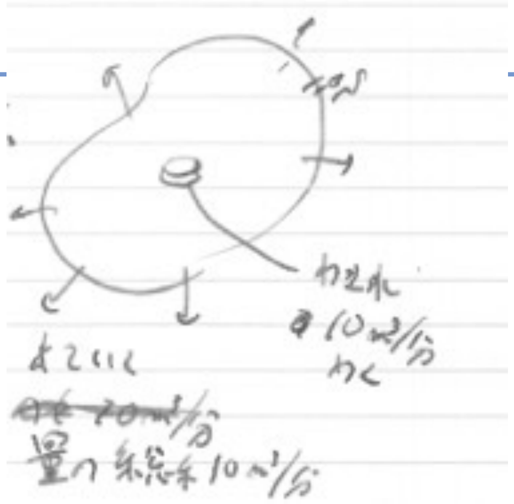
電気工学2第5回

藤田 一寿

ガウスの法則

ガウスの法則（積分形）



- ガウスの法則は様々な物理現象で見られる．
  - 電磁気学
  - 熱力学
  - 流体力学
- ガウスの法則は，閉曲面内の水源から湧き出す水の量と出ていく水の量が等しいというだけの法則である．

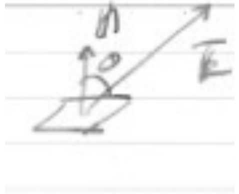
電磁気学でのガウスの法則

- 電磁気学では
  - 水源→電荷
  - 水→電気力線
  - 水の流れ→電場

- のように対応する.
- つまり，ガウスの法則は，水源である電荷から出てくる電気力線の総量と閉曲面から出ていく電気力線の総量は等しいことを示している.

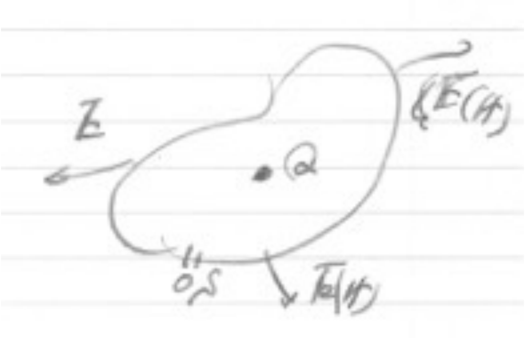
閉曲面から出ていく電気力線の本数

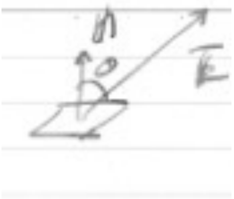
- 閉曲面の微小領域を考える.
- 微小領域の場所を$\boldsymbol{x}$，面積を $\Delta S(\boldsymbol{x})$，電場を $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$とすると，微小領域から出ていく電気力線の本数$\Delta N$は
- $\Delta N = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \Delta S$
- ここで $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$は微小領域に対し垂直な単位ベクトルである.
- 閉曲面Sから出ていく電気力線の総本数NはΔN をS上にわって面積分すれば求まる.
- $N = \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \Delta S$



ガウスの法則（積分形）

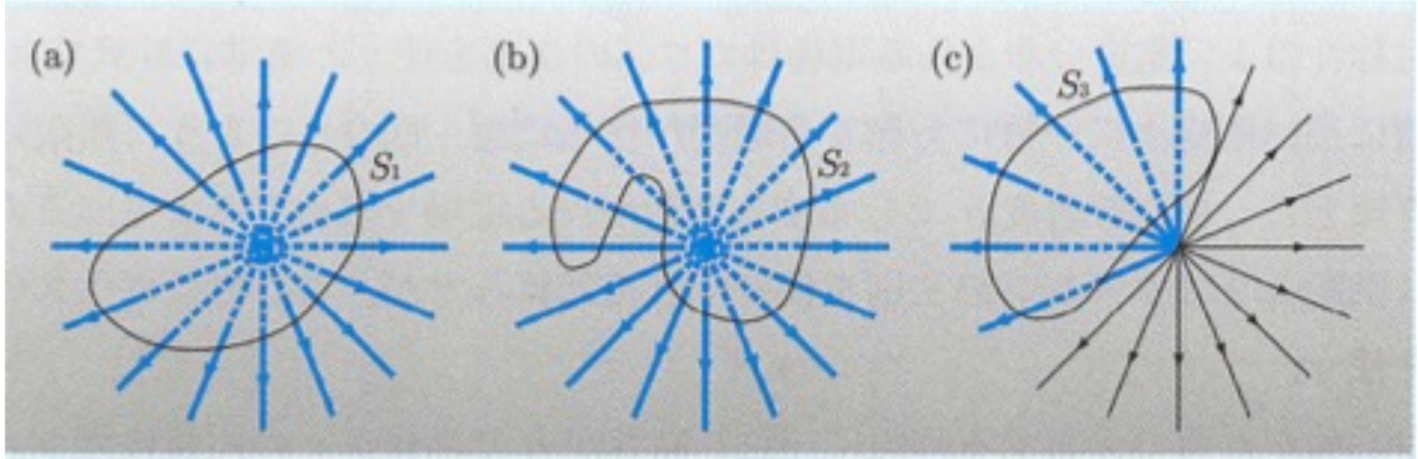
- 電気力線の本数は閉曲面内の電荷をQとすると Q/ε$_0$だから
- $N = \int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
- 単位体積当たりの電荷を $\rho(\boldsymbol{r})$ をするとQは
- $Q = \int_V \rho(\boldsymbol{x}) dV = \int_V \rho(\boldsymbol{x}) d^3x$
- と表せる．以上をまとめると，
- $\int_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) dS = \int_V \rho(\boldsymbol{x}) d^3x$
- となる．これをガウスの法則（積分形）という．





