18. Liczby naturalne

Spośród wszystkich liczb kardynalnych wyodrębniamy liczby naturalne w następujący sposób. Rozważmy rodzinę klas induktywnych

$$\underline{\mathrm{Nat}} := \{N | N : \underline{\mathrm{PClass}}(\underline{\mathrm{Card}}) \wedge 1 : N \wedge \bigwedge_{n} (n : N \Rightarrow n+1 : N)\}.$$

Z określenia klasy $\underline{\mathrm{Nat}}$ wynika, że $\underline{\mathrm{Nat}} : \underline{\mathrm{FClass}}$ i $\underline{\mathrm{Card}} : \underline{\mathrm{Nat}}$, a więc $\underline{\mathrm{Nat}} : \underline{\mathrm{FClass}} \setminus \{\varnothing\}$, i tym samym możemy rozważać jej przecięcie $\bigcap(\underline{\mathrm{Nat}})$.

Definicja 18.1. Dla dowolnego $Z : \underline{\mathrm{Univ}}$, Z nazywamy:
(i) *klasą liczb naturalnych* $:\Leftrightarrow Z = \mathbb{N} := \bigcap(\underline{\mathrm{Nat}})$;
(ii) *liczbą naturalną* $:\Leftrightarrow Z : \mathbb{N}$.

Uwaga 18.2. Z def. 18.1 wynika, że $\mathbb{N} \subset \underline{\mathrm{Card}}$, czyli liczby naturalne stanowią podklasę klasy wszystkich liczb kardynalnych. Ponadto $1 : N$ dla każdego $N : \underline{\mathrm{Nat}}$, a więc $1 : \bigcap(\underline{\mathrm{Nat}}) = \mathbb{N}$. Zatem $\mathbb{N} \neq \varnothing$. Z określenia klasy $\underline{\mathrm{Nat}}$ wynika również, że zachodzi tzw. warunek induktywności

$$n : \mathbb{N} \Rightarrow n+1 : \mathbb{N} \quad \text{dla} \quad n : \underline{\mathrm{Univ}}\,.$$

W konsekwencji $\mathbb{N} : \underline{\mathrm{Nat}}$, i wobec ćw. 15.12, $(\underline{\mathrm{Class}}, \subset)\_\min(\underline{\mathrm{Nat}}) = \bigcap(\underline{\mathrm{Nat}}) = \mathbb{N}$. Innymi słowy $\mathbb{N}$ jest najmniejszą w sensie inkluzji klasą rodziny $\underline{\mathrm{Nat}}$.

Twierdzenie 18.3. *//zasada indukcji matematycznej// Dla każdego* $\Phi(n) : \underline{\mathrm{LFun}}(n)$ *zmiennej* $n : \underline{\mathrm{Var}}$ *zachodzi implikacja*

$$\Phi(1) \wedge \bigwedge_{n:\mathbb{N}} (\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)) \Rightarrow \bigwedge_{n:\mathbb{N}} \Phi(n). \tag{18.4}$$

Dowód. Ustalmy dowolnie $\Phi(n) : \underline{\mathrm{LFun}}(n)$ zmiennej $n : \underline{\mathrm{Var}}$ i rozważmy klasę $A := \{n | n : \mathbb{N} \wedge \Phi(n)\}$. Jeśli założenie implikacji (18.4) jest zdaniem fałszywym to implikacja (18.4) jest zdaniem prawdziwym //wartościowanie implikacji//. Załóżmy więc, że założenie implikacji (18.4) jest zdaniem prawdziwym. Wówczas $\Phi(1)$ jest zdaniem prawdziwym. Stąd $1 : A$, gdyż na mocy uwagi 18.2, $1 : \mathbb{N}$. Ponadto dla dowolnie ustalonego $n : \mathbb{N}$ mamy:

> $n : A$ —//def. klasy A//→ $n : \mathbb{N}$ i zachodzi $\Phi(n)$ —//założenie implikacji (18.4)//→ zachodzą $\Phi(n)$ i $\Phi(n) \Rightarrow \Phi(n+1)$ —//$\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta : \underline{\mathrm{Taut}}$//→ zachodzi $\Phi(n+1)$ —//$n : \mathbb{N}$, uwaga 18.2//→ $n+1 : \mathbb{N}$ i zachodzi $\Phi(n+1)$ —//def. klasy A//→ $n+1 : A$.

