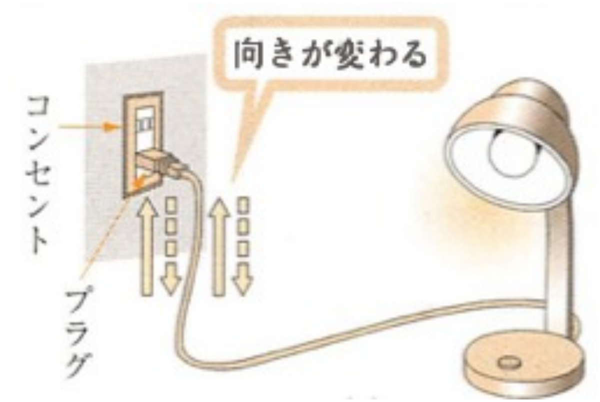
電気工学2 第3回
交流回路

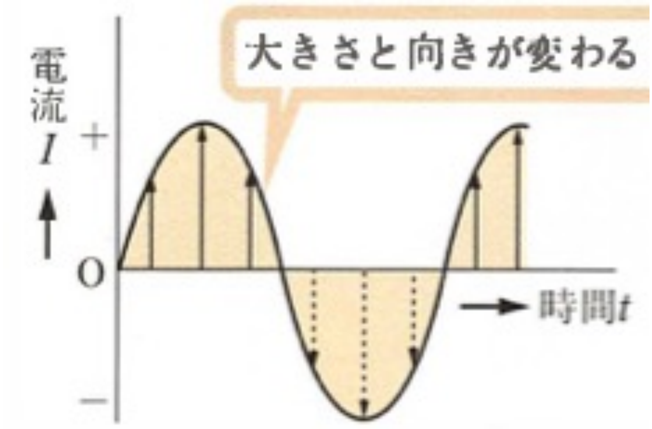
公立小松大学

藤田 一寿

交流

- 交流では，電圧や電流の大きさと向きが時間の経過とともに変化する．

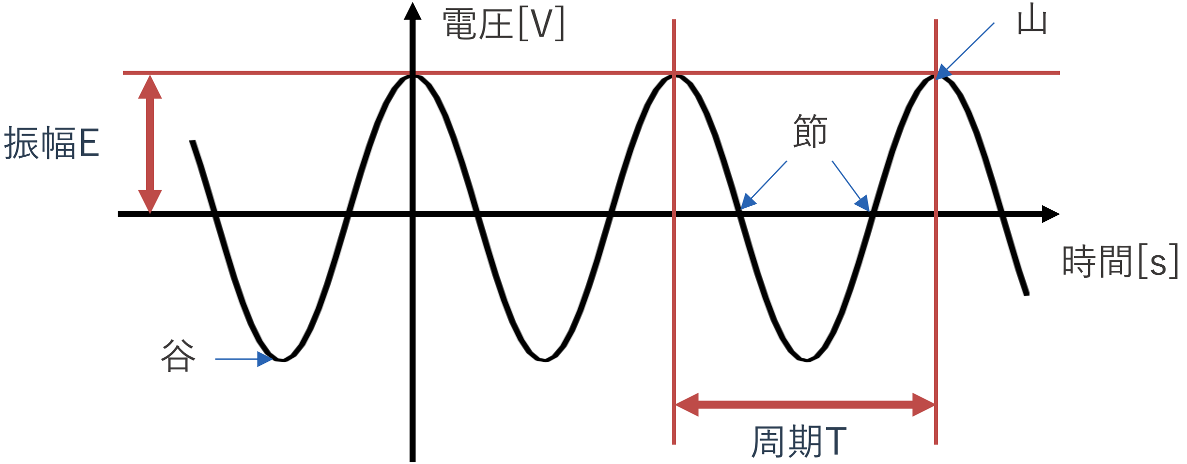




(実教出版 電気基礎1)

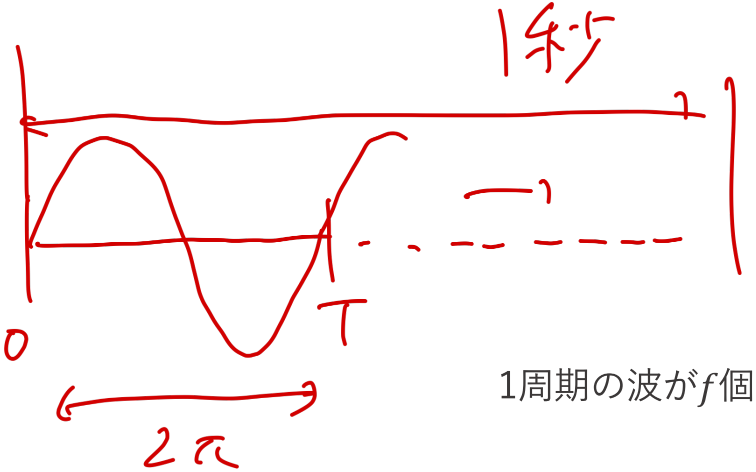
正弦波の式とパラメタ

- 正弦波
  - $e = E \sin 2\pi f t$
- 波を表すための指標
  - 周期 T [s]：山から山（谷から谷）までの時間
  - 周波数 f [Hz]　$f = 1/T$：　1秒間に何個山があるか.
  - 振幅 E：山の高さ



周波数と周期

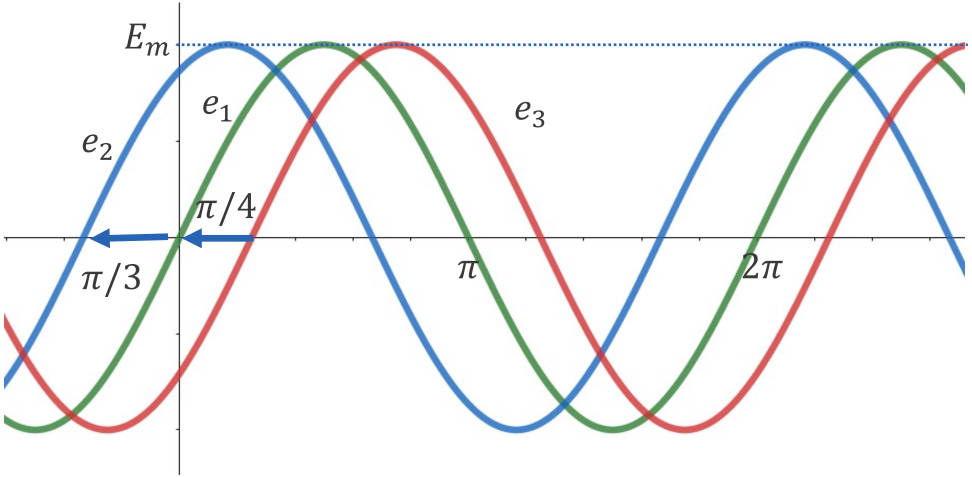
- 周波数fは1周期の波が1秒あたりf個あることを意味する．
- 1周期の波が1秒あたりf個あるのだから，1個あたりの時間は$1/f$である．これが周期Tである．
- $T = 1/f$
- 1周期分の角度は，2π[rad]だから1秒あたり$2\pi f$[rad]進む．これが角周波数（角速度）ωである．
- $\omega = 2\pi f$



1周期の波がf個ある．

位相と位相差

$$e_1 = E_m \sin \omega t \qquad e_2 = E_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad e_3 = E_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

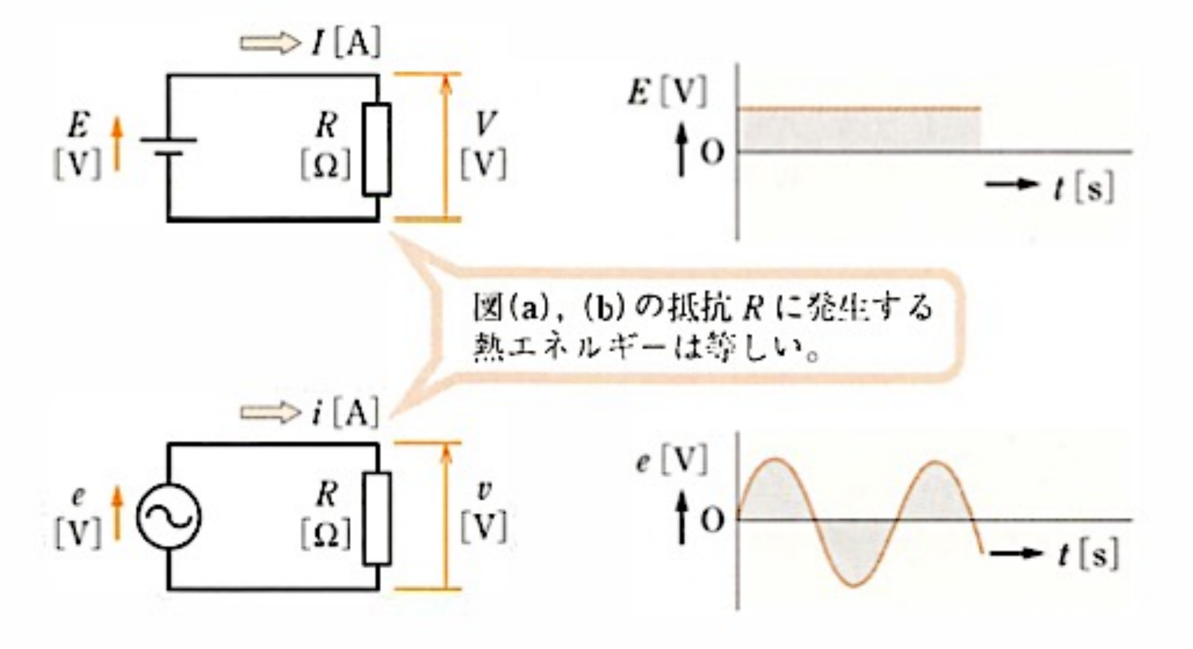


- sin内のωt，$\omega t + \pi/3$，$\omega t - \pi/4$を位相と呼ぶ．
- e_1を基準とした時，$+\pi/3$，$-\pi/4$を位相差と呼ぶ．
- e_2はe_1より位相が$\pi/3$進んでいる．
- e_3はe_1より位相が$\pi/4$遅れている．

