11. Pierwotne własności klas

Przyjmujemy domyślnie, że zdania typu " $x : K$ " i " $x = y$ " są zdaniami logicznymi dla wszystkich x, y : Univ i K : Class. Podstawowe własności klas opisują następujące aksjomaty, czyli zdania logiczne, których prawdziwość przyjmujemy bez dowodu, czyli bez uzasadnienia. Są one prawdziwe na mocy założenia.

Aks. C1. //własności łączące klasy Univ i Class//

(C1.a) $$\underline{\mathrm{Univ}} : \underline{\mathrm{Class}};$$

(C1.b) $$\underline{\mathrm{Class}} : \underline{\mathrm{Class}};$$

(C1.c) $$\bigwedge_{K:\underline{\mathrm{Class}}} \bigwedge_{x:K} x : \underline{\mathrm{Univ}}\,.$$

Aks. C2. //własności identyczności//

(C2.a) $$\bigwedge_{x} x = x \quad \text{//reflexivity//};$$

(C2.b) $$\bigwedge_{x,y} (x = y \Rightarrow y = x) \quad \text{//symmetry//};$$

(C2.c) $$\bigwedge_{x,y,z} (x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z) \quad \text{//transitivity//};.$$

Aks. C3. //aksjomat identyczności klas//

$$\bigwedge_{K,L:\underline{\mathrm{Class}}} \left(K = L \Leftrightarrow \bigwedge_{x} (x : K \Leftrightarrow x : L) \right).$$

Aks. C4. //aksjomat zastępowania zmiennych//

$$\bigwedge_{K:\underline{\mathrm{Class}}} \bigwedge_{x,y} (x : K \wedge x = y \Rightarrow y : K).$$

Aks. C5. //obiekt null nie jest klasą//

$$\sim \underline{\mathrm{null}} : \underline{\mathrm{Class}}\,.$$

Przez *funkcję logiczną* (alt. *warunek logiczny*) *zmiennej* (alt. *parametru*) x : Var rozumiemy wyrażenie, które zwraca zdanie logiczne po podstawieniu za x konkretnego obiektu. Np. $\Phi(x)$:=" człowiek x ma 180 cm wzrostu " jest funkcją zdaniową zmiennej x : Var. Rozważmy klasy LFun(x) dla x : Var, które składają się z pierwotnych funkcji logicznych postaci " $x : K$ " i " $x = y$ " dla K : Class i y : Univ oraz wyrażeń utworzonych z pierwotnych funkcji logicznych przy użyciu symboli logicznych.

Aks. C6. //aksjomat definiowania klas za pomocą funkcji logicznych// Dla dowolnych x : Char i $\Phi(x)$: LFun(x) istnieje K : Class spełniający warunek

(C6.a) $$\bigwedge_{x} (x : K \Leftrightarrow \Phi(x))\,.$$

Definicja 11.1. Dla dowolnych Z : Univ, x : Char i $\Phi(x)$: LFun(x), Z nazywa się *klasą zdefiniowaną przez* $\Phi(x)$ $:\Leftrightarrow Z = K$ dla pewnego K : Class spełniającego warunek (C6.a).

Uwaga 11.2. Klasa K w def. 11.1 jest wyznaczona jednoznacznie, czyli z dokładnością do identyczności //jedyna taka klasa//. Załóżmy bowiem, że K_1, K_2 : Class są dowolnie ustalonymi klasami spełniającymi warunek (C6.a) z zastąpieniem K przez K_1 i K_2, odpowiednio, czyli

(11.3) $$\bigwedge_{x} (x : K_1 \Leftrightarrow \Phi(x)) \wedge \bigwedge_{x} (x : K_2 \Leftrightarrow \Phi(x))\,.$$

Stąd dla każdego x : $\underline{\text{Univ}}$ mamy:

$x : K_1 \Leftrightarrow \Phi(x)$ and $x : K_2 \Leftrightarrow \Phi(x)$

$—/\!/(\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow (\beta \Leftrightarrow \alpha) : \underline{\text{Taut}}, \alpha := \text{"}\, x : K_2 \text{"}, \beta := \Phi(x)/\!/\!\rightarrow$

