3. Wartościowanie formuł zdaniowych.

Wartościowanie logiczne formuły zdaniowej polega na przyporządkowaniu jej wartości logicznej prawdy lub fałszu w zależności od wartości logicznych przyporządkowanych zmiennym tej formuły reprezentowanych przez znaki klasy Char. Fakt, że formuła zdaniowa F przyjmuje wartość logiczną prawdy, wyrażamy przez napis „$F \mapsto 1$". Napis „$F \mapsto 0$" oznacza, że formuła F przyjmuje wartość logiczną fałszu.

Wartościowanie formuł zdaniowych opiera się na stosowaniu następującej reguł wartościowania spójników zdaniowych i negacji:

Reguła wartościowania negacji

(3.1b):= $[x : LForm : x \mapsto 0 \Rightarrow \sim(x) \mapsto 1;$
$x \mapsto 1 \Rightarrow \sim(x) \mapsto 0] : Rul;$

Reguła wartościowania koniunkcji

(3.1c):= $[x, y : LForm : x \mapsto 0, y \mapsto 0 \Rightarrow (x) \wedge (y) \mapsto 0;$
$x \mapsto 0, y \mapsto 1 \Rightarrow (x) \wedge (y) \mapsto 0;$
$x \mapsto 1, y \mapsto 0 \Rightarrow (x) \wedge (y) \mapsto 0;$
$x \mapsto 1, y \mapsto 1 \Rightarrow (x) \wedge (y) \mapsto 1] : Rul;$

Reguła wartościowania alternatywy

(3.1d):= $[x, y : LForm : x \mapsto 0, y \mapsto 0 \Rightarrow (x) \vee (y) \mapsto 0;$
$x \mapsto 0, y \mapsto 1 \Rightarrow (x) \vee (y) \mapsto 1;$
$x \mapsto 1, y \mapsto 0 \Rightarrow (x) \vee (y) \mapsto 1;$
$x \mapsto 1, y \mapsto 1 \Rightarrow (x) \vee (y) \mapsto 1] : Rul;$

Reguła wartościowania implikacji

(3.1e):= $[x, y : LForm : x \mapsto 0, y \mapsto 0 \Rightarrow (x) \Rightarrow (y) \mapsto 1$
$x \mapsto 1, y \mapsto 0 \Rightarrow (x) \Rightarrow (y) \mapsto 0$
$x \mapsto 0, y \mapsto 1 \Rightarrow (x) \Rightarrow (y) \mapsto 1$
$x \mapsto 1, y \mapsto 1 \Rightarrow (x) \Rightarrow (y) \mapsto 1) : Rul;$

Reguła wartościowania równoważności

(3.1d):= $(x,y : \underset{\sim}{LForm} : x \mapsto 0, y \mapsto 0 \leadsto (x) \Leftrightarrow (y) \mapsto 1;$
$x \mapsto 0, y \mapsto 1 \leadsto (x) \Leftrightarrow (y) \mapsto 0;$
$x \mapsto 1, y \mapsto 0 \leadsto (x) \Leftrightarrow (y) \mapsto 0;$
$x \mapsto 1, y \mapsto 1 \leadsto (x) \Leftrightarrow (y) \mapsto 1) : \underset{\sim}{Rul}$

Reguła wartościowania alternatywy wykluczającej

(3.1g):= $(x,y : \underset{\sim}{LForm} : x \mapsto 0, y \mapsto 0 \leadsto (x) \veebar (y) \mapsto 0;$
$x \mapsto 0, y \mapsto 1 \leadsto (x) \veebar (y) \mapsto 1;$
$x \mapsto 1, y \mapsto 0 \leadsto (x) \veebar (y) \mapsto 1;$
$x \mapsto 1, y \mapsto 1 \leadsto (x) \veebar (y) \mapsto 0)$ $\underline{\text{Rul}}$;

Reguła wartościowania dysjunkcji

(3.1h):= $(x,y : \underset{\sim}{LForm} : x \mapsto 0, y \mapsto 0 \leadsto (x)/(y) \mapsto 1;$
$x \mapsto 0, y \mapsto 1 \leadsto (x)/(y) \mapsto 1;$
$x \mapsto 1, y \mapsto 0 \leadsto (x)/(y) \mapsto 1;$
$x \mapsto 1, y \mapsto 1 \leadsto (x)/(y) \mapsto 0) ; Rul$

Reguła wartościowania binegacji

(3.1i):= $(x,y : \underset{\sim}{LForm} : x \mapsto 0, y \mapsto 0 \leadsto (x) \downarrow (y) \mapsto 1;$
$x \mapsto 0, y \mapsto 1 \leadsto (x) \downarrow (y) \mapsto 0;$
$x \mapsto 1, y \mapsto 0 \leadsto (x) \downarrow (y) \mapsto 0;$
$x \mapsto 1, y \mapsto 1 \leadsto (x) \downarrow (y) \mapsto 0) : \underset{\sim}{Rul}$;

