電気工学2第9回

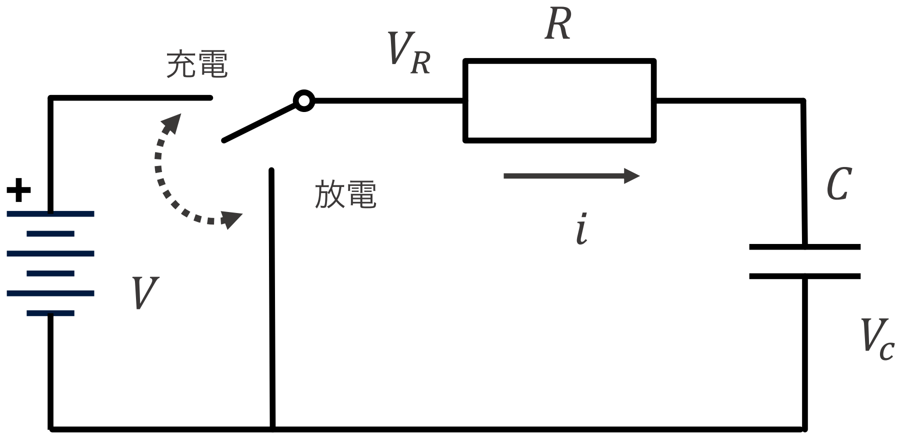
藤田一寿

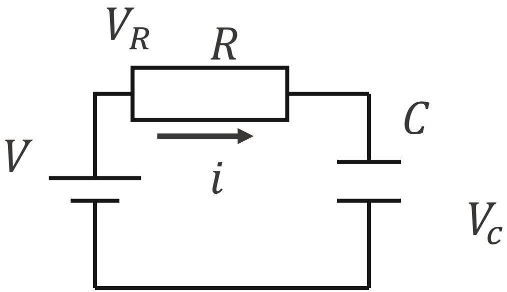
過渡現象

コンデンサの充電

■ 過渡現象（充電）

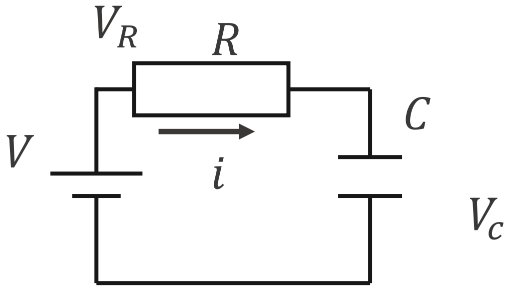
- 図のような直流回路を考える．
- コンデンサに電荷が溜まっていないとする．
- スイッチを充電側に移動させると，コンデンサに電流が流れ，電荷が溜まっていく．これは，コンデンサの両端電位差が電源電圧Vになるまで続く．
- コンデンサに電荷を貯めることを充電という．





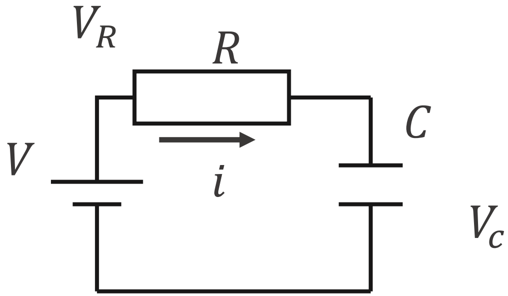
過渡現象（充電）

- 抵抗とコンデンサに加わる電圧をそれぞれV_R，V_cとすると，
- $V = V_R + V_c$
- $V_R = iR$，$Q = CV_c$，$I = \frac{dQ}{dt}$より，
- $V = iR + \frac{Q}{C} = \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C}$
- これをQについて解けば，コンデンサに蓄積される電荷の時間変化が分かる．



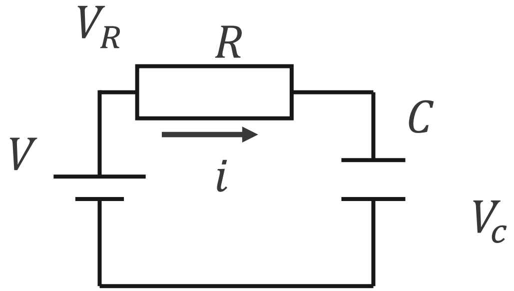
過渡現象（充電）

- $V = \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C}$を両辺$R$でわり，0 equalの形にすると
- $\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{CR} - \frac{V}{R} = 0$となる．
- $Z = \frac{Q}{CR} - \frac{V}{R}$とおくと
- $\frac{dZ}{dt} = \frac{1}{CR}\frac{dQ}{dt}$
- $\frac{dQ}{dt} = CR\frac{dZ}{dt}$
- これを代入すると
- $CR\frac{dZ}{dt} + Z = 0$



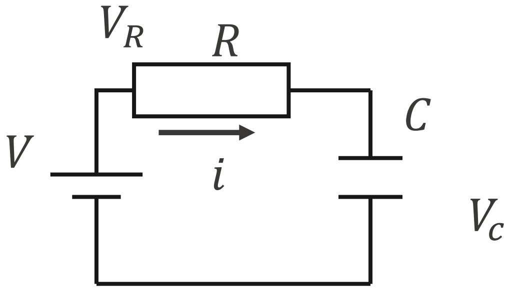
過渡現象（充電）

- $CR\frac{dZ}{dt}+Z=0$は変数分離形なので
- $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dt}=-\frac{1}{CR}$
- $\frac{1}{Z}dZ=-\frac{1}{CR}dt$
- $\log Z=-\frac{1}{CR}t$
- $Z=Ae^{-\frac{1}{CR}t}$
- よって,
- $Ae^{-\frac{1}{CR}t}=\frac{Q}{CR}-\frac{V}{R}$
- $Q=Ae^{-\frac{1}{CR}t}+CV$
- $t=0$のとき$Q=0$ なので
- $Ae^{-\frac{1}{CR}\times 0}+CV=0$
- $A=-CV$
- $Q=-CVe^{-\frac{1}{CR}t}+CV=CV\left(1-e^{-\frac{1}{CR}t}\right)$



過渡現象 （充電）

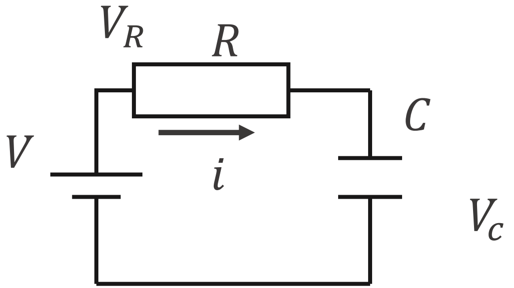
- $Q = CV(1 - e^{-\frac{1}{CR}t})$かつ$Q = CV_C$なので$V_C$は
- $V_c = V\,(1 - e^{-\frac{1}{CR}t})$
- 電流iは
- $i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}CV\left(1 - e^{-\frac{1}{CR}t}\right) = \frac{CV}{CR}e^{-\frac{1}{CR}t} = \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$
- $\tau = CR$としたとき，τを時定数と呼ぶ.