実効値

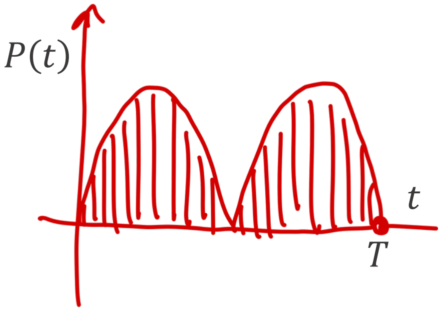
■ 実効値

- 直流起電力Eと抵抗Rを繋いだときに発生する熱エネルギーと交流起電力eと抵抗Rを繋いだときに発生する熱エネルギーが等しいとき，Eを交流起電力eの実効値と言う．



正弦波交流の実効値の計算

- 抵抗Rに$v(t) = V\sin\omega t$の電圧を加えたときの電力は
- $P(t) = i(t)v(t) = \dfrac{v^2(t)}{R} = \dfrac{V^2\sin^2(\omega t)}{R}$
- 1周期の平均電力は
- $\bar{P} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \dfrac{V^2\sin^2(\omega t)}{R}dt = \dfrac{V}{\sqrt{2}R}\dfrac{V}{\sqrt{2}} = I_eV_e$
- よって，**正弦波交流の実効値は振幅の$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$となる**．



$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

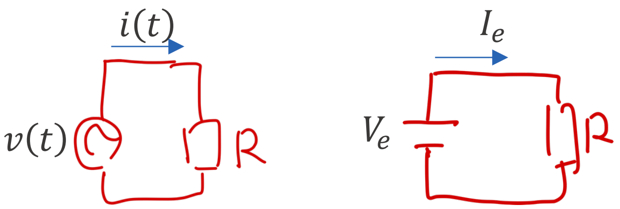
$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V^2\sin^2(\omega t)}{R}dt = \frac{V^2}{TR}\int_0^T \frac{1}{2}(1-\cos(2\omega t))dt$$

$$= \frac{V^2}{2TR}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^T$$

$$= \frac{V^2}{2TR}\left[T - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega T + \frac{1}{2\omega}\sin 0\right] = \frac{V^2}{2TR}\times T = \frac{V^2}{2R} = \frac{V}{\sqrt{2}R}\frac{V}{\sqrt{2}}$$

$$= I_eV_e$$

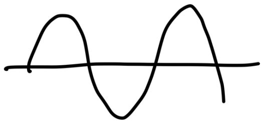
$\omega T = 2\pi$



電力が同じ

■ 実効値（資格試験・国家試験のために覚える）

- 交流
  - $\frac{\text{振幅}V}{\sqrt{2}}$



- 全波整流（計算で2乗するため，交流と同じ値となる）
  - $\frac{\text{振幅}V}{\sqrt{2}}$

- 半波整流
  - $\frac{\text{振幅}V}{2}$

半波整流正弦波の実効値

$$\bar{P}=\frac{1}{T}\int_0^{T/2}\frac{V^2\sin^2(\omega t)}{R}dt=\frac{V^2}{TR}\int_0^{T/2}\frac{1}{2}(1-\cos(2\omega t))dt$$

$$=\frac{V^2}{2TR}\left[t-\frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^{T/2}=\frac{V^2}{2TR}\left[\frac{T}{2}-\frac{1}{2\omega}\sin\omega T+\frac{1}{2\omega}\sin 0\right]$$

$$=\frac{V^2}{4TR}\times T=\frac{V^2}{4R}=\frac{V}{2R}\frac{V}{2}=I_eV_e$$

問題

問題解説

- 時刻t[s]における交流電流の瞬時値が以下の式で与えられるとき，周期[s]はいくらか．（第39回ME2種）
- $i(t) = 20\sin(40\pi t - \pi/4)$

1. 0.025
2. 0.05
3. 0.5
4. 20
5. 40

問題解説

- 時刻t[s]における交流電流の瞬時値が以下の式で与えられるとき，周期[s]はいくらか．（第39回ME2種）
- $i(t) = 20\sin(40\pi t - \pi/4)$

1. 0.025
2. 0.05
3. 0.5
4. 20
5. 40

波の式は次のとおりである．

$$I(t) = A\sin(2\pi f t - \phi)$$

よって周波数は

$f = 20\mathrm{Hz}$

周期は

$$T = \frac{1}{20} = 0.05\mathrm{s}$$

問題解説

- $i(t)=10\sqrt{2}\sin(40\pi t-\frac{\pi}{6})$ [mA]で表される交流について誤っているのはどれか.（第34回ME2種）

1. 振幅：14.1mA
2. 周波数：40Hz
3. 位相遅れ：30°
4. 角周波数：126rad/s
5. 実効値：10mA

問題解説

- $i(t) = 10\sqrt{2}\sin(40\pi t - \frac{\pi}{6})$[mA]で表される交流について誤っているのはどれか．（第34回ME2種）

1.　振幅：14.1mA

$A = 10\times\sqrt{2} \cong 14.1\mathrm{mA}$

2.　**周波数：40Hz**

$\omega = 40\pi = 2\pi f$，$f = 20\mathrm{Hz}$

3.　位相遅れ：30°

$\phi = -\frac{\pi}{6} = -30°$

4.　角周波数：126rad/s

$\omega = 40\pi \cong 126\mathrm{rad/s}$

5.　実効値：10mA

$$V = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10\mathrm{mA}$$

問題

- 正弦波交流 $i_1 = 141\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ [A]，　$i_2 = 282\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ [A]において，i_1とi_2の位相差[rad]について正しいのはどれか．（臨床工学技士国家試験30回）

1. i_1がi_2より$\pi/6$進んでいる．
2. i_1がi_2より$\pi/2$進んでいる．
3. i_1がi_2より$2\pi/3$遅れている．
4. i_1がi_2より$\pi/6$遅れている．
5. i_1がi_2より$\pi/2$遅れている．

問題

- 正弦波交流 $i_1 = 141\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ [A]， $i_2 = 282\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ [A]において，i_1とi_2の位相差[rad]について正しいのはどれか．（臨床工学技士国家試験30回）

1. i_1がi_2より$\pi/6$進んでいる．
2. **i_1がi_2より$\pi/2$進んでいる．**
3. i_1がi_2より$2\pi/3$遅れている．
4. i_1がi_2より$\pi/6$遅れている．
5. i_1がi_2より$\pi/2$遅れている．

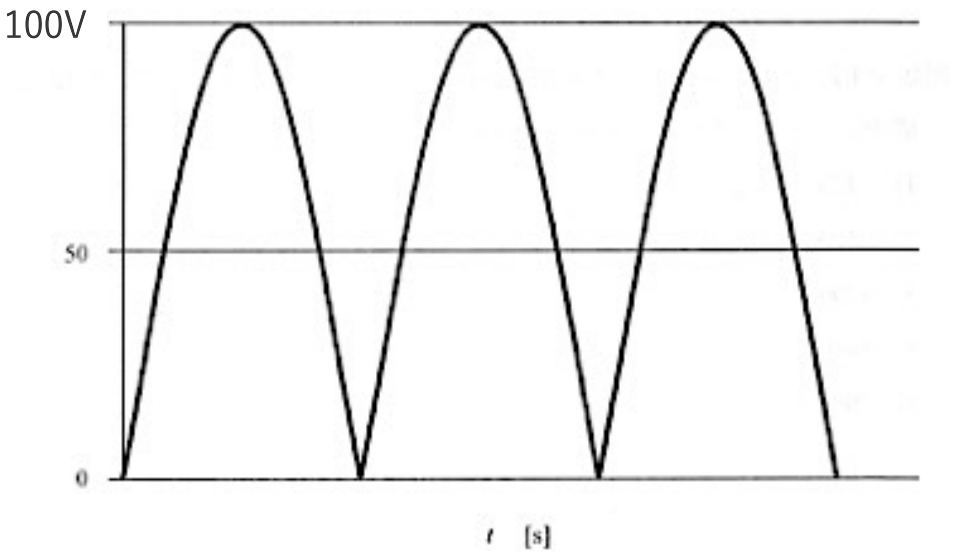
$$\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$$

