15. Relacja porządku

Istotną rolę w matematyce odgrywają relacje porządku określone następująco.

Definicja 15.1. Dla dowolnych $Ƶ : \underline{\mathrm{Univ}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, $Ƶ$ nazywamy *relacją porządku* (alt. *porządkiem*) *w klasie* A $:\Leftrightarrow Ƶ : \underline{\mathrm{Rel}}$ i zachodzą następujące warunki:

(i) $xƵx$ dla $x : A$ //zwrotność//;
(ii) $xƵy \wedge yƵx \Rightarrow x = y$ dla $x, y : A$ //antysymetria//;
(iii) $xƵy \wedge yƵz \Rightarrow xƵz$ dla $x, y, z : A$ //przechodniość//.

Klasę wszystkich struktur (A, R), gdzie R jest relacją porządku w klasie A będziemy oznaczać przez $\underline{\mathrm{ORel}}$.

Ćwiczenie 15.2. Wykazać, że warunek antysymetrii (ii) w def. 15.1 jest równoważny warunkowi

(ii') $xƵy \wedge x \neq y \Rightarrow \sim yƵx$ dla $x, y : A$.

Definicja 15.3. Dla dowolnych $Ƶ : \underline{\mathrm{Univ}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, $Ƶ$ nazywamy *relacją porządku liniowego* (alt. *porządkiem liniowym*) *w klasie* A $:\Leftrightarrow Ƶ$ jest relacją porządku w klasie A i zachodzi warunek

(iv) $xƵy \vee yƵx$ dla $x, y : A$ //spójność//.

Klasę wszystkich struktur (A, R), gdzie R jest relacją porządku liniowego w klasie A będziemy oznaczać przez $\underline{\mathrm{LORel}}$.

Uwaga 15.4. Warunek (iv) w def. 15.3 oznacza, że każde dwa obiekty x, y klasy A można ze sobą porównać względem relacji $Ƶ$.

Ćwiczenie 15.5. Wykazać, że $R := \{A \mapsto B | A, B : \underline{\mathrm{Class}} \wedge A \subset B\}$ jest relacją porządku w klasie $\underline{\mathrm{Class}}$. Czy R jest relacją porządku liniowego w klasie A?

//Dla dowolnych $A, B, C : \underline{\mathrm{Class}}$ mamy:

$\alpha \Rightarrow \alpha : \underline{\mathrm{Taut}}$ —//$\alpha :=$ "$x : A$", gdzie $x : \underline{\mathrm{Var}}$//→ $x : A \Rightarrow x : A$ dla $x : \underline{\mathrm{Univ}}$ —//def. 11.6//→ $A \subset A$.
$A \subset B \wedge B \subset A$ —//def. 11.6//→ $(x : A \Rightarrow x : B) \wedge (x : B \Rightarrow x : A)$ dla $x : \underline{\mathrm{Univ}}$ —//$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha) \Leftrightarrow (\alpha \Leftrightarrow \beta) : \underline{\mathrm{Taut}}$, $\alpha :=$ "$x : A$", $\beta :=$ "$x : B$"//→ $x : A \Leftrightarrow x : B$ dla $x : \underline{\mathrm{Univ}}$ —//Aks. C3//→ $A = B$ —//wart. implikacji//→ $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$.
$A \subset B \wedge B \subset C$ —//def. 11.6//→ $(x : A \Rightarrow x : B) \wedge (x : B \Rightarrow x : C)$ dla $x : \underline{\mathrm{Univ}}$ —//$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) : \underline{\mathrm{Taut}}$, $\alpha :=$ "$x : A$", $\beta :=$ "$x : B$", $\gamma :=$ "$x : C$"//→ $x : A \Rightarrow x : C$ dla $x : \underline{\mathrm{Univ}}$ —//def. 11.6//→ $A \subset C$ —//wart. implikacji//→ $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Stąd na mocy def. 15.1, $(\underline{\mathrm{Class}}, R) : \underline{\mathrm{ORel}}$, gdzie R jest relacją określoną w ćw. 15.5. Ponadto dla dowolnych $A, B : \underline{\mathrm{Class}} \setminus \{\varnothing\}$, jeśli $A \cap B = \varnothing$ to:

