

電気工学2第7回

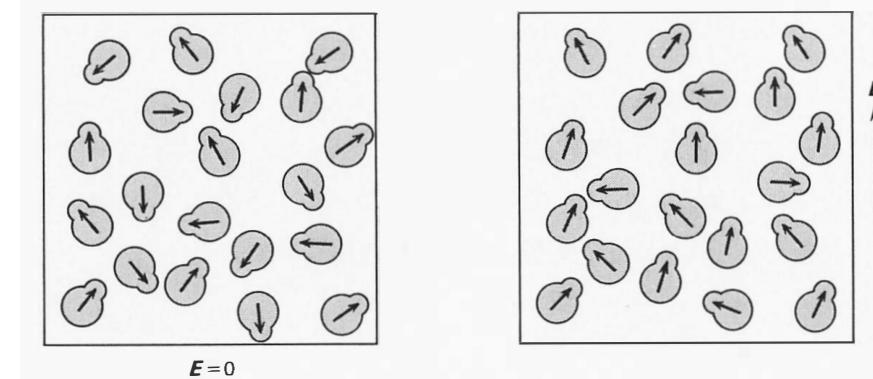
藤田 一寿

工学の人は磁界とよく言いますが、この講義では磁場とします。

コンデンサと誘電体

■ 誘電体

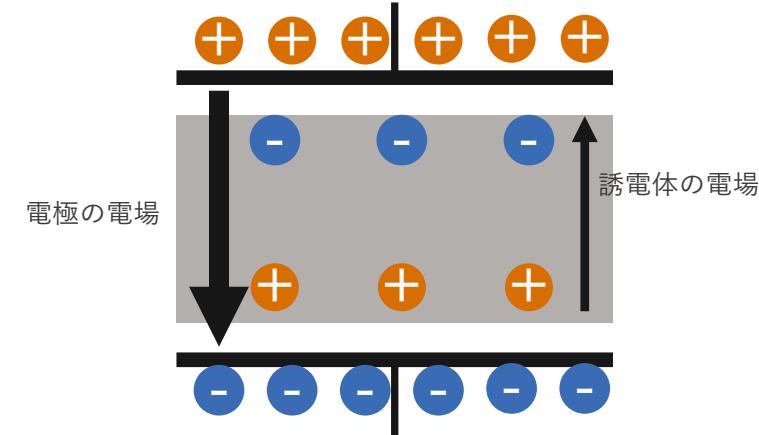
- 電場中に絶縁体を入れた場合どうなるか？
- 絶縁体には自由電子がない。しかし、電気的性質を持った分子で構成される。
- 外部から絶縁体に電場をかけると、内部に電気的な性質を持つ分子が電場の方向に向こうとする。このように見たとき絶縁体を誘電体という。



(長岡, 電磁気学2)

■ 誘電体

- 外部から絶縁体に電場をかけると、内部に電気的な性質を持つ分子が電場の方向に向こうとする。
- そうすると、電場方向に向いた分子により誘電体内に電場が生じる。
- そのため、コンデンサに絶縁体を入れると、電極により生成された電場が誘電体により少し打ち消され、その結果コンデンサの電圧も下がる。



■ 平行板の間に誘電体を入れた場合

- これまで、すべて真空中である場合を想定していた。もし、平行板コンデンサの平行板の間に誘電体があった場合どうなるか？

- 誘電率が変わるだけ。

- 誘電率 ϵ の物質を平行板コンデンサに挿入したときの電気容量は

$$\bullet C = \epsilon \frac{S}{d}$$

- 誘電率と真空の誘電率の比を比誘電率 $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ という。



■ 問題

- 電気容量Cのコンデンサに電圧Vの電池を接続し、これを外してから、極板間に比誘電率 $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ の誘電体を満した。極板間の電圧は何Vか。

■ 問題

- 電気容量Cのコンデンサに電圧Vの電池を接続し、これを外してから、極板間に比誘電率 $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ の誘電体を満した。極板間の電圧は何Vか。

コンデンサにたまつた電荷をQ、誘電体の挿入後の電圧をV' とすると

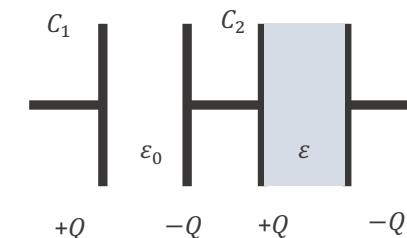
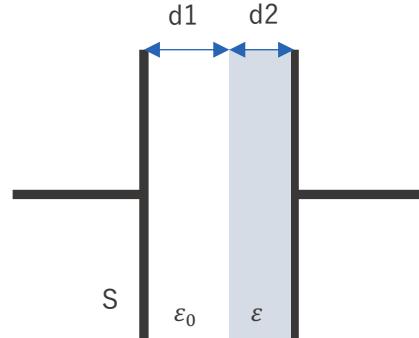
$$Q = CV = \varepsilon_0 \frac{S}{d} V = \varepsilon \frac{S}{d} V'$$

よって

$$V' = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} V = \frac{1}{\varepsilon_r} V$$

■ 平行板の間に誘電体を入れた場合

- もし、左図のように平行板コンデンサの平行板の間に厚さ d_2 の誘電体があった場合どうなるか？



- 右図のように2種類のコンデンサが直列接続していると考える。平行板の面積を S とする。

■ 平行板の間に誘電体を入れた場合

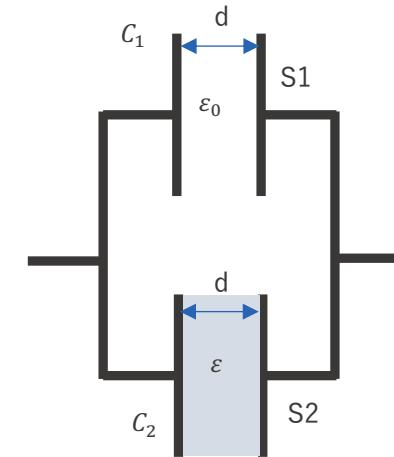
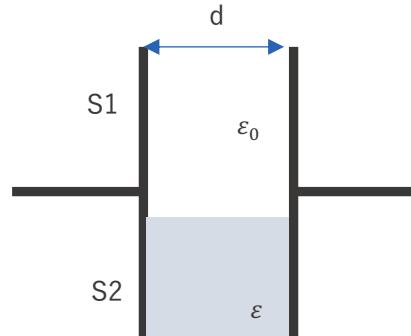


