7. Systemy aksjomatyczne rachunku zdań

Mając na uwadze metodę dedukcyjną wyprowadzania tautologii wychodząc z pewnej klasy tautologii podstawowych możemy rozważać problem wyznaczania możliwie węższych klas tautologii podstawowych z których na drodze dedukcji można wyprowadzić wszystkie możliwe tautologie. Prowadzi to do tzw. systemów aksjomatycznych klasycznego rachunku zdań.

Pod pojęciem systemu aksjomatycznego rachunku zdań rozumiemy dowolnie ustaloną klasę tautologii wraz z regułami wnioskowania, za pomocą których można wyprowadzić wszystkie tautologie wychodząc z tej klasy. Precyzyjnie rzecz ujmując każdy system aksjomat. rachunku zdań S składa się z 4 części.

I Terminy pierwotne systemu S.

II Klasa tautologii podstawowych (alt. początkowych, pierwotnych) zwanych aksjomatami systemu S.

III Reguły wnioskowania systemu S.

IV Reguły definiujące symbole nie będące terminami pierwotnymi systemu S.

Klasę wszystkich wniosków systemu S, czyli klasę wszystkich formuł logicznych, które można wyprowadzić z aksjomatów systemu S za pomocą reguł wnioskowania i reguł definiujących tego systemu, będziemy oznaczać przez Con(S). Od systemu aksjomatycznego S wymagamy jego pełności czyli spełnienia równości Con(S) = Taut tzn. spełnienia warunku:

$$(7.1) := [F : \text{Var} \;\vdots\; F : \text{Con}(S) \Leftrightarrow F : \text{Taut}] : \text{Rul}$$

, z zastąpieniem klasy Taut prze klasę Con(S)

2.12.08

W dalszym ciągu regułę podstawiania (4.2a) będziemy oznaczać przez RP, zaś regułę odrywania dla implikacji (4.2f) – przez RO. Do najprostszych systemów aksjomatycznych rachunku zdań należy system S_1 składający się z:

I Obiekty klasy Char, (,), $\sim$, $\Rightarrow$

II $S_1/A_1 := p \Rightarrow (q \Rightarrow p) : \text{Con}(S_1)$;

$S_1/A_2 := [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)] : \text{Con}(S_1)$

$S_1/A_3 := (\sim p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (q \Rightarrow p) : \text{Con}(S_1)$;

III Reguły wnioskowania: RP : Rul(S_1), RO : Rul(S_1);

IV Reguły definiujące pozostałe spójniki: $\wedge, \vee, \Leftrightarrow, \veebar, /, \downarrow$. Dla przykładu podamy dwie reguły definiujące koniunkcję i alternatywę.

$S_1/D_1 := [p, q : \text{Var} \;\vdots\; p \wedge q : \text{Con}(S_1) \Leftrightarrow \sim(p \Rightarrow \sim q) : \text{Con}(S_1)] : \text{Def}(S_1)$;

$S_1/D_2 := [p, q : \text{Var} \;\vdots\; p \vee q : \text{Con}(S_1) \Leftrightarrow \sim p \Rightarrow q : \text{Con}(S_1)] : \text{Def}(S_1)$;

Ćw. 7.2

Zaproponować reguły definiujące pozostałe spójniki $\Leftrightarrow, \veebar, /, \downarrow$ w ramach systemu S_1.

Z uwagi na małą liczbę aksjomatów więcej tylko negację i impliklację wyprowadzanie (dowodzenie) bardzo złożonych tautologii w systemie S_1 jest dość trudne. Dla przykładu podamy dowód faktu, że

$(7.3) := p \Rightarrow p : Con(S_1);$

Dowód $[(7.3)]$: $[K1 := [p \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p)]] : Con(S_1) \longleftarrow$

$RP, r := p \vdash S_1/A_2;$

$K2 := (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow p) : Con(S_1) \longleftarrow$

$RO \vdash S_1/A_1, K1;$

$K3 := [p \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \Rightarrow p) : Con(S_1) \longleftarrow$

