

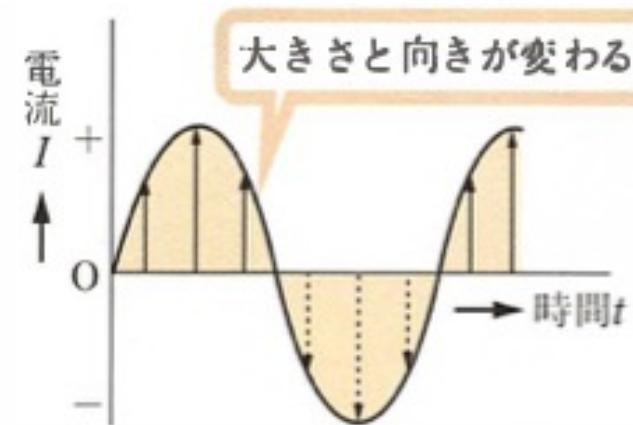
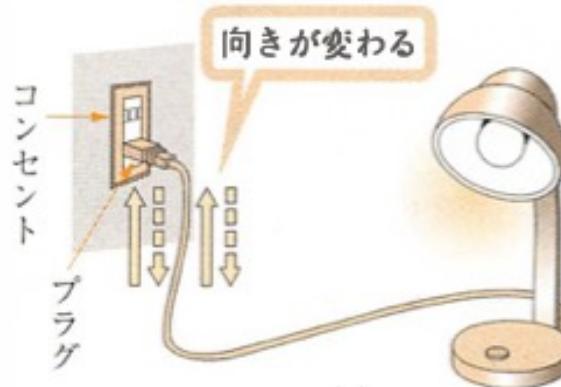
電気工学2 第3回 交流回路

公立小松大学

藤田 一寿

■ 交流

- 交流では、電圧や電流の大きさと向きが時間の経過とともに変化する。



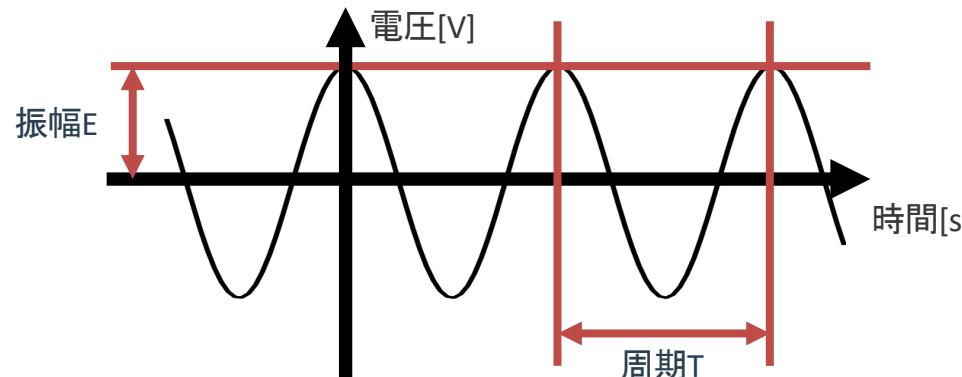
■ 正弦波の式とパラメタ

- 正弦波

$$e = E \sin 2\pi ft$$

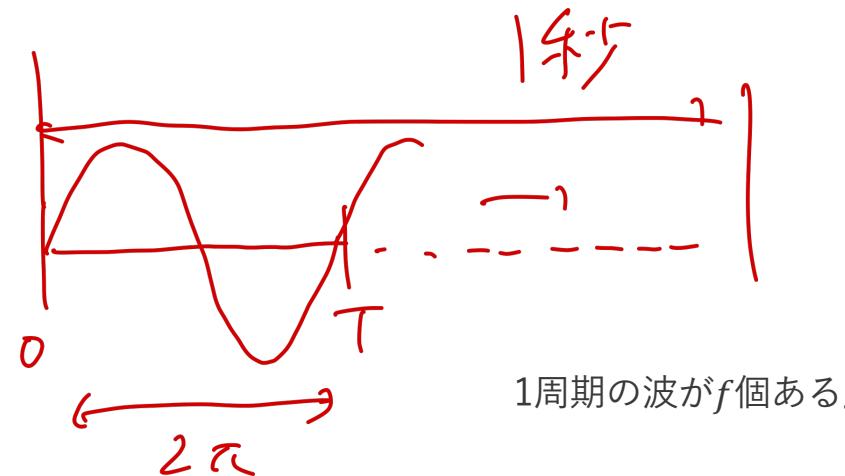
- 波を表すための指標

- 周期 T [s] 山から山までの時間
- 周波数 f [Hz] $f = 1/T$ 1秒間に何個山があるか
- 振幅 E



■ 周波数と周期

- 周波数 f は1周期の波が1秒あたり f 個あることを意味する。
- 1周期分の角度は、 $2\pi[\text{rad}]$ だから1秒あたり $2\pi f[\text{rad}]$ 進む。これが角周波数（角速度） ω である。
- 1周期の波が1秒あたり f 個あるのだから、1個あたりの時間は $1/f$ である。これが周期 T である。



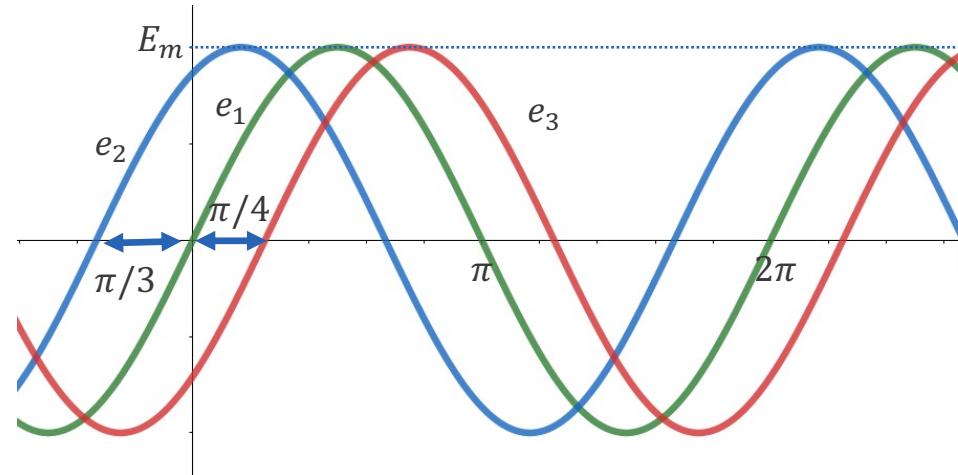
1周期の波が f 個ある。

■ 位相と位相差

$$e_1 = E_m \sin \omega t$$

$$e_2 = E_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$e_3 = E_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

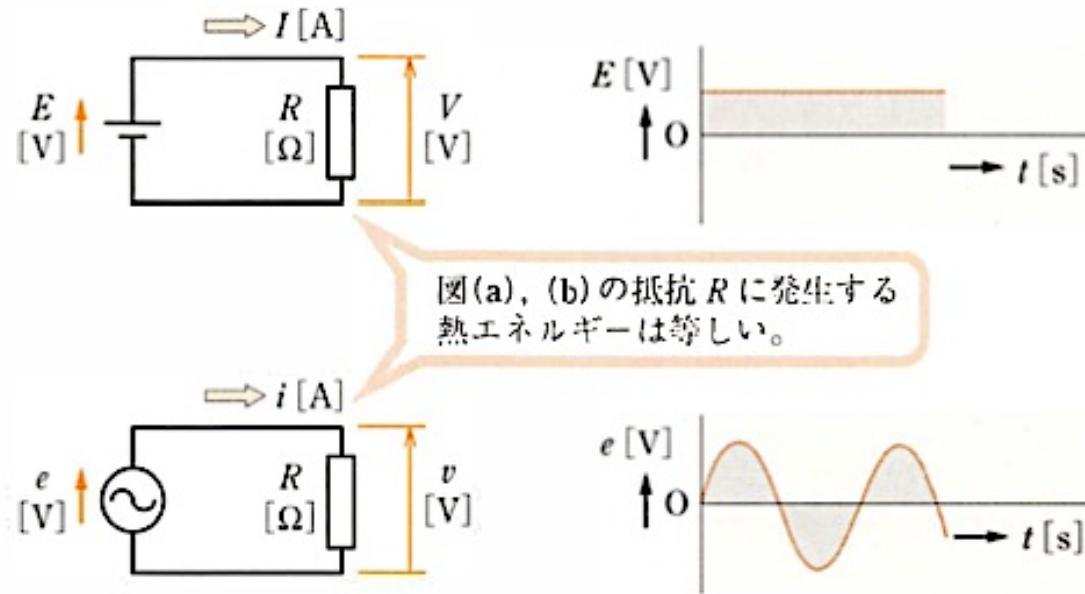


- \sin 内の ωt , $\omega t + \pi/3$, $\omega t - \pi/4$ を位相と呼ぶ.
- e_1 を基準とした時, $+\pi/3$, $-\pi/4$ を位相差と呼ぶ.
- e_2 は e_1 より位相が $\pi/3$ 進んでいる.
- e_3 は e_1 より位相が $\pi/4$ 遅れている.

