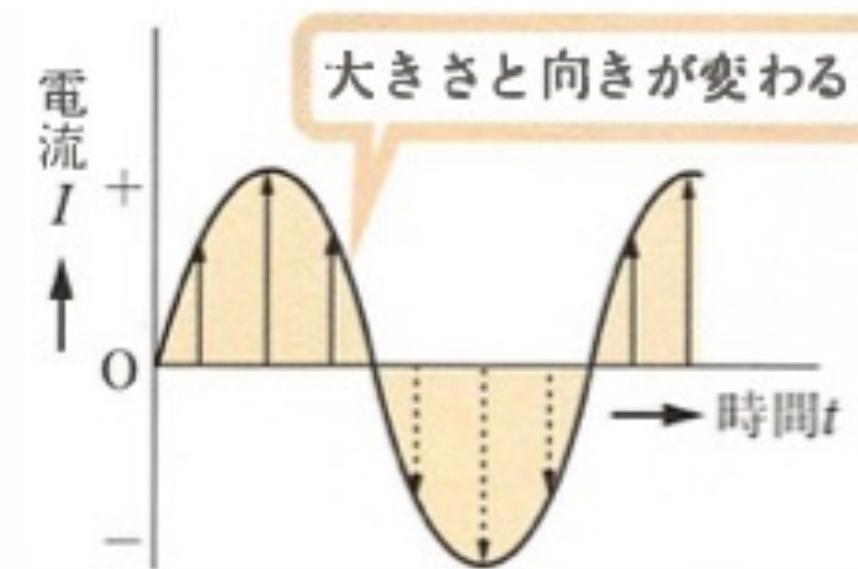
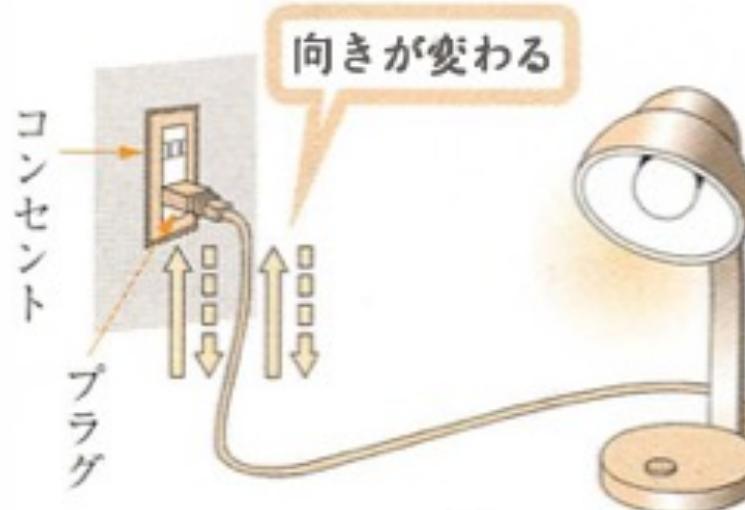


# 電気工学2 第3回

藤田 一寿

## ■ 交流

- 交流では、電圧や電流の大きさと向きが時間の経過とともに変化する。



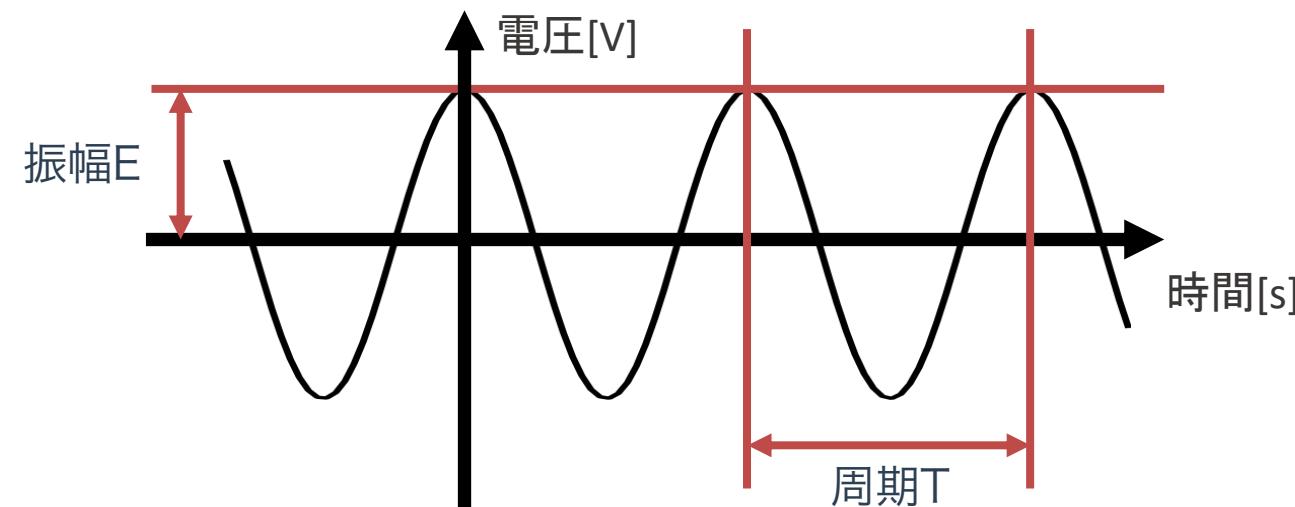
## ■ 正弦波の式とパラメタ

- 正弦波

$$e = E \sin 2\pi ft$$

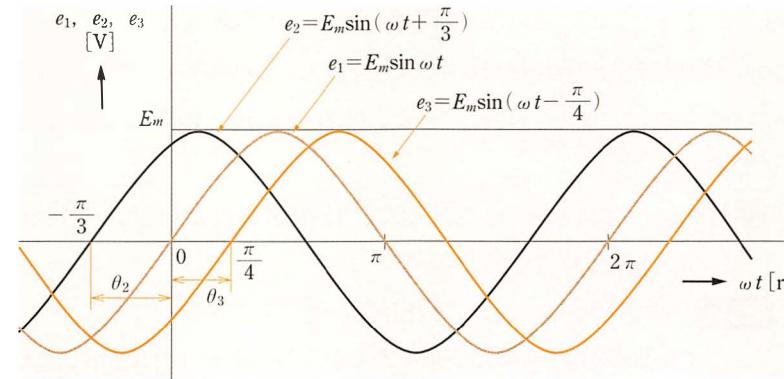
- 波を表すための指標

- 周期  $T$  [s] 山から山までの時間
- 周波数  $f$  [Hz]  $f=1/T$  1秒間に何個山があるか
- 振幅  $E$



## ■ 位相と位相差

$$e_1 = E_m \sin \omega t \quad e_2 = E_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) \quad e_3 = E_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

