8. Formuły kwantyfikatorowe

W matematyce często posługujemy się zdaniami logicznymi zależnymi od pewnych parametrów, np. $x=y$, $x^2+y^2=1$, $x^2 \geq 0$ zależne od parametrów rzeczywistych x i y.

W rozważaniach pozamatematycznych również stosujemy tego typu wyrażenia, jak np.:

„Student x zdał egzamin z logiki",

„Człowiek x urodził się w 1982 r.",

„Człowiek x jest starszy od człowieka y",

zależne od parametrów x i y.

Przyjmując, że $P(x)$ jest zdaniem logicznym zależnym od parametru $x:K$, gdzie K jest pewną klasą, interesują nas dwie skrajne sytuacje:

I. $P(x)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdego obiektu $x:K$, czyli możemy to zapisać:

$[x : \underline{Var} : x:K \Rightarrow P(x) \mapsto 1]$

będzie krócej $P(x) \mapsto 1$ przy domyślnie ustalonej klasie K.

II P(x) jest zdaniem prawdziwym dla przynajmniej jednego obiektu $x:K$, czyli: --|-->

$\langle x:\underline{Var};\ x:K;\ P(x) \mapsto 1 \rangle$ bądź krócej $P(\underline{x}) \mapsto 1$ przy domyślnie ustalonej klasie K.

Przeanalizujemy teraz sytuację przyjmując dla uproszczenia, że klasa K składa się z obiektów identyfikowanych przez a, b, c. Wówczas $P(\overline{x}) \mapsto 1$ oznacza, że wszystkie zdania $P(a), P(b), P(c)$ są prawdziwe. Fakt ten możemy wyrazić za pomocą jednego zdania $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \mapsto 1$, co wynika z wartościowania koniunkcji „$\wedge$". Możemy ostatnią koniunkcję wyrazić w zwartej postaci

$$\bigwedge_{x:K} P(x) \mapsto 1.$$

Z kolei fakt $P(\underline{x}) \mapsto 1$ oznacza, że przynajmniej jedno ze zdań $P(a), P(b), P(c)$ jest prawdziwe, co z uwagi na wartościowanie alternatywy możemy wyrazić za pomocą jednego zdania $P(a) \vee P(b) \vee P(c) \mapsto 1$. Możemy to zdanie wyrazić w zwartej postaci

$$\bigvee_{x:K} P(x) \mapsto 1.$$

W dalszym ciągu symbole $\bigwedge$ i $\bigvee$ będziemy nazywać symbolami kwantyfikatorów. Symbol $\bigwedge$ interpretujemy jako globalną koniunkcję – nazywa się kwantyfikatorem ogólnym. Drugi symbol $\bigvee$ interpretujemy jako globalną alternatywę – nazywa się kwantyfikatorem szczegółowym (alternatywnie egzystencjalnym). Wobec powyższych rozważań fakt, że $\bigwedge_{x:K} P(x) \mapsto 1$ można sformułować w języku naturalnym następująco: „dla każdego $x:K$, $P(x)$

jest zdaniem prawdziwym „lub" P(x) jest zdaniem prawdziwym dla wszystkich x:K „lub" dla każdego x:K zachodzi P(x) „lub" podobnie. Z kolei fakt, że $\bigvee_{x:K} P(x) \mapsto 1$ można wyrazić w języku naturalnym następująco: „dla przynajmniej jednego x:K, P(x) jest zdaniem prawdziwym „lub" dla przynajmniej jednego x:K zachodzi P(x) „lub" P(x) jest zdaniem prawdziwym dla pewnego x:K „lub" P(x) zachodzi dla pewnego x:K „lub" istnieje x:K taki, że zachodzi P(x) „lub" podobnie. Zauważmy jeszcze, że wobec powyższych rozważań otrzymujemy następujące definicje intuicyjnego wartościowania wyrażeń kwantyfikatorowych dotyczących dowolnego zdania logicznego P(x) zależnego od parametru x:K dla dowolnie zadanej klasy K:

