

# 電気工学2第6回

藤田 一寿

導体

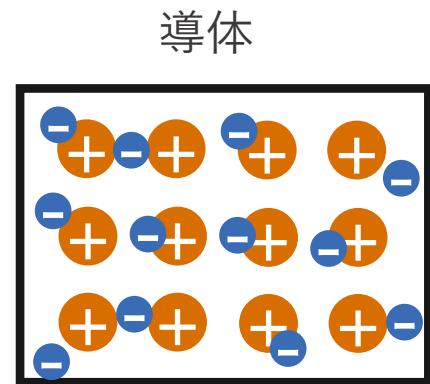
## ■ 導体とは

---

- 電気を伝える物質
  - 導体
- 電気を伝えない物質
  - 不導体, 絶縁体

# ■ 導体と電場

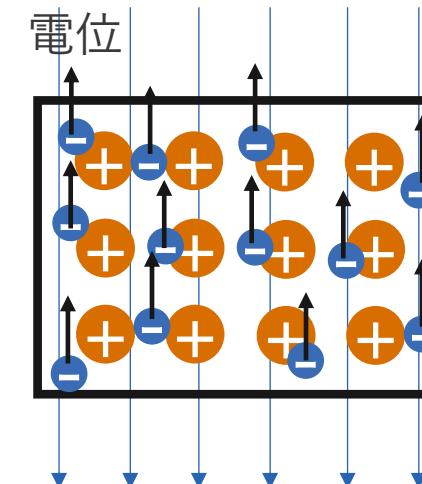
- 電場中に導体を置くとどうなるか？



電子はバラバラに分布している。



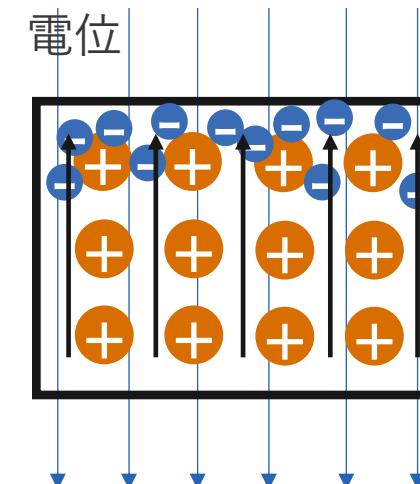
外部から電場をかける。



電子は電場により移動する。



導体



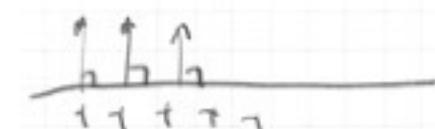
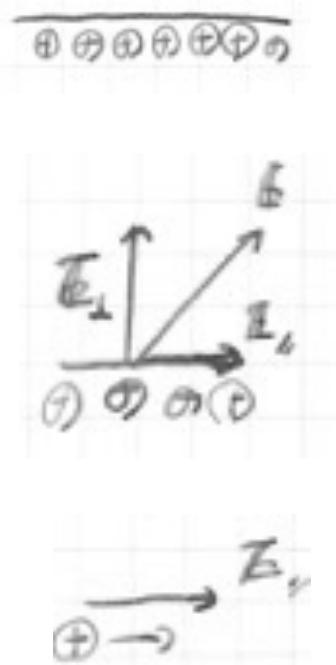
電子は導体の端に移動するため導体内部に電場が発生する。内部に発生した電場と外部の電場が相殺する。

- 導体内では

- 電場が0
- 電位が一定（接地すると0）

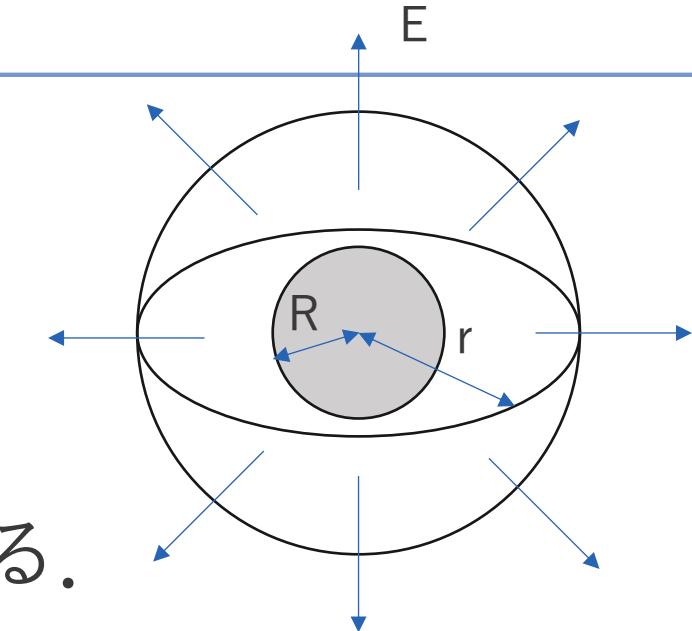
## ■ 導体表面の電場

- 導体表面に電荷が一様に分布しているとき
- もし電場が導体面に対し斜めなら、電場は導体面に対し平行な成分を持つ。
- そうならば、導体表面の電荷は電場によって移動し続けることになる。
- つまり、電場が導体表面に対し斜めなら、導体表面に電荷は一様に分布できない。
- よって、電場は導体表面に対し垂直でなければならない。



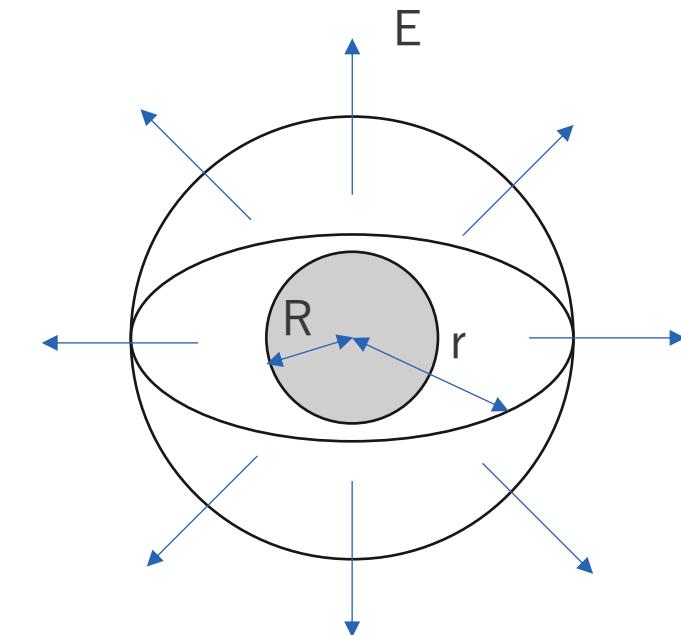
## ■ 導体球に分布する電荷が作る電場

- 半径 $R$ の導体球に電荷 $Q$ が分布しているとする。
- この球の中心から $r$ の場所の電場を求める。
- 電荷が分布している球と同心の半径 $r$ の球を考える。
- $R < r$ の時,
- 導体の電荷は $Q$ だから, よってガウスの法則より
- $$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
- $$E = \frac{Q}{4\epsilon_0 r^2}$$
- $R \leq r$ の時, 導体内部の電場は0である。



## ■ 導体球に分布する電荷が作る電位

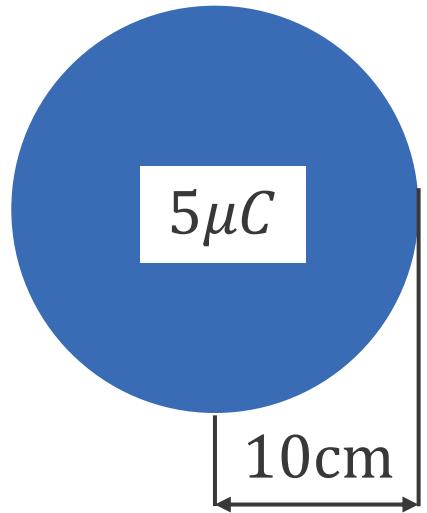
- 半径 $R$ の導体球に電荷 $Q$ が分布しているときの電位を求める。ただし、無限遠方を基準とする。
- 電荷が分布している球と同心の半径 $r$ の球を考える。
- $R < r$ の時の電場は $E = \frac{Q}{4\epsilon_0 r^2}$ だから、電位は
- $$V = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\epsilon_0 x^2} dx = \left[ \frac{Q}{4\epsilon_0 x} \right]_{\infty}^r = \frac{Q}{4\epsilon_0 r}$$
- $R \leq r$ の時、導体内部の電場は0なので、電位は
- $$V = \frac{Q}{4\epsilon_0 r}$$



## ■ 問題

- 半径10cmの導体球に $5\mu C$ が帯電している。以下の間に答えよ。ただし、 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ を  $9.0\times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$  とする。

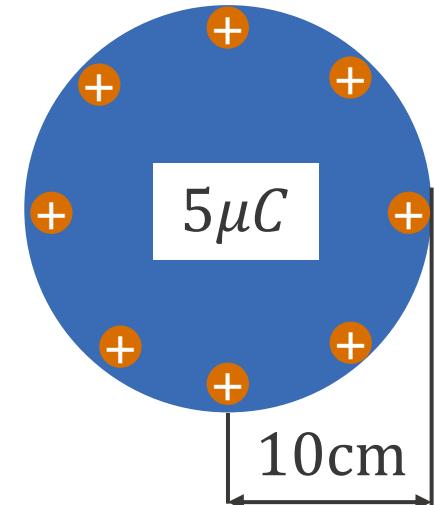
- 帯電した電荷は導体球のどこに分布するか。
- 中心から5cmの場所における電場を求めよ。
- 中心から5cmの場所における電位を求めよ。
- 中心から100cmの場所における電場を求めよ。
- 中心から100cmの場所における電位を求めよ。



## 問題

- 半径10cmの導体球に $5\mu C$ が帯電している。以下の間に答えよ。ただし、 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ を $9.0\times10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2$ とする。

- 帯電した電荷は導体球のどこに分布するか。
- 中心から5cmの場所における電場の強さを求めよ。
- 中心から100cmの場所における電場の強さを求めよ。
- 中心から5cmの場所における電位を求めよ。ただし無限遠方を0とする。
- 中心から100cmの場所における電位を求めよ。ただし無限遠方を0とする。



- 導体表面に分布する。
- 導体内の電場の強さは0N/Cである。
- 電場の強さは $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} = 9.0\times10^9 \times 5 \times 10^{-6} / 1^2 = 4.5 \times 10^4 \text{ N/C}$
- 導体内部の電位は導体表面と同じである。つまり、 $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} = 9.0\times10^9 \times 5 \times 10^{-6} / 0.1 = 4.5 \times 10^5 \text{ V}$
- 電位は $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} = 9.0\times10^9 \times 5 \times 10^{-6} / 1 = 4.5 \times 10^4 \text{ V}$

