

# OpenTsiolkovsky テクニカルドキュメント

Interstellar Technologies Inc. 稲川貴大

2017 年 9 月 15 日

## 概要

## 目次

1	イントロダクション	2
2	Program capabilities/Installation	2
3	Basis of theory and model	2
3.1	座標系の定義 . . . . .	3
3.2	座標変換の記述方法 . . . . .	3
3.3	運動方程式 . . . . .	4
3.4	外力 . . . . .	4
3.5	座標変換 . . . . .	6
4	Input definition	8
5	Output definition	9

# 1 イン트로ダクション

OpenTsiolkovsky はロケット用フライトシミュレータです。地球の重力のみ考慮した、地球近傍でのロケットの軌道投入までの短時間の軌道計算を行なうことができます。地球中心の慣性座標系で計算を行います。

ロケットの概念設計から、ミッション決定、既存のロケットの能力判別など、ロケットの軌道計算は様々なフェイズで必要とされます。

軌道計算は 6 自由度の運動方程式で記述可能です。並進 3 自由度 (XYZ)、回転 3 自由度 (ロールピッチヨー) です。基礎的な情報しか必要無いときは自由度を減らし、1 自由度、2 自由度、3 自由度、5 自由度など複数のシミュレーションで十分ですが、OpenTsiolkovsky では 6 自由度で計算しています。

運動方程式は常微分方程式となります。この常微分方程式のパラメータになるものをユーザが入力し、これをソルバー (OpenTsiolkovsky の機能) によって数値積分したものを出力します。

つまり、OpenTsiolkovsky とはロケットのパラメータファイルをパースして取り込み、常微分方程式を数値積分で解き、結果を整形して出力するソフトウェアです。

ちなみに Tsilkovsky とはロシア・ソ連のロケット研究者で、ツォルコフスキーの式と呼ばれるロケットの基礎的な理論を示した人物。名言としては下記があります。

「今日の不可能は、明日可能になる」

「地球は叡智の揺り籠だが、しかしその叡智が永遠に揺り籠に留まるべきではない。」

$$\Delta V = I_{sp} g_0 \ln \frac{m_0}{m_T} \quad (1)$$

## 2 Program capabilities/Installation

## 3 Basis of theory and model

ロケットの運動方程式は座標の取り方によって様々な表し方がある。通常誘導・航法の解析には慣性座標系。制御や安定性の解析には機体座標系 (運動座標系) が用いられる。運動方程式は並進の運動方程式、回転の運動方程式、振動の運動方程式に分解してそれぞれを解いていくが、OpenTsiolkovsky では振動を考えず、回転についてはユーザーが指定し、並進の運動方程式のみを考えていく。

### 3.1 座標系の定義

OpenTsiolkovsky で使っている座標系をまとめる。

表 1 座標系の定義

	座標名	記号・原点	
慣性座標	地球中心慣性座標系 (I、ECI)	$(X_I, Y_I, Z_I)$ $(X_{ECI}, Y_{ECI}, Z_{ECI})$ 原点：地球中心	$\mathbf{X}_I$ : $t = 0$ のとき緯度 $0^\circ$ 経度 $0^\circ$ 方向 $\mathbf{Z}_I$ : 地球自転軸方向 $\mathbf{Y}_I$ : 右手直交系 ( $\mathbf{Y}_I = \mathbf{Z}_I \times \mathbf{X}_I$ )
	地球中心回転座標系 (E、ECEF)	$(X_E, Y_E, Z_E)$ $(X_{ECEF}, Y_{ECEF}, Z_{ECEF})$ 原点：地球中心	$\mathbf{X}_E$ : 緯度 $0^\circ$ 経度 $0^\circ$ 方向 $\mathbf{Z}_E$ : 地球自転軸方向 $\mathbf{Y}_E$ : 右手直交系 ( $\mathbf{Y}_E = \mathbf{Z}_E \times \mathbf{X}_E$ )
運動座標	局所平面座標系 (H、NED)	$(X_H, Y_H, Z_H)$ $(X_{NED}, Y_{NED}, Z_{NED})$ 原点：機体質量中心	$\mathbf{X}_H$ : 局所水平面内で北方向 $\mathbf{Y}_H$ : 局所水平面内で東方向 $\mathbf{Z}_H$ : 機体から地心へ方向
	速度座標系 (A、AIR)	$(X_A, Y_A, Z_A)$ $(X_{AIR}, Y_{AIR}, Z_{AIR})$ 原点：機体質量中心	$\mathbf{X}_A$ : 対気速度ベクトル $\mathbf{V}_A$ 方向 $\mathbf{Y}_A$ : 飛行面に垂直方向 $\mathbf{Y}_A = \mathbf{V}_A \times \mathbf{r}$ $\mathbf{Z}_A$ : 右手直交系 ( $\mathbf{Z}_A = \mathbf{X}_A \times \mathbf{Y}_A$ )
	機体座標系 (B、BODY)	$(X_B, Y_B, Z_B)$ $(X_{BODY}, Y_{BODY}, Z_{BODY})$ 原点：機体質量中心	$\mathbf{X}_B$ : 機軸方向 (ロール軸) $\mathbf{Y}_B$ : 頭上げ方向 (ピッチ軸) $\mathbf{Z}_B$ : 右手直交系 (ヨー軸)