資格試験内で計算は不可能だから，時定数はCRと覚える.

過渡現象　（充電）

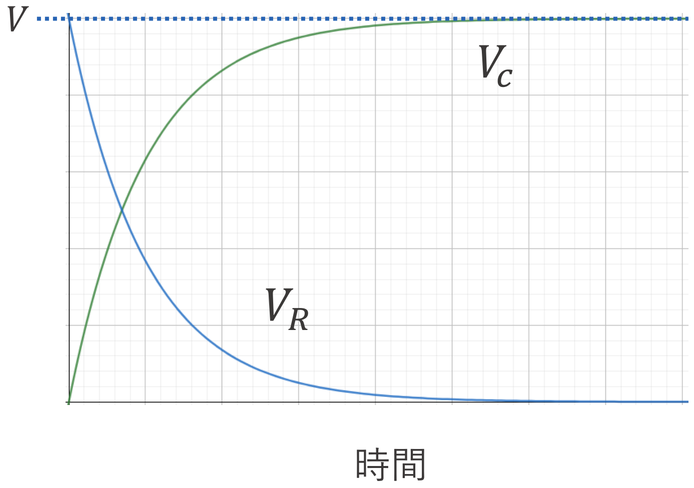
- 電流$i=\frac{V}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$なので抵抗にかかる電圧は
- $V_R=Ve^{-\frac{1}{CR}t}$
- コンデンサにかかる電圧は
- $V_C=V-Ve^{-\frac{1}{CR}t}=V\left(1-e^{-\frac{1}{CR}t}\right)$

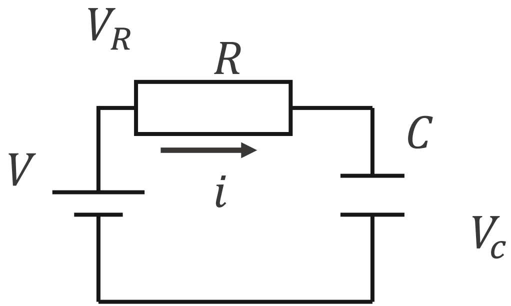


資格試験内で計算は不可能だから，時定数はCRと覚える．

過渡現象（充電）

- 抵抗とコンデンサに加わる電圧は図のように変化する．
- コンデンサに電荷が蓄積されるに伴いコンデンサの電圧V_Cも増加する．
- 一方抵抗の電圧V_Rは減衰する．

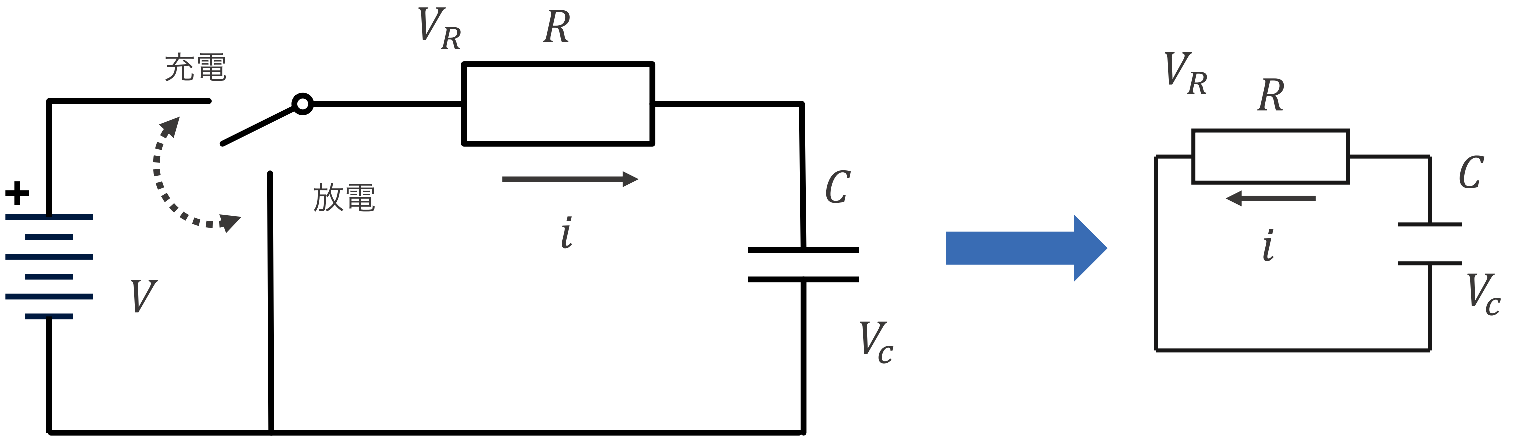




コンデンサの放電

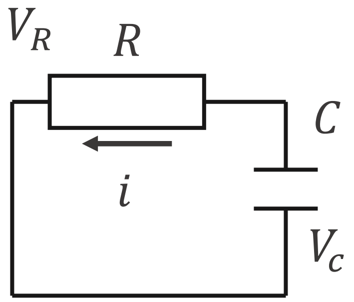
過渡現象（放電）

- スイッチを充電側にし，十分に時間がたつとコンデンサに$Q = CV$ほど電荷が蓄積される．
- そこで，スイッチを放電の方に入れると，コンデンサにたまった電荷が消費され，減少していく．
  - コンデンサが電源の代わりになる．



過渡現象（放電）

- 抵抗とコンデンサに加わる電圧をそれぞれV_R，V_cとすると，電源がないので
- $V_R + V_c = 0$
- $V_R = iR$および$Q = CV_c$より，
- $iR + \frac{Q}{C} = \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C} = 0$
- $\frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C} = 0$
- $Q = Ae^{-\frac{1}{CR}t}$
- 初期条件は$Q_0 = Q = CV$なので
- $Q = CVe^{-\frac{1}{CR}t}$



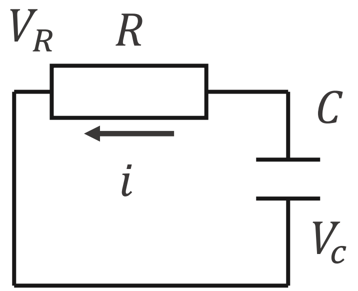
変数分離形の微分方程式
充電のときやったので計算は省略

過渡現象　（放電）

- $Q = CVe^{-\frac{1}{CR}t}$から，Vcは
- $V_c = V\,e^{-\frac{1}{CR}t}$
- 抵抗にかかる電圧は
- $V_R = -V_c = -V\,e^{-\frac{1}{CR}t}$
- 電流iは
- $i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}CVe^{-\frac{1}{CR}t} = -\frac{CV}{CR}e^{-\frac{1}{CR}t} = -\frac{V}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$
- $\tau = CR$としたとき，τを時定数と呼ぶ.