$A \subset B$ —//$A \cap B = A$//→ $A = \varnothing$ —//wart. implikacji//→ $A \subset B \Rightarrow A = \varnothing$ —//$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\sim \beta \Rightarrow \sim \alpha) : \underline{\mathrm{Taut}}$//→ $A \neq \varnothing \Rightarrow \sim A \subset B$ —//$A \neq \varnothing$//→ $\sim A \subset B$.
$B \subset A$ —//$B \cap A = B$//→ $B = \varnothing$ —//wart. implikacji//→ $B \subset A \Rightarrow B = \varnothing$ —//$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\sim \beta \Rightarrow \sim \alpha) : \underline{\mathrm{Taut}}$//→ $B \neq \varnothing \Rightarrow \sim B \subset A$ —//$B \neq \varnothing$//→ $\sim B \subset A$.
$\sim A \subset B \wedge \sim B \subset A$ —//$\sim (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \sim \alpha \wedge \sim \beta : \underline{\mathrm{Taut}}$//→ $\sim (A \subset B \vee B \subset A)$.

Dlatego R nie jest relacją porządku liniowego w klasie $\underline{\mathrm{Class}}$, czyli $(\underline{\mathrm{Class}}, R) : \underline{\mathrm{ORel}} \setminus \underline{\mathrm{LORel}}$.//

Uwaga 15.6. Ze względu na ćw. 15.5 symbol "$\subset$" możemy w kontekście relacji interpretować jako relację porządku w klasie $\underline{\mathrm{Class}}$, czyli przyjmować, że $(\underline{\mathrm{Class}}, \subset) : \underline{\mathrm{ORel}}$.

Ćwiczenie 15.7. Wykazać, że dla dowolnych (A, R) : $\underline{\text{ORel}}$ i B : $\underline{\text{Class}}$, jeśli $\varnothing \neq B \subset A$ to (B, R) : $\underline{\text{ORel}}$. Wykazać ponadto, że własność ta zachodzi z zastąpieniem klasy $\underline{\text{ORel}}$ przez klasę $\underline{\text{LORel}}$.

Definicja 15.8. Dla dowolnych z : $\underline{\text{Univ}}$, A : $\underline{\text{Class}}$ i (K, R) : $\underline{\text{ORel}}$, z nazywamy:

(i) *obiektem największym w klasie A względem struktury* (K, R) :⇔ $z : A \cap K$ oraz

(15.8a) $$xRz \quad \text{dla } x : A \cap K;$$

(ii) *obiektem najmniejszym w klasie A względem struktury* (K, R) :⇔ $z : A \cap K$ oraz

(15.8a) $$zRx \quad \text{dla } x : A \cap K.$$

Definicja 15.9. Dla dowolnych z : $\underline{\text{Univ}}$, A : $\underline{\text{Class}}$ i (K, R) : $\underline{\text{ORel}}$, z nazywamy:

(i) *obiektem maksymalnym w klasie A względem struktury* (K, R) :⇔ $z : A \cap K$ oraz

(15.9a) $$zRx \Rightarrow x = z \quad \text{dla } x : A \cap K;$$

(ii) *obiektem minimalnym w klasie A względem struktury* (K, R) :⇔ $z : A \cap K$ oraz

(15.9b) $$xRz \Rightarrow x = z \quad \text{dla } x : A \cap K.$$

Uwaga 15.10. Można łatwo pokazać, że dla dowolnych A : $\underline{\text{Class}}$ i (K, R) : $\underline{\text{ORel}}$, jeśli w klasie A istnieje element największy (odp. najmniejszy) względem struktury (K, R), to jest on wyznaczony jednoznacznie, czyli jest to jedyny taki element.
Załóżmy bowiem, że a_1 i a_2 są dowolnie ustalonymi obiektami największymi w klasie A względem struktury (K, R). Wówczas na mocy def. 15.8, $a_1, a_2 : A \cap K$ oraz $a_1\ R\ a_2$ //(15.8a), $x := a_1, z := a_2$// i $a_2\ R\ a_1$ //(15.8a), $x := a_2, z := a_1$//. Stąd wobec antysymetrii relacji R //def. 15.8(ii)// widzimy, że $a_1 = a_2$. Podobnie można wykazać jednoznaczność obiektu najmniejszego w klasie A względem struktury (K, R). Korzystamy wtedy z warunku (15.8b) zamiast warunku (15.8a).