### 3.2 座標変換の記述方法

座標変換は座標変換行列 (方向余弦行列: Direct Cosine Matrix (DCM)) を用いて例えば、ある力  $F$  があつたときに、C 座標系での力ベクトル  $F_C$  から D 座標系での力ベクトル  $F_D$  を求めたいとしたときに、

$$F_D = D_C^D \times F_C \quad (2)$$

のように座標変換する DCM を  $D_C^D$  と表す。

したがって、ECI 座標系から ECEF 座標系への DCM は  $D_I^E (= D_{ECI}^{ECEF})$  と表す。

### 3.3 運動方程式

運動座標系（加速度座標系）では遠心力やコリオリ力などを考慮する必要がある。OpenTsiolkovsky では慣性座標系で演算することによって座標系の回転を考慮する必要を無くし、シンプルな方程式で考えている。反面、座標変換を多用しなければならない。

慣性座標系での並進の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}_I \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_I = \frac{d\mathbf{V}_I}{dt} = \frac{1}{m} (\mathbf{F}_{TI} + \mathbf{F}_{AI} + \mathbf{F}_{gI}) \quad (4)$$

$$= \frac{D_B^I (\mathbf{F}_{TB} + \mathbf{F}_{AB})}{m} + D_H^I \mathbf{g}_H \quad (5)$$

$$= \frac{1}{m} (D_{BODY}^{ECI} (\mathbf{F}_{TB} + D_{AIR}^{BODY} \mathbf{F}_{AA})) + D_{NED}^{ECI} \mathbf{g}_{NED} \quad (6)$$

したがって下記項目を詳細に考えていく、

#### 3.3.1 外力

- 推力  $\mathbf{F}_{TB}$  : 機体座標系での推力ベクトル
- 空気力  $\mathbf{F}_{AA}$  : 速度座標系での空気力ベクトル
- 重力加速度  $\mathbf{g}_H$  : 局所平面座標系での重力加速度ベクトル

#### 3.3.2 座標変換行列

- 機体座標系 → ECI 座標系  $D_B^I (= D_{BODY}^{ECI})$
- 速度座標系 → 機体座標系  $D_A^B (= D_{AIR}^{BODY})$
- NED 座標系 → ECI 座標系  $D_H^I (= D_{NED}^{ECI})$

### 3.4 外力

#### 3.4.1 空気モデル

Standard Atmosphere 1976    ISO 2533:1975

### 3.4.2 推力 $F_{TB}$

エンジンは複数個数を考えるのが正確ではあるが、OpenTsiolkovsky ではエンジン首振りなし、1 個で考える。

$$\mathbf{F}_{TB} = \begin{bmatrix} F_{TXB} & F_{TYB} & F_{TZB} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} F_T & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

