電気工学2第6回

藤田 一寿

電気容量とコンデンサ

コンデンサ（キャパシタ）

- コンデンサ
  - 電荷を貯めることができる.
- コンデンサの両端電位差Vの時，コンデンサに貯まる電荷Qは
- $Q = CV$
- 比例定数Cは電気容量という.
- 電気容量の単位は F（ファラデー，ファラッド）

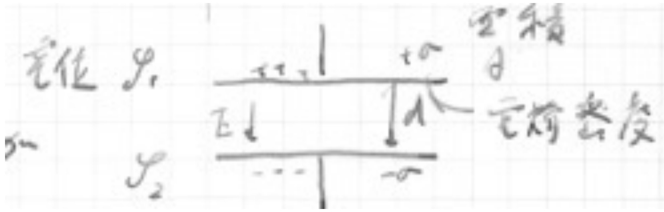
導体球の電気容量

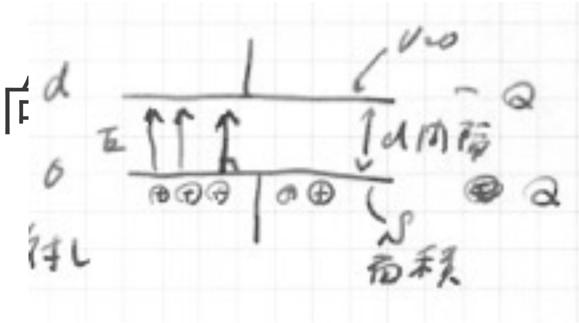
- 単なる導体球も電化を貯めることができるため，コンデンサと見ることができる．

- 半径Rの導体球の電気容量を求める．
- 導体球Qを与えたとすると周囲の電場はガウスの法則より
- $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
- $E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$
- 無限遠方との導体表面の電位差は
- $V = -\int_{\infty}^{R} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R}$
- $Q = CV$より
- $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$　これが導体球の電気容量

平行板コンデンサ

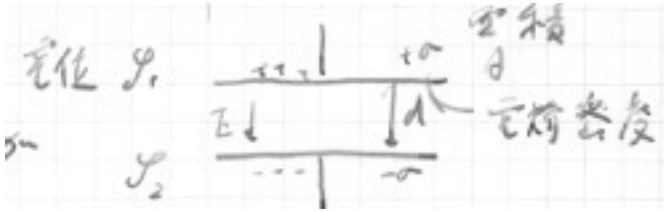
- 一般的にコンデンサとして用いられる平行板コンデンサの電気容量を求める．
- それぞれの板に電荷密度ρと-ρで帯電しているとする．
- 電荷密度ρで帯電している板をが生成する電場E_+は誘電率を ε_0とすると
- $2dSE_+ = \frac{\rho dS}{\varepsilon_0}$
- $E_+ = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}$
- 電荷密度-ρで帯電している板が生成する電場$E_$は
- $E\_ = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}$
- 平行板の間の電場は，それぞれの板が生成する電場は同じ
- $E = E_+ + E\_ = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

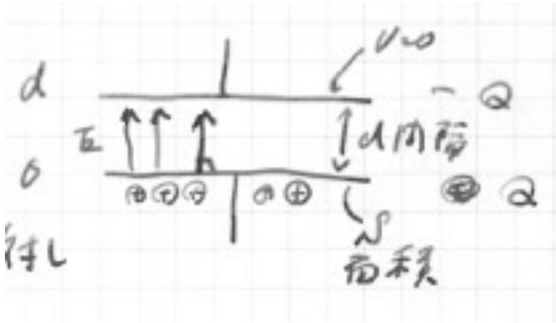




平行板コンデンサ

- 平行板の電位差Vは，平行板の間隔をdとすると
- $V = -\int_d^0 \frac{\rho}{\varepsilon_0} dx = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}$
- 電荷密度ρは板に帯電している電荷をQ，板の面積をSとすると
- $\rho = \frac{Q}{S}$
- よってVは
- $V = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$
- Q=CVより
- $C = \frac{\varepsilon_0 SQ}{Qd} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ これが平行板コンデンサの電気容量





■ 平行板コンデンサの内の電圧

- 平行板コンデンサ内の電場は
- $E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- 平行板コンデンサの平行板と距離dの場所の電位差（電圧）Vは
- $V = \int_0^d E dx = Ed = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}$
- つまり，平行板コンデンサ内の電圧は平行板からの距離に比例する．