$RP, q := q \Rightarrow p \vdash K2;$

$K4 := p \Rightarrow p : Con(S_1) \longleftarrow RO, F := p \Rightarrow (q \Rightarrow p),$

$G := p \Rightarrow p \vdash S_1/A_1, K3;$

„Bogatszym" i przez to wygodniejszym z uwagi na wyprowadzanie konsekwencji jest system S_2 składający się z:

I Obiekty klasy Char, C,), $\sim, \Rightarrow, \wedge, \vee, \Leftrightarrow$

II $S_2/A_1 := (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)] : Con(S_2);$

$S_2/A_2 := p \Rightarrow (q \Rightarrow p) : Con(S_2);$

$S_2/A_3 := [p \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q) : Con(S_2);$

$S_2/A_4 := p \Rightarrow \sim\sim p : Con(S_2);$

$S_2/A_5 := \sim\sim p \Rightarrow p : Con(S_2);$

$S_2/A_6 := (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p) : Con(S_2);$

$S_2/A_7 := p \wedge q \Rightarrow q : Con(S_2);$

$S_2/A_8 := p \wedge q \Rightarrow p : Con(S_2);$

$S_2/A_9 := (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)] : Con(S_2);$

$S_2/A_{10} := p \Rightarrow p \vee q : Con(S_2);$

$S_2/A_{11} := q \Rightarrow p \vee q : Con(S_2);$

$S_2/A_{12} := (p \Rightarrow r) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)] : Con(S_2);$

$S_2/A_{13} := (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q) : Con(S_2);$

$S_2/A_{14} := (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p) : Con(S_2);$

$S_2/A_{15} := (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)] : Con(S_2);$

III Reguły wnioskowania: RP: $RuL(S_2)$;

RO: $RuL(S_2)$;

IV Reguły definiujące spójniki $\vee, \wedge, \Leftrightarrow$.

Wykażemy dla przykładu, że

(7.4) $:= p \Rightarrow p : \underline{Con}(S_2)$; Dowód

$[(7.4)] : [K1 := p \Rightarrow (p \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \Rightarrow p) \leftarrow\!| :Con(S_2)$

$RP, q := p \vdash S_2/A_3$;

$K2 := p \Rightarrow (p \Rightarrow p) : \underline{Con}(S_2) \leftarrow\!|$

$RP, q := p \vdash S_2/A_2$;

$K3 := p \Rightarrow p : \underline{Con}(S_2) \leftarrow\!| \| RO \| \vdash K2, K1$;

Widać zatem, że wniosek (7.4) ma krótszy dowód niż wniosek (7.3). Jest to spowodowane bogatszą aksjomatyką systemu S_2. Wniosek z systemu aksjomatycznego można na ogół wyprowadzić na wiele sposobów. Dla przykładu podamy alternatywny dowód wniosku (7.4).

Dowód

$[(7.4), II] : (K1 := (p \Rightarrow \sim\sim p) \Rightarrow [(\sim\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)] : \underline{Con}(S_2) \leftarrow\!| RP; q := \sim\sim p \vdash S_2/A_1$;

$K2 := (\sim\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) : \underline{Con}(S_2) \leftarrow\!| \| RO \| \vdash S_2/A_4, K1$;

$K3 := (\sim\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow p) : \underline{Con}(S_2) \leftarrow\!| RP, r := p \vdash K2$;

$K4 := p \Rightarrow p : \underline{Con}(S_2) \leftarrow\!| \| RO \| \vdash S_2/A_5, K3$;

Widzimy zatem, że drugi dowód wniosku (7.4) jest dłuższy od pierwszego dowodu. Możemy więc rozważać problem znalezienia najkrótszego dowodu.

