Podstawy logiki i teorii mnogości

7.10.08

1. Przedmiot logiki klasycznej

LOGIKA – jest dziedziną wiedzy, która zajmuje się związkami (zależnościami) logicznymi pomiędzy zdaniami logicznymi. Przez zdania logiczne rozumiemy zdanie, które na podstawie zadanego kryterium może być określone jako prawdziwe bądź fałszywe. Te dwa stany są przeciwstawne, tzn. zdanie logiczne, które nie jest prawdziwe, jest fałszywe i na odwrót.

Kryteria na podstawie, których można przyporządkować zdaniu prawdę bądź fałsz można podzielić na dwie zasadnicze grupy.

I Kryteria empiryczne (doświadczalne)

o prawdziwości bądź fałszywości zdania rozstrzygamy na podstawie zdobytej wiedzy i weryfikacji jej w konkretnym doświadczeniu.

II Kryteria teoretyczne (dedukcyjne) o prawdziwości bądź fałszywości zdania rozstrzygamy na podstawie rozumowania logicznego.

J lub M → 1 (prawda)
J → 0 (fałszywe)
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~
M → 1

Podział zdań logicznych:

I zdania analityczne (zdania, które są prawdziwe na mocy swojego znaczenia, tzn. na mocy znaczenia słów z których są zbudowane), np. $2<3$

II zdania kontranalityczne - zdania logiczne, które są fałszywe na mocy swojego znaczenia, np $2=3$

O analityczności bądź kontranalityczności zdania logicznego rozstrzygamy za pomocą kryterium poprawności językowej.

III zdania syntetyczne - pozostałe zdania logiczne, czyli zdania, których prawdziwość bądź fałszywość zależy od kryterium pozajęzykowego.

Zakładamy, że poniższe zdania są logiczne na podstawie kontekstu.

1. Jan jest wyższy od Piotra.
2. Jan jest wyższy od Piotra lub Jan jest niższy od Piotra.
3. Jan jest wyższy od Piotra i Jan jest niższy od Piotra.
4. Jan jest wyższy od Piotra lub Jan nie jest wyższy od Piotra. $\alpha \vee \sim\alpha$
5. Jan jest wyższy od Piotra lub Jan jest niższy od Piotra lub Jan jest tego samego wzrostu co Piotr.

Zadanie 1 → III, 2 → III, 3 → II, 4 → I, 5 → I
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Różnica między zdaniem 4 a 5 polega na tym, że w zdaniu 4 jego analityczność wynika z użytego spójnika „lub" oraz frazy przeczącej „nieprawda, że", natomiast w zdaniu 5 jego analityczność nie wynika wyłącznie z użytego spójnika „lub". Analityczność dotyczy wyłącznie zdań złożonych. W dalszym ciągu będziemy zajmować się wyłącznie zdaniami analitycznymi, których analityczność wynika wyłącznie ze znaczenia użytych w nich spójników oraz frazy przeczącej „nieprawda, że". Analiza zdań typu 4, czyli zdań analitycznych prawdziwych wyłącznie na mocy znaczenia użytych w nich spójników zdaniowych oraz frazy przeczącej „nieprawda, że" prowadzi do tzn. schematów (szablonów) zdań analitycznych, w których wartościowanie logiczne zdań podrzędnych nie ma znaczenia. Zastępuje je symbolami zmiennych, np. x, y, z itd. Natomiast wyszczególniamy w nich frazy łączące zdania podrzędne. Przyjmując x := „Jan jest wyższy od Piotra" można zdanie 4 wyrazić schematycznie „x lub nie x". Schematem logicznym zdania 5 jest x lub y lub z z podstawieniami x := „Jan jest wyższy od Piotra", y := „Jan jest niższy od Piotra", z := „Jan jest tego samego wzrostu co Piotr".

2. Formuły logiczne

14.10.08

I W przypadku pierwszego schematu „x lub nie x" mamy do czynienia ze schematem zdania analitycznego niezależnie od znaczenia zmiennej „x", czyli niezależnie od zdania logicznego podstawionego za tę zmienną. Analityczność jest tutaj wynikiem użycia wyłącznie spójnika „lub" oraz zaprzeczenia „nie".

II W przypadku drugiego schematu „x lub y lub z" mamy do czynienia ze schematem, który w wyniku nadania zmiennym „x", „y", „z" wartości nie musi zwracać zdania analitycznego. Analityczność zdania 5-tego jest nie tylko wynikiem użycia spójnika „lub" ale również fraz „jest wyższy", „jest niższy", „jest tego samego wzrostu", które określają wzajemnie wykluczające się zależności pomiędzy zdaniami podstawionymi za zmienne „x", „y", „z".

III Z punktu widzenia logiki klasycznej istotne są schematy zdań analitycznych gdzie analityczność jest wynikiem wyłącznie użycia spójników oraz zaprzeczenia „nie".

IV Sformalizujemy teraz konstrukcję schematów klasycznego rachunku zdań. W tym celu przyjmujemy, że pewne pojęcia są intuicyjnie zrozumiałe, a więc nie będziemy ich definiować. Do takich pojęć pierwotnych należą m.in. pojęcia: „napis", „obiekt", „klasa", „bycie obiektem klasy". Wyrażenie typu „x jest obiektem klasy k" będziemy wyrażać (kodować) w postaci napisu „x : K". Fakt, że K jest klasą będziemy wyrażać w postaci napisu „K : Class", który mówi, że K jest obiektem klasy Class złożonej ze wszystkich klas. Podstawowymi dla naszych rozważań klasami – poza klasą Class – są następujące klasy pierwotne:

Char – klasę tę interpretujemy jako klasę znaków dużych i małych alfabetu łacińskiego oraz greckiego oraz tych, ze znaków opatrzonych indeksami liczbowymi dolnymi lub górnymi, czyli np: „x", „p", „α", „L^1", „Σ", „α_{11}", „p^1".