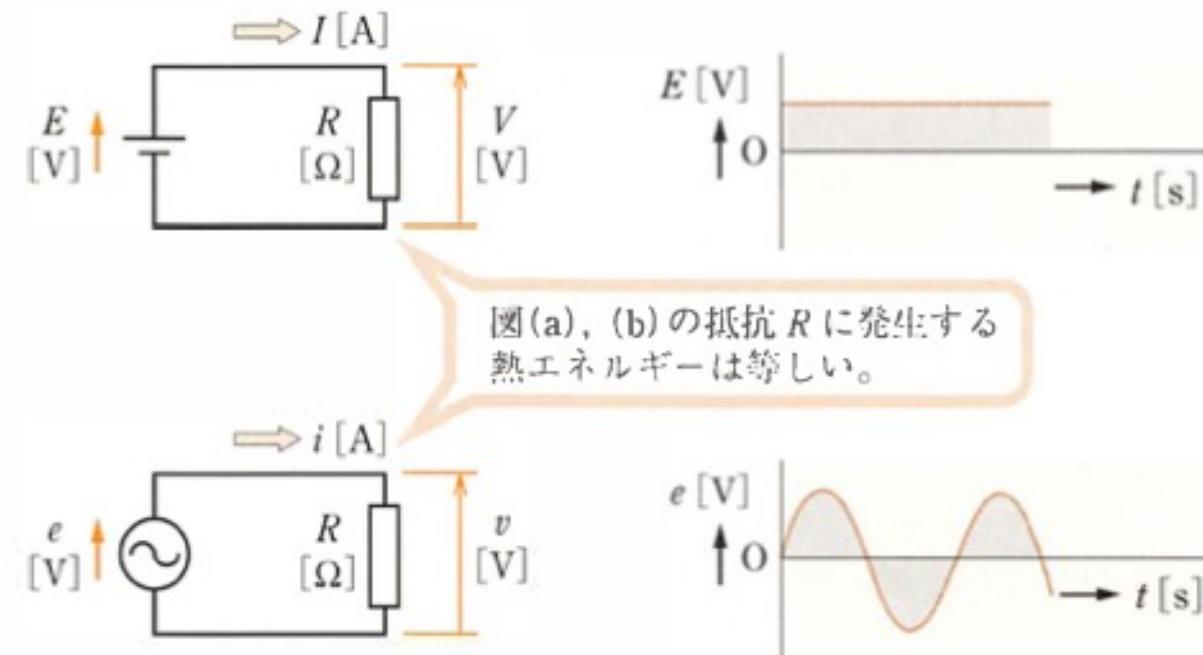


- $\sin$ 内の $\omega t$ ,  $\omega t + \pi/3$ ,  $\omega t - \pi/4$ を位相と呼ぶ。
- $e_1$ を基準とした時,  $+\pi/3$ ,  $-\pi/4$ を位相差と呼ぶ。
- $e_2$ は $e_1$ より位相が $\pi/3$ 進んでいる。
- $e_3$ は $e_1$ より位相が $-\pi/4$ 遅れている。

実効値

## ■ 実効値

- 直流起電力  $E$  と抵抗  $R$  を繋いだときに発生する熱エネルギーと交流起電力  $e$  と抵抗  $R$  を繋いだときに発生する熱エネルギーが等しいとき、 $E$  を交流起電力  $e$  の実効値と言う。



## ■ 正弦波交流の実効値の計算

- 抵抗Rに $v(t)=V\sin(\omega t)$ の電圧を加えたときの電力は

$$\bullet P(t) = i(t)v(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{V^2\sin^2(\omega t)}{R}$$

- 1周期の平均電力は

$$\bullet \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V^2\sin^2(\omega t)}{R} dt = \frac{V^2}{TR} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt = \frac{V^2}{2TR} \left[ t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T$$
$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\bullet = \frac{V^2}{2TR} \left[ T - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega T + \frac{1}{2\omega} \sin 0 \right] = \frac{V^2}{2TR} \times T = \frac{V^2}{2R} = \frac{V}{\sqrt{2R}} \frac{V}{\sqrt{2}} = I_e V_e$$

$$\omega T = 2\pi$$

- よって、正弦波交流の実効値は振幅の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

# ■ 実効値（資格試験・国家試験のために覚える）

- 交流

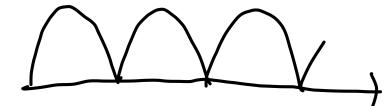
- $\frac{V}{\sqrt{2}}$

- 全波整流（計算で2乗するため、交流と同じ値となる）

- $\frac{V}{\sqrt{2}}$

- 半波整流

- $\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{V^2 \sin^2(\omega t)}{R} dt = \frac{V^2}{TR} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt$



- $= \frac{V^2}{2TR} \left[ t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^{T/2} = \frac{V^2}{2TR} \left[ \frac{T}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin \omega T + \frac{1}{2\omega} \sin 0 \right]$

- $= \frac{V^2}{4TR} \times T = \frac{V^2}{4R} = \frac{V}{2R} \frac{V}{2} = I_e V_e$