Systemy aksjomatyczne S_1 i S_2 są oparte na tych samych regułach wnioskowania: RP i RO. Następujący system aksjomatyczny S_3 jest oparty na innym zestawie reguł wnioskowania. Składa się on z:

I Pojęcia pierwotne: $\underline{Char}$, (,), ~, ∨;

II Aksjomaty:

$S_3/A_1 := \sim(p \vee p) \vee p : \underline{Con}(S_3)$;

$S_3/A_2 := \sim p \vee (p \vee p) : \underline{Con}(S_3)$;

$S_3/A_3 := \sim(p \vee q) \vee (q \vee p) : \underline{Con}(S_3)$;

$S_3/A_4 := \sim(\sim q \vee r) \vee (\sim(p \vee q) \vee (p \vee r)) : \underline{Con}(S_3)$;

III Reguły wnioskowania :RP:RuL(S_3)

reguła odrywania dla alternatywy (4.2g) : RuL(S_3), oraz reguła zastępowania

RZ [x,y,F : Var : x,y,F(x) : WForm, F(x) : Con(S_3), x<=>y : Con(S_3) |-> F(y) : Con(S_3)] : RuL(S_3);

IV Reguły definiujące pozostałe spójniki: ∧, =>, <=>, ⊻, /, ↓, np.:

S_3 /D1 [p,q : Var : p∧q : Con(S_3) <-> ~(~p∨~q) : Con(S_3)] :Def(S_3);

S_3 /D2 [p,q : Var : p=>q : Con(S_3) <-> ~p∨q : Con(S_3)] : Def(S_3);

S_3 /D3 [p,q : Var : p<=>q : Con(S_3) <-> (p=>q)∧(q=>p) :Con(S_3)]:Def(S_3);

Ćw. 7.5

Zaproponować reguły definiujące pozostałe spójniki ⊻, /, ↓ w ramach systemu S_3.

9.12.08

Zupełność systemu aksjomatycznego S_2 polega na wykazaniu reguły (7.1) z podstawieniem S :=S_2.

Zatem należy wykazać następujące twierdzenie:

Tw. 7.6 [F : Var : F : Con(S_2) <-> F : Taut] : RuL;

Dowód tw. 7.6 polega na wykazaniu obu twierdzeń:

Tw. 7.6a [F : Var : F : Con(S_2) |-> F : Taut] : RuL;

Tw. 7.6b [F : Var : F : Taut |-> F : Con(S_2)] : RuL;

Dowód tw. 7.6a polega na obserwacji, że:

(i) aksjomaty systemu S_2 są tautologiami, co można zweryfikować bezpośrednio metodami zero-jedynkowymi;

(ii) reguły wnioskowania RP:RuL systemu S_2 zastosowane na tautologiach dają w wyniku

tautologie.
Obserwacje te prowadzą do wniosku $\underline{Con}(S_2) \subset \underline{Taut}$. Inkluzja ta jest przeformułowaniem tw. 7.6.9. Więcej trudności przysparza dowód tw. 7.6.6. Należy wykazać, że każda tautologia ma dowód w ramach systemu aksjomatycznego S_2. W tym celu można wykorzystać metodę opisaną w uwadze 6.9 polegającą na sprowadzeniu dowolnej formuły zdaniowej F do postaci $F^* : \underline{CANForm}$. Naśladując proces tworzenia formuły F^* w uwadze 6.9 należy wykazać w ramach systemu S_2:

(i) prawa zastępowania spójników różnych od $\wedge$ i $\vee$ za pomocą $\wedge$, $\vee$ i $\sim$ są konsekwencjami systemu S_2.

(ii) konsekwencjami systemu S_2 są podstawowe prawa logiczne: prawa łączności i przemienności dla $\wedge$ i $\vee$, prawa rozdzielności $\wedge$ względem $\vee$ oraz $\vee$ względem $\wedge$; prawa de'Morgana, prawo podwójnego przeczenia $p \Leftrightarrow \sim\sim p$.

(iii) konsekwencjami systemu S_2 są reguły: równoważnego dołączania spójników logicznych – RDS, reguła równoważnego dołączania negacji – RDN, reguła przechodniości równoważności – TR.