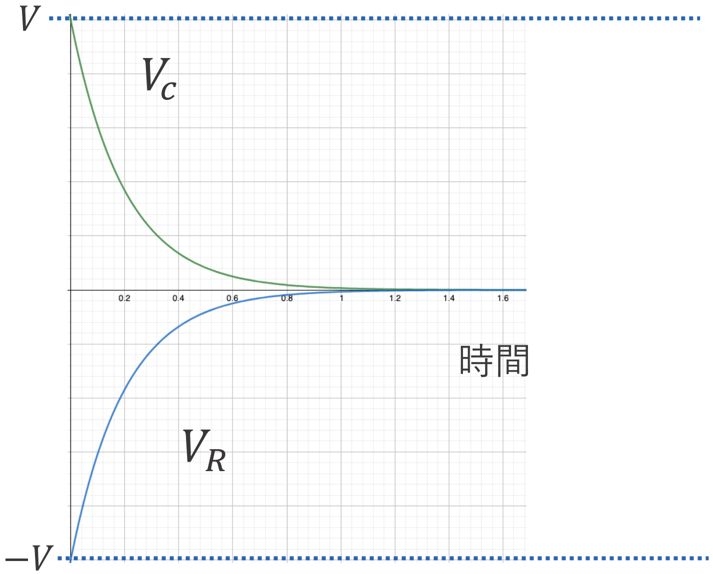
資格試験内で計算は不可能だから，時定数はCRと覚える.

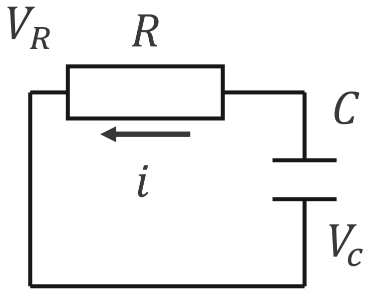
電圧の時間変化もよく出ているので，余裕がある人はVcの式も覚える.
覚えられない人は指数関数的に変化することを覚えておく.



過渡現象（放電）

- 抵抗とコンデンサに加わる電圧は図のように変化する.
- コンデンサの電荷が放電されるとともに，コンデンサの電圧Vcは指数関数的に減衰していく.
- 抵抗の電圧は，コンデンサによりもたらされるので，V_Cとともに0に近づく.

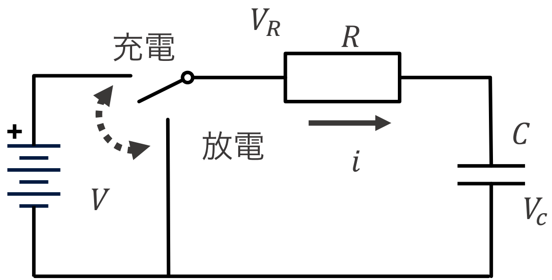


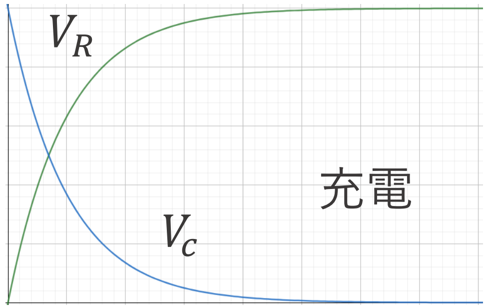


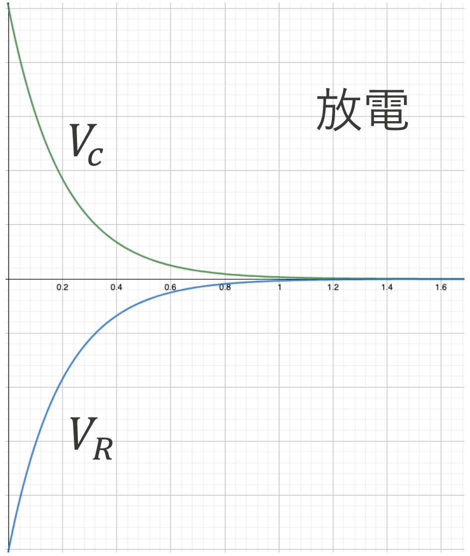
微分回路と積分回路

微分回路

- 抵抗の電圧 V_R の時間変化を見てみると，充電および放電が始まった瞬間に大きな値を取り，時間とともに0に近づく.
- つまり，時間変化が急激な場所（オン・オフの場所）で大きな値をとっている.
- 時間変化が急激な場所は微分が大きいので， V_R は微分を表していると見ることもできる.
- そのため，V_Rを測定する回路は微分回路と呼ばれる.

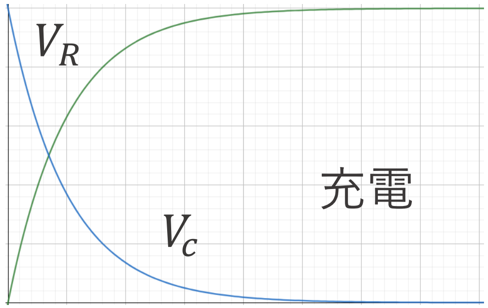


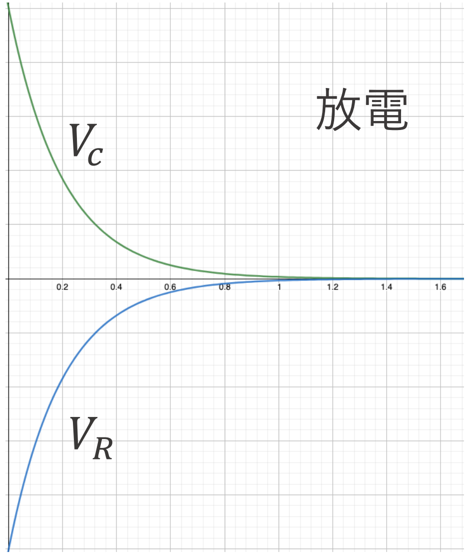


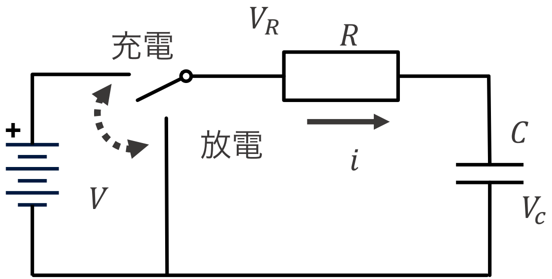


積分回路

- 一方，コンデンサの電圧V_Cの時間変化を見てみると，充電および放電が始まると時間とともに増加および減少する．
- つまり，V_Cは入力を足し続けていると見ることもできる．これは，積分に相当する計算とみなせるだろう．
- よって，V_Cを出力とする回路は積分回路と呼ばれる．

