Przypomnijmy, że *struktura* jest obiektem klasy

$$\underline{\mathrm{Str}} := \left\{ S \,\middle|\, \bigvee_{A:\underline{\mathrm{Class}}} \bigvee_{R:\underline{\mathrm{Rel}}} (S = (A, R) \wedge A \neq \emptyset = A \cap \{\underline{\mathrm{null}}\} \right\}.$$

Definicja 10.1. Dla dowolnych $\not{Z} : \underline{\mathrm{Univ}}$ i $S : \underline{\mathrm{Str}}$, $\not{Z}$ nazywamy:

(i) *nośnikiem struktury* S $:\Leftrightarrow \not{Z} = S\_\mathrm{supp} := S\_\mathrm{fir}$ //pierwszy element pary uporządkowanej S// ;
(ii) *operacją struktury* S $:\Leftrightarrow \not{Z} = S\_\mathrm{op} := S\_\mathrm{sec}$ //drugi element pary uporządkowanej S// .

Podstawową strukturą arytmetyczną jest struktura liczb całkowitych nieujemnych $\mathbb{N}_0\text{-Str} := (\mathbb{N}_0, T)$, gdzie $T : \mathbb{N}_{1,3} \to \underline{\mathrm{Rel}}$ i

$$T_1 := \{x \mapsto y \,|\, x : \mathbb{N}_0^2 \wedge y = x_1 + x_2\},$$
$$T_2 := \{x \mapsto y \,|\, x : \mathbb{N}_0^2 \wedge y = x_1 \cdot x_2\}$$

oraz

$$T_3 := \{x \mapsto y \,|\, x, y : \mathbb{N}_0 \wedge x \leqslant y\}.$$

Struktura $\mathbb{N}_0$-Str jest dość słaba ponieważ nie można w niej na ogół rozwiązać równań typu $x + a = b$ z niewiadomą $x : \mathbb{N}_0$ i dowolnie zadanymi $a, b : \mathbb{N}_0$. W szczególności nie istnieje $x : \mathbb{N}_0$ spełniający równanie $x + 3 = 2$. Ażeby rozwiązać ten problem rozszerzymy strukturę $\mathbb{N}_0$-Str do struktury o silniejszych własnościach algebraicznych opisanych w następującej definicji.

Definicja 10.2. Dla dowolnych $\not{Z} : \underline{\mathrm{Univ}}$, $\not{Z}$ nazywa się *pierścieniem uporządkowanym* $:\Leftrightarrow \not{Z} : \underline{\mathrm{Str}}$, $\not{Z}\_\mathrm{op} : \mathbb{N}_{1,3} \to \underline{\mathrm{Rel}}$, istnieją $\bar{0}, \bar{1} : A := \not{Z}\_\mathrm{supp}$ takie, że $\bar{0} \neq \bar{1}$ i zachodzą następujące warunki:

(I.0) $\not{Z}\_\mathrm{op}(1) : A^2 \to A$ //$\not{Z}\_\mathrm{op}(1)$ jest dwuargumentową operacją w klasie A// ;
(I.1) $(x \bar{+} y) \bar{+} z = x \bar{+} (y \bar{+} z)$ dla $x, y, z : A$, gdzie $u \bar{+} v := \not{Z}\_\mathrm{op}(1)((u\ v))$ dla $u, v : A$ //łączność operacji $\not{Z}\_\mathrm{op}(1)$// ;
(I.2) $x \bar{+} y = y \bar{+} x$ dla $x, y : A$ //przemienność operacji $\not{Z}\_\mathrm{op}(1)$// ;
(I.3) $x \bar{+} \bar{0} = x$ dla $x : A$ //$\bar{0}$ jest elementem neutralnym operacji $\not{Z}\_\mathrm{op}(1)$// ;
(I.4) dla każdego $x : A$ istnieje $y : A$ taki, że $x \bar{+} y = \bar{0}$ //istnienie elementu odwrotnego do x względem operacji $\not{Z}\_\mathrm{op}(1)$// ;
(II.0) $\not{Z}\_\mathrm{op}(2) : A^2 \to A$ //$\not{Z}\_\mathrm{op}(2)$ jest dwuargumentową operacją w klasie A// ;
(II.1) $(x \bar{\cdot} y) \bar{\cdot} z = x \bar{\cdot} (y \bar{\cdot} z)$ dla $x, y, z : A$, gdzie $u \bar{\cdot} v := \not{Z}\_\mathrm{op}(2)((u\ v))$ dla $u, v : A$ //łączność operacji $\not{Z}\_\mathrm{op}(2)$// ;
(II.2) $x \bar{\cdot} y = y \bar{\cdot} x$ dla $x, y : A$ //przemienność operacji $\not{Z}\_\mathrm{op}(2)$// ;
(II.3) $x \bar{\cdot} \bar{1} = x$ dla $x : A$ //$\bar{1}$ jest elementem neutralnym operacji $\not{Z}\_\mathrm{op}(2)$// ;
(III.1) $x \bar{\cdot} (y \bar{+} z) = (x \bar{\cdot} y) \bar{+} (x \bar{\cdot} z)$ dla $x, y, z : A$ //rozdzielność operacji $\not{Z}\_\mathrm{op}(2)$ względem operacji $\not{Z}\_\mathrm{op}(1)$// ;
(IV.0) $(A, \not{Z}\_\mathrm{op}(3)) : \underline{\mathrm{LORel}}$ //$\not{Z}\_\mathrm{op}(3)$ jest relacją porządku liniowego w klasie A// ;
(IV.1) $x \bar{\leqslant} y \Rightarrow x \bar{+} z \bar{\leqslant} y \bar{+} z$ dla $x, y, z : A$, gdzie $u \bar{\leqslant} v :\Leftrightarrow (u, v) : \not{Z}\_\mathrm{op}(3)$ dla $u, v : A$ //relacja $\not{Z}\_\mathrm{op}(3)$ jest zgodna z operacją $\not{Z}\_\mathrm{op}(1)$// ;
(IV.2) $\bar{0} \bar{\leqslant} x \wedge \bar{0} \bar{\leqslant} y \Rightarrow \bar{0} \bar{\leqslant} x \bar{\cdot} y$ dla $x, y : A$ //relacja $\not{Z}\_\mathrm{op}(3)$ jest zgodna z operacją $\not{Z}\_\mathrm{op}(2)$// .