Dla przykładu dwie ostatnie reguły mają postać:

$RDN := [F, G : \underline{Var} : F \Leftrightarrow G : \underline{Con}(S_2) \mapsto \sim F \Leftrightarrow \sim G : \underline{Con}(S_2)] : \underline{Rul}(S_2);$

$TR := [F, G, H : \underline{Var} : F \Leftrightarrow G, G \Leftrightarrow H : \underline{Con}(S_2) \mapsto F \Leftrightarrow H : \underline{Con}(S_2)] : \underline{Rul}(S_2);$

Mając do dyspozycji konsekwencje

opisane w punktach (i), (ii), (iii) możemy wykazać następujące twierdzenie:

tw. 7.6d := $[F : \underline{Var} : F : \underline{wForm} \rightarrow$
$(F^* : \underline{Var} : F^* : \underline{CANForm}, F^* \Leftrightarrow F : \underline{Con}(S_2))]$
$: \underline{RuL}(S_2)]$;

Zakładając, że $F : \underline{Taut}$ jest dowolnie ustalone wnioskujemy na podstawie tw. 7.6c oraz tw. 7.6a, że $F^* : \underline{Taut}$. Fakt, że $F^* : \underline{Con}(S_2)$ wyprowadzamy dowodząc następujących twierdzeń:

Tw. 7.6d := $p \vee \sim p : \underline{Con}(S_2)$;

Tw. 7.6e := $[F, G : \underline{Var} : F : \underline{Con}(S_2), G : \underline{wForm} \rightarrow F \vee G : \underline{Con}(S_2)] : \underline{RuL}(S_2)$;

Tw. 7.6f := $[F, G : \underline{Var} : F, G : \underline{Con}(S_2) \rightarrow F \wedge G : \underline{Con}(S_2)] : \underline{RuL}\text{-}(S_2)$;

Wiedząc, że $F^*, F^* \Leftrightarrow F : \underline{Con}(S_2)$ wnosimy na podstawie reguły odrywania, że $F : \underline{Con}(S_2)$. To dowodzi inkluzji $\underline{Taut} \subset \underline{Con}(S_2)$, która jest przeformułowaniem tw. 7.6b.

W podobny sposób można wykazać zupełność systemów S_1 i S_3. Zupełność tych systemów można łatwiej wykazać posługując się zupełnością systemu S_2 (tw. 7.6) oraz wykazując, że każdy aksjomat systemu S_2 jest wnioskiem systemu S_1 (odp. systemu S_3).

Jak widać w dowodzie zupełności systemu aksjomatycznego S_2 ważną rolę odgrywało prawo wyłączonego środka.

Ćw. 7.7

Wykazać następujące konsekwencje systemu S_1.

(7.7a)

$[F,G : \underline{Var} ; G : \underline{WForm}, F : \underline{Con}(S_1) \vdash\!\!> G \Rightarrow F : \underline{Con}(S_1)] : \underline{RuL}(S_1);$

(7.7b)

$[F,G : \underline{Var} : F \Rightarrow G : \underline{Con}(S_1), G \Rightarrow H : \underline{Con}(S_1) \vdash\!\!> F \Rightarrow H : \underline{Con}(S_1)] : \underline{RuL}(S_1);$

(7.7c)

$\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q) : \underline{Con}(S_1);$

(7.7d)

$\sim\sim p \Rightarrow (q \Rightarrow p) : \underline{Con}(S_1);$

(7.7e)

$\sim\sim p \Rightarrow p : \underline{Con}(S_1);$

(7.7f)

$p \Rightarrow \sim\sim p : \underline{Con}(S_1);$

(7.7g)

$\sim p \vee p : \underline{Con}(S_1);$

(7.7h)

$p \vee \sim p : \underline{Con}(S_1);$

Ćw. 7.8

Wykazać następujące reguły w systemie S_2:

(7.8a)

$[F : \underline{Var} ; F : \underline{Con}(S_2) \vdash\!\!> \sim\sim F : \underline{Con}(S_2)] : \underline{RuL}(S_2)$

(7.8b)

$[F,G : \underline{Var} : F : \underline{Con}(S_2), G : \underline{WForm} \vdash\!\!> \sim F \Rightarrow G : \underline{Con}(S_2)] : \underline{RuL}(S_2);$

Ćw. 7.9

Wykazać, że

(7.9a)

$p \vee \sim p : \underline{Con}(S_2);$

(7.9b)

$\sim p \vee p : \underline{Con}(S_2);$