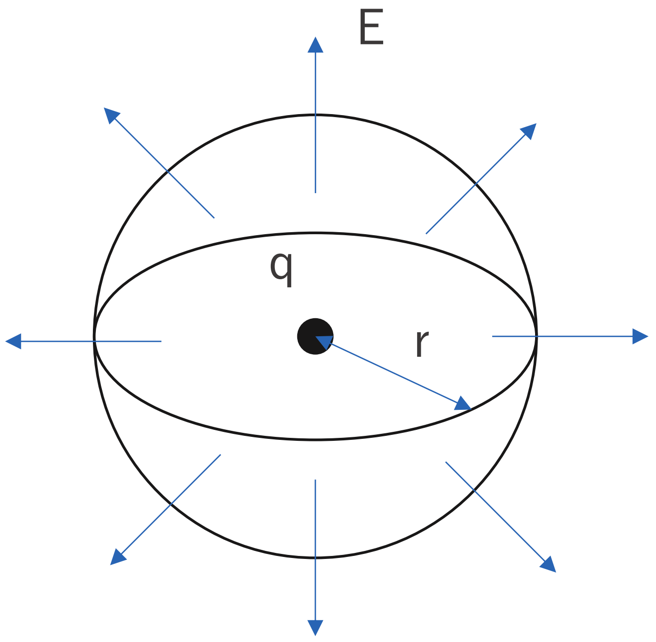
もう一度，ガウスの法則

- 電荷から発生する電気力線の本数 $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ は，その電荷を囲んだ領域から出ていく電気力線の本数 ES と等しい．
- $ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$



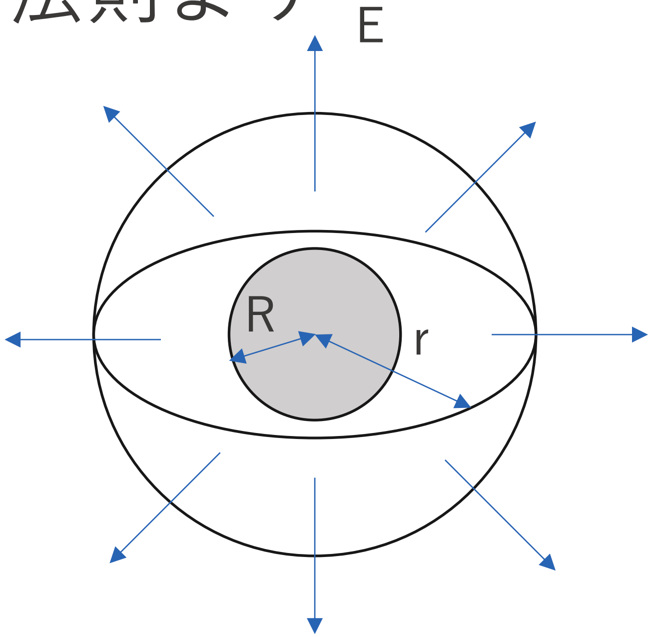
点電荷が作る電場

- 電荷qをもつ点電荷が，それを中心とした半径rの球で囲まれているとする．
- 球の表面積は$4\pi r^2$だから，ガウスの法則より
- $4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}$
- よって，点電荷が作る電場は
- $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$
- となる．



