17. Liczby kardynalne

Ważnym przykładem zastosowań relacji równoważności jest pojęcie równoliczności klas określone w następujący sposób.

Definicja 17.1. Dla każdego $\mathcal{Z}$: $\underline{\mathrm{Univ}}$, $\mathcal{Z}$ nazywamy *relacją równoliczności klas* :⇔ $\mathcal{Z} = \simeq$, gdzie

$$\simeq := \{A \mapsto B | A, B : \underline{\mathrm{Class}} \wedge \bigvee_f f : A \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} B\}. \tag{17.2}$$

Definicja 17.3. Dla dowolnych $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}'$: $\underline{\mathrm{Univ}}$, $\mathcal{Z}$ nazywamy *klasą równoliczną z klasą* $\mathcal{Z}'$ (alt. mówimy, że $\mathcal{Z}$ *i* $\mathcal{Z}'$ *są klasami równolicznymi*) :⇔ $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}' : \underline{\mathrm{Class}}$ i $\mathcal{Z} \simeq \mathcal{Z}'$.

Z aks. C2 wnioskujemy, że

$$\mathrm{id} := \{x \mapsto y | y = x\} : \underline{\mathrm{Map}} \tag{17.4}$$

Stąd $\underline{\mathrm{D}}(\mathrm{id}) = \underline{\mathrm{C\!I}}(\mathrm{id}) = \underline{\mathrm{Univ}}$.

Definicja 17.5. Dla każdego $\mathcal{Z}$: $\underline{\mathrm{Univ}}$, $\mathcal{Z}$ nazywamy *odwzorowaniem identycznościowym* :⇔ $\mathcal{Z} = \mathrm{id}$.

Ćwiczenie 17.6. Wykazać, że dla dowolnych $A, B, C : \underline{\mathrm{Class}}$ zachodzą własności:

(i) $\mathrm{id}|_A : A \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} A$;

(ii) $f : A \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} B \Rightarrow f^{-1} : B \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} A$ dla $f : \underline{\mathrm{Map}}$;

(iii) $f : A \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} B \wedge g : B \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} C \Rightarrow g \circ f : A \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} C$ dla $f, g : \underline{\mathrm{Map}}$;

Uwaga 17.7. Z ćw. 17.6 oraz wzoru (17.2) wynika, że:

(i) $A \simeq A$ dla $A : \underline{\mathrm{Class}}$;

(ii) $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$ dla $A, B : \underline{\mathrm{Class}}$;

(ii) $A \simeq B \wedge B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$ dla $A, B, C : \underline{\mathrm{Class}}$.

Stąd na podstawie def. 16.1 widzimy, że $\simeq$ jest relacją równoważności w klasie $\underline{\mathrm{Class}}$, czyli $(\underline{\mathrm{Class}}, \simeq) : \underline{\mathrm{EqRel}}$.

Za pomocą struktury $(\underline{\mathrm{Class}}, \simeq)$ definiujemy liczby kardynalne w następujący sposób.

Definicja 17.8. Dla dowolnego $\mathfrak{z}$: $\underline{\mathrm{Univ}}$, $\mathfrak{z}$ nazywamy *liczbą kardynalna* :⇔ $\mathfrak{z} : \underline{\mathrm{Card}} := \underline{\mathrm{Class}}/(\underline{\mathrm{Class}}, \simeq)$. //Innymi słowy liczba kardynalna reprezentuje rodzinę klas równolicznych.//

Definicja 17.9. Dla dowolnych $\mathfrak{z}$: $\underline{\mathrm{Univ}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, $\mathfrak{z}$ nazywamy *mocą* (alt. *liczebnością*) *klasy* A :⇔ $\mathfrak{z} = \overline{\overline{A}} := [A/(\underline{\mathrm{Class}}, \simeq)]$.

Uwaga 17.10. Korzystając z uw. 17.7 i uw. 16.10 możemy zdefiniować funkcję

$$\mathrm{card} := (\underline{\mathrm{Class}}, \simeq)\_\mathrm{qmap} : \underline{\mathrm{Class}} \xrightarrow{\text{on}} \underline{\mathrm{Class}}/(\underline{\mathrm{Class}}, \simeq).$$

Stąd i z def. 17.9 widzimy, że dla każdej klasy A,

$$A\_\mathrm{card} = \mathrm{card}(A) = (\underline{\mathrm{Class}}, \simeq)\_\mathrm{qmap}(A) = [A/(\underline{\mathrm{Class}}, \simeq)] = \overline{\overline{A}},$$

czyli A_card jest mocą (alt. liczebnością) klasy A.