- よって実効値は  $V/2$

# 問題

## ■ 問題解説

- 時刻t[s]における交流電流の瞬時値が以下の式で与えられるとき、周期[s]はいくらか。（第39回ME2種）
  - $i(t) = 20 \sin(40\pi t - \pi/4)$
1. 0.025
  2. 0.05
  3. 0.5
  4. 20
  5. 40

## ■ 問題解説

- 時刻t[s]における交流電流の瞬時値が以下の式で与えられるとき、周期[s]はいくらか。（第39回ME2種）
  - $i(t) = 20 \sin(40\pi t - \pi/4)$
- 0.025
  - 0.05
  - 0.5
  - 20
  - 40

波の式は次のとおりである。

$$I(t) = A \sin(2\pi f t - \phi)$$

よって周波数は

$$f = 20\text{Hz}$$

周期は

$$T = \frac{1}{20} = 0.05\text{s}$$

## ■ 問題解説

- $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(40\pi t - \frac{\pi}{6})$ [mA]で表される交流について誤っているのはどれか. (第34回ME2種)
  1. 振幅 : 14.1mA
  2. 周波数 : 40Hz
  3. 位相遅れ : 30°
  4. 角周波数 : 126rad/s
  5. 実効値 : 10mA

## 問題解説

- $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(40\pi t - \frac{\pi}{6})$  [mA] で表される交流について誤っているのはどれか. (第34回ME2種)

1. 振幅 : 14.1mA
2. 周波数 : 40Hz
3. 位相遅れ : 30°
4. 角周波数 : 126rad/s
5. 実効値 : 10mA

波の式は次のとおりである.