•

また、ユーザーによって、燃焼室推力  $F_{vac}[\text{N}]$  と燃焼室比推力  $I_{spvac}[\text{sec}]$  とスロート径  $d_{th}$ 、ノズル出口圧力  $p_e$ 、ノズル開口面積比  $\epsilon$  を設定する。

$$\dot{m} = \frac{F_{vac}}{I_{spvac} \cdot g_0} \quad [\text{kg/s}] \quad (9)$$

$$F = F_{vac} + d_{th}\epsilon(p_e - p_a) \quad (10)$$

### 3.4.3 空気力 $F_{AB}$

ロケットに加わる空気力を速度座標系で表すと速度ベクトル  $\mathbf{V}_A$  に平行で逆方向の抗力  $F_A$  と垂直方向の揚力（法線力） $F_L$  からなる。

$$F_D = C_D \cdot q \cdot S \quad (11)$$

$$F_L = C_L \cdot q \cdot S \quad (12)$$

$$q = \rho(h)V_A^2/2 \quad (13)$$

速度座標系での空気力を

$$\mathbf{F}_{AA} = \begin{bmatrix} -F_D & 0 & F_L \end{bmatrix} \quad (14)$$

とすれば、機体座標系での空気力は

$$\mathbf{F}_{AB} = D_{AIR}^{BODY} \mathbf{F}_{AA} = D_{AIR}^{BODY} \begin{bmatrix} -F_D & 0 & F_L \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$D_{AIR}^{BODY} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

### 3.4.4 重力 $F_{gH}$

重力の

$$r = h + r_e (1 - \epsilon \sin^2(lat)) \quad (17)$$

$$\mathbf{g}_H = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{r^2} \frac{3}{2} \left(\frac{r_e}{r}\right)^2 \sin 2\phi \\ 0 \\ \frac{\mu}{r^2} \left[1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{r_e}{r}\right)^2 (3 \sin^2 \phi - 1)\right] \end{bmatrix} \quad (18)$$

## 3.5 座標変換

### 3.5.1 機体座標系 $\rightarrow$ ECI 座標系 $D_B^I (= D_{BODY}^{ECI})$

$$D_{BODY}^{ECI} = D_{ECI}^{BODY^T} \quad (19)$$

$$D_{ECI}^{BODY} = D_{NED}^{BODY} \times D_{ECI}^{NED} \quad (20)$$

前者の  $D_{NED}^{BODY}$  については

$$D_{NED}^{BODY} = \begin{bmatrix} \cos(el) \cos(az) & \cos(el) \sin(az) & -\sin(el) \\ -\sin(az) & \cos(az) & 0 \\ \sin(el) \cos(az) & \sin(el) \sin(az) & \cos(el) \end{bmatrix} \quad (21)$$

後者の  $D_{ECI}^{NED}$  については

$$D_{ECI}^{NED} = D_{ECEF}^{NED} \times D_{ECI}^{ECEF} \quad (22)$$

$$D_{ECEF}^{NED} = \begin{bmatrix} -\sin(lat) \cos(lon) & -\sin(lat) \sin(lon) & \cos(lat) \\ -\sin(lon) & \cos(lon) & 0 \\ -\cos(lat) \cos(lon) & -\cos(lat) \sin(lon) & -\sin(lat) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$D_{ECI}^{ECEF}$  については、 $\theta = \omega \times t$  として、

$$D_{ECI}^{ECEF} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

### 3.5.2 速度座標系→機体座標系 $D_A^B (= D_{AIR}^{BODY})$

迎角を  $\alpha$  と  $\beta$  として、

$$D_{BODY}^{AIR} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) & \sin(\beta) & \sin(\alpha) \cos(\beta) \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) & \cos(\beta) & -\sin(\alpha) \sin(\beta) \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$D_{AIR}^{BODY} = D_{BODY}^{AIR^T} \quad (26)$$

### 3.5.3 NED 座標系→ECI 座標系 $D_H^I (= D_{NED}^{ECI})$

$$D_{NED}^{ECI} = D_{ECI}^{NED^T} \quad (27)$$

式 (22) より求まる

## 4 Input definition



## 5 Output definition

## 参考文献

- [1] U.S. Standard Atmosphere, 1976.
- [2] 航空宇宙工学便覧第 3 版.