- 右図のように誘電体が挿入された部分とそれ以外とを異なるコンデンサであるとみなす。この2つコンデンサの合成電気容量Cは
- $$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$
- である。それぞれの電気容量は $C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d_1}$ ， $C_2 = \epsilon \frac{S}{d_2}$ なので
- $$C = \frac{\epsilon_0 \frac{S}{d_1} \epsilon \frac{S}{d_2}}{\epsilon_0 \frac{S}{d_1} + \epsilon \frac{S}{d_2}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{\epsilon_0 d_2 + \epsilon d_1}$$

■ 平行板の間に誘電体を入れた場合

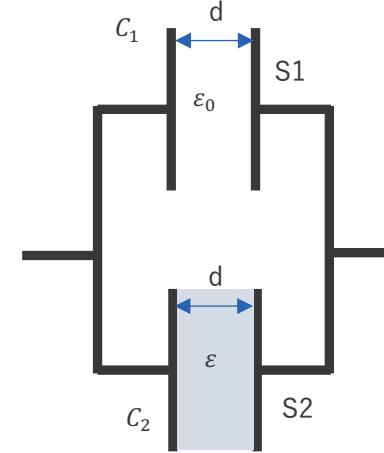
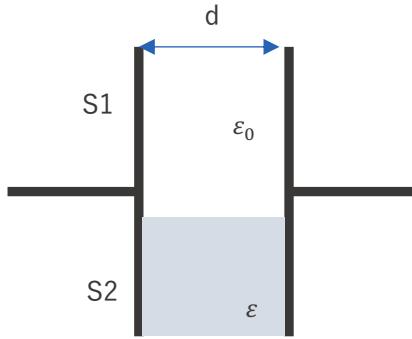
- 左図のように平行板コンデンサを面積S2の一部分だけ誘電体で満たすとする。このコンデンサの電気容量はどうなるだろうか

•



- 右図のように2種類のコンデンサが並列接続していると考える。平行板の間隔を d とする。

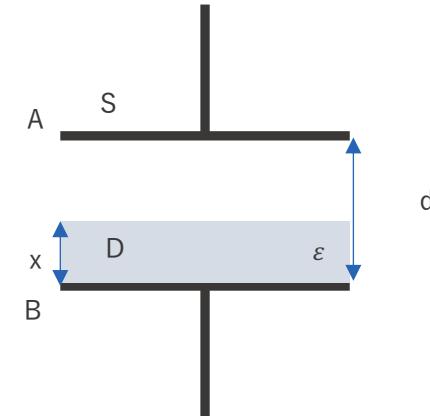
■ 平行板の間に誘電体を入れた場合



- 右図のように誘電体が挿入された部分とそれ以外とを異なるコンデンサであるとみなす。この2つコンデンサの合成電気容量Cは
- $C = C_1 + C_2$
- である。それぞれの電気容量は $C_1 = \epsilon_0 \frac{S_1}{d}$, $C_2 = \epsilon \frac{S_2}{d}$ なので
- $C = \epsilon_0 \frac{S_1}{d} + \epsilon \frac{S_2}{d} = \frac{\epsilon_0 S_1 + \epsilon S_2}{d}$

■ 問題解説

- ・極板A, Bの間隔が d で、極板間に真空のコンデンサがあり、電池により常に電位差 V に保たれている。この間に、厚さ x で比誘電率 ϵ の誘電体DをBに接して挿入した。
- ・1. DのA側の表面とBとの電位差を求めよ。
- ・2. Aの電荷 Q' はDを挿入する前の Q の何倍か。



問題解説

- ・ 極板A, Bの間隔がdで、極板間に真空のコンデンサがあり、電池により常に電位差Vに保たれている。この間に、厚さxで比誘電率 ϵ の誘電体DをBに接して挿入した。
 - ・ 1. DのA側の表面とBとの電位差を求めよ。
 - ・ 2. Aの電荷Q'はDを挿入する前のQの何倍か。
1. AD間の電位差をV1, 求める電位差をV2, AD間の電気容量をC1, Dの電気容量をC2とすると

$$Q = V_1 C_1 = V_2 C_2$$

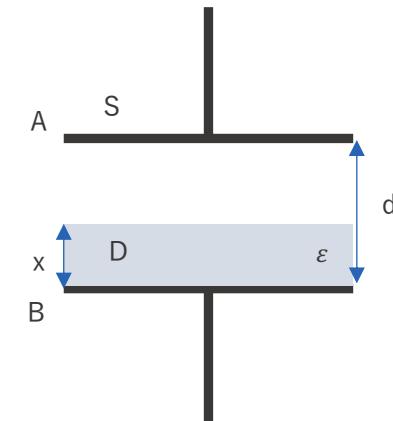
$$V_1 = \frac{C_2}{C_1} V_2$$

$V = V_1 + V_2$ なので

$$V = \frac{C_2}{C_1} V_2 + V_2 = \frac{C_1 + C_2}{C_1} V_2$$

よって

$$V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V = \frac{\frac{\epsilon_0 S}{d-x}}{\frac{\epsilon_0 S}{d-x} + \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{x}} V = \frac{x}{x + \epsilon(d-x)} V$$



問題解説

- ・ 極板A, Bの間隔がdで、極板間に真空のコンデンサがあり、電池により常に電位差Vに保たれている。この間に、厚さxで比誘電率 ϵ の誘電体DをBに接して挿入した。
- ・ 1. DのA側の表面とBとの電位差を求めよ。
- ・ 2. Aの電荷 Q' はDを挿入する前のQの何倍か。

