9. STRUKTURY MNOGOŚCIOWE

Współczesne teorie matematyczne budowane są w oparciu o tzw. struktury mnogościowe.

Definicja 9.1

Dla dowolnego $Z : \underline{Univ}$, Z nazywamy strukturą mnogościową $:\Leftrightarrow Z = (S, \in) : \underline{Str}$ dla pewnych $S : \underline{Class}$ i $\in \subset S \times S$ spełniających następujące warunki:

(9.1a) $\bigwedge\limits_{A,B:S} \left(A = B \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{t:S} (t \in A \Leftrightarrow t \in B)\right)$ // aksjomat identyczności zbiorów //;

(9.1b) $\bigvee\limits_{E:S} \bigwedge\limits_{t:S} \sim t \in E$ // aksjomat zbioru pustego //;

(9.1c) $\bigwedge\limits_{A,B:S} \bigvee\limits_{C:S} \bigwedge\limits_{t:S} (t \in C \Leftrightarrow t = A \vee t = B)$ // aksjomat pary //;

(9.1d) $\bigwedge\limits_{A:S} \bigvee\limits_{B:S} \bigwedge\limits_{t:S} \left(t \in B \Leftrightarrow \bigvee\limits_{x:S} (x \in A \wedge t \in x)\right)$ // aksjomat sumy //;

(9.1e) $\bigwedge\limits_{A:S} \bigvee\limits_{B:S} \bigwedge\limits_{t:S} \left(t \in B \Leftrightarrow t \in S \wedge \bigwedge\limits_{x:S} (x \in t \Rightarrow x \in A)\right)$ // aksjomat zbioru potęgowego //;

(9.1f) Dla dowolnych $\Phi, x : \underline{Var}$, jeśli Φ jest funkcją zdaniową zmiennej x utworzoną wyłącznie przy użyciu symboli logicznych, symboli "=" i "$\in$" oraz identyfikatorów określonych uprzednio obiektów klasy S, to $\bigwedge\limits_{A:S} \bigvee\limits_{B:S} \bigwedge\limits_{t:S} (t \in B \Leftrightarrow t \in A \wedge \Phi(t))$ // aksjomat wyróżniania //;

(9.1g) Dla dowolnych $\Phi, x, y : \underline{Var}$, jeśli Φ jest funkcją zdaniową zmiennych x, y utworzoną wyłącznie przy użyciu symboli logicznych, symboli "=" i "$\in$" oraz identyfikatorów określonych uprzednio obiektów klasy S, to $\bigwedge\limits_{A:S} \left(\bigwedge\limits_{x:S} \left(x \in A \Rightarrow \underline{\bigvee}\limits_{y:S} (y : S \wedge \Phi(x,y))\right) \Rightarrow \right.$ $\left. \bigvee\limits_{B:S} \bigwedge\limits_{t:S} \left(t \in B \Leftrightarrow t \in S \wedge \bigvee\limits_{x:S} (x \in A \wedge \Phi(x,t))\right)\right)$ // aksjomat zastępowania //;

(9.1h) Istnieje $A : S$ o tej własności, że dla każdego $E : S$ spełniającego warunek $\bigwedge\limits_{t:S} \sim t \in E$,

$$E \in A \wedge \bigwedge\limits_{x,y:S} \left[x \in A \wedge \bigwedge\limits_{t:S} (t \in y \Leftrightarrow t \in x \vee t = x) \Rightarrow y \in A\right]$$ // aksjomat nieskończoności //;

(9.1i) $\bigwedge\limits_{x:S} \left(\bigvee\limits_{t:S} t \in x \Rightarrow \bigvee\limits_{y:S} y \in x \wedge \bigwedge\limits_{t:S} (t \in x \Rightarrow \sim t \in y)\right)$ // aksjomat regularności (alternatywnie aksjomat ufundowania) //;

(9.1j) Dla każdego $A : S$ spełniającego warunek $\bigwedge\limits_{x:S} \left(x \in A \Rightarrow \bigvee\limits_{t:S} t \in x\right) \wedge \bigwedge\limits_{x,y:S} \left(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \Rightarrow \sim \bigvee\limits_{t:S} (t \in x \wedge t \in y)\right)$ zachodzi własność $\bigvee\limits_{z:S} \bigwedge\limits_{x:S} \left(x \in A \Rightarrow \underline{\bigvee}\limits_{t:S} (t \in x \wedge t \in z)\right)$ // aksjomat wyboru //.

Tu i w dalszym ciągu symbol $\underline{\bigvee}$ oznacza uogólnienie alternatywy wykluczającej $\underline{\vee}$ i oznacza istnienie dokładnie jednego obiektu spełniającego pewną własność, tzn.

