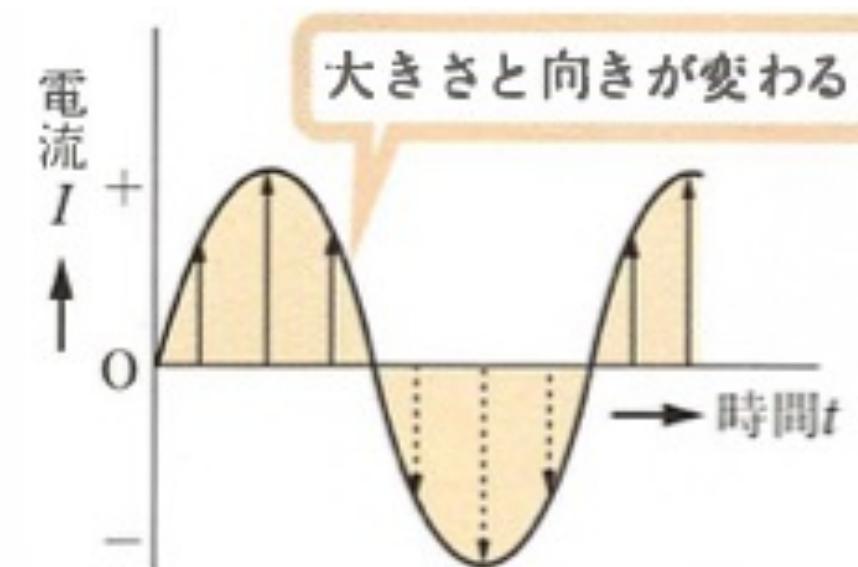
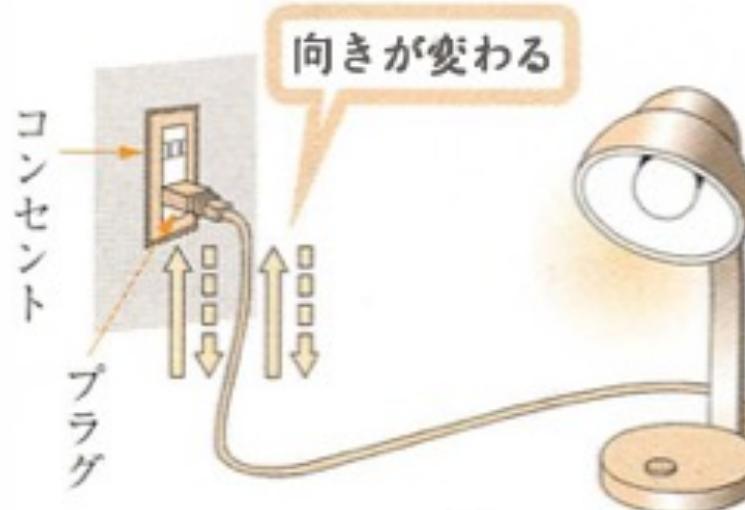


電気工学2 第3回

藤田 一寿

■ 交流

- 交流では、電圧や電流の大きさと向きが時間の経過とともに変化する。



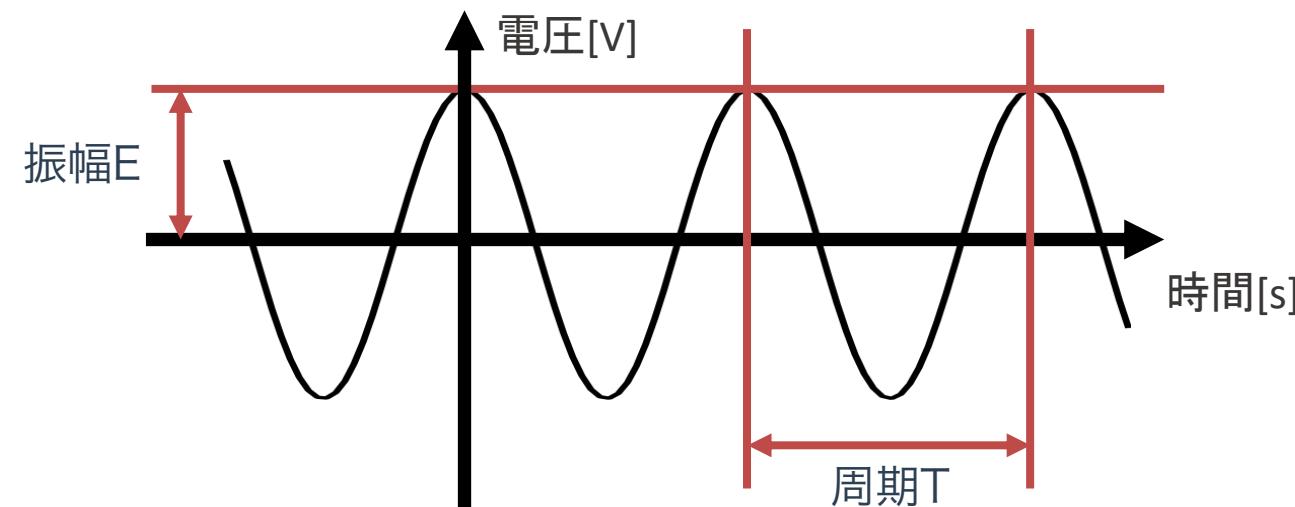
■ 正弦波の式とパラメタ

- 正弦波

$$e = E \sin 2\pi ft$$

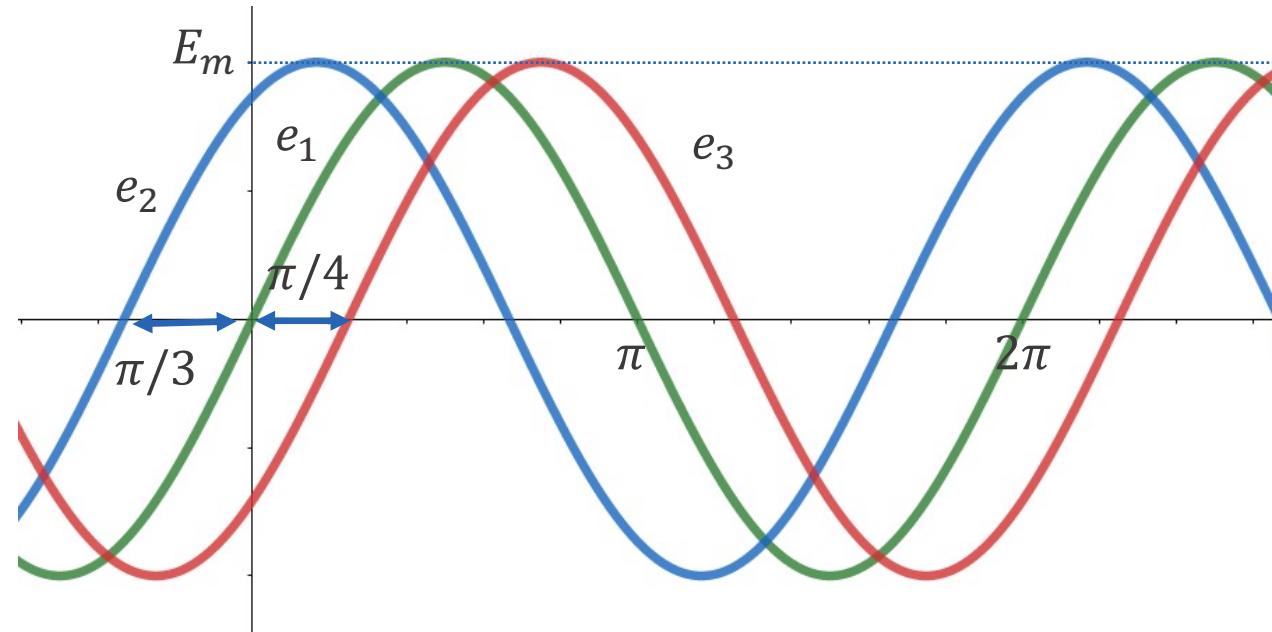
- 波を表すための指標

- 周期 T [s] 山から山までの時間
- 周波数 f [Hz] $f=1/T$ 1秒間に何個山があるか
- 振幅 E



■ 位相と位相差

$$e_1 = E_m \sin \omega t \quad e_2 = E_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) \quad e_3 = E_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