Klasę wszystkich pierścieni uporządkowanych będziemy oznaczać przez $\underline{\mathrm{ORing}}$. Zauważmy, że struktura $\mathbb{N}_0$-Str spełnia wszystkie warunki def. 10.2 z wyjątkiem warunku (I.4).

Uwaga 10.3. Elementy $\bar{0}$ i $\bar{1}$ w def. 10.2 są jedynymi elementami spełniającymi warunki (I.3) i (II.3), odpowiednio. Mianowicie, dla każdego $\bar{0}' : A$ spełniającego warunek $x \bar{+} \bar{0}' = x$ dla $x : A$ mamy

$$\bar{0}' \ \text{//(I.3)//} \ = \bar{0}' \bar{+} \bar{0} \ \text{//(I.2)//} \ = \bar{0} \bar{+} \bar{0}' = \bar{0}\,.$$

Podobnie dla każdego $\bar{1}' : A$ spełniającego warunek $x \bar{\cdot} \bar{1}' = x$ dla $x : A$ mamy

$$\bar{1}' \ \text{//(II.3)//} \ = \bar{1}' \bar{\cdot} \bar{1} \ \text{//(II.2)//} \ = \bar{1} \bar{\cdot} \bar{1}' = \bar{1}\,.$$

Elementy $\bar{0}$ i $\bar{1}$ będziemy odpowiednio oznaczać przez $\not{Z}\_\mathrm{zero} := \bar{0}$ i $\not{Z}\_\mathrm{unit} := \bar{1}$.

W celu uproszczenia notacji będziemy w dalszym ciągu stosować dla dowolnie zadanego $S : \underline{\mathrm{ORing}}$ następujące oznaczenia: $x +_S y := S\_\mathrm{op}(1)((x\ y))$, $x \cdot_S y := S\_\mathrm{op}(2)((x\ y))$ i $x \leqslant_S y :\Leftrightarrow (x, y) : S\_\mathrm{op}(3)$ dla $x, y : S\_\mathrm{supp}$.

Ćwiczenie 10.4. Wykazać, że dla każdego $S : \underline{\mathrm{ORing}}$ mają miejsce następujące własności:

(i) $x +_S y = x +_S z \Rightarrow y = z$ dla $x, y, z : S\_\mathrm{supp}$;
(ii) $x \cdot_S y = 1_S \wedge x \cdot_S z = 1_S \Rightarrow y = z$ dla $x, y, z : S\_\mathrm{supp}$, gdzie $1_S := S\_\mathrm{unit}$;
(iii) $x = 0_S \vee y = 0_S \Rightarrow x \cdot_S y = 0_S$ dla $x, y : S\_\mathrm{supp}$, gdzie $0_S := S\_\mathrm{zero}$.

Definicja 10.5. Dla dowolnych $\mathcal{Z} : \underline{\mathrm{Univ}}$ i $S : \underline{\mathrm{ORing}}$, $\mathcal{Z}$ nazywa się:
(i) *operacją dodawania w* $S :\Leftrightarrow \mathcal{Z} = S\_\mathrm{add} := S\_\mathrm{op}(1)$;
(ii) *operacją mnożenia w* $S :\Leftrightarrow \mathcal{Z} = S\_\mathrm{mul} := S\_\mathrm{op}(2)$;
(iii) *zerem w* $S :\Leftrightarrow \mathcal{Z} = S\_\mathrm{zero}$;
(iv) *jedynką w* $S :\Leftrightarrow \mathcal{Z} = S\_\mathrm{unit}$;
(v) *operacją odejmowania w* $S :\Leftrightarrow$

$$\mathcal{Z} = S\_\mathrm{subtr} := \{x \mapsto y \,|\, x : (S\_\mathrm{supp})^2 \wedge y : S\_\mathrm{supp} \wedge x_1 = y +_S x_2\};$$

(vi) *operacją dzielenia w* $S :\Leftrightarrow$

$$\mathcal{Z} = S\_\mathrm{divis} := \{x \mapsto y \,|\, x : (S\_\mathrm{supp})^2 \wedge y : S\_\mathrm{supp} \wedge x_1 = y \cdot_S x_2\};$$

(vii) *operacją elementu odwrotnego względem dodawania w* $S :\Leftrightarrow$

$$\mathcal{Z} = S\_\mathrm{ainv} := \{x \mapsto y \,|\, x, y : S\_\mathrm{supp} \wedge y +_S x = S\_\mathrm{zero}\};$$

(viii) *operacją elementu odwrotnego względem mnożenia w* $S :\Leftrightarrow$

$$\mathcal{Z} = S\_\mathrm{minv} := \{x \mapsto y \,|\, x, y : S\_\mathrm{supp} \wedge y \cdot_S x = S\_\mathrm{unit}\};$$

(ix) *relacją porządku w* $S :\Leftrightarrow \mathcal{Z} = S\_\mathrm{ord} := S\_\mathrm{op}(3)$.