"$\underline{\bigvee}_{x}\ \Phi(x)$" := "$\bigvee_{x} [\Phi(x) \wedge \bigwedge_{y} (\Phi(y) \Rightarrow x = y)]$" dla dowolnej funkcji zdaniowej Φ.

Układ warunków (9.1a) - (9.1j) nazywa się systemem aksjomatów (aksjomatycznym) Zermelo - Frankela teorii mnogości (alternatywnie teorii zbiorów) uzupełnionego o aksjomat wyboru. Oznaczany jest on w skrócie przez ZFC, także klasę wszystkich struktur mnogościowych będziemy oznaczać przez $\underline{\mathrm{ZFCStr}}$.

Definicja 9.2

Dla dowolnych $Z : \underline{\mathrm{Univ}}$ i $S : \underline{\mathrm{ZFCStr}}$, Z nazywa się:

(i) klasą zbiorów struktury $S :\Leftrightarrow Z = S\_\mathrm{supp}$;

(ii) zbiorem struktury $S :\Leftrightarrow Z : S\_\mathrm{supp}$;

(iii) relacją należenia do zbiorów struktury $S :\Leftrightarrow Z = S\_\mathrm{ep}$.

W celu zapewnienia istnienia struktury mnogościowej uzupełnimy dotychczasowy system aksjomatów C1 - C6 o następujący aksjomat.

Aksjomat C7

Istnieje $(S, \in) : \underline{\mathrm{ZFCStr}}$ o tej własności, że $S \subset \underline{\mathrm{FClass}}$ i $x \in y \Leftrightarrow x : y$ dla $x, y : S$.

Uwaga 9.3

Z aksjomatu C7 wynika, że klasa $\mathcal{F}$ złożona ze wszystkich klas S opisanych w tym aksjomacie nie jest pusta. W konsekwencji możemy rozważać przecięcie $\cap(\mathcal{F})$ rodziny $\mathcal{F}$.
Ponieważ $S \subset \underline{\mathrm{FClass}}$ dla $S : \mathcal{F}$, więc $\cap(\mathcal{F}) \subset \underline{\mathrm{FClass}}$. Co więcej z aksjomatu zbioru pustego (9.1b) wynika, że $\emptyset : S$ dla $S : \mathcal{F}$. Zatem $\emptyset : \cap(\mathcal{F})$ i w konsekwencji $\cap(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.
Można wykazać, że $(\cap(\mathcal{F}), \in) : \underline{\mathrm{ZFCStr}}$, gdzie $\in$ jest $x \in y \Leftrightarrow x : y$ dla $x, y : \cap(\mathcal{F})$.

relacją spełniającą warunek

Definicja 9.4

Dla dowolnego $Z : \underline{\mathrm{Univ}}$, Z nazywamy zbiorem $:\Leftrightarrow Z : \underline{\mathrm{Set}} := \cap(\mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F}$ jest rodziną klas określoną w uwadze 9.3.

Uwaga 9.5

Z określenia klasy $\underline{\mathrm{Set}}$ wynika $\underline{\mathrm{Set}} : \underline{\mathrm{FClass}}$. Z definicji 9.1 wynika, że klasa $\underline{\mathrm{Set}}$ ma „silniejsze" własności w porównaniu z klasą $\underline{\mathrm{Class}}$. Są one konsekwencjami warunków (9.1a) - (9.1j), które w istocie rozszerzają własności klasy $\underline{\mathrm{Class}}$ sformułowane w aksjomatach C1.–C6. W szczególności, z aksjomatu wyboru (9.1j) wynika następująca własność:

(9.6) dla każdego $A : \underline{Set}$, jeśli $A \neq \emptyset \wedge \bigwedge_{x:A} (x : \underline{Set} \wedge x \neq \emptyset) \wedge \bigwedge_{x,y:A} (x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset)$, to istnieje $f : \underline{Map}$ taki, że $\underline{D}(f) = A$ i $f(x) : x$ dla $x : A$.

Funkcję f interpretujemy tutaj jako funkcję wyboru (alternatywnie selektor) przyporządkowującą każdemu zbiorowi rodziny zbiorów A jeden element tego zbioru.

Uwaga 9.7

Z własności (9.6) można wyprowadzić silniejszą własność:

(9.8) dla każdego $A : \underline{Set}$, jeśli $A \neq \emptyset \wedge \bigwedge_{x:A} (x : \underline{Set} \wedge x \neq \emptyset)$, to istnieje $f : \underline{Map}$ taki, że $\underline{D}(f) = A$ i $f(x) : x$ dla $x : A$.

Z własności (9.8) często korzysta się w celu wykazania istnienia funkcji, która przyporządkowuje każdemu zbiorowi zadanej niepustej rodziny niepustych zbiorów jeden element.