Wobec dowolności wyboru $n : \mathbb{N}$ wnioskujemy, że $n : A \Rightarrow n+1 : A$ dla $n : \mathbb{N}$. Ponadto $A \subset \mathbb{N}$ i na mocy uwagi 18.2, $\mathbb{N} \subset \underline{\mathrm{Card}}$. Stąd $A \subset \underline{\mathrm{Card}}$. Ponieważ $1 : A$, więc na mocy określenia klasy $\underline{\mathrm{Nat}}$, $A : \underline{\mathrm{Nat}}$. Korzystając ponownie z uwagi 18.2 stwierdzamy, że $\mathbb{N} \subset A$. Stąd na mocy określenia klasy A widzimy, że $\Phi(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdego $n : \mathbb{N}$, czyli zachodzi następnik implikacji (18.4). W konsekwencji implikacja (18.4) jest zdaniem prawdziwym, c.n.d. □

Korzystając z tw. 18.3 można wyprowadzić fundamentalne dla teorii liczb naturalnych oraz ważne z uwagi na zastosowania następujące twierdzenie o definiowaniu funkcji przez indukcję matematyczną (alt. przez rekurencję).

Twierdzenie 18.5. *Dla dowolnych* $A : \underline{\mathrm{Class}}$, $a : A$ *i* $g : A \to A$ *istnieje dokładnie jedna funkcja* $f : \mathbb{N} \to A$ *spełniająca warunek*

$$f(1) = a \wedge \bigwedge_{n:\mathbb{N}} f(n+1) = g(f(n)). \tag{18.6}$$

Dowód. Precyzyjny dowód tego twierdzenia jest dość żmudny. Ograniczymy się zatem do jego szkicu opisując istotne etapy dowodu.

I. Rozważmy klasę $\mathcal{F}$ złożoną ze wszystkich relacji $F \subset \mathbb{N} \times A$ spełniających warunek

(18.7) $$(1, a) : F \wedge \bigwedge_{n:\mathbb{N}} \bigwedge_{x:A} ((n, x) : F \Rightarrow (n + 1, g(x)) : F).$$

Oczywiście $\mathcal{F} \neq \varnothing$, gdyż $F := \mathbb{N} \times A$ spełnia warunek (18.7). W związku z tym możemy określić obiekt $f := \bigcap(\mathcal{F})$.

II. Wykazujemy, że $f : \mathcal{F}$. Stąd na mocy ćw. 15.12, $f = (\underline{\text{Class}}, \subset)\text{-}\min(\mathcal{F})$.

III. Rozważamy funkcję zdaniową $\Phi(n) : \underline{\text{LFun}}(n)$ zmiennej $n : \underline{\text{Var}}$ określoną następująco:

$$\Phi(n) := \text{"}\, n : \mathbb{N} \wedge \bigvee_{x:A} \bigwedge_{y:A} ((n, y) : f \Leftrightarrow x = y)\,\text{"}.$$

Stosując tw. 18.3 dowodzimy, że $\Phi(n)$ zachodzi dla każdego $n : \mathbb{N}$. Dlatego $f : \mathbb{N} \to A$.

IV. Z etapu II wiemy, że $f : \mathcal{F}$. Zatem funkcja f spełnia warunek (18.7) z $F := f$, i dlatego $f(1) = a$ i $f(n + 1) = g(f(n))$ dla $n : \mathbb{N}$. To oznacza, że funkcja f spełnia warunek (18.6).

V. Zakładając, że $f^* : \mathbb{N} \to A$ jest dowolnie ustaloną funkcją spełniającą warunek (18.6) z podstawieniem $f := f^*$, dowodzimy stosując tw. 18.3, że $f(n) = f^*(n)$ dla $n : \mathbb{N}$. Stąd na mocy ćw. 14.15, $f = f^*$. To dowodzi jedyność funkcji f, co kończy dowód.

□

Twierdzenie 18.8. *Relacja* cord *jest relacją porządku w klasie* $\underline{\text{Card}}$*, czyli* $(\underline{\text{Card}}, \text{cord}) : \underline{\text{ORel}}$.