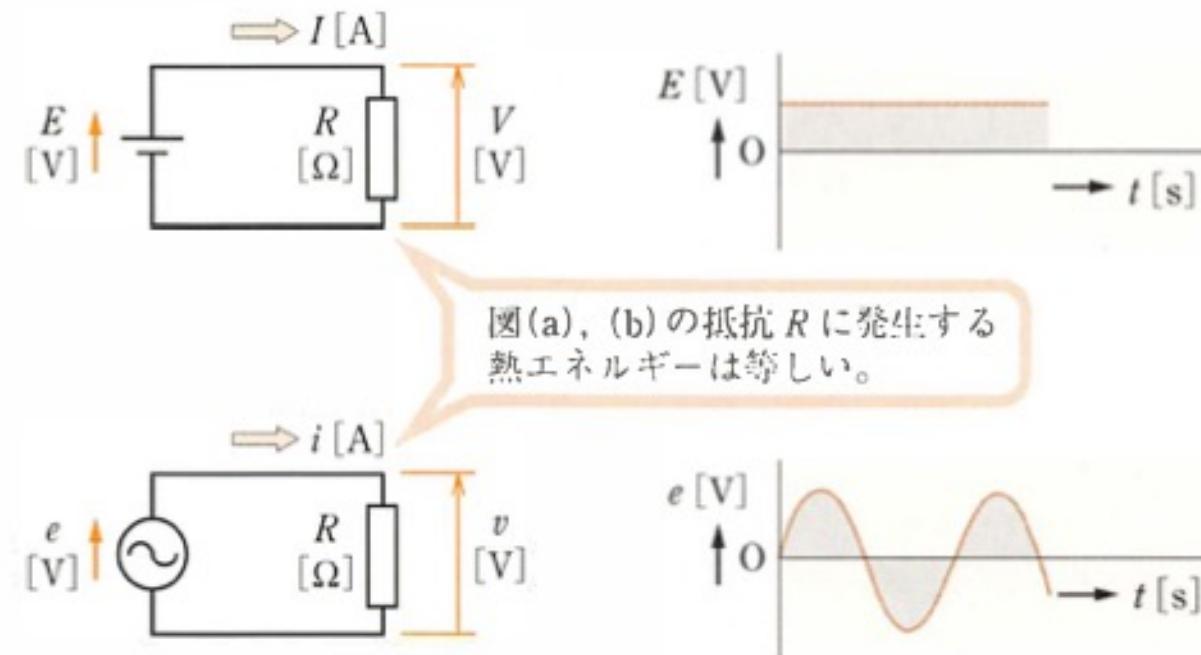


- \sin 内の ωt , $\omega t + \pi/3$, $\omega t - \pi/4$ を位相と呼ぶ。
- e_1 を基準とした時, $+\pi/3$, $-\pi/4$ を位相差と呼ぶ。
- e_2 は e_1 より位相が $\pi/3$ 進んでいる。
- e_3 は e_1 より位相が $\pi/4$ 遅れている。

実効値

■ 実効値

- 直流起電力 E と抵抗 R を繋いだときに発生する熱エネルギーと交流起電力 e と抵抗 R を繋いだときに発生する熱エネルギーが等しいとき、 E を交流起電力 e の実効値と言う。



■ 正弦波交流の実効値の計算

- 抵抗Rに $v(t)=V\sin(\omega t)$ の電圧を加えたときの電力は

$$\bullet P(t) = i(t)v(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{V^2\sin^2(\omega t)}{R}$$

- 1周期の平均電力は

$$\bullet \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V^2\sin^2(\omega t)}{R} dt = \frac{V^2}{TR} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt = \frac{V^2}{2TR} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T$$
$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\bullet = \frac{V^2}{2TR} \left[T - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega T + \frac{1}{2\omega} \sin 0 \right] = \frac{V^2}{2TR} \times T = \frac{V^2}{2R} = \frac{V}{\sqrt{2R}} \frac{V}{\sqrt{2}} = I_e V_e$$

$$\omega T = 2\pi$$

- よって、正弦波交流の実効値は振幅の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

■ 実効値（資格試験・国家試験のために覚える）

- 交流

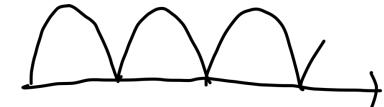
- $\frac{V}{\sqrt{2}}$

- 全波整流（計算で2乗するため、交流と同じ値となる）

- $\frac{V}{\sqrt{2}}$

- 半波整流

- $\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{V^2 \sin^2(\omega t)}{R} dt = \frac{V^2}{TR} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt$



- $= \frac{V^2}{2TR} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^{T/2} = \frac{V^2}{2TR} \left[\frac{T}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin \omega T + \frac{1}{2\omega} \sin 0 \right]$

- $= \frac{V^2}{4TR} \times T = \frac{V^2}{4R} = \frac{V}{2R} \frac{V}{2} = I_e V_e$



- よって実効値は $V/2$

問題

■ 問題解説

- 時刻t[s]における交流電流の瞬時値が以下の式で与えられるとき、周期[s]はいくらか。（第39回ME2種）
 - $i(t) = 20 \sin(40\pi t - \pi/4)$
1. 0.025
 2. 0.05
 3. 0.5
 4. 20
 5. 40

■ 問題解説

- 時刻t[s]における交流電流の瞬時値が以下の式で与えられるとき、周期[s]はいくらか。（第39回ME2種）
 - $i(t) = 20 \sin(40\pi t - \pi/4)$
- 0.025
 - 0.05
 - 0.5
 - 20
 - 40

波の式は次のとおりである。

$$I(t) = A \sin(2\pi f t - \phi)$$

よって周波数は

$$f = 20\text{Hz}$$

周期は

$$T = \frac{1}{20} = 0.05\text{s}$$

■ 問題解説

- $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(40\pi t - \frac{\pi}{6})$ [mA]で表される交流について誤っているのはどれか. (第34回ME2種)
 1. 振幅 : 14.1mA
 2. 周波数 : 40Hz
 3. 位相遅れ : 30°
 4. 角周波数 : 126rad/s
 5. 実効値 : 10mA

問題解説

- $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(40\pi t - \frac{\pi}{6})$ [mA] で表される交流について誤っているのはどれか. (第34回ME2種)

1. 振幅 : 14.1mA
2. 周波数 : 40Hz
3. 位相遅れ : 30°
4. 角周波数 : 126rad/s
5. 実効値 : 10mA

波の式は次のとおりである.