(8.1)

$(\bigwedge_{x:K} P(x) \mapsto 1 \Leftrightarrow P(\underline{x}) \mapsto 1; \bigwedge_{x:K} P(x) \mapsto 0 \Leftrightarrow P(\underline{x}) \mapsto 0;$

(8.2)

$(\bigvee_{x:K} P(x) \mapsto 1 \Leftrightarrow P(\underline{x}) \mapsto 1;$
$\bigvee_{x:K} P(x) \mapsto 0 \Leftrightarrow P(\underline{x}) \mapsto 0;$

Oprócz symboli $\bigwedge, \bigvee$ używa się często symboli $\forall, \exists$. Piszemy wówczas $\forall_{x:K} P(x)$ w miejsce $\bigwedge_{x:K} P(x)$ oraz $\exists_{x:K} P(x)$ w miejsce $\bigvee_{x:K} P(x)$.

6.01.09

Sformalizujemy teraz proces tworzenia formuł kwantyfikatorowych.

Def. 8.3

Predykatami nazywamy obiekty klasy PForm powstałej w wyniku stosowania następujących reguł:

(8.3a)

$[F:\underline{Var} : F:\underline{Char} \Rightarrow F:\underline{PForm}] : \underline{Rul};$

(8.3b)

$[F,x:\underline{Var} : F:\underline{PForm}, x:\underline{Char} \Rightarrow F(x):\underline{PForm}] : \underline{Rul};$

Przykładami predykatów są napisy: F,x, F(x), F(x)(y), F(x)(x), F(x)(y)(z).

W celu uproszczenia notacji pary nawiasów wewnętrznych)(zastępuje się z reguły przecinkiem. Zatem trzy ostatnie predykaty można F(x,x) zapisać w postaci F(x,y), F(x,y,z).

Predykaty są odpowiednikami zdań logicznych zależnych od parametrów umieszczonych w nawiasach. Dla przykładu predykat F(x,y) może wyrażać zdanie logiczne zależne od parametrów (zmiennych) x i y jak niżej:

F(x,y):= „x jest studentem lub y nie jest studentką"

Predykaty pełnią taką rolę w formułach kwantyfikatorowych jak zmienne zdaniowe w formułach zdaniowych.

Def. 8.4

Formułami kwantyfikatorowymi nazywamy obiekty klasy <u>QForm</u> powstałej w wyniku stosowania następujących reguł:

(8.4a)

:= [P: <u>Var</u> ; P: <u>PForm</u> ⊢> P: <u>QForm</u>] : <u>Rul</u>; //

reguła dołączania predykatów

(8.4b)

:= [P: <u>Var</u> ; P: <u>QForm</u> ⊢> ~(P) : <u>QForm</u>] : <u>Rul</u>;

reguła dołączania negacji

(8.4c)

:= [P, Q, * : <u>Var</u> ; P, Q : <u>QForm</u>, (* = "∧" ∨ * = "∨" ∨ * = "=>" ∨ * = "<=>" ∨ * = "<u>∨</u>" ∨ * = "/" ∨ * = "↓") ⊢> (P)*(Q) : <u>QForm</u>] : <u>Rul</u>; //

reguła dołączania spójników

(8.4d)

:= [X, P, K : <u>Var</u> ; X : <u>Char</u>, K : <u>Class</u>, P : <u>QForm</u> ⊢>

$\bigwedge_{x:k}(P)$: QForm] : Rul; // reguła dołączania kwantyfikatora ogólnego

(8.4e) := [X, P, K : Var ; X : Char, K : Class, P : QForm ⊢ $\bigvee_{x:k}(P)$: QForm] : Rul; // reguła dołączania kwantyfikatora szczegółowego

Podobnie jak w przypadku formuł logicznych stosujemy konwencję upraszczania formuł kwantyfikatorowych przez opuszczanie domyślnych nawiasów zakładając, że:

- siła wiązania negacji i spójników logicznych jest taka jak w przypadku formuł logicznych;
- symbole kwantyfikatorów wiążą silniej niż spójniki logiczne;
- w przypadku użycia obok siebie kilku symboli kwantyfikatorowych przyjmujemy, że wiązanie następuje od prawej do lewej strony;

W przypadku użycia obok siebie negacji i symbolu kwantyfikatora przyjmujemy, że wyższy priorytet ma symbol po prawej stronie.