Dowód. Z ćw. 17.14 (iii) wynika, że cord jest relacją zwrotną i symetryczną. Pozostaje wykazać własność antysymetrii

(18.9) $$(x, y) : \text{card} \wedge (y, x) : \text{card} \Rightarrow x = y \quad \text{dla} \quad x, y : \underline{\text{Card}}\,.$$

Ustalając dowolnie $x, y : \underline{\text{Card}}$ załóżmy, że zachodzi założenie implikacji (18.9). Wtedy na mocy def. relacji cord //def. 17.13// stwierdzamy istnienie $A, B, A', B' : \underline{\text{Class}}$ takich, że $x = \overline{\overline{A}}$, $y = \overline{\overline{B}}$ i $A \subset B$ oraz $x = \overline{\overline{A'}}$, $y = \overline{\overline{B'}}$ i $B' \subset A'$. Dlatego $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}}$ i $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}}$, a więc $A \simeq A'$ i $B \simeq B'$. To oznacza istnienie $h_1 : A \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} A'$ i $h_2 : B \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} B'$. Ponieważ $B' \subset A'$, więc $h := h_1^{-1} \circ h_2 : B \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} A$. Jeśli $A = B$ to $x = y$, co daje tezę implikacji w (18.9). Załóżmy więc, że $A_0 := B \backslash A \neq \varnothing$. Stosując tw. 18.5 dla $A := \underline{\text{PClass}}(B)$, $a := h(A_0)$ i $g := \{K \mapsto h(K) | K : \underline{\text{PClass}}(B)\}$ wnioskujemy, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f : \mathbb{N} \to \underline{\text{PClass}}(B)$ spełniająca warunek (18.6), tzn.

(18.10) $$f(1) = h(A_0) \wedge \bigwedge_{n:\mathbb{N}} f(n + 1) = h(f(n)),$$

gdyż $g(f(n)) = h(f(n))$ dla $n : \mathbb{N}$. Przyjmując $A^* := \bigcup(f(\mathbb{N}))$ wnioskujemy z warunku (18.10) i inkluzji $h(B) \subset A$, że $h(A^* \cup A_0) = h(A^*) \cup h(A_0) = A^* \subset A$. Jeśli $A^* = A$ to $A^* \cup A_0 = A \cup (B \backslash A) = B$, a więc $h(B) = A$. Ponieważ $h : B \xrightarrow{\text{1-1}} A$, więc $h : B \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} A$. Stąd $A \simeq B$, i w konsekwencji $x = \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = y$, co daje tezę implikacji (18.9). Pozostaje rozważyć przypadek, gdy $A^* \neq A$. Wtedy $A \backslash A^* \neq \varnothing$. Przyjmijmy $h' := \text{id}\,|_{A \backslash A^*} \cup h|_{A^* \cup A_0}$ //tzn. h' jest sklejeniem funkcji $\text{id}\,|_{A \backslash A^*}$ i $h|_{A^* \cup A_0}$//. Ponieważ $h(A^* \cup A_0) = A^* \subset A$, $\text{id}(A \backslash A^*) = A \backslash A^*$ i $(A \backslash A^*) \cup (A^* \cup A_0) = A \cup A_0 = A \cup (B \backslash A) = B$, więc

$$h'(B) = h'(A \backslash A^*) \cup h'(A^* \cup A_0) = \text{id}(A \backslash A^*) \cup h(A^* \cup A_0) = (A \backslash A^*) \cup A^* = A,$$

czyli $h' : B \xrightarrow{\text{on}} A$. Ponadto dla dowolnie ustalonych $a, b : B$ mamy:

$a, b : A \backslash A^*$ i $a \neq b$ —//def. funk. h'//→ $h'(a) = \text{id}(a) = a \neq b = \text{id}(b) = h'(b)$;
$a, b : A^* \cup A_0$ i $a \neq b$ —//def. funk. $h', h : B \xrightarrow{\text{on}} A$//→ $h'(a) = h(a) \neq h(b) = h'(b)$;
$a : A \backslash A^*$ i $b : A^* \cup A_0$ —//def. funk. $h', h(A^* \cup A_0) = A^*$//→ $h'(a) = \text{id}(a) = a : A \backslash A^*$ i $h'(b) = h(b) : A^*$ —//$(A \backslash A^*) \cap A^* = \varnothing$//→ $h'(a) \neq h'(b)$;

$a : A^* \cup A_0$ i $b : A\backslash A^*$ —//analogicznie jak wyżej, zastępując miejscami a z b//→ $h'(b) \neq h'(a)$.