問題

- 真空中で，半径0.12mの2枚の金属板を2.0×10^{-3}mの間隔で平行に向かい合わせて，各金属板に絶対値5.0×10^{-8}Cの正負電荷を与える．真空の誘電率を8.85×10^{-12}F/mとする．
- 1. コンデンサの電気容量はいくらか．
- 2. 金属板の間に生じた電位差は何Vか．

1. $C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}=\frac{8.85\times10^{-12}\times0.12\times0.12\times3.14}{2.0\times10^{-3}}=0.20\times10^{-12+3}=2.0\times10^{-10}$F

2. Q=CVより

$$V=\frac{Q}{C}=\frac{5.0\times10^{-8}}{2.0\times10^{-10}}=2.5\times10^{2}$$

覚える

- 平行板コンデンサの静電容量
- $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$
- 平行板コンデンサ内の電圧は距離に比例

問題

- 真空中で，半径0.12mの2枚の金属板を2.0×10^{-3}mの間隔で平行に向かい合わせて，各金属板に絶対値5.0×10^{-8}Cの正負電荷を与える．真空の誘電率を8.85×10^{-12}F/mとする．
- 1. コンデンサの電気容量はいくらか.
- 2. 金属板の間に生じた電位差は何Vか.

問題

- 2つのコンデンサA，Bがある．平行板の面積比は2:1，平行板の間隔の比は3:2で，Aの電気容量は6.0 μFである．Bの容量は何 μFか．

問題

- 2つのコンデンサA，Bがある．平行板の面積比は2:1，平行板の間隔の比は3:2で，Aの電気容量は6.0μFである．Bの容量は何μFか．

コンデンサAの電気容量は

$$C_A = \frac{\varepsilon_0 S_A}{d_A}$$

コンデンサBの電気容量は

$$C_B = \frac{\varepsilon_0 S_B}{d_B} = \frac{\varepsilon_0 S_A/2}{2d_A/3} = \frac{3}{4}\frac{\varepsilon_0 S_A}{d_A}$$