## ■ 問題

- 真空中に正電荷で帯電した半径 $r$ の球形導体がある。電界強度が最も大きい部分はどれか。
  1. 導体の中心点
  2. 導体の中心から $0.5r$ 離れた位置
  3. 導体表面近傍で導体内の位置
  4. 導体表面近傍で導体外の位置
  5. 導体中心から $2r$ 離れた位置

## 問題

- 真空中に正電荷で帯電した半径 $r$ の球形導体がある。電場強度が最も大きい部分はどれか。
1. 導体の中心点
  2. 導体の中心から $0.5r$ 離れた位置
  3. 導体表面近傍で導体内の位置
  4. 導体表面近傍で導体外の位置
  5. 導体中心から $2r$ 離れた位置
- 
1. 導体内の電場は0
  2.  $0.5r$ の場所は導体内なので電場は0
  3. 表面近傍であっても導体内の電場は0
  4. 電場の強さは逆二乗則に従っているので $5$ の $2r$ 離れた場所より導体球近傍の方が電場は強い

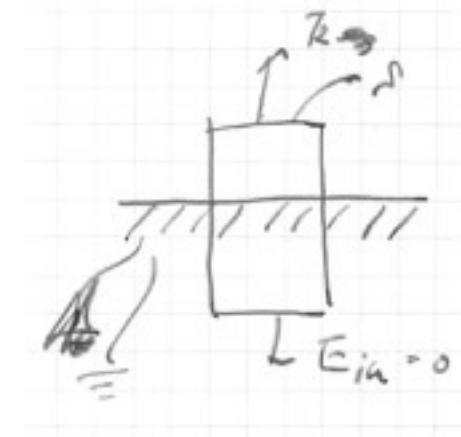
## ■ 無限に広い導体平面にある電荷が生成する電場と電位

- 無限に広い導体表面に面密度  $\sigma$  で電荷が帯電しているとする。
- この時生じる電場を求める。
- 図のように底面積  $S$  の四角柱を考える。導体が作る電気力線は、導体表面に対し垂直であるので、電場は四角柱の側面から出ない。さらに、導体中には電場は無い。よってガウスの法則は

$$ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

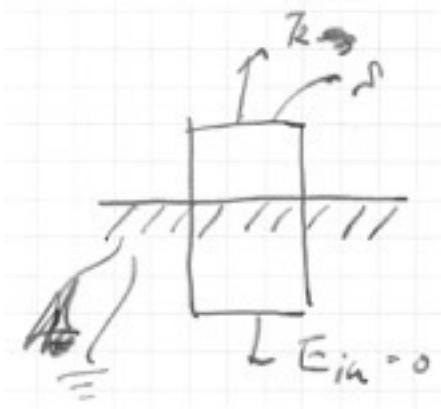
- とかける。電場  $E$  は

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



## ■ 無限に広い導体平面にある電荷が生成する電場と電位

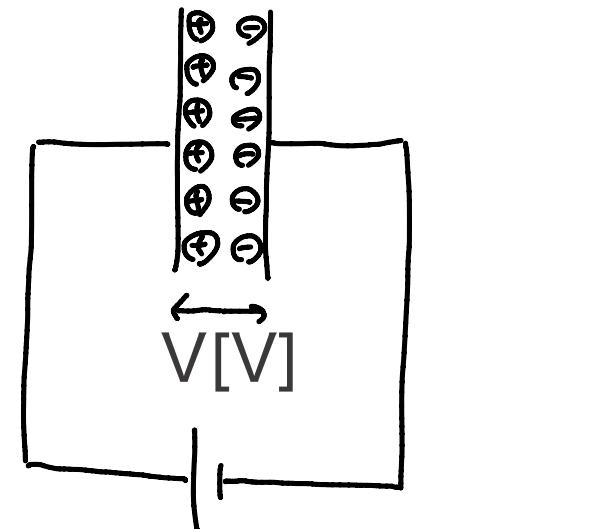
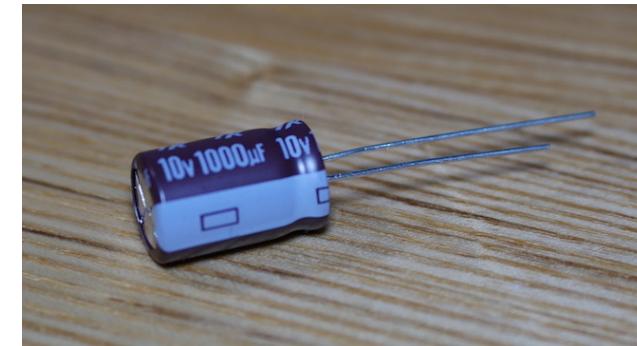
- 無限に広い導体平面にある電荷が作る電場Eは
- $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
- である。では電位は導体表面を基準とし導体表面からの距離をdとすると、
- $V = - \int_d^0 \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$
- つまり、電位は導体表面からの距離に比例する。



# 電気容量とコンデンサ

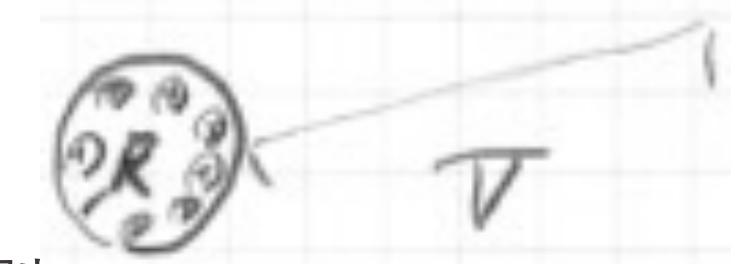
## ■ コンデンサ（キャパシタ）

- コンデンサ
  - 電荷を貯めることができる。
- コンデンサの両端電位差Vの時、コンデンサに貯まる電荷Qは
- $Q = CV$
- 比例定数Cは電気容量という。
- 電気容量の単位は F (ファラデー, ファラッド) Q[C]貯まる



## ■ 導体球の電気容量

- 単なる導体球も電化を貯めることができるため、コンデンサと見ることができる。



- 半径Rの導体球の電気容量を求める。
- 導体球Qを与えたとすると周囲の電場はガウスの法則より

$$\bullet E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\bullet E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

- 無限遠方との導体表面の電位差は

$$\bullet V = - \int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R}$$

$$\bullet Q = CV \text{ より}$$

$$\bullet C = \frac{Q}{V} = 4\pi \epsilon_0 R \text{ これが導体球の電気容量}$$

## ■ 平行板コンデンサ

- 一般的にコンデンサとして用いられる平行板コンデンサの電気容量を求める。
- それぞれの板に電荷密度  $\rho$  と  $-\rho$  で帯電しているとする。
- 電荷密度  $\rho$  で帯電している板をが生成する電場  $E_+$  は誘電率を  $\epsilon_0$  とすると

$$2dSE_+ = \frac{\rho dS}{\epsilon_0}$$

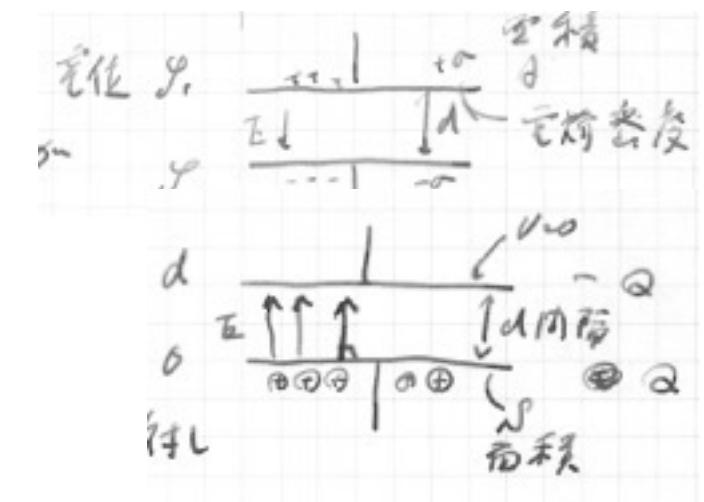
$$E_+ = \frac{\rho}{2\epsilon_0}$$

- 電荷密度  $-\rho$  で帯電している板が生成する電場  $E_-$  は

$$E_- = -\frac{\rho}{2\epsilon_0}$$

- 平行板の間の電場は、それぞれの板が生成する電場は同じ向きだから

$$E = E_+ + E_- = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



## ■ 平行板コンデンサ

- 平行板の電位差Vは、平行板の間隔をdとすると

$$V = - \int_d^0 \frac{\rho}{\epsilon_0} dx = \frac{\rho d}{\epsilon_0}$$

- 電荷密度 $\rho$ は板に帯電している電荷をQ、板の面積をSとすると

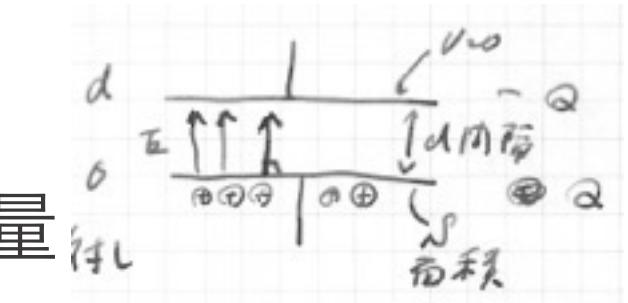
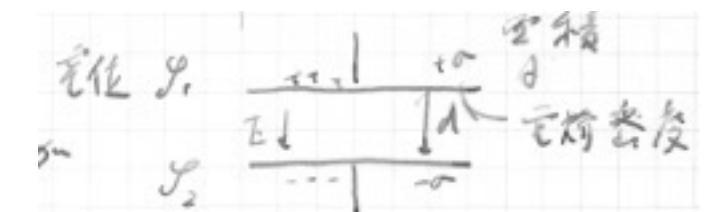
$$\rho = \frac{Q}{S}$$

- よってVは

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

- $Q=CV$ より

$$C = \frac{\epsilon_0 S Q}{Qd} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$
これが平行板コンデンサの電気容量



## ■ 平行板コンデンサの内の電圧

- 平行板コンデンサ内の電場は

$$\bullet E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

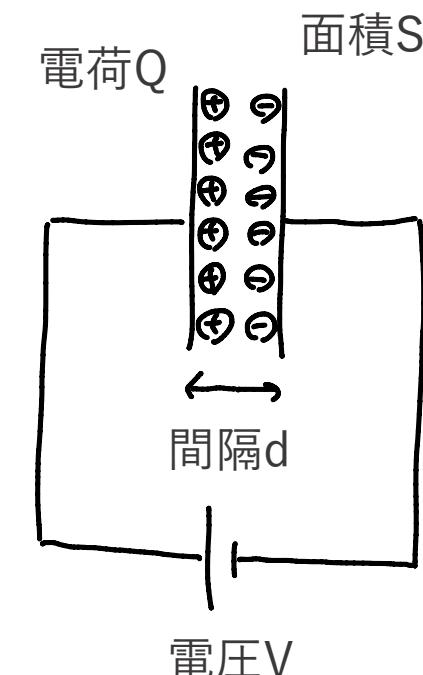
- 平行板コンデンサの平行板と距離dの場所の電位差（電圧）Vは

$$\bullet V = \int_0^d Edx = Ed = \frac{\rho d}{\epsilon_0}$$

- つまり、平行板コンデンサ内の電圧は平行板からの距離に比例する。

## ■ 覚える

- ・コンデンサに貯まる電荷  $Q = CV$
- ・平行板コンデンサの静電容量  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$
- ・平行板コンデンサ内の電圧は距離に比例