実効値

■ 実効値

- 直流起電力 E と抵抗 R を繋いだときに発生する熱エネルギーと交流起電力 e と抵抗 R を繋いだときに発生する熱エネルギーが等しいとき、 E を交流起電力 e の実効値と言う。



■ 正弦波交流の実効値の計算

- 抵抗Rに $v(t) = V \sin \omega t$ の電圧を加えたときの電力は

$$\bullet P(t) = i(t)v(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{V^2 \sin^2(\omega t)}{R}$$

- 1周期の平均電力は

$$\bullet \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V^2 \sin^2(\omega t)}{R} dt = \frac{V}{\sqrt{2}R} \frac{V}{\sqrt{2}} = I_e V_e$$

- よって、正弦波交流の実効値は振幅の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V^2 \sin^2(\omega t)}{R} dt = \frac{V^2}{TR} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt \\&= \frac{V^2}{2TR} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T \\&= \frac{V^2}{2TR} \left[T - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega T + \frac{1}{2\omega} \sin 0 \right] = \frac{V^2}{2TR} \times T = \frac{V^2}{2R} = \frac{V}{\sqrt{2}R} \frac{V}{\sqrt{2}} \\&= I_e V_e \quad \omega T = 2\pi\end{aligned}$$

■ 実効値（資格試験・国家試験のために覚える）

- 交流
 - $\frac{\text{振幅}V}{\sqrt{2}}$
- 全波整流（計算で2乗するため、交流と同じ値となる）
 - $\frac{\text{振幅}V}{\sqrt{2}}$
- 半波整流
 - $\frac{\text{振幅}V}{2}$

半波整流正弦波の実効値

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{V^2 \sin^2(\omega t)}{R} dt = \frac{V^2}{TR} \int_0^{T/2} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))dt \\ &= \frac{V^2}{2TR} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^{T/2} = \frac{V^2}{2TR} \left[\frac{T}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin \omega T + \frac{1}{2\omega} \sin 0 \right] \\ &= \frac{V^2}{4TR} \times T = \frac{V^2}{4R} = \frac{V}{2R} \frac{V}{2} = I_e V_e\end{aligned}$$



問題

■ 問題解説

- 時刻 $t[\text{s}]$ における交流電流の瞬時値が以下の式で与えられるとき、周期 $[\text{s}]$ はいくらか。 (第39回ME2種)
 $i(t) = 20 \sin(40\pi t - \pi/4)$
- 1. 0.025
- 2. 0.05
- 3. 0.5
- 4. 20
- 5. 40

■ 問題解説

- 時刻 t [s]における交流電流の瞬時値が以下の式で与えられるとき、周期[s]はいくらか。(第39回ME2種)
 - $i(t) = 20 \sin(40\pi t - \pi/4)$
- 0.025
 - 0.05** 波の式は次のとおりである。 $I(t) = A \sin(2\pi f t - \phi)$
よって周波数は
 $f = 20\text{Hz}$
 - 0.5
 - 20
 - 40 周期は
 $T = \frac{1}{20} = 0.05\text{s}$

■ 問題解説

- $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(40\pi t - \frac{\pi}{6})$ [mA]で表される交流について誤っているのはどれか。 (第34回ME2種)
 1. 振幅：14.1mA
 2. 周波数：40Hz
 3. 位相遅れ：30°
 4. 角周波数：126rad/s
 5. 実効値：10mA

問題解説

- $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(40\pi t - \frac{\pi}{6})$ [mA] で表される交流について誤っているのはどれか。 (第34回ME2種)

1. 振幅 : 14.1mA

2. 周波数 : 40Hz

3. 位相遅れ : 30°

4. 角周波数 : 126rad/s

5. 実効値 : 10mA

波の式は次のとおりである。

$$I(t) = A \sin(2\pi ft - \phi)$$

よって周波数は

$$f = 20\text{Hz}$$

周期は

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20} = 0.05\text{s}$$

位相は

$$\phi = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ$$

与式から振幅は

$$A = 10 \times \sqrt{2} \cong 14.1\text{mA}$$

与式から角周波数は

$$\omega = 40\pi \cong 126\text{rad/s}$$

実効値は

$$V = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10\text{mA}$$

■ 問題

- 正弦波交流 $i_1 = 141 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ [A], $i_2 = 282 \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ [A]において, i_1 と i_2 の位相差[rad]について正しいのはどれか.
(臨床工学技士国家試験30回)
 - i_1 が i_2 より $\pi/6$ 進んでいる.
 - i_1 が i_2 より $\pi/2$ 進んでいる.
 - i_1 が i_2 より $2\pi/3$ 遅れている.
 - i_1 が i_2 より $\pi/6$ 遅れている.
 - i_1 が i_2 より $\pi/2$ 遅れている.

■ 問題

- 正弦波交流 $i_1 = 141 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ [A], $i_2 = 282 \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ [A]において, i_1 と i_2 の位相差[rad]について正しいのはどれか。
(臨床工学技士国家試験30回)
 - i_1 が i_2 より $\pi/6$ 進んでいる。
 - i_1 が i_2 より $\pi/2$ 進んでいる。**
 - i_1 が i_2 より $2\pi/3$ 遅れている。
 - i_1 が i_2 より $\pi/6$ 遅れている。
 - i_1 が i_2 より $\pi/2$ 遅れている。

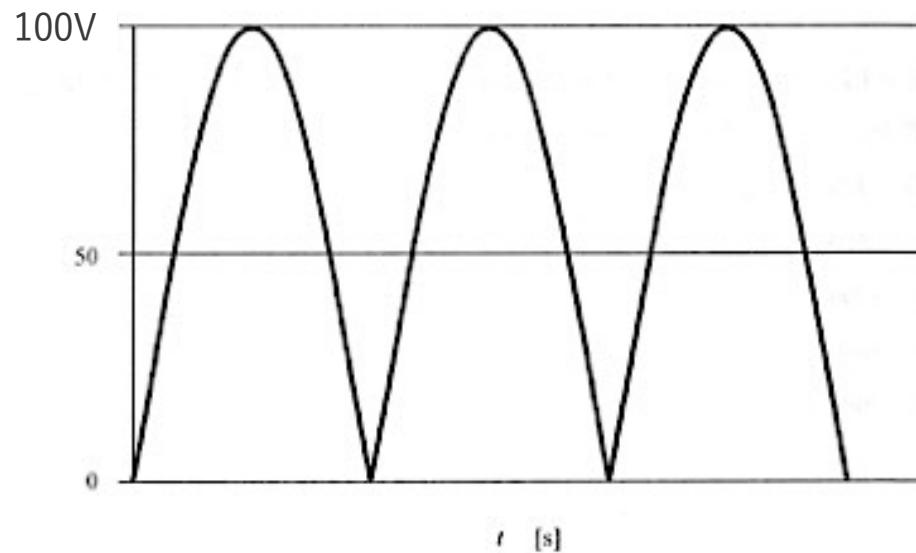
$$\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$$

よって i_1 が i_2 より $\pi/2$ 進んでいる。

■ 問題解説

- 図は50Hz正弦波交流の全波整流波形である。実効値は何Vか。（第34回ME2種）

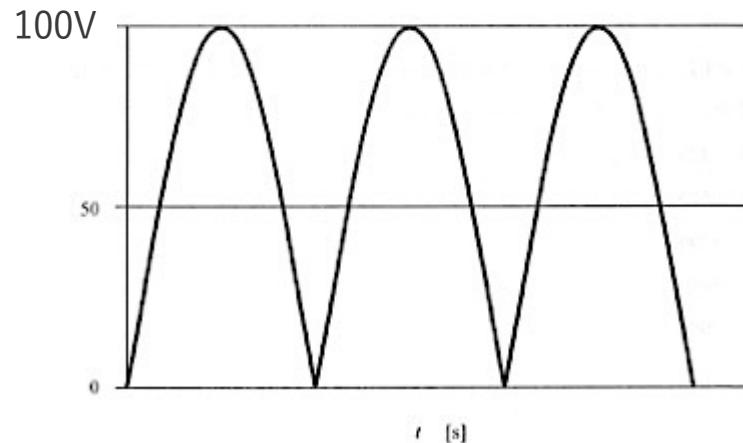
1. 140
2. 100
3. 71
4. 50
5. 32



■ 問題解説

- 図は50Hz正弦波交流の全波整流波形である。実効値は何Vか。（第34回ME2種）

1. 140
2. 100
3. 71
4. 50
5. 32



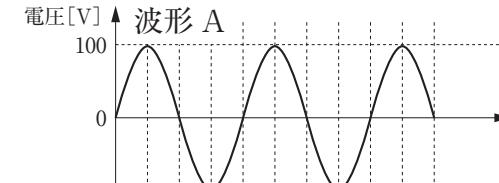
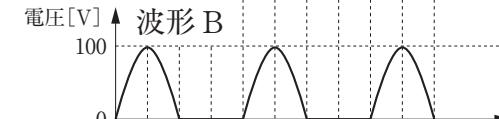
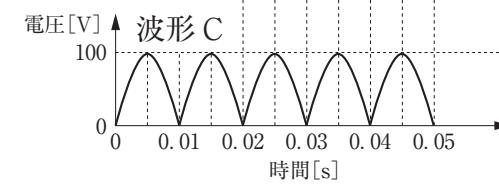
全波整流交流は正弦波交流と同じ実効値である。
よって実効値は

$$V = \frac{100}{\sqrt{2}} \cong 70.7V$$

問題

- 表は、正弦波交流波形Aとその整流波形B, Cについて、それぞれの平均値[V]および実効値[V]を示している。標柱の空欄箇所(ア)および(イ)に記入する値として、正しい組み合わせはどれか。(国家試験33回)