よってコンデンサBの電気容量は4.5μFである．

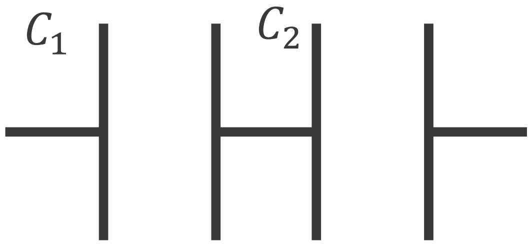
コンデンサを用いた回路

コンデンサを用いた単純な回路

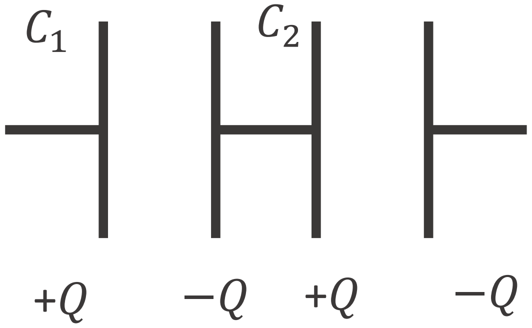
- コンデンサを直列につないだらどうなるか？

コンデンサの直列回路

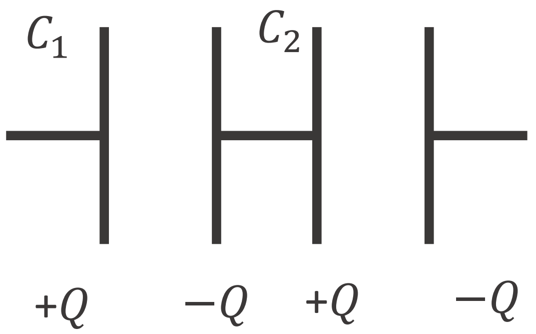
- コンデンサを直列につないだらどうなるか？



- 電圧Vを加えるとコンデンサには電荷がたまる．C1とC2は導線でつながっているので，つながっている板には同じ量の電荷がたまる．

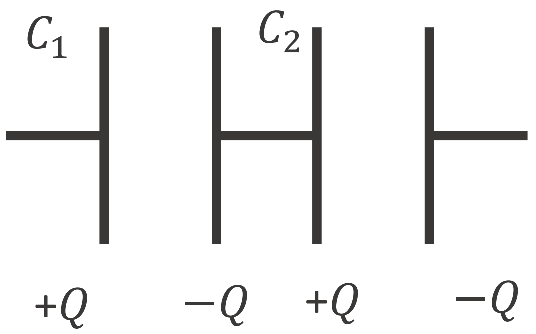


コンデンサの直列回路



- 接続する電極にたまる電荷の量は同じので
- $Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$
- よって
- $\frac{C_1}{C_2} = \frac{V_2}{V_1}$
- また，直列接続なのでC1とC2の電圧降下の和は電源電圧を等しいので
- $V = V_1 + V_2$
- よってそれぞれのコンデンサに加わる電圧は
- $V_2 = \frac{C_1}{C_2} V_1, V = V_1 + \frac{C_1}{C_2} V_1 = \frac{C_1 + C_2}{C_2} V_1$
- $V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V, V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V$

コンデンサの直列回路

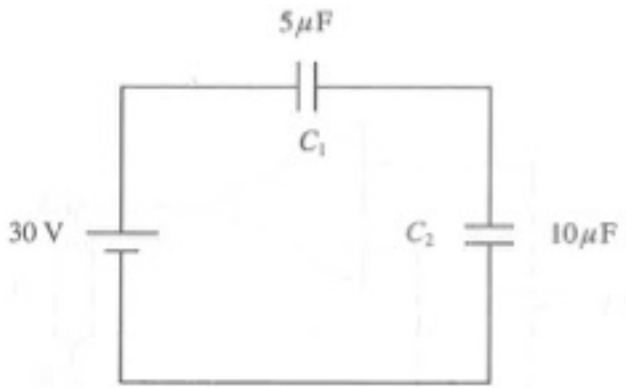


- 合成静電容量Cは
- $Q = CV = C_1V_1$
- $C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$

- 実は合成静電容量は次の式で求められる.
- $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$
- この式は，抵抗の並列回路の合成抵抗を求める式と同じ形になっている.

問題解説

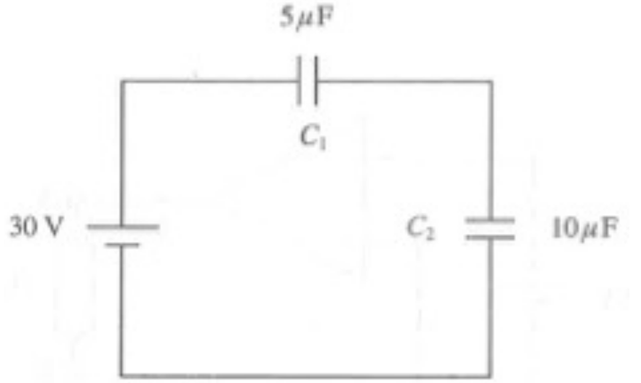
- 図の回路でコンデンサC2の両端電圧[V]はいくらか．（第34回ME2種）



1. 3
2. 5
3. 10
4. 15
5. 20

問題解説

- 図の回路でコンデンサC2の両端電圧[V]はいくらか．（第34回ME2種）

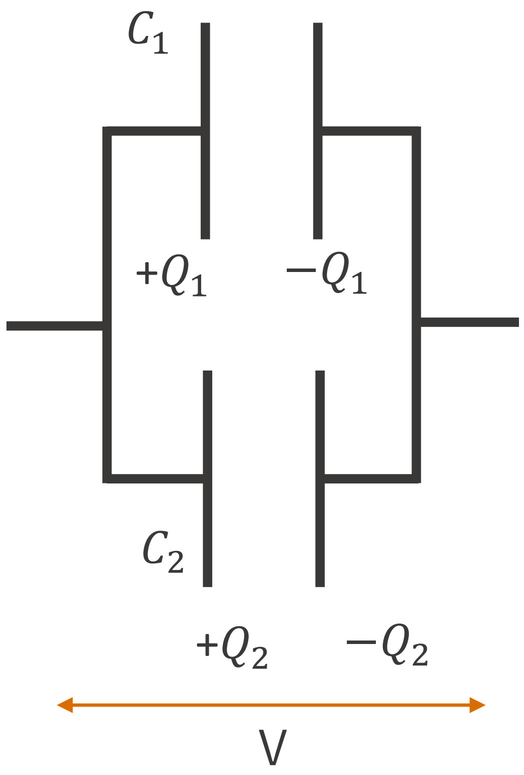


1. 3
2. 5
3. 10
4. 15
5. 20

$$V = V_{C_1} + V_{C_2}$$
$$Q = C_1 V_{C_1} = C_2 V_{C_2}$$
$$V_{C_1} = \frac{C_2}{C_1} V_{C_2}$$
$$V = \frac{C_2}{C_1} V_{C_2} + V_{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1} V_{C_2}$$
$$V_{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V = \frac{5}{10 + 5} \times 30 = \frac{1}{3} \times 30 = 10$$