Uwaga 15.11. Z ćwiczenia 14.15 wynika istnienie dokładnie jednej funkcji max i dokładnie jednej funkcji min takich, że $\underline{\text{D}}(\max) = \underline{\text{ORel}} = \underline{\text{D}}(\min)$ i dla każdego (K, R) : $\underline{\text{ORel}}$,

(15.11a) $$(K, R)\_\max = \left\{ A \mapsto a \,\middle|\, A : \underline{\text{Class}} \wedge a : A \cap K \wedge \bigwedge_{x : A \cap K} xRa \right\}$$

oraz

(15.11b) $$(K, R)\_\min = \left\{ A \mapsto a \,\middle|\, A : \underline{\text{Class}} \wedge a : A \cap K \wedge \bigwedge_{x : A \cap K} aRx \right\}.$$

Ponadto na mocy uwagi 15.10, $(K, R)\_\max$: $\underline{\text{Map}}$ i $(K, R)\_\min$: $\underline{\text{Map}}$ dla (K, R) : $\underline{\text{ORel}}$, czyli max : $\underline{\text{ORel}} \to \underline{\text{Map}}$ i min : $\underline{\text{ORel}} \to \underline{\text{Map}}$. Porównując warunek (i) w def. 15.8 z (15.11a) widzimy, że dla dowolnych (K, R) : $\underline{\text{ORel}}$ i A : $\underline{\text{Class}}$, $(K, R)\_\max(A)$ jest obiektem największym w klasie A względem struktury (K, R), o ile taki obiekt istnieje, czyli gdy A : $\underline{\text{D}}((K, R)\_\max)$. W przeciwnym przypadku $(K, R)\_\max(A) = \underline{\text{null}}$. Porównując zaś warunek (ii) w def. 15.8 z (15.11b) stwierdzamy, że dla dowolnych (K, R) : $\underline{\text{ORel}}$ i A : $\underline{\text{Class}}$, $(K, R)\_\min(A)$ jest obiektem najmniejszym w klasie A względem struktury (K, R), o ile taki obiekt istnieje, czyli gdy A : $\underline{\text{D}}((K, R)\_\min)$. W przeciwnym wypadku $(K, R)\_\min(A) = \underline{\text{null}}$.

Ćwiczenie 15.12. Wykazać, że dla każdego F : $\underline{\text{Class}} \setminus \{\varnothing\}$ zachodzą implikacje:

(i) $\bigcap(F) : F \Rightarrow (\underline{\text{Class}}, \subset)\_\min(F) = \bigcap(F)$;
(ii) $\bigcup(F) : F \Rightarrow (\underline{\text{Class}}, \subset)\_\max(F) = \bigcup(F)$.

Uwaga 15.13. Z ćw. 14.15 wynika istnienie dokładnie jednej funkcji maxl oraz dokładnie jednej funkcji minl takich, że $\underline{\text{D}}(\text{maxl}) = \underline{\text{ORel}} = \underline{\text{D}}(\text{minl})$ i dla każdego (K, R) : $\underline{\text{ORel}}$,

(15.13a) $$(K, R)\_\text{maxl} = \left\{ A \mapsto \left\{ a \,\middle|\, a : A \cap K \wedge \bigwedge_{x : A \cap K} (aRx \Rightarrow x = a) \right\} \,\middle|\, A : \underline{\text{Class}} \right\}$$

oraz

$$(15.13\text{b})\qquad (K,R)\_\mathrm{minl} = \Big\{A \mapsto \Big\{a \Big| a : A \cap K \wedge \bigwedge_{x:A\cap K} (xRa \Rightarrow x = a)\Big\} \Big| A : \underline{\mathrm{Class}}\Big\}.$$

Ponadto na mocy uwagi 14.21, $(K,R)\_\mathrm{maxl} : \underline{\mathrm{ORel}} \to \underline{\mathrm{Map}}$ i $(K,R)\_\mathrm{minl} : \underline{\mathrm{ORel}} \to \underline{\mathrm{Map}}$, a więc $\mathrm{maxl} : \underline{\mathrm{ORel}} \to \underline{\mathrm{Map}}$ i $\mathrm{minl} : \underline{\mathrm{ORel}} \to \underline{\mathrm{Map}}$. Porównując warunek w (i) w def. 15.9 z (15.13a) widzimy, że dla dowolnych $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, $(K,R)\_\mathrm{maxl}(A)$ jest klasą złożoną ze wszystkich obiektów maksymalnych w klasie A względem struktury (K,R). Jeśli takie obiekty nie istnieją to $(K,R)\_\mathrm{maxl}(A) = \varnothing$. Porównując zaś warunek (ii) w def. 15.9 z (15.13b) stwierdzamy, że dla dowolnych $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, $(K,R)\_\mathrm{minl}(A)$ jest klasą złożoną ze wszystkich obiektów minimalnych w klasie A względem struktury (K,R). Jeśli takie obiekty nie istnieją to $(K,R)\_\mathrm{minl}(A) = \varnothing$.

