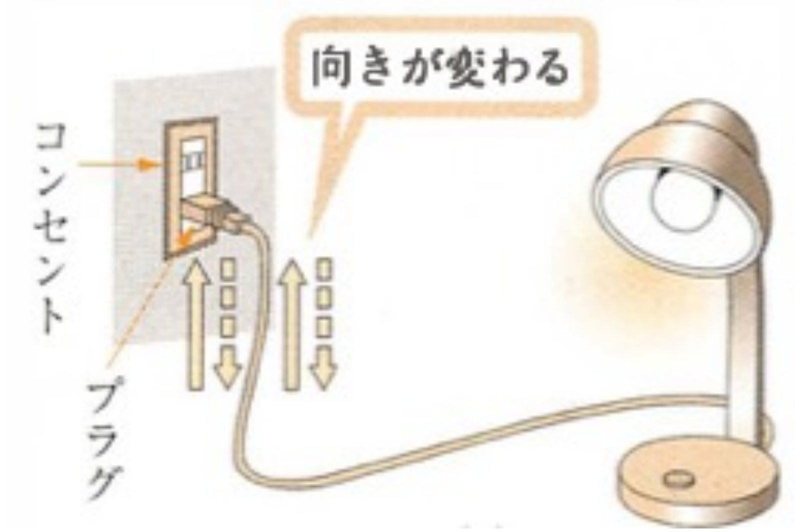
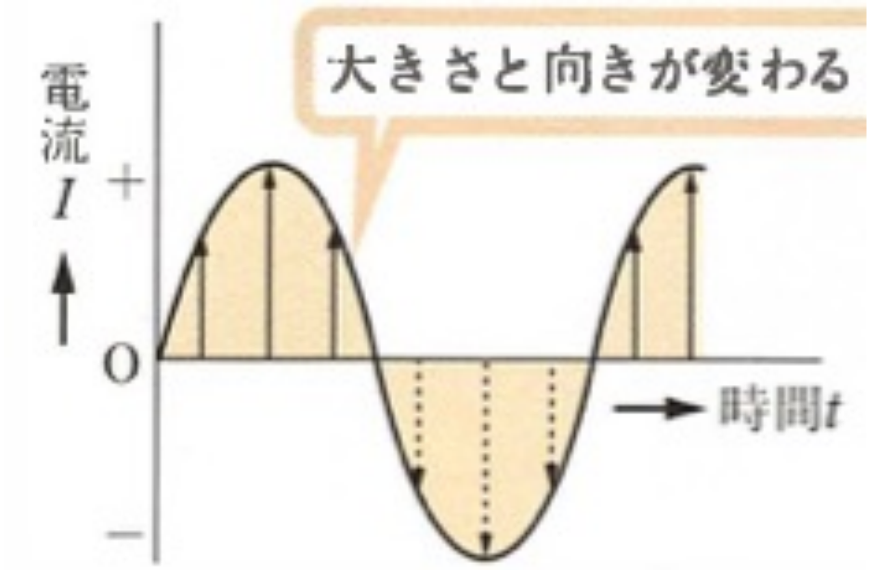
電気工学2 第3回

藤田 一寿

交流

- 交流では，電圧や電流の大きさと向きが時間の経過とともに変化する．





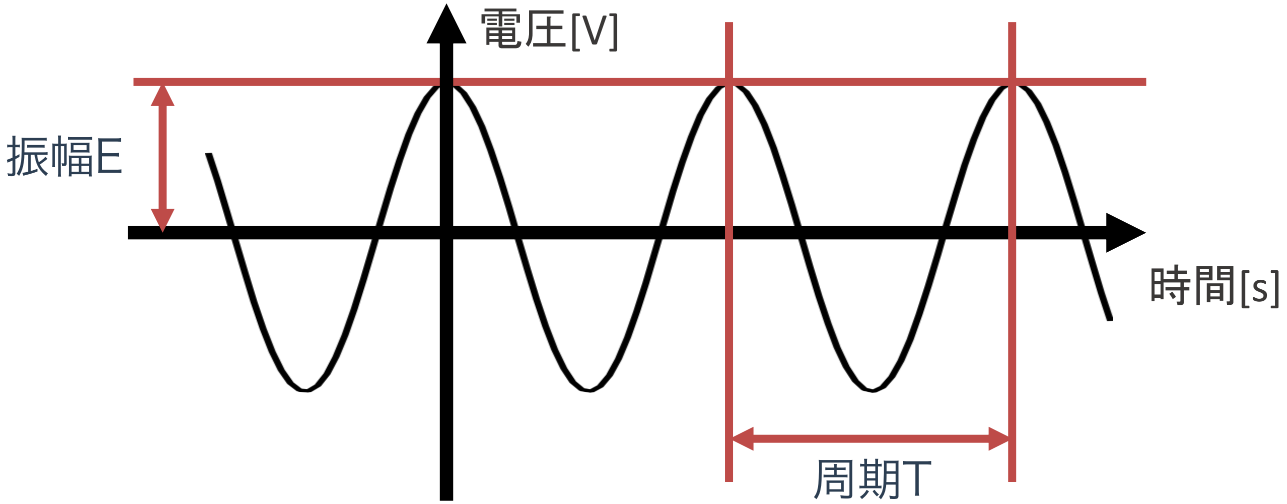
(実教出版 電気基礎1)

正弦波の式とパラメタ

- 正弦波

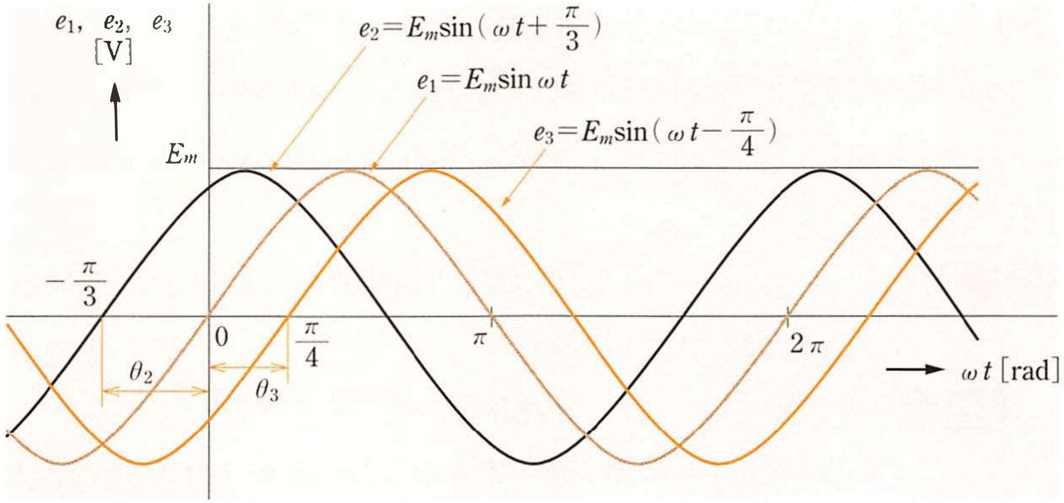
$$e = E\sin 2\pi f t$$

- 波を表すための指標
  - 周期 T [s] 山から山までの時間
  - 周波数 f [Hz] f=1/T 1秒間に何個山があるか
  - 振幅 E



位相と位相差

$$e_1 = E_m \sin \omega t \quad e_2 = E_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) \quad e_3 = E_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