Zatem $h' : B \xrightarrow{\text{1-1}} A$, i w konsekwencji $h' : B \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} A$., czyli $A \simeq B$. Dlatego $x = \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = y$, a więc w każdym z rozpatrywanych przypadków zachodzi teza implikacji (18.9), o ile jej założenie jest prawdziwe. Ostatecznie relacja cord jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, a więc $(\underline{\text{Card}}, \text{cord}) : \underline{\text{ORel}}$, czego należało dowieść. □

Ćwiczenie 18.11. Wykazać, że:

(i) $n = m \Leftrightarrow n + 1 = m + 1$ dla $n, m : \mathbb{N}$;
(ii) $n \leqslant m \Leftrightarrow n + 1 \leqslant m + 1$ dla $n, m : \mathbb{N}$.
(iii) $1 \leqslant n$ dla $n : \mathbb{N}$;
(iv) $n \neq n + 1$ dla $n : \mathbb{N}$;
(v) $n < n + 1$ dla $n : \mathbb{N}$;

Twierdzenie 18.12. *//Zasada minimum dla liczb naturalnych// Dla każdego* $A : \underline{\text{Class}}$*, jeśli* $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$ *to* $(\mathbb{N}, \leqslant)\text{-}\min(A) \neq \underline{\text{null}}$ *//czyli każda niepusta podklasa klasy liczb naturalnych ma element najmniejszy w strukturze* $(\mathbb{N}, \leqslant)$*//.*

Dowód. Ustalmy dowolnie $A : \underline{\text{PClass}}(\mathbb{N})\backslash\{\varnothing\}$ i załóżmy, że $(\mathbb{N}, \leqslant)\text{-}\min(A) = \underline{\text{null}}$. Rozważmy funkcję zdaniową $\Phi(p) :=$ " $\bigwedge_{n:A} p \leqslant n$" zmiennej $p : \mathbb{N}$. Z ćw. 18.11 (iii) wynika, że zachodzi $\Phi(1)$. Załóżmy, że $\Phi(p)$ zachodzi dla dowolnie ustalonego $p : \mathbb{N}$. Ustalmy dowolnie $a : A$. Wtedy $p \leqslant a$, i na mocy ćw. 17.18 (iv), $a = p + b$ dla pewnego $b : \underline{\text{Card}}$. Z ćw. 17.21 wynika, że $b = 0$ lub $1 \leqslant b$. Jeśli $b = 0$ to $a = p \leqslant n$ dla $n : A$, i tym samym $(\mathbb{N}, \leqslant)\text{-}\min(A) = a \neq \underline{\text{null}}$, co przeczy założeniu $(\mathbb{N}, \leqslant)\text{-}\min(A) = \underline{\text{null}}$. Możemy więc ograniczyć się do przypadku, gdy $1 \leqslant b$. Z ćw. 17.22 (i) mamy $p + 1 \leqslant p + b = a$. Zachodzi więc $\Phi(p + 1)$, i tym samym dla każdego $p : \mathbb{N}$ zachodzi implikacja $\Phi(p) \Rightarrow \Phi(p + 1)$. Stosując teraz Tw. 18.3 widzimy, że $\Phi(p)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdego $p : \mathbb{N}$. Ponieważ $A \neq \varnothing$, istnieje $n : A$. Wtedy zachodzi $\Phi(n + 1)$, a więc $n + 1 \leqslant n$. Ponieważ $0 \leqslant 1$, więc z ćw. 17.22 (i) wynika, że $n = n + 0 \leqslant n + 1$. Zatem $n = n + 1$, co jest niemożliwe wobec ćw. 18.11 (iv). Dlatego $(\mathbb{N}, \leqslant)\text{-}\min(A) \neq \underline{\text{null}}$, co kończy dowód. □

Wniosek 18.13. *Relacja* cord *jest relacją porządku liniowego w klasie* $\mathbb{N}$*, czyli* $(\mathbb{N}, \text{cord}) : \underline{\text{LORel}}$.