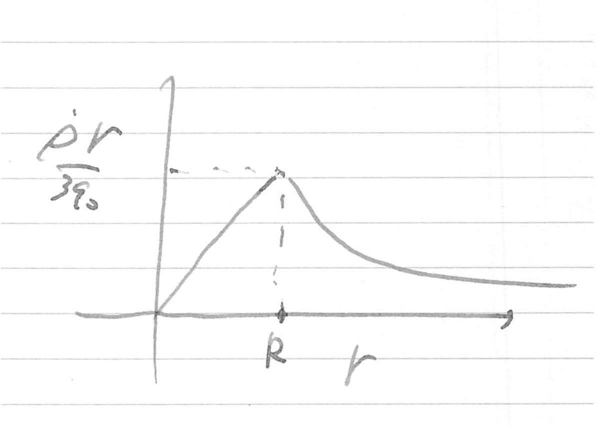
球内の一様に分布する電荷が作る電場

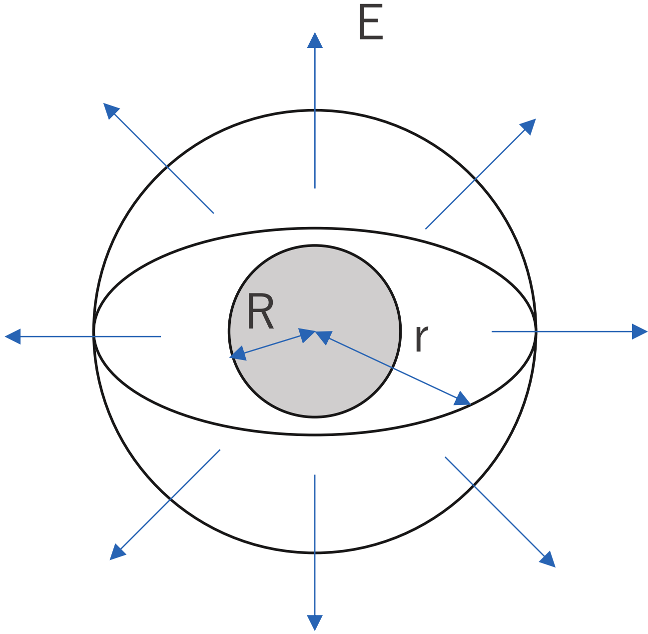
- 半径Rの球に電荷密度ρで均一に電荷が分布しているとする.
- この球の中心からrの場所の電場を求める.
- 電荷が分布している球と同心の半径rの球を考える.
- $R \leq r$の時,
- 半径rの球内にある電荷は$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, よってガウスの法則より
- $4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho/\varepsilon_0$
- $E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$



球内の一様に分布するが作る電場

- $R > r$ の時,
- 半径rの球内にある電荷は$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, よってガウスの法則より
- $4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho / \varepsilon_0$
- $E = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}$





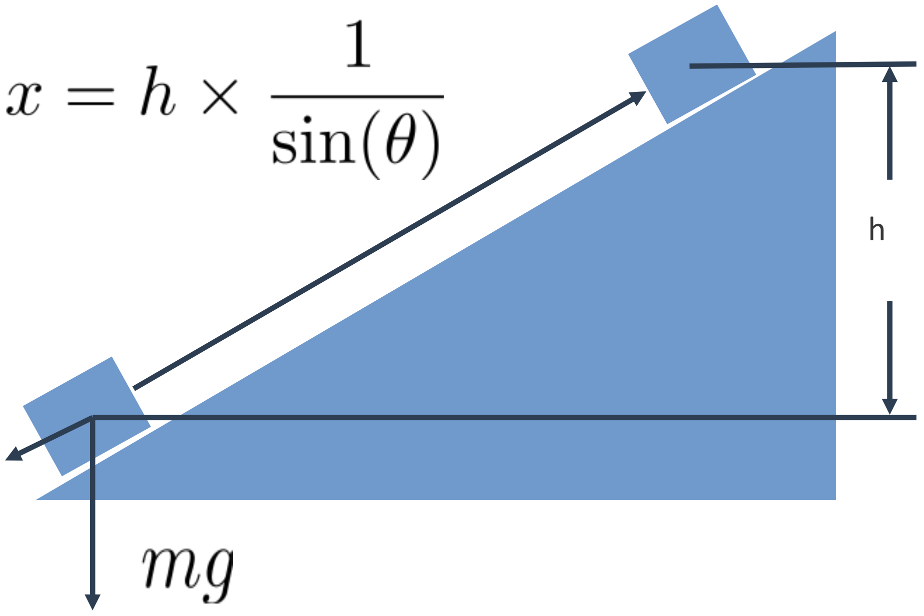
電位

電位

- 電位とは単位電荷あたりのポテンシャルエネルギー

古典力学でのポテンシャルエネルギー

距離x，質量mの物体を移動させる $x = h \times \dfrac{1}{\sin(\theta)}$



$F = mg\sin(\theta)$

mg

距離x移動させるのに必要な仕事 $w = Fx$

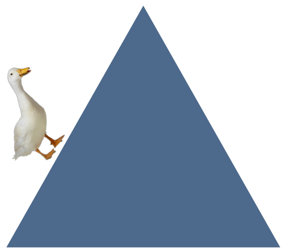
$$= mg\sin(\theta) \times h \times \frac{1}{\sin(\theta)}$$