よってi_1がi_2より$\pi/2$進んでいる．

問題解説

- 図は50Hz正弦波交流の全波整流波形である．実効値は何Vか．（第34回ME2種）

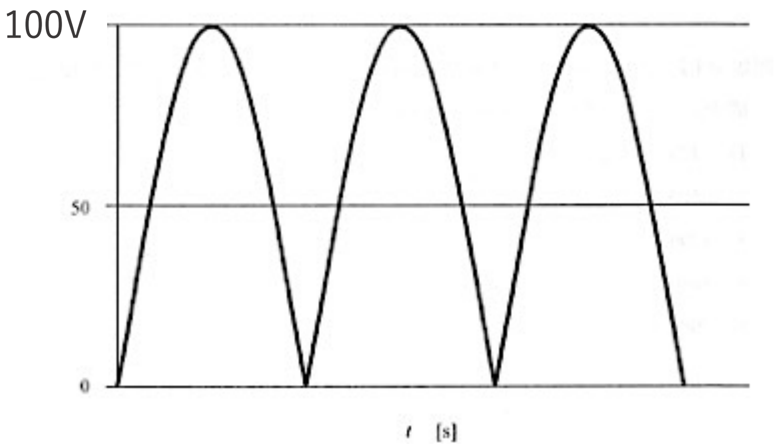
1. 140
2. 100
3. 71
4. 50
5. 32



問題解説

- 図は50Hz正弦波交流の全波整流波形である．実効値は何Vか．（第34回ME2種）

1. 140
2. 100
3. 71
4. 50
5. 32



全波整流交流は正弦波交流と同じ実効値である．
よって実効値は

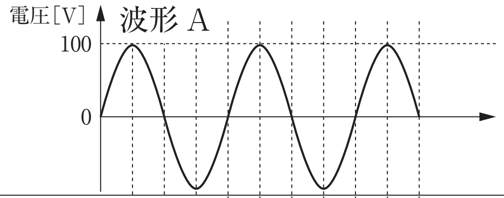
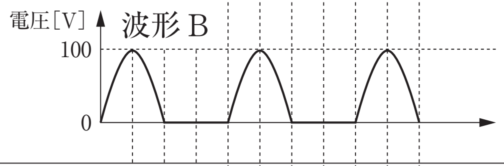
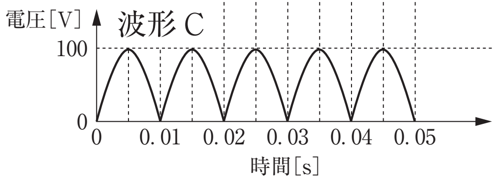
$$V = \frac{100}{\sqrt{2}} \cong 70.7\mathrm{V}$$

問題

- 表は，正弦波交流波形Aとその整流波形B，Cについて，それぞれの平均値[V]および実効値[V]を示している．標柱の空欄箇所（ア）および（イ）に記入する値として，正しい組み合わせはどれか．（国家試験33回）

- （ア）　（イ）

1. 31.8　60.4
2. 31.8　70.7
3. 45.0　50.0
4. 45.0　60.4
5. 45.0　70.7

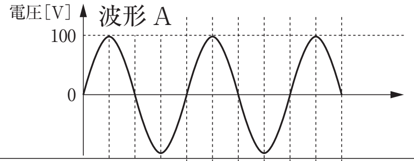
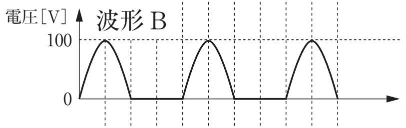
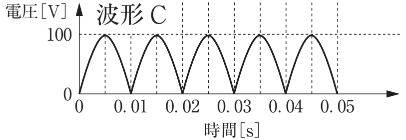
<table>
<tr><th>波形</th><th>平均値[V]</th><th>実効値[V]</th></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>70.7</td></tr>
<tr><td></td><td>（ア）</td><td>50.0</td></tr>
<tr><td></td><td>63.7</td><td>（イ）</td></tr>
</table>

問題

- 表は，正弦波交流波形Aとその整流波形B，Cについて，それぞれの平均値[V]および実効値[V]を示している．標柱の空欄箇所（ア）および（イ）に記入する値として，正しい組み合わせはどれか．（国家試験33回）

- （ア）　（イ）

1. 31.8　60.4
2. 31.8　70.7
3. 45.0　50.0
4. 45.0　60.4
5. 45.0　70.7

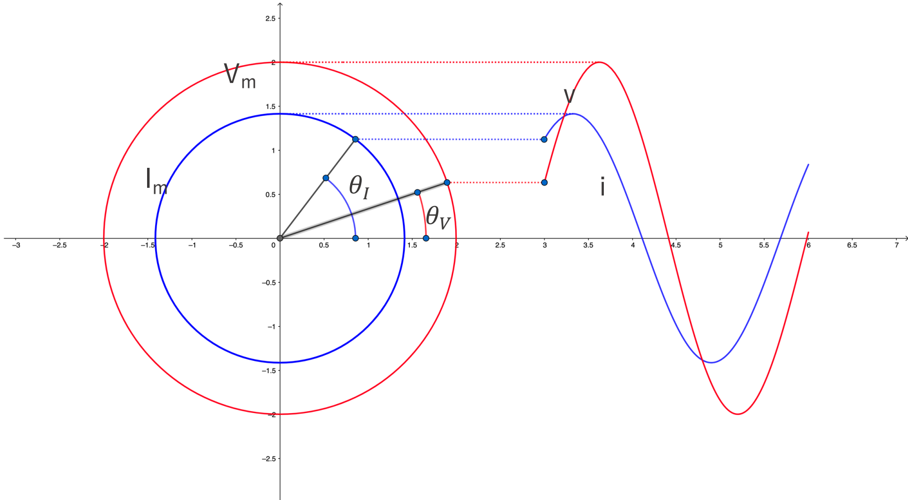
波形	平均値[V]	実効値[V]
	0	70.7
	（ア）	50.0
	63.7	（イ）

全波整流Cの実効値は，正弦波交流Aと同じなので（イ）は70.7である．
半波整流Bの平均値は，明らかに全波整流Cの半分なので（ア）は31.8である．

フェーザ図と複素数表示

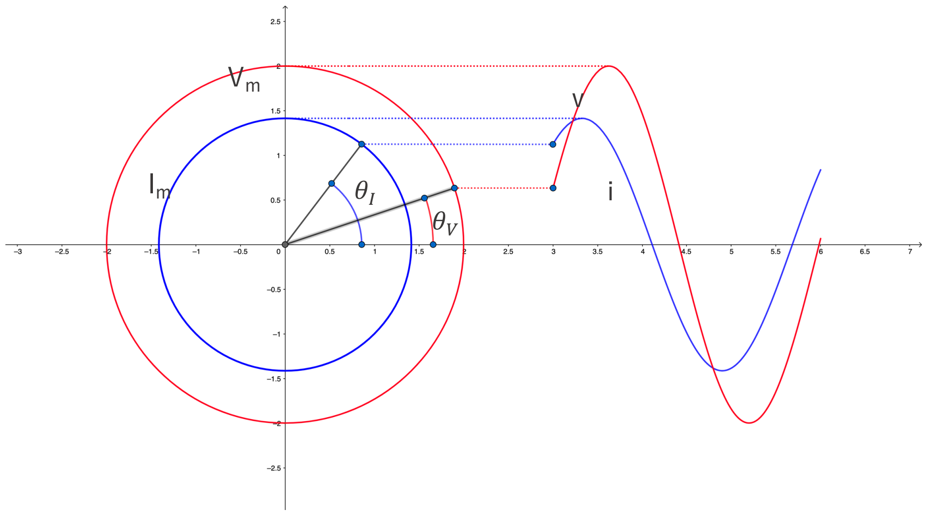
正弦波

- 正弦波交流の電圧（瞬時値）を次の式で表す．
- $v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$
- 電圧と電流の値は時間変化するが，その特性は振幅V_m，I_m，角周波数ω，位相θ_V, θ_Iの3つのパラメタで表現できる．ωが同じなら，**振幅と位相の2パラメタで良い．**

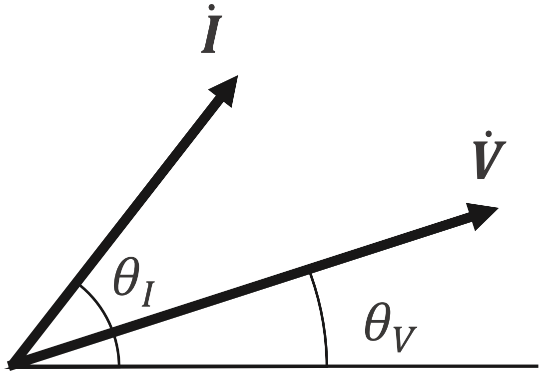


フェーザ図

- 下図のように，電圧や電流を，長さを実効値，角度を位相とした矢印（ベクトル）で表したものをフェーザ図と呼ぶ．



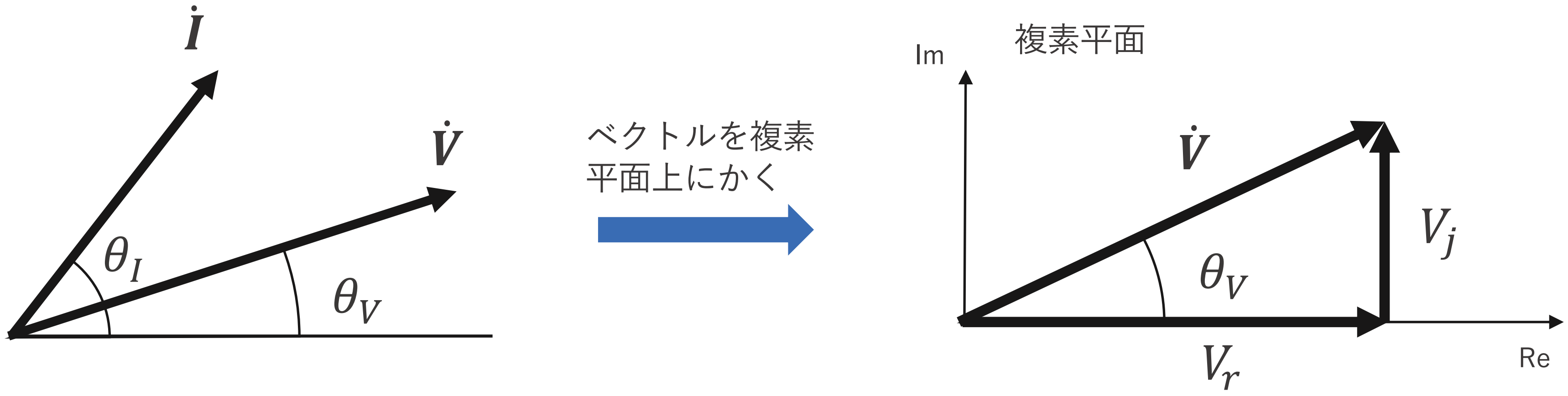
$$v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$$
$$i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$$