Dowód. Na mocy tw. 18.8, $(\mathbb{N}, \leqslant) : \underline{\text{ORel}}$. Ustalając dowolnie $p, q : \mathbb{N}$ rozważmy klasę $A := \{p, q\}$. Ponieważ $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$, więc z tw. 18.12 wynika, że $a := (\mathbb{N}, \leqslant)\text{-}\min(A) \neq \underline{\text{null}}$. Stąd $a : A$, czyli $a = p$ lub $a = q$. Jeśli $a = p$ to $p \leqslant q$. Jeśli zaś $a = q$ to $q \leqslant p$. Zatem $p \leqslant q$ lub $q \leqslant p$ dla $p, q : \mathbb{N}$, a więc $(\mathbb{N}, \leqslant) : \underline{\text{LORel}}$, co kończy dowód. □

Za pomocą relacji cord określamy następujące klasy: $\mathbb{N}_p := \{n | n : \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge p \leqslant n\}$ dla $p : \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $\mathbb{N}_{p,q} := \{n | n : \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge p \leqslant n \leqslant q\}$ dla $p, q : \mathbb{N} \cup \{0\}$. W szczególności, $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; por. ćw. 18.14 (i).

Ćwiczenie 18.14. Wykazać następujące własności:

(i) $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
(ii) $\mathbb{N}_p \subset \mathbb{N}_q \Leftrightarrow q \leqslant p$ dla $p, q : \mathbb{N}_0$;
(iii) $\mathbb{N}_p = \mathbb{N}_q \Leftrightarrow p = q$ dla $p, q : \mathbb{N}_0$;
(iv) $\mathbb{N}_p = \mathbb{N}_{p+1} \cup \{p\}$ dla $p : \mathbb{N}_0$.

Definicja 18.15. Dla dowolnych $Z : \underline{\text{Univ}}$ i $p : \mathbb{N}$, Z nazywamy *klasą* p *początkowych liczb naturalnych* (alt. *klasą liczb naturalnych od* 1 *do* p) $:\Leftrightarrow Z = \mathbb{N}_{1,p}$.

Ćwiczenie 18.16. Wykazać, że:

(i) $1, p : \mathbb{N}_{1,p}$ dla $p : \mathbb{N}$;

(ii) $\mathbb{N}_{1,p+1} = \mathbb{N}_{1,p} \cup \{p+1\}$ dla $p : \mathbb{N}$;
(iii) $\mathbb{N}_{1,p} \subset \mathbb{N}_{1,p+1} \neq \mathbb{N}_{1,p}$ dla $p : \mathbb{N}$;
(iv) $\mathbb{N}_{1,p} \subset \mathbb{N}_{1,q} \Leftrightarrow p \leqslant q$ dla $p, q : \mathbb{N}$;
(v) $\mathbb{N}_{1,p} = \mathbb{N}_{1,q} \Leftrightarrow p = q$ dla $p, q : \mathbb{N}$;
(vi) $\mathbb{N}_{1,p} \cup \mathbb{N}_{p+1} = \mathbb{N}$ dla $p : \mathbb{N}$;
(vii) $\mathbb{N}_{1,p} \cap \mathbb{N}_{p+1} = \varnothing$ dla $p : \mathbb{N}$.

Ćwiczenie 18.17. Niech f będzie funkcją określoną rekurencyjnie //tw. 18.5// dla $A :=$ $\underline{\text{PClass}}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$, $a := \{1\}$ i $g := \left\{x \mapsto y \,\middle|\, x : A \wedge y = x \cup \left\{n \,\middle|\, \bigvee_{k:x} n = k+1\right\}\right\}$. Wykazać, że $f(p) = \mathbb{N}_{1,p}$ dla $p : \mathbb{N}$.

Ćwiczenie 18.18. Wykazać tzw. *zasadę maksimum dla liczb naturalnych*: dla każdego A : $\underline{\text{Class}}$, jeśli $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}_{1,p}$ dla pewnego $p : \mathbb{N}$, to $(\mathbb{N}, \text{cord})\_\max(A) \neq \underline{\text{null}}$ //czyli każda niepusta podklasa klasy liczb naturalnych ograniczona od góry ma element największy w strukturze $(\mathbb{N}, \text{cord})$//.