$$I(t) = A \sin(2\pi f t - \phi)$$

よって周波数は

$$f = 20\text{Hz}$$

周期は

$$T = \frac{1}{20} = 0.05\text{s}$$

位相は

$$\phi = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ$$

与式から振幅は

$$A = 10 \times \sqrt{2} \cong 14.1\text{mA}$$

与式から角周波数は

$$\omega = 40\pi \cong 126\text{rad/s}$$

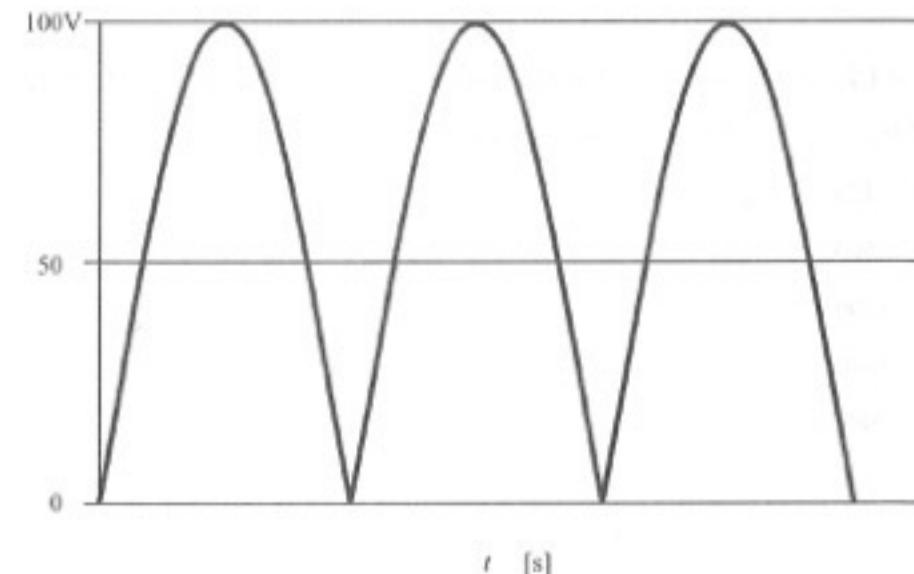
実効値は

$$V = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10\text{mA}$$

## ■ 問題解説

- 図は50Hz正弦波交流の全波整流波形である。実効値は何Vか。（第34回ME2種）

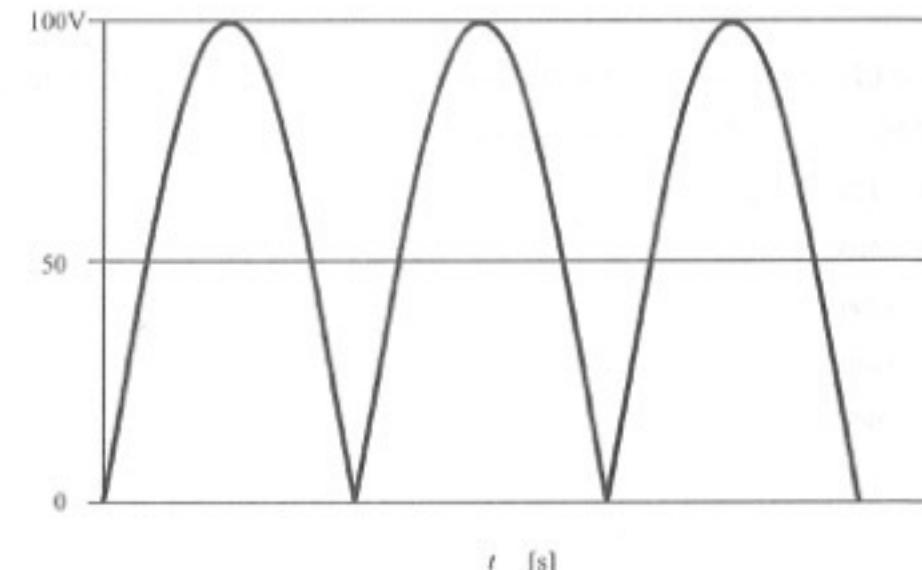
1. 140
2. 100
3. 71
4. 50
5. 32



## ■ 問題解説

- 図は50Hz正弦波交流の全波整流波形である。実効値は何Vか。（第34回ME2種）

1. 140
2. 100
3. 71
4. 50
5. 32



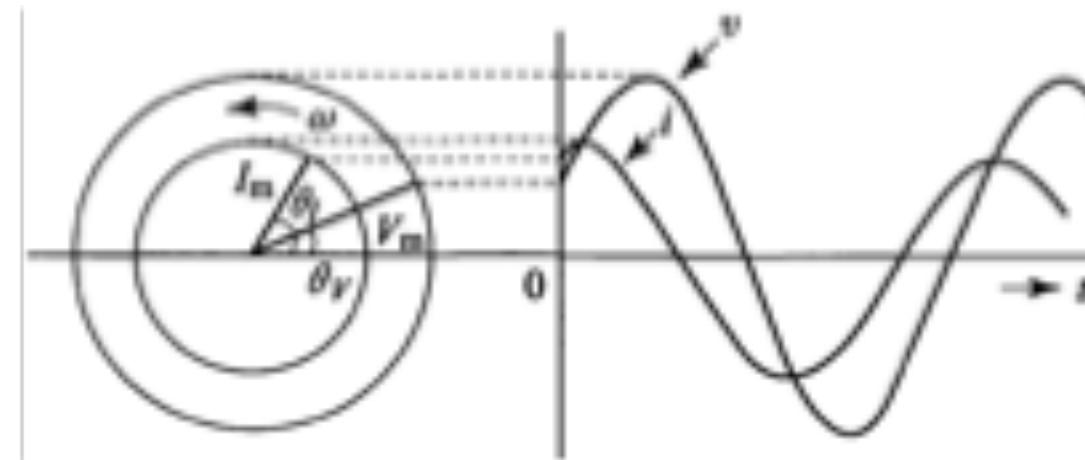
全波整流交流は正弦波交流と同じ実効値である。  
よって実効値は

$$V = \frac{100}{\sqrt{2}} \cong 70.7V$$

# フェーザ図と複素数表示

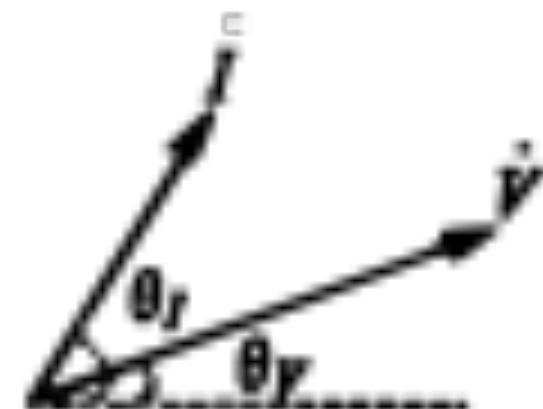
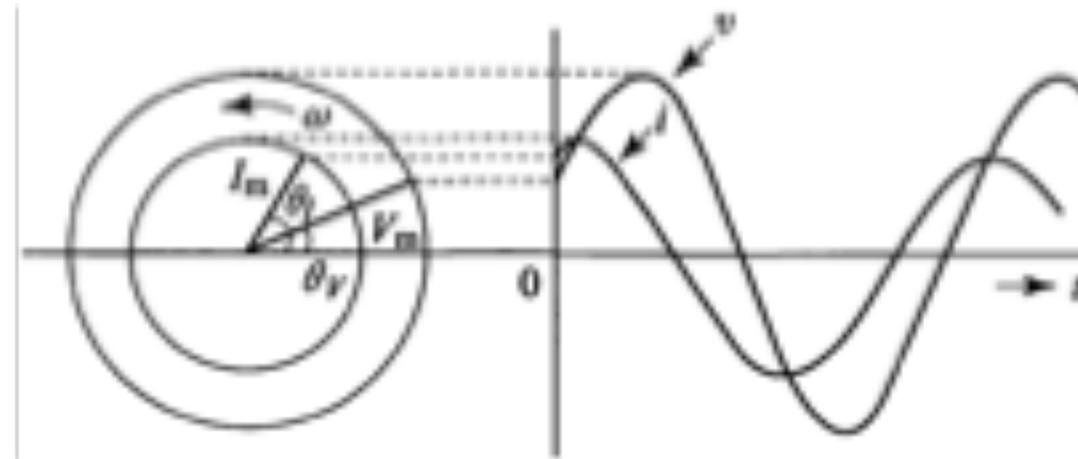
## ■ 正弦波

- 正弦波交流の電圧（瞬時値）を次の式で表す。
- $v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$
- 電圧と電流の値は時間変化するが、その特性は最大値 $V_m$ ,  $I_m$ , 角周波数 $\omega$ , 位相 $\theta_V$ ,  $\theta_I$ の3つのパラメタで表現できる。



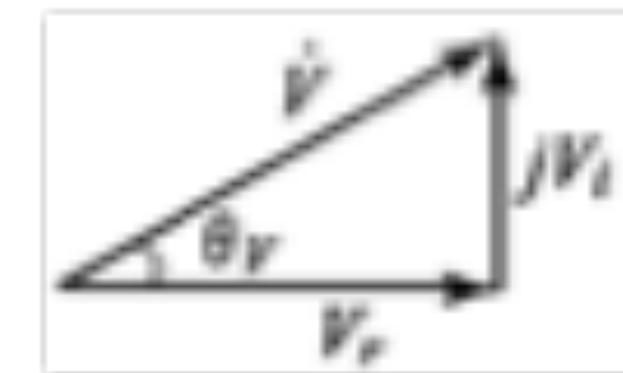
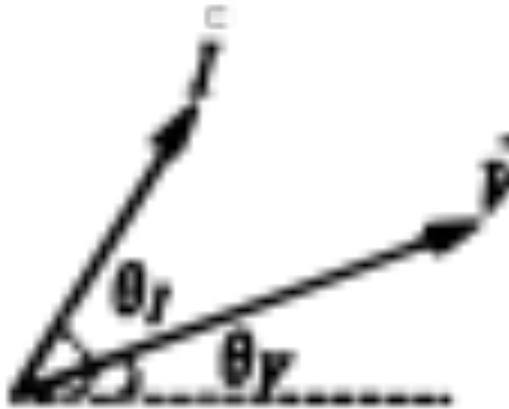
## ■ フェーザ図