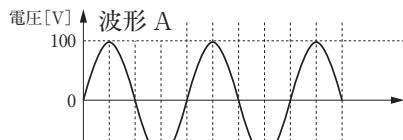
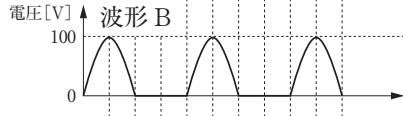
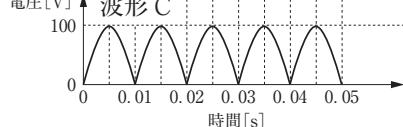
- | | |
|---------|------|
| • (ア) | (イ) |
| 1. 31.8 | 60.4 |
| 2. 31.8 | 70.7 |
| 3. 45.0 | 50.0 |
| 4. 45.0 | 60.4 |
| 5. 45.0 | 70.7 |

波形	平均値[V]	実効値[V]
	0	70.7
	(ア)	50.0
	63.7	(イ)

問題

- 表は、正弦波交流波形Aとその整流波形B, Cについて、それぞれの平均値[V]および実効値[V]を示している。標柱の空欄箇所（ア）および（イ）に記入する値として、正しい組み合わせはどれか。（国家試験33回）

- (ア) (イ)
1. 31.8 60.4
2. 31.8 70.7
3. 45.0 50.0
4. 45.0 60.4
5. 45.0 70.7

波形	平均値[V]	実効値[V]
	0	70.7
	(ア)	50.0
	63.7	(イ)

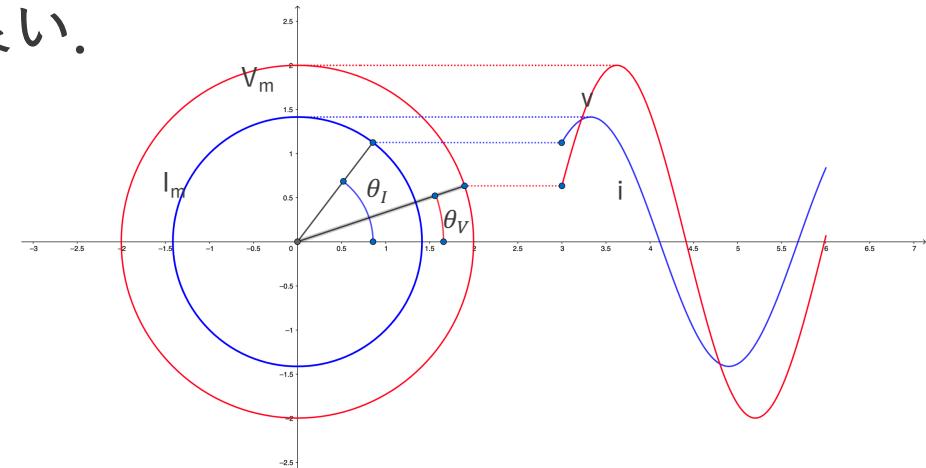
全波整流Cの実効値は、正弦波交流Aと同じなので（イ）は70.7である。

半波整流Bの平均値は、明らかに全波整流Cの半分なので（ア）は31.8である。

フェーザ図と複素数表示

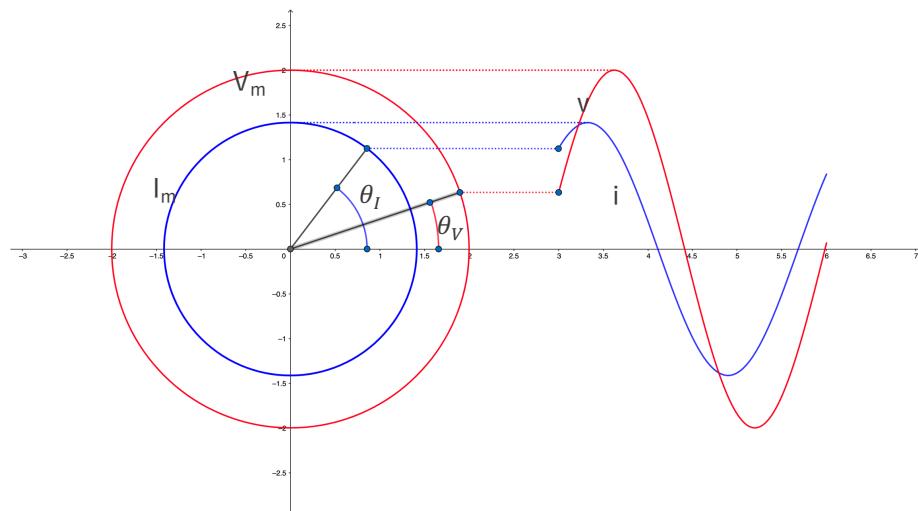
■ 正弦波

- 正弦波交流の電圧（瞬時値）を次の式で表す.
- $v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$
- 電圧と電流の値は時間変化するが、その特性は振幅 V_m , I_m ，角周波数 ω ，位相 θ_V, θ_I の3つのパラメタで表現できる。 ω が同じなら、振幅と位相の2パラメタで良い.

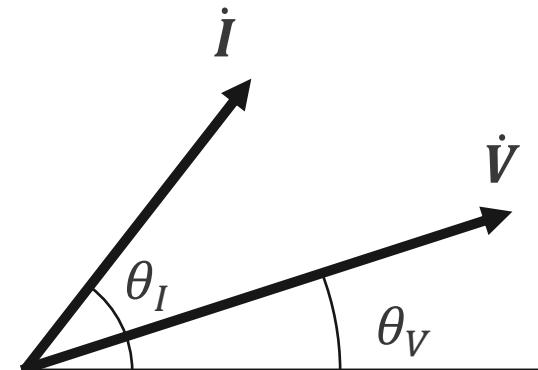


■ フェーザ図

- 下図のように、電圧や電流を、長さを実効値、角度を位相とした矢印（ベクトル）で表したものフェーザ図と呼ぶ。



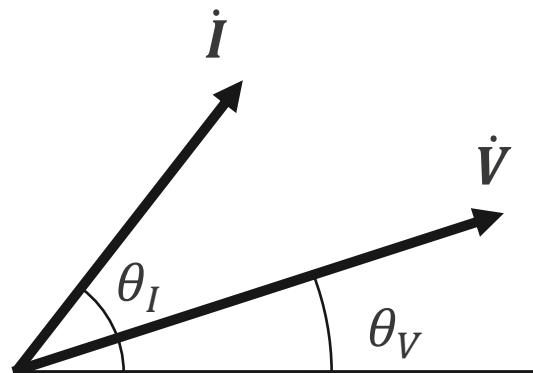
$$v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$$
$$i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$$



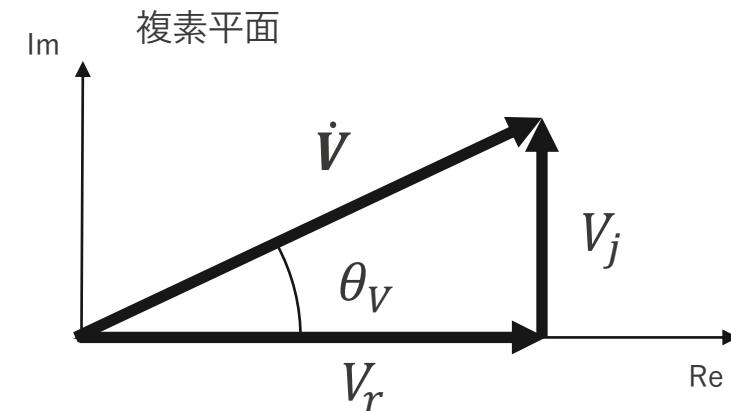
フェーザ図

■ 複素数表示

- ・フェーザ図を複素平面として捉えれば、電圧や電流のベクトルは複素数で表現できる。
- ・これを複素数表示と呼ぶ。
- ・電気・電子回路では虚数単位を j で表す。



ベクトルを複素
平面上にかく



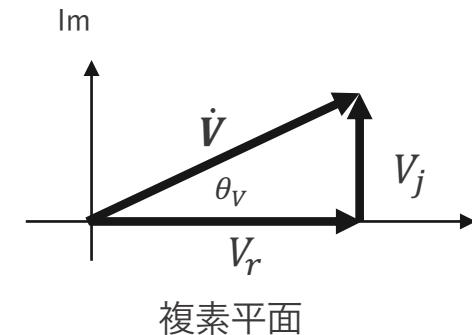
$$\dot{V} = V_r + jV_j$$

■ 複素数と実効値・位相

- 電圧が $\dot{V} = V_r + jV_j$ のとき

- 実効値は $|\dot{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_j^2}$

- 位相は $\theta_V = \tan^{-1} \frac{V_j}{V_r}$



- 複素数の掛け算

- $\dot{V}_1 \dot{V}_2$ の絶対値は $|\dot{V}_1| |\dot{V}_2|$ ，偏角は $\theta_{V_1} + \theta_{V_2}$

- 複素数の割り算

- $\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}$ の絶対値は $\frac{|\dot{V}_1|}{|\dot{V}_2|}$ ，偏角は $\theta_{V_1} - \theta_{V_2}$