2. 誘電体を挿入する前の電荷は

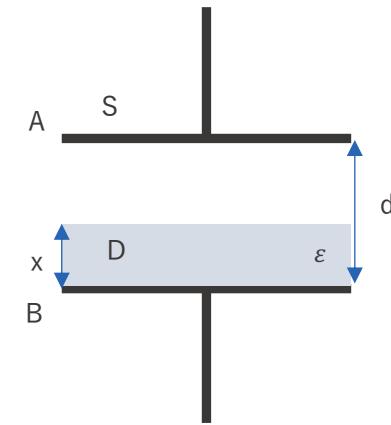
$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 S}{d} V$$

誘電体を挿入した後の電荷は、各電極にたまる電荷量は等しいので、

$$Q' = C_2 V_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{x} \frac{x}{x + \epsilon(d - x)} V = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{x + \epsilon(d - x)} V$$

よって

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{x + \epsilon(d - x)} V \times \frac{d}{\epsilon_0 S V} = \frac{\epsilon d}{x + \epsilon(d - x)}$$



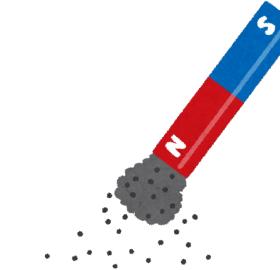
磁石

■ 磁石

- ・鉄を引き寄せる。
- ・N極とS極がある。
 - ・正の磁荷と負の磁荷があるのか？
- ・同極同士は反発する。
- ・異極同士は引き合う
- ・周囲に磁場を形成する。
- ・磁石は小さく切り刻んでも磁石になる。
 - ・正磁荷と負磁荷を切り離せない？



2つに割ってもN極とS極がそれぞれできる。



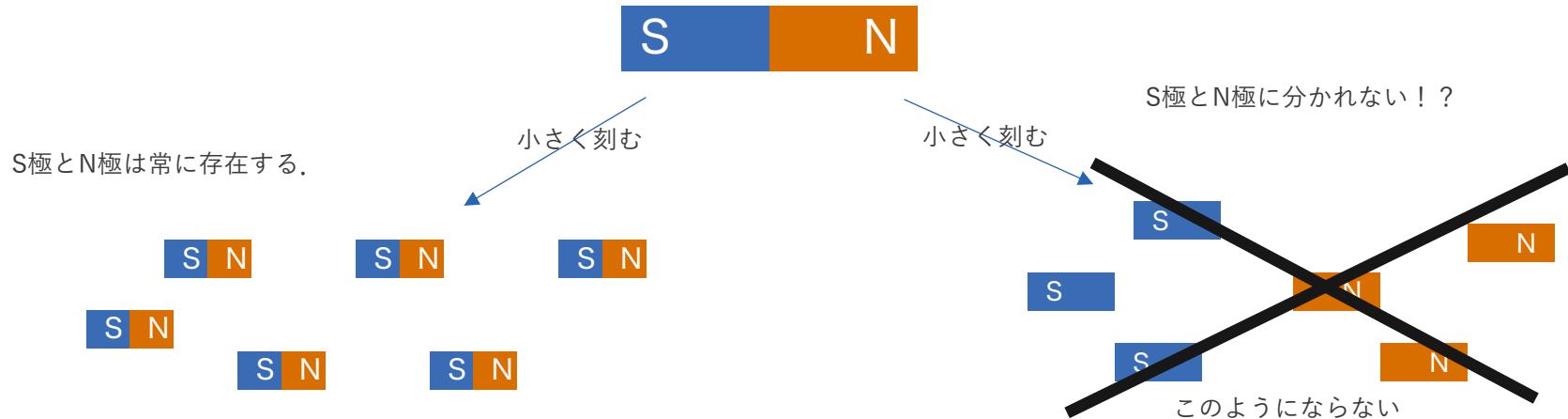
反発する



引き合う

■ 矛盾

- 磁石は小さく切り刻んでもN極とS極が存在する。
 - 正磁荷と負磁荷を切り離せない？
- 磁荷があるとしたら、磁石を切り刻むとN極もしくはS極のみになるはず。
 - 磁荷はない！？



■ 磁荷とクーロンの法則

- 磁石の性質をこれまで学んだ電荷から類推する。
- 磁石では、電荷の代わりに磁荷という仮想の粒子を考えることにする。
- N極には正の磁荷が、S極には負の磁荷があるとする。

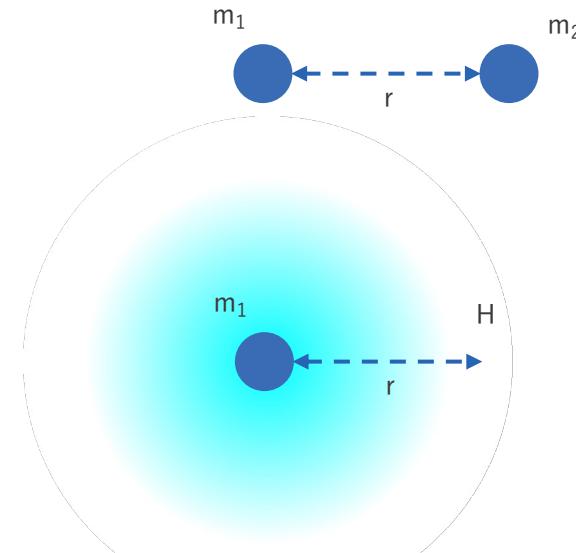


- 距離 r 離れた2つの磁荷 m_1 , m_2 の間に働く力は
- $F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m_1 m_2}{r^2}$
- と表せる。これは磁気に関するクーロンの法則である。
- 磁荷の単位はWb(ウェーバー)とする。また、 μ_0 は真空の透磁率である。