Definicja 17.11. Dla dowolnego $\mathcal{Z}$: $\underline{\mathrm{Univ}}$, $\mathcal{Z}$ nazywamy:

(i) *zerem* (alt. *liczbą zero*) :⇔ $\mathcal{Z} = 0 := \overline{\overline{\varnothing}}$;

(ii) *jedynką* (alt. *liczbą jeden*) :⇔ $\mathcal{Z} = 1 := \overline{\overline{\{\varnothing\}}}$.

Ćwiczenie 17.12. Wykazać, że $0 = \{\varnothing\}$ oraz $1 = \{L | \bigvee_x L = \{x\}\}$. Ponadto wykazać, że $0 \neq 1$.

Definicja 17.13. Dla dowolnego $\mathcal{Z}$: $\underline{\mathrm{Univ}}$, $\mathcal{Z}$ nazywamy:

(i) *dodawaniem* (alt. *operacją dodawania*) *liczb kardynalnych* :⇔

$$Z = \mathrm{cadd} := \{x \mapsto y | \bigvee_{A,B:\underline{\mathrm{Class}}} (x = (\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}) \wedge A \cap B = \varnothing \wedge y = \overline{\overline{A \cup B}})\};$$

(ii) *mnożeniem* (alt. *operacją mnożenia*) *liczb kardynalnych* :⇔

$$Z = \mathrm{cmul} := \{x \mapsto y | \bigvee_{A,B:\underline{\mathrm{Class}}} (x = (\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}}) \wedge y = \overline{\overline{A \times B}})\};$$

(iii) *porządkiem* (alt. *relacją porządku*) *liczb kardynalnych* :⇔

$$Z = \mathrm{cord} := \{x \mapsto y | \bigvee_{A,B:\underline{\mathrm{Class}}} (x = \overline{\overline{A}} \wedge y = \overline{\overline{B}} \wedge A \subset B)\}.$$

Ćwiczenie 17.14. Wykazać, że cadd : $\underline{\mathrm{Card}} \times \underline{\mathrm{Card}} \to \underline{\mathrm{Card}}$, cmul : $\underline{\mathrm{Card}} \times \underline{\mathrm{Card}} \to \underline{\mathrm{Card}}$ oraz cord jest relacją zwrotną i przechodnią w klasie $\underline{\mathrm{Card}}$ //def. 15.1 (i), (iii)//.

Definicja 17.15. Dla dowolnych Z : $\underline{\mathrm{Univ}}$ i x, y : $\underline{\mathrm{Card}}$, Z nazywamy:

(i) *sumą liczb kardynalnych x i y* :⇔ $Z = (x, y)\_\mathrm{cadd}$;
(ii) *iloczynem liczb kardynalnych x i y* :⇔ $Z = (x, y)\_\mathrm{cmul}$.

W celu uproszczenia notacji przyjmujemy:

$$\text{"}\, x + y \,\text{"} := \text{"}\, (x, y)\_\mathrm{cadd} \,\text{"}, \text{"}\, x \cdot y \,\text{"} := \text{"}\, (x, y)\_\mathrm{cmul} \,\text{"}, \text{"}\, x \leqslant y \,\text{"} := \text{"}\, (x, y) : \mathrm{cord} \,\text{"},$$

$$\text{"}\, x < y \,\text{"} := \text{"}\, x \leqslant y \wedge x \neq y \,\text{"}, \text{"}\, x \geqslant y \,\text{"} := \text{"}\, y \leqslant x \,\text{"} \text{ i } \text{"}\, x > y \,\text{"} := \text{"}\, y < x \,\text{"} \text{ dla } x, y : \underline{\mathrm{Var}}\,.$$

Zatem wyrażenia $x + y$ i $x \cdot y$ oznaczają odpowiednio wyniki dodawania i mnożenia liczb kardynalnych x i y. Ponadto przyjmujemy, że

(i) mnożenie ma wyższy priorytet niż dodawanie //czyli jest wykonywane jako pierwsze//;
(ii) oba działania mają wyższy priorytet niż symbole relacyjne, w szczególności symbole $=, \leqslant, \geqslant, <, >$.
(iii) w przypadku braku nawiasów grupujących dla operacji o tym samym priorytecie decyduje kolejność od lewej do prawej strony wyrażenia.

Uwaga 17.16. Z def. 17.13 wynika, że dla dowolnych A, B : $\underline{\mathrm{Class}}$ zachodzą własności:

(i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}}$;
(ii) $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}$;
(iii) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$.