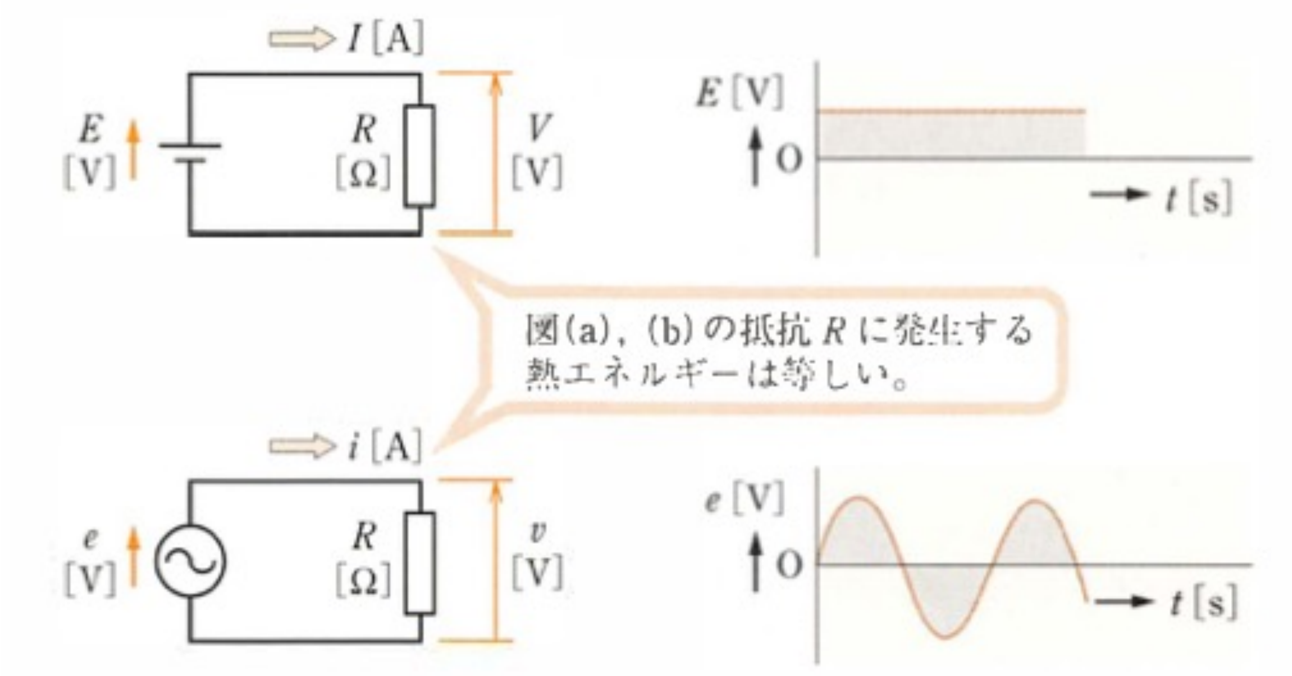


- sin内のωt，　ωt+π/3，　ωt-π/4を位相と呼ぶ．
- e1を基準とした時，＋π/3，-π/4を位相差と呼ぶ．
- e2はe1より位相がπ/3進んでいる．
- e3はe1より位相が-π/4遅れている．

実効値

実効値

- 直流起電力Eと抵抗Rを繋いだときに発生する熱エネルギーと交流起電力eと抵抗Rを繋いだときに発生する熱エネルギーが等しいとき，Eを交流起電力 eの実効値と言う．



■ 正弦波交流の実効値の計算

- 抵抗Rにv(t)=Vsin(ωt)の電圧を加えたときの電力は
- $P(t) = i(t)v(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{V^2 \sin^2(\omega t)}{R}$
- 1周期の平均電力は
- $\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V^2 \sin^2(\omega t)}{R} dt = \frac{V^2}{TR}\int_0^T \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))dt = \frac{V^2}{2TR}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^T$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

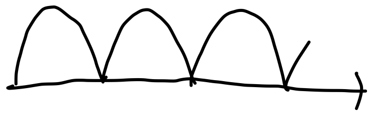
- $= \frac{V^2}{2TR}\left[T - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega T + \frac{1}{2\omega}\sin 0\right] = \frac{V^2}{2TR} \times T = \frac{V^2}{2R} = \frac{V}{\sqrt{2}R}\frac{V}{\sqrt{2}} = I_e V_e$

$\omega T = 2\pi$

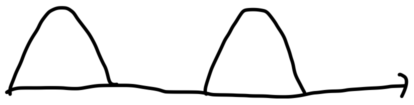
- よって，**正弦波交流の実効値は振幅の$\frac{1}{\sqrt{2}}$となる**．

実効値（資格試験・国家試験のために覚える）

- 交流
  - $\frac{V}{\sqrt{2}}$
- 全波整流（計算で2乗するため，交流と同じ値となる）
  - $\frac{V}{\sqrt{2}}$



- 半波整流
  - $\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} \frac{V^2 \sin^2(\omega t)}{R} dt = \frac{V^2}{TR}\int_0^{T/2} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t))dt$
  - $= \frac{V^2}{2TR}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^{T/2} = \frac{V^2}{2TR}\left[\frac{T}{2} - \frac{1}{2\omega}\sin \omega T + \frac{1}{2\omega}\sin 0\right]$
  - $= \frac{V^2}{4TR} \times T = \frac{V^2}{4R} = \frac{V}{2R}\frac{V}{2} = I_e V_e$
  - よって実効値はV/2



問題

問題解説

- 時刻t[s]における交流電流の瞬時値が以下の式で与えられるとき，周期[s]はいくらか．（第39回ME2種）
- $i(t) = 20\sin(40\pi t - \pi/4)$

1. 0.025
2. 0.05
3. 0.5
4. 20
5. 40

問題解説

- 時刻t[s]における交流電流の瞬時値が以下の式で与えられるとき，周期[s]はいくらか．(第39回ME2種)
- $i(t) = 20\sin(40\pi t - \pi/4)$

1. 0.025
2. 0.05
3. 0.5
4. 20
5. 40

波の式は次のとおりである．

$$I(t) = A\sin(2\pi f t - \phi)$$

よって周波数は

$f = 20\mathrm{Hz}$

周期は

$T = \frac{1}{20} = 0.05\mathrm{s}$

問題解説

- $i(t) = 10\sqrt{2}\sin(40\pi t - \frac{\pi}{6})$[mA]で表される交流について誤っているのはどれか．（第34回ME2種）

1. 振幅：14.1mA
2. 周波数：40Hz
3. 位相遅れ：30°
4. 角周波数：126rad/s
5. 実効値：10mA

問題解説

- $i(t) = 10\sqrt{2}\sin(40\pi t - \frac{\pi}{6})$[mA]で表される交流について誤っているのはどれか．（第34回ME2種）