- 実効値の比と位相差計算は複素数の割り算で求まる。

■ 確認

$$\dot{V}_1 = |\dot{V}_1| \left(\frac{V_{1r}}{|\dot{V}_1|} - j \frac{V_{1j}}{|\dot{V}_1|} \right) = |\dot{V}_1| (\cos \theta_{V_1} + j \sin \theta_{V_1})$$

$$\dot{V}_2 = |\dot{V}_2| \left(\frac{V_{2r}}{|\dot{V}_2|} - j \frac{V_{2j}}{|\dot{V}_2|} \right) = |\dot{V}_2| (\cos \theta_{V_2} + j \sin \theta_{V_2})$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 \times \dot{V}_2 &= |\dot{V}_1| (\cos \theta_{V_1} + j \sin \theta_{V_1}) \times |\dot{V}_2| (\cos \theta_{V_2} + j \sin \theta_{V_2}) \\&= |\dot{V}_1| |\dot{V}_2| (\cos \theta_{V_1} + j \sin \theta_{V_1})(\cos \theta_{V_2} + j \sin \theta_{V_2}) \\&= |\dot{V}_1| |\dot{V}_2| \left(\cos \theta_{V_1} \cos \theta_{V_2} - \sin \theta_{V_1} \sin \theta_{V_2} + j(\cos \theta_{V_1} \sin \theta_{V_2} + \sin \theta_{V_1} \cos \theta_{V_2}) \right) \\&= |\dot{V}_1| |\dot{V}_2| (\cos(\theta_{V_1} + \theta_{V_2}) + j \sin(\theta_{V_1} + \theta_{V_2}))\end{aligned}$$

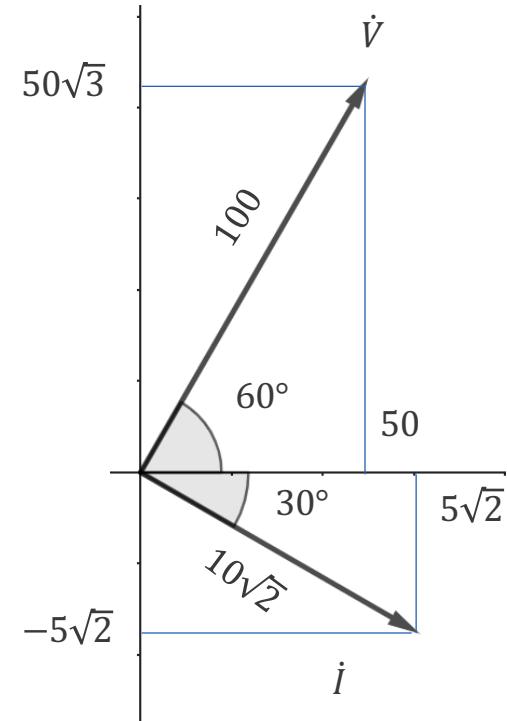
$$\begin{aligned}\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} &= \frac{|\dot{V}_1|}{|\dot{V}_2|} \frac{\cos \theta_{V_1} + j \sin \theta_{V_1}}{\cos \theta_{V_2} + j \sin \theta_{V_2}} = \frac{|\dot{V}_1|}{|\dot{V}_2|} \frac{(\cos \theta_{V_1} + j \sin \theta_{V_1})(\cos \theta_{V_2} - j \sin \theta_{V_2})}{\cos^2 \theta_{V_2} + \sin^2 \theta_{V_2}} \\&= \frac{|\dot{V}_1|}{|\dot{V}_2|} \left(\cos \theta_{V_1} \cos \theta_{V_2} + \sin \theta_{V_1} \sin \theta_{V_2} + j(\cos \theta_{V_1} \sin \theta_{V_2} - \sin \theta_{V_1} \cos \theta_{V_2}) \right) \\&= |\dot{V}_1| |\dot{V}_2| (\cos(\theta_{V_1} - \theta_{V_2}) + j \sin(\theta_{V_1} - \theta_{V_2}))\end{aligned}$$

■ 例

- 次の式の複素数表示を求めよ。さらにフェーザ図をかけ。
- $v = 100\sqrt{2} \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$
- $i = 20 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$

■ 例

- 次の式の複素数表示を求めよ。さらにフェーザ図をかけ。
- $v = 100\sqrt{2} \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$
- $i = 20 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$
- それぞれの複素数表示は次のようになる。
- $\dot{V} = 50 + 50\sqrt{3}j$
- $\dot{i} = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}j$



■ 問題

・次の複素数で表された電圧の実効値と位相を求めよ。

1. $\dot{V} = 1 + \sqrt{3}j$

2. $\dot{V} = -1 + j$

・次の複素数で表された電圧の実効値を求めよ。

1. $\dot{V} = 3 + 4j$

2. $\dot{V} = 10 - 5j$

■ 問題

・次の複素数で表された電圧の実効値と位相を求めよ。

1. $\dot{V} = 1 + \sqrt{3}j$ 実効値は2, 位相は $\pi / 3$

2. $\dot{V} = -1 + j$ 実効値は $\sqrt{2}$, 位相は $3\pi / 4$

・次の複素数で表された電圧の実効値を求めよ。

1. $\dot{V} = 3 + 4j$ 実効値は5

2. $\dot{V} = 10 - 5j$ 実効値は $\sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

■ 問題

• $\frac{-\sqrt{3}+j}{1+j\sqrt{3}}$ の偏角はどれか. ただし, jは虚数単位である. (臨床工学
技士国家試験29回)

1. $-\frac{\pi}{2}$

2. $-\frac{\pi}{6}$

3. 0

4. $\frac{\pi}{6}$

5. $\frac{\pi}{2}$

問題

- $\frac{-\sqrt{3}+j}{1+j\sqrt{3}}$ の偏角はどれか. ただし, j は虚数単位である. (臨床工学
技士国家試験29回)

1. $-\frac{\pi}{2}$

2. $-\frac{\pi}{6}$

$$\frac{-\sqrt{3}+j}{1+j\sqrt{3}} = \frac{(-\sqrt{3}+j)(1-j\sqrt{3})}{1+3} = \frac{1}{4}(-\sqrt{3} + \sqrt{3} + (1+3)j) = j$$

よって $\frac{\pi}{2}$

3. 0

4. $\frac{\pi}{6}$

別解
 $-\sqrt{3}+j$ の偏角は $5\pi/6$
 $1+j\sqrt{3}$ の偏角は $\pi/3$

5. $\frac{\pi}{2}$

よって

$$\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\pi$$

■ 問題

- 絶対値が最も小さいのはどれか。ただし、jは虚数単位である。（
臨床工学技士国家試験30回）

1. $\frac{1}{j}$

2. $\frac{1}{1+j}$

3. $\frac{1}{2-j}$

4. $\frac{1-j}{2+j}$

5. $\frac{1-j}{1+j}$

■ 問題

- 絶対値が最も小さいのはどれか。ただし、jは虚数単位である。(臨床工学技士国家試験30回)

1. $\frac{1}{j}$

$$\left| \frac{1}{j} \right| = \frac{1}{1} = 1$$

2. $\frac{1}{1+j}$

$$\left| \frac{1}{1+j} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. $\frac{1}{2-j}$

$$\left| \frac{1}{2-j} \right| = \frac{1}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

4. $\frac{1-j}{2+j}$

$$\left| \frac{1-j}{2+j} \right| = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

5. $\frac{1-j}{1+j}$

$$\left| \frac{1-j}{1+j} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

よって3の $\left| \frac{1}{2-j} \right|$ が最も小さい。

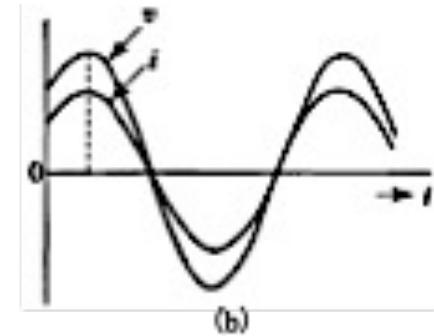
交流と抵抗

■ 交流と抵抗

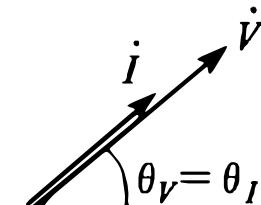
- オームの法則は
- $v = Ri$
- 電流を $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$ とすると、電圧は次のようになる。
- $v = RI_m \sin(\omega t + \theta_I) = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- したがって,
- $V_m = RI_m$
- $\theta_V = \theta_I$
- である。よって複素数表示は
- $\dot{V} = R\dot{I}$
- 抵抗では電流と電圧は同位相である。



(a)



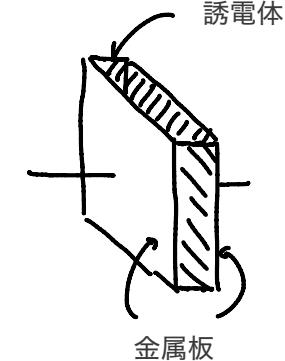
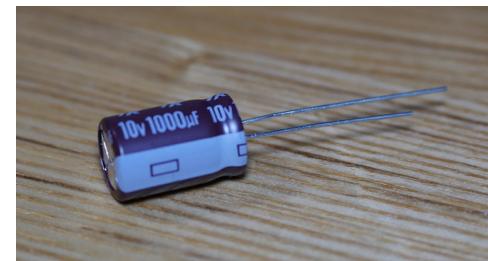
(b)