コンデンサの並列回路

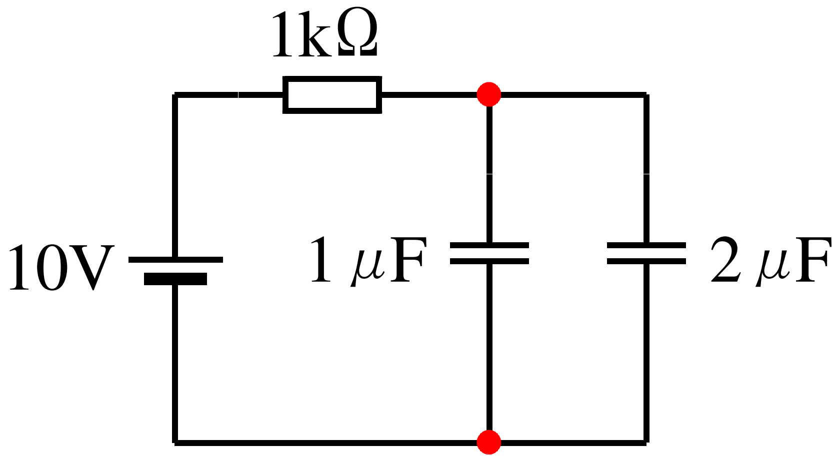
- 並列回路なのでコンデンサに加わる電圧はすべて等しいので，それぞれのコンデンサにたまる電荷Q1，Q2は
- $Q_1 = C_1V, Q_2 = C_2V$
- コンデンサにたまる電荷の総量Qは
- $Q = Q_1 + Q_2 = C_1V + C_2V$
- よって合成静電容量は
- $Q = CV$
- $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1+Q_2}{V} = C_1 + C_2$
- この式は，抵抗の直列回路の合成抵抗と同じ形になっている．



問題解説

- 図の回路で2 μ Fのキャパシタに蓄積される電荷[μ C]はどれか．(第40回ME2種)

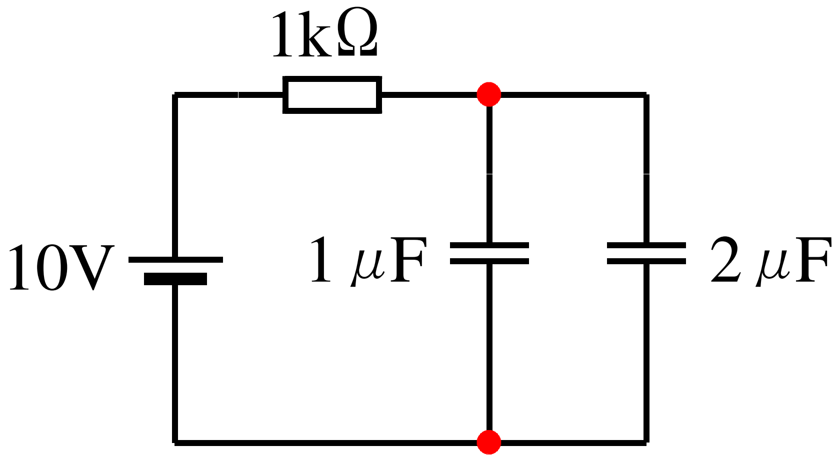
1. 1
2. 2
3. 10
4. 20
5. 30



問題解説

- 図の回路で2μFのキャパシタに蓄積される電荷[μC]はどれか．(第40回ME2種)

1. 1
2. 2
3. 10
4. 20
5. 30



直流回路のとき，定常状態になるとキャパシタのインピーダンスは無限大である．よって，キャパシタで10Vの電圧降下が起こる．2つのキャパシタは並列につながっているので，それぞれ10Vの電圧が加わっている．よって，2μFのキャパシタに溜まった電荷Qは

$Q = 2\mu F * 10V = 20\mu C$

コンデンサと誘電体

平行板の間に誘電体を入れた場合

- これまでは，すべて真空中である場合を想定していた．もし，平行板コンデンサの平行板の間に物質（誘電体）があった場合どうなるか？

- 誘電率が変わるだけ．
- 誘電率 ε の物質を平行板コンデンサに挿入したときの電気容量は
- $C = \varepsilon \frac{S}{d}$
- 誘電率と真空の誘電率の比を比誘電率 $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ という．

問題

- 電気容量Cのコンデンサに電圧Vの電池を接続し，これを外してから，極板間に比誘電率 $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$の誘電体を満した．極板間の電圧は何Vか.