フェーザ図

複素数表示

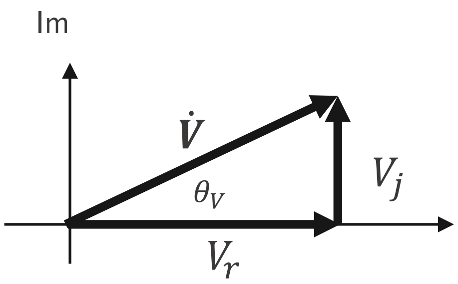
- フェーザ図を複素平面として捉えれば，電圧や電流のベクトルは複素数で表現できる．
- これを複素数表示と呼ぶ．
- 電気・電子回路では虚数単位をjで表す．



$$\dot{V} = V_r + jV_j$$

複素数と実効値・位相

- 電圧が$\dot{V} = V_r + jV_j$のとき
  - 実効値は$|\dot{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_j^2}$
  - 位相は$\theta_V = \tan^{-1}\frac{V_j}{V_r}$（偏角という）



複素平面

- 複素数の掛け算
  - $\dot{V}_1\dot{V}_2$ の大きさは $|\dot{V}_1||\dot{V}_2|$，偏角は $\theta_{V_1} + \theta_{V_2}$
- 複素数の割り算
  - $\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}$の大きさは $\frac{|\dot{V}_1|}{|\dot{V}_2|}$，偏角は $\theta_{V_1} - \theta_{V_2}$
  - 実効値の比と位相差計算は複素数の割り算で求まる．

確認

$$\dot{V}_1 = |\dot{V}_1|\left(\frac{V_{1r}}{|\dot{V}_1|} - j\frac{V_{1j}}{|\dot{V}_1|}\right) = |\dot{V}_1|\left(\cos\theta_{V_1} + j\sin\theta_{V_1}\right)$$

$$\dot{V}_2 = |\dot{V}_2|\left(\frac{V_{2r}}{|\dot{V}_1|} - j\frac{V_{2j}}{|\dot{V}_1|}\right) = |\dot{V}_2|\left(\cos\theta_{V_2} + j\sin\theta_{V_2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\dot{V}_1 \times \dot{V}_2 = |\dot{V}_1|\left(\cos\theta_{V_1} + j\sin\theta_{V_1}\right)\times|\dot{V}_2|\left(\cos\theta_{V_2} + j\sin\theta_{V_2}\right) \\
&= |\dot{V}_1||\dot{V}_2|\left(\cos\theta_{V_1} + j\sin\theta_{V_1}\right)\left(\cos\theta_{V_2} + j\sin\theta_{V_2}\right) \\
&= |\dot{V}_1||\dot{V}_2|\left(\cos\theta_{V_1}\cos\theta_{V_2} - \sin\theta_{V_1}\sin\theta_{V_2} + j\left(\cos\theta_{V_1}\sin\theta_{V_2} + \sin\theta_{V_1}\cos\theta_{V_2}\right)\right) \\
&= |\dot{V}_1||\dot{V}_2|\left(\cos\left(\theta_{V_1} + \theta_{V_2}\right) + j\sin\left(\theta_{V_1} + \theta_{V_2}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = \frac{|\dot{V}_1|}{|\dot{V}_2|}\frac{\cos\theta_{V_1} + j\sin\theta_{V_1}}{\cos\theta_{V_2} + j\sin\theta_{V_2}} = \frac{|\dot{V}_1|}{|\dot{V}_2|}\frac{\left(\cos\theta_{V_1} + j\sin\theta_{V_1}\right)\left(\cos\theta_{V_2} - j\sin\theta_{V_2}\right)}{\cos^2\theta_{V_2} + \sin^2\theta_{V_2}} \\
&= \frac{|\dot{V}_1|}{|\dot{V}_2|}\left(\cos\theta_{V_1}\cos\theta_{V_2} + \sin\theta_{V_1}\sin\theta_{V_2} + j\left(\cos\theta_{V_1}\sin\theta_{V_2} - \sin\theta_{V_1}\cos\theta_{V_2}\right)\right) \\
&= |\dot{V}_1||\dot{V}_2|\left(\cos\left(\theta_{V_1} - \theta_{V_2}\right) + j\sin\left(\theta_{V_1} - \theta_{V_2}\right)\right)
\end{aligned}$$

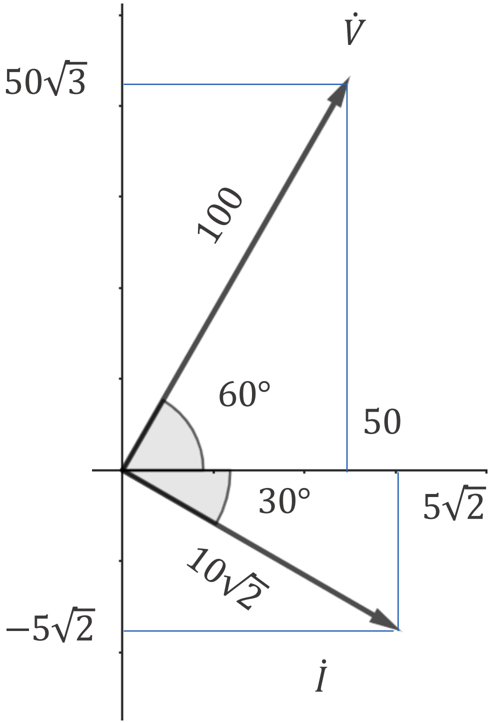
例

- 次の式の複素数表示を求めよ．さらにフェーザ図をかけ．
- $v = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$
- $i = 20\sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$

例

- 次の式の複素数表示を求めよ．さらにフェーザ図をかけ．
- $v = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$
- $i = 20\sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$

- それぞれの複素数表示は次のようになる．
- $\dot{V} = 50 + 50\sqrt{3}j$
- $\dot{I} = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}j$



問題

- 次の複素数で表された電圧の実効値と位相を求めよ.

1. $\dot{V} = 1 + \sqrt{3}j$

2. $\dot{V} = -1 + j$

- 次の複素数で表された電圧の実効値を求めよ.

1. $\dot{V} = 3 + 4j$

2. $\dot{V} = 10 - 5j$

問題

- 次の複素数で表された電圧の実効値と位相を求めよ.

1. $\dot{V} = 1 + \sqrt{3}j$　実効値は2，位相は$\pi/3$
2. $\dot{V} = -1 + j$　実効値は$\sqrt{2}$，位相は$3\pi/4$

- 次の複素数で表された電圧の実効値を求めよ.

1. $\dot{V} = 3 + 4j$　実効値は5
2. $\dot{V} = 10 - 5j$　実効値は$\sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

問題

- $\frac{-\sqrt{3}+j}{1+j\sqrt{3}}$の偏角はどれか．ただし，jは虚数単位である．（臨床工学技士国家試験29回）

1. $-\frac{\pi}{2}$
2. $-\frac{\pi}{6}$
3. 0
4. $\frac{\pi}{6}$
5. $\frac{\pi}{2}$

問題

- $\frac{-\sqrt{3}+j}{1+j\sqrt{3}}$の偏角はどれか．ただし，jは虚数単位である．（臨床工学技士国家試験29回）

1. $-\frac{\pi}{2}$
2. $-\frac{\pi}{6}$
3. 0
4. $\frac{\pi}{6}$
5. $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

$$\frac{-\sqrt{3}+j}{1+j\sqrt{3}}=\frac{\left(-\sqrt{3}+j\right)\left(1-j\sqrt{3}\right)}{1+3}=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{3}+\sqrt{3}+(1+3)j\right)=j$$

よって$\frac{\pi}{2}$

別解

$-\sqrt{3}+j$の偏角は$5\pi/6$

$1+j\sqrt{3}$の偏角は$\pi/3$

よって

$$\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\pi$$

問題

- 絶対値が最も小さいのはどれか。ただし、jは虚数単位である。(臨床工学技士国家試験30回)

1. $\frac{1}{j}$
2. $\frac{1}{1+j}$
3. $\frac{1}{2-j}$
4. $\frac{1-j}{2+j}$
5. $\frac{1-j}{1+j}$

問題

- 絶対値が最も小さいのはどれか。ただし、jは虚数単位である。(臨床工学技士国家試験30回)

1. $\frac{1}{j}$
2. $\frac{1}{1+j}$
3. $\frac{1}{2-j}$
4. $\frac{1-j}{2+j}$
5. $\frac{1-j}{1+j}$

$$\left|\frac{1}{j}\right| = \frac{1}{1} = 1$$

$$\left|\frac{1}{1+j}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left|\frac{1}{2-j}\right| = \frac{1}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\left|\frac{1-j}{2+j}\right| = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

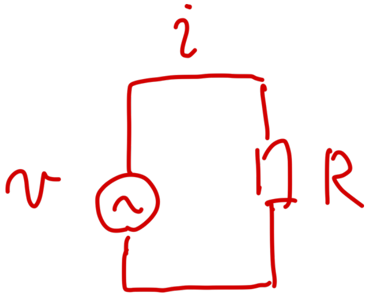
$$\left|\frac{1-j}{1+j}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

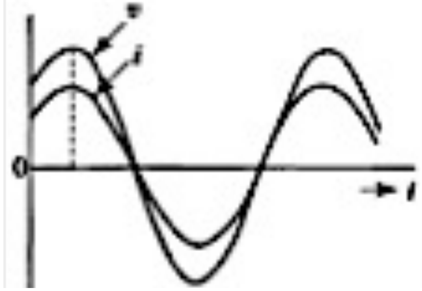
よって3の $\left|\frac{1}{2-j}\right|$ が最も小さい.