$$I(t) = A \sin(2\pi f t - \phi)$$

よって周波数は

$$f = 20\text{Hz}$$

周期は

$$T = \frac{1}{20} = 0.05\text{s}$$

位相は

$$\phi = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ$$

与式から振幅は

$$A = 10 \times \sqrt{2} \cong 14.1\text{mA}$$

与式から角周波数は

$$\omega = 40\pi \cong 126\text{rad/s}$$

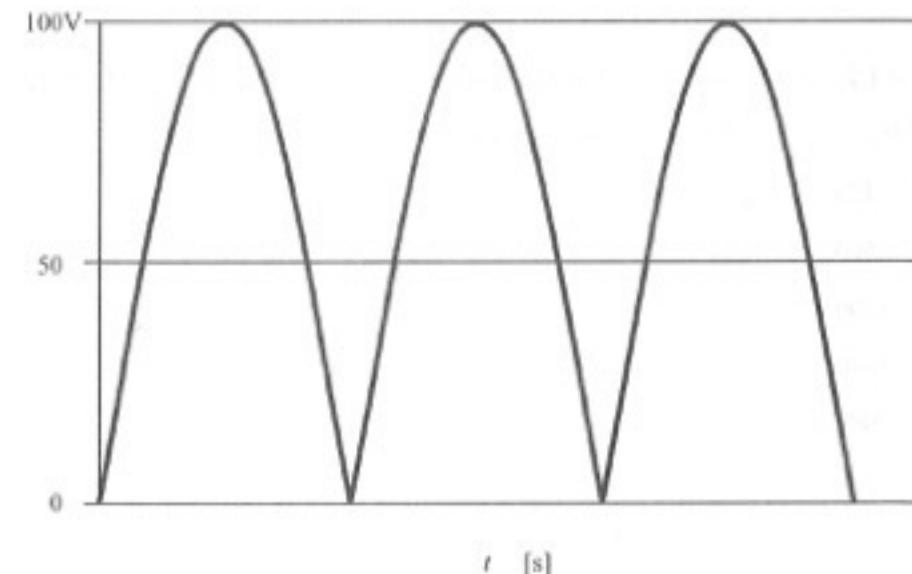
実効値は

$$V = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10\text{mA}$$

■ 問題解説

- 図は50Hz正弦波交流の全波整流波形である。実効値は何Vか。（第34回ME2種）

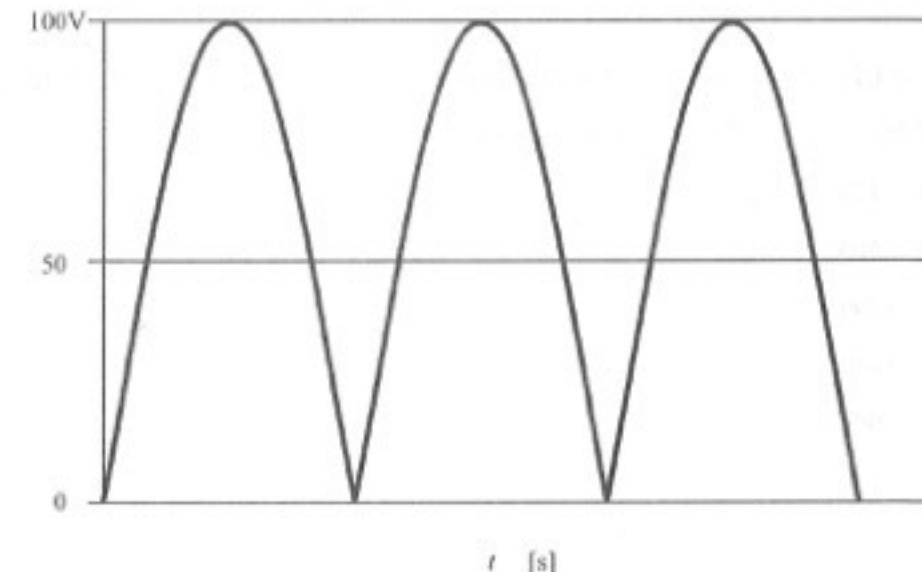
1. 140
2. 100
3. 71
4. 50
5. 32



■ 問題解説

- 図は50Hz正弦波交流の全波整流波形である。実効値は何Vか。（第34回ME2種）