問題

- 電気容量Cのコンデンサに電圧Vの電池を接続し，これを外してから，極板間に比誘電率 $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ の誘電体を満した．極板間の電圧は何Vか.

コンデンサにたまった電荷をQ，誘電体の挿入後の電圧をV’とすると

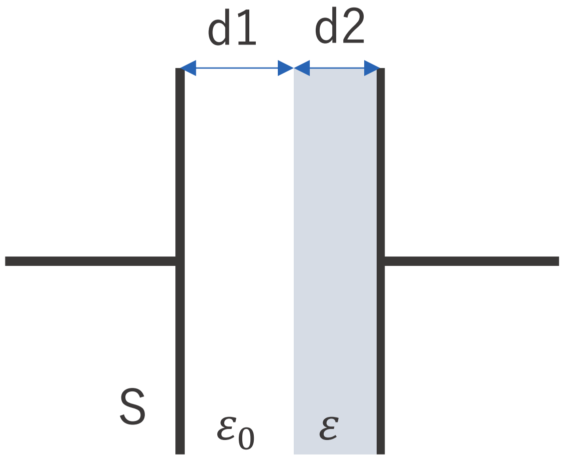
$$Q = CV = \varepsilon_0 \frac{S}{d} V = \varepsilon \frac{S}{d} V'$$

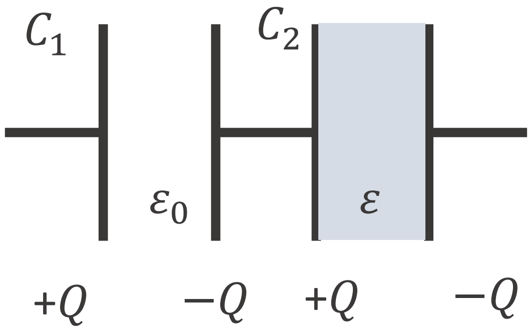
よって

$$V' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} V = \varepsilon_r V$$

■ 平行板の間に誘電体を入れた場合

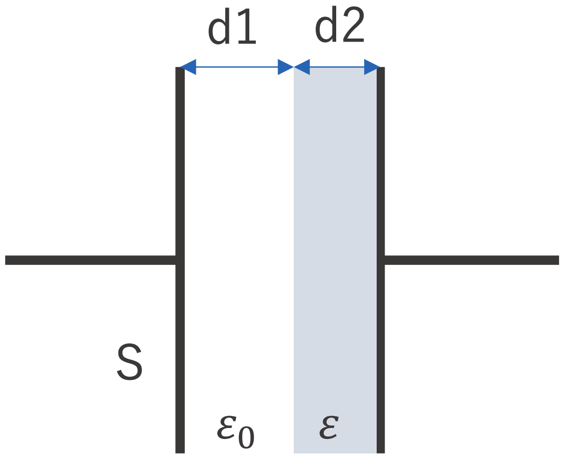
- もし，左図のように平行板コンデンサの平行板の間に厚さd2の誘電体があった場合どうなるか？