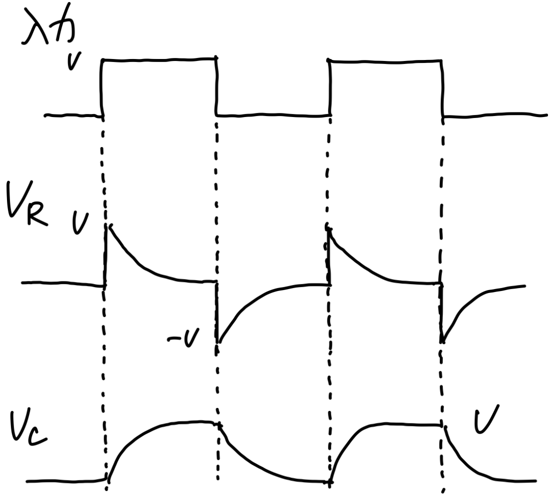






まとめ（CRフィルタの場合）

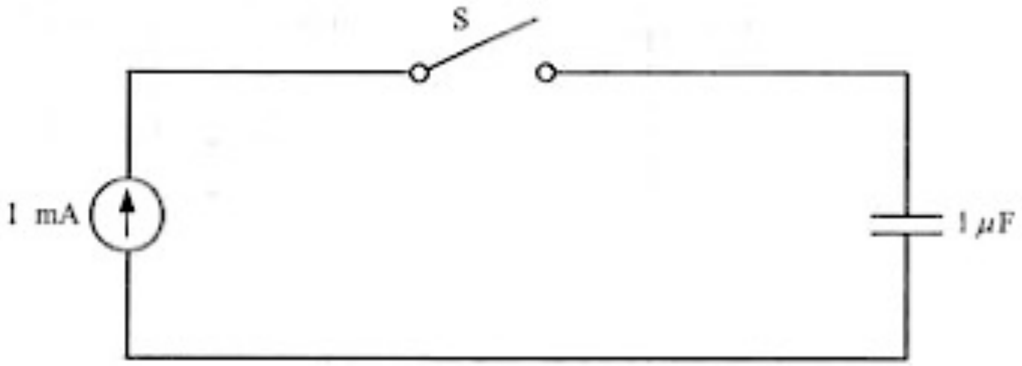
- 電圧は指数関数的に変化
- 積分回路は抵抗の電圧を見ている．
  - 入力の変化を捉える．
  - 矩形波なら，オン・オフの瞬間が最も電圧の絶対値は大きく，時間が立つに連れ0に近づく．
- 微分回路はコンデンサの抵抗を見ている．
  - 入力を蓄積していく．
  - 矩形波なら，オンの瞬間は0だが，徐々に増えていく．オフにすると溜まった電荷による電圧が徐々に減少していき0に近づく．



RLフィルタの場合RCフィルタの逆になる．

問題

- 図の直流定電流電源は1mAである．$t = 0$でスイッチSを閉じて10μs経過した後の1μFのキャパシタの両端の電圧はいくらか．ただし，スイッチSを閉じる前にキャパシタの両端の電圧はゼロとする．（29ME）



問題

- 図の直流定電流電源は1mAである．$t = 0$でスイッチSを閉じて10μs経過した後の1μFのキャパシタの両端の電圧はいくらか．ただし，スイッチSを閉じる前にキャパシタの両端の電圧はゼロとする．（29ME）

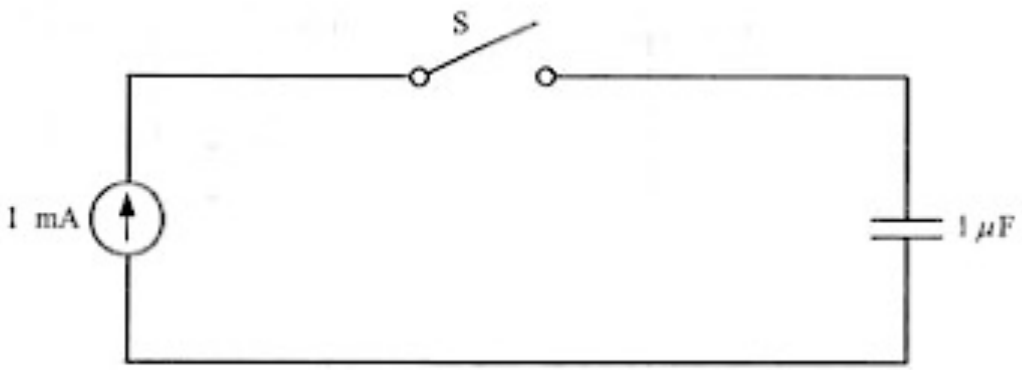
電荷と電流の関係は

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

よって

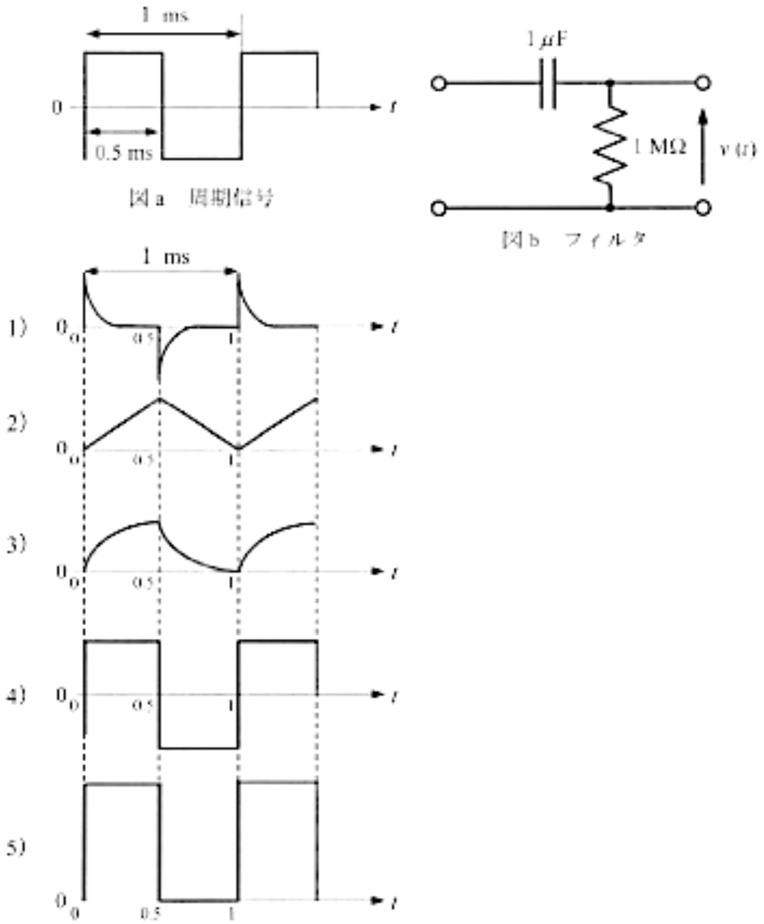
$$1\times10^{-6}\times\frac{V}{10\times10^{-6}} = 1\times10^{-3}$$