Var – klasa zmiennych, a ściślej mówiąc klasa identyfikatorów (nazw) zmiennych identyfikujących (wskazujących) na pewne obiekty abstrakcyjne lub fizyczne. „Napis" jest obiektem fizycznym.

RuL – klasa reguł tworzenia napisów wyjściowych na podstawie napisów wejściowych.

$$X \dashv R()| \longrightarrow (X) \dashv R()| \longrightarrow ((X))$$

Definicja 2.1

Przez klasę LForm formuł logicznych (schematów logicznych, LForm skrót od „logical formules") rozumiemy klasę wszystkich napisów powstałych w wyniku stosowania następujących reguł:

I Reguła dołączania zmiennej zdaniowej

(2.1a):= $[x : Var : Char \nrightarrow x : LForm] : RuL;$ dla wszystkich obiektów x

x:

II Reguła dołączania negacji: „~" – „nie"

(2.1b):= $[x : Var : x : LForm \nrightarrow \sim(x) : LForm] : R$

III Reguła dołączania koniunkcji „∧" – „i"

(2.1c):= $[x,y : Var : x,y : LForm \nrightarrow (x)\wedge(y) : LForm] : RuL;$

IV Reguła dołączania alternatywy „∨" – „lub"

(2.1d):= $[x,y : Var : x,y : LForm \nrightarrow (x)\vee(y) : LForm] : RuL;$

V Reguła dołączania implikacji „⇒" – fraza „jeżeli..., to..."

(2.1e):= $[x,y : Var : x,y : LForm \nrightarrow (x)\Rightarrow(y) : LForm] : RuL;$

VI Reguła dołączania równoważności „⇔" – fraza „... wtedy i tylko wtedy, gdy..."

(2.1f):= $[x,y : Var : x,y : LForm \nrightarrow (x)\Leftrightarrow(y) : LForm] : RuL;$

VII Reguła dołączania alternatywy wykluczającej „⊻" – „albo"

(2.1g):= $[x,y : Var : x,y : LForm \nrightarrow (x)\veebar(y) : LForm] : RuL;$

VIII Reguła dołączania dysjunkcji „/" – fraza łącząca typu „co najwyżej jeden z"

(2.1h):= $[x,y : Var : x,y : LForm \nrightarrow (x)/(y) : LForm] : RuL;$

IX Reguła dołączania binegacji „↓" – fraza łącząca typu „ani ... ani ..."

(2.1i):= $[x,y : Var : x,y : LForm \nrightarrow (x)\downarrow(y) : LForm] : RuL;$

x	y
1	1
1	0
0	1
0	0

Przykład 2.2

Schemat „x lub nie x" odpowiada formule zdaniowej $(x) \vee (\sim(x))$, którą otrzymujemy w następujący sposób

$\Gamma x : \underline{Var}$:

K1:= $x : \underline{LForm} \Leftarrow |(2.1a) \vdash x : \underline{Char}$;

K2:= $\sim(x) : \underline{LForm} \leftarrow |(2.1b) \vdash K_1$;

K3:= $(x) \vee (\sim(x)) : \underline{LForm} \leftarrow |(2.1d)| - K_1, K_2$

21.10.08

$$\frac{a \cdot b + c}{(a \cdot b) + c} \neq a \cdot (b + c)$$

Przykład 2.3

Schemat „x lub y lub z" odpowiada formule zdaniowej $((x) \vee (y)) \vee (z)$; którą otrzymujemy w następujący sposób

$(\Gamma$ K1:= $x, y, z : \underline{LForm} \Leftarrow \|(2.1a)\| \vdash x, y, z : \underline{Char}$;

K2:= $(x) \vee (y) : \underline{LForm} \Leftarrow \|(2.1d)\| \vdash K1$;

K3:= $((x) \vee (y)) \vee (z) : \underline{LForm} \Leftarrow \|(2.1d)\| \vdash K2, K1$

Konwencje dotyczące upraszczania formuł zdaniowych poprzez opuszczanie nawiasów:

I Znaków z klasy $\underline{Char}$ nie musimy otaczać nawiasami.

II Przyjmujemy, że negacja wiąże najsilniej, później koniunkcja $\wedge$, a następnie alternatywa $\vee$. Pozostałe spójniki wiążą tak samo.

III W przypadku wystąpienia obok siebie w formule zdaniowej spójników wiążących tak samo przyjmujemy, że priorytet ma spójnik po lewej stronie.

Przykład 2.4

$(x) \vee (\sim(x)) \Leftarrow\| I, II \|\mapsto x \vee \sim x$

$((x) \vee (y)) \vee (z) \Leftarrow\| I, III \|\mapsto x \vee y \vee z$

$$(x) \vee ((y) \vee (z)) \leftarrow\!\Vert\, \underline{\mathrm{I}} \,\Vert\!\rightarrow x \vee (y \vee z)$$

$$(x) \Rightarrow ((y) \vee (z)) \leftarrow\!\Vert\, \underline{\mathrm{I}}, \underline{\mathrm{III}} \,\Vert\!\rightarrow x \Rightarrow y \vee z$$

$$((x) \Rightarrow (y)) \vee z \leftarrow\!\Vert\, \underline{\mathrm{I}} \,\Vert\!\rightarrow (x \Rightarrow y) \vee z$$