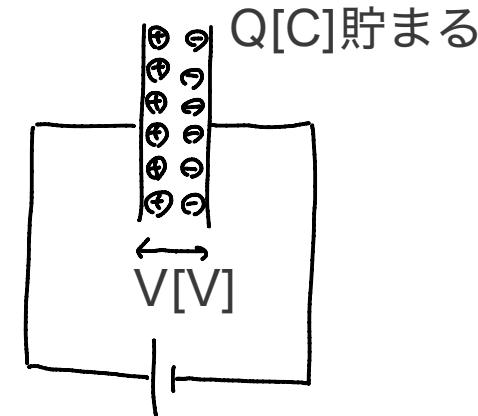
コンデンサ

■ コンデンサ（キャパシタ）

- ・電荷を貯める機能を持つ。
- ・電荷の量 Q の単位は[C]（クーロン）
- ・コンデンサに電圧 V を加えたときに、コンデンサに貯まる電荷 Q [C]は、次の式で求まる。
$$Q = CV$$
- ・ C はコンデンサの静電容量と呼ばれる量で、単位は[F]（ファラッド）である。



平行板コンデンサ



詳しい話は電磁気の講義のときに

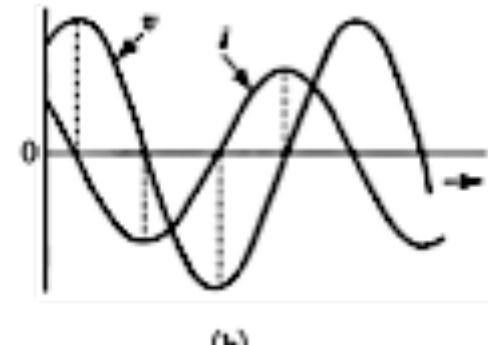
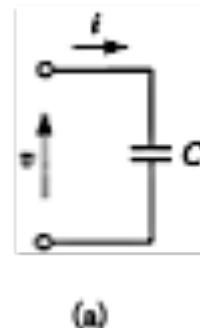
■ 電荷, 静電容量, 電圧, 電流の関係

- ・コンデンサにたまつた電荷 Q [C], コンデンサの静電容量 C [F], コンデンサにかかる電圧 V [V]は次の関係がある.
- ・ $Q = CV$
- ・電流の定義式から, コンデンサを流れる電流は次のようになる.

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} \\ &= \frac{dCV}{dt} \\ &= C \frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

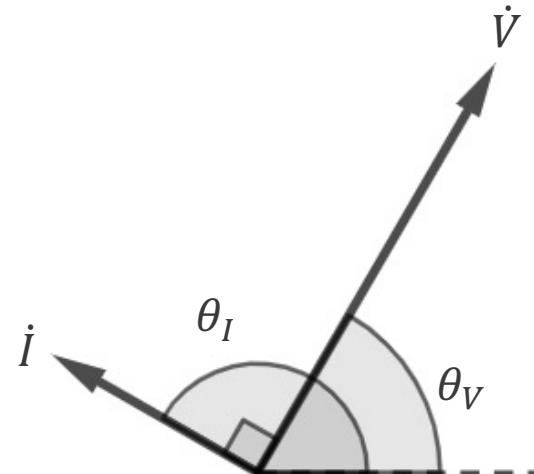
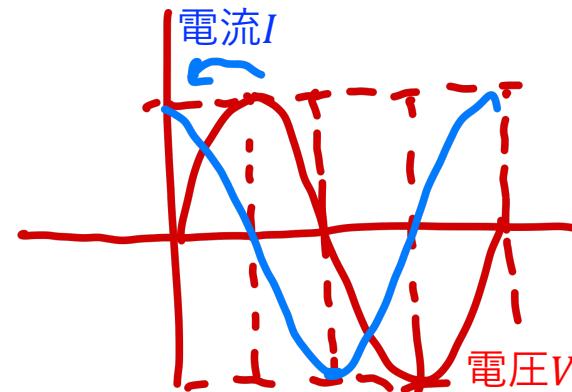
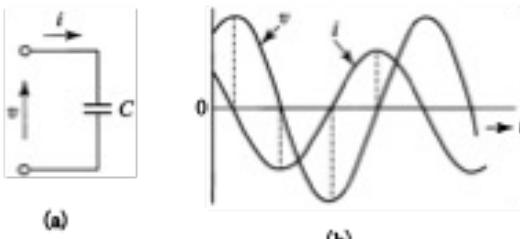
■ コンデンサの電圧と電流

- コンデンサに加える電圧 v を次のとおりとする.
- $v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- コンデンサに流れる電流 i は電流の定義から
- $i = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCv}{dt} = C \frac{d}{dt} V_m \sin(\omega t + \theta_V) = \omega C V_m \cos(\omega t + \theta_V)$
- $= \omega C V_m \sin(\omega t + \theta_V + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$



■ コンデンサの電圧と電流

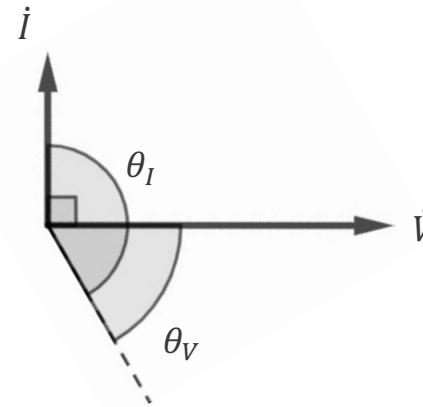
- よって、次のことが成り立つ。
- $I_m = \omega C V_m$
- $\theta_I = \theta_V + \frac{\pi}{2}$
- つまり、電流は電圧よりも位相が 90° 進んでいる。



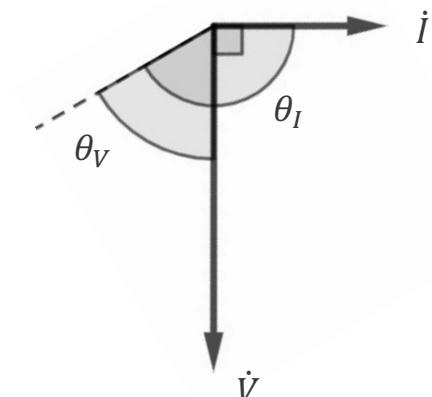
■ コンデンサの電圧と電流の複素数表示

- 電流と電圧の実効値を i , \dot{V} とする。電流は電圧より位相が $\pi/2$ 進んでいるので、電流と電圧の関係を複素数表示で表すと
- $i = j\omega C \dot{V}$

$$\bullet \dot{V} = \frac{1}{j\omega C} i$$



電流は電圧に対し90度進んでいる。



電圧は電流に対し90度遅れている。

■ 複素数表示の意味

- $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}$ は何を意味するか？
- \dot{I} 偏角を θ_I , $j\omega C$ 偏角を θ_C とする. $j\omega C$ は複素数成分だけなので偏角は $\theta_C = \pi/2$ である.
- $\frac{\dot{I}}{j\omega C}$ は複素数の割り算なので, 偏角は $\theta_I - \theta_C = \theta_I - \pi/2$ である.
- つまり, コンデンサにより電圧の位相を90度遅れたことを示している.

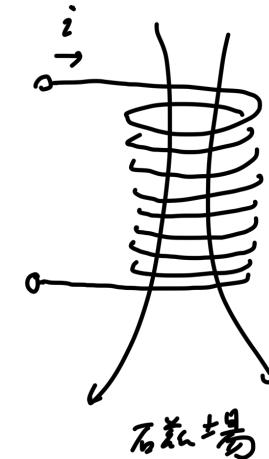
インダクタ (コイル)

■ インダクタ（コイル）



図記号

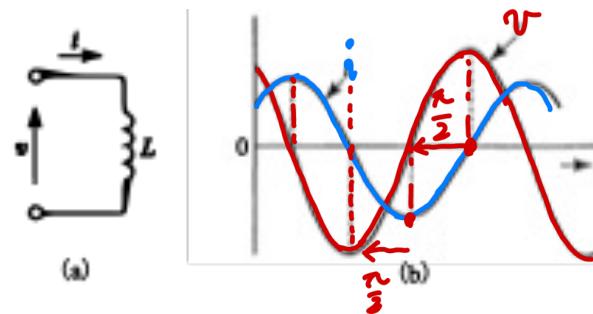
- ・導線を巻いたもの。
- ・電流が変化すると電圧を発生させる。
 - ・誘導起電力 v は次の式で書かれる。
$$v = L \frac{\Delta i}{\Delta t}$$
 - ・ L を自己インダクタンスもしくはインダクタンスという。
 - ・単位はH（ヘンリー）
- ・誘導起電力は電流により発生する磁場を打ち消す方向に発生する。
 - ・電流変化に対しブレーキとして働くので、変化に対しインピーダンスが高くなる。



詳しい話は電磁気の講義のときに

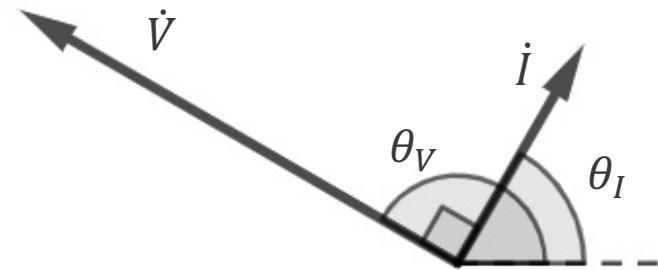
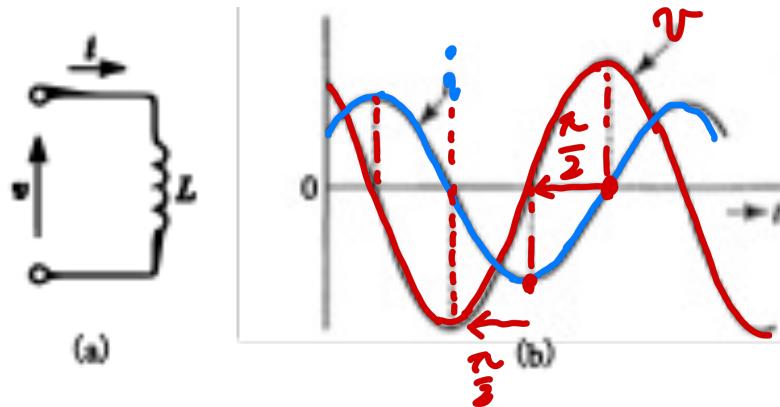
■ インダクタの電圧と電流

- ・インダクタに加える電流*i*を次のとおりとする.
- ・ $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$
- ・インダクタに流れる電圧*v*は誘導起電力の式から
- ・ $v = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} I_m \sin(\omega t + \theta_I) = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta_I)$
- ・ $= \omega L I_m \sin(\omega t + \theta_I + \frac{\pi}{2}) = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$



■ インダクタの電圧と電流

- よって、次のことが成り立つ.
- $V_m = \omega L I_m$
- $\theta_V = \theta_I + \frac{\pi}{2}$
- つまり、電圧は電流よりも位相が 90° 進んでいる.