## ■ 問題

- ・真空中で、半径 $0.12\text{m}$ の2枚の金属板を $2.0\times 10^{-3}\text{m}$ の間隔で平行に向かい合わせて、各金属板に絶対値 $5.0\times 10^{-8}\text{C}$ の正負電荷を与える。真空の誘電率を $8.85\times 10^{-12}\text{F/m}$ とする。
- ・1. コンデンサの電気容量はいくらか。
- ・2. 金属板の間に生じた電位差は何Vか。

## ■ 問題

- 真空中で、半径0.12mの2枚の金属板を $2.0 \times 10^{-3}$ mの間隔で平行に向かい合わせて、各金属板に絶対値 $5.0 \times 10^{-8}$ Cの正負電荷を与える。真空の誘電率を $8.85 \times 10^{-12}$ F/mとする。
- 1. コンデンサの電気容量はいくらか。
- 2. 金属板の間に生じた電位差は何Vか。

$$1. C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 0.12 \times 0.12 \times 3.14}{2.0 \times 10^{-3}} = 0.20 \times 10^{-12+3} = 2.0 \times 10^{-10} \text{F}$$

2.  $Q = CV$  より

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{5.0 \times 10^{-8}}{2.0 \times 10^{-10}} = 2.5 \times 10^2$$

## ■ 問題

- 2つのコンデンサA, Bがある。平行板の面積比は2:1, 平行板の間隔の比は3:2で、Aの電気容量は $6.0 \mu F$ である。Bの容量は何 $\mu F$ か。

## ■ 問題

- 2つのコンデンサA, Bがある。平行板の面積比は2:1, 平行板の間隔の比は3:2で、Aの電気容量は $6.0 \mu F$ である。Bの容量は何 $\mu F$ か。

コンデンサAの電気容量は

$$C_A = \frac{\epsilon_0 S_A}{d_A}$$

コンデンサBの電気容量は

$$C_B = \frac{\epsilon_0 S_B}{d_B} = \frac{\epsilon_0 S_A / 2}{2d_A / 3} = \frac{3}{4} \frac{\epsilon_0 S_A}{d_A}$$

よってコンデンサBの電気容量は $4.5 \mu F$ である。

## ■ 問題

- $10\mu F$ のコンデンサにある電荷量を与えると、 $20V$ の電位差が生じた。与えられた電荷量 [ $\mu C$ ] を求めよ。

## ■ 問題

- $10\mu F$ のコンデンサにある電荷量を与えると、 $20V$ の電位差が生じた。与えられた電荷量 [ $\mu C$ ] を求めよ。

$Q=CV$ より

$$Q = 10 \times 10^{-6} \times 20 = 2.0 \times 10^{-4} C = 200 \mu C$$

## ■ 問題

- 二つのコンデンサA, Bがある。両方に10Vの電圧を加えたら、蓄えられた電荷はAが20C, Bが50Cになった。Aの静電容量 $C_A$ はBの静電容量 $C_B$ の何倍か。

## ■ 問題

- 二つのコンデンサA, Bがある。両方に10Vの電圧を加えたら、蓄えられた電荷はAが20C, Bが50Cになった。Aの静電容量 $C_A$ はBの静電容量 $C_B$ の何倍か。

$$\frac{C_A}{C_B} = \frac{20/10}{50/10} = \frac{2}{5} = 0.4\text{倍}$$

## ■ 問題

- 二つのコンデンサA, Bがある。両方に50Cの電荷を蓄えたら、Aの電圧が5V, Bの電圧が15Vになった。Aの静電容量 $C_A$ はBの静電容量 $C_B$ の何倍か。

## ■ 問題

- 二つのコンデンサA, Bがある。両方に50Cの電荷を蓄えたら、Aの電圧が5V, Bの電圧が15Vになった。Aの静電容量 $C_A$ はBの静電容量 $C_B$ の何倍か。

$$\frac{C_A}{C_B} = \frac{50/5}{50/15} = \frac{15}{5} = 3\text{倍}$$

コンデンサのエネルギー

## ■ コンデンサに蓄えられるエネルギー

- コンデンサに蓄えられるエネルギーWは、静電容量C、電圧Vとすると次のように表される。

$$W = \frac{1}{2} CV^2$$

おまけ

平行板が十分広いと仮定  $\rightarrow E$  は一定

$$\text{電位 } V = \int E dx = Ex$$

$$E = \frac{V}{d}$$

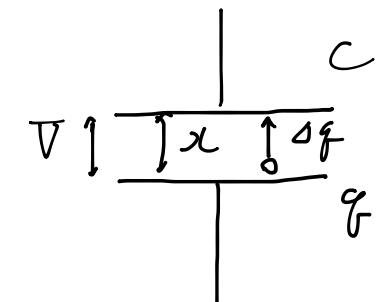
平行板に電荷  $q$  がたまっているとする。

$q$  の電荷を平行板間移動させるのに必要なエネルギーは

$$\Delta U = \int F dx = \int qE dx = qEx = qV = q\frac{V}{C}$$

電荷を0からQまでためるのに必要なエネルギーは

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{C V^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2$$



## ■ 問題解説

- 図の回路のキャパシタに蓄えられているエネルギー[J]はどれか。  
(第41回ME2種)

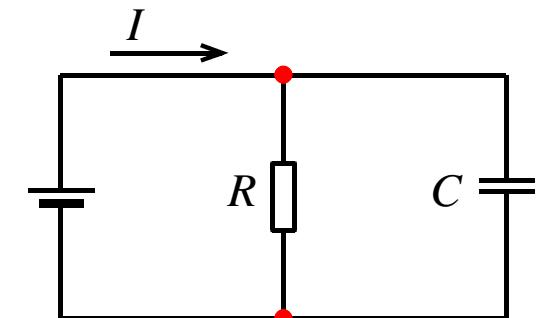
1.  $CRI^2$

2.  $\frac{CR}{2I^2}$

3.  $\frac{I}{2CR}$

4.  $\frac{CIR}{4}$

5.  $\frac{CI^2R^2}{2}$



## ■ 問題解説

- 図の回路のキャパシタに蓄えられているエネルギー[J]はどれか。  
(第41回ME2種)

1.  $CRI^2$

2.  $\frac{CR}{2I^2}$

3.  $\frac{I}{2CR}$

4.  $\frac{CIR}{4}$

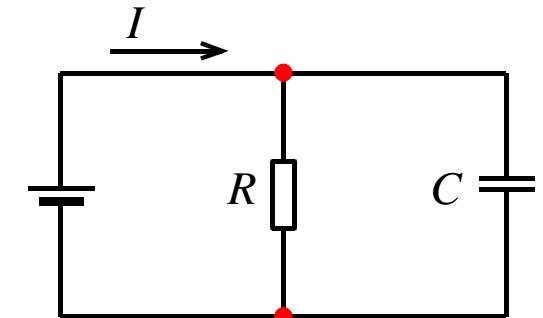
5.  $\frac{CI^2R^2}{2}$

キャパシタに加わる電圧は、並列回路なので抵抗Rに加わる電圧と等しい。また、直流電源の場合、定常状態になるとCのインピーダンスは無限大となり、キャパシタは開放と見なせる。つまり、電流Iは、すべて抵抗Rに流れる。よって、キャパシタに加わる電圧Vは

$$V = IR$$

である。キャパシタに蓄えられるエネルギーWは、

$$\begin{aligned} W &= CV^2/2 \\ &= CI^2R^2/2 \end{aligned}$$



## ■ 問題

- 静電容量 $20\mu F$ のキャパシタに蓄えられるエネルギーが $160\mu J$ であるとき、以下の問いに答えよ。
- 答えは有効数字 3 術以内で表せ。
  1. キャパシタの電荷 [ $\mu C$ ] を求めよ。
  2. キャパシタ両極の電位差 [ $V$ ] を求めよ。

## ■ 問題

- 静電容量 $20\mu F$ のキャパシタに蓄えられるエネルギーが $160\mu J$ であるとき、以下の問いに答えよ。
- 答えは有効数字 3 術以内で表せ。
  - キャパシタの電荷 [ $\mu C$ ] を求めよ。
  - キャパシタ両極の電位差 [ $V$ ] を求めよ。

$$1. U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} C \times \left(\frac{Q}{C}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{20 \times 10^{-6}} = 160 \times 10^{-6}$$

$$Q = \sqrt{2 \times 20 \times 10^{-6} \times 160 \times 10^{-6}} = \sqrt{2^2 \times 4^2 \times 10^{-10}} = 8 \times 10^{-5} \mu C$$