1. 140
2. 100
3. 71
4. 50
5. 32



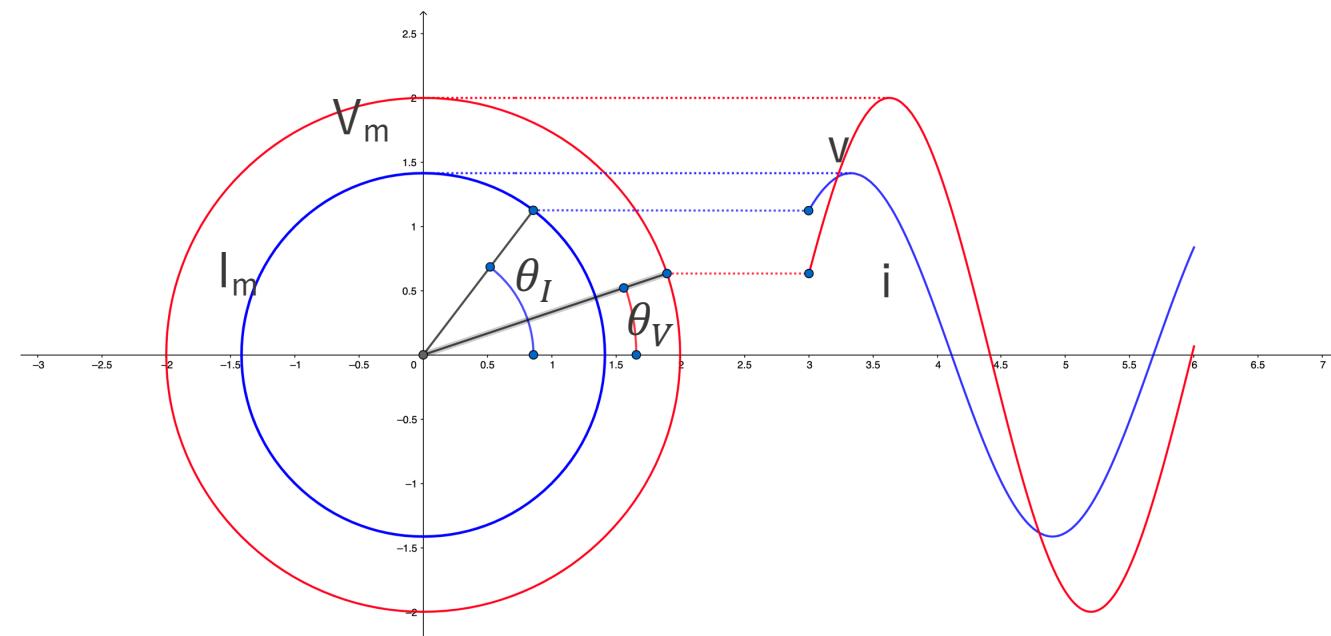
全波整流交流は正弦波交流と同じ実効値である。
よって実効値は

$$V = \frac{100}{\sqrt{2}} \cong 70.7V$$

フェーザ図と複素数表示

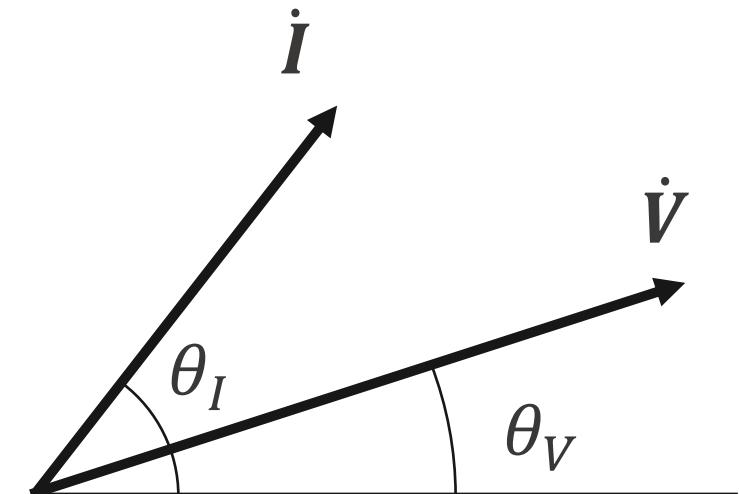
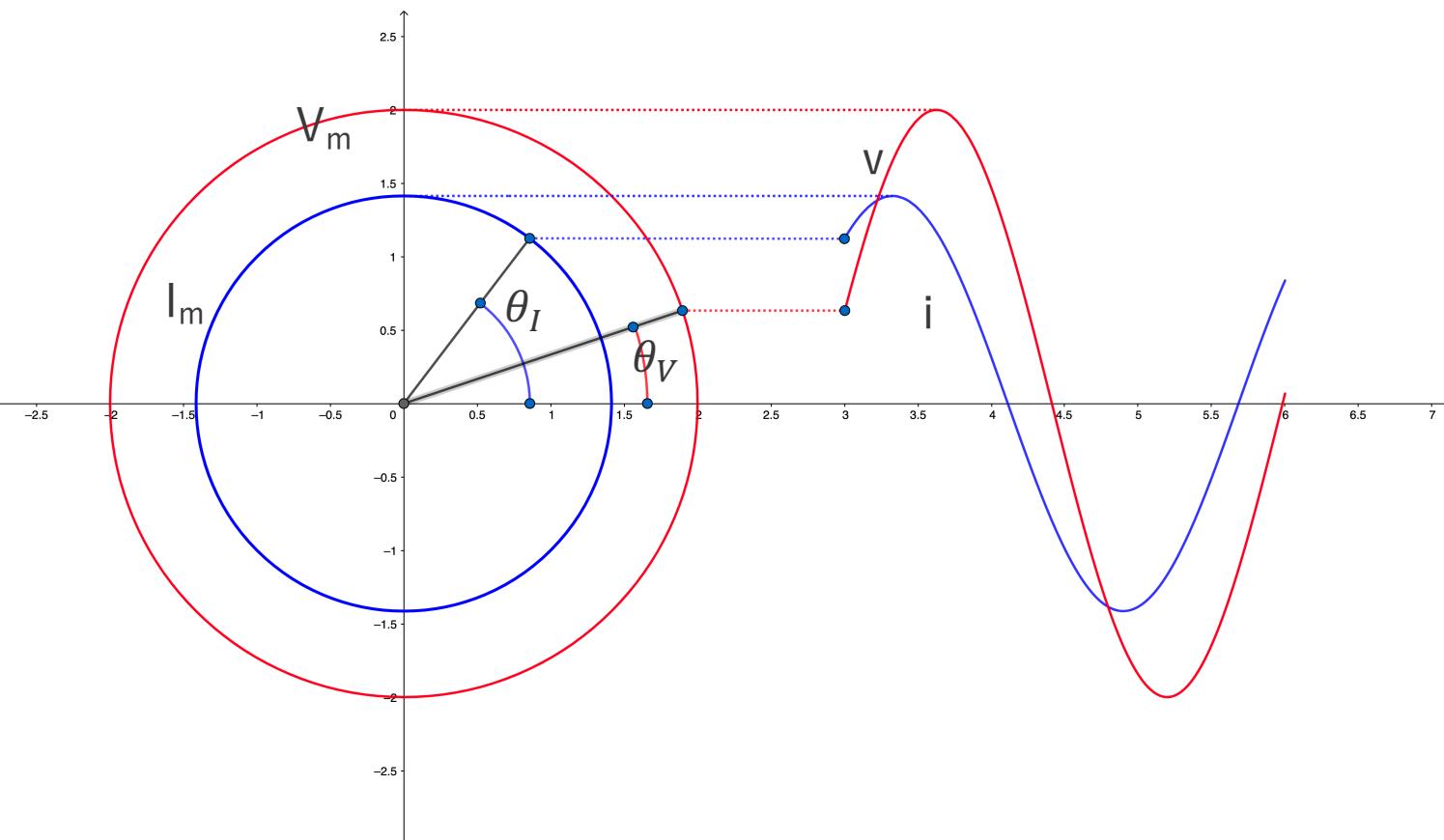
■ 正弦波

- 正弦波交流の電圧（瞬時値）を次の式で表す。
- $v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$
- 電圧と電流の値は時間変化するが、その特性は最大値 V_m , I_m , 角周波数 ω , 位相 θ_V , θ_I の3つのパラメタで表現できる。



■ フェーザ図

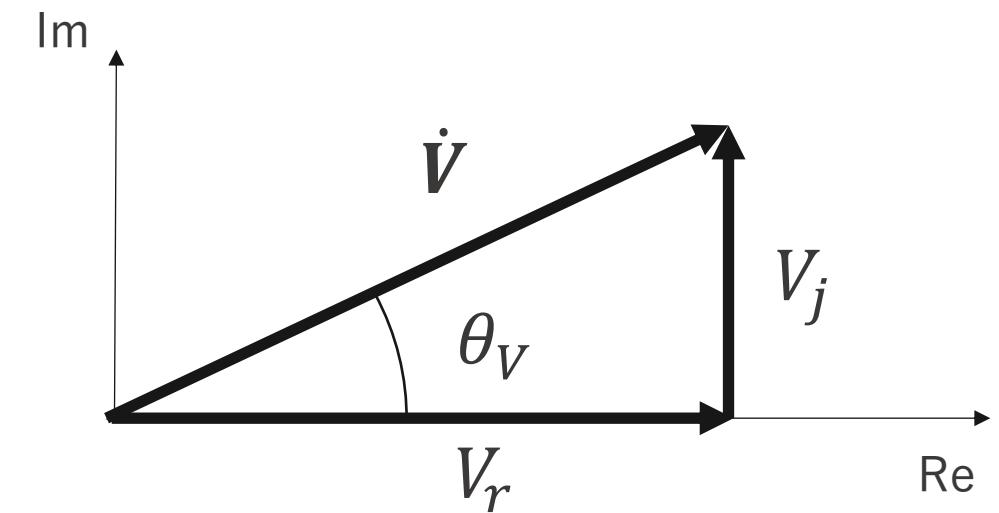
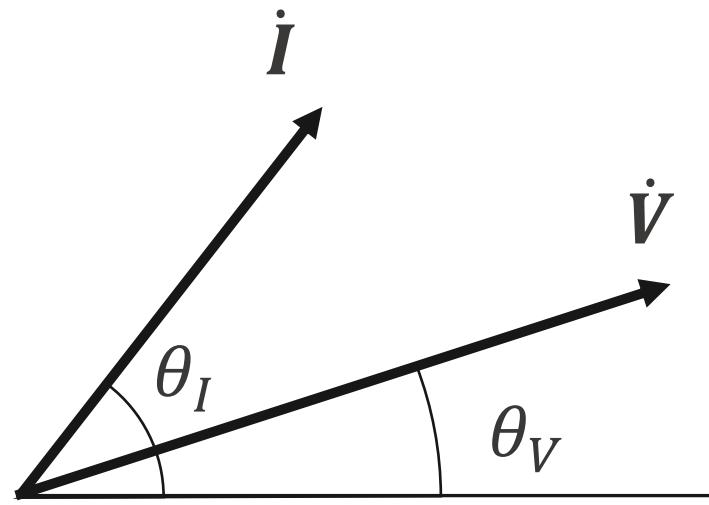
- 下図のように、電圧や電流を、長さを実効値、角度を位相とした矢印（ベクトル）で表したものフェーザ図と呼ぶ。