$$V = 0.01V$$



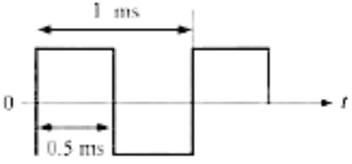
問題

- 図aの周期信号（周期1ms）を図bのフィルタに入力した．出力$v(t)$に最も近い波形はどれか．（28ME）

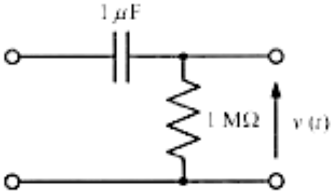


問題

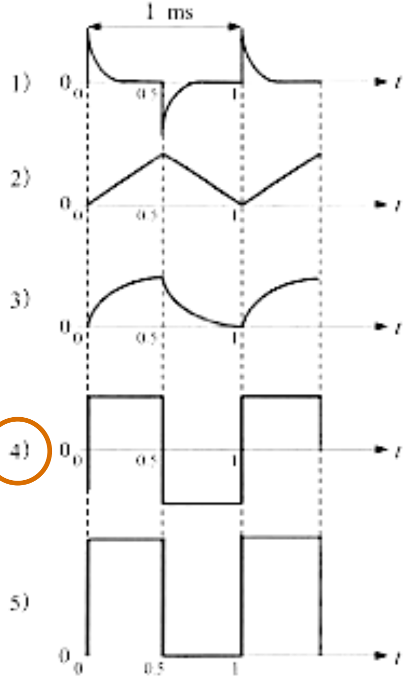
- 図aの周期信号（周期1ms）を図bのフィルタに入力した．出力$v(t)$に最も近い波形はどれか．（28ME）



図a 周期信号



図b フィルタ



抵抗の電圧$v(t)$が出力になっている．入力をvとすると

$v(t)$は充電時$v(t) = ve^{-\frac{1}{CR}t}$である．

また放電時は$v(t) = -ve^{-\frac{1}{CR}t}$である．

以上から1が正解のように思える．しかし，時定数は

$$\tau = 1\times10^{-6}\times1\times10^{6} = 1s$$

である．つまり，$v(t) = ve^{-t}$となる．例えば1sのときの$v(t)$は

$$v(1) = ve^{-1} \approx v\times\frac{1}{3} \approx 0.3v$$

であり，１のように0.5msで0に近い値になることはない．

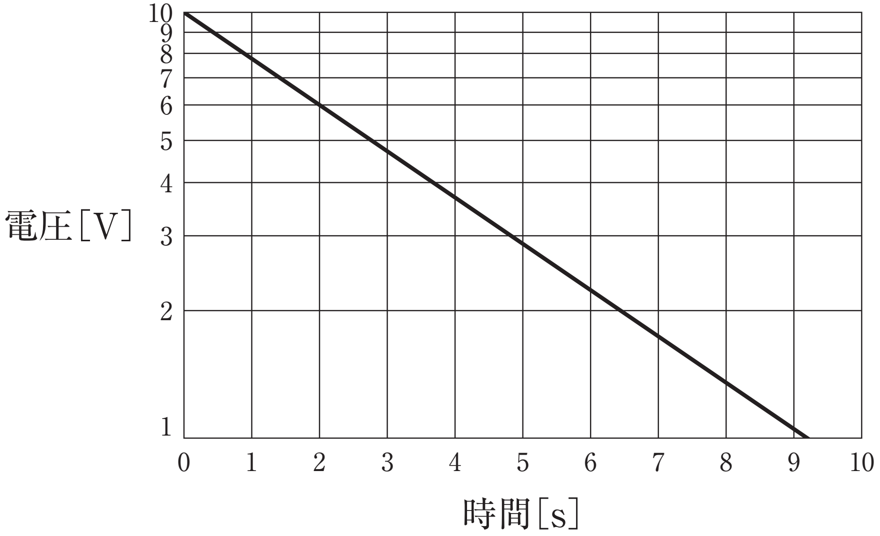
逆に，0.5ms後でも$v(t)$はほぼ入力vのままである．

よって4が答えである．

問題

- コンデンサを10Vに充電した後，200Ωの抵抗で放電した場合のコンデンサにかかる電圧の経時変化を図の片対数グラフを示す．コンデンサの静電容量[F]はどれか．

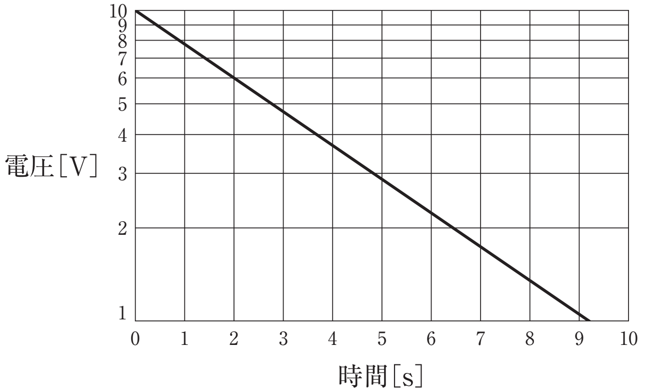
1. 0.02
2. 0.04
3. 0.1
4. 0.2
5. 0.4



問題

- コンデンサを10Vに充電した後，200Ωの抵抗で放電した場合のコンデンサにかかる電圧の経時変化を図の片対数グラフを示す．コンデンサの静電容量[F]はどれか．（臨床工学技士国家試験34）

1. 0.02
2. 0.04
3. 0.1
4. 0.2
5. 0.4



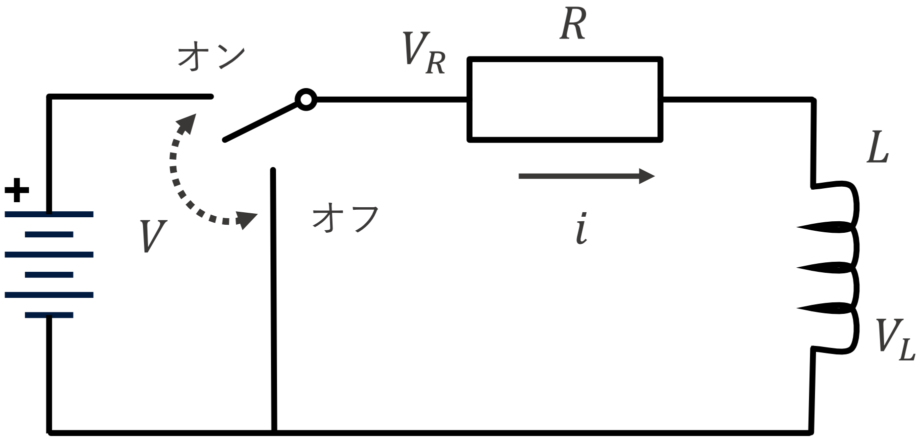
これは，典型的なCR回路の放電である．コンデンサにかかる電圧Vcは指数関数的に減衰する．よって
$V_c = 10e^{-\frac{t}{CR}}$である．
R=200なので$V_c = 10e^{-\frac{t}{200C}}$となる．t=200Cのとき，Vcは
$V_c = 10e^{-1} = \frac{10}{e}$となる．e=3と大まかに近似するとVcは約3.3Vである．その時の時間はグラフから4sで有ることが分かる．よって200C=4なので，
C=4/200=0.02となる．