$= mgh$ 位置エネルギーの式になる

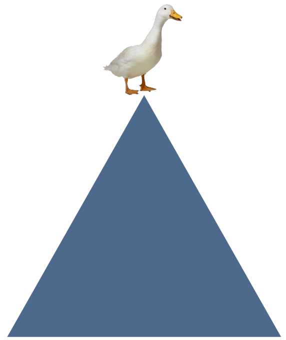
仕事をした分はポテンシャルエネルギーとして貯まる．

もうすこし簡単に言えば

- 山登りするためには，仕事をしなければならない．



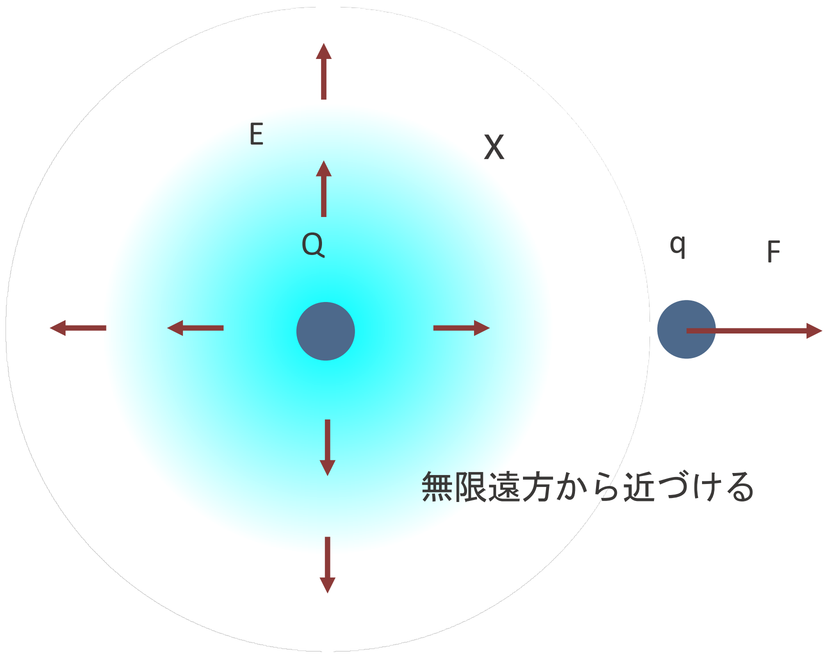
- 山にのぼるために使った仕事は，山の高さ分のポテンシャルエネルギーに変換される．



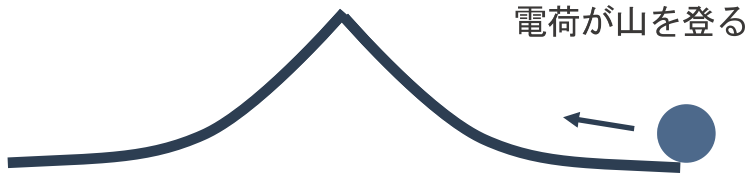
電磁気では

- 点電荷Qが作る電場中を点電荷qを基準点（無限遠方）から点電荷Qに移動させると考える．その時必要な仕事は

$$
\begin{aligned}
W &= -\int_{\infty}^{x} F dr \\
&= -\int_{\infty}^{x} qE dr \\
&= -\int_{\infty}^{x} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2} dr \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x}
\end{aligned}
$$



- ただし，xをQとqの距離とする．



電位

- qを1Cと考えると

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x}$$ (点電荷が作る電位)

- 点電荷Qが電場を作り，１Cの電荷を基準点（無限遠方）からQからxの距離のところまで移動させるのに必要な仕事である.
- これを，電位と呼ぶ.

電位差

- 電位は基準点（無限遠方）を0としている.
- 任意の点と任意の点での電位の差を電位差という.
  - 任意の点と任意の点の間で積分したものになっている.

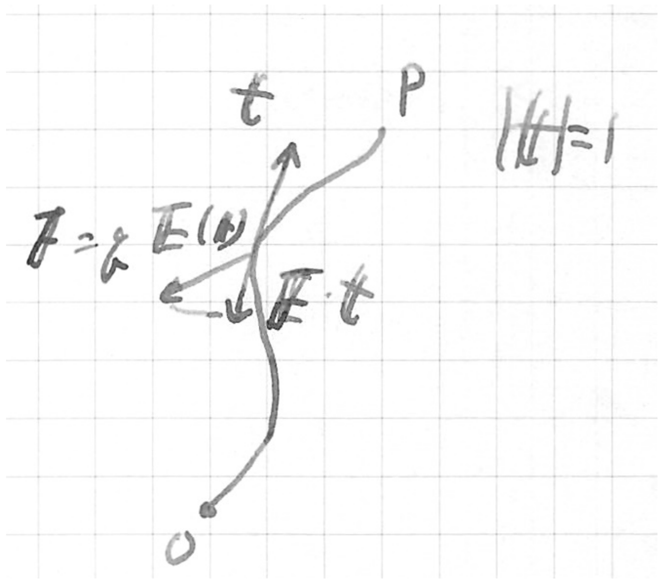
電場中の電荷のポテンシャルエネルギー

- 電場中の電荷のポテンシャルエネルギーを静電ポテンシャルという.
- 電位は１Cあたりの仕事だから，電位は１Cあたりのポテンシャルエネルギー（静電ポテンシャル）である.
- つまり，電荷qの静電ポテンシャルは

$$U = qV$$

電位・電位差の一般的な式

- 電荷を基準点OからPに移動させる．電荷にかかる力をFとすると，移動させるために必要な仕事は
- $V=-\int_{\mathrm{OP}}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}ds$
- 電荷が1Cだとすると
- $V=-\int_{\mathrm{OP}}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{t}ds$
- これを電位という．