フェーザ図

■ 複素数表示

- ・フェーザ図を複素平面として捉えれば、電圧や電流のベクトルは複素数で表現できる。
- ・これを複素数表示と呼ぶ。
- ・電気・電子回路では虚数単位をjで表す。



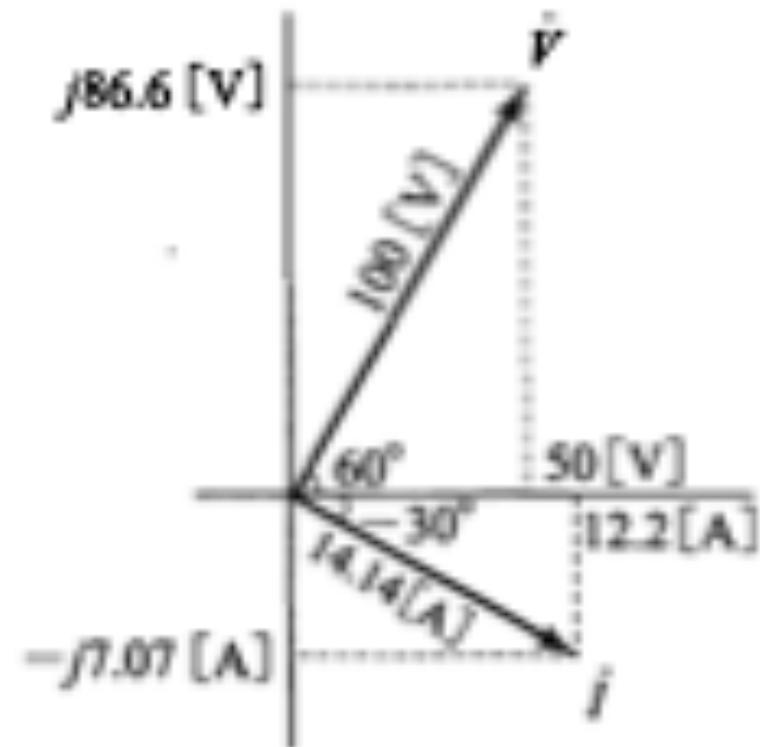
$$\dot{V} = V_r + jV_i$$

■ 例

- ・次の式の複素数表示を求めよ。さらにフェーザ図をかけ。
- ・ $v = 100\sqrt{2} \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$
- ・ $i = 20 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$

■ 例

- 次の式の複素数表示を求めよ。さらにフェーザ図をかけ。
- $v = 100\sqrt{2} \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$
- $i = 20 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$
- それぞれの複素数表示は次のようになる。
- $\dot{V} = 50 + 50\sqrt{3}j$
- $\dot{i} = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}j$



■ 問題

・次の複素数で表された電圧の実効値と位相を求めよ。

1. $\dot{V} = 1 + \sqrt{3}j$

2. $\dot{V} = -1 + j$

・次の複素数で表された電圧の実効値を求めよ。

1. $\dot{V} = 3 + 4j$

2. $\dot{V} = 10 - 5j$

■ 問題

・次の複素数で表された電圧の実効値と位相を求めよ。

1. $\dot{V} = 1 + \sqrt{3}j$ 実効値は2, 位相は $\pi / 3$

2. $\dot{V} = -1 + j$ 実効値は $\sqrt{2}$, 位相は $3\pi / 4$

・次の複素数で表された電圧の実効値を求めよ。

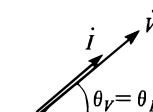
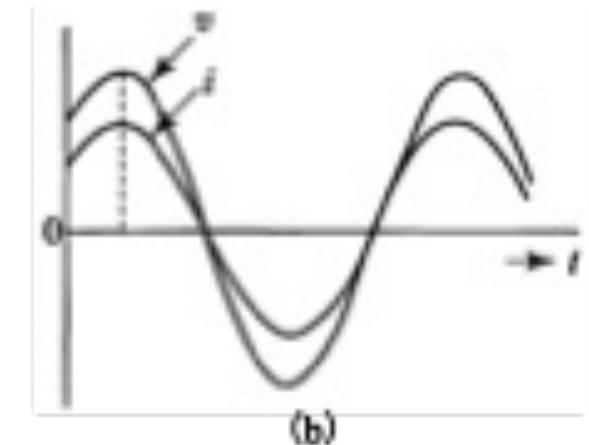
1. $\dot{V} = 3 + 4j$ 実効値は5

2. $\dot{V} = 10 - 5j$ 実効値は $\sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

交流と抵抗

■ 交流と抵抗

- オームの法則は
- $v = Ri$
- 電流を $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$ とすると、電圧は次のようになる。
- $v = RI_m \sin(\omega t + \theta_I) = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- したがって,
- $V_m = RI_m$
- $\theta_V = \theta_I$
- である。よって複素数表示は
- $\dot{V} = R\dot{I}$
- 抵抗では電流と電圧は同位相である。



コンデンサ

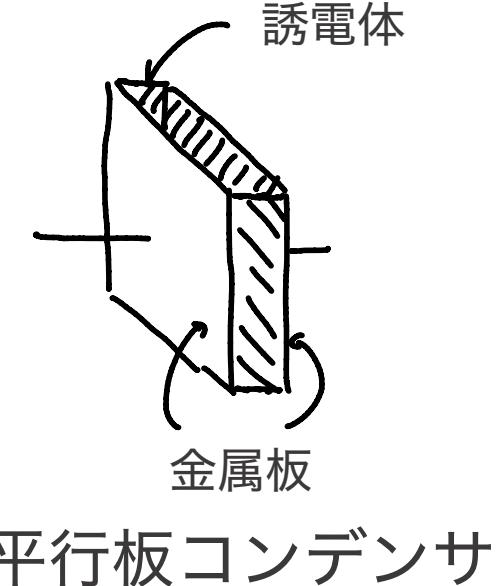
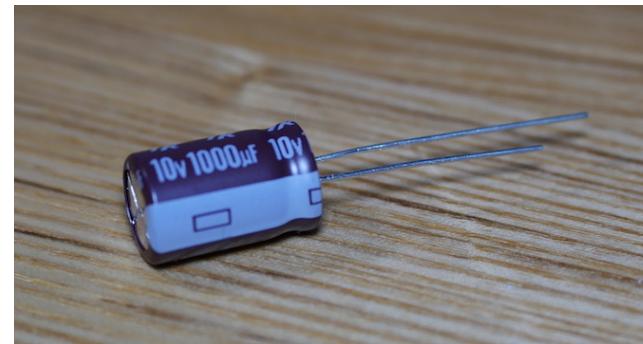
■ コンデンサ（キャパシタ）

- ・電荷を貯める機能を持つ。
- ・電荷の量Qの単位は[C]（クーロン）
- ・コンデンサに電圧Vを加えたときに、コンデンサに貯まる電荷Q[C]は、次の式で求まる。