1. 振幅：14.1mA
2. 周波数：40Hz
3. 位相遅れ：30°
4. 角周波数：126rad/s
5. 実効値：10mA

波の式は次のとおりである．

$$I(t) = A\sin(2\pi ft - \phi)$$

よって周波数は

$f = 20\mathrm{Hz}$

周期は

$T = \frac{1}{20} = 0.05\mathrm{s}$

位相は

$$\phi = -\frac{\pi}{6} = -30°$$

与式から振幅は

$A = 10\times\sqrt{2} \cong 14.1\mathrm{mA}$

与式から角周波数は

$\omega = 40\pi \cong 126\mathrm{rad/s}$

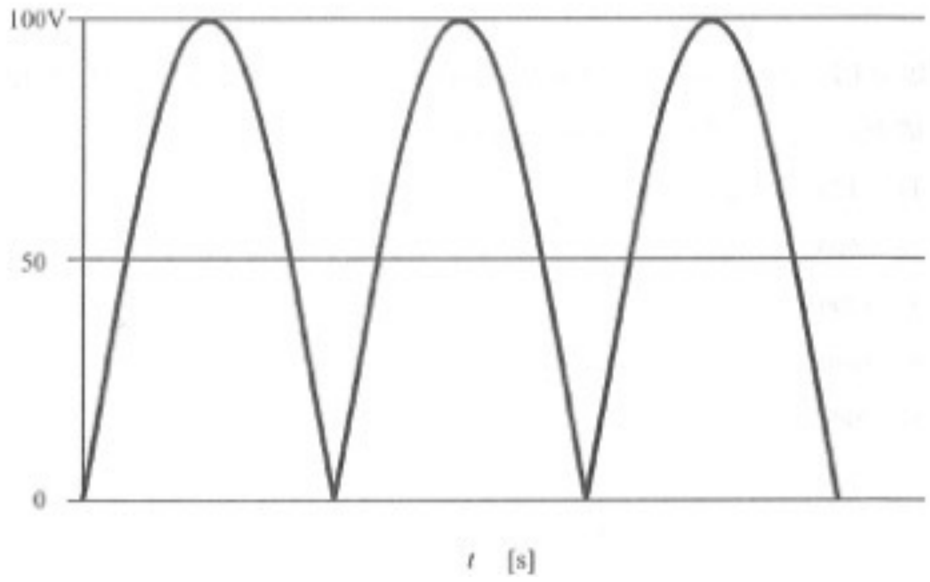
実効値は

$V = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10\mathrm{mA}$

問題解説

- 図は50Hz正弦波交流の全波整流波形である．実効値は何Vか．（第34回ME2種）