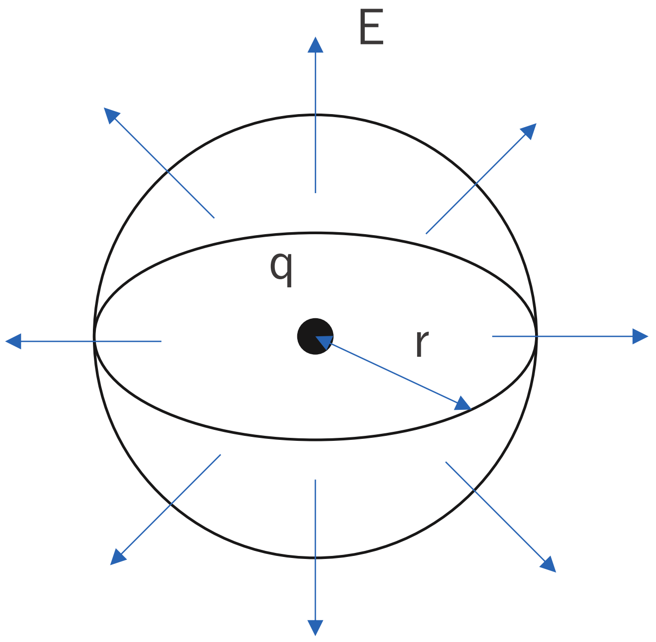


等電位面

- 電位が等しい面を等電位面という．

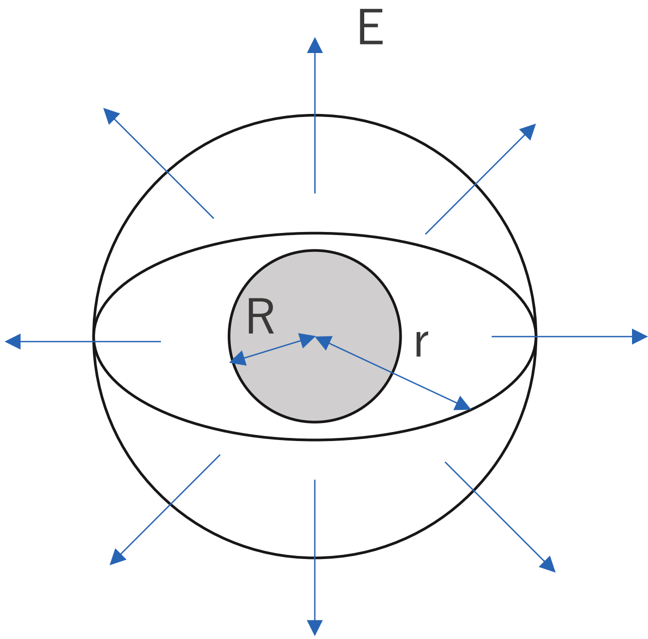
点電荷の電位

- 電荷qをもつ点電荷が作る電場は
- $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$
- である.
- 無限遠方を0として電荷からの距離rの場所の電位は
- $V = -\int_{\infty}^{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}dx = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x}\right]_{\infty}^{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$



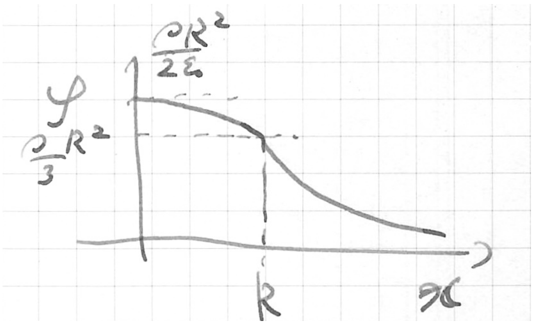
球内の一様に分布する電荷の電位

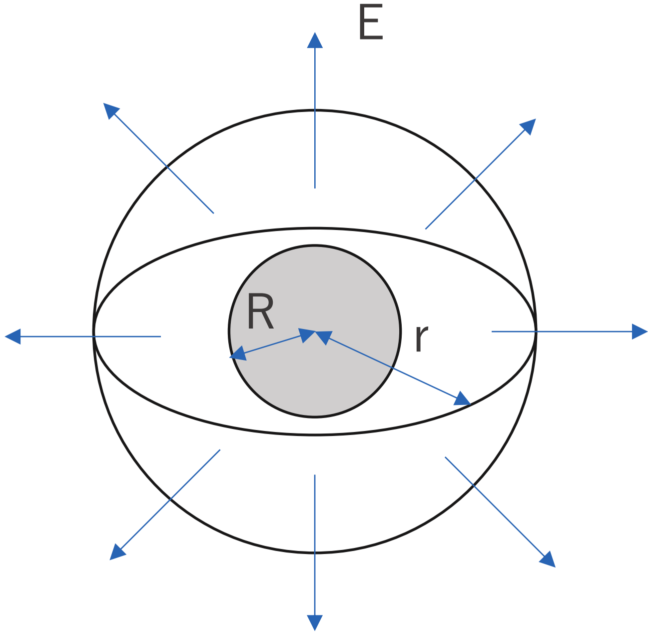
- 半径Rの球に電荷密度ρで均一に電荷が分布しているとする.
- 無限遠方を基準としたとき，この球の中心からrの場所の電位は
- $R \leq r$の時,
- 電場$E = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$なので電位は
- $V = -\int_{\infty}^{r} \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x^2} dx = \left[\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x}\right]_{\infty}^{r} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$