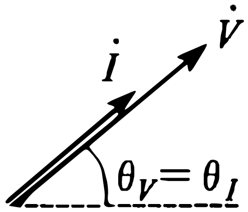
交流と抵抗

交流と抵抗

- オームの法則は
- $v = Ri$
- 電流を$i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$とすると，電圧は次のようになる．
- $v = RI_m \sin(\omega t + \theta_I) = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- したがって，
- $V_m = RI_m$
- $\theta_V = \theta_I$
- である．よって複素数表示は
- $\dot{V} = R\dot{I}$
- 抵抗では電流と電圧は同位相である．



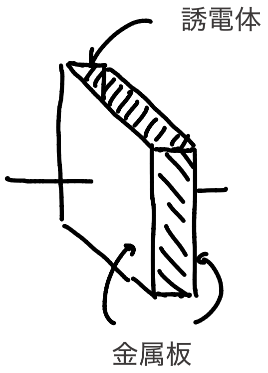




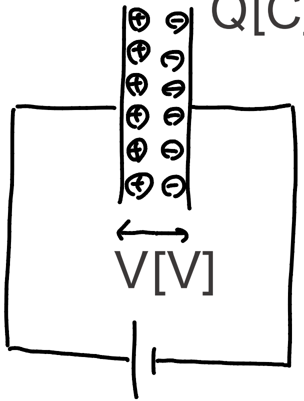
コンデンサ

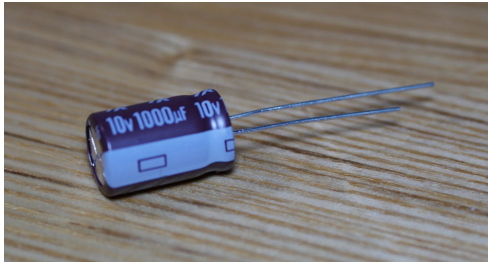
コンデンサ（キャパシタ）

- 電荷を貯める機能を持つ．
- 電荷の量Qの単位は[C]（クーロン）
- コンデンサに電圧Vを加えたときに，コンデンサに貯まる電荷Q[C]は，次の式で求まる．
- $Q = CV$
- Cはコンデンサの静電容量と呼ばれる量で，単位は[F]（ファラッド）である．



平行板コンデンサ





詳しい話は電磁気の講義のときに

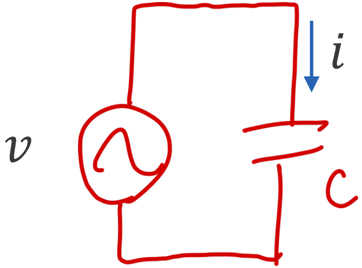
電荷，静電容量，電圧，電流の関係

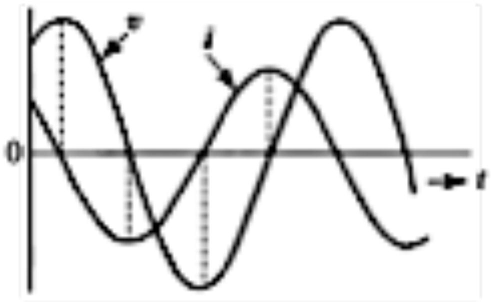
- コンデンサにたまった電荷Q[C]，コンデンサの静電容量C[F]，コンデンサにかかる電圧V[V]は次の関係がある．
- $Q = CV$
- 電流の定義式から，コンデンサを流れる電流は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{dQ}{dt} \\
&= \frac{dCV}{dt} \\
&= C\frac{dV}{dt}
\end{aligned}
$$

コンデンサの電圧と電流

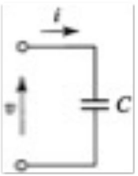
- コンデンサに加える電圧vを次のとおりとする．
- $v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$
- コンデンサに流れる電流Iは電流の定義から
- $i = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCv}{dt} = C\frac{d}{dt}V_m \sin(\omega t + \theta_V) = \omega C V_m \cos(\omega t + \theta_V)$
- $= \omega C V_m \sin(\omega t + \theta_V + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$



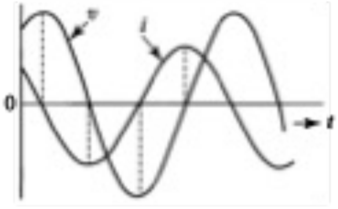


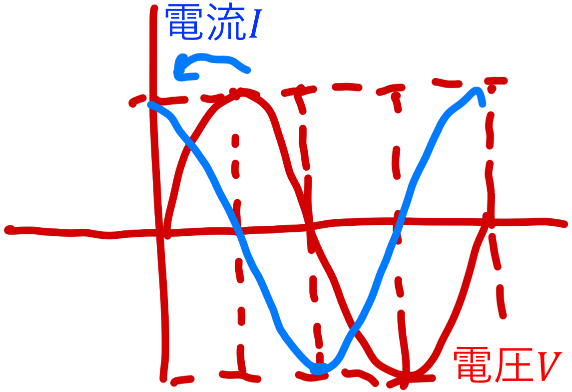
コンデンサの電圧と電流

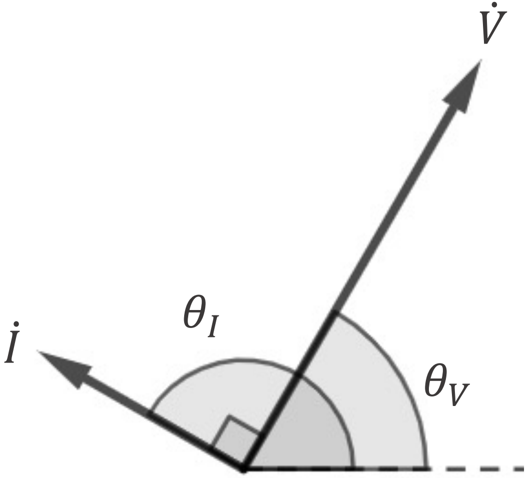
- よって，次のことが成り立つ．
- $I_m = \omega C V_m$
- $\theta_I = \theta_V + \dfrac{\pi}{2}$
- つまり，電流は電圧よりも位相が90° 進んでいる．



(a)

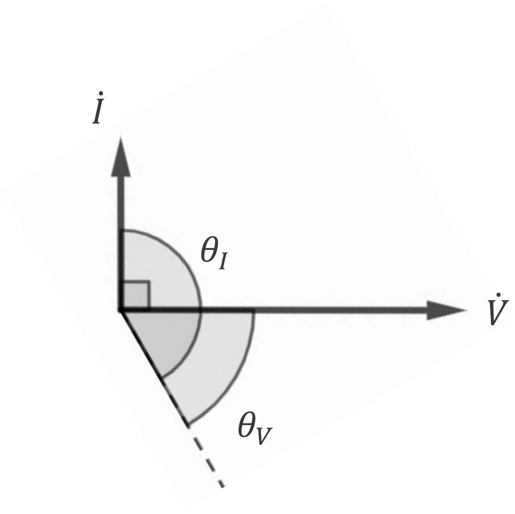




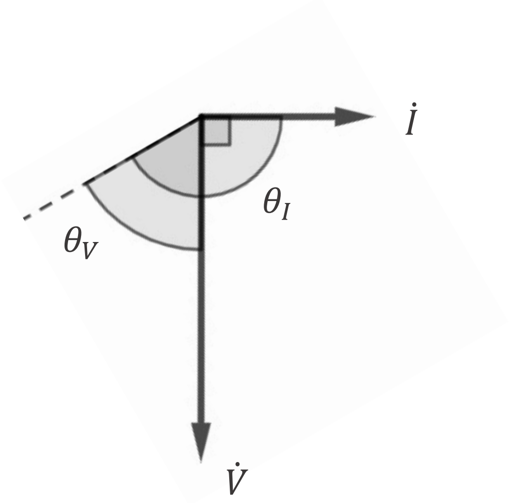


コンデンサの電圧と電流の複素数表示

- 電流と電圧の実効値を$\dot{I}$，$\dot{V}$とする．電流は電圧より位相が$\pi/2$進んでいるので，電流と電圧の関係を複素数表示で表すと
- $\dot{I} = j\omega C\dot{V}$
- $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$



電流は電圧に対し90度進んでいる．



電圧は電流に対し90度遅れている．

複素数表示の意味

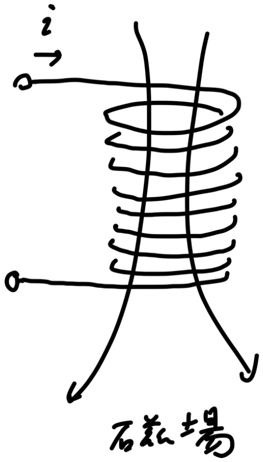
- $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$は何を意味するか？
- $\dot{I}$偏角をθ_I，$j\omega C$偏角をθ_Cとする．$j\omega C$は複素数成分だけなので偏角は $\theta_C = \pi/2$ である．
- $\frac{\dot{I}}{j\omega C}$は複素数の割り算なので，偏角は $\theta_I - \theta_C = \theta_I - \pi/2$である．
- つまり，コンデンサにより電圧の位相を90度遅れたことを示している．

インダクタ（コイル）

インダクタ（コイル）

図記号

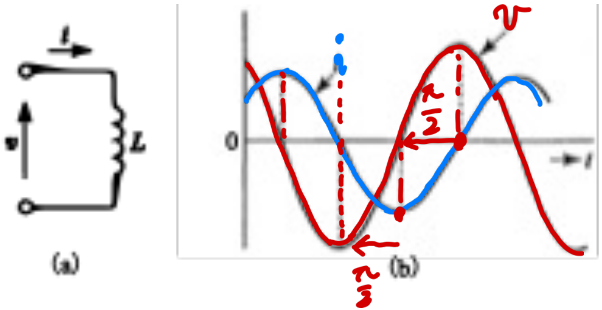
- 導線を巻いたもの.
- 電流が変化すると電圧を発生させる.
  - 誘導起電力vは次の式で書かれる.
  - $v = L\frac{\Delta i}{\Delta t}$
  - Lを自己インダクタンスもしくはインダクタンスという.
  - 単位はH（ヘンリー）
- 誘導起電力は電流により発生する磁場を打ち消す方向に発生する.
  - 電流変化に対しブレーキとして働くので，変化に対しインピーダンスが高くなる.



