

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 5 – aproksymacja oparta o wielomiany Czebyszewa

Opis rozwiązania

Przebieg algorytmu:

1. Wyznaczenie węzłów dla podanego przedziału, korzystając ze wzoru:

$$x_i = \frac{1}{2}((b-a) \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{(2n+2)}\right) + b + a)$$

gdzie n – stopień, $i = 0, 1, \dots, n$

2. Normalizacja węzłów do przedziału $[-1, 1]$, korzystając ze wzoru:

$$z_k = \frac{2x - (b+a)}{b-a}$$

3. Obliczenie współczynników wielomianu, korzystając ze wzoru:

$$a_i = \frac{\sum_{k=1}^i w_k T_i(z_k)}{\sum_{k=1}^i T_i(z_k)^2}$$

gdzie w_k – wartość obliczona dla k -tego węzła, T_i – wielomian Czebyszewa i -tego stopnia obliczony ze wzoru:

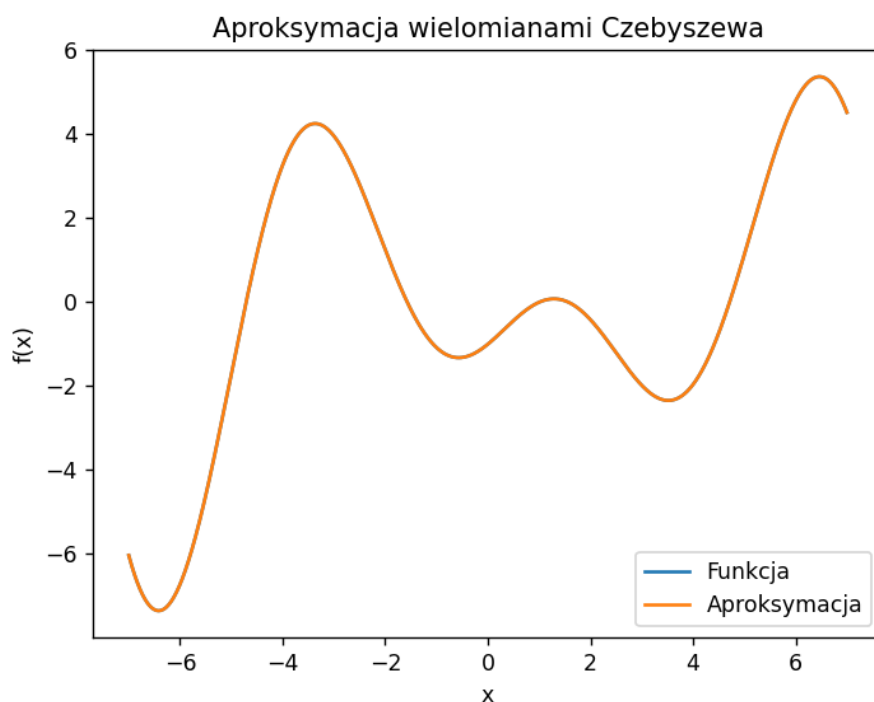
$$T_i(x) = 2x * T_{i-1}(x) - T_{i-2}(x)$$

4. Obliczenie wartości wielomianu aproksymacyjnego, korzystając ze wzoru:

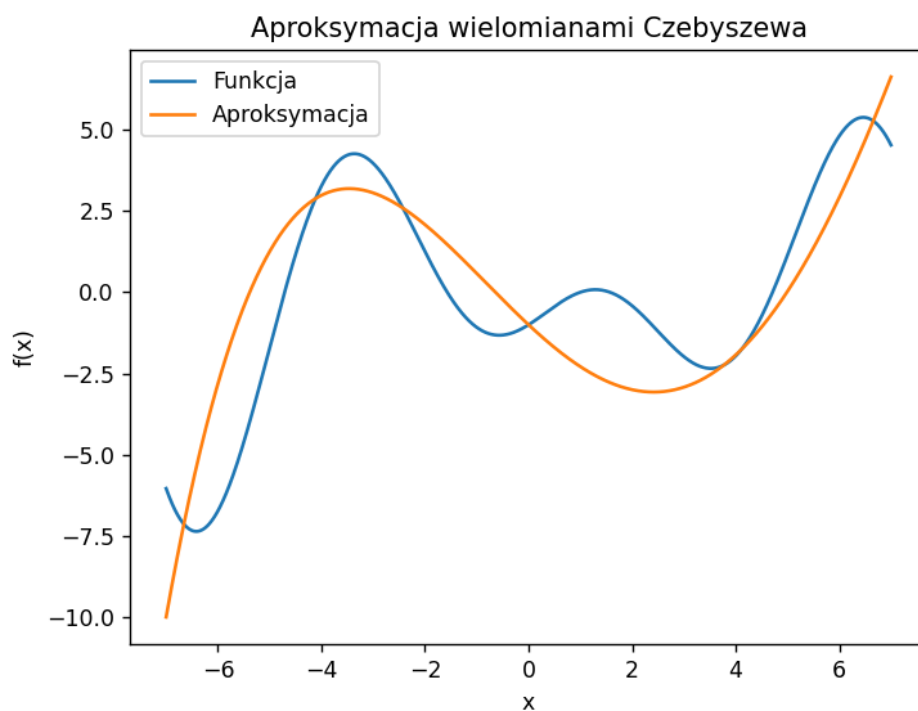
$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i T_i\left(2 \frac{x-a}{b-a} - 1\right)$$