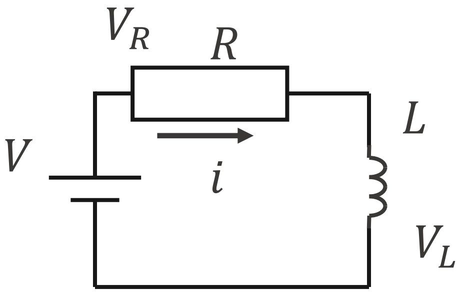
コイルの過渡現象

コイルに電流を流した瞬間

過渡現象（オン）

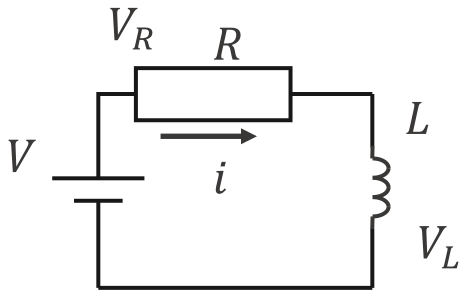
- 図のような直流回路を考える．
- スイッチをオン側に移動させると，コイルに電流が流れ，誘導起電力は発生する．





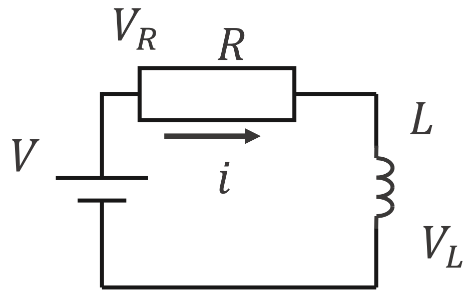
■ 過渡現象（オン）

- 抵抗とコンデンサに加わる電圧をそれぞれV_R，V_cとすると，
- $V = V_R + V_L$
- $V_R = iR$，$V_L = -L\dfrac{di}{dt}$より，
- $V = iR - L\dfrac{di}{dt}$
- これをiについて解けば，コイル全体を流れる電流の時間変化が分かる．



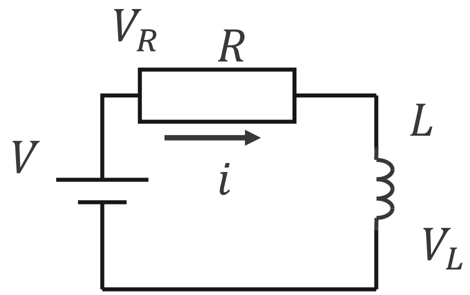
過渡現象（オン）

- $V = iR - L\frac{di}{dt}$を両辺Lでわり，0 equalの形にすると
- $\frac{d\mathrm{i}}{dt} + \frac{iR}{L} - \frac{V}{L} = 0$となる．
- $Z = \frac{iR}{L} - \frac{V}{L}$とおくと
- $\frac{dZ}{dt} = \frac{R}{L}\frac{di}{dt}$
- $\frac{di}{dt} = \frac{L}{R}\frac{dZ}{dt}$
- これを代入すると
- $\frac{L}{R}\frac{dZ}{dt} + Z = 0$



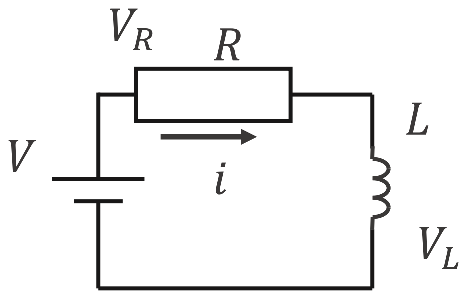
過渡現象（オン）

- $\frac{L}{R}\frac{dZ}{dt} + Z = 0$は変数分離形なので
- $\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dt} = -\frac{R}{L}$
- $\frac{1}{Z}dZ = -\frac{R}{L}dt$
- $\log Z = -\frac{R}{L}t$
- $Z = Ae^{-\frac{R}{L}t}$
- よって，
- $Ae^{-\frac{R}{L}t} = \frac{iR}{L} - \frac{V}{L}$
- $i = Ae^{-\frac{1}{CR}t} + \frac{V}{R}$
- $t = 0$のとき$i = 0$ なので
- $i = Ae^{-0\times t} + \frac{V}{R}$
- $A = -\frac{V}{R}$
- $i = -\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R} = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$



過渡現象（オン）

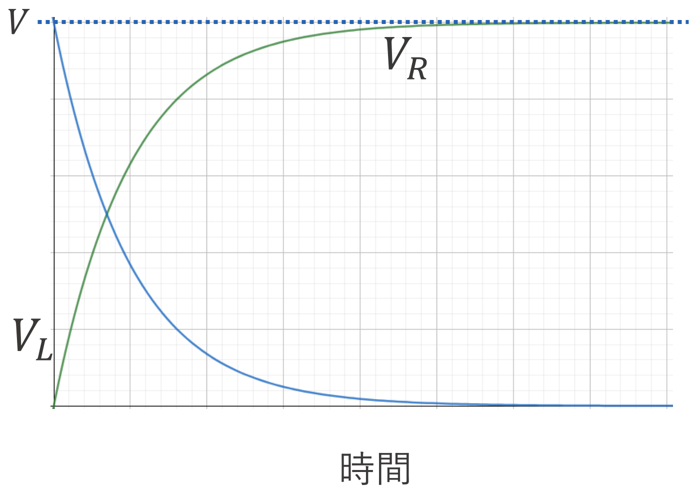
- 回路を流れる電流は
- $i = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$
- $\tau = \frac{L}{R}$としたとき， τ を時定数と呼ぶ.
- 抵抗にかかる電圧は
- $V_R = V(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$
- コンデンサにかかる電圧は
- $V_C = V - V\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = Ve^{-\frac{R}{L}t}$

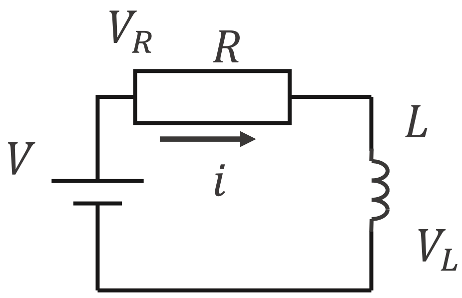


資格試験内で計算は不可能だから， 時定数はL/Rと覚える.