詳しい話は電磁気の講義のときに

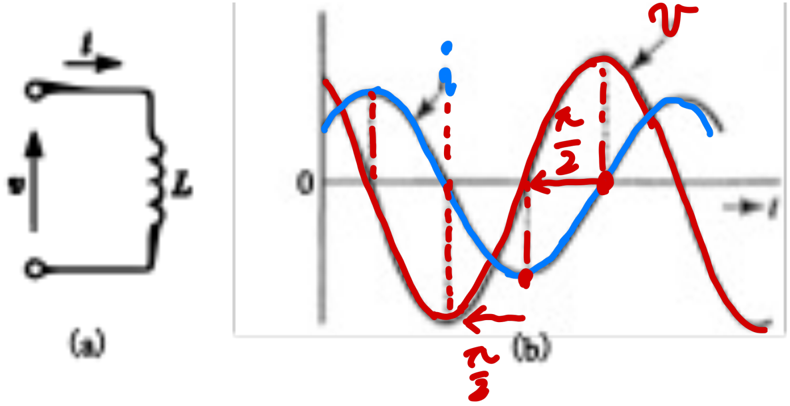
インダクタの電圧と電流

- インダクタに加える電流iを次のとおりとする.
- $i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)$
- インダクタに流れる電圧vは誘導起電力の式から
- $v = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt} I_m \sin(\omega t + \theta_I) = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta_I)$
- $= \omega L I_m \sin(\omega t + \theta_I + \frac{\pi}{2}) = V_m \sin(\omega t + \theta_V)$

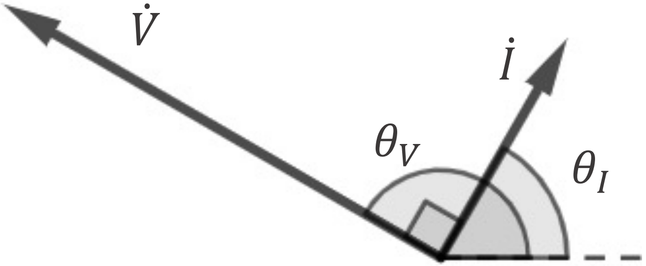


インダクタの電圧と電流

- よって，次のことが成り立つ．
- $V_m = \omega L I_m$
- $\theta_V = \theta_I + \dfrac{\pi}{2}$
- つまり，電圧は電流よりも位相が90°進んでいる．

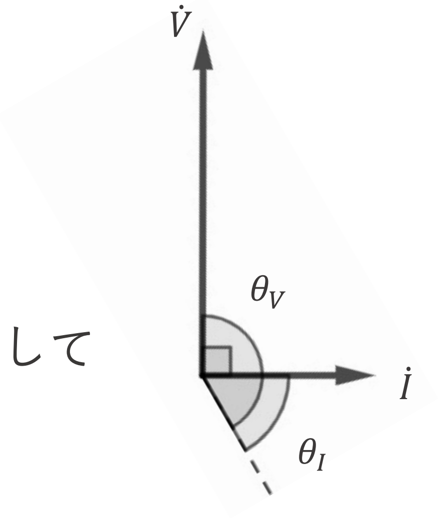


(a) (b)



インダクタの電圧と電流の複素数表示

- 電流と電圧の実効値を$\dot{I}$，$\dot{V}$とする．電圧は電流より位相が$\pi/2$進んでいるので，電流と電圧の関係を複素数表示で表すと
- $\dot{V} = j\omega L\dot{I}$



$\dot{I}$偏角をθ_I，　$j\omega L$偏角をθ_Lとする．
$j\omega L$は複素数成分だけなので偏角は $\theta_L = \pi/2$である．
$j\omega L\dot{I}$は掛け算なので，偏角は $\theta_I + \theta_L = \theta_I + \pi/2$である．
つまり，インダクタにより電圧の位相が90度進んだことを示している．

インピーダンス，レジスタンス，リアクタンス

- どのような回路であれ，電圧と電流の関係を次のように表すとする．
- $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$
- ここで$\dot{Z}$を**インピーダンス**という．
- 抵抗の場合
- $\dot{V} = R\dot{I}$
- と書け，Rを**レジスタンス**という．
- また，コンデンサの場合，
- $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$
- と書け，$\frac{1}{\omega C}$を**容量性リアクタンス**という
- インダクタの場合
- $\dot{V} = j\omega L\dot{I}$
- と書け，ωLを**誘導性リアクタンス**という．
- それぞれの単位はΩである．

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{V} &= R\dot{I} \\ \dot{V} &= \frac{1}{j\omega C}\dot{I} \\ \dot{V} &= j\omega L\dot{I} \end{aligned}} \Rightarrow \dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$$

インピーダンスを導入することで，交流でも素子関係なくオームの法則のようなものが使える．

問題解説

- 最大値10Vの正弦波交流電圧を誘導リアクタンス2.0Ωのインダクタに加えた．交流電圧の瞬時値が-10Vのときにインダクタを流れる交流の瞬時値[mA]として正しいのはどれか．（第41回ME2種）

1. -5.0
2. -3.5
3. 0.0
4. 3.5
5. 5.0

問題解説

- 最大値10Vの正弦波交流電圧を誘導リアクタンス2.0Ωのインダクタに加えた．交流電圧の瞬時値が-10Vのときにインダクタを流れる交流の瞬時値[mA]として正しいのはどれか．（第41回ME2種）

1. -5.0
2. -3.5
3. 0.0
4. 3.5
5. 5.0

電圧の位相は0だとすると電圧は次の式でかける．

$$V = 10\sin(\omega t)$$

V=-10だから

$$\sin(\omega t) = -1$$

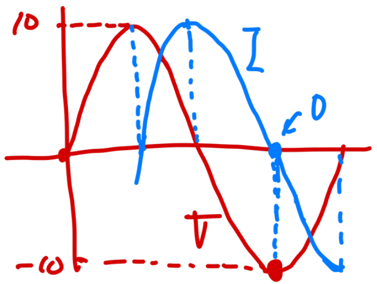
$$\omega t = -\frac{\pi}{2}$$

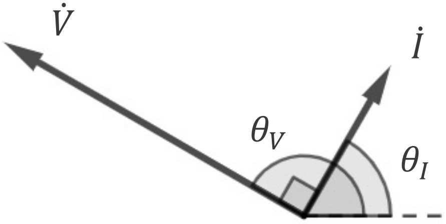
電圧の位相は0だとすると 電流は次の式でかける．

$$I = I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$\omega t = -\frac{\pi}{2}$だから

I=0





問題解説

- 最大値10Vの正弦波交流電圧を誘導リアクタンス2.0Ωのインダクタに加えた．交流電圧の瞬時値が-10Vのときにインダクタを流れる交流の瞬時値[mA]として正しいのはどれか．（第41回ME2種）

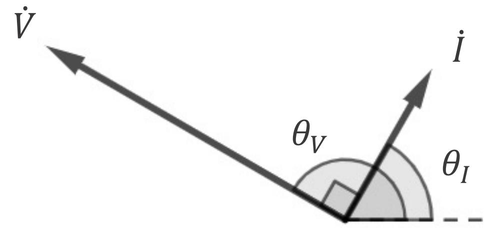
1. -5.0
2. -3.5
3. 0.0
4. 3.5
5. 5.0

別解

$$\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} = \frac{\dot{V}}{j\omega L} = -j\frac{V}{\omega L}$$

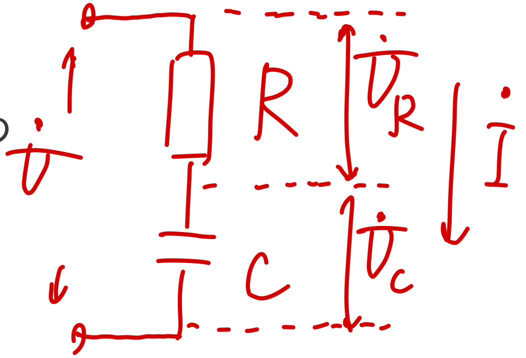
よって電流は電圧に対し$-\frac{\pi}{2}$ほど位相がずれている．
電圧が-10Vのとき，電圧の位相は$\frac{3}{4}\pi$だから（$-10 = 10\sin\frac{3}{4}\pi$），電流の位相は$\pi$なので，電流$10\sin\pi = 0$である．



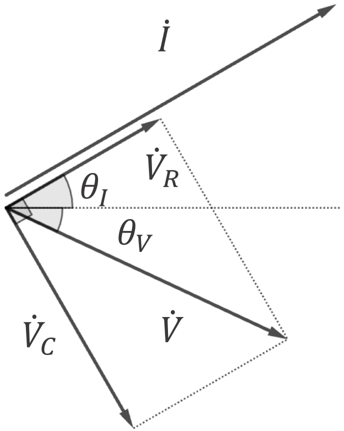
RC直列回路

RC直列回路

- 図のようにに抵抗とコンデンサを直列につなぐ.
- 直列なので，各素子を流れる電流は等しく，各素子に加わる電圧の総和がab間の電圧となる.