Wbは磁束の量を表す単位であるが、磁荷が磁束を作るとすると磁荷の量と言える。

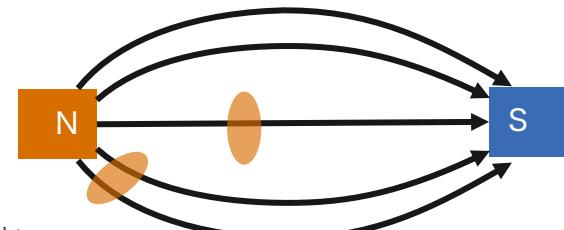
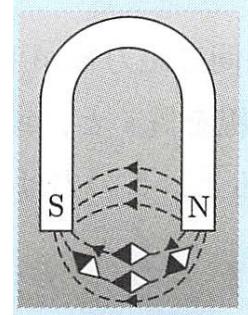
■ 磁場

- 電荷と電場の関係から、磁石も空間へ何らか影響を与えると考える。これを磁場という。
- 磁荷のクーロンの法則、 $F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m_1 m_2}{r^2}$ から単位磁荷あたりの力をHとすると
- $F = mH$
- このHを磁場という。
- 単位はA/m, N/Wbである。



■ 磁力線

- ・磁場の向きと平行になるような曲線を磁力線という。
- ・磁力線はN極からS極に向かう。
- ・単位面積を貫く磁力線の本数を磁束密度という。
- ・磁場が強ければ磁束密度も増える。
- ・磁束密度の単位はT(テスラ)=Wb/m²である。
- ・磁束密度と磁場の関係は
- ・ $B = \mu_0 H$



磁束密度が高い = 磁場が強い

磁束密度が低い = 磁場が弱い

■ 透磁率の例

物質	透磁率
真空	1.257×10^{-6}
銅	1.256629×10^{-6}
鉄	6.3×10^{-3}
ネオジム磁石	1.32×10^{-6}
水	1.256627×10^{-6}

■ 磁場の源

- ・磁石は磁場を作る。
- ・磁石には磁荷が分布しているから、その磁荷が磁場を作っているのか？
- ・エルステッドにより電流が磁場を生成することが分かった（1820年）。
- ・よって電流が磁場の源である。
- ・電流の流れに対し右ねじ方向に磁場ができる。右ねじの法則

■ 磁場の源

- 磁石は磁場を作る。
- 磁石には磁荷が分布しているから、その磁荷が磁場を作っているのか？
- エルステッドにより電流が磁場を生成することが分かった（1820年）。
- よって電流が磁場の源である。

電流が磁場の源なら磁石は何なのだろうか。磁石は難しいから深入りできない…

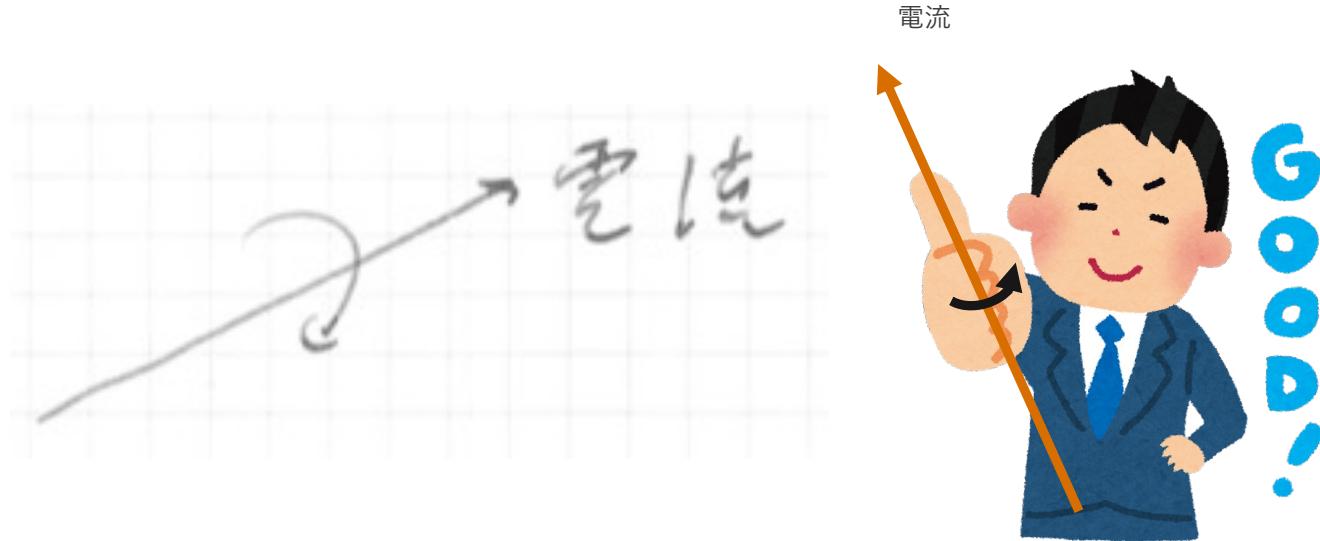
■ エルステッドの実験

- ・左図のように南北に導線を置き、その下に方位磁針を置く。
- ・そうすると方位磁針の針は北を指す。つまり、導線と平行になる。
- ・右図のように導線に南から北に電流を流すと、下において方位磁針の針は北極が西の方向へ向く。



■ 右ねじの法則

- ・電流は周囲に磁場を発生させる。
- ・その磁場の向きは電流の方向に対し右ねじ方向である。
- ・これを右ねじの法則という。

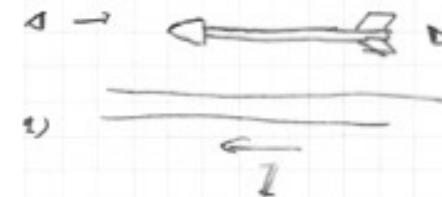
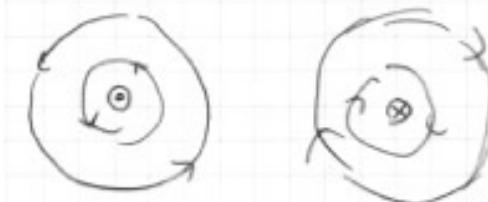