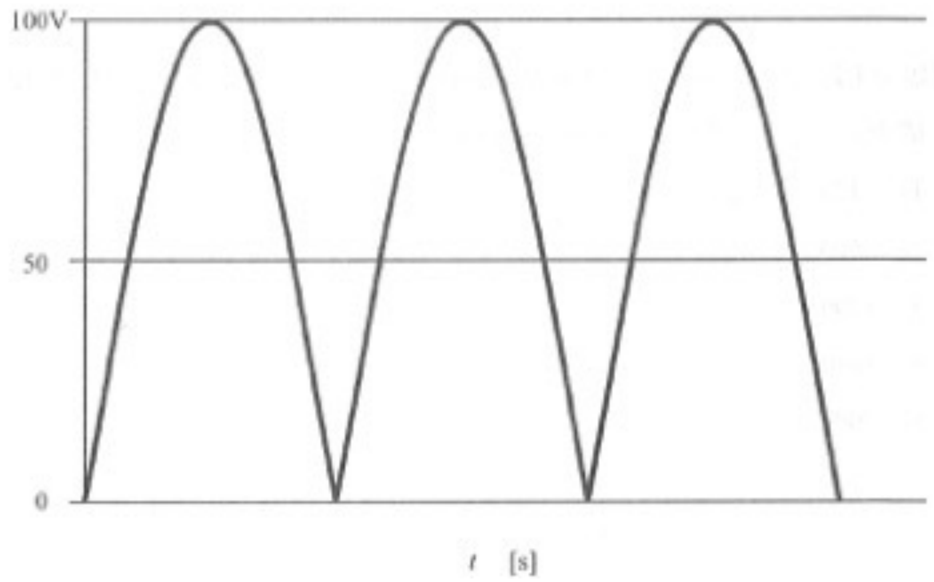
1. 140
2. 100
3. 71
4. 50
5. 32



問題解説

- 図は50Hz正弦波交流の全波整流波形である．実効値は何Vか．（第34回ME2種）

1. 140
2. 100
3. 71
4. 50
5. 32

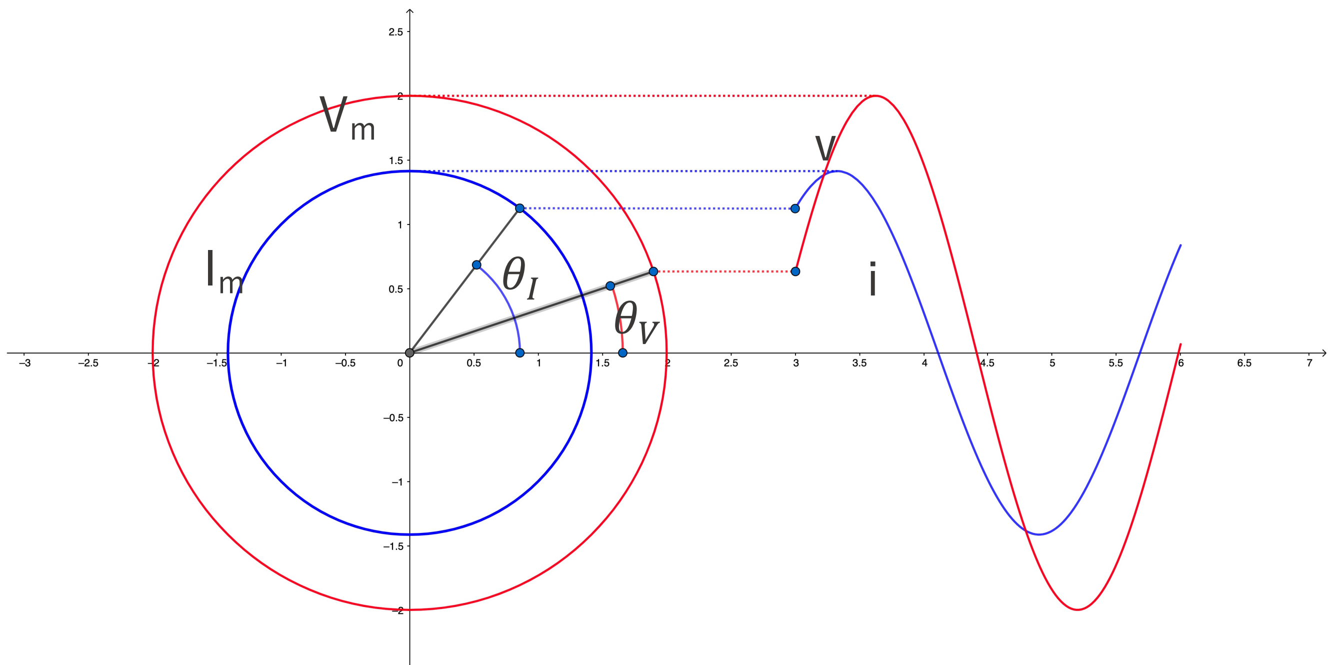


全波整流交流は正弦波交流と同じ実効値である．
よって実効値は
$V=\frac{100}{\sqrt{2}}\cong 70.7\mathrm{V}$

フェーザ図と複素数表示

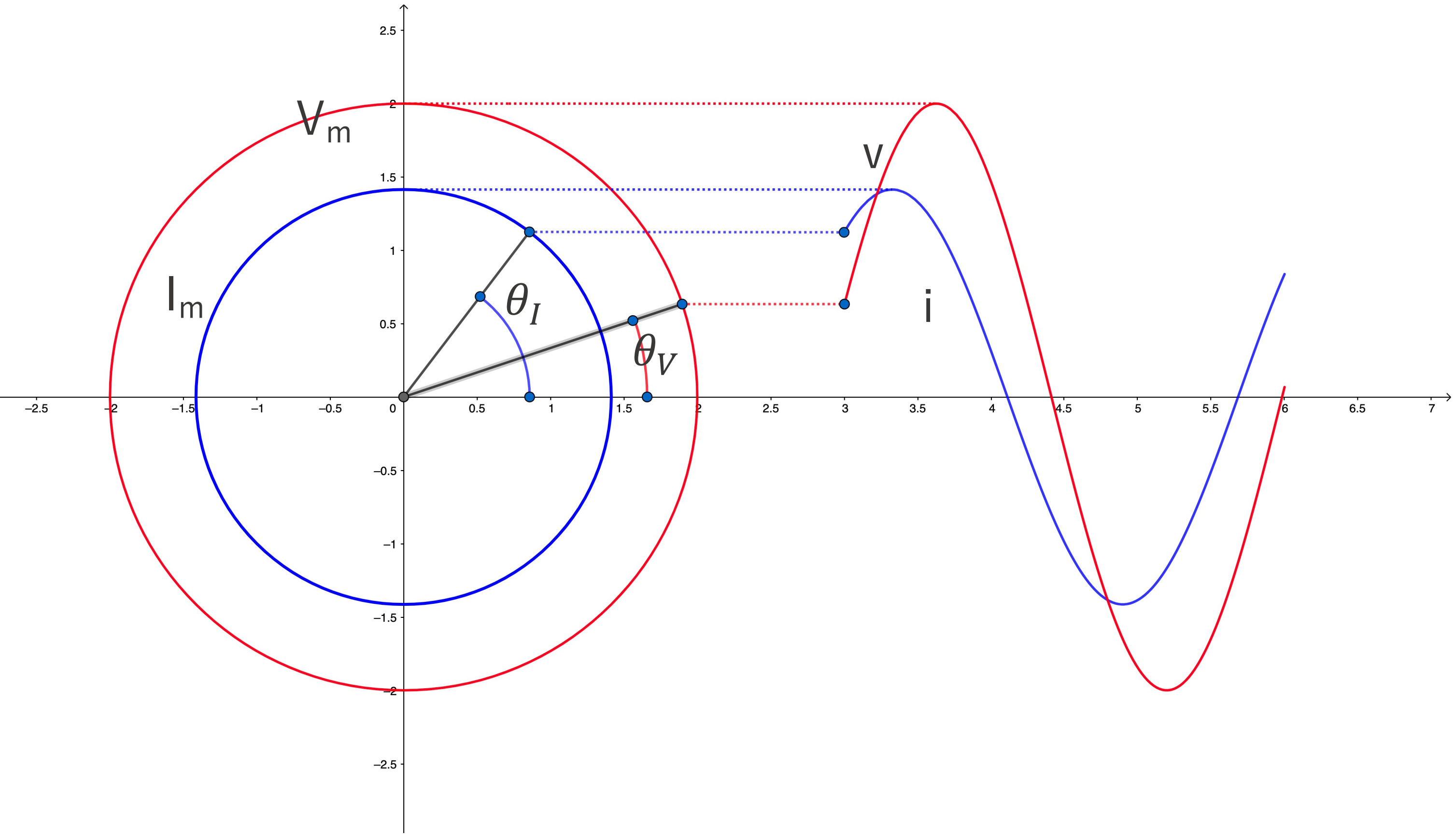
正弦波

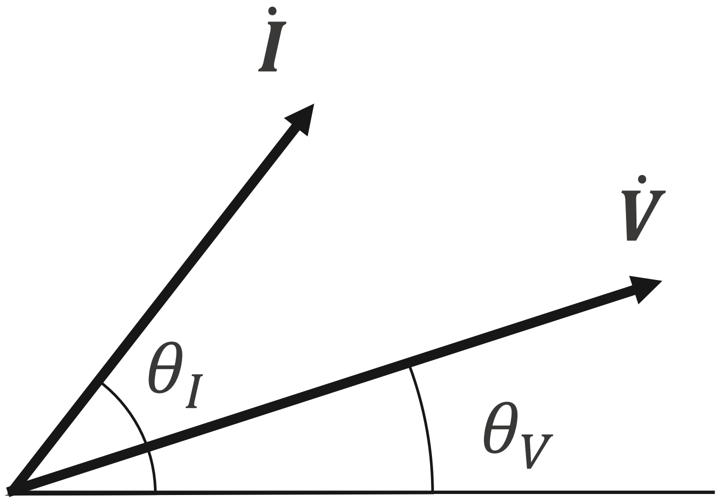
- 正弦波交流の電圧（瞬時値）を次の式で表す.
- $v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$
- 電圧と電流の値は時間変化するが，その特性は最大値Vm，Im，角周波数ω，位相θ_V，θ_Iの3つのパラメタで表現できる.