Definicja 10.6. Dla dowolnych $z : \underline{\mathrm{Univ}}$, $S : \underline{\mathrm{ORing}}$ i $x, y : S\_\mathrm{supp}$, z nazywa się:
(i) *sumą* x *i* y *w* $S :\Leftrightarrow z = x +_S y$ $\;/\!\!/ z = S\_\mathrm{add}((x\ y))/\!\!/$;
(ii) *iloczynem* x *i* y *w* $S :\Leftrightarrow z = x \cdot_S y$ $\;/\!\!/ z = S\_\mathrm{mul}((x\ y))/\!\!/$;
(iii) *różnicą* x *i* y *w* $S :\Leftrightarrow z : S\_\mathrm{supp}$ i $z +_S y = x$ $\;/\!\!/ z = S\_\mathrm{subtr}((x\ y))/\!\!/$;
(iv) *ilorazem* x *i* y *w* $S :\Leftrightarrow z : S\_\mathrm{supp}$ i $z \cdot_S y = x$ $\;/\!\!/ z = S\_\mathrm{divis}((x\ y))/\!\!/$;
(v) *elementem przeciwnym do* x *w* $S :\Leftrightarrow z : S\_\mathrm{supp}$ i $z +_S x = 0_S$ $\;/\!\!/ z = S\_\mathrm{ainv}(x)/\!\!/$;
(vi) *elementem odwrotnym do* x *w* $S :\Leftrightarrow z : S\_\mathrm{supp}$ i $z \cdot_S x = 1_S$ $\;/\!\!/ z = S\_\mathrm{minv}(x)/\!\!/$.

Ćwiczenie 10.7. Wykazać, że dla każdego $S : \underline{\mathrm{ORing}}$ mają miejsce następujące własności:

(i) $S\_\mathrm{ainv} : S\_\mathrm{supp} \xrightarrow[\mathrm{on}]{1-1} S\_\mathrm{supp}$;
(ii) $S\_\mathrm{ainv}(S\_\mathrm{ainv}(x)) = x$ dla $x : S\_\mathrm{supp}$;
(iii) $1_S : \underline{\mathrm{D}}(S\_\mathrm{ainv}) \subset S\_\mathrm{supp} \setminus \{0_S\}$;
(iv) $S\_\mathrm{minv} : \underline{\mathrm{D}}(S\_\mathrm{minv}) \xrightarrow[\mathrm{on}]{1-1} \underline{\mathrm{D}}(S\_\mathrm{minv})$;
(v) $S\_\mathrm{minv}(S\_\mathrm{minv}(x)) = x$ dla $x : \underline{\mathrm{D}}(S\_\mathrm{minv})$.

W celu zapewnienia równości $\underline{\mathrm{D}}(S\_\mathrm{minv}) = S\_\mathrm{supp} \setminus \{0_S\}$ w ćw. 10.7 wzmocnimy strukturę pierścienia uporządkowanego przez dodanie dodatkowego warunku.

Definicja 10.8. Dla dowolnego $\mathcal{Z} : \underline{\mathrm{Univ}}$, $\mathcal{Z}$ nazywa się *ciałem uporządkowanym* $:\Leftrightarrow \mathcal{Z} : \underline{\mathrm{ORing}}$ i zachodzi następujący warunek:
(II.4) dla każdego $x : A \setminus \{\bar{0}\}$ istnieje $y : A$ taki, że $x \bar{\cdot} y = \bar{1}$ $\;/\!\!/$istnienie elementu odwrotnego do x względem operacji $\mathcal{Z}\_\mathrm{op}(2)/\!\!/$,
gdzie $A := \mathcal{Z}\_\mathrm{supp}$, $\bar{0} := \mathcal{Z}\_\mathrm{zero}$ i $\bar{1} := \mathcal{Z}\_\mathrm{unit}$.

Klasę wszystkich ciał uporządkowanych będziemy oznaczać przez $\underline{\mathrm{OField}}$.

Uwaga 10.9. Porównując def. 10.2 i def. 10.8 widzimy, że $\underline{\mathrm{OField}} \subset \underline{\mathrm{ORing}}$. Zatem wszystkie pojęcia określone na gruncie pierścieni uporządkowanych obowiązują dla ciał uporządkowanych.