■ 磁場の図の書き方

- ・磁場は磁力線で書く。
- ・電流や磁場はベクトルなので矢印で書く。
- ・しかし、3次元空間のものを2次元平面で書き表す必要がある。
- ・図のように、画面から突き出す方向を点（・）で、画面へ吸い込まれる方向をXで表す。

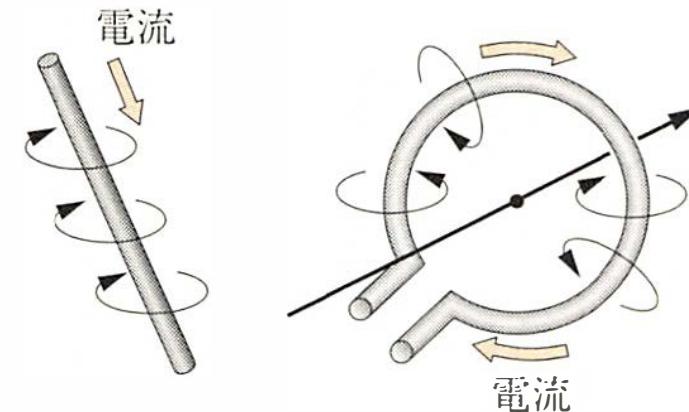
電流の向きに対し反対側から
見たとき。

電流の向きから見たとき



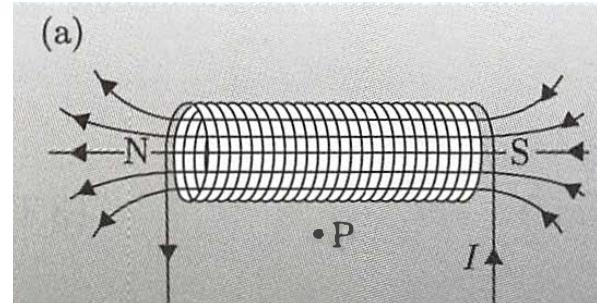
■ 円形コイルが作る磁場

- ・導線を円形にしたものをコイルという。
- ・コイルに電流を流すと、図のような磁場が発生する。
- ・右ねじの法則を適用することで、磁場の様子は想像できる。



■ ソレノイドが作る磁場

- ・筒状に巻いた細長いコイルをソレノイドという。
- ・ソレノイドが作る磁場は図のようになる。
- ・これも、右ねじの法則を適用することで、用意に想像できる。
- ・巻数を増やすほど、流す電流を大きくするほどソレノイドが作る磁場は強くなる。
- ・ソレノイドの作る磁場は後ほど説明するアンペールの法則から求まる、



磁場

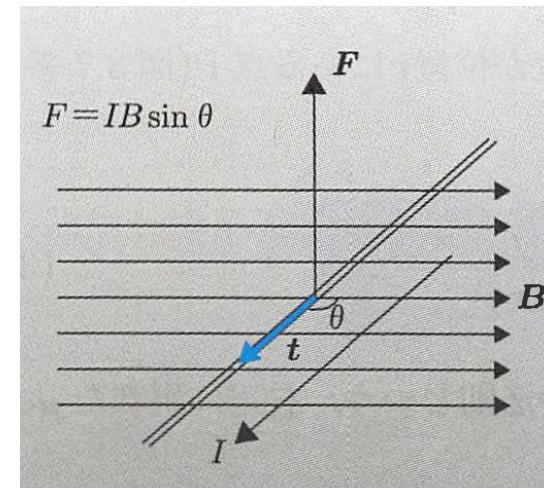
電流が磁場から受ける力

■ 電流が磁場から力を受ける？

- ・磁石はくっついたり離れたりする。
 - ・磁石は磁場を作り、その磁場から力を受けると考える。
 - ・そうすると、磁場を作る電流も磁石のようなもので、磁場から力を受けると考えても良いのではないか。
-
- ・実際に電流も磁場（磁石）から力を受ける。