フェーザ図

- 下図のように，電圧や電流を，長さを実効値，角度を位相とした矢印（ベクトル）で表したものをフェーザ図と呼ぶ．

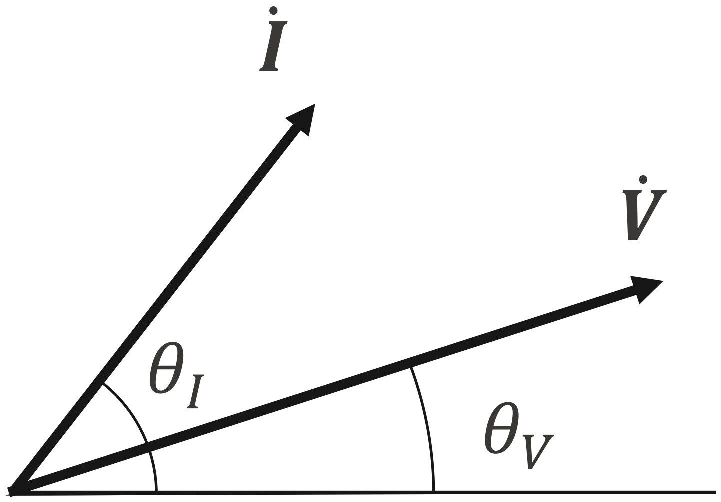


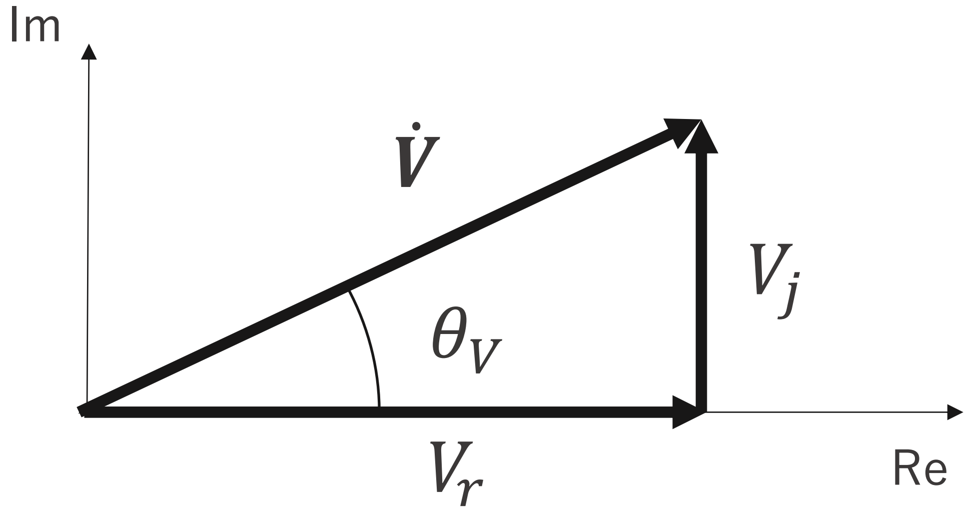


フェーザ図

複素数表示

- フェーザ図を複素平面として捉えれば，電圧や電流のベクトルは複素数で表現できる.
- これを複素数表示と呼ぶ.
- 電気・電子回路では虚数単位をjで表す.





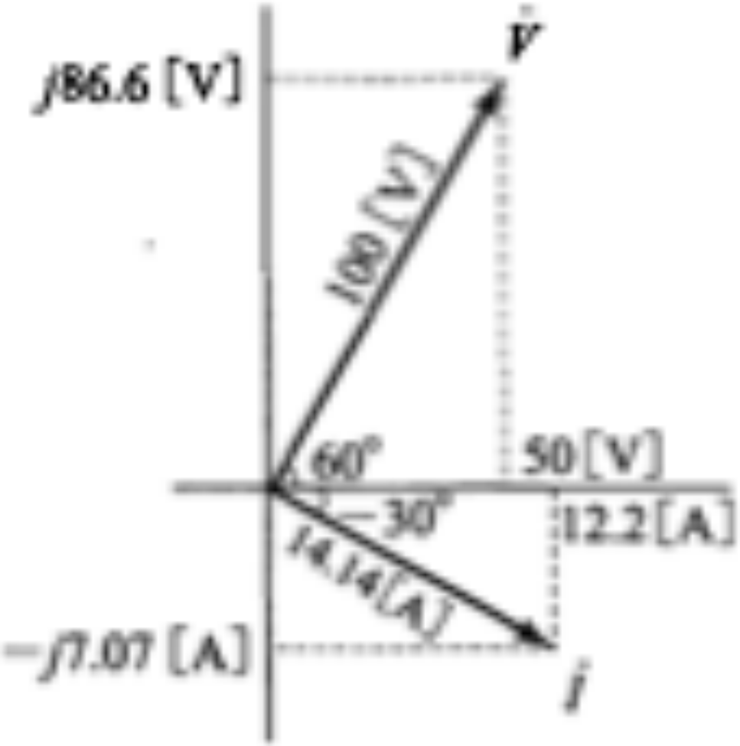
$$\dot{V} = V_r + jV_i$$

例

- 次の式の複素数表示を求めよ．さらにフェーザ図をかけ．
- $v = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$
- $i = 20\sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$

例

- 次の式の複素数表示を求めよ．さらにフェーザ図をかけ．
- $v = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$
- $i = 20\sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$



- それぞれの複素数表示は次のようになる．
- $\dot{V} = 50 + 50\sqrt{3}j$
- $\dot{I} = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}j$

問題

- 次の複素数で表された電圧の実効値と位相を求めよ.

1. $\dot{V} = 1 + \sqrt{3}j$
2. $\dot{V} = -1 + j$

- 次の複素数で表された電圧の実効値を求めよ.

1. $\dot{V} = 3 + 4j$
2. $\dot{V} = 10 - 5j$

問題

- 次の複素数で表された電圧の実効値と位相を求めよ．

1. $\dot{V} = 1 + \sqrt{3}j$　実効値は2，位相は$\pi/3$
2. $\dot{V} = -1 + j$　実効値は$\sqrt{2}$，位相は$3\pi/4$

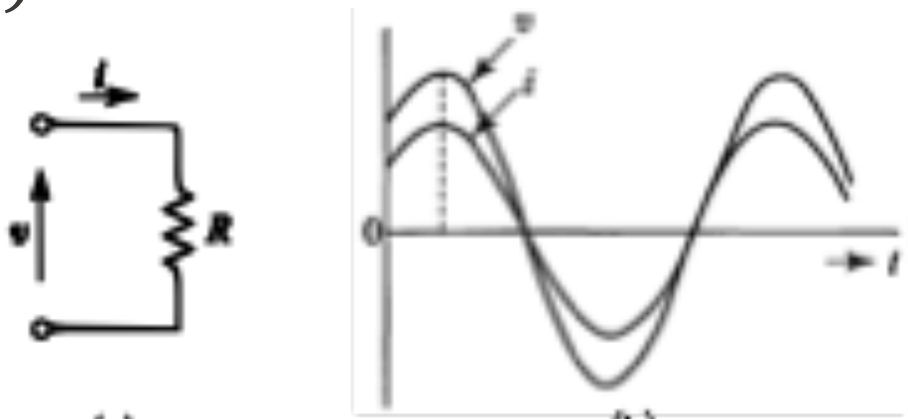
- 次の複素数で表された電圧の実効値を求めよ．

1. $\dot{V} = 3 + 4j$　実効値は5
2. $\dot{V} = 10 - 5j$　実効値は$\sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

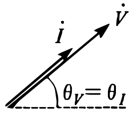
交流と抵抗

■ 交流と抵抗

- オームの法則は
- $v = Ri$
- 電流を$i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$とすると，電圧は次のようになる．
- $v = RI_m \sin(\omega t + \theta_I) = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- したがって，
- $V_m = RI_m$
- $\theta_V = \theta_I$
- である．よって複素数表示は
- $\dot{V} = R\dot{I}$
- 抵抗では電流と電圧は同位相である．



(a) (b)

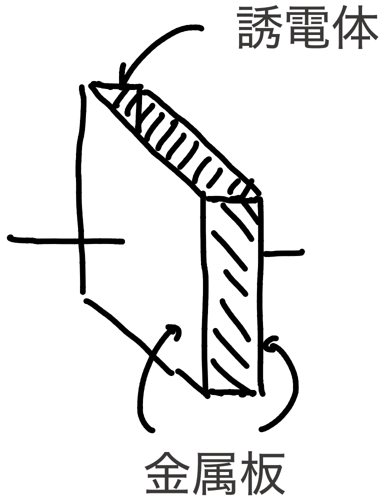


コンデンサ

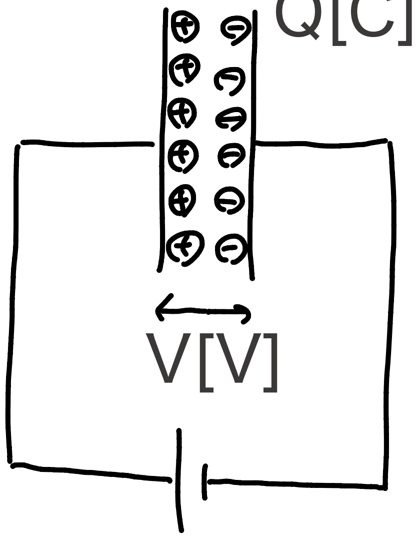
コンデンサ（キャパシタ）

- 電荷を貯める機能を持つ.
- 電荷の量Qの単位は[C]（クーロン）
- コンデンサに電圧Vを加えたときに，コンデンサに貯まる電荷Q[C]は，次の式で求まる.