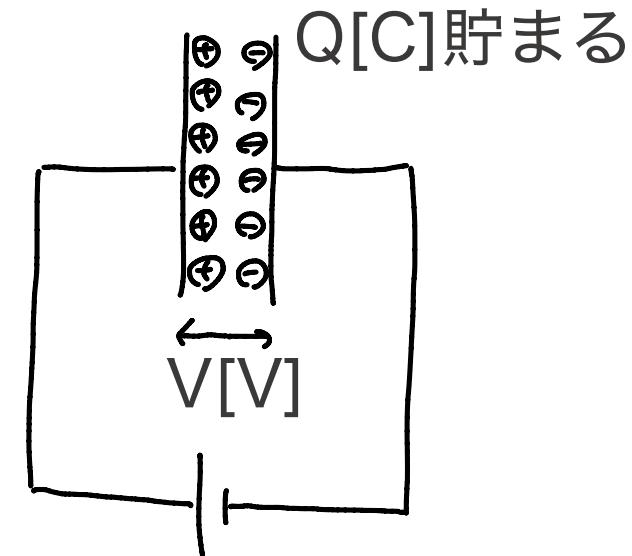
$$Q = CV$$

- ・Cはコンデンサの静電容量と呼ばれる量で、単位は[F]（ファラッド）である。

詳しい話は電磁気の講義のときに



平行板コンデンサ



■ 電荷, 静電容量, 電圧, 電流の関係

- コンデンサにたまつた電荷量 Q [C], コンデンサの静電容量 C [F], コンデンサにかかる電圧 V [V] は次の関係がある。

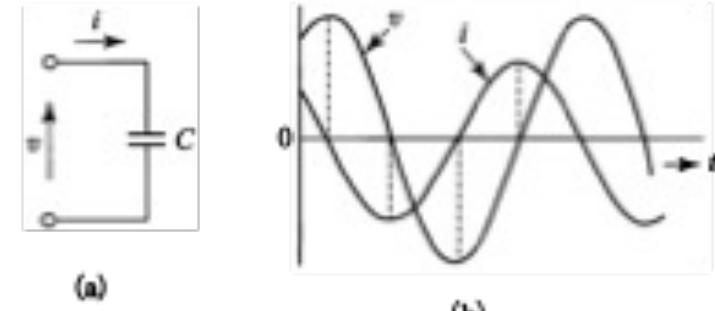
$$Q = CV$$

- 電流の定義式から、コンデンサを流れる電流は次のようになる。

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} \\ &= \frac{dCV}{dt} \\ &= C \frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

■ コンデンサの電圧と電流

- ・コンデンサに加える電圧 v を次のとおりとする.
- ・ $v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- ・コンデンサに流れる電流 i は電流の定義から
- ・ $i = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCv}{dt} = C \frac{d}{dt} V_m \sin(\omega t + \theta_V) = \omega C V_m \cos(\omega t + \theta_V)$
- ・ $= \omega C V_m \sin(\omega t + \theta_V + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$
- ・よって、次のことが成り立つ.
- ・ $I_m = \omega C V_m$
- ・ $\theta_I = \theta_V + \frac{\pi}{2}$
- ・つまり、電流は電圧よりも位相が90°進んでいる。



■ コンデンサの電圧と電流の複素数表示

- 電流と電圧の実効値を i , \dot{V} とする。電流は電圧より位相が $\pi/2$ 進んでいるので、電流と電圧の関係を複素数表示で表すと
- $i = j\omega C \dot{V}$
- $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C} i$



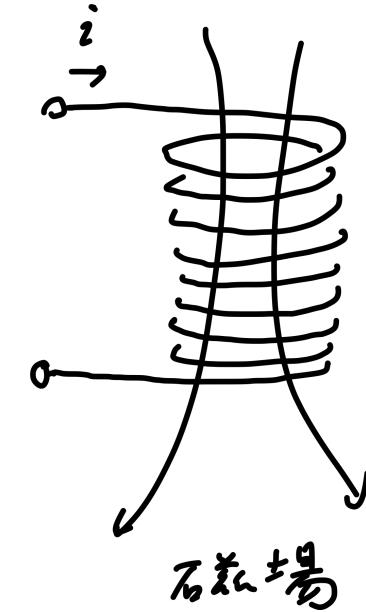
インダクタ（コイル）

■ インダクタ（コイル）



図記号

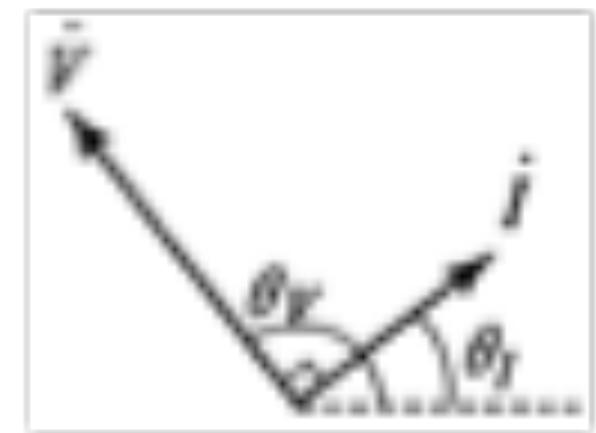
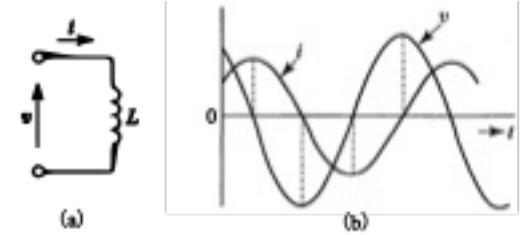
- ・銅線を巻いたもの。
- ・電流が変化すると電圧を発生させる。
 - ・誘導起電力 v は次の式で書かれる。
$$v = L \frac{\Delta i}{\Delta t}$$
 - ・ L を自己インダクタンスもしくはインダクタンスという。
 - ・単位はH（ヘンリー）
- ・誘導起電力は電流により発生する磁場を打ち消す方向に発生する。
 - ・電流変化に対しブレーキとして働くので、変化に対しインピーダンスが高くなる。



詳しい話は電磁気の講義のときに

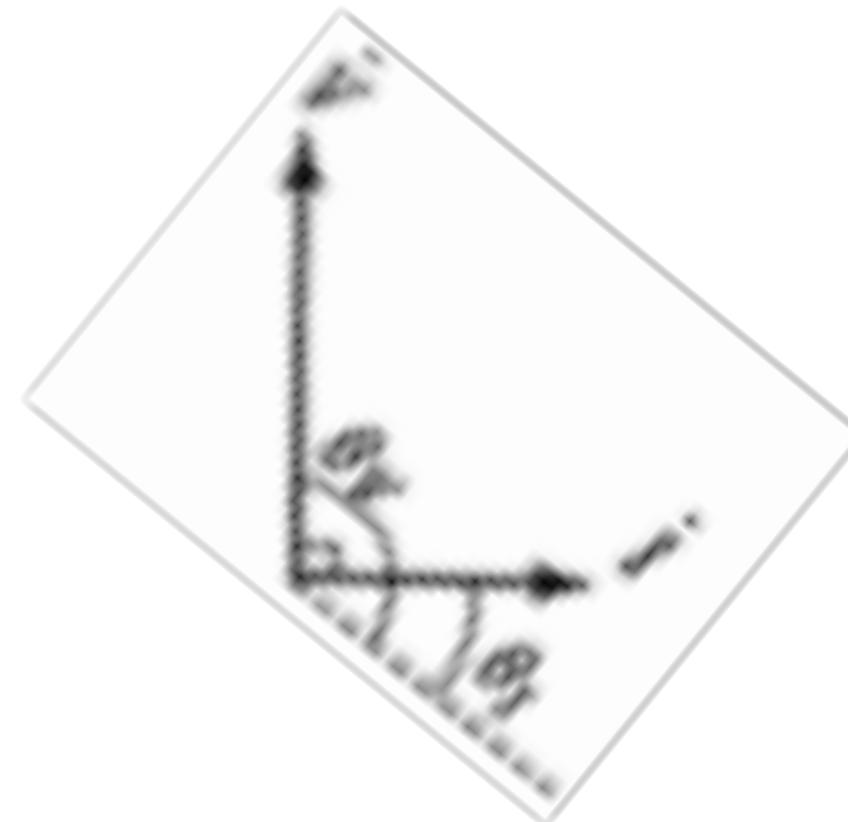
■ インダクタの電圧と電流

- ・インダクタに加える電流*i*を次のとおりとする.
- ・ $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$
- ・インダクタに流れる電圧*v*は誘導起電力の式から
- ・ $v = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} I_m \sin(\omega t + \theta_I) = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta_I)$
- ・ $= \omega L I_m \sin(\omega t + \theta_I + \frac{\pi}{2}) = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- ・よって、次のことが成り立つ.
- ・ $V_m = \omega L I_m$
- ・ $\theta_V = \theta_I + \frac{\pi}{2}$
- ・つまり、電圧は電流よりも位相が90° 進んでいる.