Uwaga 18.19. Z tw. 18.3 wynika, że dla każdego $\Psi(n)$: $\underline{\text{LFun}}(n)$ zmiennej n : $\underline{\text{Var}}$ zachodzi implikacja

$$\Psi(1) \wedge \bigwedge_{n:\mathbb{N}} \left(\bigwedge_{k:\mathbb{N}_{1,n}} \Psi(k) \Rightarrow \Psi(n+1) \right) \Rightarrow \bigwedge_{n:\mathbb{N}} \Psi(n). \tag{18.20}$$

Stosując bowiem tw. 18.3 dla funkcji zdaniowej $\Phi(n) :=$ " $\bigwedge_{k:\mathbb{N}_{1,n}} \Psi(k)$ " : $\underline{\text{LFun}}(n)$ zmiennej n : $\underline{\text{Var}}$ stwierdzamy, że $\Phi(n)$ zachodzi dla każdego $n : \mathbb{N}$. Stąd w szczególności $\Psi(n)$ zachodzi dla każdego $n : \mathbb{N}$, co dowodzi implikacji (18.20). Przedstawiona tutaj własność nazywa się zazwyczaj *twierdzeniem o indukcji zupełnej*.

Definicja 18.21. Dla dowolnych $\mathcal{Z}$: $\underline{\text{Univ}}, p : \mathbb{N}$ i A : $\underline{\text{Class}} \setminus \{\varnothing\}$, $\mathcal{Z}$ nazywamy *ciągiem p-wyrazowym w klasie A* (alt. *o wyrazach w klasie A*) $:\Leftrightarrow \mathcal{Z} : \mathbb{N}_{1,p} \to A$.

Klasę wszystkich ciągów p-wyrazowych w klasie A będziemy oznaczać przez A^p, czyli $A^p :=$ $(\mathbb{N}_{1,p} \to A)$.

Definicja 18.22. Dla dowolnych $\mathcal{Z}$: $\underline{\text{Univ}}, p : \mathbb{N}$, $\mathcal{Z}$ nazywamy *ciągiem p-wyrazowym* $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{Z} : \mathbb{N}_{1,p} \to \underline{\text{Univ}}$ //czyli $\mathcal{Z} : \underline{\text{Univ}}^p$//.

Definicja 18.23. Dla dowolnych $\mathcal{Z}$: $\underline{\text{Univ}}$ i A : $\underline{\text{Class}} \setminus \{\varnothing\}$, $\mathcal{Z}$ nazywamy
(i) *ciągiem skończonym w klasie A* (alt. *o wyrazach w klasie A*) $:\Leftrightarrow \mathcal{Z} : \mathbb{N}_{1,p} \to A$ dla pewnego $p : \mathbb{N}$;
(ii) *ciągiem w klasie A* (alt. *o wyrazach w klasie A*) $:\Leftrightarrow \mathcal{Z} : \mathbb{N} \to A$.

Definicja 18.24. Dla dowolnego $\mathcal{Z}$: $\underline{\text{Univ}}$, $\mathcal{Z}$ nazywamy
(i) *ciągiem skończonym* $:\Leftrightarrow \mathcal{Z} : \mathbb{N}_{1,p} \to \underline{\text{Univ}}$ dla pewnego $p : \mathbb{N}$;
(ii) *ciągiem* $:\Leftrightarrow \mathcal{Z} : \mathbb{N} \to \underline{\text{Univ}}$.

Definicja 18.25. Dla dowolnych z : $\underline{\text{Univ}}$, $n : \mathbb{N}$ i f będącego ciągiem skończonym lub ciągiem, z nazywamy *n-tym wyrazem ciągu f* $:\Leftrightarrow z = f(n)$.

Uwaga 18.26. Dla oznaczenia n-tego wyrazu ciągu skończonego (odp. ciągu) f często używa się notacji indeksowej " f_n ":=" $f(n)$ " dla f, n : $\underline{\text{Var}}$. Dla oznaczenia //reprezentacji// ciągów skończonych będziemy czasem stosować notację macierzową:

$$\text{"}\,(x_1) := \{(1, x_1)\}\,\text{"} \quad \text{dla } x_1 : \underline{\text{Var}},$$

$$\text{"}\,(x_1\ x_2) := \{(1, x_1), (2, x_2)\}\,\text{"} \quad \text{dla } x_1, x_2 : \underline{\text{Var}},$$

$$\text{"}\,(x_1\ x_2\ x_3) := \{(1, x_1), (2, x_2), (3, x_3)\}\,\text{"} \quad \text{dla } x_1, x_2, x_3 : \underline{\text{Var}},$$

$$\text{"}\,(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) := \{(1, x_1), (2, x_2), (3, x_3), (4, x_4)\}\,\text{"} \quad \text{dla } x_1, x_2, x_3, x_4 : \underline{\text{Var}} \ \text{ itd.}$$