■ 球内の電荷が作る電場

- $R > r$ の時,
- 電場は$E = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}$なので電位は
- $V = -\int_{\infty}^{r} E dx = -\int_{R}^{r} \frac{x\rho}{3\varepsilon_0} dx - \int_{\infty}^{R} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x^2} dx = -\left[\frac{x^2 \rho}{6\varepsilon_0}\right]_R^r + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$
- $V = -\frac{r^2\rho}{6\varepsilon_0} + \frac{R^2\rho}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{6}(3R^2 - r^2)$

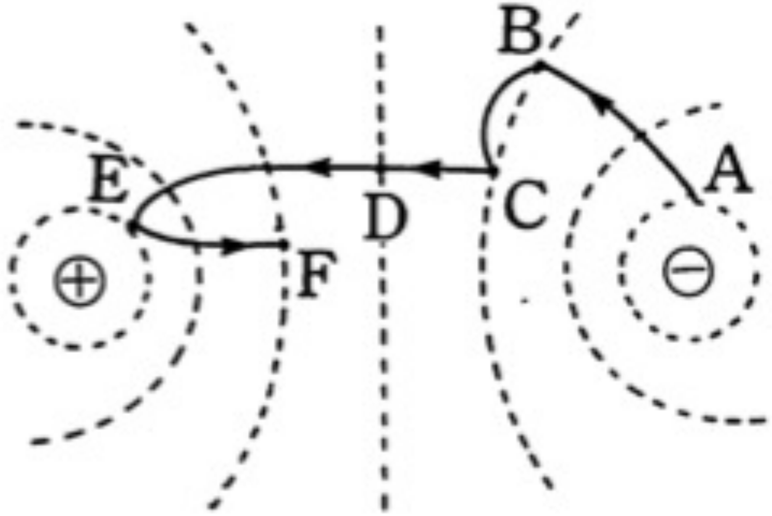




問題

- 図は正負等量の２つの点電荷の周りの電場を3Vごとの等電位線で示したものである．この電場中で2.0×10^{-5}Cのｎ電荷をA→B→…→Fの経路で運ぶ時，外力のする仕事が次のようになる区間はどれか．

1. 最大
2. 0
3. 負

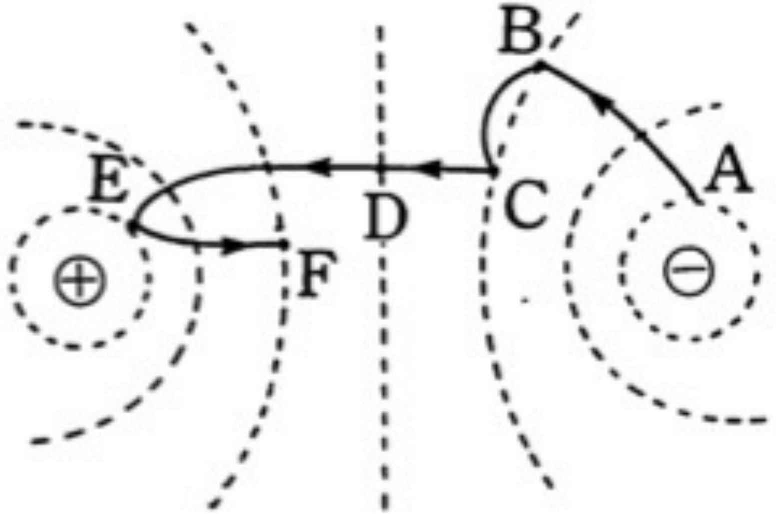


問題

- 図は正負等量の２つの点電荷の周りの電場を3Vごとの等電位線で示したものである．この電場中で2.0×10^{-5}Cのｎ電荷をA→B→…→Fの経路で運ぶ時，外力のする仕事が次のようになる区間はどれか．

1. 最大
2. 0
3. 負

1. 正の電荷を運ぶとき，最も高く電位を上げる移動が最も仕事を必要とする．よって，DからEへの移動が最も仕事を必要とする．
2. 等電位面上を移動する場合，仕事を必要としない．よってBからCへの移動に必要な仕事は0である．
3. 正の電荷を運ぶ時，電位が下がる移動は負の仕事になる．よってEからFへの移動は負の仕事となる．



問題

- 電場内に2点A，Bがあり，AはBよりも電位が3.0×10^{2}Vだけ低い．質量6.4×10^{-27}kg，電気量3.2×10^{-19}Cの粒子がA→Bの向きに進んできて，速さ2.0×10^{5}m/sでAを通過した．Bを通過するときの速さは何m/sか．