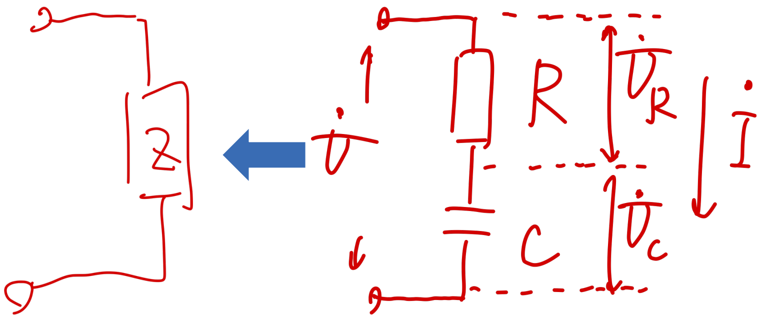


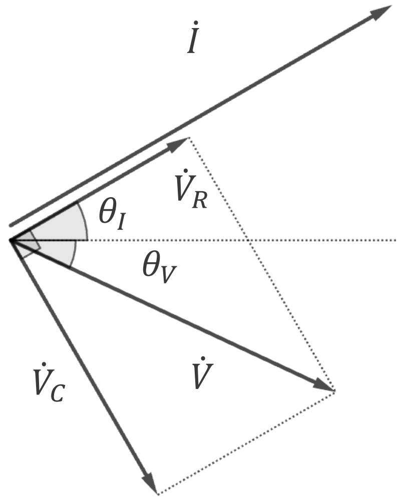
- 各素子に加わる電圧は,
- $\dot{V}_R = R\dot{I}, \dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$
- である．このことから，抵抗の電圧は電流と同位相であるが，コンデンサの電圧は電流及び抵抗の電圧から$\pi/2$遅れている.



RC直列回路

- ab間の電圧は，それぞれの端子にかかる電圧の和なので
- $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C = R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I}$　　　$\dot{V}$はベクトルの和になっている．
- ここで，電圧と電流を$\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$と表すとき，$\dot{Z}$をインピーダンスという．
- RC直列回路の合成インピーダンスは
- $\dot{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$
- である．





回路の性質と周波数

- コンデンサのインピーダンスは$1/(j\omega C)$である.
- 電源の周波数が低ければ低いほどインピーダンスが高い.
  - **定常状態では，コンデンサは直流を流さない（つまり開放と見なせる）．**なぜならば，このときコンデンサのインピーダンスが無限大となるため.
  - CR直列回路は，**定常状態のとき直流電流を流さない.**
- 電源の周波数が高ければ高いほどインピーダンスは低い.
  - コンデンサは，電源の周波数が高いほど電流を通しやすい.

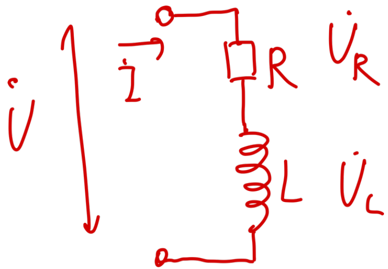
$$\text{直流 } \omega \to 0$$

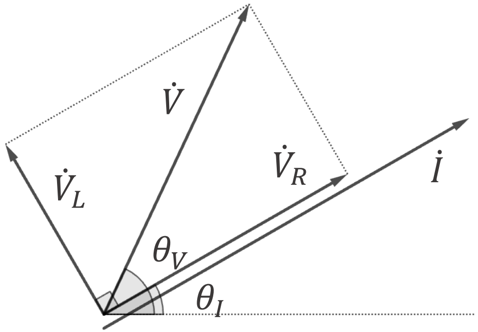
$$\left|\frac{1}{j\omega C}\right| \to \infty$$

RL直列回路

RL直列回路

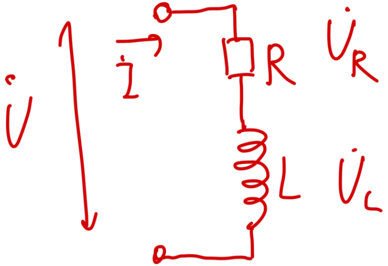
- 図のようにに抵抗とインダクタを直列につなぐ.
- 直列なので，各素子を流れる電流は等しく，各素子に加わる電圧の総和がab間の電圧となる.
- 各素子に加わる電圧は,
- $\dot{V}_R = R\dot{I}, \dot{V}_L = j\omega L\dot{I}$
- である．このことから，抵抗の電圧は電流と同位相であるが，インダクタの電圧は電流及び抵抗の電圧から $\pi/2$進んでいる.

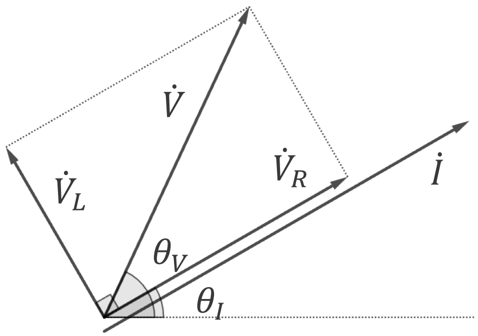




RL直列回路

- ab間の電圧は各素子にかかる電圧の和なので
- $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = (R + j\omega L)\dot{I}$
- RL直列回路の合成インピーダンスは
- $\dot{Z} = R + j\omega L$
- である．





■ インダクタ（コイル）

- インダクタのインピーダンスは$j\omega L$である．
- 電源の周波数が低ければ低いほど小さい．
  - **直流回路で，かつ定常状態のとき，インダクタは単なる導線と見なせる（短絡していると見なせる）．**
    - このとき，インダクタのインピーダンスが0となるため．
- 電源の周波数が高ければ高いほどインピーダンスは高い．
  - 周波数が高い電流ほど通しにくい．

$$\text{直流 } \omega \to 0$$
$$|j\omega L| \to 0$$

直流回路（定常状態）におけるコンデンサとインダクタ

直流回路（定常状態）におけるコンデンサとインダクタ

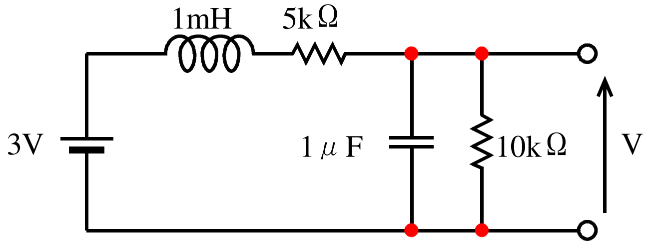
- **コンデンサは開放（切断，電流を流さない状態）**
  - コンデンサは限界まで電荷を貯めると電流が流れなくなる．
  - コンデンサに電荷が限界まで溜まった状態（定常状態）では，コンデンサは開放（切断，電流を流さない状態）となる．

- **インダクタ（コイル）は短絡**
  - コイルは電位変化が生じなければ（定常状態では），誘導起電力も発生しないため，短絡（抵抗0の状態，単なる導線）となる．

問題解説

【AM22】図の電圧 V の値[V]はどれか。

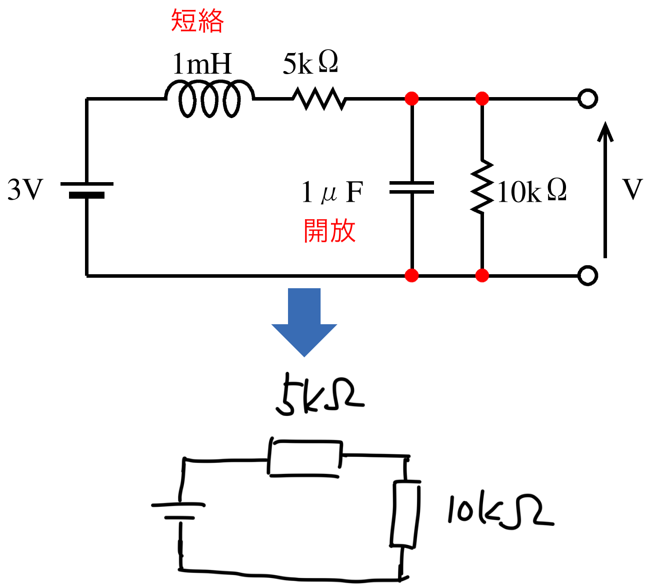
（1） 0
（2） 1
（3） 1.5
（4） 2
（5） 3



■ 問題解説

【AM22】図の電圧 V の値[V]はどれか。

（1） 0
（2） 1
（3） 1.5
（4） 2
（5） 3



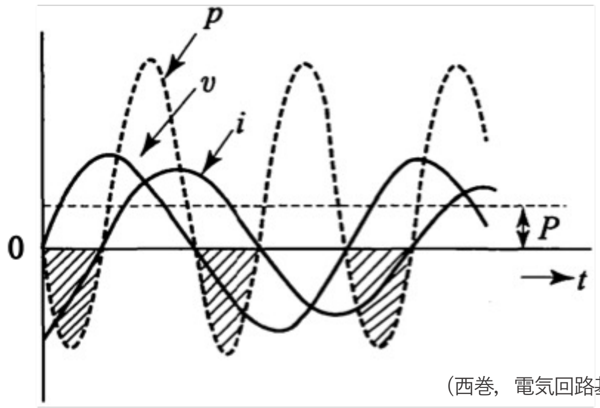
直流の場合，定常状態ではインダクタは抵抗0となり短絡，コンデンサは抵抗無限大となり開放と見なせる．つまり，2つの抵抗の直列回路となり，Vは10kΩの抵抗に加わる電圧である．よって，次の式が成り立つ．

V = 3 * 10 /(10+5) = 2

交流と電力

瞬時電力

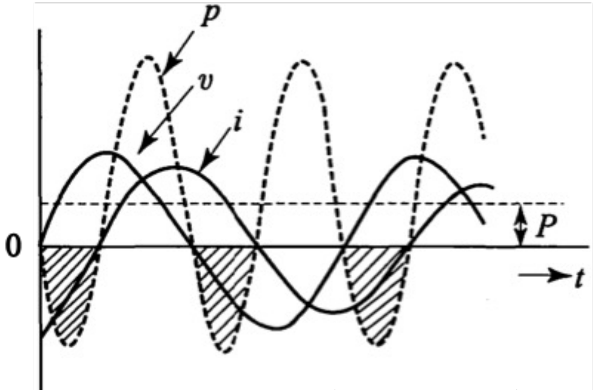
- 交流の電力は直流と同様に電圧と電流の積で求められる．
- 交流では電圧と電流が時間的に変化するので，電圧と電流の積で求められる電力を特に**瞬時電力**という．
- 瞬時電力をpとすると
- $p = vi$
- で表される．v[V]は電圧の瞬時値，i[A]は電流の瞬時値である．