- 下図のように、電圧や電流を、長さを実効値、角度を位相とした矢印（ベクトル）で表したものフェーザ図と呼ぶ。



## ■ 複素数表示

- ・フェーザ図を複素平面として捉えれば、電圧や電流のベクトルは複素数で表現できる。
- ・これを複素数表示と呼ぶ。
- ・電気・電子回路では虚数単位をjで表す。



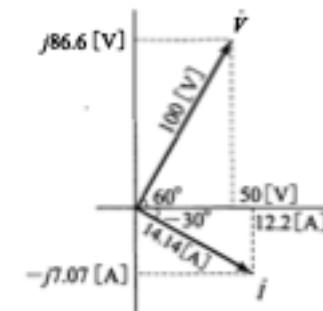
$$\dot{V} = V_r + jV_i$$

## ■ 例

- ・次の式の複素数表示を求めよ。さらにフェーザ図をかけ。
- ・ $v = 141.4 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$
- ・ $i = 20 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$

## ■ 例

- 次の式の複素数表示を求めよ。さらにフェーザ図をかけ。
- $v = 100\sqrt{2} \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$
- $i = 20 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$
- それぞれの複素数表示は次のようになる。
- $\dot{V} = 50 + 50\sqrt{3}j$
- $\dot{I} = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}j$



## ■ 問題

---

・次の複素数で表された電圧の実効値と位相を求めよ。

1.  $\dot{V} = 1 + \sqrt{3}j$

2.  $\dot{V} = -1 + j$

・次の複素数で表された電圧の実効値を求めよ。

1.  $\dot{V} = 3 + 4j$

2.  $\dot{V} = 10 - 5j$

## ■ 問題

・次の複素数で表された電圧の実効値と位相を求めよ。

1.  $\dot{V} = 1 + \sqrt{3}j$  実効値は2, 位相は  $\pi / 3$

2.  $\dot{V} = -1 + j$  実効値は  $\sqrt{2}$ , 位相は  $3\pi / 4$

・次の複素数で表された電圧の実効値を求めよ。

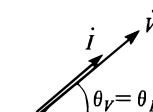
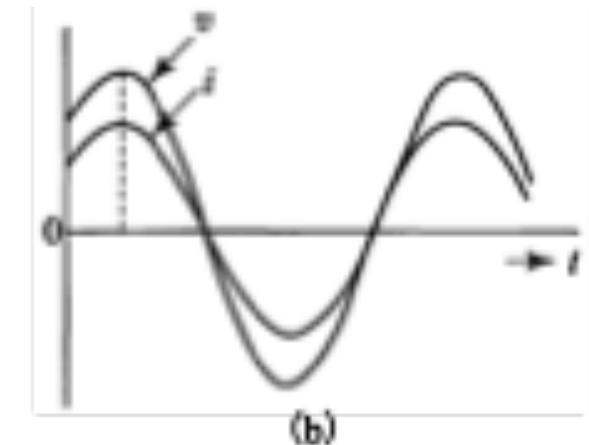
1.  $\dot{V} = 3 + 4j$  実効値は5

2.  $\dot{V} = 10 - 5j$  実効値は  $\sqrt{100 + 25} = \sqrt{125}$

# 交流と抵抗

## ■ 交流と抵抗

- オームの法則は
- $v = Ri$
- 電流を  $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$  とすると、電圧は次のようになる。
- $v = RI_m \sin(\omega t + \theta_I) = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- したがって,
- $V_m = RI_m$
- $\theta_V = \theta_I$
- である。よって複素数表示は
- $\dot{V} = R\dot{I}$
- 抵抗では電流と電圧は同位相である。



コンデンサ

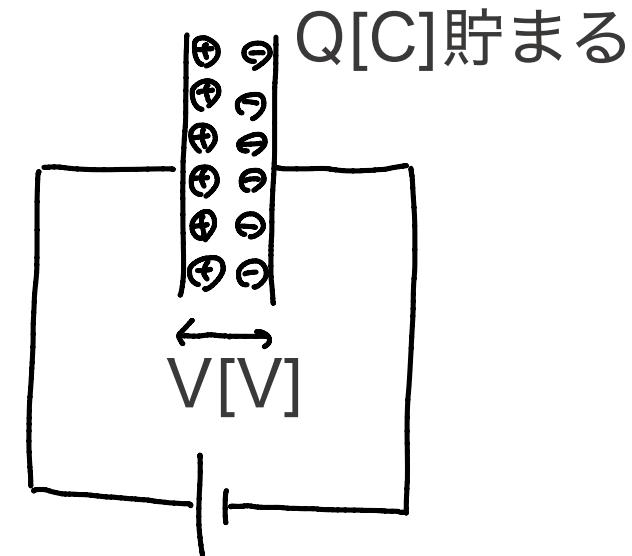
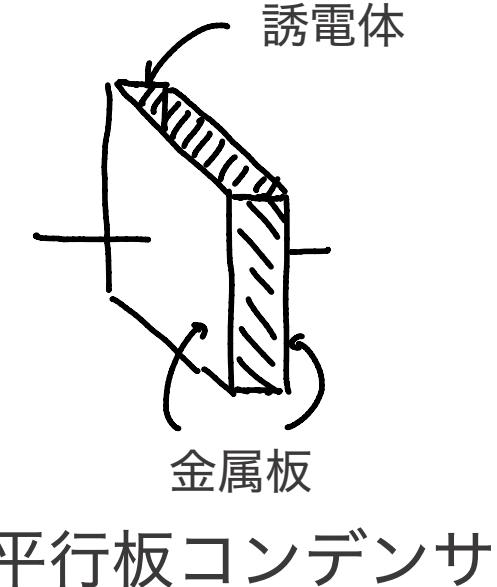
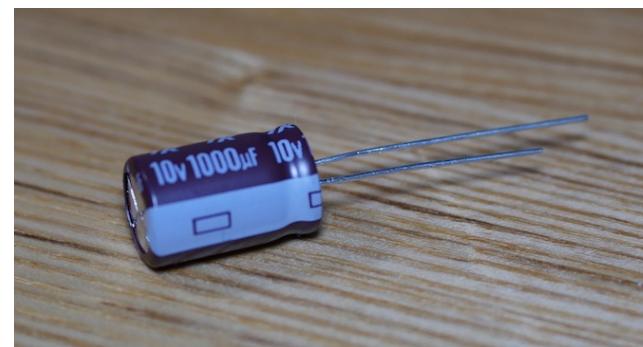
## ■ コンデンサ（キャパシタ）