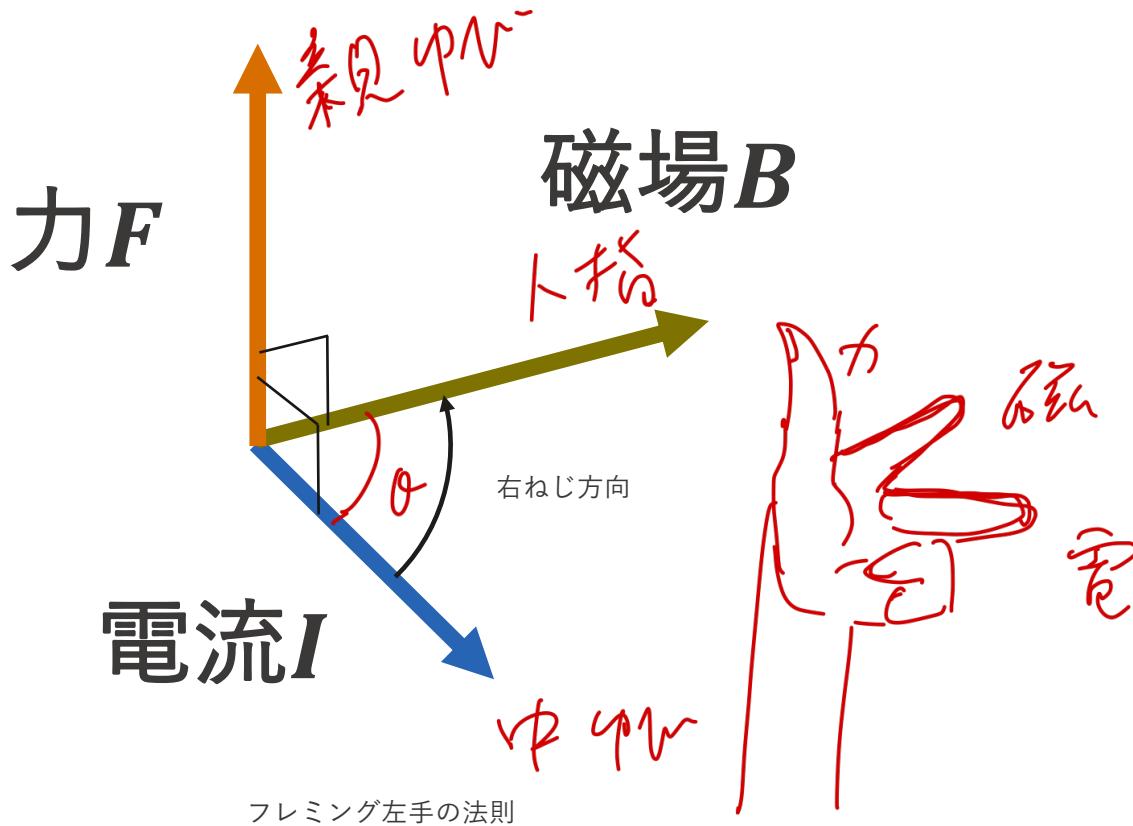
■ 磁場中の電流が受ける力

- 磁束密度 B の磁場の中に、 t 向きに置かれた導線があるとする。
- 導線に電流 I を流すと、 導線に力が働く。このときの単位長さあたりの力は
- $F = I(t \times B)$
- と表せる。この力の大きさは
- $F = IB \sin \theta$
- である。



\times は外積（outer product）を表す。

■ 電流、磁場、力の向きの関係



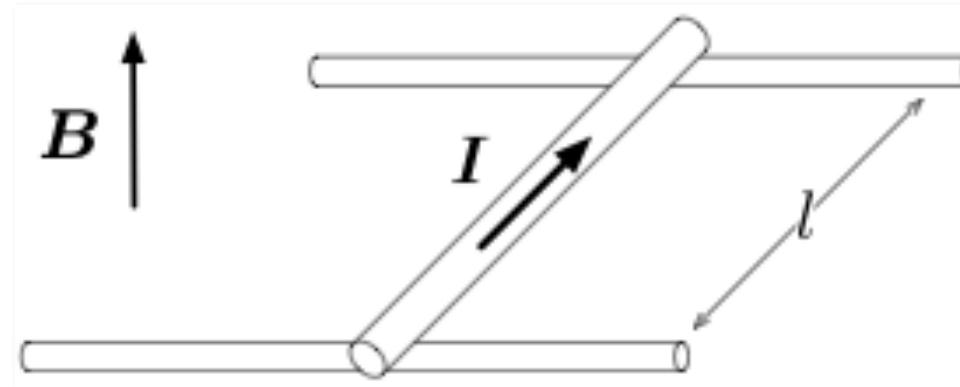
■ どうして電流に力が働くのか？

- ・電流は右ねじ方向に磁場を発生させる。
- ・図のように、下向きの磁場中に画面から向かってくる方向に電流が流れている場合、電流により発生した磁場により、図左側の磁場が強く、右側は弱くなる。
- ・電流付近での磁場の高低差（磁束密度の疎密差）により電流は力を受ける。



■ 問題

- 図のように、2本の十分長い導線が、磁場 B に対し垂直な平面上に幅 l の間隔で平行に存在している。この導線に対し垂直に、導体棒を置き電流 I を流した。
- 力の向きを答えよ。
 - 力の大きさを求めよ。



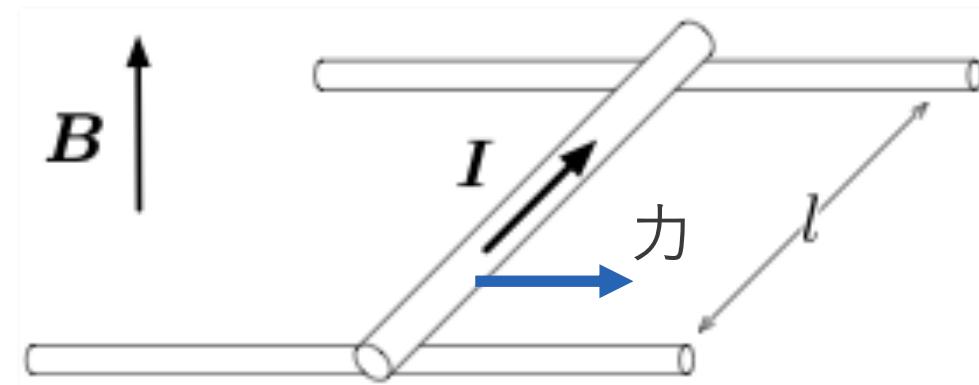
■ 問題

- 図のように、2本の十分長い導線が、磁場 B に対し垂直な平面上に幅 l の間隔で平行に存在している。この導線に対し垂直に、導体棒を置き電流 I を流した。

- 力の向きを答えよ。
- 力の大きさを求めよ。

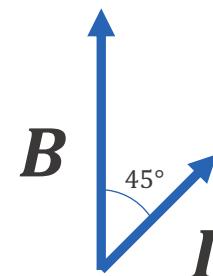
1. 図の通り

$$2F = IBl \sin \frac{\pi}{2} = IBl$$



■ 問題

- 長さ l の直線導線が、一様な磁束密度 B の磁場に対し、 45° の角度で置かれている。この導線に電流 I を流した時、この導線に働く力を求めよ。



■ 問題

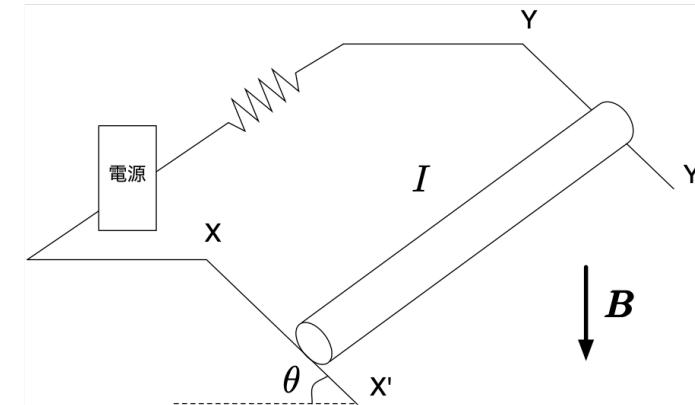
- ・長さ l の直線導線が、一様な磁束密度 B の磁場に対し、 45° の角度で置かれている。この導線に電流 I を流した時、この導線に働く力を求めよ。

$$F = lBI \sin \theta = lBI \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} lBI$$