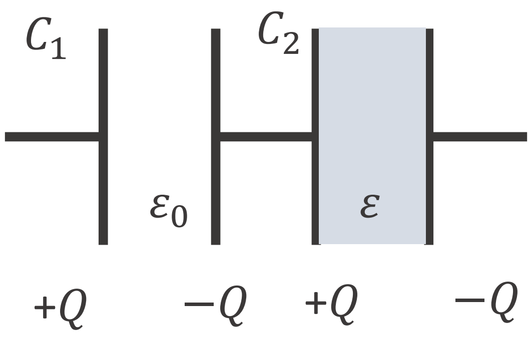




- 右図のように2種類のコンデンサが直列接続していると考える．平行板の面積をSとする．

平行板の間に誘電体を入れた場合

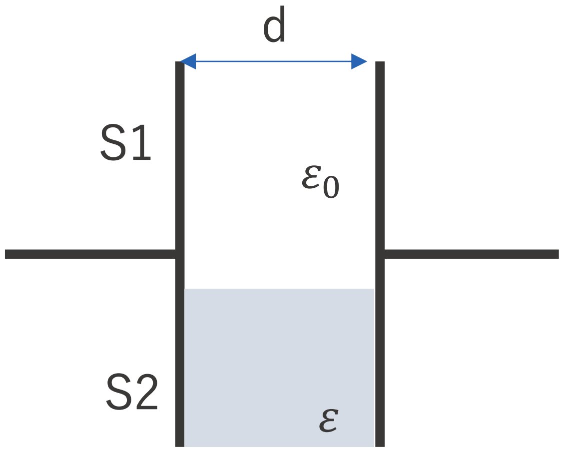


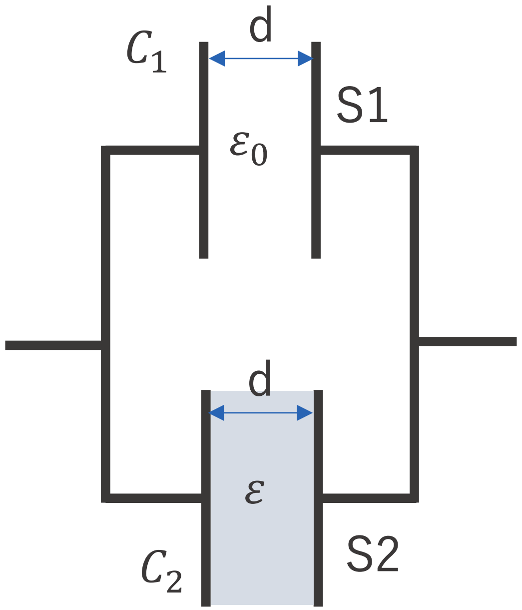


- 右図のように誘電体が挿入された部分とそれ以外とを異なるコンデンサであるとみなす．この2つコンデンサの合成電気容量Cは
- $C = \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2}$
- である．　それぞれの電気容量は$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1}$，　$C_2 = \varepsilon \frac{S}{d_2}$なので
- $C = \frac{\varepsilon_0 \frac{S}{d_1} \varepsilon \frac{S}{d_2}}{\varepsilon_0 \frac{S}{d_1} + \varepsilon \frac{S}{d_2}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{\varepsilon_0 d_2 + \varepsilon d_1}$

平行板の間に誘電体を入れた場合

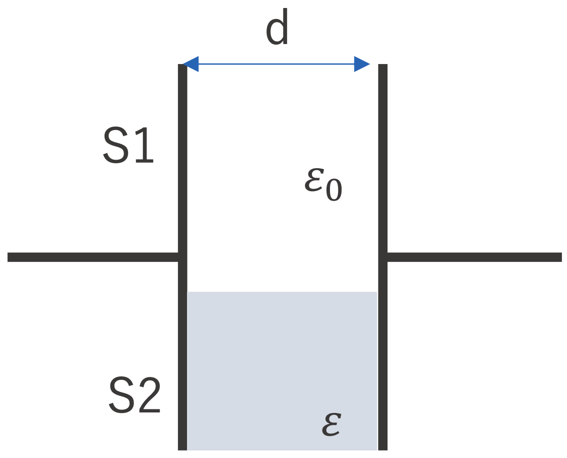
- 左図のように平行板コンデンサを面積S2の一部分だけ誘電体で満たすとする．このコンデンサの電気容量はどうなるだろうか
-