過渡現象（オン）

- 抵抗とコイルに加わる電圧は図のように変化する．
- コイルの誘導起電力により最初は電圧Vがコイルにかかるが，時間とともに減衰する．
- 一方抵抗の電圧V_Rは時間とともに増加し，最終的にほぼVになる．

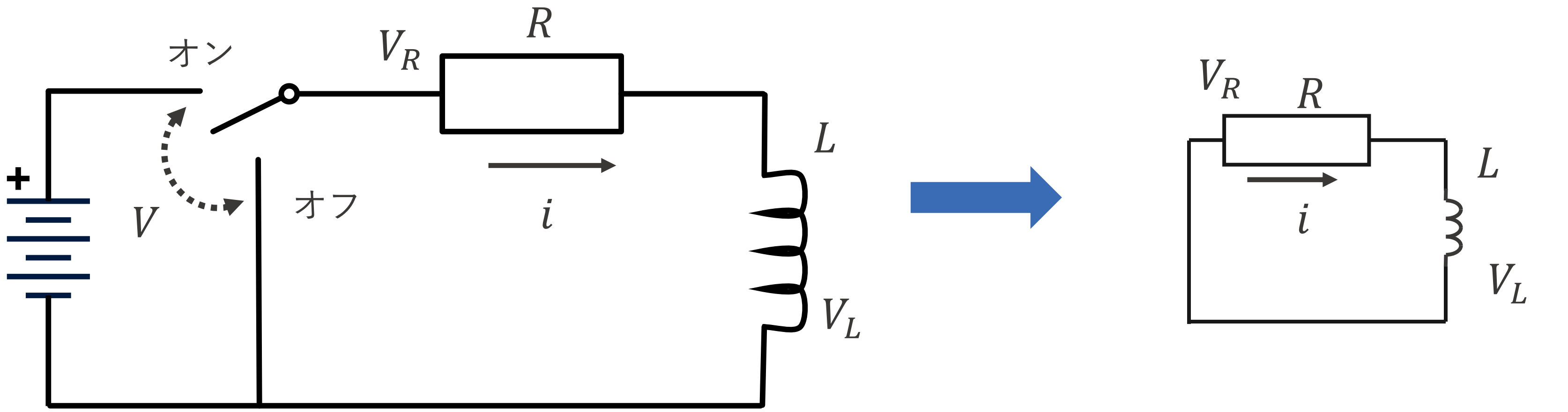




コイルの電源をオフにした瞬間

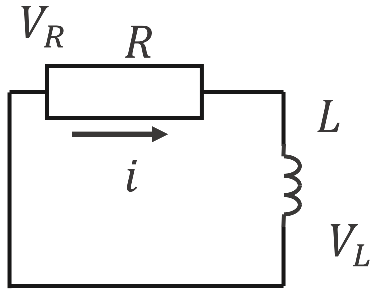
■ 過渡現象（オフ）

- スイッチをオン側にし，十分時間が立つとコイル内の磁場は一定になり誘導起電力はなくなる．
- その状態で，スイッチをオフ側に入れると，コイルに電流が流れなくなりコイル内の磁場が変化する．
- この磁場の変化が誘導起電力を発生させる．
- コイルが電源の代わりになる．



過渡現象（オフ）

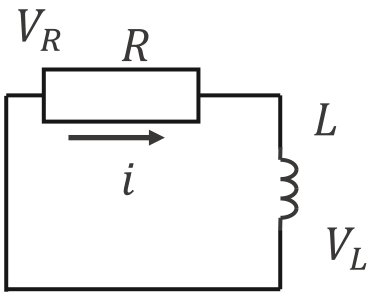
- 抵抗とコイルに加わる電圧をそれぞれV_R，V_Lとすると，電源がないので
- $V_R + V_L = 0$
- $V_R = iR$および$V_L = L\frac{di}{dt}$より，
- $iR + L\frac{dI}{dt} = 0$
- $\frac{iR}{L} + \frac{di}{dt} = 0$
- $i = Ae^{-\frac{R}{L}t}$
- 初期条件は$i_0 = V/R$なので
- $i = \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$



電源が切れると順方向に電圧が生じるため，V_Lは正となりマイナスがとれる．
変数分離形の微分方程式
充電のときやったので計算は省略

過渡現象（オフ）

- $i = \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$から$V_R$は
- $V_R = V\, e^{-\frac{R}{L}t}$
- V_Lは
- $V_L = -V_R = -V\, e^{-\frac{R}{L}t}$
- $\tau = CR$としたとき，τを時定数と呼ぶ．

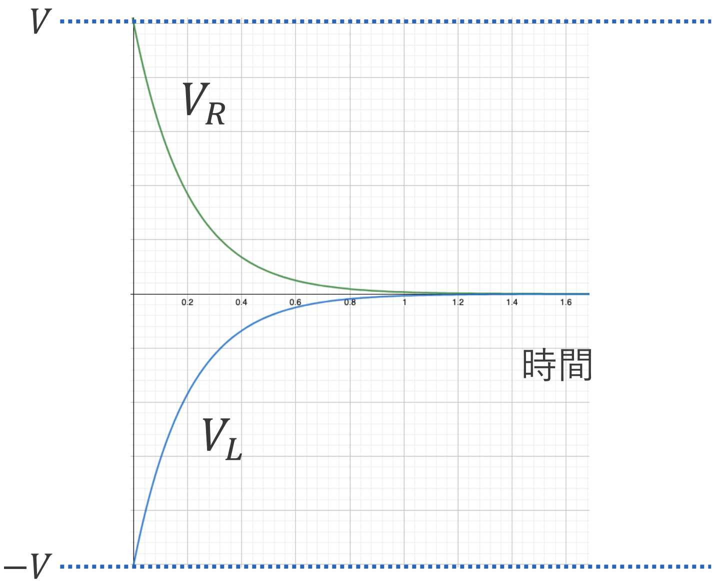


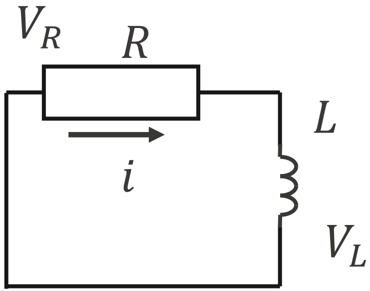
資格試験内で計算は不可能だから，時定数はL/Rと覚える．

電圧の時間変化もよく出ているので，余裕がある人はV_Lの式も覚える．覚えられない人は指数関数的に変化することを覚えておく．

過渡現象（オフ）

- 抵抗とコイルに加わる電圧は図のように変化する．
- コイルはスイッチがオフになった途端誘導起電力を生じるが，時間とともに指数関数的に減衰していく．
- 抵抗の電圧は，コイルによりもたらされるので，V_Lとともに0に近づく．