$$2. V = \frac{Q}{C} = \frac{8 \times 10^{-5}}{20 \times 10^{-6}} = 4V$$

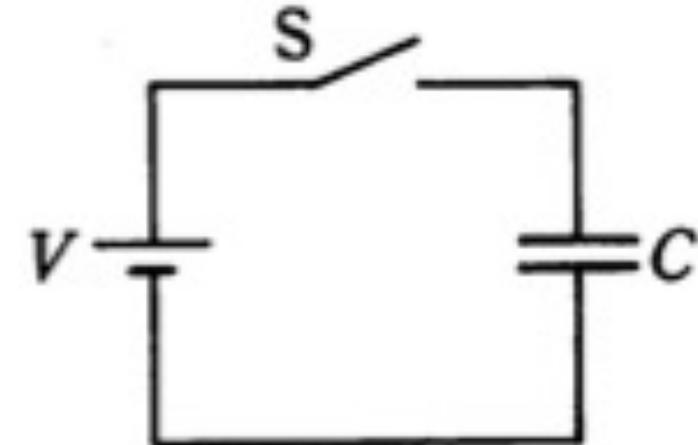
## ■ 問題

- ・極板間隔を変えることのできるコンデンサーに、スイッチSを経て電圧一定の電池につないで、Sを開じる。

- 1) Sを開じたまま極板間隔を2倍にする場合
- 2) Sを開いてから極板間隔を2倍にする場合

次の量はそれぞれ何倍になるか。

- ・蓄えられる電気量（電荷量）
- ・極板間の電位差
- ・蓄えられる静電エネルギー



## ■ 問題

- ・ 極板間隔を変えることのできるコンデンサーに、スイッチSを経て電圧一定の電池につないで、Sを開じる。

- 1) Sを開じたまま極板間隔を2倍にする場合

この場合、電源はつながったままなので電圧がVで一定である。

間隔を2倍にすると静電容量は1/2になる。

- ・ 蓄えられる電気量（電荷量）

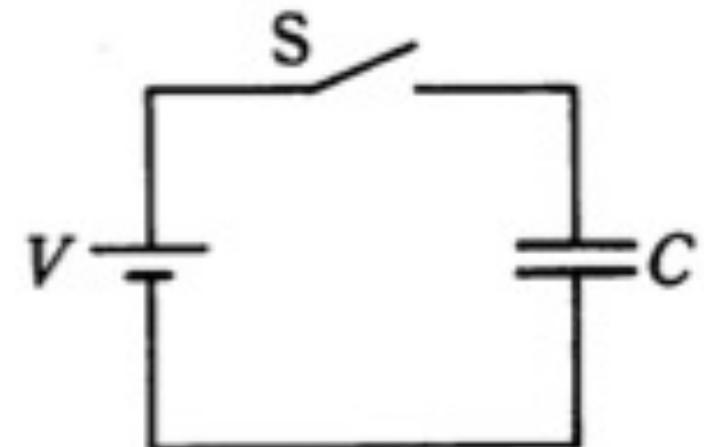
- $Q = \frac{1}{2}CV$  なので1/2倍

- ・ 極板間の電位差

- 電圧がVで一定であるので、1倍

- ・ 蓄えられる静電エネルギー

- $U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}C\right)V^2$  なので1/2倍



## 問題

- ・ 極板間隔を変えることのできるコンデンサーに、スイッチSを経て電圧一定の電池につないで、Sを開じる。

2) Sを開いてから極板間隔を2倍にする場合

この場合、電源はつながっておらず、電源から電荷が補給されないため、電荷Qが一定である。

間隔を2倍にすると静電容量は1/2になる。

- ・ 蓄えられる電気量（電荷量）

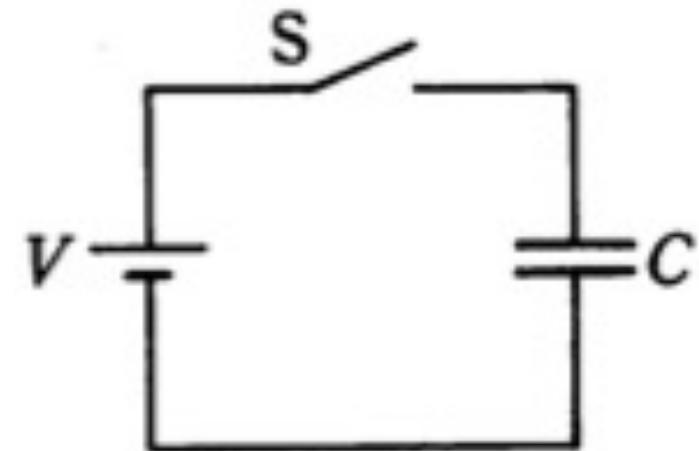
- ・ 電荷Qは一定なので、1倍

- ・ 極板間の電位差

- ・  $Q = \frac{1}{2}CV$ ,  $V = 2Q/C$  よって2倍

- ・ 蓄えられる静電エネルギー

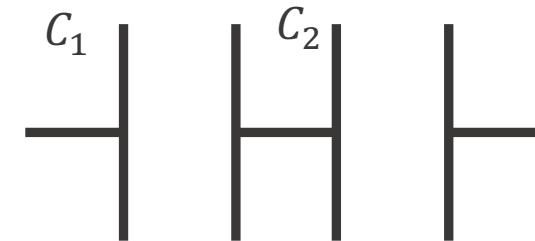
- ・  $U = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}C \right) (2V)^2$  なので2倍



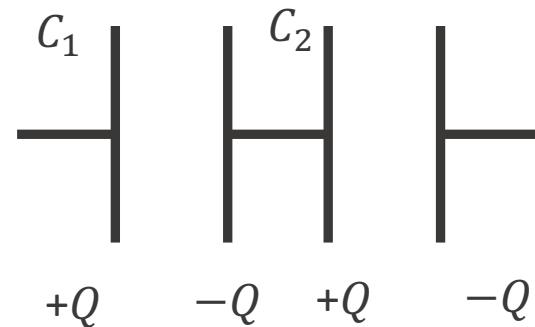
# コンデンサを用いた回路

## ■ コンデンサの直列回路

- ・コンデンサを直列につないだらどうなるか？

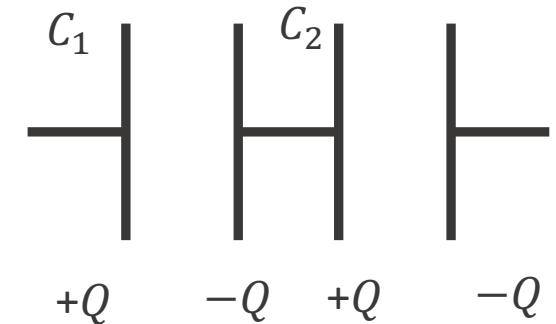


- ・電圧Vを加えるとコンデンサには電荷がたまる。C1とC2は導線でつながっているので、つながっている板には同じ量の電荷がたまる。



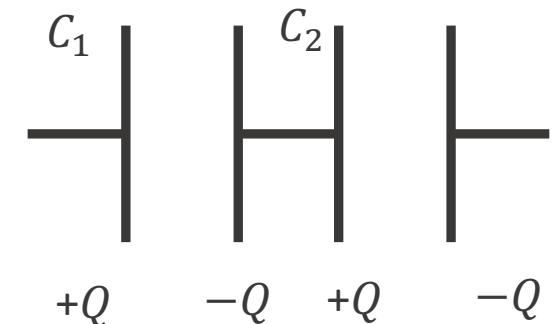
## ■ コンデンサの直列回路

- 接続する電極にたまる電荷の量は同じので
- $Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$
- よって
- $\frac{C_1}{C_2} = \frac{V_2}{V_1}$
- また、直列接続なのでC1とC2の電圧降下の和は電源電圧を等しいので
- $V = V_1 + V_2$
- よってそれぞれのコンデンサに加わる電圧は
- $V_2 = \frac{C_1}{C_2} V_1, V = V_1 + \frac{C_1}{C_2} V_1 = \frac{C_1 + C_2}{C_2} V_1$
- $V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V, V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V$



## ■ コンデンサの直列回路

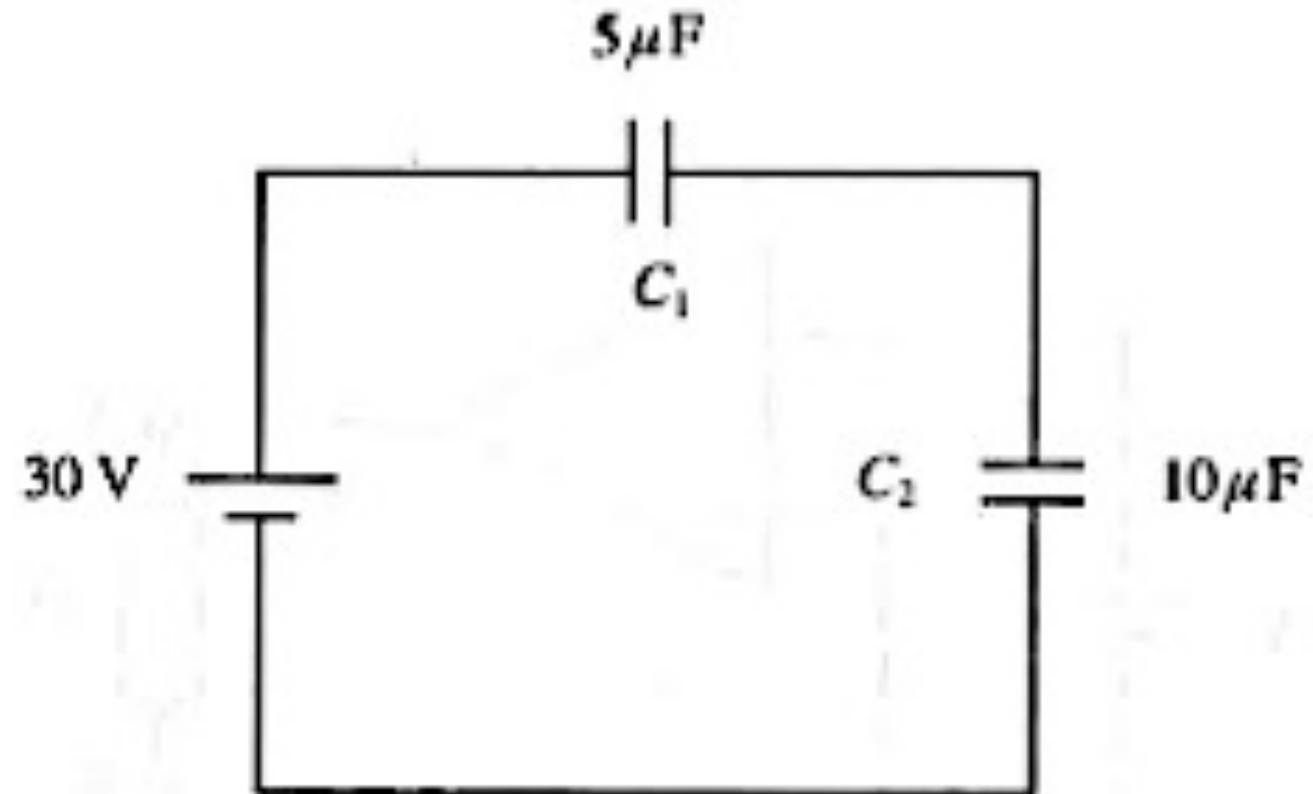
- 合成静電容量Cは
- $$Q = CV = C_1 V_1$$
- $$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$
- 実は合成静電容量は次の式で求められる。
- $$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$
- この式は、抵抗の並列回路の合成抵抗を求める式と同じ形になっている。



## ■ 問題解説

- 図の回路でコンデンサC2の両端電圧[V]はいくらか. (第34回  
ME2種)

1. 3
2. 5
3. 10
4. 15
5. 20



## 問題解説

- 図の回路でコンデンサC2の両端電圧[V]はいくらか。(第34回  
ME2種)

1. 3

$$V = V_{C_1} + V_{C_2}$$

$$Q = C_1 V_{C_1} = C_2 V_{C_2}$$

$$V_{C_1} = \frac{C_2}{C_1} V_{C_2}$$

2. 5

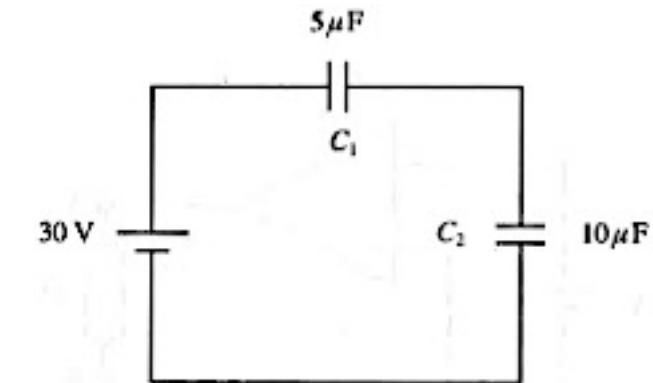
3. 10

$$V = \frac{C_2}{C_1} V_{C_2} + V_{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1} V_{C_2}$$

