12. Podstawowe operacje na klasach

Korzystając z uwagi 11.2 możemy określić następujące klasy.

Definicja 12.1. Dla dowolnych Z : $\underline{\text{Univ}}$ i A, B : $\underline{\text{Class}}$, Z nazywamy:

(i) *sumą* (alt. unią) klas A i B $:\Leftrightarrow Z = A \cup B := \{x | x : A \vee x : B\}$ //$\Phi(x) :=$ " $x : A \vee x : B$ " : $\underline{\text{LFun}}(x)$//;

(ii) *iloczynem* (alt. przecięciem) klas A i B $:\Leftrightarrow Z = A \cap B := \{x | x : A \wedge x : B\}$ //$\Phi(x) :=$ " $x : A \wedge x : B$ " : $\underline{\text{LFun}}(x)$//;

(iii) *różnicą klas A i B* //czyli od klasy A odejmujemy klasę B// $:\Leftrightarrow Z = A \backslash B := \{x | x : A \wedge \sim x : B\}$ //$\Phi(x) :=$ " $x : A \wedge \sim x : B$ " : $\underline{\text{LFun}}(x)$//;

(iv) *różnicą symetryczną klas A i B* $:\Leftrightarrow Z = A \div B := \{x | x : A \veebar x : B\}$ //$\Phi(x) :=$ " $x : A \veebar x : B$ " : $\underline{\text{LFun}}(x)$//;

(v) *dopełnieniem klasy A* $:\Leftrightarrow Z = A^c := \{x | \sim x : A\}$ //$\Phi(x) :=$ " $\sim x : A$ " : $\underline{\text{LForm}}(x)$//.

Ćwiczenie 12.2. Wykazać, że dla dowolnych A, B, C : $\underline{\text{Class}}$ zachodzą równości:

(i) $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$;
(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ i $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ i $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
(iv) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ i $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
(v) $A \backslash B = A \cap B^c$;
(vi) $A \div B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$;
(vii) $C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$ i $C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$.

Dla przykładu wykażemy pierwszą z równości w (iv). Dla dowolnego x : $\underline{\text{Univ}}$ mamy:

$$x : (A \cup B)^c \leftarrow /\!/\text{def. 12.1 (v)}/\!/\rightarrow \sim x : A \cup B \leftarrow /\!/\text{def. 12.1 (i)}/\!/\rightarrow$$
$$\sim (x : A \ \vee x : B) \leftarrow /\!/ \sim (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \sim \alpha \wedge \sim \beta : \underline{\text{Taut}}/\!/\rightarrow$$
$$\sim x : A \wedge \sim x : B \leftarrow /\!/\text{def. 12.1 (v)}/\!/\rightarrow x : A^c \wedge x : B^c \leftarrow /\!/\text{def. 12.1 (ii)}/\!/\rightarrow x : A^c \cap B^c.$$

Stąd na mocy tautologii $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha) \Leftrightarrow (\alpha \Leftrightarrow \beta)$, $x : (A \cup B)^c \Leftrightarrow x : A^c \cap B^c$ dla x : $\underline{\text{Univ}}$. Korzystając z aks. C3 dostajemy $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, c.n.d.

Ćwiczenie 12.3. Wykazać, że dla dowolnych A, B : $\underline{\text{Class}}$ zachodzą własności:

(i) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$;
(ii) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$;
(iii) $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

//Zauważmy, że dla wszystkich A, B : $\underline{\text{Class}}$ implikacja $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$ wynika z własności (i) w ćw. 12.3 oraz oczywistych inkluzji $A \subset A \cup B$ i $A \cap B \subset A$. Istotnie, dla dowolnych A, B : $\underline{\text{Class}}$ mamy:

$A \cap B = A \cup B$ —//$A \subset A \cup B$ and $A \cap B \subset A$//→ $A \subset A \cap B$ and $A \cap B \subset A$
—//ćw. 11.8//→ $A \cap B = A$ —//ćw. 12.3 (i)//→ $A \subset B$.
$A \cap B = A \cup B$ —//$B \subset A \cup B$ and $A \cap B \subset B$//→ $B \subset A \cap B$ and $A \cap B \subset B$
—//ćw. 11.8//→ $A \cap B = B$ —//ćw. 12.3 (i)//→ $B \subset A$.
$A \subset B$ and $B \subset A$ —//ćw. 11.8//→ $A = B$.