Ćwiczenie 15.14. Wykazać, że dla dowolnych $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$ i $A : \underline{\mathrm{PClass}}(K)$ zachodzą własności:

(i) $a^+ := (K,R)\_\mathrm{max}(A) \neq \underline{\mathrm{null}} \Rightarrow (K,R)\_\mathrm{maxl}(A) = \{a^+\}$;
(ii) $a^- := (K,R)\_\mathrm{min}(A) \neq \underline{\mathrm{null}} \Rightarrow (K,R)\_\mathrm{minl}(A) = \{a^-\}$;
(iii) jeśli istnieją $a, b : A$ takie, że $a \neq b$ i $a, b : (K,R)\_\mathrm{maxl}(A)$ to $(K,R)\_\mathrm{max}(A) = \underline{\mathrm{null}}$;
(iv) jeśli istnieją $a, b : A$ takie, że $a \neq b$ i $a, b : (K,R)\_\mathrm{minl}(A)$ to $(K,R)\_\mathrm{min}(A) = \underline{\mathrm{null}}$.

Definicja 15.15. Dla dowolnych $z : \underline{\mathrm{Univ}}$, $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, z nazywamy:

(i) *ograniczeniem górnym klasy A względem struktury* $(K,R) :\Leftrightarrow A \cap K \neq \varnothing$ i

$$(15.15\text{a})\qquad xRz \quad \text{dla } x : A \cap K;$$

(ii) *ograniczeniem dolnym klasy A względem struktury* $(K,R) :\Leftrightarrow A \cap K \neq \varnothing$ i

$$(15.15\text{b})\qquad zRx \quad \text{dla } x : A \cap K.$$

Uwaga 15.16. Z ćw. 14.15 wynika istnienie dokładnie jednej funkcji ubnd oraz dokładnie jednej funkcji lbnd takich, że $\underline{\mathrm{D}}(\mathrm{ubnd}) = \underline{\mathrm{ORel}} = \underline{\mathrm{D}}(\mathrm{lbnd})$ i dla każdego $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$,

$$(15.16\text{a})\qquad (K,R)\_\mathrm{ubnd} = \Big\{A \mapsto \Big\{a \Big| a : K \wedge A \cap K \neq \varnothing \wedge \bigwedge_{x:A\cap K} xRa\Big\} \Big| A : \underline{\mathrm{Class}}\Big\}$$

oraz

$$(15.16\text{b})\qquad (K,R)\_\mathrm{lbnd} = \Big\{A \mapsto \Big\{a \Big| a : K \wedge A \cap K \neq \varnothing \wedge \bigwedge_{x:A\cap K} aRx\Big\} \Big| A : \underline{\mathrm{Class}}\Big\}.$$

Ponadto na mocy uwagi 14.21, $(K,R)\_\mathrm{ubnd} : \underline{\mathrm{Map}}$ and $(K,R)\_\mathrm{lbnd} : \underline{\mathrm{Map}}$ dla $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$, a więc $\mathrm{ubnd} : \underline{\mathrm{ORel}} \to \underline{\mathrm{Map}}$ and $\mathrm{lbnd} : \underline{\mathrm{ORel}} \to \underline{\mathrm{Map}}$. Porównując warunek (i) w def. 15.15 z (15.16a) widzimy, że dla dowolnych $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, $(K,R)\_\mathrm{ubnd}(A)$ jest klasą złożoną ze wszystkich ograniczeń górnych klasy A względem struktury (K,R). Jeśli takie obiekty nie istnieją to $(K,R)\_\mathrm{ubnd}(A) = \varnothing$. Porównując zaś warunek (ii) w def. 15.15 z (15.16b) stwierdzamy, że dla dowolnych $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, $(K,R)\_\mathrm{lbnd}(A)$ jest klasą złożoną ze wszystkich ograniczeń dolnych klasy A względem struktury (K,R). Jeśli takie obiekty nie istnieją to $(K,R)\_\mathrm{lbnd}(A) = \varnothing$.

