir} = x$ i $(x,y)\_\mathrm{sec} = y$ dla $x, y : \underline{\mathrm{Univ}}$, czyli funkcja fir zwraca pierwszy element pary uporządkowanej, zaś funkcja sec zwraca drugi element pary uporządkowanej.

Uwaga 14.19. Nawiązując do uwagi 13.14 stwierdzamy na mocy def. 14.1, że obiekt $F := \{x \mapsto y | \Phi_x(y)\}$ jest funkcją $\Leftrightarrow$

$$\text{(14.20)} \qquad \Phi_x(y) \wedge \Phi_x(z) \Rightarrow y = z \quad \text{dla } x, y, z : \underline{\mathrm{Univ}}\,.$$

//Przyjmując np. $\Phi_x(y) :=$ " $x = y$ " widzimy na mocy aks. C2, że zachodzi warunek (14.20), a więc F : $\underline{\mathrm{Map}}$. Jeśli zaś $\Phi_x(y) :=$ " $x \neq y$ " to wybierając dowolnie parami różne obiekty $a, b, c : \underline{\mathrm{Univ}}$ widzimy, że warunek (14.20) nie zachodzi, a więc $F : \underline{\mathrm{Rel}} \setminus \underline{\mathrm{Map}}$.// Ponadto

$$\underline{\mathrm{D}}(F) = \Big\{ x \,\Big|\, \bigvee_y \Phi_x(y) \Big\} \quad \text{oraz} \quad \underline{\mathrm{CI}}(F) = \Big\{ y \,\Big|\, \bigvee_x \Phi_x(y) \Big\}.$$

Uwaga 14.21. Załóżmy, że $\Psi(x) : \underline{\mathrm{LFun}}$ i $\Phi_x(y) : \underline{\mathrm{LFun}}(y)$ dla $x : \underline{\mathrm{Univ}}$ //$x, y : \underline{\mathrm{Var}}$//. Korzystając z def. 11.1 i uwagi 11.2 stwierdzamy, że

$$\text{(14.22)} \quad \{x \mapsto \{y|\Phi_x(y)\}|\Psi(x)\} := \Big\{ x \mapsto K \,\Big|\, K : \underline{\mathrm{Class}} \wedge \Psi(x) \wedge \bigwedge_y (y : K \Leftrightarrow \Phi_x(y)) \Big\} : \underline{\mathrm{Map}}\,.$$

//Tutaj $\Phi_x(K)@(13.15) :=$ " $K : \underline{\mathrm{Class}} \wedge \Psi(x) \wedge \bigwedge_y (y : K \Leftrightarrow \Phi_x(y))$ " : $\underline{\mathrm{LFun}}(K)$ dla $x : \underline{\mathrm{Univ}}$//.

Przyjmując $F := \{x \mapsto \{y|\Phi_x(y)\}|\Psi(x)\}$ widzimy, że dla dowolnych $x, K, L : \underline{\mathrm{Univ}}$,

$(y, K) : F$ i $(x, L) : F$—//(14.22)//→$K, L : \underline{\mathrm{Class}}$ oraz $y : K \Leftrightarrow \Phi_x(y)$ i $y : L \Leftrightarrow \Phi_x(y)$ dla $y : \underline{\mathrm{Univ}}$—// $(\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow (\beta \Leftrightarrow \alpha) : \underline{\mathrm{Taut}}, (\alpha \Leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \Leftrightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Leftrightarrow \gamma) : \underline{\mathrm{Taut}}$//→ $K, L : \underline{\mathrm{Class}}$ i $y : K \Leftrightarrow y : L$ dla $y : \underline{\mathrm{Univ}}$—//aks. C3//→$K = L$.

Z def. 14.1 wynika więc, że $F : \underline{\mathrm{Map}}$. Ponadto $\underline{\mathrm{D}}(F) := \{x|\Psi(x)\}$ oraz $F(x) = \{y|\Phi_x(y)\} : \underline{\mathrm{Class}}$ dla $x : \underline{\mathrm{D}}(F)$.

Uwaga 14.23. Załóżmy, że $g : \underline{\mathrm{Map}}$ i $\Phi(x) : \underline{\mathrm{LFun}}(x)$. Wtedy

$$\text{(14.24)} \qquad \{x \mapsto g(x)|\Phi(x)\} := \{x \mapsto y|\Phi(x) \wedge x : \underline{\mathrm{D}}(g) \wedge y = g(x)\} : \underline{\mathrm{Map}}\,.$$

//Tutaj $\Phi_x(y) :=$ " $\Phi(x) \wedge x : \underline{\mathrm{D}}(g) \wedge y = g(x)$ " : $\underline{\mathrm{LFun}}(y)$ dla $x : \underline{\mathrm{Univ}}$// Przyjmując bowiem $F := \{x \mapsto g(x)|\Phi(x)\}$ widzimy, że dla dowolnych $x, y, z : \underline{\mathrm{Univ}}$,

$(x, y) : F$ i $(x, z) : F$ —//(14.24)//→ $y = g(x)$ i $z = g(x)$ —//aks. C2//→ $y = z$.
Dlatego $F : \underline{\text{Map}}$. Ponadto ze wzoru (14.24) wynika, że $\underline{\text{D}}(F) = \{x | \Phi(x) \wedge x : \underline{\text{D}}(g)\}$.