Dokładniej rzecz ujmując, definiujemy rekurencyjnie " $(x_1) := \{(1, x_1)\}$ " dla x_1 : $\underline{\mathrm{Var}}$ i dla każdego $p : \mathbb{N}$,

$$\text{"}(x_1\ x_2\ x_3\ \dots\ x_{p+1})\text{"} := \text{"}(x_1\ x_2\ x_3\ \dots\ x_p) \cup \{(p+1, x_{p+1})\}\text{"} \quad \text{dla } x : \mathbb{N}_{1.p+1} \to \underline{\mathrm{Var}}\,.$$

Ćwiczenie 18.27. Wykazać, że dla dowolnych $p : \mathbb{N}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}} \backslash \{\varnothing\}$,

$$A^p = \{f | f : \underline{\mathrm{Map}} \wedge \underline{\mathrm{D}}(f) = \mathbb{N}_{1,p} \wedge \underline{\mathrm{CI}}(f) \subset A\} = \{f | f : \underline{\mathrm{Map}}(\mathbb{N}_{1,p}, A) \wedge \underline{\mathrm{D}}(f) = \mathbb{N}_{1,p}\}.$$

Ćwiczenie 18.28. Wykazać, że dla każdego $A : \underline{\mathrm{Class}} \backslash \{\varnothing\}$,

$$F_1 := \{x \mapsto y | x : A^1 \wedge y = x_1\} : A^1 \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} A$$

oraz

$$F_2 := \{x \mapsto y | x : A^2 \wedge y = (x_1, x_2)\} : A^2 \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} A \times A.$$

Uwaga 18.29. W związku z ćw. 18.28 klasy A^1 i A^2 utożsamia się często z klasami A i $A \times A$, odpowiednio. W szczególności $A^1 \simeq A$ i $A^2 \simeq A \times A$.

Definicja 18.30. Dla dowolnych Z : $\underline{\mathrm{Univ}}$ i $p : \mathbb{N}_0$, Z nazywamy *klasą p-elementową* (alt. *klasą o p elementach*) $:\Leftrightarrow$ Z : $\underline{\mathrm{Class}}$ i $Z_{-}\mathrm{card} = p$.

Uwaga 18.31. Można wykazać, że dla każdego A : $\underline{\mathrm{Class}}$ zachodzą następujące równoważności:

(i) A jest klasą nieskończoną $\Leftrightarrow$ istnieje $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{1-1}} A$;
(ii) A jest klasą nieskończoną $\Leftrightarrow$ istnieje $f : A \xrightarrow{\text{on}} \mathbb{N}$;
(iii) A jest klasą skończoną $\Leftrightarrow$ $A \simeq \mathbb{N}_{1,p}$ dla pewnego $p : \mathbb{N}_0$;
(iv) A jest klasą skończoną $\Leftrightarrow$ $\overline{\overline{A}} : \mathbb{N}_0$;
(v) A jest klasą skończoną $\Leftrightarrow$ A jest klasą p-elementową dla pewnego $p : \mathbb{N}_0$.

Ponieważ $\overline{\overline{A}} = 0 \Leftrightarrow A \neq \varnothing$, więc A jest klasą 0-elementową $\Leftrightarrow$ $A = \varnothing$.

Ćwiczenie 18.32. Wykazać, że dla dowolnych S : $\underline{\mathrm{LORel}}$ i A : $\underline{\mathrm{Class}}$, jeśli $\varnothing \neq A \subset S_{-}\mathrm{supp}$ i A jest klasą skończenie elementową to $S_{-}\max(A) \neq \underline{\mathrm{null}}$ i $S_{-}\min(A) \neq \underline{\mathrm{null}}$.

Uwaga 18.33. Stosując zasadę indukcji matematycznej //tw. 18.3// można wykazać, że dla dowolnych $p : \mathbb{N}$ i $A : \mathbb{N}_{1,p} \to \underline{\mathrm{Class}} \backslash \{\varnothing\}$ istnieje f : $\underline{\mathrm{Map}}$ taki, że $\underline{\mathrm{D}}(f) = \mathbb{N}_{1,p}$ i $f(k) : A_k$ dla $k : \mathbb{N}_{1,p}$.