■ 問題

- 図のように2本の導線 XX' , YY' を間隔 l で水平方向と θ の角度をなすようにお互いに平行に固定する。2本の導線が作る斜面に質量 m の導体棒を水平にのせ電流 I を流し、鉛直下向きに磁束密度 B の磁場をかけたところ、導体棒は静止した。ただし、重力加速度を g とし、導線と導体棒との間に摩擦はないものとする。

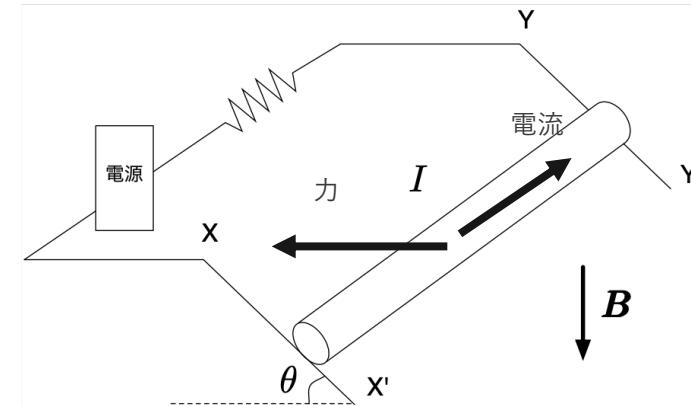
1. 電流の向きを図示せよ。



■ 問題

- 図のように2本の導線 XX' , YY' を間隔 l で水平方向と θ の角度をなすようにお互いに平行に固定する。2本の導線が作る斜面に質量 m の導体棒を水平にのせ電流 I を流し、鉛直下向きに磁束密度 B の磁場をかけたところ、導体棒は静止した。ただし、重力加速度を g とし、導線と導体棒との間に摩擦はないものとする。

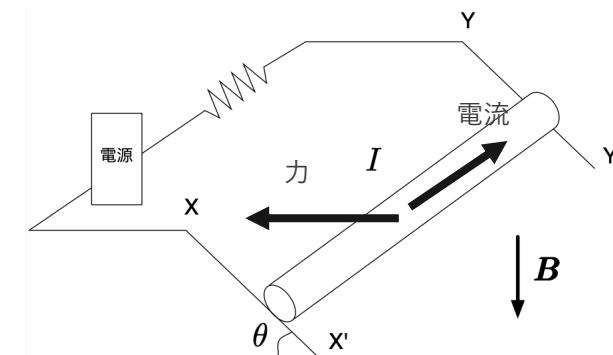
1. 電流の向きを図示せよ。



■ 問題

・図のように2本の導線 XX' , YY' を間隔 l で水平方向と θ の角度をなすようにお互に平行に固定する。2本の導線が作る斜面に質量 m の導体棒を水平にのせ電流 I を流し、鉛直下向きに磁束密度 B の磁場をかけたところ、導体棒は静止した。ただし、重力加速度を g とし、導線と導体棒との間に摩擦はないものとする。

1. 重力により導体棒に働く斜面に対し水平方向の力を求めよ。
2. 磁場により導体棒に働く斜面に対し水平方向の力を求めよ。
3. 電流の大きさを求めよ。



問題

- 図のように2本の導線 XX' , YY' を間隔 l で水平方向と θ の角度をなすようにお互いに平行に固定する。2本の導線が作る斜面に質量 m の導体棒を水平にのせ電流 I を流し、鉛直下向きに磁束密度 B の磁場をかけたところ、導体棒は静止した。ただし、重力加速度を g とし、導線と導体棒との間に摩擦はないものとする。

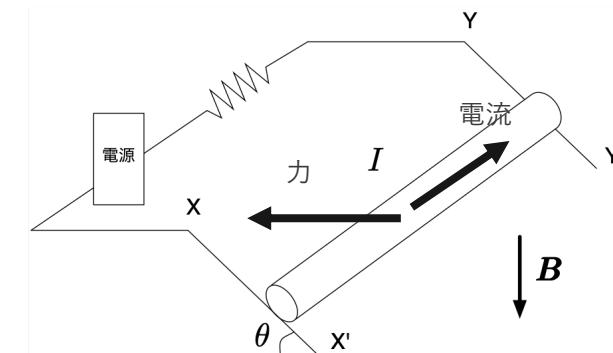
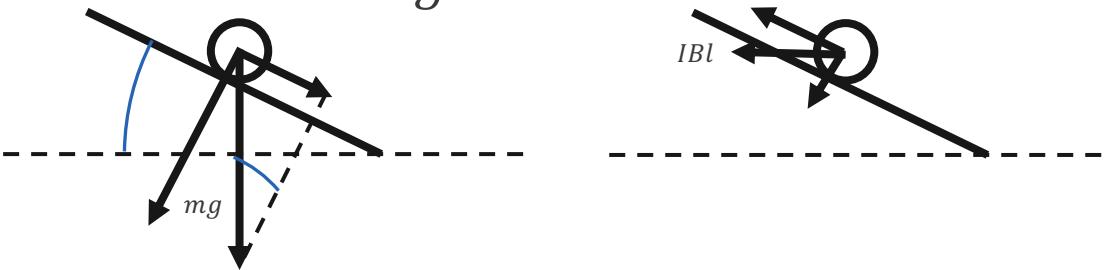
- 重力により導体棒に働く斜面に対し水平方向の力を求めよ。
- 磁場により導体棒に働く斜面に対し水平方向の力を求めよ。
- 電流の大きさを求めよ。