Twierdzenie 10.10. *Dla dowolnych* $S' : \underline{\mathrm{ORing}}$, $S'' : \underline{\mathrm{Str}}$ *i* $h : S''\_\mathrm{supp} \xrightarrow[on]{1-1} S'\_\mathrm{supp}$ *załóżmy, że* $\underline{\mathrm{D}}(S''\_\mathrm{op}) = \mathbb{N}_{1,3}$ *i*

$$S''\_\mathrm{op}(1) = \{x \mapsto y \,|\, x : (S''\_\mathrm{supp})^2 \wedge y : S''\_\mathrm{supp} \wedge h(y) = S'\_\mathrm{op}(1)(h \circ x)\},$$
$$S''\_\mathrm{op}(2) = \{x \mapsto y \,|\, x : (S''\_\mathrm{supp})^2 \wedge y : S''\_\mathrm{supp} \wedge h(y) = S'\_\mathrm{op}(2)(h \circ x)\},$$

oraz

$$S''\_\mathrm{op}(3) = \{x \mapsto y \,|\, x, y : S''\_\mathrm{supp} \wedge (h(x), h(y)) : S'\_\mathrm{op}(3)\}.$$

Wtedy S'' : $\underline{\mathrm{ORing}}$. *Co więcej, jeśli* S' : $\underline{\mathrm{OField}}$ *to* S'' : $\underline{\mathrm{OField}}$.

Ćwiczenie 10.11. Wykazać, że dla każdego S : $\underline{\mathrm{OField}}$ zachodzą następujące własności:

(i) $x \cdot_S y = 0_S \Leftrightarrow x = 0_S \vee y = 0_S$ dla $x, y : S\_\mathrm{supp}$;
(ii) $x \cdot_S y = x \cdot_S z \wedge x \neq 0_S \Rightarrow y = z$ dla $x, y, z : S\_\mathrm{supp}$;
(iii) $S\_\mathrm{divis} : \underline{\mathrm{Map}}$ i $\underline{\mathrm{D}}(S\_\mathrm{divis}) = \{x \,|\, x : (S\_\mathrm{supp})^2 \wedge x_2 \neq 0_S\}$;
(iv) $S\_\mathrm{minv} : S\_\mathrm{supp} \setminus \{0_S\} \xrightarrow[\text{on}]{1-1} S\_\mathrm{supp} \setminus \{0_S\}$;
(v) $S\_\mathrm{minv}(S\_\mathrm{minv}(x)) = x$ dla $x : S\_\mathrm{supp} \setminus \{0_S\}$.

11. Liczby całkowite

Skonstruujemy strukturę liczb całkowitych $\mathbb{Z}$-Str : $\underline{\mathrm{ORing}}$, która rozszerza strukturę $\mathbb{N}_0$-Str. Wyjściową strukturą naszych rozważań jest $S := \mathbb{N}_0$-Str. Przyjmijmy $x+y := S\_\mathrm{add}((x\ y))$, $x \cdot y := S\_\mathrm{mul}((x\ y))$ dla $x, y : S\_\mathrm{supp}$ $/\!\!/ = \mathbb{N}_0 /\!\!/$ i $\leqslant := S\_\mathrm{ord}$.

Ćwiczenie 11.1. Wykazać, że $(\mathbb{N}_0^2, R)$: $\underline{\mathrm{EqRel}}$, gdzie

$$R := \{x \mapsto y \,|\, x, y : \mathbb{N}_0^2 \wedge x_1 + y_2 = x_2 + y_1\}.$$

Ćwiczenie 11.2. Przyjmując $A := \mathbb{N}_0^2$ i $Q := (A, R)$, gdzie R jest relacją określoną w ćw. 11.1, wykazać, że:

$$T_1 := \Big\{x \mapsto y \,\Big|\, \bigvee_{a,b:A} \Big(x = ([a/Q]\ [b/Q]) \wedge y = [(a_1 + b_1\ a_2 + b_2)/Q]\Big)\Big\} : (A/Q)^2 \to A/Q,$$

$$T_2 := \Big\{x \mapsto y \,\Big|\, \bigvee_{a,b:A} \Big(x = ([a/Q]\ [b/Q]) \wedge y = [(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2\ a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)/Q]\Big)\Big\} : (A/Q)^2 \to A/Q$$

oraz $(A/Q, T_3)$: $\underline{\mathrm{LORel}}$, gdzie

$$T_3 := \Big\{x \mapsto y \,\Big|\, \bigvee_{a,b:A} \Big(x = [a/Q] \wedge y = [b/Q]\Big) \wedge a_1 + b_2 \leqslant a_2 + b_1\Big)\Big\}.$$

Twierdzenie 11.3. *Przy oznaczeniach* ćw. 11.2, $S' := (A/Q, (T_1\ T_2\ T_3))$: $\underline{\mathrm{ORing}}$. *Co więcej,* $S'\_\mathrm{zero} = [(0\ 0)/Q]$, $S'\_\mathrm{unit} = [(1\ 0)/Q]$ *i* $S'\_\mathrm{ainv}([x/Q]) = [(x_2\ x_1)/Q]$ *dla* $x : A$.