Implikacja odwrotna $A = B \Rightarrow A \cap B = A \cup B$ jest oczywista, ponieważ $A \cap A = A = A \cup A$.//

Definicja 12.4. Dla dowolnego Z : $\underline{\text{Univ}}$, Z nazywamy *rodziną klas* $:\Leftrightarrow$

$$Z : \underline{\text{FClass}} := \left\{K \,\middle|\, K : \underline{\text{Class}} \wedge \bigwedge_{x:K} x : \underline{\text{Class}}\right\}.$$

//$\Phi(K) :=$ " $K : \underline{\text{Class}} \wedge \bigwedge_{x:K} x : \underline{\text{Class}}$ " : $\underline{\text{LFun}}(K)$.//

Definicja 12.5. Dla dowolnych Z : $\underline{\text{Univ}}$ i A : $\underline{\text{Class}}$, Z nazywamy *klasą potęgową klasy* A $:\Leftrightarrow$ $Z : \underline{\text{PClass}}(A) := \{K | K : \underline{\text{Class}} \wedge K \subset A\}$.
$/\!/\Phi(K) :=$ " $K : \underline{\text{Class}} \wedge \bigwedge\limits_{x}(x : K \Rightarrow x : A)$ " $: \underline{\text{LFun}}(K)./\!/$

Dla przykładu, $\underline{\text{PClass}}(\{x, y\}) = \{K | K = \varnothing \ \vee K = \{x\} \vee K = \{y\} \vee K = \{x, y\}\}$.

Ćwiczenie 12.6. Wykazać, że dla każdego A : $\underline{\text{Class}}$, $\underline{\text{PClass}}(A) : \underline{\text{FClass}}$.

Definicja 12.7. Dla dowolnych Z : $\underline{\text{Univ}}$ i F : $\underline{\text{FClass}}$, Z nazywamy:

(i) *sumą* (alt. unią) rodziny klas F $:\Leftrightarrow Z = \bigcup(F) := \left\{x \,\middle|\, \bigvee\limits_{K:F} x : K\right\}$;

(ii) *iloczynem* (alt. przecięciem) rodziny klas F $:\Leftrightarrow Z = \bigcap(F) := \left\{x \,\middle|\, \bigwedge\limits_{K:F} x : K\right\}$.

Ćwiczenie 12.8. Wykazać, że dla dowolnych A, B : $\underline{\text{Class}}$, $\{A, B\} : \underline{\text{FClass}}$ oraz $\bigcup(\{A, B\}) = A \cup B$ i $\bigcap(\{A, B\}) = A \cap B$.

Ćwiczenie 12.9. Wykazać, że dla dowolnych F : $\underline{\text{FClass}}$ i $A : F, \bigcap(F) \subset A \subset \bigcup(F)$.

Uwaga 12.10. Z aks. C1 i def. 12.4 wynika, że $\underline{\text{Class}} : \underline{\text{FClass}}$. Ponadto z aks. C1 mamy $\underline{\text{Univ}} : \underline{\text{Class}}$ i $A \subset \underline{\text{Univ}}$ dla A : $\underline{\text{Class}}$. Stąd $\bigcup(\underline{\text{Class}}) \subset \underline{\text{Univ}}$. Na odwrót, z ćw. 12.9 wynika, że $\underline{\text{Univ}} \subset \bigcup(\underline{\text{Class}})$, skąd na mocy ćw. 11.8, $\bigcup(\underline{\text{Class}}) = \underline{\text{Univ}}$. Ponieważ $\varnothing : \underline{\text{Class}}$, więc z ćw. 12.9 wynika, że $\bigcap(\underline{\text{Class}}) \subset \varnothing$. Na odwrót, z własności (11.14) dostajemy inkluzję $\varnothing \subset \bigcap(\underline{\text{Class}})$, skąd na mocy ćw. 11.8, $\bigcap(\underline{\text{Class}}) = \varnothing$.

Definicja 12.11. Dla dowolnych Z, Z' : $\underline{\text{Univ}}$, Z, Z' nazywamy *klasami rozłącznymi* $:\Leftrightarrow Z, Z'$: $\underline{\text{Class}}$ i $Z \cap Z' = \varnothing$.

Uwaga 12.12. Z własności (11.12) i (11.13) wynika, że dla dowolnych A, B : $\underline{\text{Class}}$ następujące własności są parami równoważne:

(i) A i B są klasami rozłącznymi;

(ii) $\sim \bigvee\limits_{x}(x : A \wedge x : B)$;

(iii) $\bigwedge\limits_{x}(\sim x : A \vee \sim x : B)$.

Definicja 12.13. Dla dowolnego Z : $\underline{\text{Univ}}$, Z nazywamy *rodziną klas parami rozłącznych* $:\Leftrightarrow$ Z : $\underline{\text{FClass}}$ i zachodzi warunek

$$A \neq B \Rightarrow A \cap B = \varnothing \quad \text{dla} \quad A, B : Z. \tag{12.14}$$

$/\!/$To oznacza, że każde dwie różne klasy rodziny Z są rozłączne.$/\!/$