Wyniki

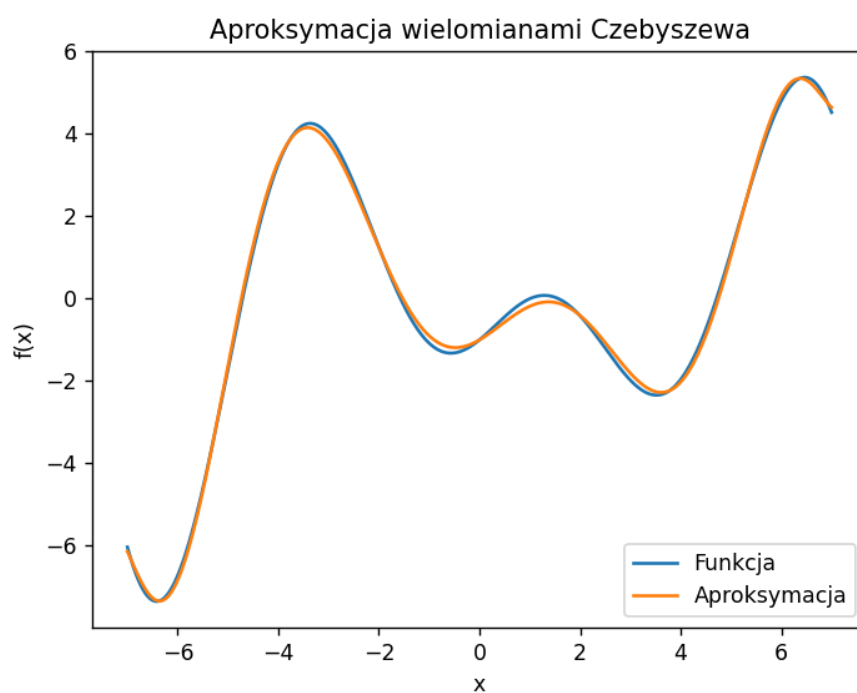
$f(x) = \cos x \cdot (x - 1)$		
Przedział	Stopień wielomianu	Błąd
$[-7, 7] - [-1, 1]$	15	0.0002137



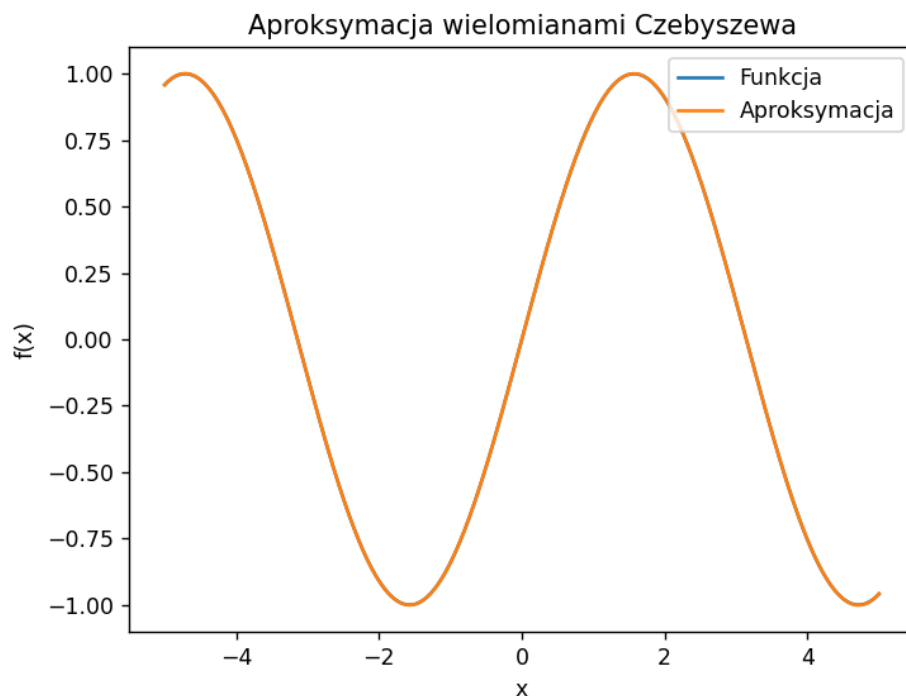
Przedział	Stopień wielomianu	Błąd
$[-7, 7] - [-1, 1]$	4	1.48495