$\Phi(x) \Leftrightarrow x : K_2$

$—/\!/\ \alpha := \text{"}\, x : K_1 \text{"}, \beta := \Phi(x), \gamma := \text{"}\, x : K_2 \text{"}, (\alpha \Leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \Leftrightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Leftrightarrow \gamma) : \underline{\text{Taut}}/\!/\!\rightarrow$

$x : K_1 \Leftrightarrow x : K_2.$

czyli warunek (11.3) implikuje, że $\bigwedge_x (x : K_1 \Leftrightarrow x : K_2)$. Korzystając z aksjomatu identyczności klas //aks. C3// stwierdzamy, że $K_1 = K_2$, gdyż $K_1 = K_2 \Leftrightarrow \bigwedge_x (x : K_1 \Leftrightarrow x : K_2)$. To łącznie z aks. C6 oznacza, że istnieje jedyna taka klasa K spełniająca warunek (C6.a) dla dowolnie zadanego $\Phi(x) : \underline{\text{LFun}}(x)$. Będziemy ją oznaczać przez $\{x|\Phi(x)\} := K$. Symbol $\{x|\Phi(x)\}$ czytamy: klasa wszystkich obiektów x spełniających warunek $\Phi(x)$.

Definicja 11.4. Dla dowolnych Z, x, y : $\underline{\text{Univ}}$, Z nazywamy *parą obiektów x i y* $:\Leftrightarrow Z = \{x, y\} := \{t|t = x \vee t = y\}$. $/\!/\Phi(t) := \text{"}\, t = x \vee t = y \text{"} : \underline{\text{LFun}}(t)/\!/$.

Definicja 11.5. Dla dowolnych Z, x : $\underline{\text{Univ}}$, Z nazywamy *klasą jednoelementową złożoną z obiektu x* (alt. *singletonem obiektu x*) $:\Leftrightarrow Z = \{x\} := \{t|t = x\}$. $/\!/\Phi(t) := \text{"}\, t = x \text{"} : \underline{\text{LFun}}(t)/\!/$.

Definicja 11.6. Dla dowolnych Z : $\underline{\text{Univ}}$ i K : $\underline{\text{Class}}$, Z nazywamy *podklasą klasy K* $:\Leftrightarrow$ Z : $\underline{\text{Class}}$ i $Z \subset K$, gdzie symbol " $\subset$ " jest określony przez " $A \subset B$ " := " $\bigwedge_x (x : A \Rightarrow x : B)$ " dla x : $\underline{\text{Char}}$ i A, B : $\underline{\text{Var}}$.

Definicja 11.7. Dla dowolnych Z : $\underline{\text{Univ}}$ i K : $\underline{\text{Class}}$, Z nazywamy *klasą zawierającą klasę K* $:\Leftrightarrow$ Z : $\underline{\text{Class}}$ i $Z \supset K$, gdzie symbol " $\supset$ " jest określony przez

$$\text{"}\, A \supset B \text{"} := \text{"} \bigwedge_x (x : B \Rightarrow x : A) \text{"} \quad \text{dla} \quad x : \underline{\text{Char}} \quad \text{i} \quad A, B : \underline{\text{Var}}.$$

Ćwiczenie 11.8. Wykazać, że dla dowolnych A, B : $\underline{\text{Class}}$, $A \supset B \Leftrightarrow B \subset A$ oraz

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A. /\!/(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha) \Leftrightarrow (\alpha \Leftrightarrow \beta) : \underline{\text{Taut}}/\!/.$$

Ćwiczenie 11.9. Wykazać, że dla dowolnych x, y : $\underline{\text{Univ}}$, $\{x\}, \{x, y\}$: $\underline{\text{Class}}$ oraz $\{x, y\} = \{y, x\}$, $\{x\} = \{x, x\}$, $\{x\} \subset \{x, y\}$, $\{y\} \subset \{x, y\}$ i $\{x\} = \{x, y\} \Leftrightarrow x = y$.