4. 15

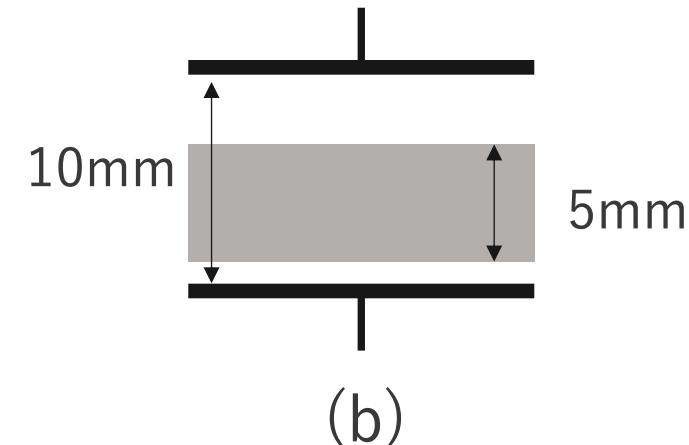
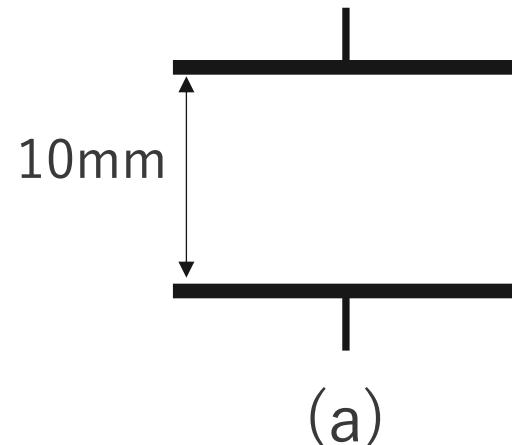
$$V_{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V = \frac{5}{10 + 5} \times 30 = \frac{1}{3} \times 30 = 10$$

5. 20



## ■ 問題

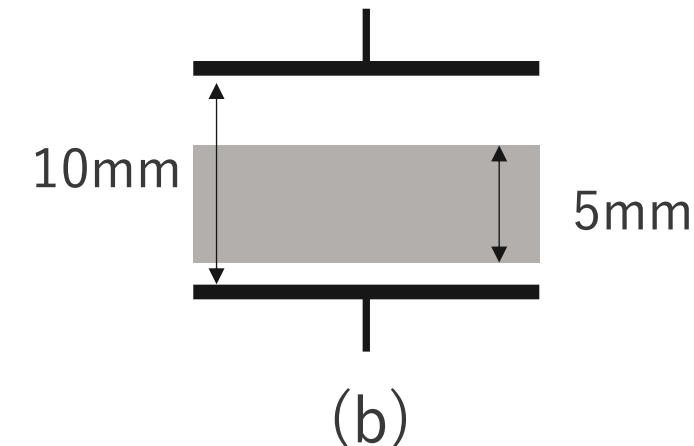
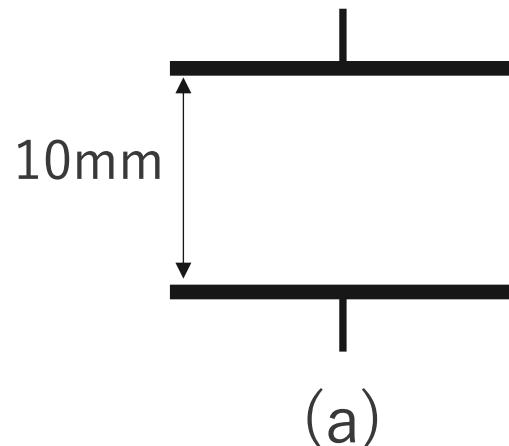
- 図(a)の平行板キャパシタの静電容量[pF]を求めよ。但し、面積  $S = 100\text{cm}^2$ , 極板間隔  $d = 10\text{mm}$ , 空気の誘電率 (= 真空の誘電率)  $\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} [\text{F}/\text{m}]$  とする。
- このキャパシタを起電力60Vにつないで充電した後、電源を切り離した。キャパシタに蓄えられた電荷[C]を求めよ。
- 2の状態で、極板間に、極板と同形・同大で厚さが5mmの平面金属板を図(b)のように差し入れた。極板間の電位差[V]を求めよ。



## 問題

1. 図(a)の平行板キャパシタの静電容量[pF]を求めよ. 但し, 面積  $S = 100\text{cm}^2$ , 極板間隔  $d = 10\text{mm}$ , 空気の誘電率 (= 真空の誘電率)  $\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12} [\text{F}/\text{m}]$  とする.

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = \frac{9 \times 10^{-12} \times 100 \times 10^{-4}}{10 \times 10^{-3}} = 9 \times 10^{-12} \text{F} = 9 \text{pF}$$

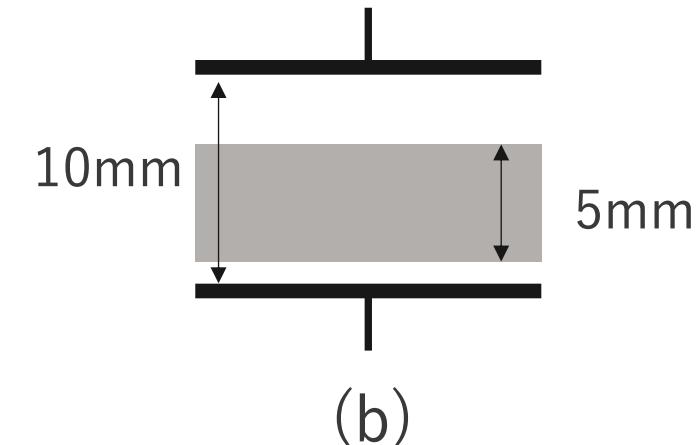
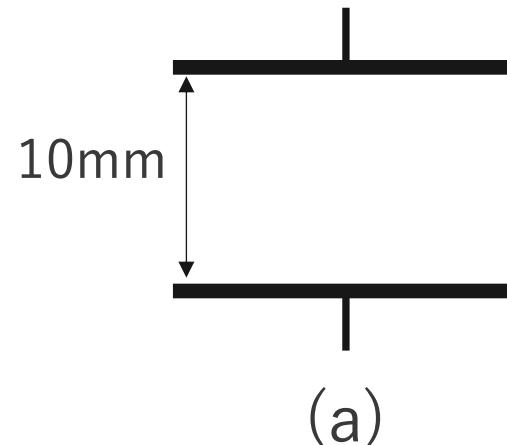


## 問題

2. このキャパシタを起電力60Vにつないで充電した後, 電源を切り離した. キャパシタに蓄えられた電荷[C]を求めよ.

$$C = 9pF$$

$$Q = CV = 9 \times 10^{-12} \times 60 = 5.4 \times 10^{-10} C$$



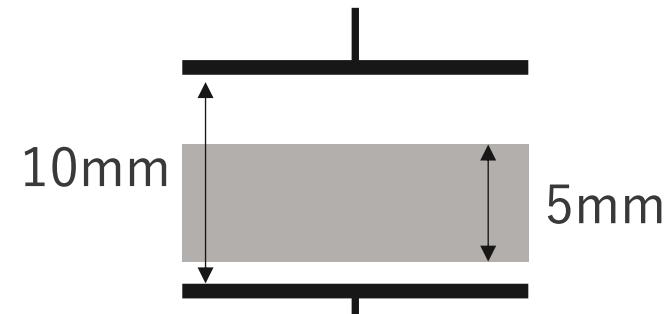
## 問題

3. 2の状態で、極板間に、極板と同形・同大で厚さが5mmの平面金属板を図(b)のように差し入れた。極板間の電位差[V]を求めよ。

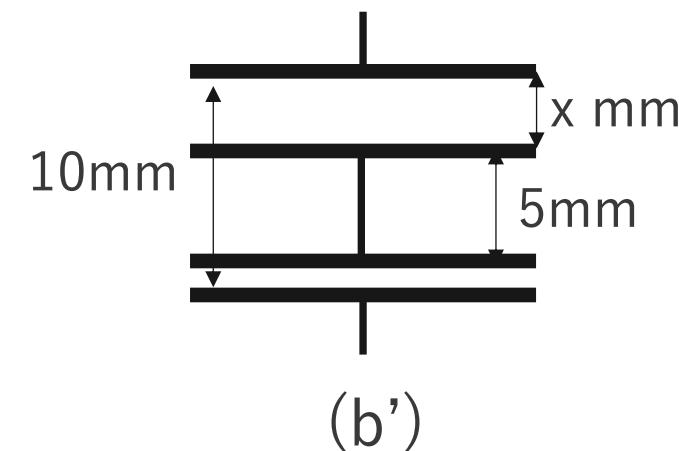
導体を挿入すると、それは平行板と導線の役割を果たす。つまり図(b')のような2個のコンデンサの直列回路とみなせる。よって図(b')における合成電気容量Cは

$$\begin{aligned}\frac{1}{C} &= \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{(10 - 5) \times 10^{-3} - x}{\epsilon_0 S} = \frac{5 \times 10^{-3}}{\epsilon_0 S} \\ &= \frac{5 \times 10^{-3}}{9 \times 10^{-12} \times 100 \times 10^{-4}} = \frac{1}{18 \times 10^{-12}} \\ C &= 18 \text{ pF}\end{aligned}$$

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{54 \times 10^{-11}}{18 \times 10^{-12}} = 30 \text{ V}$$



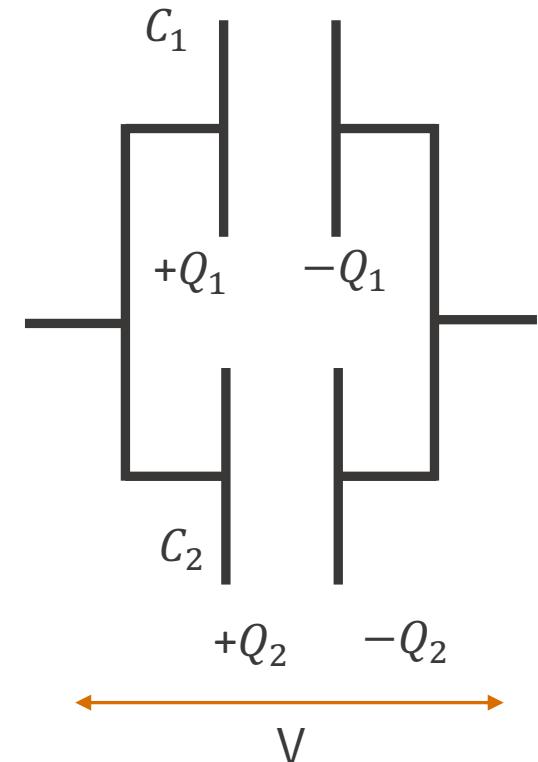
(b)