■ インダクタの電圧と電流の複素数表示

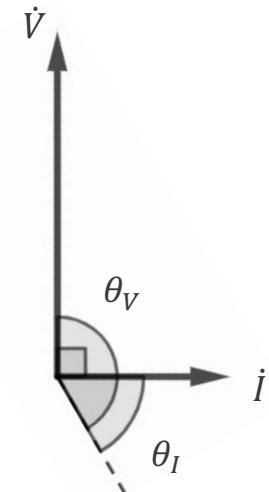
- ・電流と電圧の実効値を i , \dot{V} とする。電圧は電流より位相が $\pi/2$ 進んでいるので、電流と電圧の関係を複素数表示で表すと
- ・ $\dot{V} = j\omega L i$

i 偏角を θ_I , $j\omega L$ 偏角を θ_L とする。

$j\omega L$ は複素数成分だけなので偏角は $\theta_L = \pi/2$ である。

$j\omega L i$ は掛け算なので、偏角は $\theta_I + \theta_L = \theta_I + \pi/2$ である。

つまり、インダクタにより電圧の位相が90度進んだことを示している。



■ インピーダンス, レジスタンス, リアクタンス

- どのような回路であれ、電圧と電流の関係を次のように表すとする。
- $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$
- ここで \dot{Z} をインピーダンスという。
- 抵抗の場合
- $\dot{V} = R\dot{I}$
- と書け、Rをレジスタンスという。
- また、コンデンサの場合、
- $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}$
- と書け、 $\frac{1}{\omega C}$ を容量性リアクタンスという
- インダクタの場合
- $\dot{V} = j\omega L\dot{I}$
- と書け、 ωL を誘導性リアクタンスという。
- それぞれの単位は Ω である。

$$\begin{aligned}\dot{V} &= R\dot{I} \\ \dot{V} &= \frac{1}{j\omega C} \dot{I} \\ \dot{V} &= j\omega L\dot{I}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$$

インピーダンスを導入することで、交流でも素子関係なくオームの法則のようなものが使える。

■ 問題解説

- 最大値10Vの正弦波交流電圧を誘導リアクタンス 2.0Ω のインダクタに加えた。交流電圧の瞬時値が-10Vのときにインダクタを流れる交流の瞬時値[mA]として正しいのはどれか。(第41回ME2種)
 1. -5.0
 2. -3.5
 3. 0.0
 4. 3.5
 5. 5.0

問題解説

- 最大値10Vの正弦波交流電圧を誘導リアクタンス2.0Ωのインダクタに加えた。交流電圧の瞬時値が-10Vのときにインダクタを流れる交流の瞬時値[mA]として正しいのはどれか。(第41回ME2種)

1. -5.0

電圧の位相は0だとすると電圧は次の式でかける。

$$V = 10 \sin(\omega t)$$

2. -3.5

$V = -10$ だから

$$\sin(\omega t) = -1$$

3. 0.0

$$\omega t = -\frac{\pi}{2}$$

4. 3.5

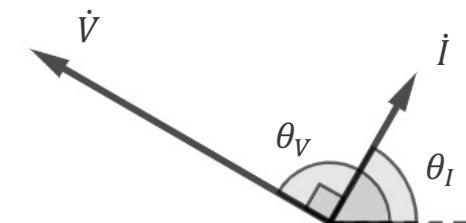
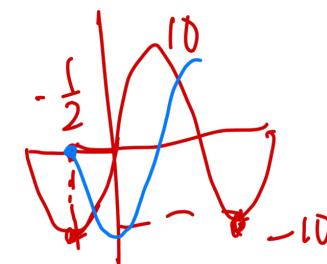
電圧の位相は0だとすると 電流は次の式でかける。

$$I = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

5. 5.0

$\omega t = -\frac{\pi}{2}$ だから

$$I=0$$



問題解説

- 最大値10Vの正弦波交流電圧を誘導リアクタンス2.0Ωのインダクタに加えた。交流電圧の瞬時値が-10Vのときにインダクタを流れる交流の瞬時値[mA]として正しいのはどれか。(第41回ME2種)

1. -5.0

別解

2. -3.5

3. 0.0

4. 3.5

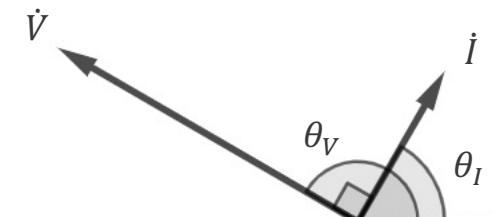
5. 5.0

$$\dot{V} = Z \dot{I}$$
$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{Z} = \frac{\dot{V}}{j\omega L} = -j \frac{V}{\omega L}$$

よって電流は電圧に対し $-\frac{\pi}{2}$ ほど位相がずれている。

電圧が-10Vのとき、電圧の位相は $\frac{3}{4}\pi$ だから ($-10 = 10 \sin \frac{3}{4}\pi$)

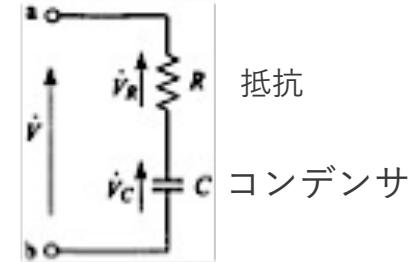
電流の位相は π なので、電流 $10 \sin \pi = 0$ である。



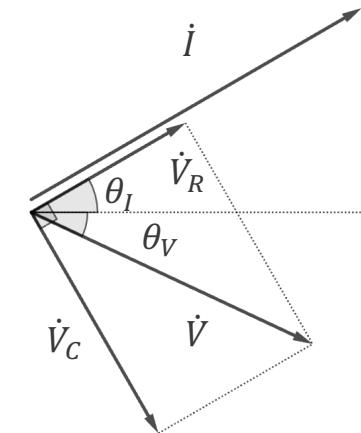
RC直列回路

■ RC直列回路

- 図のように抵抗とコンデンサを直列につなぐ。
- 直列なので、各素子を流れる電流は等しく、各素子に加わる電圧の総和がab間の電圧となる。

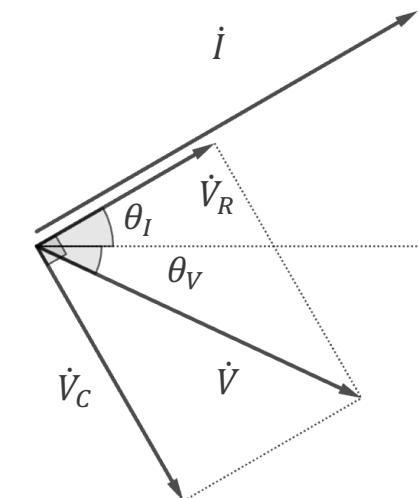
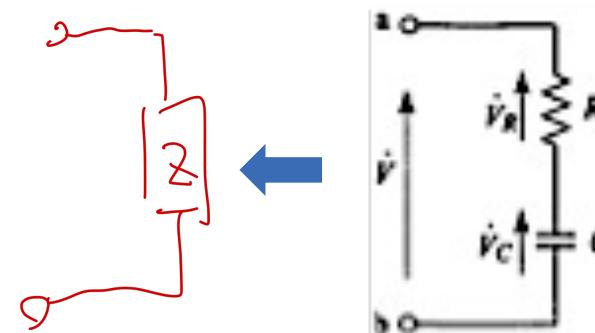


- 各素子に加わる電圧は、
- $\dot{V}_R = R\dot{I}, \dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$
- である。このことから、抵抗の電圧は電流と同位相であるが、コンデンサの電圧は電流及び抵抗の電圧から $\pi/2$ 遅れている。



■ RC直列回路

- ab間の電圧は、それぞれの端子にかかる電圧の和なので
- $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C = R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}$ \dot{V} はベクトルの和になっている.
- ここで、電圧と電流を $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$ と表すとき、 \dot{Z} をインピーダンスという.
- RC直列回路の合成インピーダンスは
- $\dot{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$
- である.