Ćwiczenie 14.25. Wykazać, że dla dowolnych $A : \underline{\text{Class}}$ i $g : \underline{\text{Map}}$ zachodzą równości $\{x \mapsto g(x) | x : A\} = g|_A$ i $\underline{\text{D}}\left(\{x \mapsto g(x) | x : A\}\right) = \underline{\text{D}}(g) \cap A$.

Twierdzenie 14.26. *Dla dowolnych $f, g : \underline{\text{Map}}$, $f \circ g : \underline{\text{Map}}$ i dla każdego $x : \underline{\text{D}}(g)$, jeśli $g(x) : \underline{\text{D}}(f)$ to $x : \underline{\text{D}}(f \circ g)$ i $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie $f, g : \underline{\text{Map}}$. Wtedy dla dowolnych $x, y, z : \underline{\text{Univ}}$ mamy:
$(x, y) : f \circ g$ i $(x, z) : f \circ g$ —//def. 13.9//→ $(x, x') : g$ i $(x', y) : f$ dla pewnego $x' : \underline{\text{Univ}}$ oraz $(x, x'') : g$ i $(x'', z) : f$ dla pewnego $x'' : \underline{\text{Univ}}$ —//$g : \underline{\text{Map}}$//→ $x' = x''$ —//aks. C4//→ $(x', z) : f$ i $(x', y) : f$ —//$f : \underline{\text{Map}}$//→ $y = z$.
Dlatego złożenie relacji $f \circ g$ spełnia warunek jednoznacznego przyporządkowania

$$(x, y) : f \circ g \wedge (x, z) : f \circ g \Rightarrow y = z \quad \text{dla } x, y, z : \underline{\text{Univ}},$$

i wobec def. 14.1, $f \circ g : \underline{\text{Map}}$. Ponadto dla każdego $x : \underline{\text{Univ}}$ dostajemy:
$x : \underline{\text{D}}(g)$ —//def. 13.7//→ $(x, y) : g$ dla pewnego $y : \underline{\text{Univ}}$
—//$g : \underline{\text{Map}}$ i uw. 14.13//→ $g(x) = y$.
$g(x) : \underline{\text{D}(f)}$ —//def. 13.7//→ $(g(x), z) : f$ dla pewnego $z : \underline{\text{Univ}}$
—//$f : \underline{\text{Map}}$ i uw. 14.13//→ $f(g(x)) = z$.
$(g(x), z) : f$ i $y = g(x)$ —//aks. C4//→ $(y, z) : f$ —//def. 13.9, $(x, y) : g$//→ $(x, z) : f \circ g$ —//def. 13.7 i uw. 14.13//→ $x : \underline{\text{D}}(f \circ g)$ i $(f \circ g)(x) = z$.
Stąd na mocy aks. C2 dostajemy równość $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, c.n.d. □

//Przyjmując na przykład $f := \{x \mapsto x^2 + x + 1 | x : \mathbb{R}\}$ i $g := \{x \mapsto x - 1 | x : \mathbb{R}\}$ widzimy, że
$(f \circ g)(x)$//tw. 14.26//$= f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 + (x - 1) + 1 = x^2 - x + 1$
dla $x : \mathbb{R}$.//

Przypomnijmy //def. 13.13//, że strukturą nazywamy obiekt klasy

$$\underline{\text{Str}} := \left\{ S \,\middle|\, \bigvee_{A:\underline{\text{Class}}} \bigvee_{R:\underline{\text{Rel}}} (S = (A, R) \wedge A \neq \varnothing = A \cap \{\underline{\text{null}}\}) \right\}.$$

Definicja 14.27. Dla dowolnych $Z : \underline{\text{Univ}}$ i $S : \underline{\text{Str}}$, Z nazywamy:
(i) *nośnikiem struktury* S $:\Leftrightarrow Z = S\_\text{supp} := S\_\text{fir}$ //pierwszy element pary uporządkowanej S//;
(ii) *operacją struktury* S $:\Leftrightarrow Z = S\_\text{op} := S\_\text{sec}$ //drugi element pary uporządkowanej S//.
//supp $:= \{S \mapsto S\_\text{fir} \,|\, S : \underline{\text{Str}}\}$ i op $:= \{S \mapsto S\_\text{sec} \,|\, S : \underline{\text{Str}}\}$//