Uwaga 11.4. Przy oznaczeniach ćw. 11.2 definiujemy $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (A \setminus f(\mathbb{N}_0))$, gdzie

$$f := \{n \mapsto [(n\ 0)/Q] \,|\, n : \mathbb{N}_0\}.$$

Oczywiście $f : \mathbb{N}_0 \xrightarrow{1-1} A/Q$. Dlatego

$$h := f \cup \{x \mapsto y \,|\, x : A \setminus f(\mathbb{N}_0) \wedge y = x\} : \mathbb{Z} \xrightarrow[\text{on}]{1-1} A/Q.$$

Z tw. 11.3 wynika, że $S' := (A/Q, (T_1\ T_2\ T_3))$: $\underline{\mathrm{ORing}}$. Ponieważ $S'\_\mathrm{supp} = A/Q$, istnieje dokładnie jedna struktura S'' o nośniku $S''\_\mathrm{supp} = \mathbb{Z}$ i spełniająca założenia tw. 10.10. Tak więc tw. 10.10 implikuje, że S'' : $\underline{\mathrm{ORing}}$. Ponadto $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$ i struktura S'' jest zgodna z początkową strukturą S $/\!\!/ = \mathbb{N}_0$-Str$/\!\!/$ w tym sensie, że:

$$x + y = S''\_\mathrm{add}((x\ y)),\ x \cdot y = S''\_\mathrm{mul}((x\ y)) \quad \text{i} \quad x \leqslant y \Leftrightarrow (x, y) : S''\_\mathrm{ord} \quad \text{dla } x, y : \mathbb{N}_0.$$

Zatem struktura S'' rozszerza strukturę $\mathbb{N}_0$-Str. Ponadto dla każdego $n : \mathbb{N}$, $S''\_\mathrm{ainv}(n) = [(0\ n)/Q]$.

Definicja 11.5. Dla dowolnego $\mathcal{Z}$: $\underline{\mathrm{Univ}}$, $\mathcal{Z}$ nazywamy:

(i) *strukturą liczb całkowitych* $:\Leftrightarrow \mathcal{Z} = \mathbb{Z}$-Str $:= S''$, gdzie S'' jest pierścieniem uporządkowanym opisanym w uw. 11.4;
(ii) *klasą liczb całkowitych* $:\Leftrightarrow \mathcal{Z} = \mathbb{Z}$, gdzie $\mathbb{Z}$ jest klasą zdefiniowaną w uw. 11.4;
(iii) *liczbą całkowitą* $:\Leftrightarrow \mathcal{Z} : \mathbb{Z}$.

Ćwiczenie 11.6. Wykazać, że dla każdego $n : \mathbb{Z}$,

$$n : \mathbb{N} \vee n = 0 \vee \mathbb{Z}\text{-Str}\_\mathrm{ainv}(n) : \mathbb{N}.$$

Ćwiczenie 11.7. Wykazać, że dla każdego $p : \mathbb{N}_0$ zachodzą następujące równości:

$$\mathbb{Z} = \Big\{x \,\Big|\, \bigvee_{n,m:\mathbb{N}_p} x = \mathbb{Z}\text{-Str}\_\mathrm{subtr}((n\ m))\Big\}.$$

12. Liczby wymierne

Ponieważ $\mathbb{Z}$-Str : $\underline{\text{ORing}} \setminus \underline{\text{OField}}$, więc skonstruujemy teraz strukturę liczb wymiernych $\mathbb{Q}$-Str : $\underline{\text{OField}}$, która rozszerza strukturę $\mathbb{Z}$-Str. Wyjściową strukturą jest teraz $S := \mathbb{Z}\text{-Str}$. Przyjmijmy $x + y := S\_\text{add}((x\ y))$, $x \cdot y := S\_\text{mul}((x\ y))$ dla $x, y : S\_\text{supp}\ \ /\!\!/\!= \mathbb{Z}/\!\!/$ i $\leqslant := S\_\text{ord}$.

Ćwiczenie 12.1. Wykazać, że $(A, R) : \underline{\text{EqRel}}$, gdzie $A := \{x \mid x : \mathbb{Z}^2 \wedge x_2 : \mathbb{N}\}$ i

$$R := \{x \mapsto y \mid x, y : A \wedge x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1\}.$$

Ćwiczenie 12.2. Przyjmując $Q := (A, R)$, gdzie A i R są zdefiniowane w ćw. 11.1, wykazać, że:

$$T_1 := \Big\{x \mapsto y \Big| \bigvee_{a,b:A} \Big(x = ([a/Q]\ [b/Q]) \wedge y = [(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1\ a_2 \cdot b_2)/Q]\Big)\Big\} : (A/Q)^2 \to A/Q,$$

$$T_2 := \Big\{x \mapsto y \Big| \bigvee_{a,b:A} \Big(x = ([a/Q]\ [b/Q]) \wedge y = [(a_1 \cdot b_1\ a_2 \cdot b_2)/Q]\Big)\Big\} : (A/Q)^2 \to A/Q$$

oraz $(A/Q, T_3) : \underline{\text{LORel}}$, gdzie

$$T_3 := \Big\{x \mapsto y \Big| \bigvee_{a,b:A} \Big(x = [a/Q] \wedge y = [b/Q]\Big) \wedge a_1 \cdot b_2 \leqslant a_2 \cdot b_1\Big)\Big\}.$$

Twierdzenie 12.3. *Przy oznaczeniach* Ex. 12.2, $S' := (A/Q, (T_1\ T_2\ T_3)) : \underline{\text{OField}}$. *Co więcej,* $S'\_\text{zero} = [(0\ 1)/Q]$, $S'\_\text{unit} = [(1\ 1)/Q]$ *i* $S'\_\text{minv}([x/Q]) = [(x_2\ x_1)/Q]$ *dla* $x : A \setminus \{[(0\ 1)/Q]\}$.