- ・電荷を貯める機能を持つ。
- ・電荷の量Qの単位は[C]（クーロン）
- ・コンデンサに電圧Vを加えたときに、コンデンサに貯まる電荷Q[C]は、次の式で求まる。

$$Q = CV$$

- ・Cはコンデンサの静電容量と呼ばれる量で、単位は[F]（ファラッド）である。

詳しい話は電磁気の講義のときに



## ■ 電荷, 静電容量, 電圧, 電流の関係

- コンデンサにたまつた電荷量  $Q$ [C], コンデンサの静電容量  $C$ [F], コンデンサにかかる電圧  $V$ [V] は次の関係がある。

$$Q = CV$$

- 電流の定義式から、コンデンサを流れる電流は次のようになる。

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} \\ &= \frac{dCV}{dt} \\ &= C \frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

## ■ コンデンサの電圧と電流

- コンデンサに加える電圧 $v$ を次のとおりとする。

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$$

- コンデンサに流れる電流 $i$ は電流の定義から

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCv}{dt} = C \frac{d}{dt} V_m \sin(\omega t + \theta_V) = \omega C V_m \cos(\omega t + \theta_V)$$

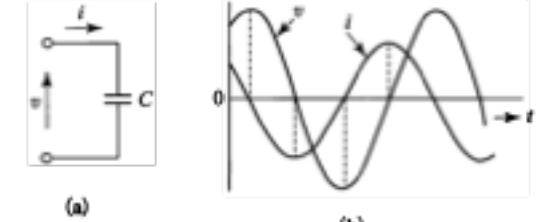
$$= \omega C V_m \sin(\omega t + \theta_V + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$$

- よって、次のことが成り立つ。

$$I_m = \omega C V_m$$

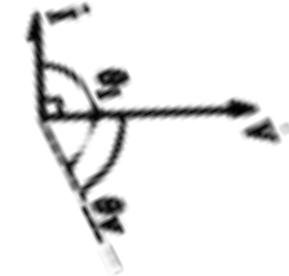
$$\theta_I = \theta_V + \frac{\pi}{2}$$

- つまり、電流は電圧よりも位相が90°進んでいる。



## ■ コンデンサの電圧と電流の複素数表示

- 電流と電圧の実効値を  $i$ ,  $\dot{V}$  とする。電流は電圧より位相が  $\pi/2$  進んでいるので、電流と電圧の関係を複素数表示で表すと
- $i = j\omega C \dot{V}$
- $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C} i$



インダクタ（コイル）

## ■ インダクタ（コイル）

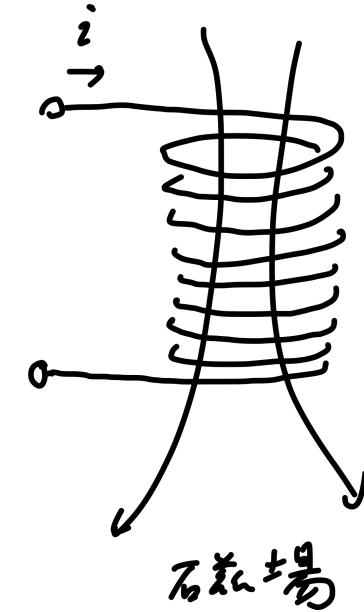


図記号

- ・銅線を巻いたもの。
- ・電流が変化すると電圧を発生させる。
  - ・誘導起電力 $v$ は次の式で書かれる。

$$v = L \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

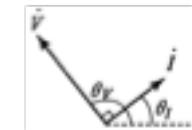
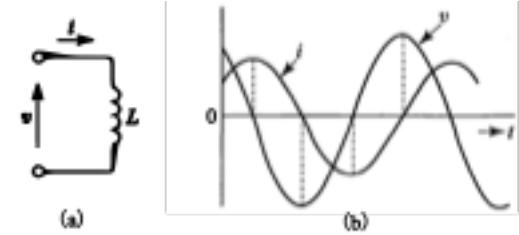
- ・ $L$ を自己インダクタンスもしくはインダクタンスという。
- ・単位はH（ヘンリー）
- ・誘導起電力は電流により発生する磁場を打ち消す方向に発生する。
  - ・電流変化に対しブレーキとして働くので、変化に対しインピーダンスが高くなる。