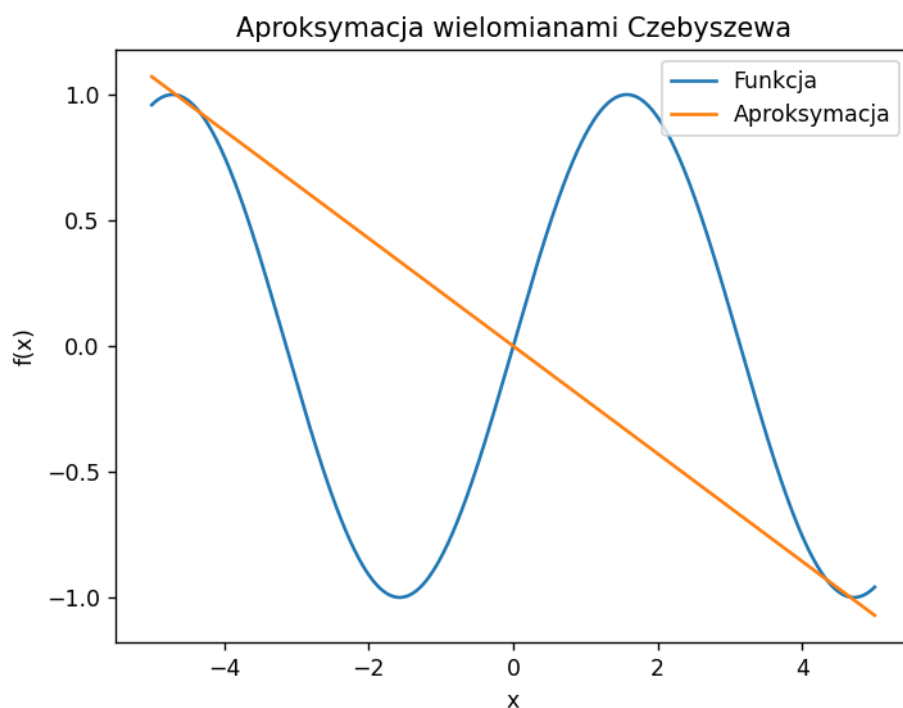
Przedział	Stopień wielomianu	Błąd
$[-7, 7] - [-1, 1]$	10	0.10128



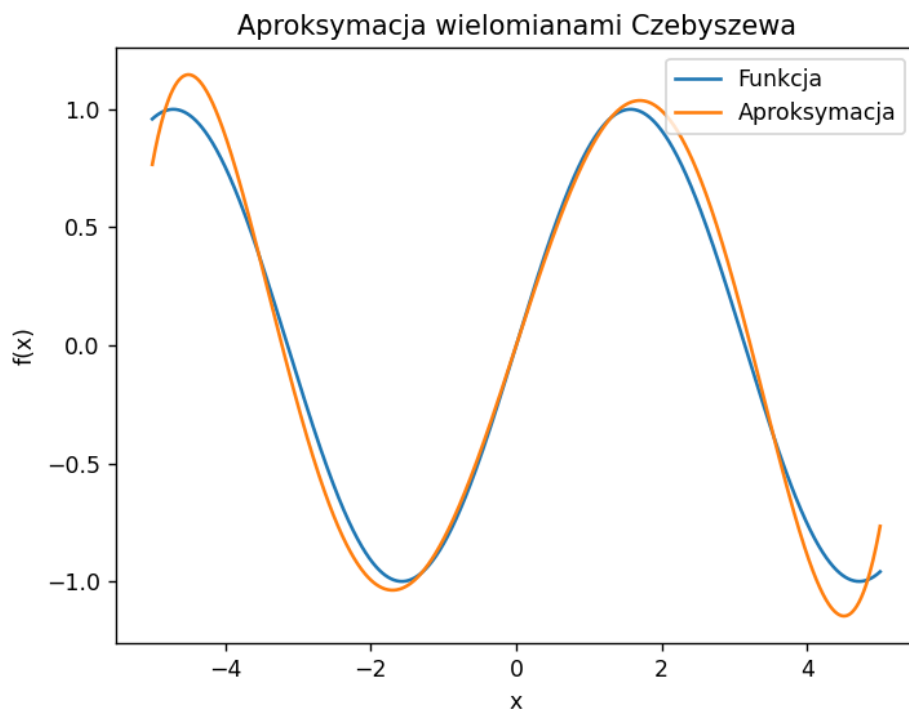
$f(x) = \sin x$		
Przedział	Stopień wielomianu	Błąd
$[-5, 5] - [-1, 1]$	9	0.0042



Przedział	Stopień wielomianu	Błąd
$[-5, 5] - [-1, 1]$	2	0.66869



Przedział	Stopień wielomianu	Błąd
$[-5, 5] - [-1, 1]$	5	0.07690



Wnioski

- Im większy stopień wielomianu aproksymującego, tym dokładniejsza jest aproksymacja,
- Dla mniej skomplikowanych funkcji, np. $\sin(x)$, wystarcza mniejszy stopień, np. 5, by otrzymać zadowalającą aproksymację.