Uwaga 12.4. Przy oznaczeniach ćw. 12.2 definiujemy $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \cup (A \setminus f(\mathbb{Z}))$, gdzie

$$f := \{n \mapsto [(n\ 1)/Q] \mid n : \mathbb{Z}\}.$$

Oczywiście $f : \mathbb{Z} \xrightarrow{1-1} A/Q$. Dlatego

$$h := f \cup \{x \mapsto y \mid x : A \setminus f(\mathbb{Z}) \wedge y = x\} : \mathbb{Q} \xrightarrow[\text{on}]{1-1} A/Q.$$

Z tw. 12.3 wynika, że $S' := (A/Q, (T_1\ T_2\ T_3)) : \underline{\text{OField}}$. Ponieważ $S'\_\text{supp} = A/Q$, istnieje dokładnie jedna struktura S'' o nośniku $S''\_\text{supp} = \mathbb{Q}$ i spełniająca założenia tw. 10.10. Zatem tw. 10.10 implikuje, że $S'' : \underline{\text{OField}}$. Ponadto $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ i struktura S'' jest zgodna ze strukturą początkową $S\ \ /\!\!/\!= \mathbb{Z}\text{-Str}/\!\!/$ w tym senie, że:

$$x + y = S''\_\text{add}((x\ y)),\ x \cdot y = S''\_\text{mul}((x\ y)) \quad \text{i} \quad x \leqslant y \Leftrightarrow (x, y) : S''\_\text{ord} \quad \text{dla } x, y : \mathbb{Z}.$$

Dlatego struktura S'' rozszerza strukturę $\mathbb{Z}$-Str. Ponadto dla każdego $n : \mathbb{N}$, $S''\_\text{minv}(n) = [(1\ n)/Q]$ i $S''\_\text{minv}(-n) = [(-1\ n)/Q]$, gdzie $-t := S\_\text{minv}(t)$ dla $t : \mathbb{Z}$.

Definicja 12.5. Dla dowolnego $Z\!\!\!/ : \underline{\text{Univ}}$, $Z\!\!\!/$ nazywa się:

(i) *strukturą liczb wymiernych* $:\Leftrightarrow Z\!\!\!/ = \mathbb{Q}\text{-Str} := S''$, gdzie S'' jest ciałem uporządkowanym opisanym w uw. 12.4;
(ii) *klasą liczb wymiernych* $:\Leftrightarrow Z\!\!\!/ = \mathbb{Q}$, gdzie $\mathbb{Q}$ jest klasą zdefiniowaną w uw. 12.4;
(iii) *liczbą wymierną* $:\Leftrightarrow Z\!\!\!/ : \mathbb{Q}$.

Ćwiczenie 12.6. Wykazać następujące równości

$$\mathbb{Q} = \Big\{x \Big| \bigvee_{n:\mathbb{Z}} \bigvee_{m:\mathbb{N}} x = \mathbb{Q}\text{-Str}\_\text{divis}((n\ m))\Big\} = \Big\{x \Big| \bigvee_{n:\mathbb{Z}} \bigvee_{m:\mathbb{Z}\setminus\{0\}} x = \mathbb{Q}\text{-Str}\_\text{divis}((n\ m))\Big\}.$$

13. Liczby rzeczywiste

Wyjściową strukturą jest teraz $S := \mathbb{Q}\text{-Str}$. Przyjmijmy $x + y := S\_\text{add}((x\ y))$, $x \cdot y := S\_\text{mul}((x\ y))$ dla $x, y : S\_\text{supp}\ \ /\!\!/\!= \mathbb{Q}/\!\!/$ i $\leqslant := S\_\text{ord}$. Mając do dyspozycji strukturę liczb wymiernych S można rozwiązać każde równanie postaci $a \cdot x + b = c$ z niewiadomą $x : \mathbb{Q}$ dla zadanych $a, b, c : \mathbb{Q}$ takich, że $a \neq 0$. Jednak w dalszym ciągu nie można na ogół rozwiązać równań postaci $x \cdot x = a$ zmiennej $x : \mathbb{Q}$ dla zadanego $a : \mathbb{Q}$ takiego, że $0 \leqslant a$. W szczególności nie istnieje $x : \mathbb{Q}$ spełniający równość $x \cdot x = 2$. Ażeby rozwiązać ten problem rozszerzymy strukturę S do struktury liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$-Str : $\underline{\text{OField}}$, która ma silniejsze własności niż struktura S.