問題

- 電場内に2点A，Bがあり，AはBよりも電位が3.0×10^2Vだけ低い．質量6.4×10^{-27}kg，電気量3.2×10^{-19}Cの粒子がA→Bの向きに進んできて，速さ2.0×10^5m/sでAを通過した．Bを通過するときの速さは何m/sか．

電位差Vを高い方へ移動するときに失うエネルギーは

$$W = qV$$

初速v0とし，Bを通過するときの速さをvとすると，粒子の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - qV = \frac{1}{2}mv^2$$

よって，Bを通過するときの粒子の速さは

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2qV}{m}} = \sqrt{2.0\times2.0\times10^{10} - \frac{2\times3.2\times10^{-19}\times3.0\times10^2}{6.4\times10^{-27}}} = \sqrt{4.0\times10^{10} - 3.0\times10^{-19+2+27}}$$

よって，$v = 1.0\times10^5$m/s

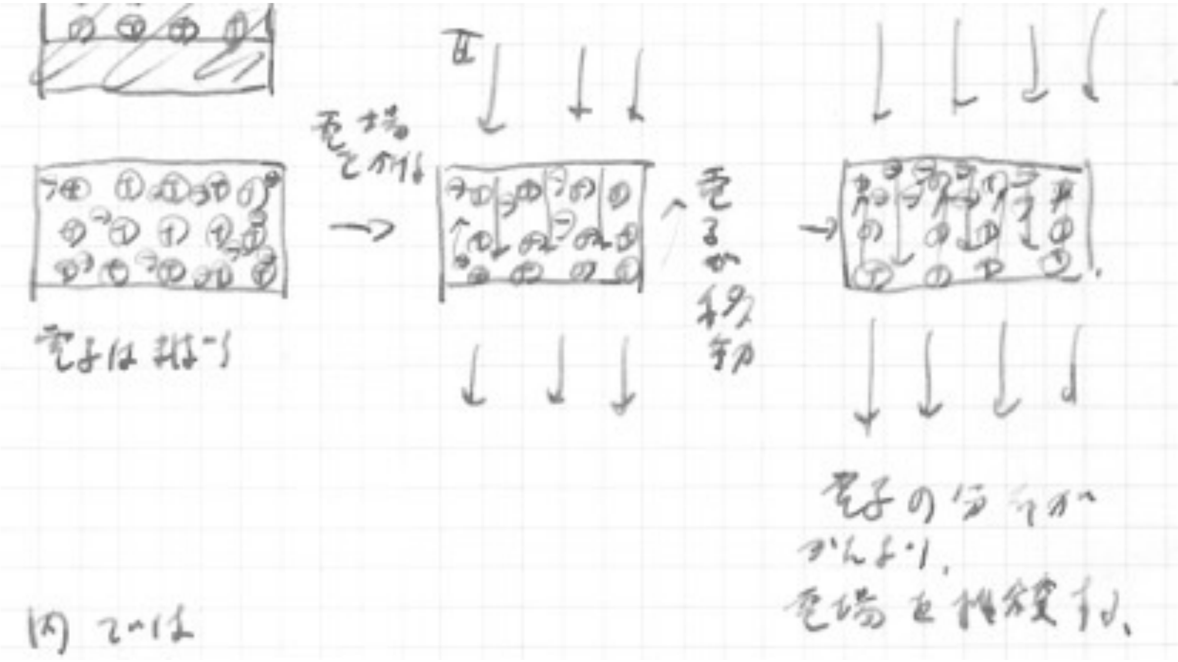
導体

導体とは

- 電気を伝える物質
  - 導体
- 電気を伝えない物質
  - 不導体，絶縁体

導体と電場

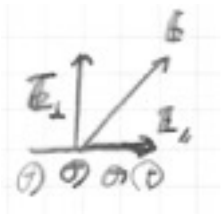
- 電場中に導体を置くとどうなるか？

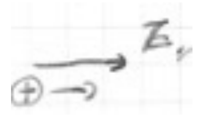


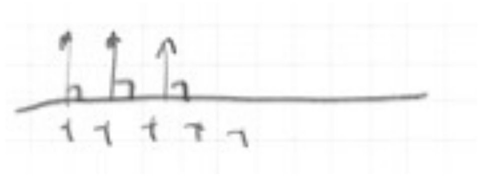
- 導体内では
  - 電場が0
  - 電位が一定（接地すると0）

導体表面の電場

- 導体表面に電荷が一様に分布しているとき
- もし電場が導体面に対し斜めなら，電場は導体面に対し平行な成分を持つ.
- そうならば，導体表面の電荷は電場によって移動し続けることになる.
- つまり，電場が導体面に対し斜めなら，導体表面に電荷は一様に分布できない.
- よって，**電場は導体表面に対し垂直**でなければならない.