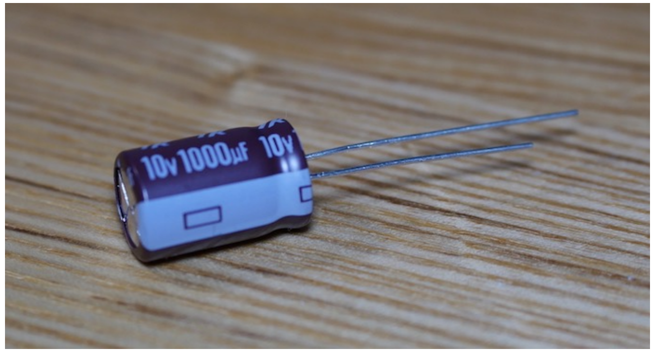
$$Q = CV$$



平行板コンデンサ



- Cはコンデンサの静電容量と呼ばれる量で，単位は[F]（ファラッド）である.



詳しい話は電磁気の講義のときに

電荷，静電容量，電圧，電流の関係

- コンデンサにたまったQ[C]，コンデンサの静電容量C[F]，コンデンサにかかる電圧V[V]は次の関係がある．

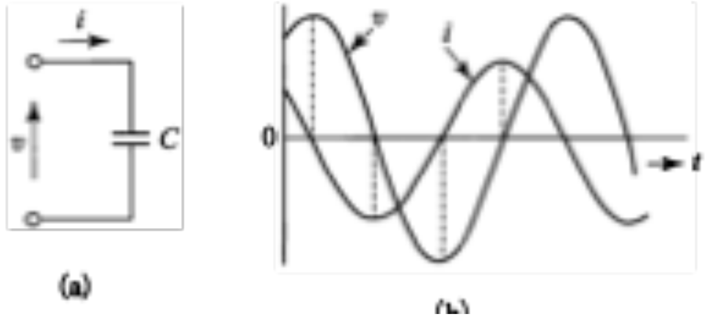
$$Q = CV$$

- 電流の定義式から，コンデンサを流れる電流は次のようになる．

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} \\ &= \frac{dCV}{dt} \\ &= C\frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

コンデンサの電圧と電流

- コンデンサに加える電圧vを次のとおりとする．
- $v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- コンデンサに流れる電流Iは電流の定義から
- $i = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCv}{dt} = C\frac{d}{dt}V_m \sin(\omega t + \theta_V) = \omega C V_m \cos(\omega t + \theta_V)$
- $= \omega C V_m \sin(\omega t + \theta_V + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$
- よって，次のことが成り立つ．
- $I_m = \omega C V_m$
- $\theta_I = \theta_V + \frac{\pi}{2}$
- つまり，電流は電圧よりも位相が90°進んでいる．



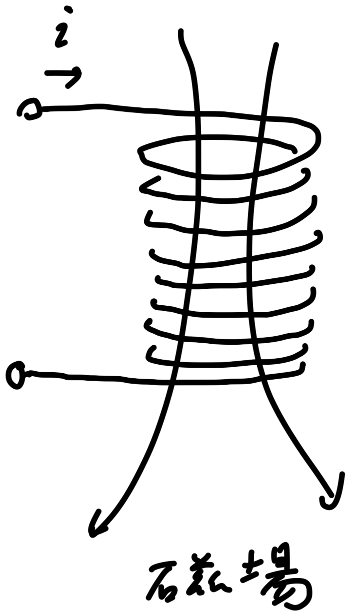
コンデンサの電圧と電流の複素数表示

- 電流と電圧の実効値を$\dot{I}$，$\dot{V}$とする．電流は電圧より位相が$\pi/2$進んでいるので，電流と電圧の関係を複素数表示で表すと
- $\dot{I} = j\omega C\dot{V}$
- $\dot{V} = \dfrac{1}{j\omega C}\dot{I}$

インダクタ（コイル）

インダクタ（コイル）

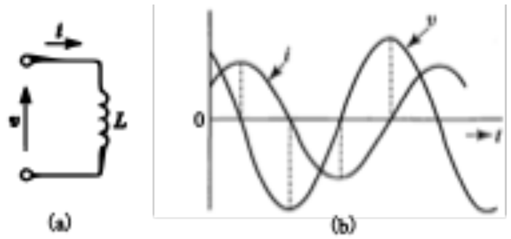
図記号



- 銅線を巻いたもの.
- 電流が変化すると電圧を発生させる.
  - 誘導起電力vは次の式で書かれる.
  - $v = L\dfrac{\Delta i}{\Delta t}$
  - Lを自己インダクタンスもしくはインダクタンスという.
  - 単位はH（ヘンリー）
- 誘導起電力は電流により発生する磁場を打ち消す方向に発生する.
  - 電流変化に対しブレーキとして働くので，変化に対しインピーダンスが高くなる.