Powyższe reguły wartościowania wyraża się w skróconej formie

(3.1b)

x	$\sim x$
0	1
1	0

x	y	(3.1c) $(x) \wedge (y)$	(3.1d) $(x) \vee (y)$	(3.1e) $(x) \Rightarrow (y)$	(3.1f) $(x) \Leftrightarrow (y)$	(3.1g) $(x) \veebar (y)$	(3.1h) $(x) / (y)$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

$(x) \downarrow (y)$ (3.1i)
1
0
0
0

Proces wartościowania formuły zdaniowej polega na zastępieniu reguły dołączenia negacji i spójników logicznych odpowiednio regułami wartościowania negacji i spójników logicznych.

Przykład 3.2

Należy wyznaczyć wartość logiczną formuły zdaniowej $x \wedge y \Rightarrow x \vee \sim y$ przy założeniu wartościowania zmiennych $x \mapsto 1$ i $y \mapsto 0$. Proces tworzenia i wartościowania tej formuły zdaniowej wygląda następująco

($K0 := x \mapsto 1$ $y \mapsto 0$ // założenie;

$K1 := x, y : LForm \Leftarrow$ // (2.1a) // $- x, y$: Chorr;

$K2 := \sim y : LForm \Leftarrow$ // (2.1b) // $- K1$;

$K3 := x \wedge y : LForm \Leftarrow$ // (2.1a) // $- K1$;

$K3^* := x \wedge y \mapsto 0 \Leftarrow$ // (3.1c) // $- K1, K0$;

$K2^* := \sim y \mapsto 1$ // (3.1b) // $- K1, K0$;

$K4 := x \vee \sim y : LForm \Leftarrow$ // (2.1d) // $\mapsto K1, K2$;

$K4^* := x \vee \sim y \mapsto 1 \Leftarrow$ // (3.1d) // $- K1, K2, K0, K2^*$;

$K5 := x \wedge y \Rightarrow x \vee \sim y \Leftarrow$ // (2.1e) // $- K3, K4$;

$K5^* := x \wedge y \Rightarrow x \vee \sim y \mapsto 1 \Leftarrow$ // (3.1e) // $- K3, K4, K3^*, K4^*$)

Skrócony sposób wartościowania formuły zdaniowej

$x \wedge y \Rightarrow x \vee \sim y$

x	y	$\sim y$	$x \wedge y$	$x \vee \sim y$	$x \wedge y \Rightarrow x \vee \sim y$
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1

Jeszcze bardziej skrócony sposób wartościowania formuł zdaniowych

$x \wedge y \Rightarrow x \vee \sim y$

$x \wedge y \Rightarrow x \vee \sim y$

1 0 0 1 1 1 1 0

1 1 1 1 1 1 0 1

0 0 0 1 0 1 1 0

0 0 1 1 0 0 0 1

28.10.08

Przykład 3.3

Rozważmy zdania proste:
x := „Jan jest wysoki" i y „Piotr jest niski" oraz zdanie złożone z :=
„Jeśli Jan jest wysoki i Piotr jest niski, to Jan nie jest wysoki".
Wyznaczymy wartość logiczną zdania z przy założeniu że $x \mapsto 1$ i $y \mapsto 0$.

I Etap: należy skonstruować formułę logiczną F zmiennych x i y, która daje (odpowiada) zdaniu z po podstawieniu za zmienne x i y ich wartości.

$$F = x \wedge y \Rightarrow \sim x$$

II Etap: wyznaczamy wartość logiczną formuły F przy założeniu, że $x \mapsto 1$ i $y \mapsto 0$. Stosując reguły wartościowania spójników logicznych i negacji dostajemy

$$x \wedge y \Rightarrow \sim x$$

1 0 0 $\underline{1}$ 0 1. Stąd $F \mapsto 1$ gdy $x \mapsto 1$ i $y \mapsto 0$ i w konsekwencji $z \mapsto 1$.

4. Prawa rachunku zdań (TAUTOLOGIE)

Def. 4.1

Prawem rachunku zdań nazywamy formułę zdaniową, która przyjmuje wyłącznie wartość logiczną prawdy niezależnie od wartości logicznych zmiennych zdaniowych wchodzących w skład tej formuły. Klasę wszystkich praw logicznych będziemy oznaczać przez <u>Taut</u>, czyli napis „F: <u>Taut</u>" oznacza, że F jest prawem rachunku zdań.

Metody weryfikacji tautologiczności można podzielić na dwie kategorie:

Pierwsza z nich stanowi warianty wartościowania logicznego formuł zdaniowych, czyli warianty metody zero-jedynkowej;

Druga z nich opiera się na dedukcji, czyli na wyprowadzaniu nowych praw logicznych z praw logicznych już znanych. Opiszemy teraz metody oparte na wartościowaniu logicznym.