- predykatów nie musimy otaczać nawiasami.

Zatem piszemy np.: $\bigwedge_{x:k}\bigvee_{y:l} F(x,y)$ zamiast $\bigwedge_{x:k}(\bigvee_{y:l}(F(x,y)))$, $\bigwedge_{x:k}(F(x) \vee G(y))$ zamiast $\bigwedge_{x:k}((F(x) \vee G(y)))$, natomiast wyrażenie $\bigwedge_{x:k}F(x) \vee G(y)$ jest uproszczeniem wyrażenia $(\bigwedge_{x:k}(F(x))) \vee (G(y))$. Ponadto w celu uproszczenia notacji formuł kwantyfikatorowych stosujemy następujące konwencje notacyjne:

(8.5) "$\bigwedge_{x}$" := "$\bigwedge_{x:Univ}$" oraz "$\bigvee_{x}$" := "$\bigvee_{x:Univ}$" dla x : Var, gdzie Univ jest klasą wszystkich możliwych obiektów.

Def. 8.6

Dla dowolnych x : Var i F : QForm, x nazywa się zmienną indywidualną formuły kwantyfikatorowej.

F :⟺ x : Var i x wchodzi w zakres listy parametrów pewnego predykatu P wchodzącego w skład formuły F. ; por. def 8.11 dla listy parametrów predykatu.

13.01.09 Def. 8.7

Dla dowolnych x : Var, $\boxed{K}$: Class, F : QForm, i zmiennej indywidualnej x formuły F. lokalizację (położenie) zmiennej indywidualnej x nazywamy:

i) związaną w F :⟺ lokalizacja ta wchodzi w zakres pewnej podformuły formuły F postaci $\bigwedge_{x:K}(P)$ bądź $\bigvee_{x:K}(P)$;

ii) wolną w F :⟺ lokalizacja ta nie jest związana w F.

Def. 8.8

Dla dowolnych F : QForm i zmiennej indywidualnej x formuły F, x nazywamy zmienną indywidualną:

i) wolną w F :⟺ każda lokalizacja zmiennej x jest wolna w F;

ii) związaną w F :⟺ każda lokalizacja zmiennej x jest związana w F.

Def 8.9

Dla dowolnych F : QForm i zmiennej indywidualnej x formuły F, zakresem wiązania zmiennej x w F nazywamy wszystkie lokalizacje związane zmiennej x w F.

Przykład 8.10

W formule $\bigwedge_{x} F(x_1) \Rightarrow F(x_2)$ pierwsza lokalizacja zmiennej indywidualnej x jest związana, a druga wolna. Ponadto zmienna indywidualna x nie jest wolna ani związana w tej formule. Zakresem wiązania

zmiennej indywidualnej x
jest pierwsza lokalizacja.
W formule $\bigwedge_x F(x,y) \Leftrightarrow G(y)$
zmiennej indywidualnej x jest
związana zaś zmienna ind.
y jest wolna.

Def. 8.11
Dla dowolnych F : PForm i X : chan
mówimy, że x jest elementem
listy parametrów predykatu
F :⇔ gdy do utworzenia
predykatu F została użyta
reguła (8.3b) ze znakiem x.
Jak łatwo zauważyć, stosując
reguły (8.4a), (8.4b) i (8.4c)
możemy utworzyć dowolną
formułę zdaniową, czyli zachodzi
twierdzenie.
Tw. 8.12
:= [P : Var : p : LForm → P : QForm] : Rul

Oznacza to, że każda formuła
logiczna jest formułą kwantyfikato-
rową, a więc formuły kwantyfikatorowe
stanowią uogólnienie formuł
logicznych.