Ćwiczenie 15.17. Wykazać, że dla każdego $F : \underline{\mathrm{FClass}} \setminus \{\varnothing\}$,

$$(\underline{\mathrm{Class}}, \subset)\_\mathrm{ubnd}(F) = \bigcup(F) \quad \text{i} \quad (\underline{\mathrm{Class}}, \subset)\_\mathrm{lbnd}(F) = \bigcap(F).$$

Definicja 15.18. Dla dowolnych $z : \underline{\mathrm{Univ}}$, $(K,R) : \underline{\mathrm{Rel}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, z nazywamy:

(i) *kresem górnym* (alt. *supremum*) *klasy A względem struktury* $(K,R) :\Leftrightarrow$

$$A^+ := (K,R)\_\mathrm{ubnd}(A) \neq \varnothing \quad \text{i} \quad z = (K,R)\_\mathrm{min}(A^+);$$

(ii) *kresem dolnym* (alt. *infimum*) *klasy A względem struktury* $(K,R) :\Leftrightarrow$

$$A^- := (K,R)\_\mathrm{lbnd}(A) \neq \varnothing \quad \text{i} \quad z = (K,R)\_\mathrm{max}(A^-).$$

Uwaga 15.19. Z ćw. 14.15 wynika istnienie dokładnie jednej funkcji sup i dokładnie jednej funkcji inf takich, że $\underline{\mathrm{D}}(\sup) = \underline{\mathrm{ORel}} = \underline{\mathrm{D}}(\inf)$ i dla każdego $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$,

$$(K,R)\_\sup = (K,R)\_\min \circ (K,R)\_\mathrm{ubnd} \tag{15.19a}$$

oraz

$$(K,R)\_\inf = (K,R)\_\max \circ (K,R)\_\mathrm{lbnd}\,. \tag{15.19b}$$

Ponadto na mocy ćw. 14.5 oraz uwagi 15.11 i uwagi 15.16, $(K,R)\_\sup : \underline{\mathrm{Map}}$ and $(K,R)\_\inf : \underline{\mathrm{Map}}$ dla $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$, a więc $\sup : \underline{\mathrm{ORel}} \to \underline{\mathrm{Map}}$ and $\inf : \underline{\mathrm{ORel}} \to \underline{\mathrm{Map}}$. Porównując warunek (i) w def. 15.18 z (15.19a) stwierdzamy, że dla dowolnych $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, $(K,R)\_\sup(A)$ jest kresem górnym klasy A względem struktury (K,R), o ile on istnieje, czyli gdy $A : \underline{\mathrm{D}}((K,R)\_\sup)$. W przeciwnym przypadku $(K,R)\_\sup(A) = \underline{\mathrm{null}}$. Porównując zaś warunek (ii) w def. 15.18 z (15.19b) widzimy, że dla dowolnych $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$ i $A : \underline{\mathrm{Class}}$, $(K,R)\_\inf(A)$ jest kresem dolnym klasy A względem struktury (K,R), o ile taki istnieje, czyli gdy $A : \underline{\mathrm{D}}((K,R)\_\inf)$. W przeciwnym przypadku $(K,R)\_\inf(A) = \underline{\mathrm{null}}$.

Ćwiczenie 15.20. Wykazać, że dla każdego $F : \underline{\mathrm{FClass}} \backslash \{\varnothing\}$,

$$(\underline{\mathrm{Class}}, \subset)\_\sup(F) = \bigcup(F) \quad \text{i} \quad (\underline{\mathrm{Class}}, \subset)\_\inf(F) = \bigcap(F).$$

Ćwiczenie 15.21. Wykazać, że dla dowolnych $(K,R) : \underline{\mathrm{ORel}}$ i $A : \underline{\mathrm{PClass}}(K) \backslash \{\varnothing\}$ zachodzą implikacje:

(i) $a^+ := (K,R)\_\max(A) \neq \underline{\mathrm{null}} \Rightarrow (K,R)\_\sup(A) = a^+$;
(ii) $a^- := (K,R)\_\min(A) \neq \underline{\mathrm{null}} \Rightarrow (K,R)\_\inf(A) = a^-$.

Ponadto podać przykłady, że odwrotne implikacje na ogół nie zachodzą.