Metoda I: polega ona na bezpośrednim stosowaniu def. 4.1, a więc na weryfikacji każdego przypadku wartościowania zmiennych zdaniowych wchodzących w skład badanej formuły. W przypadku wystąpienia wyłącznie wartości logicznej prawdy uznajemy, że F: Taut. W przeciwnym przypadku F tautologią nie jest. W ten sposób stwierdziliśmy już, że formuła zdaniowa $x \wedge y \Rightarrow x \vee \sim y$ jest tautologią.

Rozważmy teraz dla przykładu formułę zdaniową $F := (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ zmiennych p, q, r: Char

Stosując reguły wartościowania spójników logicznych i negacji dostajemy $8 = 2^3$ wartościowań. Zatem F: Taut.

$(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)$	$\Rightarrow$	$(p$	$\Rightarrow$	$r)$
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Metoda II: jest wariantem metody pierwszej polegającym na redukcji sprawdzanych przypadków wartościowania zmiennych zdaniowych do przypadków istotnych. Dla uproszczenia notacji przyjmujemy, że napis „$f \mapsto *$" oznacza przyjmowanie przez formułę zdaniową f dowolnej spośród wartości 0 lub 1. Wówczas niektóre reguły wartościowania spójników zdaniowych można uprościć. Dla przykładu reguła wartościowania koniunkcji ma teraz postać:

(3.1c*):= $[x,y : WForm : x \mapsto 0, y \mapsto * \vdash x \wedge y \mapsto 0;$

$x \mapsto *, y \mapsto 0 \vdash x \wedge y \mapsto 0;$

$x \mapsto 1, y \mapsto 1 \vdash x \wedge y \mapsto 1$

$: Rul];$

zaś reguła wartościowania implikacji wygląda teraz następująco

(3.1e*):= $[x,y : WForm : x \mapsto 0, y \mapsto * \vdash x \Rightarrow y \mapsto 1;$

$x \mapsto *, y \mapsto 1 \vdash x \Rightarrow y \mapsto 1;$

$x \mapsto 1, y \mapsto 0 \vdash x \Rightarrow y \mapsto 0] : Rul;$

Korzystając z reguł (3.1c*) i (3.1e*) możemy zredukować ilość sprawdzanych przypadków dla formuły (F.)

(p	⇒	q)	∧	(q	⇒	r)	⇒	(p	⇒	r)
			*				1	0	1	*
			*				1	*	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1		*	0	*		0	1	1	0	0

Metoda III: polega na stwierdzeniu, że badana formuła logiczna nie może przyjąć wartości fałszu. W tym przypadku odwracamy kolejność wartościowania. Zakładając, że $F \mapsto 0$ dochodzimy do niemożliwego wartościowania zmiennych zdaniowych występujących w F tzn. wskazujemy na zmienną zdaniową przyjmującą jednocześnie dwie różne wartości logiczne.

$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r)\mapsto 0$

$1\ 1\ 1\ \ 1\ 0\ 1\ 0 \qquad 1\ 0\ 0$

Założenie $F\mapsto 0$ doprowadziło nas do wniosku, że $q\mapsto 1$ i $q\mapsto 0$, a tak być nie może. Zatem F: Taut.

Metody dedukcyjne polegające na stosowaniu reguł, które prowadzą od tautologii do tautologii. Wymienimy teraz niektóre z nich.

Reguła podstawiania

(4.2a):= $[x,F,G:\mathrm{Var}\ !\ x:\mathrm{Char},\ F(x):\mathrm{Taut},\ G:\mathrm{WForm} \vdash\!\!\rightarrow F(G):\mathrm{Taut}]:\mathrm{Rul};$

Uzasadnienie z def. (4.1) wynika, że $:F(G)\mapsto 1.$

$1\ *$

4.11.09

Reguła dołączania tautologii w następniku implikacji

(4.2b):= $[F,G:\mathrm{Var}\ !\ F:\mathrm{WForm},\ G:\mathrm{Taut} \vdash\!\!\rightarrow F\Rightarrow G:\mathrm{Taut}]:\mathrm{Rul};$

$F \Rightarrow G$

$*\ \ 1\ \ 1$

Reguła dołączania tautologii do alternatywy

(4.2c):= $[F,G:\mathrm{Var}\ !\ F:\mathrm{WForm},\ G:\mathrm{Taut} \vdash\!\!\rightarrow F\vee G:\mathrm{Taut}]:\mathrm{Rul};$

$F\vee G$

$*\ 1\ 1$

Reguła dołączania zaprzeczenia tautologii w poprzedniku implikacji

(4.2d):= $[F,G:\mathrm{Var}\ !\ F:\mathrm{WForm},\ G:\mathrm{Taut} \vdash\!\!\rightarrow \sim G\Rightarrow F:\mathrm{Taut}]:\mathrm{Rul};$