(b')

## ■ コンデンサの並列回路

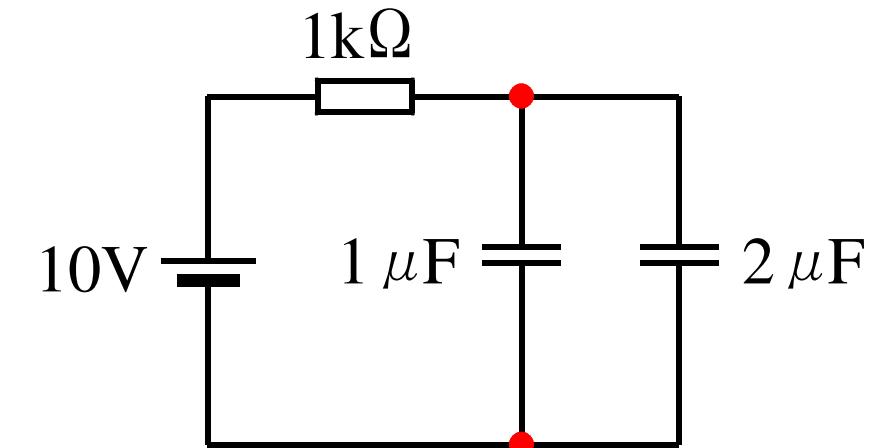
- 並列回路なのでコンデンサに加わる電圧はすべて等しいので、それぞれのコンデンサにたまる電荷 $Q_1, Q_2$ は
- $Q_1 = C_1 V, Q_2 = C_2 V$
- コンデンサにたまる電荷の総量 $Q$ は
- $Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V$
- よって合成静電容量は
- $Q = CV$
- $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1+Q_2}{V} = C_1 + C_2$
- この式は、抵抗の直列回路の合成抵抗と同じ形になっている。



## ■ 問題解説

- 図の回路で $2\mu F$ のキャパシタに蓄積される電荷 [ $\mu C$ ] はどれか。  
(第40回ME2種)

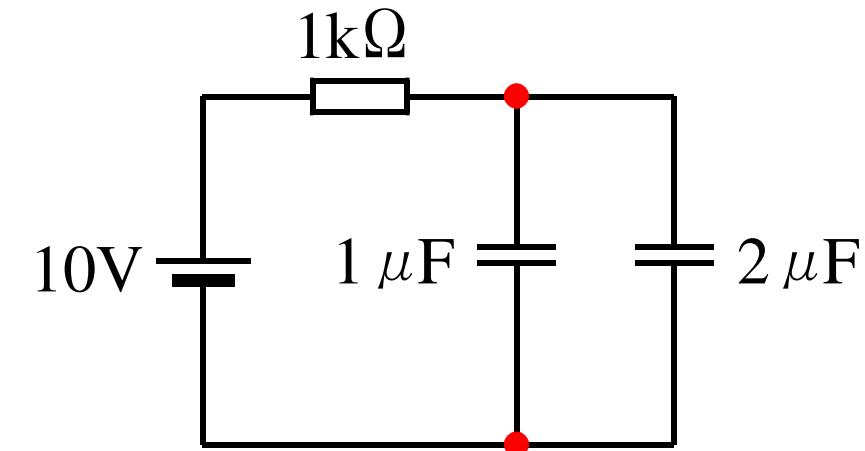
- 1
- 2
- 10
- 20
- 30



## ■ 問題解説

- 図の回路で $2\mu F$ のキャパシタに蓄積される電荷[ $\mu C$ ]はどれか。  
(第40回ME2種)

- 1
- 2
- 10
- 20
- 30



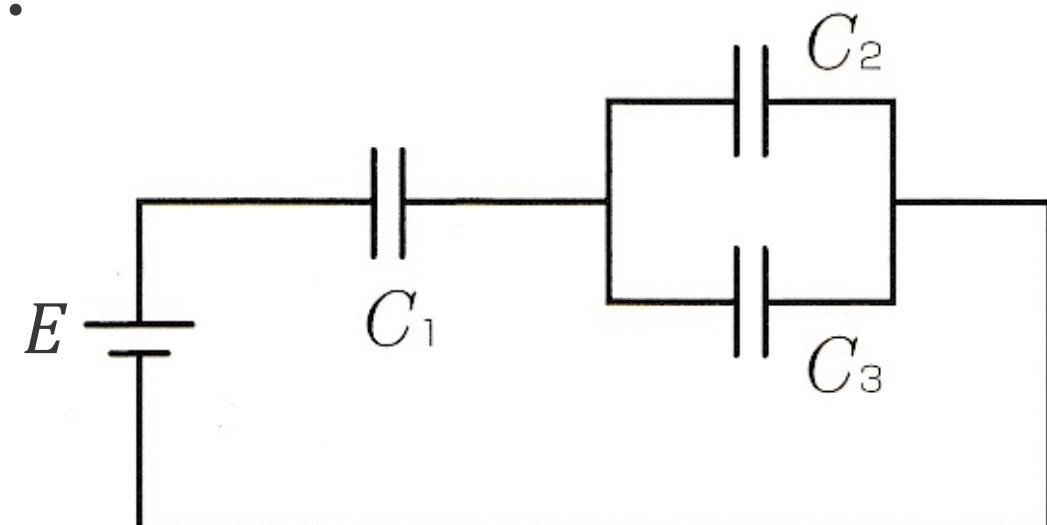
直流回路のとき、定常状態になるとキャパシタのインピーダンスは無限大である。よって、キャパシタで10Vの電圧降下が起こる。2つのキャパシタは並列につながっているので、それぞれ10Vの電圧が加わっている。よって、 $2\mu F$ のキャパシタに溜まった電荷Qは

$$Q = 2\mu F * 10V = 20\mu C$$

## ■ 問題

- 図の回路において、 $C_1 = 1\mu F, C_2 = 2\mu F, C_3 = 3\mu F, E = 12V$ であるとき、以下の問いに答えよ。答えは分数のままでよい。

- 各キャパシタの両極の電位差を求めよ。
- 各キャパシタに蓄えられている電気量を求めよ。
- $C_1, C_2$ 及び $C_3$ の合成容量を求めよ。



## 問題

- 図の回路において、 $C_1 = 1\mu F, C_2 = 2\mu F, C_3 = 3\mu F, E = 12V$ であるとき、以下の問いに答えよ。答えは分数のままでよい。

- 各キャパシタの両極の電位差を求めよ。

$C_2$ と $C_3$ の合成電気容量 $C_{23}$ は

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 5\mu F$$

$C_1$ と $C_{23}$ で貯まる電荷は同じだから

コンデンサ $C_1, C_2, C_3$ の電圧をそれぞれ $V_1, V_2, V_3$ とすると

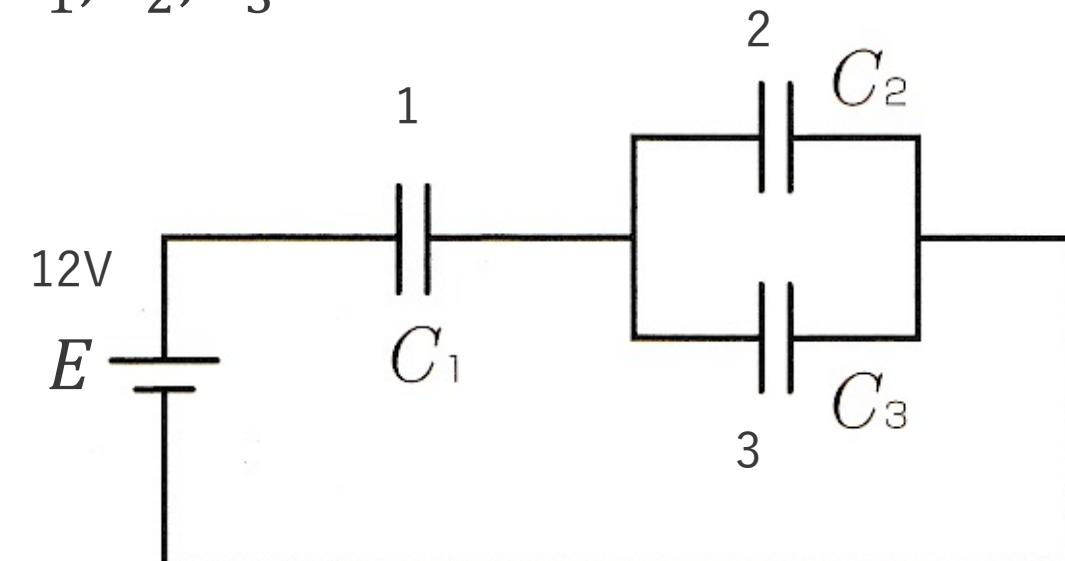
$$C_1 V_1 = C_{23} V_{23}$$

$$V_1 = 5V_{23}$$

よって

$$V_1 = 12 \times \frac{5}{6} = 10V$$

$$V_{23} = V_2 = V_3 = 2V$$



## 問題

- 図の回路において、 $C_1 = 1\mu F, C_2 = 2\mu F, C_3 = 3\mu F, E = 12V$ であるとき、以下の問いに答えよ。答えは分数のままでよい。
2. 各キャパシタに蓄えられている電気量を求めよ。

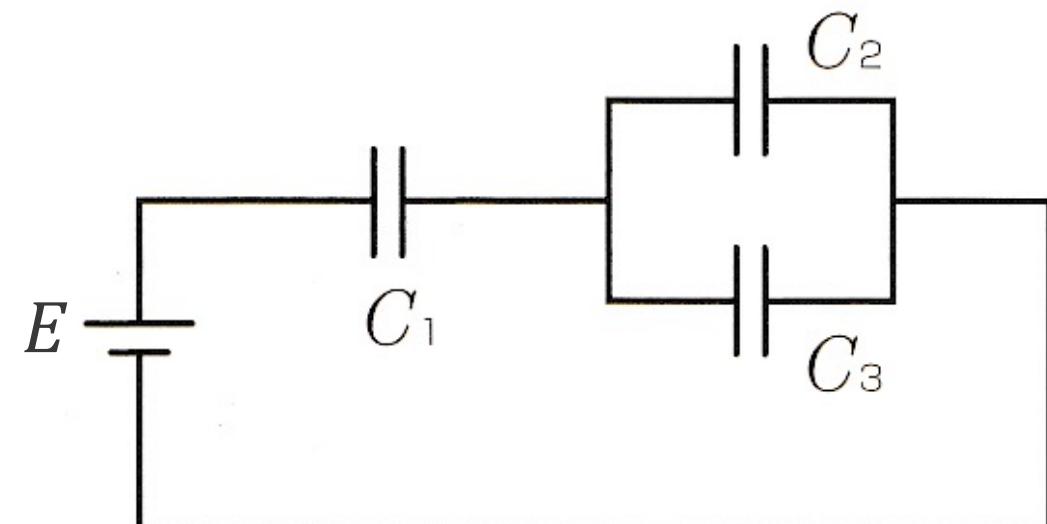
各コンデンサに貯まる電気量を  $Q_1, Q_2, Q_3$  とすると

$V_1 = 10V, V_2 = V_3 = 2V$ だから

$$Q_1 = C_1 V_1 = 10\mu C$$

$$Q_2 = C_2 V_2 = 4\mu C$$

$$Q_3 = C_3 V_3 = 6\mu C$$



## 問題

- 図の回路において、 $C_1 = 1\mu F, C_2 = 2\mu F, C_3 = 3\mu F, E = 12V$ であるとき、以下の問いに答えよ。答えは分数のままでよい。