詳しい話は電磁気の講義のときに

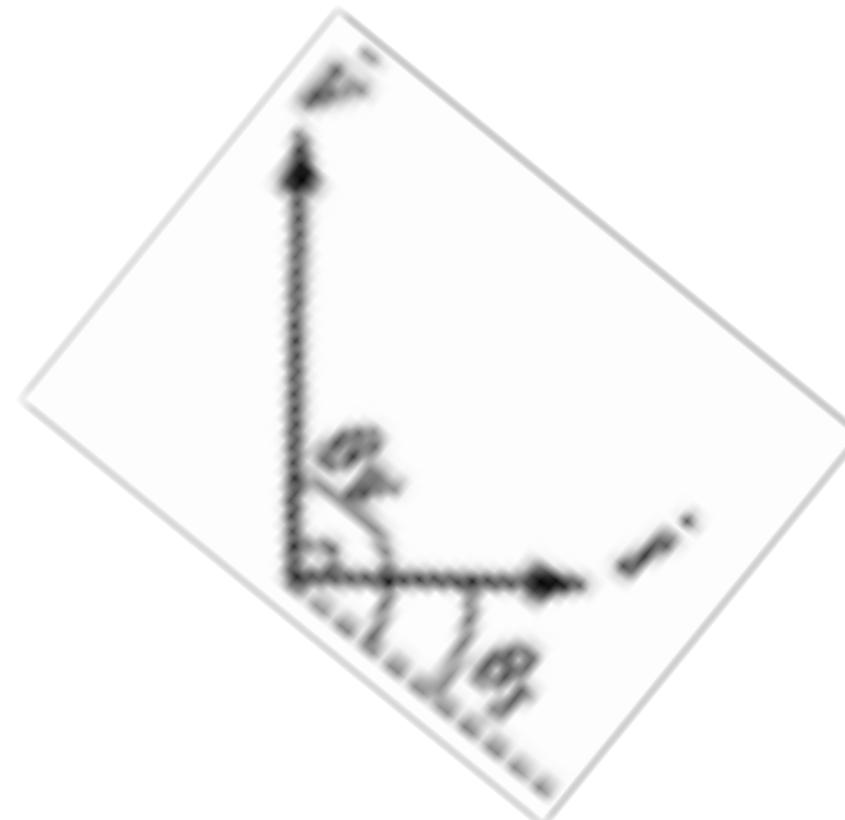
## ■ インダクタの電圧と電流

- ・インダクタに加える電流*i*を次のとおりとする.
- ・ $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$
- ・インダクタに流れる電圧*v*は誘導起電力の式から
- ・ $v = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} I_m \sin(\omega t + \theta_I) = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta_I)$
- ・ $= \omega L I_m \sin(\omega t + \theta_I + \frac{\pi}{2}) = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- ・よって、次のことが成り立つ.
- ・ $V_m = \omega L I_m$
- ・ $\theta_V = \theta_I + \frac{\pi}{2}$
- ・つまり、電圧は電流よりも位相が90° 進んでいる.



## ■ インダクタの電圧と電流の複素数表示

- 電流と電圧の実効値を  $i$ ,  $\dot{V}$  とする。電圧は電流より位相が  $\pi/2$  進んでいるので、電流と電圧の関係を複素数表示で表すと
- $\dot{V} = j\omega L i$



## ■ インピーダンス, レジスタンス, リアクタンス

- どのような回路であれ、電圧と電流の関係を次のように表すとする。
- $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$
- ここで  $\dot{Z}$  をインピーダンスという。
- 抵抗の場合
  - $\dot{V} = R\dot{I}$
  - と書け、Rをレジスタンスという。
- また、コンデンサの場合,
  - $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C} \dot{C}$
  - と書け、 $\frac{1}{\omega C}$  を容量性リアクタンスという
- インダクタの場合
  - $\dot{V} = j\omega L\dot{C}$
  - と書け、 $\omega L$  を誘導性リアクタンスという。
- それぞれの単位はΩである。

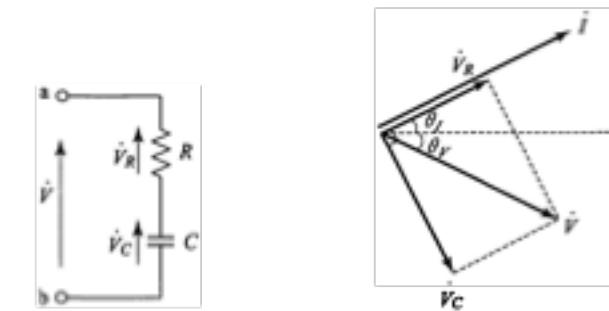
## ■ 問題解説

- 最大値10Vの正弦波交流電圧を誘導リアクタンス $2.0\Omega$ のインダクタに加えた。交流電圧の瞬時値が-10Vのときにインダクタを流れる交流の瞬時値[mA]として正しいのはどれか。(第41回ME2種)
  1. -5.0
  2. -3.5
  3. 0.0
  4. 3.5
  5. 5.0

# 直列回路

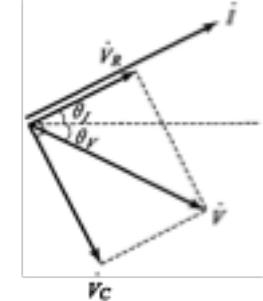
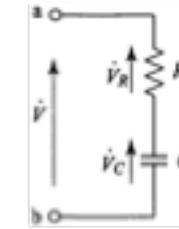
## ■ RC直列回路

- 図のように抵抗とコンデンサを直列につなぐ。
- 直列なので、各素子を流れる電流は等しく、各素子に加わる電圧の総和がab間の電圧となる。
- 各素子に加わる電圧は、
- $\dot{V}_R = R\dot{I}, \dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$
- である。このことから、抵抗の電圧は電流と同位相であるが、コンデンサの電圧は電流及び抵抗の電圧から $\pi/2$ 遅れている。



## ■ RC直列回路

- ab間の電圧は
- $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C = R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}$
- ここで、電圧と電流を  $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$  と表すとき、 $\dot{Z}$  をインピーダンスという。
- RC直列回路のインピーダンスは
- $\dot{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$
- である。

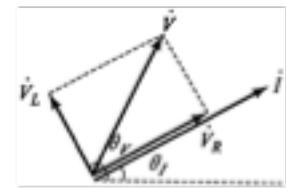
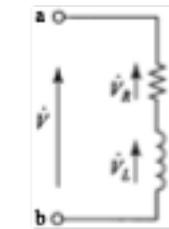


## ■ コンデンサのインピーダンス

- ・インピーダンスは $1/(j\omega C)$
- ・周波数が低ければ低いほどインピーダンスが高い。
  - ・直流回路で、かつ定常状態では、コンデンサは直流を流さない（つまり開放と見なせる）。このとき、コンデンサのインピーダンスが無限大となるため。
- ・周波数が高ければ高いほどインピーダンスは低い。
  - ・電流の周波数が高いほど電流を通しやすい。