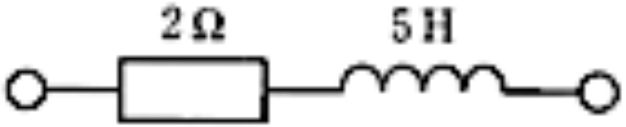


コンデンサの逆

- コイルの過渡現象はコンデンサの逆だと覚えておく.
- しかし時定数が違う
  - コンデンサ：CR
  - コイル：L/R

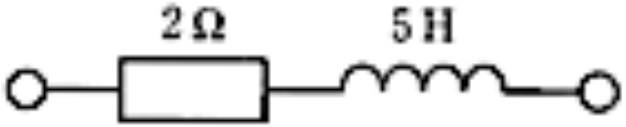
問題

- 図に示す回路の時定数[s]を求めよ．（国家試験26）



問題

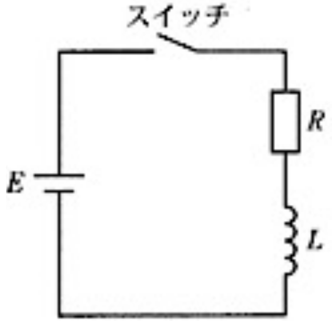
- 図に示す回路の時定数[s]を求めよ．（国家試験26）



$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5}{2} = 2.5s$$

問題

- 図の回路において$t = 0$でスイッチを入れた．正しいのはどれか．（国家試験27）

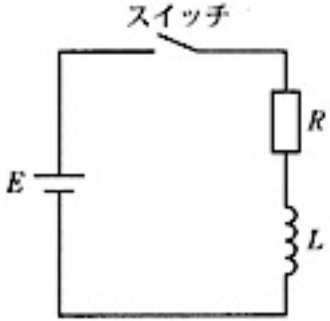


1. 時定数はLRである．
2. 直後に抵抗にかかる電圧はEとなる．
3. 直後に流れる電流は$\frac{E}{R}$となる．
4. 時間が十分に経過すると抵抗にかかる電圧は$\frac{E}{2}$となる．
5. 時間が十分に経過すると抵抗で消費される電力は$\frac{E^2}{R}$となる．

問題

- 図の回路において$t = 0$でスイッチを入れた．正しいのはどれか．（国家試験27）

1. 時定数はLRである．
2. 直後に抵抗にかかる電圧はEとなる．
3. 直後に流れる電流は$\frac{E}{R}$となる．
4. 時間が十分に経過すると抵抗にかかる電圧は$\frac{E}{2}$となる．
5. 時間が十分に経過すると抵抗で消費される電力は$\frac{E^2}{R}$となる．



1. 時定数はL/Rである． これは間違い．
2. 直後に抵抗にかかる電圧は0である． これは間違い．
3. 直後に流れる電流は0である． これは間違い．
4. 時間が十分に経過すると抵抗にかかる電圧はEである． これは間違い．
5. 時間が十分に経過すると抵抗にかかる電圧はEなので，抵抗で消費される電力は

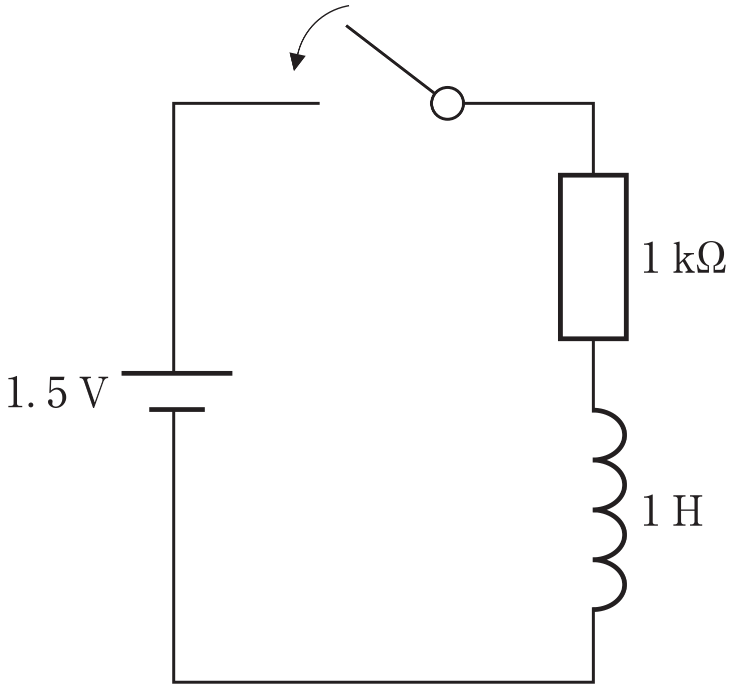
$$W = IV = E^2/R$$

なので， これが正解．

問題

- 図の回路でスイッチを閉じてから1ms後にインダクタの両端にかかる電圧[V]に最も近いのはどれか．ただし，自然対数の底eは2.7とする．

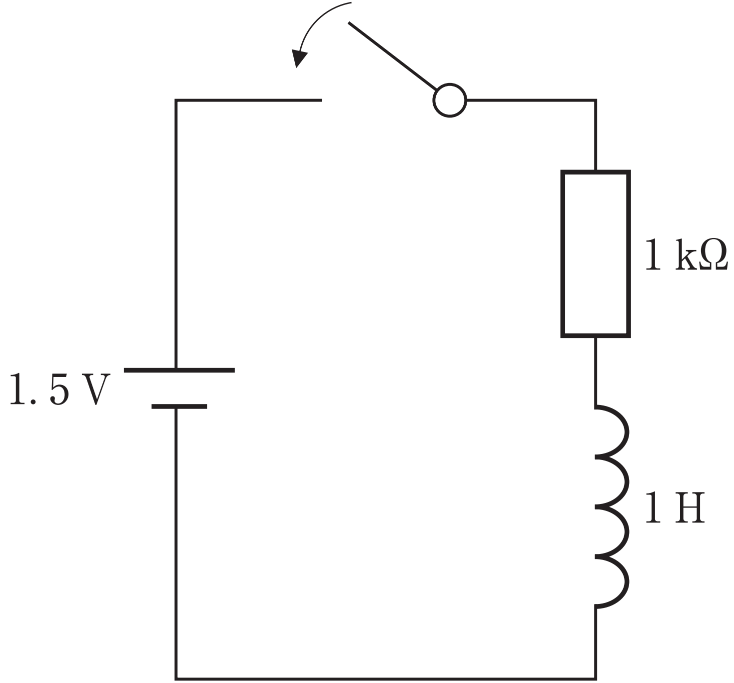
1. 1.5
2. 1.2
3. 0.9
4. 0.6
5. 0.3



問題

- 図の回路でスイッチを閉じてから1ms後にインダクタの両端にかかる電圧[V]に最も近いのはどれか．ただし，自然対数の底eは2.7とする．

1. 1.5
2. 1.2
3. 0.9
4. 0.6
5. 0.3



インダクタはコンデンサと特性が逆なので，スイッチをオンにするとインダクタにかかる電圧は指数関数的に減衰していく．つまり，$V_L = V_i e^{-t/\tau}$．時定数はL/Rである．
よって

$$V_L = 1.5\times2.7^{-\frac{0.001\mathrm{s}\times1000\Omega}{1\mathrm{H}}} = 1.5\times2.7^{-1} \approx 0.56$$