Definicja 11.10. Dla dowolnego Z : $\underline{\text{Univ}}$, Z nazywamy *klasą pustą* $:\Leftrightarrow$

$$Z = \underline{\text{Empty}} := \{x|x = \underline{\text{null}} \wedge \sim x = \underline{\text{null}}\}/\!/\Phi(x) := \text{"}\, x = \underline{\text{null}} \wedge \sim x = \underline{\text{null}} \text{"} : \underline{\text{LFun}}(x)/\!/.$$

Uwaga 11.11. Powszechnie używa się symbolu $\varnothing := \underline{\text{Empty}}$ dla oznaczenia klasy pustej. Z aks. C6 i def. 11.10 wynikają następujące własności:

$$\bigwedge_x \sim x : \varnothing \tag{11.12}$$

oraz

$$\sim \bigvee_x x : \varnothing. \tag{11.13}$$

Dla dowolnie ustalonego x : $\underline{\text{Univ}}$ mamy bowiem:

$\varnothing := \underline{\text{Empty}}—/\!/x := y \Rightarrow x = y/\!/\!\rightarrow \varnothing = \underline{\text{Empty}}—/\!/$def. 11.10, aks. C3 i uw. 11.2$/\!/\!\rightarrow$

$x : \varnothing \Leftrightarrow x = \underline{\text{null}} \wedge \sim x = \underline{\text{null}}—/\!/(\alpha \Leftrightarrow \beta) \Leftrightarrow (\sim \alpha \Leftrightarrow \sim \beta) : \underline{\text{Taut}}/\!/\!\rightarrow$

$\sim x : \varnothing \Leftrightarrow \sim (x = \underline{\text{null}} \wedge \sim x = \underline{\text{null}})—/\!/\!\sim (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \sim \alpha \vee \sim \beta : \underline{\text{Taut}}/\!/\!\rightarrow$

$\sim x : \varnothing \Leftrightarrow \sim x = \underline{\text{null}} \vee \sim\sim x = \underline{\text{null}}—/\!/\!\sim\sim \alpha \Leftrightarrow \alpha : \underline{\text{Taut}}/\!/\!\rightarrow$

$\sim x : \varnothing \Leftrightarrow \sim x = \underline{\text{null}} \vee x = \underline{\text{null}}—/\!/\!\sim \alpha \vee \alpha : \underline{\text{Taut}}/\!/\!\rightarrow \sim x : \varnothing.$

Stąd wynika własność (11.12). Stosując prawo de'Morgana dla kwantyfikatorów $\sim \bigvee_x \Phi(x) \Leftrightarrow \bigwedge_x \sim \Phi(x)$ z funkcją zdaniową $\Phi(x) :=$ " $x : \varnothing$ " : $\underline{\mathrm{LFun}}(x)$ wyprowadzamy z własności (11.12) własność (11.13). Z własności (11.12) wynika, że dla dowolnie ustalonego $A : \underline{\mathrm{Class}}$, $\bigwedge_x (x : \varnothing \Rightarrow x : A)$, a stąd na mocy def. symbolu " $\subset$ " //def. 11.6// dostajemy $\varnothing \subset A$, czyli

$$\bigwedge_{A:\underline{\mathrm{Class}}} \varnothing \subset A. \tag{11.14}$$

Definicja 11.15. Dla dowolnych $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}' : \underline{\mathrm{Univ}}$, $\mathfrak{z}$ i $\mathfrak{z}'$ nazywamy *obiektami różnymi* $:\Leftrightarrow \mathfrak{z} \neq \mathfrak{z}'$, gdzie symbol " $\neq$ " jest określony przez " $x \neq y$ ":=" $\sim x = y$ " dla $x, y : \underline{\mathrm{Var}}$.

Ćwiczenie 11.16. Wykazać, że $\varnothing \neq \underline{\mathrm{null}}$. //Wniosek z aks. C5 i aks. C4.//