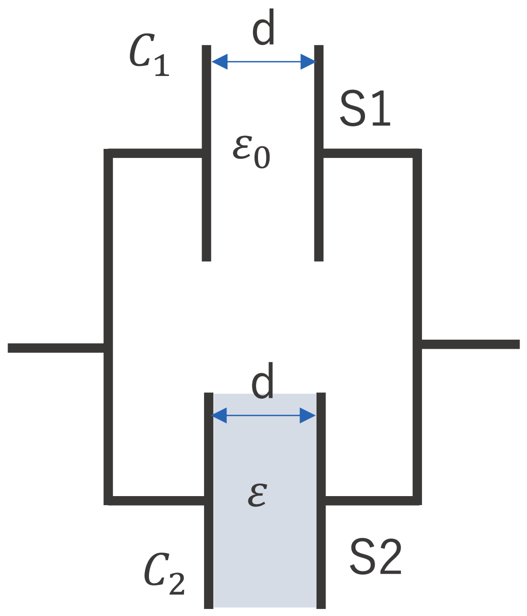




- 右図のように2種類のコンデンサが並列接続していると考える．平行板の間隔をdとする．

平行板の間に誘電体を入れた場合

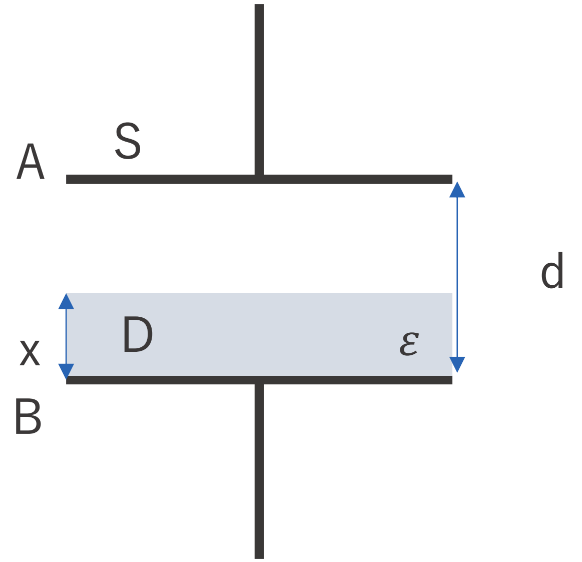




- 右図のように誘電体が挿入された部分とそれ以外とを異なるコンデンサであるとみなす．この2つコンデンサの合成電気容量Cは
- $C = C_1 + C_2$
- である． それぞれの電気容量は$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S_1}{d}$， $C_2 = \varepsilon \frac{S_2}{d}$なので
- $C = \varepsilon_0 \frac{S_1}{d} + \varepsilon \frac{S_2}{d} = \frac{\varepsilon_0 S_1 + \varepsilon S_2}{d}$

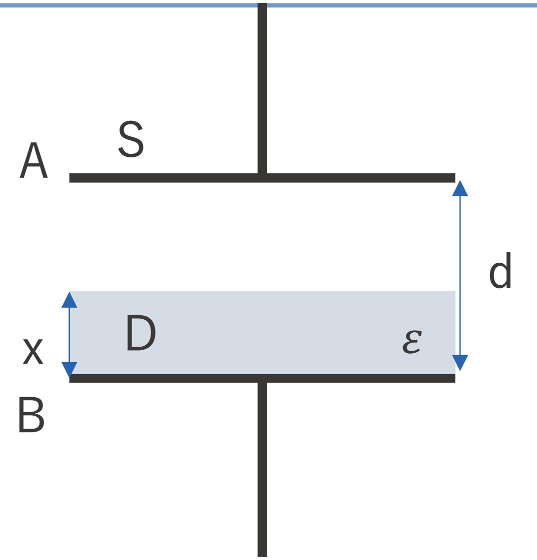
問題解説

- 極板A, Bの間隔がdで，極板間が真空のコンデンサがあり，電池により常に電位差Vに保たれている．この間に，厚さxで比誘電率 ε の誘電体DをBに接して挿入した．
- 1. DのA側の表面とBとの電位差を求めよ．
- 2. Aの電荷Q’はDを挿入する前のQの何倍か．



問題解説

- 極板A，Bの間隔がdで，極板間が真空のコンデンサがあり，電池により常に電位差Vに保たれている．この間に，厚さxで比誘電率εの誘電体DをBに接して挿入した．
- 1. DのA側の表面とBとの電位差を求めよ．
- 2. Aの電荷Q’はDを挿入する前のQの何倍か．



1. AD間の電位差をV1，求める電位差をV2，AD間の電気容量をC1，Dの電気容量をC2とすると

$$Q=V_1C_1=V_2C_2$$

$$V_1=\frac{C_2}{C_1}V_2$$

$V=V_1+V_2$なので

$$V=\frac{C_2}{C_1}V_2+V_2=\frac{C_1+C_2}{C_1}V_2$$

よって

$$V_2=\frac{C_1}{C_1+C_2}V=\frac{\frac{\varepsilon_0 S}{d-x}}{\frac{\varepsilon_0 S}{d-x}+\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{x}}V=\frac{x}{x+\varepsilon(d-x)}V$$