■ 回路の性質と周波数

- ・コンデンサのインピーダンスは $1/(j\omega C)$ である.
- ・電源の周波数が低ければ低いほどインピーダンスが高い.
 - ・定常状態では、コンデンサは直流を流さない（つまり開放と見なせる）
 - . なぜならば、このときコンデンサのインピーダンスが無限大となるため.
 - ・CR直列回路は、定常状態のとき直流電流を流さない.
- ・電源の周波数が高ければ高いほどインピーダンスは低い.
 - ・コンデンサは、電源の周波数が高いほど電流を通しやすい.

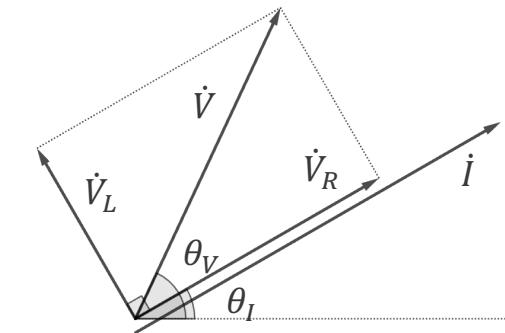
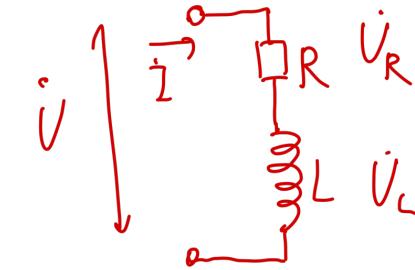
直流 $\omega \rightarrow 0$

$$\left| \frac{1}{j\omega C} \right| \rightarrow \infty$$

RL直列回路

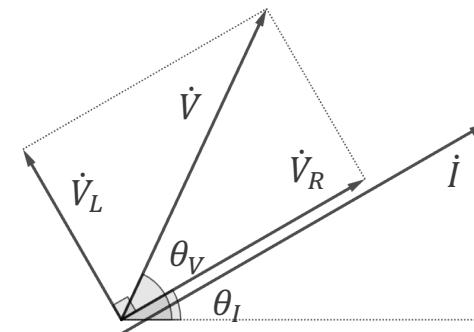
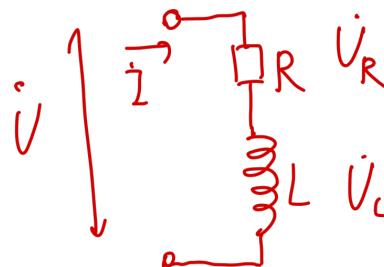
■ RL直列回路

- 図のように抵抗とインダクタを直列につなぐ
- .
- 直列なので、各素子を流れる電流は等しく、各素子に加わる電圧の総和がab間の電圧となる。
- 各素子に加わる電圧は、
- $\dot{V}_R = R\dot{I}, \dot{V}_L = j\omega L\dot{I}$
- である。このことから、抵抗の電圧は電流と同位相であるが、インダクタの電圧は電流及び抵抗の電圧から $\pi/2$ 進んでいる。



■ RL直列回路

- ab間の電圧は各素子にかかる電圧の和なので
- $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = (R + j\omega L)\dot{I}$
- RL直列回路の合成インピーダンスは
- $\dot{Z} = R + j\omega L$
- である。



■ インダクタ（コイル）

- ・インダクタのインピーダンスは $j\omega L$ である。
- ・電源の周波数が低ければ低いほど小さい。
 - ・直流回路で、かつ定常状態のとき、インダクタは単なる導線と見なせる（短絡していると見なせる）。
 - ・このとき、インダクタのインピーダンスが0となるため。
- ・電源の周波数が高ければ高いほどインピーダンスは高い。
 - ・周波数が高い電流ほど通しにくい。

$$\begin{aligned} \text{直流 } \omega &\rightarrow 0 \\ |j\omega L| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

直流回路（定常状態）における コンデンサとインダクタ

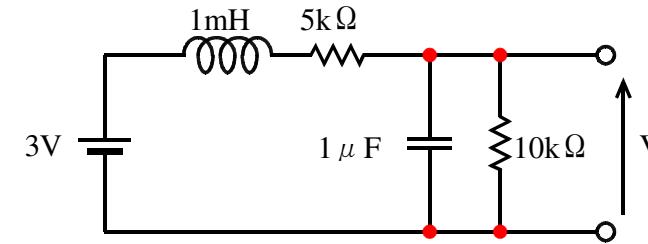
■ 直流回路（定常状態）におけるコンデンサとインダクタ

- ・コンデンサは開放（切斷，電流を流さない状態）
 - ・コンデンサは限界まで電荷を貯めると電流が流れなくなる。
 - ・コンデンサに電荷が限界まで溜まった状態（定常状態）では、コンデンサは開放（切斷，電流を流さない状態）となる。
- ・インダクタ（コイル）は短絡
 - ・コイルは電位変化が生じなければ（定常状態では），誘導起電力も発生しないため，短絡（抵抗0の状態，単なる導線）となる。

問題解説

【AM22】図の電圧 V の値[V]はどれか。

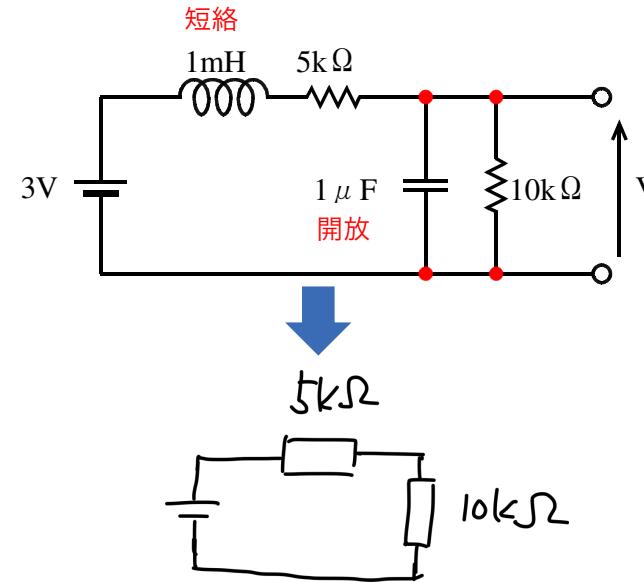
- (1) 0
- (2) 1
- (3) 1.5
- (4) 2
- (5) 3



問題解説

【AM22】図の電圧 V の値[V]はどれか。

- (1) 0
- (2) 1
- (3) 1.5
- (4) 2**
- (5) 3



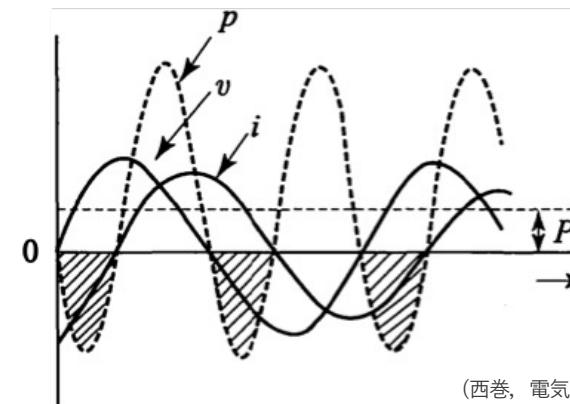
直流の場合、定常状態ではインダクタは抵抗0となり短絡、コンデンサは抵抗無限大となり開放と見なせる。つまり、2つの抵抗の直列回路となり、Vは10kΩの抵抗に加わる電圧である。よって、次の式が成り立つ。

$$V = 3 * 10 / (10+5) = 2$$

交流と電力

■ 瞬時電力

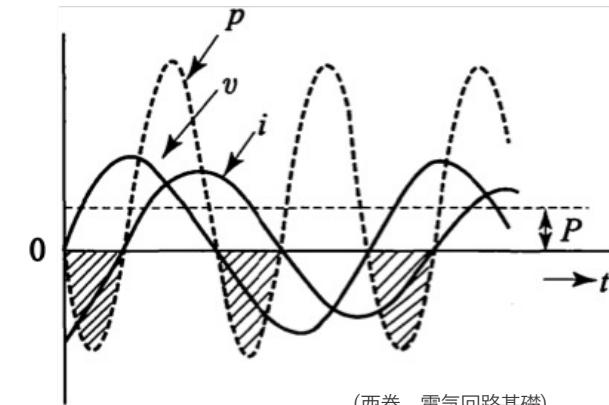
- ・交流の電力は直流と同様に電圧と電流の積で求められる。
- ・交流では電圧と電流が時間的に変化するので、電圧と電流の積で求められる電力を特に**瞬時電力**という。
- ・瞬時電力を p とすると
- ・ $p = vi$
- ・で表される。 $v[V]$ は電圧の瞬時値、 $i[A]$ は電流の瞬時値である。



(西巻、電気回路基礎)

■ 有効電力

- $v = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$, $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \phi)$ とすると瞬時電力は
- $p = vi = 2VI \sin(\omega t) \sin(\omega t + \theta) = VI(\cos(\phi) - \cos(2\omega t - \phi))$
- ここで V と I はそれぞれ電圧と電流の実効値である.
- 瞬時電力 p の平均はどうなるか?
- $\cos(2\omega t - \phi)$ の平均は 0 であるから,
- $P = VI \cos(\phi)$
- これを**有効電力**または単に**電力**という.
- 単位は W(ワット)である.
- 電圧と電流に位相差がなければ $\phi = 0$ なので,
- $P = VI$