■ インダクタの電圧と電流の複素数表示

- 電流と電圧の実効値を i , \dot{V} とする。電圧は電流より位相が $\pi/2$ 進んでいるので、電流と電圧の関係を複素数表示で表すと
- $\dot{V} = j\omega L i$



■ インピーダンス, レジスタンス, リアクタンス

- どのような回路であれ、電圧と電流の関係を次のように表すとする。
- $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$
- ここで \dot{Z} をインピーダンスという。
- 抵抗の場合
- $\dot{V} = R\dot{I}$
- と書け、Rをレジスタンスという。
- また、コンデンサの場合、
- $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C} \dot{C}$
- と書け、 $\frac{1}{\omega C}$ を容量性リアクタンスという
- インダクタの場合
- $\dot{V} = j\omega L\dot{C}$
- と書け、 ωL を誘導性リアクタンスという。
- それぞれの単位はΩである。

■ 問題解説

- 最大値10Vの正弦波交流電圧を誘導リアクタンス 2.0Ω のインダクタに加えた。交流電圧の瞬時値が-10Vのときにインダクタを流れる交流の瞬時値[mA]として正しいのはどれか。(第41回ME2種)
 1. -5.0
 2. -3.5
 3. 0.0
 4. 3.5
 5. 5.0

問題解説

- 最大値10Vの正弦波交流電圧を誘導リアクタンス2.0Ωのインダクタに加えた。交流電圧の瞬時値が-10Vのときにインダクタを流れる交流の瞬時値[mA]として正しいのはどれか。(第41回ME2種)

- 5.0
- 3.5
- 0.0**
- 3.5
- 5.0

電圧の位相は0だとすると電圧は次の式でかける。

$$V = 10 \sin(\omega t)$$

$V=-10$ だから

$$\sin(\omega t) = -1$$

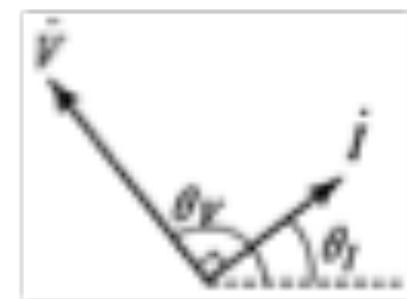
$$\omega t = -\frac{\pi}{2}$$

電圧の位相は0だとすると 電流は次の式でかける。

$$I = I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$\omega t = -\frac{\pi}{2}$ だから

$$I=0$$



問題解説

- 最大値10Vの正弦波交流電圧を誘導リアクタンス2.0Ωのインダクタに加えた。交流電圧の瞬時値が-10Vのときにインダクタを流れる交流の瞬時値[mA]として正しいのはどれか。(第41回ME2種)

1. -5.0

別解

2. -3.5

3. 0.0

4. 3.5

5. 5.0

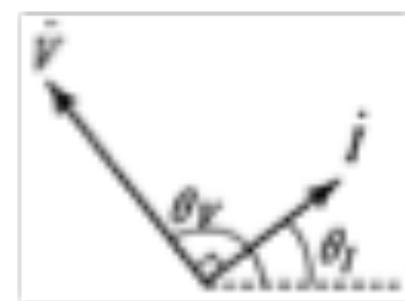
$$\dot{V} = \dot{Z}i$$

$$i = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} = \frac{\dot{V}}{j\omega L} = -j \frac{V}{\omega L}$$

よって電流は電圧に対し $-\frac{\pi}{2}$ ほど位相がずれている。

電圧が-10Vのとき、電圧の位相は $\frac{3}{4}\pi$ だから ($-10 = 10 \sin \frac{3}{4}\pi$)

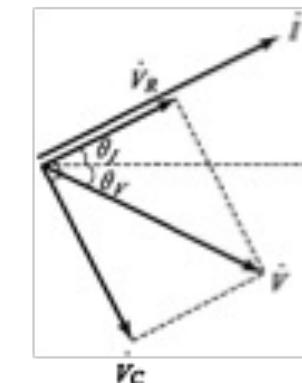
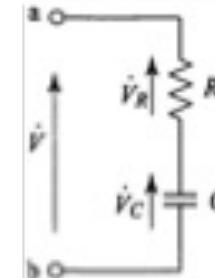
、電流の位相は π なので、電流 $10 \sin \pi = 0$ である。



直列回路

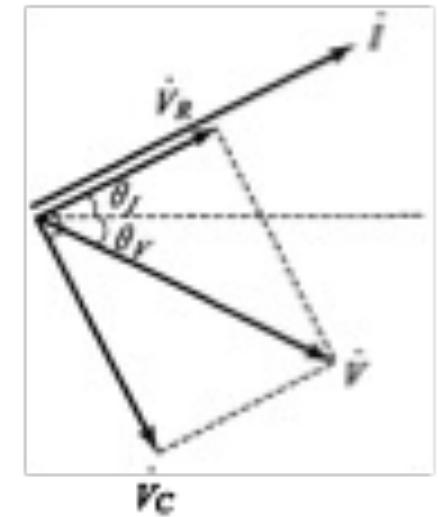
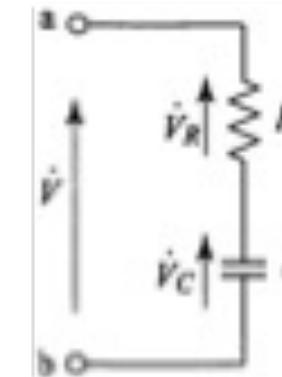
■ RC直列回路

- 図のように抵抗とコンデンサを直列につなぐ。
- 直列なので、各素子を流れる電流は等しく、各素子に加わる電圧の総和がab間の電圧となる。
- 各素子に加わる電圧は、
- $\dot{V}_R = R\dot{I}, \dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}$
- である。このことから、抵抗の電圧は電流と同位相であるが、コンデンサの電圧は電流及び抵抗の電圧から $\pi/2$ 遅れている。



■ RC直列回路

- ab間の電圧は
- $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C = R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}$
- ここで、電圧と電流を $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$ と表すとき、 \dot{Z} をインピーダンスという。
- RC直列回路のインピーダンスは
- $\dot{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$
- である。

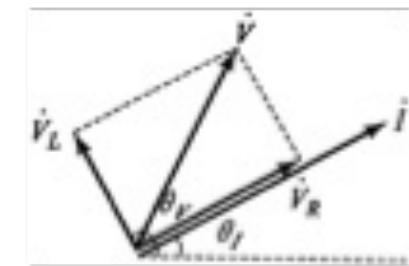
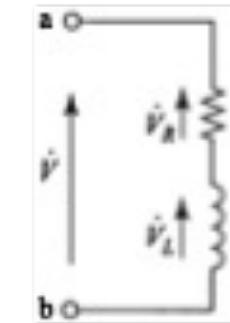