$\sim G\Rightarrow F$

$0\ 1\ \ 1\ \ *$

Reguła dołączania tautologii do koniunkcji

(4.2e):= $[F,G:\mathrm{Var}\ !\ F,G:\mathrm{Taut} \vdash\!\!\rightarrow F\wedge G:\mathrm{Taut}]:\mathrm{Rul};$

$F\wedge G$

$1\ 1\ 1$

Reguła odrywania dla implikacji:

(4.2f):= $[F,G: \underline{Var} : F: \underline{Taut},\ F \Rightarrow G : \underline{Taut} \vdash\!\!\!\rightarrow G: \underline{Taut}]: \underline{Rul};$

$F \Rightarrow G$
$1\ \ 1\ \ \underline{1}$

Reguła odrywania dla alternatywy:

(4.2g):= $[F,G: \underline{Var} : F: \underline{Taut},\ \sim F \vee G : \underline{Taut} \vdash\!\!\!\rightarrow G: \underline{Taut}]: \underline{Rul};$

$\sim F \vee G$
$0\ 1\ 1\ \underline{1}$

Oprócz powyższych reguł można utworzyć inne reguły wyprowadzania tautologii ze znanych tautologii, jak np.

(4.2h):= $[F,G: \underline{Var} : F: \underline{wForm},\ G: \underline{Taut} \vdash\!\!\!\rightarrow \sim(\sim G \wedge F): \underline{Taut}]: \underline{Rul};$

$\sim(\sim G \wedge F)$
$\underline{1}\ 0\ 1\ 0\ *$

Ćw. 4.3

Zaproponować inne – oprócz wyżej wymienionych – reguły wyprowadzania tautologii ze znanych tautologii:

Przykład 4.4

$F := (\underline{p \wedge q \vee r} \Rightarrow (\underline{q \Leftrightarrow s})) \wedge ((\underline{q \Leftrightarrow s}) \Rightarrow (\underline{t \Rightarrow r})) \Rightarrow ((\underline{p \wedge q \vee r}) \Rightarrow (\underline{t \Rightarrow r})) : \underline{Taut}$, gdyż

$(K1 := (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z): \underline{Taut}$ // uzasadnienie metodami zero-jedynkowymi;

$K2 := F: \underline{Taut} \Leftarrow\!\!\| (4.2a), x := p \wedge q \vee r; (4.2a), y := q \Leftrightarrow s; (4.2a), z := t \Rightarrow r \Vdash K1);$

Przykład 4.5

$F := x \vee y \wedge \sim z \Rightarrow t \vee \sim t : \underline{Taut}$; gdyż

$(K1 := t \vee \sim t : \underline{Taut}$ // prawo wyłączonego środka; uzasadnienie metodą zero-jedynkową;

$K2 := x \vee y \wedge \sim z \Rightarrow t \vee \sim t \Leftarrow\!\!| (4.2b),$
$F := x \vee y \vee \sim z, G := t \vee \sim t \vdash K1);$

Przykład 4.6

$(x \Leftrightarrow y) \vee z \vee \underline{t \vee \sim t} : \underline{Taut}$, gdyż

$(K1 := t \vee \sim t : \underline{Taut}$ // prawo wyłączonego środka;

K_2 := $((x \Leftrightarrow y) \vee z) \vee (t \vee \sim t) \dashv\Vdash (4.2c)$,

$F := (x \Leftrightarrow y) \vee z$, $G := t \vee \sim t \vdash K1$;

K_3 := $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$: Taut

prawo łączności alternatywy; uzasadnie nie metodą zero-jedynkową

K_4 := $[(x \Leftrightarrow y) \vee z \vee t \vee \sim t] \Leftrightarrow$

$[(x \Leftrightarrow y) \vee z \vee (t \vee \sim t)]$: Taut $\dashv\Vdash (4.2a)$

$\alpha := (x \Leftrightarrow y) \vee z$; $(4.2a)$, $\beta := t$; $(4.2a)$,

$\gamma := \sim t \Vdash K3$;

K_5 := $(x \Leftrightarrow y) \vee z \vee t \vee \sim t$: Taut $\dashv (4.2i)$,

$F := (x \Leftrightarrow y) \vee z \vee t \vee \sim t$,

$G := (x \Leftrightarrow y) \vee z \vee (t \vee \sim t) \vdash K4, K2$);

Zastosowaliśmy tutaj regułę odrywania dla równoważności

(4.2i) := $[F, G$: Var : $F \Leftrightarrow G$: Taut, G : Taut

$\vdash F$: Taut$]$: RuL;

$F \Leftrightarrow G$

$1 \; 1 \quad 1$