(西巻, 電気回路基礎)

平均は1周期の間、時間で積分して周期で割ったもの。 $\cos(2\omega t - \phi)$ の平均は 0。 $VI \cos(\phi)$ だけ残る。

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) =$$

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b - \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

■ 皮相電力と力率

- ・単に電圧と電流の実効値を掛けたものを皮相電力という。
 - ・ $P_a = IV$
 - ・単位は[VA]（ボルトアンペア）である。
-
- ・消費電力 P と皮相電力 P_a の比を力率という。
 - ・力率は次のように表される。
 - ・ $\frac{P}{P_a} = \cos \phi$

■ 抑えるポイント

- 交流の電力
 - 瞬時電力
 - 電圧の瞬時値 $v[V]$ と電流の瞬時値 $i[A]$ をかけたもの.
 - $p = vi$
 - 有効電力
 - 電圧 V と電流 I の実効値と ϕ を電圧と電流の位相差の \cos をかけたもの.
 - $P = VI \cos(\phi)$
 - 皮相電力
 - 電圧と電流の実効値を掛けたもの.
 - $P_a = IV$
 - 力率
 - 消費電力 P と皮相電力 P_a の比.
 - $\frac{P}{P_a} = \cos \phi$
 - 無効電力
 - 皮相電力 P_a と無効率の積.
 - $P_r = VI \sin \phi = P_a \sin \phi$

■ 無効電力

- $\sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \sin \phi$ を無効率という.
- 皮相電力 P_a と無効率の積を無効電力 P_r という.
- 無効電力は次のように表される.
- $P_r = VI \sin \phi = P_a \sin \phi$
- 単位は [var] (バール) である.
- それぞれの電力には次の関係が成り立つ.
$$\frac{P}{P_a} = \cos \phi, \quad P_r = P_a \sin \phi$$

より

$$\frac{P^2}{P_a^2} + \sin^2 \phi = 1$$
$$P^2 + P_a^2 \sin^2 \phi = P_a^2$$
$$P^2 + P_r^2 = P_a^2$$
$$P_a = \sqrt{P^2 + P_r^2}$$
- $P_a = \sqrt{P^2 + P_r^2}$

■ 問題

- 図の回路でab間の正弦波交流電力（有効電力）を求める式として正しいのはどれか。（臨床工学技士国家試験35）
 1. (電圧の振幅値)×(電流の振幅値)
 2. (電圧の実効値)×(電流の実効値)
 3. (電圧の振幅値)×(電流の振幅値)×(力率)
 4. (電圧の実効値)×(電流の実効値)×(力率)
 5. (電圧の実効値)×(電流の実効値)×(無効率)

■ 問題

・図の回路でab間の正弦波交流電力（有効電力）を求める式として正しいのはどれか。（臨床工学技士国家試験35）

1. (電圧の振幅値)×(電流の振幅値)
2. (電圧の実効値)×(電流の実効値)
3. (電圧の振幅値)×(電流の振幅値)×(力率)
4. (電圧の実効値)×(電流の実効値)×(力率)
5. (電圧の実効値)×(電流の実効値)×(無効率)

有効電力は

$$P = VI \cos(\phi)$$

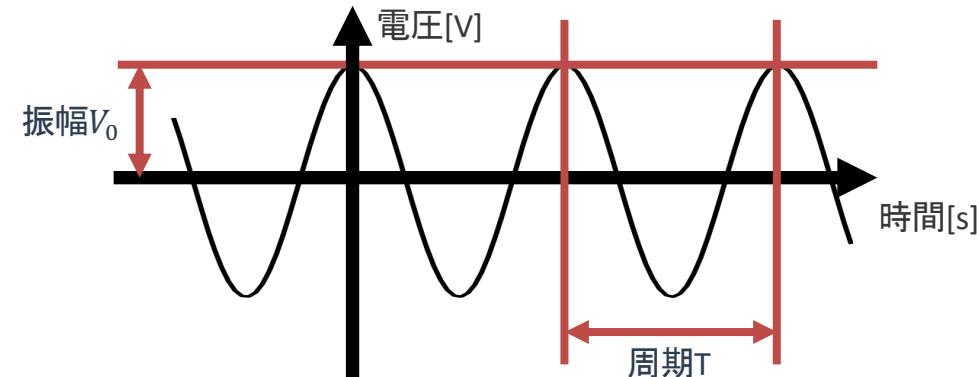
である。Vは電圧の実効値、Iは電流の実効値である。

$\cos(\phi)$ は力率と呼ばれる。

よって答えは4である。

■ 交流回路のポイント

- 正弦波 $V(t) = V_0 \sin(2\pi ft + \theta)$
 - 電圧の瞬時値 $V(t)$, 振幅 V_0 , 周波数 f , 位相 θ , 角周波数 $\omega = 2\pi f$, 周期 $T = 1/f$
- 正弦波 $V_1 = V_0 \sin(2\pi ft + \theta_1)$ と 正弦波 $V_2 = V_0 \sin(2\pi ft + \theta_2)$ の位相差
 - $\theta_1 - \theta_2$
 - これが正なら V_1 が V_2 より $\theta_1 - \theta_2$ 位相が進んでいる。
 - これが負なら V_1 が V_2 より $|\theta_1 - \theta_2|$ 位相が遅れている。
- 実効値
 - 正弦波交流 $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$
 - 全波整流 $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$
 - 半波整流 $\frac{V_0}{2}$



■ 交流回路のポイント

- 複素数表示

- 電流と電圧をベクトルで表す.

- ベクトルは複素平面上に（フェーザ図で）書かれる.

- $\dot{V} = a + bj$

- ベクトルの大きさは実効値、ベクトルの角度が位相に対応する.

- 実効値は $\sqrt{a^2 + b^2}$, 位相は $\tan^{-1} \frac{b}{a}$

- $\dot{V} = \dot{Z} \dot{I}$ が成り立つ. つまり交流でもオームの法則が成り立つ.

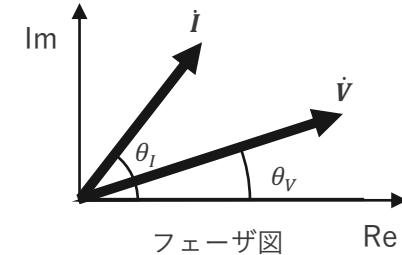
- \dot{Z} はインピーダンスと呼ばれる. 直流の抵抗と対応する.

- \dot{V} と \dot{I} の絶対値は、それぞれの実効値である.

- 抵抗のインピーダンス R , コンデンサのインピーダンス $\frac{1}{j\omega C}$, コイルのインピーダンス $j\omega L$

- 複素数表示を使えば交流でも直流と同じように計算できる.

- 合成インピーダンスは直流のときの合成抵抗と同じように計算できる.

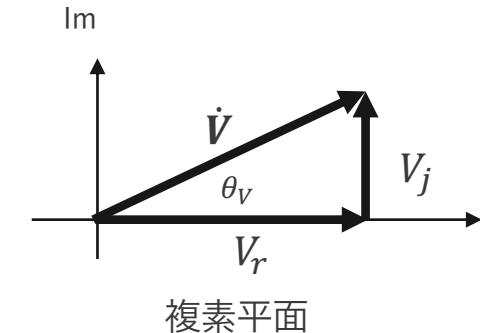


■ 交流回路のポイント

- 電圧が $\dot{V} = V_r + jV_j$ のとき

- 実効値は $|\dot{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_j^2}$

- 位相は $\theta_V = \tan^{-1} \frac{V_j}{V_r}$



- 複素数の掛け算

- $\dot{V}_1 \times \dot{V}_2$ の実効値は $|\dot{V}_1| |\dot{V}_2|$, 位相は $\theta_{V_1} + \theta_{V_2}$

- 複素数の割り算

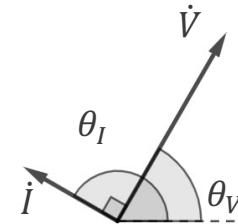
- $\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}$ の実効値は $\frac{|\dot{V}_1|}{|\dot{V}_2|}$, 位相は $\theta_{V_1} - \theta_{V_2}$

■ 交流回路のポイント

- コンデンサ

- 電圧は電流よりも位相が 90° 遅れている。
- 電圧と電流の関係（複素数表示）

- $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C} I$

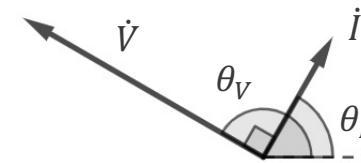


コンデンサの電圧と電流のフェーザ図

- コイル

- 電圧は電流よりも位相が 90° 進んでいる。
- 電圧と電流の関係（複素数表示）

- $\dot{V} = j\omega L I$



コイルの電圧と電流のフェーザ図

- 直流のとき、十分時間がたつとコンデンサは開放、コイルは短絡

■ 交流回路のポイント

- 交流の電力
 - 瞬時電力
 - 電圧の瞬時値 $v[V]$ と電流の瞬時値 $i[A]$ をかけたもの.
 - $p = vi$
 - 有効電力
 - 電圧 V と電流 I の実効値と ϕ を電圧と電流の位相差の \cos をかけたもの.
 - $P = VI \cos(\phi)$
 - 皮相電力
 - 電圧と電流の実効値を掛けたもの.
 - $P_a = IV$
 - 力率
 - 消費電力 P と皮相電力 P_a の比.
 - $\frac{P}{P_a} = \cos \phi$