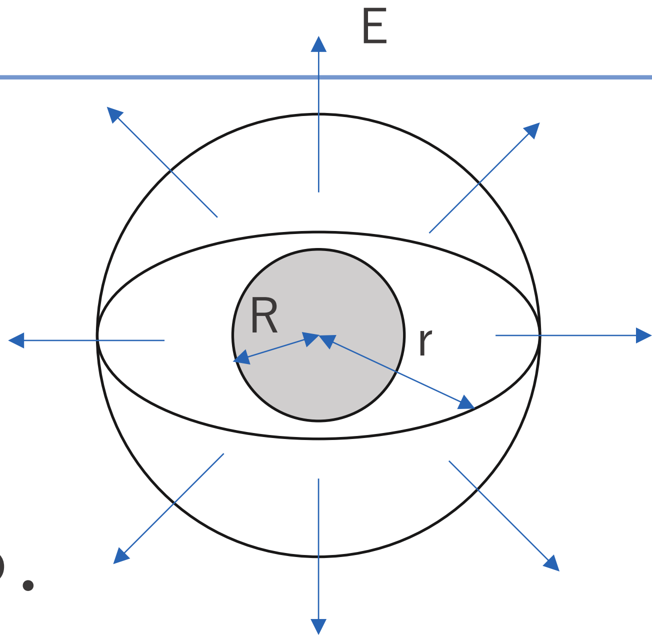




導体球に分布する電荷が作る電場

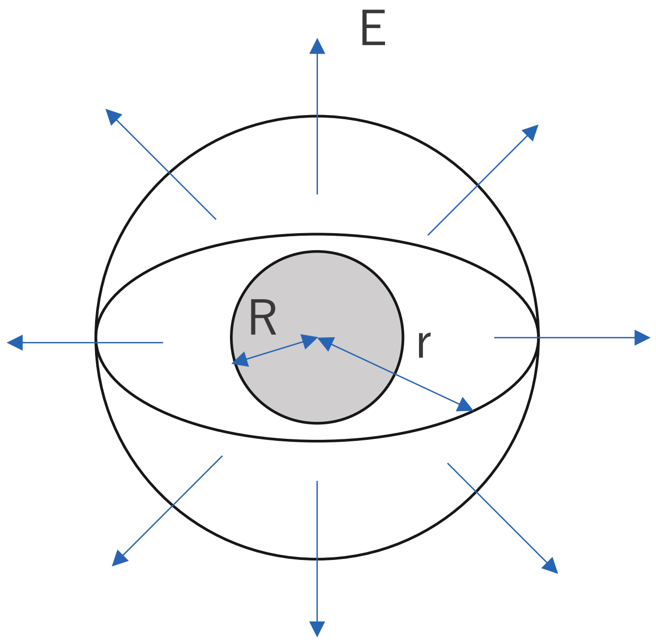
- 半径Rの導体球に電荷Qが分布しているとする．
- この球の中心からrの場所の電場を求める．

- 電荷が分布している球と同心の半径rの球を考える．
- $R < r$の時，
- 導体の電荷はQだから，よってガウスの法則より
- $4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
- $E = \frac{Q}{4\varepsilon_0 r^2}$
- $R \leq r$の時，導体内部の電場は0である．



導体球に分布する電荷が作る電位

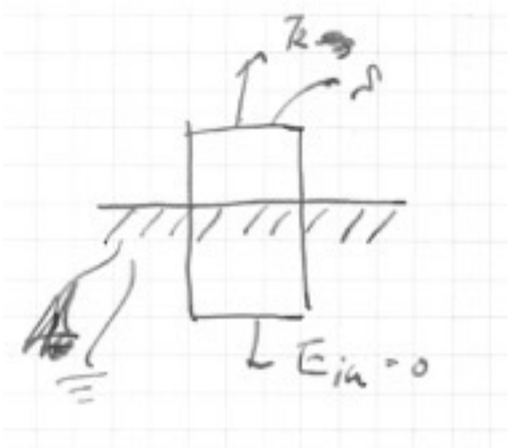
- 半径Rの導体球に電荷Qが分布しているときの電位を求める．ただし，無限遠方を基準とする．
- 電荷が分布している球と同心の半径rの球を考える．
- $R < r$の時の電場は$E = \frac{Q}{4\varepsilon_0 r^2}$だから，電位は
- $V = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\varepsilon_0 x^2} dx = \left[\frac{Q}{4\varepsilon_0 x}\right]_{\infty}^{r} = \frac{Q}{4\varepsilon_0 x}$
- $R \leq r$の時，導体内部の電場は0なので，電位は
- $V = \frac{Q}{4\varepsilon_0 x}$



無限に広い導体平面にある電荷が生成する電場と電位

- 無限に広い導体表面に面密度 σ で電荷が帯電しているとする．
- この時生じる電場を求める．

- 図のように底面積Sの四角柱を考える．導体が作る電気力線は，導体表面に対し垂直であるので，電場は四角柱の側面から出ない．さらに，導体中は電場は無い．よってガウスの法則は
- $ES = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$
- とかける．電場Eは
- $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$



無限に広い導体平面にある電荷が生成する電場と電位

- 無限に広い導体平面にある電荷が作る電場Eは
- $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$
- である．では電位は導体表面を基準とし導体表面からの距離をdとすると，
- $V = -\int_d^0 \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0}$
- つまり，電位は導体表面からの距離に比例する．