詳しい話は電磁気の講義のときに

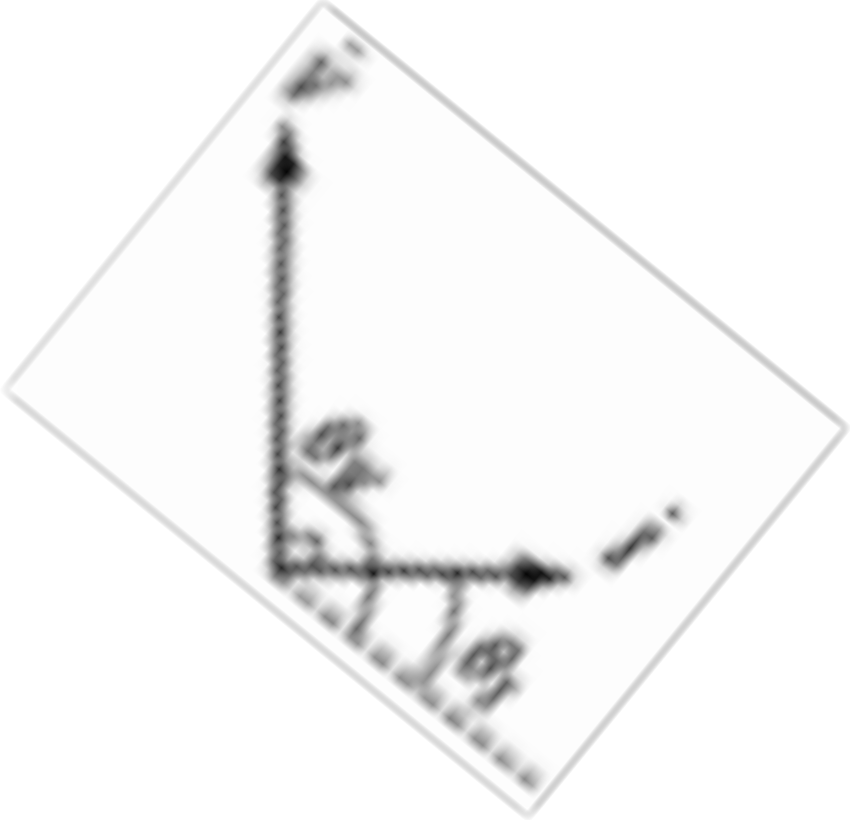
■ インダクタの電圧と電流



- インダクタに加える電流iを次のとおりとする．
- $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$
- インダクタに流れる電圧vは誘導起電力の式から
- v$= L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt} I_m \sin(\omega t + \theta_I) = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta_I)$
- $= \omega L I_m \sin(\omega t + \theta_I + \frac{\pi}{2}) = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- よって，次のことが成り立つ．
- $V_m = \omega L I_m$
- $\theta_V = \theta_I + \frac{\pi}{2}$
- つまり，電圧は電流よりも位相が90°進んでいる．

インダクタの電圧と電流の複素数表示

- 電流と電圧の実効値を$\dot{I}$，$\dot{V}$とする．電圧は電流より位相が$\pi/2$進んでいるので，電流と電圧の関係を複素数表示で表すと
- $\dot{V} = j\omega L\dot{I}$



■ インピーダンス，レジスタンス，リアクタンス

- どのような回路であれ，電圧と電流の関係を次のように表すとする．
- $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$
- ここで$\dot{Z}$をインピーダンスという．
- 抵抗の場合
- $\dot{V} = R\dot{I}$
- と書け，Rをレジスタンスという．
- また，コンデンサの場合，
- $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{C}$
- と書け，$\frac{1}{\omega C}$を容量性リアクタンスという
- インダクタの場合
- $\dot{V} = j\omega L\dot{C}$
- と書け，ωLを誘導性リアクタンスという．
- それぞれの単位はΩである．

問題解説

- 最大値10Vの正弦波交流電圧を誘導リアクタンス2.0Ωのインダクタに加えた．交流電圧の瞬時値が-10Vのときにインダクタを流れる交流の瞬時値[mA]として正しいのはどれか．（第41回ME2種）

1. -5.0
2. -3.5
3. 0.0
4. 3.5
5. 5.0

■ 問題解説

- 最大値10Vの正弦波交流電圧を誘導リアクタンス2.0Ωのインダクタに加えた．交流電圧の瞬時値が-10Vのときにインダクタを流れる交流の瞬時値[mA]として正しいのはどれか．（第41回ME2種）

1. -5.0
2. -3.5
3. 0.0
4. 3.5
5. 5.0

電圧の位相は0だとすると電圧は次の式でかける．

$$V = 10\sin(\omega t)$$

V=-10だから

$$\sin(\omega t) = -1$$

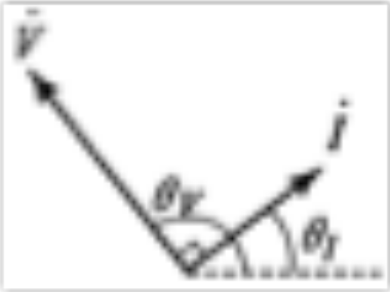
$$\omega t = -\frac{\pi}{2}$$

電圧の位相は0だとすると 電流は次の式でかける．

$$I = I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$\omega t = -\frac{\pi}{2}$だから

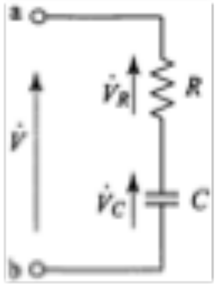
I=0

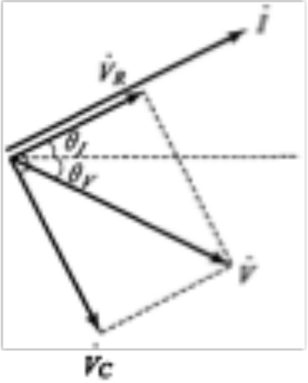


直列回路

RC直列回路

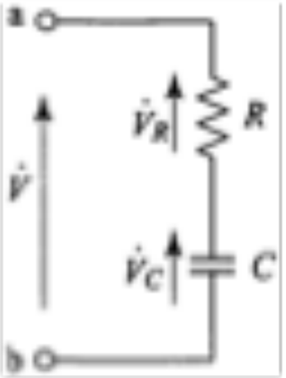
- 図のように抵抗とコンデンサを直列につなぐ.
- 直列なので，各素子を流れる電流は等しく，各素子に加わる電圧の総和がab間の電圧となる.
- 各素子に加わる電圧は,
- $\dot{V}_R = R\dot{I}, \dot{V}_C = \frac{1}{j\omega \mathrm{C}}\dot{I}$
- である．このことから，抵抗の電圧は電流と同位相であるが，コンデンサの電圧は電流及び抵抗の電圧からπ/2遅れている.

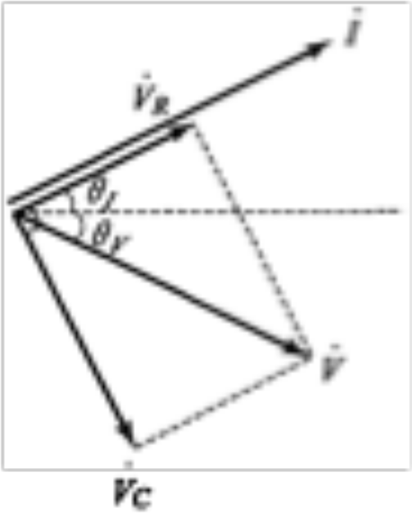




RC直列回路

- ab間の電圧は
- $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C = R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}$
- ここで，電圧と電流を$\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$と表すとき，$\dot{Z}$をインピーダンスという．
- RC直列回路のインピーダンスは
- $\dot{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$
- である．



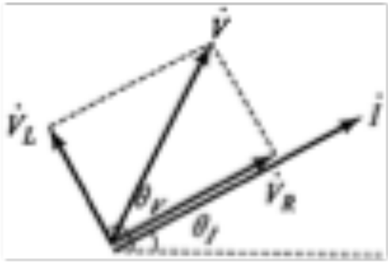


回路の性質と周波数

- コンデンサのインピーダンスは$1/(j\omega C)$
- 電源の周波数が低ければ低いほどインピーダンスが高い．
  - **定常状態では，コンデンサは直流を流さない（つまり開放と見なせる）．** このとき，コンデンサのインピーダンスが無限大となるため．
  - CR直列回路では，**定常状態のとき電流は流れない．**
- 電源の周波数が高ければ高いほどインピーダンスは低い．
  - コンデンサは，電源の周波数が高いほど電流を通しやすい．