(西巻，電気回路基礎)

有効電力

- $v = \sqrt{2}V \sin(\omega t)$,　$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \phi)$とすると瞬時電力は
- $p = vi = 2VI \sin(\omega t) \sin(\omega t + \theta) = VI(\cos(\phi) - \cos(2\omega t - \phi))$
- ここでVとIはそれぞれ電圧と電流の実効値である.
- 瞬時電力pの平均はどうなるか？
- $\cos(2\omega t - \phi)$の平均は0であるから,
- $P = VI \cos(\phi)$
- これを**有効電力**または単に**電力**という.
- 単位はW(ワット)である.
- 電圧と電流に位相差がなければ$\phi = 0$なので,
- $P = VI$



(西巻，電気回路基礎)

平均は1周期の間，時間で積分して周期で割ったもの．$\cos(2\omega t - \phi)$の平均は0．$VI\cos(\phi)$だけ残る．

$\cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a+b) - \cos(a-b) =$
$\cos a \cos b + \sin a \sin b - \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

皮相電力と力率

- 単に電圧と電流の実効値を掛けたものを皮相電力という.
- $P_a = IV$
- 単位は[VA]（ボルトアンペア）である.

- 消費電力Pと皮相電力P_aの比を力率という.
- 力率は次のように表される.
- $\frac{P}{P_a} = \cos\phi$

無効電力

- $\sqrt{1-\cos^2\phi}=\sin\phi$を無効率という．
- 皮相電力P_aと無効率の積を無効電力P_rという．
- 無効電力は次のように表される．
- $P_r = VI\sin\phi = P_a\sin\phi$
- 単位は[var]（バール）である．

- それぞれの電力には次の関係が成り立つ．
- $P_a = \sqrt{P^2+P_r^2}$

$$\cos^2\phi+\sin^2\phi=1$$

$$\frac{P}{P_a}=\cos\phi,\ \ P_r = P_a\sin\phi$$

より

$$\frac{P^2}{P_a^2}+\sin^2\phi=1$$

$$P^2+P_a^2\sin^2\phi=P_a^2$$

$$P^2+P_r^2=P_a^2$$

$$P_a=\sqrt{P^2+P_r^2}$$

問題

- 図の回路でab間の正弦波交流電力（有効電力）を求める式として正しいのはどれか．（臨床工学技士国家試験35）

1. (電圧の振幅値)×(電流の振幅値)
2. (電圧の実効値)×(電流の実効値)
3. (電圧の振幅値)×(電流の振幅値)×(力率)
4. (電圧の実効値)×(電流の実効値)×(力率)
5. (電圧の実効値)×(電流の実効値)×(無効率)

問題

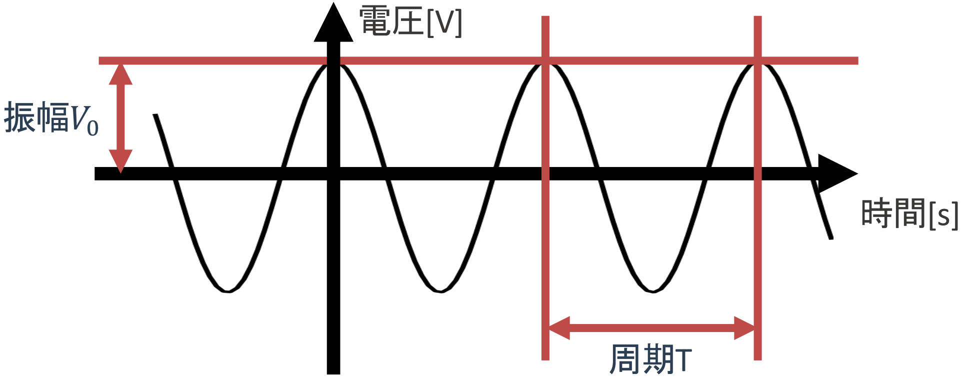
- 図の回路でab間の正弦波交流電力（有効電力）を求める式として正しいのはどれか．（臨床工学技士国家試験35）

1. (電圧の振幅値)×(電流の振幅値)
2. (電圧の実効値)×(電流の実効値)
3. (電圧の振幅値)×(電流の振幅値)×(力率)
4. (電圧の実効値)×(電流の実効値)×(力率)
5. (電圧の実効値)×(電流の実効値)×(無効率)

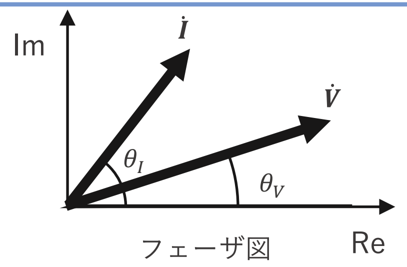
有効電力は
$P = VI\cos(\phi)$
である．Vは電圧の実効値，Iは電流の実効値である．
$\cos(\phi)$は力率と呼ばれる．
よって答えは4である．

交流回路のポイント

- 正弦波$V(t) = V_0 \sin(2\pi f t + \theta)$
  - 電圧の瞬時値$V(t)$，振幅V_0，周波数f， 位相θ，角周波数$\omega = 2\pi f$，周期$T = 1/f$
- 正弦波$V_1 = V_0 \sin(2\pi f t + \theta_1)$と正弦波$V_2 = V_0 \sin(2\pi f t + \theta_2)$の位相差
  - $\theta_1 - \theta_2$
    - これが正ならV_1がV_2より $\theta_1 - \theta_2$位相が進んでいる.
    - これが負ならV_1がV_2より $|\theta_1 - \theta_2|$位相が遅れている.
- 実効値
  - 正弦波交流$\frac{V_0}{\sqrt{2}}$
  - 全波整流$\frac{V_0}{\sqrt{2}}$
  - 半波整流$\frac{V_0}{2}$



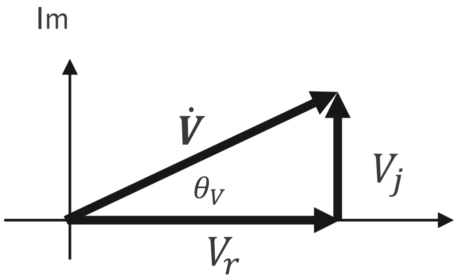
交流回路のポイント



- 複素数表示
  - 電流と電圧をベクトルで表す．
  - ベクトルは複素平面上に（フェーザ図で）書かれる．
    - $\dot{V} = a + bj$
  - ベクトルの大きさは実効値，ベクトルの角度が位相に対応する．
    - 実効値は$\sqrt{a^2 + b^2}$，位相は$\tan^{-1}\frac{b}{a}$
  - $\dot{V} = \dot{Z}\,\dot{I}$が成り立つ．つまり交流でもオームの法則が成り立つ．
    - $\dot{Z}$はインピーダンスと呼ばれる．直流の抵抗と対応する．
  - $\dot{V}$と$\dot{I}$の絶対値は，それぞれの実効値である．
  - 抵抗のインピーダンスR，コンデンサのインピーダンス$\frac{1}{j\omega C}$，コイルのインピーダンス$j\omega L$
  - 複素数表示を使えば交流でも直流と同じように計算できる．
    - 合成インピーダンスは直流のときの合成抵抗と同じように計算できる．

■ 交流回路のポイント

- 電圧が$\dot{V} = V_r + jV_j$のとき
  - 実効値は$|\dot{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_j^2}$
  - 位相は$\theta_V = \tan^{-1}\frac{V_j}{V_r}$

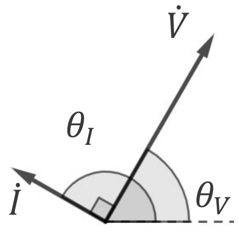


複素平面

- 複素数の掛け算
  - $\dot{V}_1 \times \dot{V}_2$の実効値は $|\dot{V}_1||\dot{V}_2|$，位相は $\theta_{V_1} + \theta_{V_2}$
- 複素数の割り算
  - $\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2}$の実効値は $\frac{|\dot{V}_1|}{|\dot{V}_2|}$，位相は $\theta_{V_1} - \theta_{V_2}$

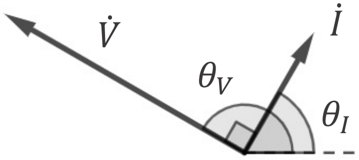
交流回路のポイント

- コンデンサ
  - 電圧は電流よりも位相が90°遅れている．
  - 電圧と電流の関係（複素数表示）
    - $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$



コンデンサの電圧と電流のフェーザ図

- コイル
  - 電圧は電流よりも位相が90°進んでいる.
  - 電圧と電流の関係（複素数表示）
    - $\dot{V} = j\omega L\dot{I}$



コイルの電圧と電流のフェーザ図

- 直流のとき，十分時間がたつとコンデンサは開放，コイルは短絡

交流回路のポイント

- 交流の電力
  - 瞬時電力
    - 電圧の瞬時値 v[V] と電流の瞬時値 i[A] をかけたもの.
    - $p = vi$
  - 有効電力
    - 電圧 V と電流 I の実効値とϕを電圧と電流の位相差のcosをかけたもの.
    - $P = VI\cos(\phi)$
  - 皮相電力
    - 電圧と電流の実効値を掛けたもの.
    - $P_a = IV$
  - 力率
    - 消費電力Pと皮相電力P_aの比.
    - $\frac{P}{P_a} = \cos\phi$