3.  $C_1, C_2$ 及び $C_3$ の合成容量を求めよ。

$C_2$ と $C_3$ の合成電気容量 $C_{23}$ は

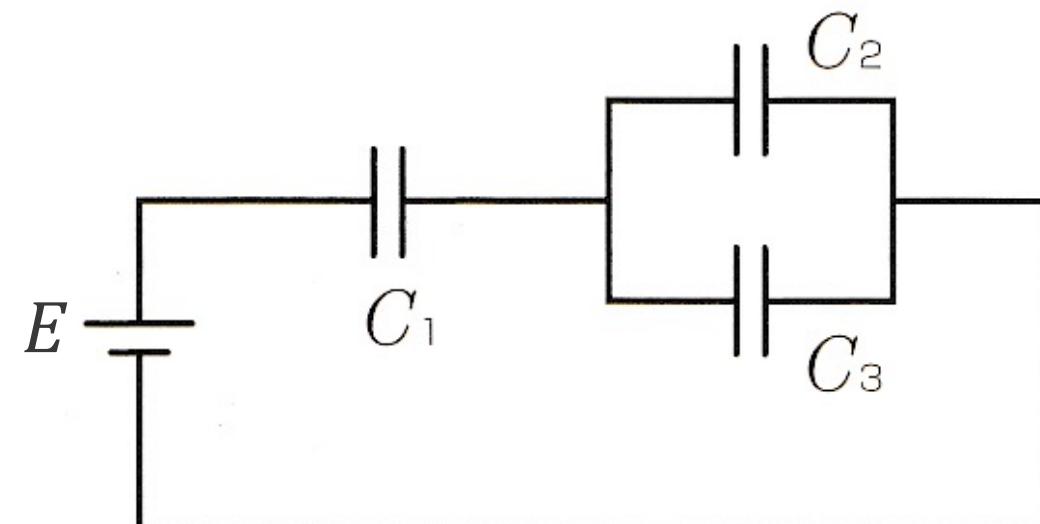
$$C_{23} = C_2 + C_3 = 5\mu F$$

$C_{23}$ と $C_1$ は直列だから合成電気容量 $C$ は

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

よって

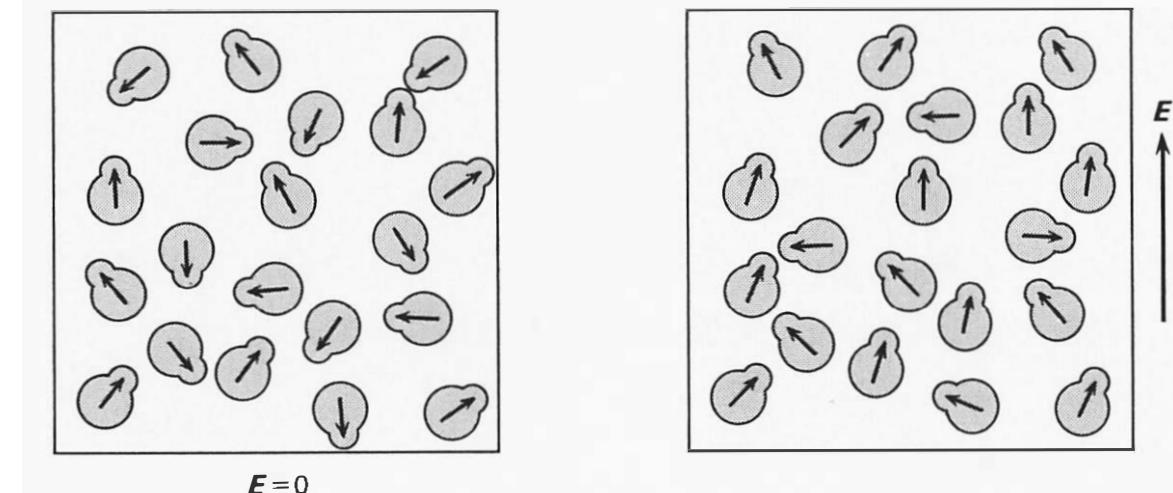
$$C = \frac{5}{6}\mu F$$



# コンデンサと誘電体

## ■ 誘電体

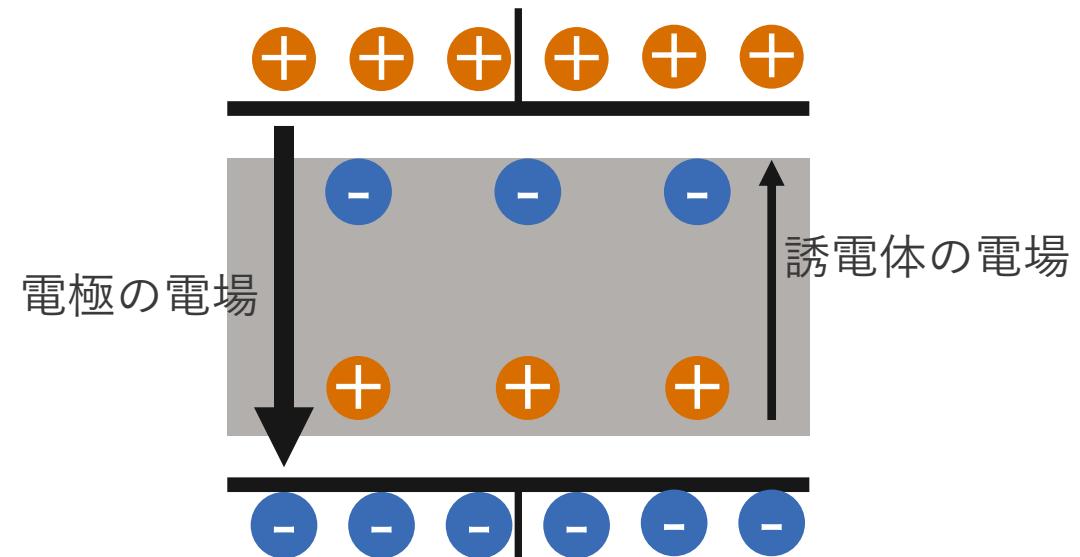
- 電場中に絶縁体を入れた場合どうなるか？
- 絶縁体には自由電子がない。しかし、電気的性質を持った分子で構成される。
- 外部から絶縁体に電場をかけると、内部に電気的な性質を持つ分子が電場の方向に向こうとする。このように見たとき絶縁体を誘電体という。



(長岡, 電磁気学2)

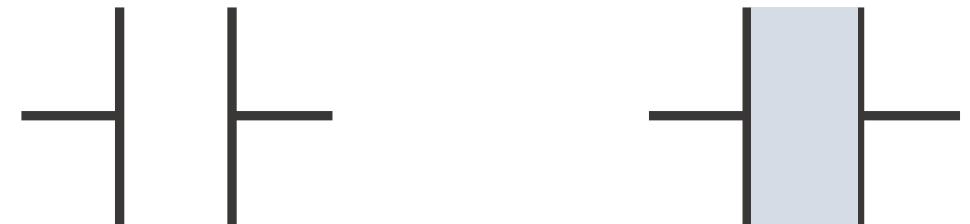
## ■ 誘電体

- 外部から絶縁体に電場をかけると、内部に電気的な性質を持つ分子が電場の方向に向こうとする。
- そうすると、電場方向に向いた分子により誘電体内に電場が生じる。
- そのため、コンデンサに絶縁体を入れると、電極により生成された電場が誘電体により少し打ち消され、その結果コンデンサの電圧も下がる。



## ■ 平行板の間に誘電体を入れた場合

- これまででは、すべて真空中である場合を想定していた。もし、平行板コンデンサの平行板の間に誘電体があった場合どうなるか？



- 誘電率が変わるだけ。
- 誘電率  $\epsilon$  の物質を平行板コンデンサに挿入したときの電気容量は
- $$C = \epsilon \frac{S}{d}$$
- 誘電率と真空の誘電率の比を比誘電率  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  という。

## ■ 問題

- 電気容量Cのコンデンサに電圧Vの電池を接続し、これを外してから、極板間に比誘電率  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  の誘電体を満した。極板間の電圧は何Vか。

## ■ 問題

- 電気容量Cのコンデンサに電圧Vの電池を接続し、これを外してから、極板間に比誘電率  $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  の誘電体を満した。極板間の電圧は何Vか。

コンデンサにたまつた電荷をQ、誘電体の挿入後の電圧をV' とすると

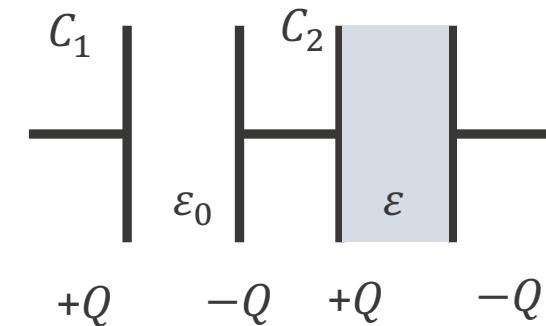
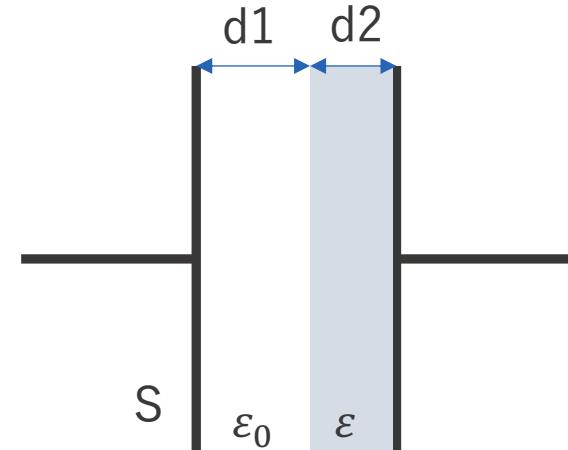
$$Q = CV = \varepsilon_0 \frac{S}{d} V = \varepsilon \frac{S}{d} V'$$

よって

$$V' = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} V = \frac{1}{\varepsilon_r} V$$