■ 回路の性質と周波数

- ・コンデンサのインピーダンスは $1/(j\omega C)$
- ・電源の周波数が低ければ低いほどインピーダンスが高い。
 - ・定常状態では、コンデンサは直流を流さない（つまり開放と見なせる）。このとき、コンデンサのインピーダンスが無限大となるため。
 - ・CR直列回路では、定常状態のとき電流は流れない。
- ・電源の周波数が高ければ高いほどインピーダンスは低い。
 - ・コンデンサは、電源の周波数が高いほど電流を通しやすい。

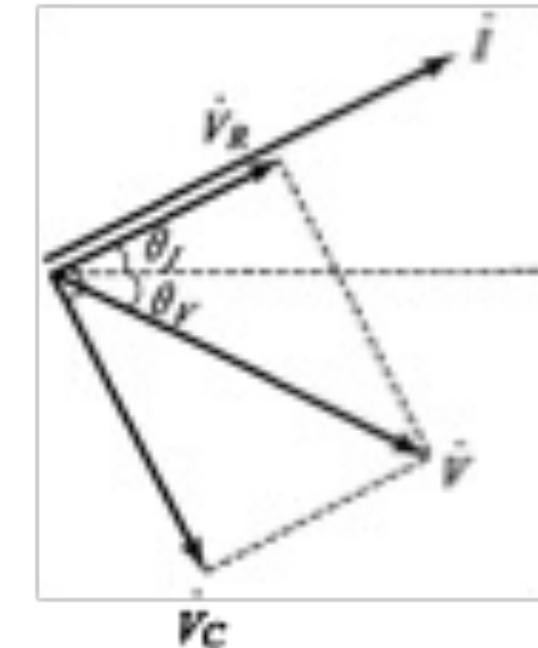
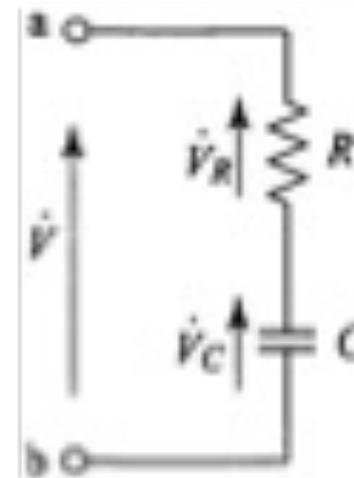
■ RL直列回路

- 図のように抵抗とインダクタを直列につなぐ。
- 直列なので、各素子を流れる電流は等しく、各素子に加わる電圧の総和がab間の電圧となる。
- 各素子に加わる電圧は、
- $\dot{V}_R = R\dot{I}, \dot{V}_L = \frac{1}{j\omega L}\dot{I}$
- である。このことから、抵抗の電圧は電流と同位相であるが、インダクタの電圧は電流及び抵抗の電圧から $\pi/2$ 進んでいる。



■ RL直列回路

- ab間の電圧は
- $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = (R + j\omega L)\dot{I}$
- RL直列回路のインピーダンスは
- $\dot{Z} = R + j\omega L$
- である。



■ インダクタ（コイル）

- ・インダクタのインピーダンスは $j\omega L$
- ・電源の周波数が低ければ低いほど小さい。
 - ・直流回路で、かつ定常状態のとき、インダクタは単なる導線と見なせる（短絡していると見なせる）。このとき、インダクタのインピーダンスが0となるため。
- ・電源の周波数が高ければ高いほどインピーダンスは高い。
 - ・周波数が高い電流ほど通しにくい。

直流回路（定常状態）におけるコ ンデンサとインダクタ

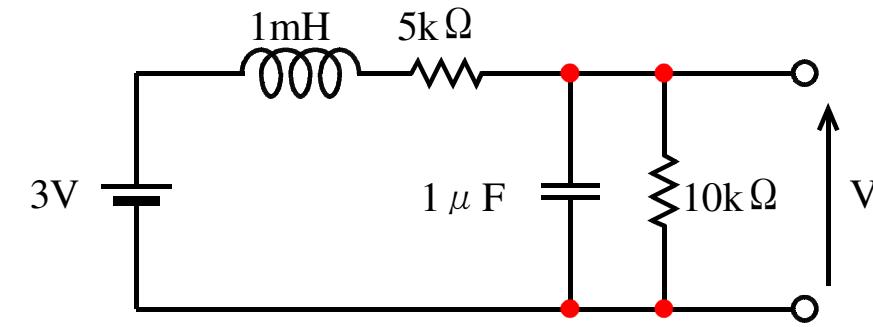
■ 直流回路（定常状態）におけるコンデンサとインダクタ

- ・ コンデンサは開放（切斷，電流を流さない状態）
 - ・ コンデンサは限界まで電荷を貯めると電流が流れなくなる。
 - ・ コンデンサに電荷が限界まで溜まった状態（定常状態）では、コンデンサは開放（切斷，電流を流さない状態）となる。
- ・ インダクタ（コイル）は短絡
 - ・ コイルは電位変化が生じなければ（定常状態では），誘導起電力も発生しないため、短絡（抵抗0の状態，単なる導線）となる。

問題解説

【AM22】 図の電圧 V の値[V]はどれか。

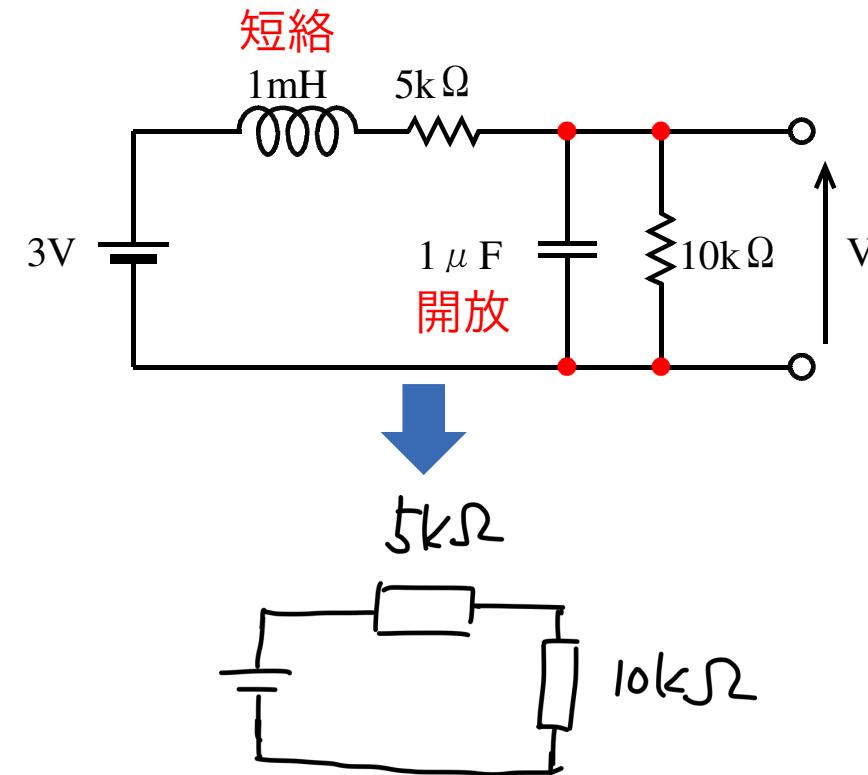
- (1) 0
- (2) 1
- (3) 1.5
- (4) 2
- (5) 3



問題解説

【AM22】 図の電圧 V の値[V]はどれか。

- (1) 0
- (2) 1
- (3) 1.5
- (4) 2
- (5) 3



直流の場合、定常状態ではインダクタは抵抗0となり短絡、コンデンサは抵抗無限大となり開放と見なせる。つまり、2つの抵抗の直列回路となり、Vは10kΩの抵抗に加わる電圧である。よって、次の式が成り立つ。

$$V = 3 * 10 / (10+5) = 2$$