Twierdzenie 17.17. *Dla dowolnych a, b, c : $\underline{\mathrm{Card}}$ mają miejsce własności:*

(i) $a + 0 = a \wedge a \cdot 0 = 0 \wedge a \cdot 1 = a$;
(ii) $a + b = b + a$ *//przemienność dodawania//;*
(iii) $(a + b) + c = a + (b + c)$ *//łączność dodawania//;*
(iv) $a \cdot b = b \cdot a$ *//przemienność mnożenia//;*
(v) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *//łączność mnożenia//;*
(vi) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *//rozdzielność mnożenia względem dodawania//.*

Dowód. Ustalmy dowolnie a, b, c : $\underline{\mathrm{Card}}$. Wtedy mają miejsce równości $a = \overline{\overline{A}}$, $b = \overline{\overline{B}}$ i $c = \overline{\overline{C}}$ dla pewnych A, B, C : $\underline{\mathrm{Class}}$.
Ad (i). Ponieważ $A \cap \varnothing = \varnothing$, więc na mocy uwagi 17.16(i),

$$a + 0 = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{\varnothing}} = \overline{\overline{A \cup \varnothing}} = \overline{\overline{A}} = a.$$

Z uwagi 17.16(ii) dostajemy

$$a \cdot 0 = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{\varnothing}} = \overline{\overline{A \times \varnothing}} = \overline{\overline{\varnothing}} = 0 \quad \text{oraz} \quad a \cdot 1 = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{\{\varnothing\}}} = \overline{\overline{A \times \{\varnothing\}}} = \overline{\overline{A}} = a,$$

gdyż $f := \{x \mapsto y | x : A \wedge y = (x, \varnothing)\} : A \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} A \times \{\varnothing\}$ //czyli $A \times \{\varnothing\} \simeq A$//. To dowodzi własności (i).
Ad (ii). Przyjmując $A' := A \times \{0\}$ i $B' := B \times \{1\}$ stwierdzamy na mocy ćw. 17.12 //$0 \neq 1$//, że $A' \cap B' = \varnothing$. Ponadto $A' \simeq A$ i $B' \simeq B$, gdyż $f_0 := \{x \mapsto y | x : A \wedge y = (x, 0)\} : A \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} A'$ and $f_1 := \{x \mapsto y | x : B \wedge y = (x, 1)\} : B \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} B'$. Stąd $a = \overline{\overline{A'}}$ i $b = \overline{\overline{B'}}$, i korzystając z uwagi 17.16 (i) mamy

$$a + b = \overline{\overline{A'}} + \overline{\overline{B'}} = \overline{\overline{A' \cup B'}} = \overline{\overline{B' \cup A'}} = \overline{\overline{B'}} + \overline{\overline{A'}} = b + a,$$

co dowodzi własności (ii).
Ad (iii). Przyjmując $A'' := A' \times \{0\}$, $B'' := B' \times \{0\}$ i $C'' := C \times \{1\}$ stwierdzamy na mocy ćw. 17.12 //$0 \neq 1$//, że

$$A'' \cap B'' = A'' \cap C'' = B'' \cap C'' = \varnothing.$$

Ponadto, $A'' \simeq A'$, $B'' \simeq B'$ and $C'' \simeq C$ //por. dowód wł. (ii)//. Korzystając z uwagi 17.16 (i) dostajemy

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= \left(\overline{\overline{A''}} + \overline{\overline{B''}}\right) + \overline{\overline{C''}} = \overline{\overline{A'' \cup B''}} + \overline{\overline{C''}} = \overline{\overline{(A'' \cup B'') \cup C''}} = \overline{\overline{A'' \cup (B'' \cup C'')}} \\ &= \overline{\overline{A''}} + \overline{\overline{B'' \cup C''}} = \overline{\overline{A''}} + (\overline{\overline{B''}} + \overline{\overline{C''}}) = a + (b + c),\end{aligned}$$

co dowodzi własności (iii).
Ad (iv). Ponieważ $\left\{x \mapsto y \,\middle|\, \bigvee_{u:A} \bigvee_{v:B} (x = (u, v) \wedge y = (v, u))\right\} : A \times B \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} B \times A$, więc $A \times B \simeq B \times A$. Stąd i z uwagi. 17.16 (ii) dostajemy

$$a \cdot b = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}} = \overline{\overline{B \times A}} = \overline{\overline{B}} \cdot \overline{\overline{A}} = b \cdot a,$$

co dowodzi wł. (iv).
Ad (v). Ponieważ,

$$\left\{x \mapsto y \,\middle|\, \bigvee_{u:A} \bigvee_{v:B} \bigvee_{w:C} (x = ((u, v), w) \wedge y = (u, (v, w)))\right\} : (A \times B) \times C \xrightarrow[\text{on}]{\text{1-1}} A \times (B \times C),$$

więc $(A \times B) \times C \simeq A \times (B \times C)$. Stąd na mocy uwagi 17.16 (ii),

$$(a \cdot b) \cdot c = (\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}}) \cdot \overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A \times B}} \cdot \overline{\overline{C}} = \overline{\overline{(A \times B) \times C}} = \overline{\overline{A \times (B \times C)}} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B \times C}} = \overline{\overline{A}} \cdot (\overline{\overline{B}} \cdot \overline{\overline{C}}) = a \cdot (b \cdot c),$$