2. 誘電体を挿入する前の電荷は

$$Q=CV=\frac{\varepsilon_0 S}{d}V$$

誘電体を挿入した後の電荷は，各電極にたまる電荷量は等しいので，

$$Q'=C_2V_2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{x}\frac{x}{x+\varepsilon(d-x)}V=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{x+\varepsilon(d-x)}V$$

よって

$$\frac{Q'}{Q}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{x+\varepsilon(d-x)}V\times\frac{d}{\varepsilon_0 SV}=\frac{\varepsilon d}{x+\varepsilon(d-x)}$$

コンデンサのエネルギー

静電場のエネルギ

- 電荷qを電場E中を場所r1からr2に移動させるときに必要な仕事Wは
- $W\ = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} q\boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} = -q\left(\int_{\infty}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r} - \int_{\infty}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{r}\right) = q\left(\phi(r_2) - \phi(r_1)\right)$

コンデンサに蓄えられるエネルギー

- コンデンサに蓄えられるエネルギーWは，静電容量C，電圧Vとすると次のように表される．

$$W = \frac{1}{2}CV^2$$

おまけ

平行板が十分広いと仮定→Eは一定

電位 $V = \int E\,dx = Ex$

$E = \frac{V}{x}$

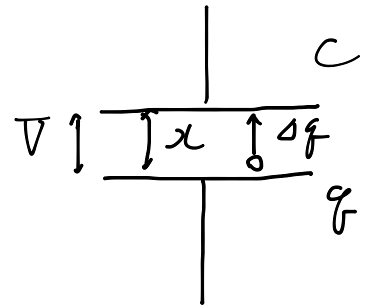
平行板に電荷 q がたまっているとする.

Δq の電荷を平行板間移動させるのに必要なエネルギー ΔU は

$\Delta U = \int F\,dx = \int \Delta q E\,dx = \Delta q E x = \Delta q V = \Delta q \frac{q}{C}$

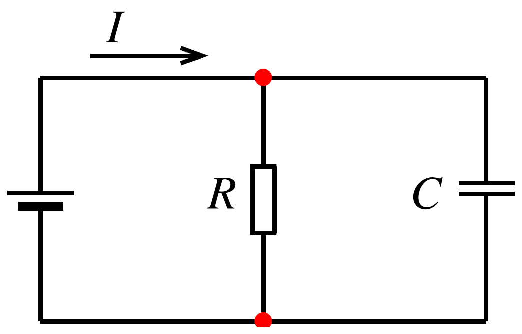
電荷を0からQまでためるのに必要なエネルギーは

$U = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{C^2V^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$



問題解説

- 図の回路のキャパシタに蓄えられているエネルギー[J]はどれか.
  (第41回ME2種)

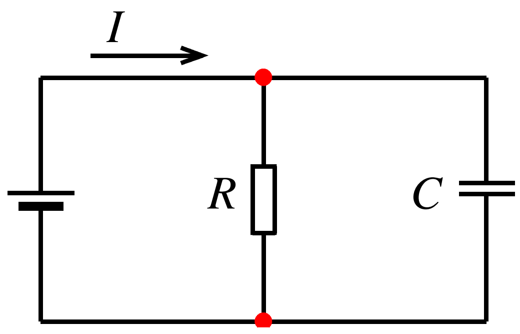


1. CRI^2
2. $\dfrac{CR}{2I^2}$
3. $\dfrac{I}{2CR}$
4. $\dfrac{CIR}{4}$
5. $\dfrac{CI^2R^2}{2}$

問題解説

- 図の回路のキャパシタに蓄えられているエネルギー[J]はどれか.（第41回ME2種）

1. CRI^2
2. $\dfrac{CR}{2I^2}$
3. $\dfrac{I}{2CR}$
4. $\dfrac{CIR}{4}$
5. $\dfrac{CI^2R^2}{2}$



キャパシタに加わる電圧は，並列回路なので抵抗Rに加わる電圧と等しい．また，直流電源の場合，定常状態になるとCのインピーダンスは無限大となり，キャパシタは開放と見なせる．つまり，電流Iは，すべて抵抗Rに流れる．よって，キャパシタに加わる電圧Vは

$V = IR$

である．キャパシタに蓄えられるエネルギーWは，

$W = CV^2/2$

$= CI^2R^2/2$