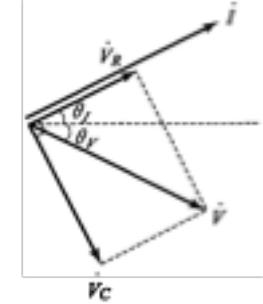
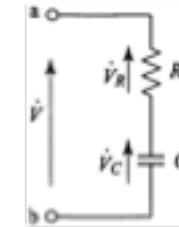
## ■ RL直列回路

- 図のように抵抗とインダクタを直列につなぐ。
- 直列なので、各素子を流れる電流は等しく、各素子に加わる電圧の総和がab間の電圧となる。
- 各素子に加わる電圧は、
- $\dot{V}_R = R\dot{I}, \dot{V}_L = \frac{1}{j\omega L}\dot{I}$
- である。このことから、抵抗の電圧は電流と同位相であるが、インダクタの電圧は電流及び抵抗の電圧から $\pi/2$ 進んでいる。



## ■ RL直列回路

- ab間の電圧は
- $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = (R + j\omega L)\dot{I}$
- RL直列回路のインピーダンスは
- $\dot{Z} = R + j\omega L$
- である。



## ■ インダクタ（コイル）

- ・インダクタのインピーダンスは $j\omega L$
- ・電流の周波数が低ければ低いほど小さい。
  - ・直流回路で、かつ定常状態のとき、インダクタは単なる導線と見なせる（短絡していると見なせる）。このとき、インダクタのインピーダンスが0となるため。
- ・電流の周波数が高ければ高いほどインピーダンスは高い。
  - ・周波数が高い電流ほど通しにくい。

# 直流回路（定常状態）におけるコ ンデンサとインダクタ

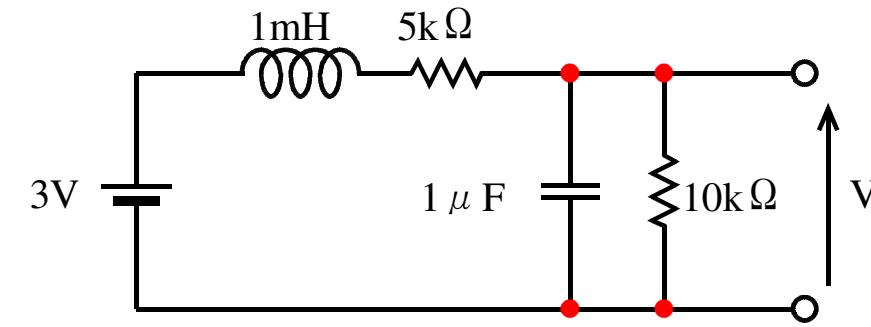
## ■ 直流回路（定常状態）におけるコンデンサとインダクタ

- ・コンデンサは開放（切斷，電流を流さない状態）
  - ・コンデンサは限界まで電荷を貯めると電流が流れなくなる。
  - ・コンデンサに電荷が限界まで溜まった状態（定常状態）では、コンデンサは開放（切斷，電流を流さない状態）となる。
- ・インダクタ（コイル）は短絡
  - ・コイルは電位変化が生じなければ（定常状態では），誘導起電力も発生しないため、短絡（抵抗0の状態，単なる導線）となる。

## 問題解説

【AM22】 図の電圧 V の値[V]はどれか。

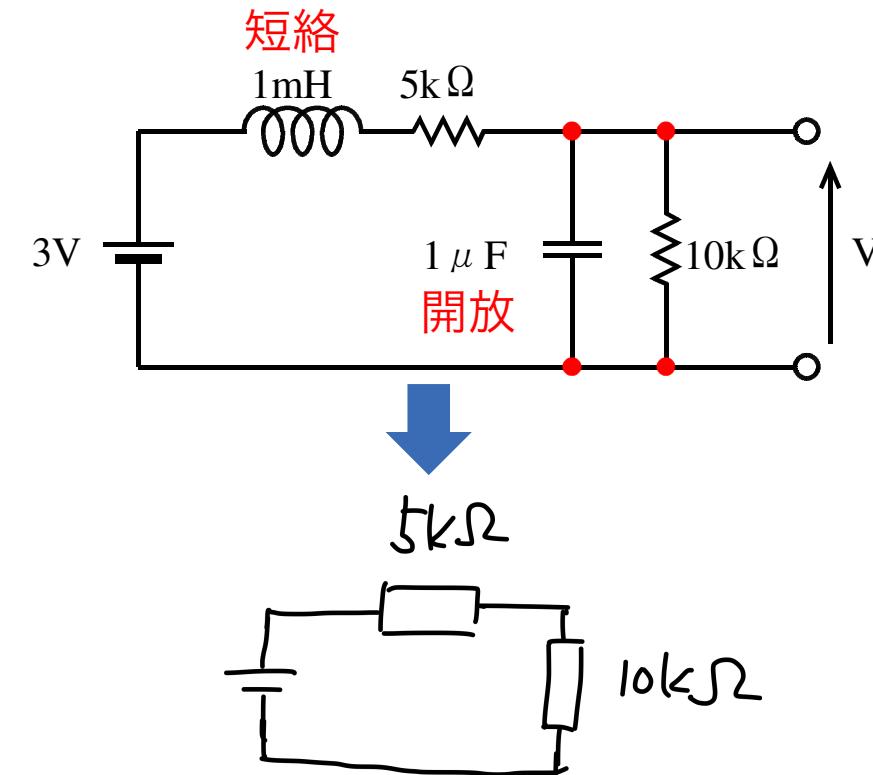
- (1) 0
- (2) 1
- (3) 1.5
- (4) 2
- (5) 3



## 問題解説

【AM22】 図の電圧 V の値[V]はどれか。

- (1) 0
- (2) 1
- (3) 1.5
- (4) 2
- (5) 3



直流の場合、定常状態ではインダクタは抵抗0となり短絡、コンデンサは抵抗無限大となり開放と見なせる。つまり、2つの抵抗の直列回路となり、Vは10kΩの抵抗に加わる電圧である。よって、次の式が成り立つ。

$$V = 3 * 10 / (10+5) = 2$$