co dowodzi wł. (v).
Ad (vi). Ponieważ $b = \overline{\overline{B''}}$, $c = \overline{\overline{C''}}$ i $B'' \cap C'' = \varnothing$, więc na mocy uwagi 17.16 (i), (ii) dostajemy

$$\begin{aligned}a \cdot (b + c) &= \overline{\overline{A}} \cdot (\overline{\overline{B''}} + \overline{\overline{C''}}) = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B'' \cup C''}} = \overline{\overline{A \times (B'' \cup C'')}} = \overline{\overline{(A \times B'') \cup (A \times C'')}} \\ &= \overline{\overline{A \times B''}} + \overline{\overline{A \times C''}} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B''}} + \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{C''}} = a \cdot b + a \cdot c,\end{aligned}$$

co dowodzi wł. (vi), i tym samym kończy dowód twierdzenia. □

Ćwiczenie 17.18. Wykazać, że dla dowolnych A, B : Class następujące warunki są parami równoważne:

(i) $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$;
(ii) istnieje $f : A \xrightarrow{\text{1-1}} B$;
(iii) istnieje $g : B \xrightarrow{\text{on}} A$;
(iv) $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{C}}$ dla pewnego C : Class.

Ćwiczenie 17.19. Wykazać, że dla dowolnych a, b : Card zachodzą równoważności:

(i) $a + 1 = b + 1 \Leftrightarrow a = b$;
(ii) $a + 1 \leqslant b + 1 \Leftrightarrow a \leqslant b$;
(iii) $a + 1 < b + 1 \Leftrightarrow a < b$.

Ćwiczenie 17.20. Wykazać, że dla dowolnego $a : \underline{\mathrm{Card}}\setminus\{0\}$ istnieje $b : \underline{\mathrm{Card}}$ taki, że $a = b+1$.

Ćwiczenie 17.21. Wykazać, że dla każdego $a : \underline{\mathrm{Card}}$, $a = 0$ lub $a \geqslant 1$.

Ćwiczenie 17.22. Wykazać, że dla dowolnych $a, b, c, d : \underline{\mathrm{Card}}$ zachodzą implikacje:

(i) $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$;
(ii) $a \leqslant b \Rightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot c$;
(iii) $a \leqslant b \wedge c \leqslant d \Rightarrow a + c \leqslant b + d$;
(iv) $a \leqslant b \wedge c \leqslant d \Rightarrow a \cdot c \leqslant b \cdot d$.

Definicja 17.23. Dla każdego $Z : \underline{\mathrm{Univ}}$, Z nazywamy:

(i) *liczbą dwa* $:\Leftrightarrow Z = 2 := 1 + 1$;
(ii) *liczbą trzy* $:\Leftrightarrow Z = 3 := 2 + 1$;
(iii) *liczbą cztery* $:\Leftrightarrow Z = 4 := 3 + 1$;
(iv) *liczbą pięć* $:\Leftrightarrow Z = 5 := 4 + 1$;
(v) *liczbą sześć* $:\Leftrightarrow Z = 6 := 5 + 1$;
(vi) *liczbą siedem* $:\Leftrightarrow Z = 7 := 6 + 1$;
(vii) *liczbą osiem* $:\Leftrightarrow Z = 8 := 7 + 1$;
(viii) *liczbą dziewięć* $:\Leftrightarrow Z = 9 := 8 + 1$;

Ćwiczenie 17.24. Wykazać, że $0 < 1, 1 < 2, 2 < 3, 3 < 4, 4 < 5, 5 < 6, 6 < 7, 7 < 8$ i $8 < 9$.

Korzystając z relacji $\simeq$ możemy dokonać podziału wszystkich klas na klasy nieskończone i klasy skończone.

Definicja 17.25. Dla dowolnego $Z : \underline{\mathrm{Univ}}$, Z nazywamy:

(i) *klasą nieskończoną* $:\Leftrightarrow Z : \underline{\mathrm{Class}}$ i $Z \simeq A$ dla pewnego $A : \underline{\mathrm{Class}}$ o tej własności, że $A \subset Z \neq A$;
(ii) *klasą skończoną* $:\Leftrightarrow Z : \underline{\mathrm{Class}}$ i Z nie jest klasą nieskończoną.

Uwaga 17.26. Symbole liczb kardynalnych określone w def. 17.11 i def. 17.23 wystarczą do zakodowania //zapisu// wszystkich liczb kardynalnych reprezentujących moce klas skończonych. W tym celu korzystamy z powszechnie stosowanego pozycyjnego systemu kodowania liczb o podstawie $p := 9+1$. Dlatego nie ma potrzeby wprowadzania specjalnych dodatkowych symboli do kodowania takich liczb kardynalnych.