Ćwiczenie 13.1. Niech $\mathbb{Q}_+$ będzie klasą liczb wymiernych dodatnich, tzn., $\mathbb{Q}_+ := \{x \,|\, x : \mathbb{Q} \wedge 0 \leqslant x \neq 0\}$. Przyjmując

$$-t := \mathbb{Q}\text{-Str}\,\_\,\mathrm{ainv}(t) \text{ and } |t| := (\mathbb{Q}, \leqslant)\_\max(\{t, -t\}) \quad \text{for } t : \mathbb{Q};$$
$$s - t := s + (-t) = \mathbb{Q}\text{-Str}\,\_\,\mathrm{subtr}((s\ t)) \quad \text{for } s, t : \mathbb{Q}$$

wykazać, że $(\mathbb{N} \to \mathbb{Q}, R)$: $\underline{\mathrm{EqRel}}$, gdzie

$$R := \Big\{x \mapsto y \,\Big|\, x, y : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \wedge \bigwedge_{\varepsilon:\mathbb{Q}_+} \bigvee_{p:\mathbb{N}} \bigwedge_{n:\mathbb{N}_p} |x_n - y_n| \leqslant \varepsilon\Big\}.$$

Tu i w dalszym ciągu $f_n := f(n)$ dla wszystkich $f : \mathbb{N} \to \underline{\mathrm{Univ}}$ i $n : \mathbb{N}$.

Ćwiczenie 13.2. Niech R będzie relacją zdefiniowaną w ćw. 13.1 i niech $Q := (\mathbb{N} \to \mathbb{Q}, R)$. Określając

$$A := \Big\{x \,\Big|\, x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \wedge \bigwedge_{\varepsilon:\mathbb{Q}_+} \bigvee_{p:\mathbb{N}} \bigwedge_{n,m:\mathbb{N}_p} |x_n - x_m| \leqslant \varepsilon\Big\}$$

wykazać, że:

(i) $[x/Q] \subset A$ dla $x : A$;
(ii) $x \bar{+} y : A$ dla $x, y : A$;
(iii) $x \bar{\cdot} y : A$ dla $x, y : A$,

gdzie

$$f \bar{+} g := \{n \mapsto f_n + g_n \,|\, n : \mathbb{N}\} \quad \text{i} \quad f \bar{\cdot} g := \{n \mapsto f_n \cdot g_n \,|\, n : \mathbb{N}\} \quad \text{dla } n : \mathbb{N}.$$

Ćwiczenie 13.3. Niech Q i R będą zdefiniowane tak jak w ćw. 13.2. Wykazać, że:

$$T_1 := \Big\{x \mapsto y \,\Big|\, \bigvee_{a,b:A} \Big(x = ([a/Q]\ [b/Q]) \wedge y = [a \bar{+} b/Q]\Big)\Big\} : (A/Q)^2 \to A/Q,$$
$$T_2 := \Big\{x \mapsto y \,\Big|\, \bigvee_{a,b:A} \Big(x = ([a/Q]\ [b/Q]) \wedge y = [a \bar{\cdot} b/Q]\Big)\Big\} : (A/Q)^2 \to A/Q$$

oraz $(A/Q, T_3)$: $\underline{\mathrm{LORel}}$, gdzie

$$T_3 := \Big\{x \mapsto y \,\Big|\, \bigvee_{a,b:A} \Big(x = [a/Q] \wedge y = [b/Q] \wedge \bigwedge_{\varepsilon:\mathbb{Q}_+} \bigvee_{p:\mathbb{N}} \bigwedge_{n:\mathbb{N}_p} a_n \leqslant b_n + \varepsilon\Big)\Big\}.$$

Twierdzenie 13.4. *Przy oznaczeniach* ćw. 13.3, $S' := (A/Q, (T_1\ T_2\ T_3))$: $\underline{\mathrm{OField}}$. *Co więcej,* $S'\_\mathrm{zero} = [\{n \mapsto 0 \,|\, n : \mathbb{N}\}/Q]$, $S'\_\mathrm{unit} = [\{n \mapsto 1 \,|\, n : \mathbb{N}\}/Q]$ *i* $S'\_\mathrm{ainv}([x/Q]) = [\{n \mapsto -x_n \,|\, n : \mathbb{N}\}/Q]$ *dla* $x : A$.

Uwaga 13.5. Przy założeniach ćw. 13.2 definiujemy $\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup (A \setminus f(\mathbb{Q}))$, gdzie

$$f := \{x \mapsto [\{n \mapsto x \,|\, n : \mathbb{N}\}/Q] \,|\, x : \mathbb{Q}\}.$$

Oczywiście $f : \mathbb{Q} \xrightarrow{1-1} A/Q$. Dlatego,

$$h := f \cup \{x \mapsto y \,|\, x : A \setminus f(\mathbb{Q}) \wedge y = x\} : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{on}]{1-1} A/Q.$$

Z tw. 13.4 wynika, że $S' := (A/Q, (T_1\ T_2\ T_3))$: $\underline{\mathrm{OField}}$. Ponieważ $S'\_\mathrm{supp} = A/Q$, istnieje dokładnie jedna struktura S'' o nośniku $S''\_\mathrm{supp} = \mathbb{R}$ i spełniającą założenia tw. 10.10. Zatem tw. 10.10 implikuje, że S'' : $\underline{\mathrm{OField}}$. Ponadto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ i struktura S'' jest zgodna z początkową strukturą S $/\!\!/= \mathbb{Z}\text{-Str}/\!\!/$ w takim sensie, że:

$$x + y = S''\_\mathrm{add}((x\ y)),\ x \cdot y = S''\_\mathrm{mul}((x\ y)) \quad \text{i} \quad x \leqslant y \Leftrightarrow (x, y) : S''\_\mathrm{ord} \quad \text{dla } x, y : \mathbb{Q}.$$

To oznacza, że struktura S'' jest rozszerzeniem struktury $\mathbb{Q}$-Str.