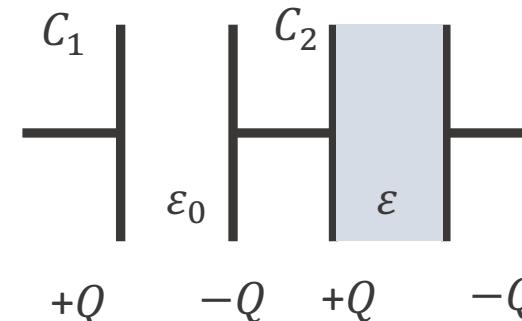
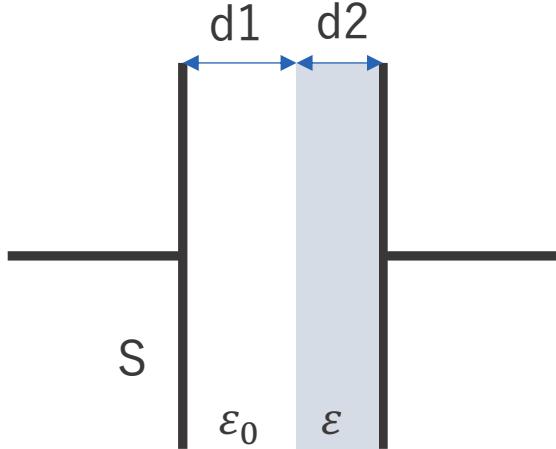
## ■ 平行板の間に誘電体を入れた場合

- もし、左図のように平行板コンデンサの平行板の間に厚さ $d_2$ の誘電体があった場合どうなるか？



- 右図のように2種類のコンデンサが直列接続していると考える。平行板の面積を $S$ とする。

## ■ 平行板の間に誘電体を入れた場合



- 右図のように誘電体が挿入された部分とそれ以外とを異なるコンデンサであるとみなす。この2つコンデンサの合成電気容量Cは

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

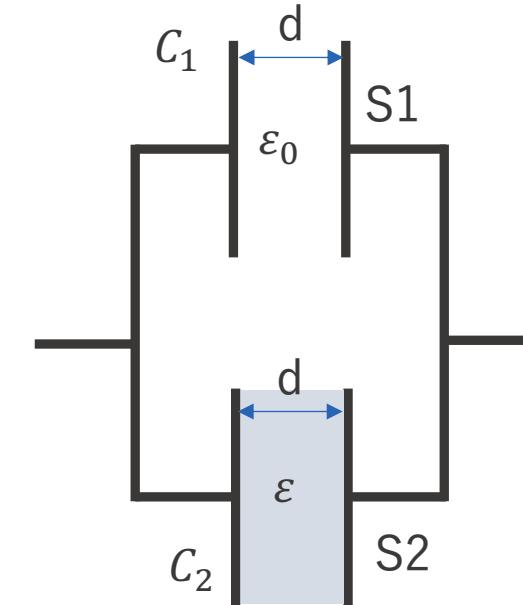
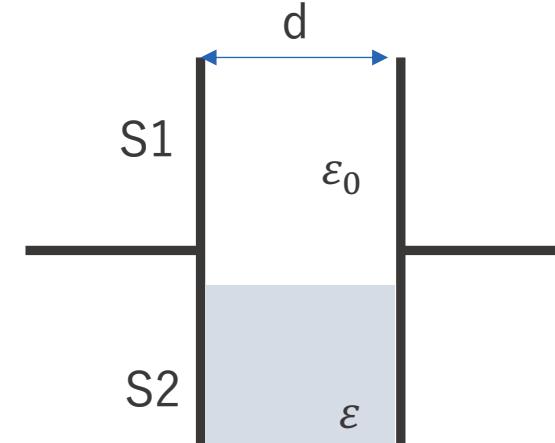
- である。それぞれの電気容量は $C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d_1}$ ， $C_2 = \epsilon \frac{S}{d_2}$ なので

$$C = \frac{\epsilon_0 \frac{S}{d_1} \epsilon \frac{S}{d_2}}{\epsilon_0 \frac{S}{d_1} + \epsilon \frac{S}{d_2}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{\epsilon_0 d_2 + \epsilon d_1}$$

## ■ 平行板の間に誘電体を入れた場合

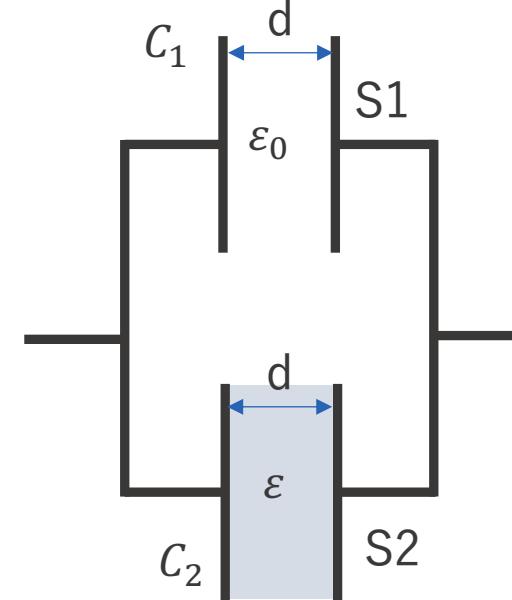
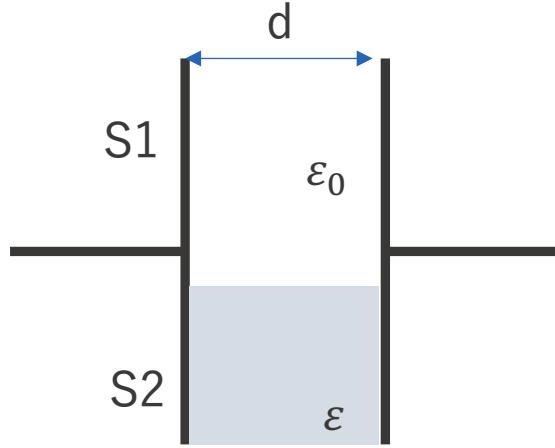
- 左図のように平行板コンデンサを面積S2の一部分だけ誘電体で満たすとする。このコンデンサの電気容量はどうなるだろうか

•



- 右図のように2種類のコンデンサが並列接続していると考える。平行板の間隔を $d$ とする。

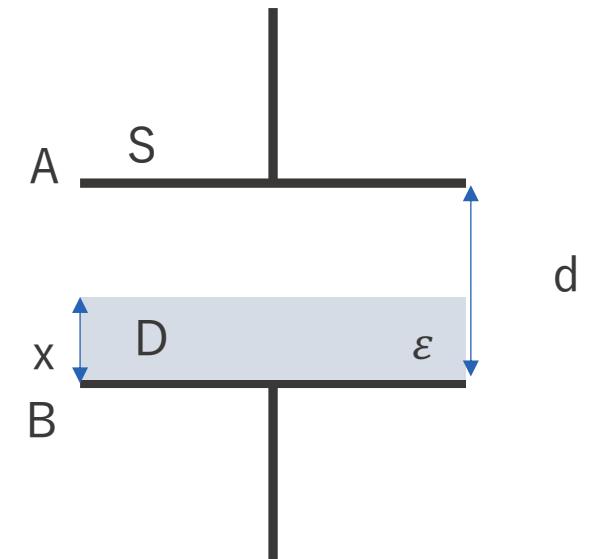
## ■ 平行板の間に誘電体を入れた場合



- 右図のように誘電体が挿入された部分とそれ以外とを異なるコンデンサであるとみなす。この2つコンデンサの合成電気容量Cは
- $C = C_1 + C_2$
- である。それぞれの電気容量は $C_1 = \epsilon_0 \frac{S_1}{d}$ ，  $C_2 = \epsilon \frac{S_2}{d}$ なので
- $C = \epsilon_0 \frac{S_1}{d} + \epsilon \frac{S_2}{d} = \frac{\epsilon_0 S_1 + \epsilon S_2}{d}$

## ■ 問題解説

- ・極板A, Bの間隔が $d$ で、極板間が真空のコンデンサがあり、電池により常に電位差 $V$ に保たれている。この間に、厚さ $x$ で比誘電率 $\epsilon$ の誘電体DをBに接して挿入した。
- ・1. DのA側の表面とBとの電位差を求めよ。
- ・2. Aの電荷 $Q'$ はDを挿入する前の $Q$ の何倍か。



## 問題解説

- ・ 極板A, Bの間隔がdで、極板間に真空のコンデンサがあり、電池により常に電位差Vに保たれている。この間に、厚さxで比誘電率 $\varepsilon$ の誘電体DをBに接して挿入した。
- ・ 1. DのA側の表面とBとの電位差を求めよ。
- ・ 2. Aの電荷Q'はDを挿入する前のQの何倍か。

1. AD間の電位差をV1, 求める電位差をV2, AD間の電気容量をC1, Dの電気容量をC2とすると

$$Q = V_1 C_1 = V_2 C_2$$

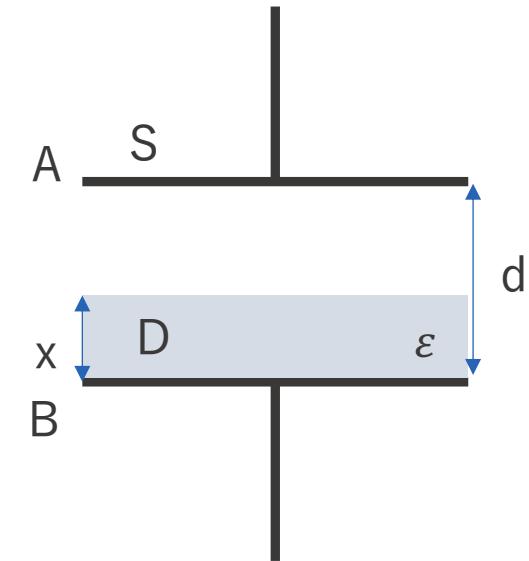
$$V_1 = \frac{C_2}{C_1} V_2$$

$V = V_1 + V_2$  なので

$$V = \frac{C_2}{C_1} V_2 + V_2 = \frac{C_1 + C_2}{C_1} V_2$$

よって

$$V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V = \frac{\frac{\varepsilon_0 S}{d-x}}{\frac{\varepsilon_0 S}{d-x} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{x}} V = \frac{x}{x + \varepsilon(d-x)} V$$



## 問題解説

- ・ 極板A, Bの間隔がdで、極板間に真空のコンデンサがあり、電池により常に電位差Vに保たれている。この間に、厚さxで比誘電率 $\varepsilon$ の誘電体DをBに接して挿入した。
- ・ 1. DのA側の表面とBとの電位差を求めよ。
- ・ 2. Aの電荷 $Q'$ はDを挿入する前のQの何倍か。

2. 誘電体を挿入する前の電荷は

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_0 S}{d} V$$

誘電体を挿入した後の電荷は、各電極にたまる電荷量は等しいので、

$$Q' = C_2 V_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{x} \frac{x}{x + \varepsilon(d - x)} V = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{x + \varepsilon(d - x)} V$$

よって

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{x + \varepsilon(d - x)} V \times \frac{d}{\varepsilon_0 S V} = \frac{\varepsilon d}{x + \varepsilon(d - x)}$$