RL直列回路

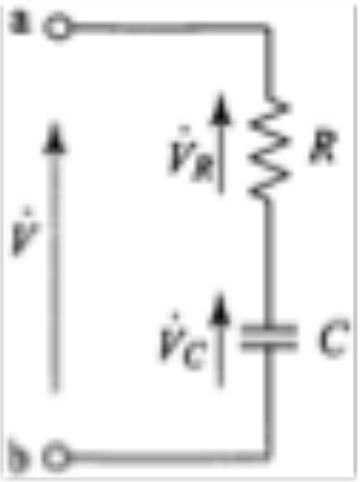
- 図のようにに抵抗とインダクタを直列につなぐ.
- 直列なので，各素子を流れる電流は等しく，各素子に加わる電圧の総和がab間の電圧となる.
- 各素子に加わる電圧は,
- $\dot{V}_R = R\dot{I}, \dot{V}_L = \frac{1}{j\omega L}\dot{I}$

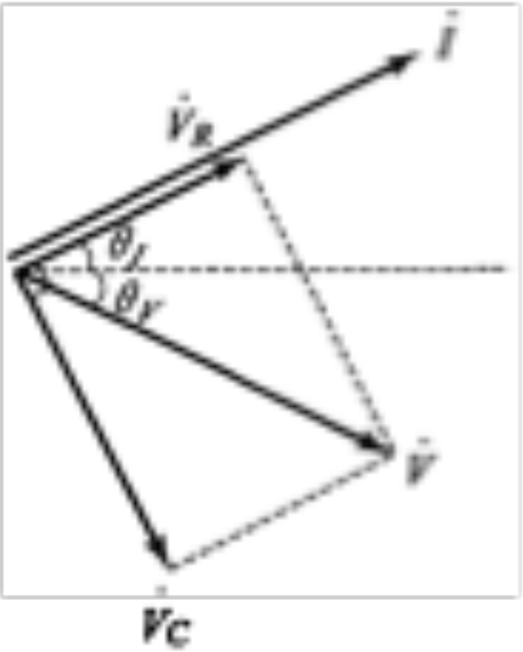


- である．このことから，抵抗の電圧は電流と同位相であるが，インダクタの電圧は電流及び抵抗の電圧からπ/2進んでいる.

RL直列回路

- ab間の電圧は
- $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = (R + j\omega L)\dot{I}$
- RL直列回路のインピーダンスは
- $\dot{Z} = R + j\omega L$
- である.





インダクタ（コイル）

- インダクタのインピーダンスは$j\omega L$
- 電源の周波数が低ければ低いほど小さい．
  - **直流回路で，かつ定常状態のとき，インダクタは単なる導線と見なせる（短絡していると見なせる）．** このとき，インダクタのインピーダンスが0となるため．
- 電源の周波数が高ければ高いほどインピーダンスは高い．
  - 周波数が高い電流ほど通しにくい．

直流回路（定常状態）におけるコンデンサとインダクタ

■ 直流回路（定常状態）におけるコンデンサとインダクタ

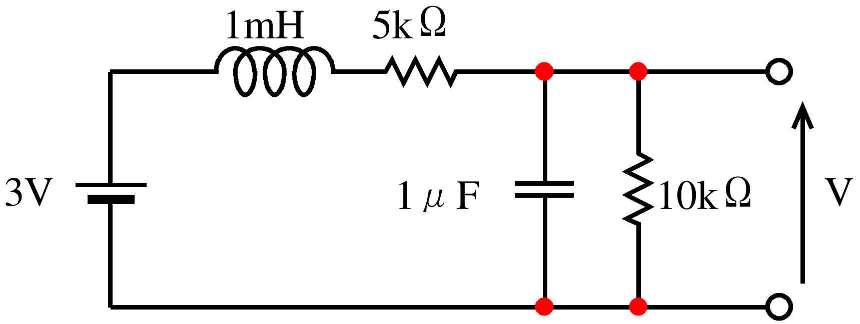
- **コンデンサは開放（切断，電流を流さない状態）**
  - コンデンサは限界まで電荷を貯めると電流が流れなくなる．
  - コンデンサに電荷が限界まで溜まった状態（定常状態）では，コンデンサは開放（切断，電流を流さない状態）となる．

- **インダクタ（コイル）は短絡**
  - コイルは電位変化が生じなければ（定常状態では），誘導起電力も発生しないため，短絡（抵抗0の状態，単なる導線）となる．

問題解説

【AM22】図の電圧 V の値[V]はどれか。

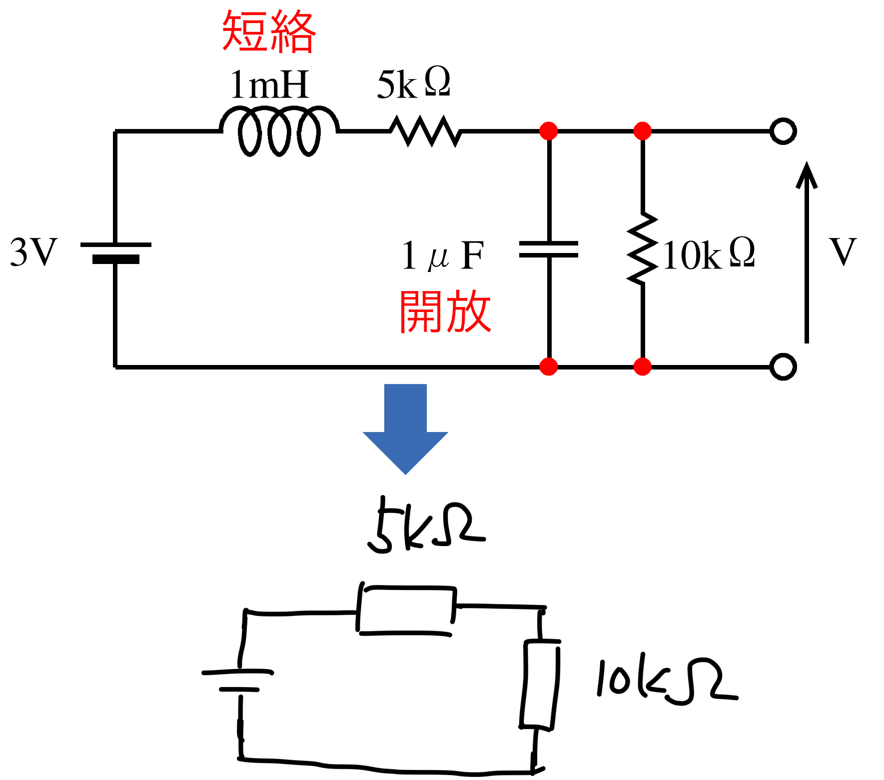
(1) 0
(2) 1
(3) 1.5
(4) 2
(5) 3



問題解説

【AM22】図の電圧 V の値［V］はどれか。

（1） 0
（2） 1
（3） 1.5
（4） 2
（5） 3



直流の場合，定常状態ではインダクタは抵抗0となり短絡，コンデンサは抵抗無限大となり開放と見なせる．つまり，2つの抵抗の直列回路となり，Vは10kΩの抵抗に加わる電圧である．よって，次の式が成り立つ．

$V = 3 * 10 /(10+5) = 2$