Definicja 13.6. Dla dowolnego Z : $\underline{\mathrm{Univ}}$, Z nazywa się:

(i) *strukturą liczb rzeczywistych* $:\Leftrightarrow Z = \mathbb{R}\text{-Str} := S''$, gdzie S'' jest ciałem uporządkowanym opisanym w uw. 13.5;
(ii) *klasą liczb rzeczywistych* $:\Leftrightarrow Z = \mathbb{R}$, gdzie $\mathbb{R}$ jest klasą zdefiniowaną w uw. 13.5;
(iii) *liczbą rzeczywistą* $:\Leftrightarrow Z : \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 13.7. Wykazać, że dla każdego $x : \mathbb{R}$ istnieje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ taki, że

$$\bigwedge_{\varepsilon:\mathbb{Q}_+} \bigvee_{p:\mathbb{N}} \bigwedge_{n:\mathbb{N}_p} |a_n - x| \leqslant \varepsilon.$$

Zgodnie z uwagami 13.5, 12.4 i 11.4 struktura $S := \mathbb{R}$-Str rozszerza każdą ze struktur $\mathbb{Q}$-Str, $\mathbb{Z}$-Str i $\mathbb{N}_0$-Str. Z tego względu możemy przedefiniować dotychczas używane symbole operatorów arytmetycznych i relacji porządku jak następuje: $x + y := S\_\mathrm{add}((x\ y))$, $x - y := S\_\mathrm{subtr}((x\ y))$, $x \cdot y := S\_\mathrm{mul}((x\ y))$ i $x \leqslant y :\Leftrightarrow (x, y) : S\_\mathrm{ord}$ dla $x, y : \mathbb{R}$, $x/y := S\_\mathrm{divis}((x\ y))$ dla $x : \mathbb{R}$ i $y : \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $-x := S\_\mathrm{ainv}(x)$ dla $x : \mathbb{R}$. A uwagi na zgodność struktury $\mathbb{R}$-Str ze strukturami $\mathbb{Q}$-Str, $\mathbb{Z}$-Str i $\mathbb{N}_0$-Str poprzednie znaczenie tych symboli jest zachowane. Ponadto przyjmujemy $x^2 := x \cdot x$ dla $x : \mathbb{R}$ oraz ”$x < y$” := ”$x \leqslant y \wedge x \neq y$”, ”$x \geqslant y$” := ”$y \leqslant x$” i ”$x > y$” := ”$y < x$” dla $x, y : \underline{\mathrm{Var}}$.

Na mocy uw. 13.5, $\mathbb{R}$-Str : $\underline{\mathrm{OField}}$. Co więcej, struktura $\mathbb{R}$-Str ma bardzo istotną dodatkową własność, która pełni fundamentalną rolę w analizie matematycznej. Ta własność jest zazwyczaj nazywana *warunkiem ciągłości struktury* $\mathbb{R}$-Str i jest opisana w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 13.8. *Dla każdego $A : \underline{\mathrm{PClass}}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$ zachodzi następująca implikacja:*

$$\bigvee_{M:\mathbb{R}} \bigwedge_{x:A} x \leqslant M \Rightarrow (\mathbb{R}, \leqslant)\_\mathrm{sup}(A) \neq \underline{\mathrm{null}}\,.$$

//Innymi słowy każda niepusta podklasa klasy $\mathbb{R}$ i ograniczona od góry posiada kres górny (supremum).//

Wniosek 13.9. *Dla każdego $A : \underline{\mathrm{PClass}}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$ zachodzi następująca implikacja:*

$$\bigvee_{M:\mathbb{R}} \bigwedge_{x:A} x \geqslant M \Rightarrow (\mathbb{R}, \leqslant)\_\mathrm{inf}(A) \neq \underline{\mathrm{null}}\,.$$

//Innymi słowy każda niepusta podklasa klasy $\mathbb{R}$ i ograniczona od dołu posiada kres dolny (infimum).//

Uwaga 13.10. Zauważmy, że tw. 13.8 i wn. 13.9 nie są prawdziwe z zastąpieniem klasy $\mathbb{R}$ przez klasę $\mathbb{Q}$. Przyjmując na przykład $A := \{x \,|\, x : \mathbb{Q} \wedge x^2 \leqslant 2\}$ widzimy, że $(\mathbb{Q}, \leqslant)\_\mathrm{sup}(A) = \underline{\mathrm{null}}$ i $(\mathbb{Q}, \leqslant)\_\mathrm{inf}(A) = \underline{\mathrm{null}}$, ponieważ nie istnieje $x : \mathbb{Q}$ spełniający równość $x^2 = 2$. Dlatego struktura liczb wymiernych $\mathbb{Q}$-Str nie spełnia warunku ciągłości. Z drugiej strony, z tw. 13.8 wynika, że dla każdego $a : \mathbb{R}$, jeśli $a > 0$ to istnieje

$$b := (\mathbb{R}, \leqslant)\_\mathrm{sup}(\{x \,|\, x : \mathbb{R} \wedge x^2 \leqslant a\}) : \mathbb{R}.$$

Można wykazać, że $b^2 = a$, i tym samym b jest rozwiązaniem równania $x^2 = a$ z niewiadomą $x : \mathbb{R}$.