$$2. F_g = mg \sin \theta$$

$$3. F_B = IBl \cos \theta$$

$$4. IBl \cos \theta = mg \sin \theta$$

$$I = \frac{Bl}{mg} \tan \theta$$

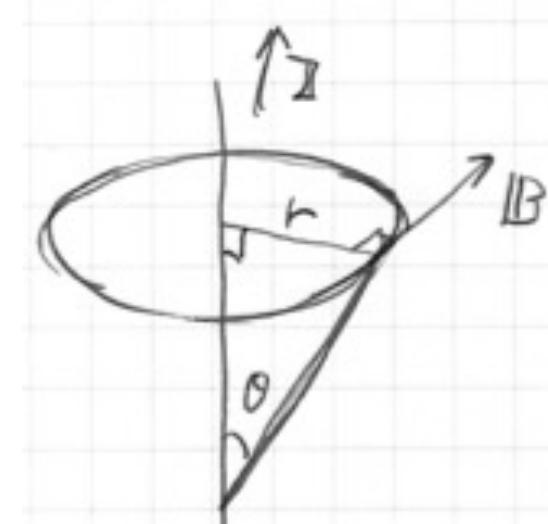


電流の作る磁場

■ 直線電流の作る磁場

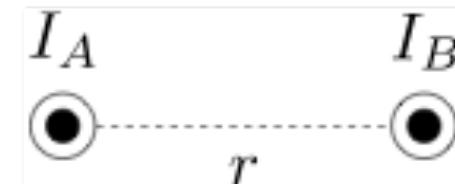
- まっすぐに張った針金に定常電流を流したとき、周囲に磁場が発生する。
 - 磁場は電流の周りを回転するように生じる。
 - 磁場の向きは、電流の向きを右ねじの進む向きとしたとき、ネジの回転する向きになる。（右ねじの法則）
 - 磁束密度の大きさは、電流の強さに比例する。
 - 磁束密度の大きさは、電流からの距離に反比例する。

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



■ 問題

- 距離 r 隔てて平行に置かれた2本の直線導線に同じ方向の電流 I_A, I_B を流す.
- 導線に働く力の方向を図示せよ.
 - 導線に働く単位長さあたりの力を求めよ.



上から見た図

■ 問題

- 距離 r 隔てて平行に置かれた2本の直線導線に同じ方向の電流 I_A, I_B を流す。

- 導線に働く力の方向を図示せよ。
- 導線に働く単位長さあたり力を求めよ。

1. 図に示す

2. I_B が作る磁場の磁束密度の大きさは

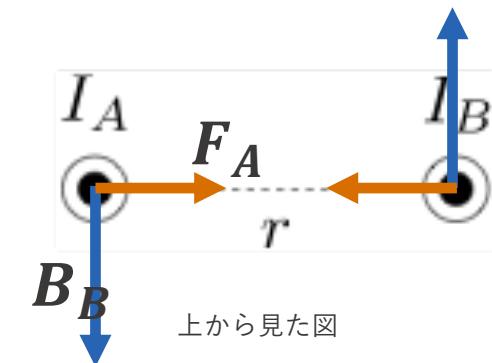
$$B_B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_B}{r}$$

よって電流 I_A が流れる導線が受ける単位長さあたりの力は

$$F_A = I_A B \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_A I_B}{r}$$

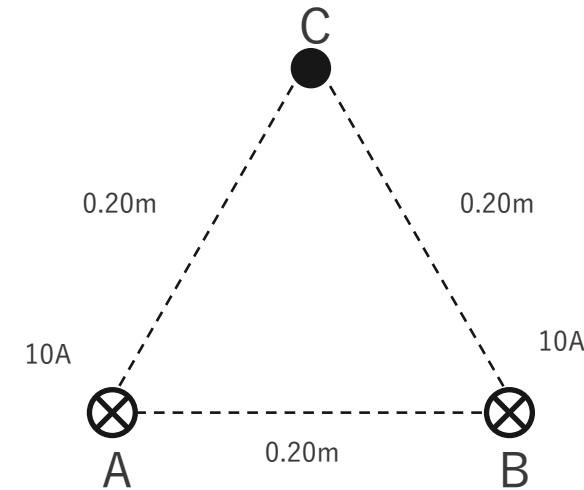
同様に電流 I_B が流れる導線が受ける単位長さあたりの力は

$$F_B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_A I_B}{r}$$



■ 問題

- 画面に垂直に、 0.20m 離れて2本の直線の導線AとBが張られ、それぞれ画面に向かって 10A の電流が流れている。A, Bから 0.20m 離れた点Cの磁場の方向と磁束密度を求めよ。ただし、地磁気は考慮しないものとする。



問題

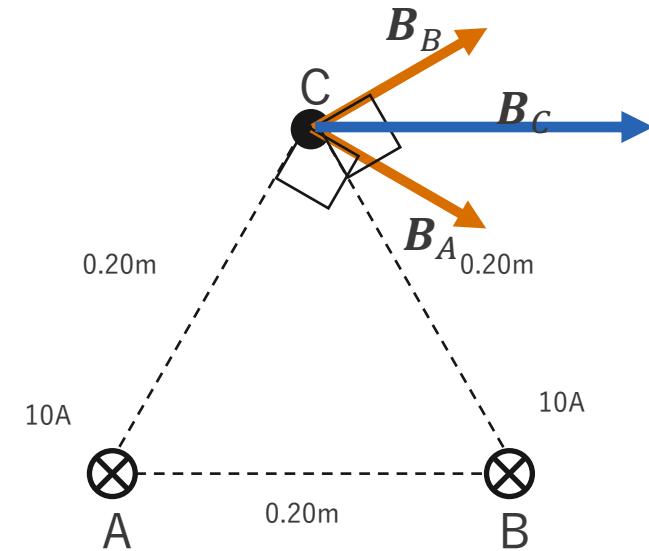
- 画面に垂直に、0.20m離れて2本の直線の導線AとBが張られ、それぞれ画面に向かって10Aの電流が流れている。A, Bから0.20m離れた点Cの磁場の方向と磁束密度を求めよ。ただし、地磁気は考慮しないものとする。 $\mu_0 = 4\pi$ とする。

電流AとBが作る磁場の磁束密度は

$$B_A = B_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10}{2\pi \times 0.2} = 100$$

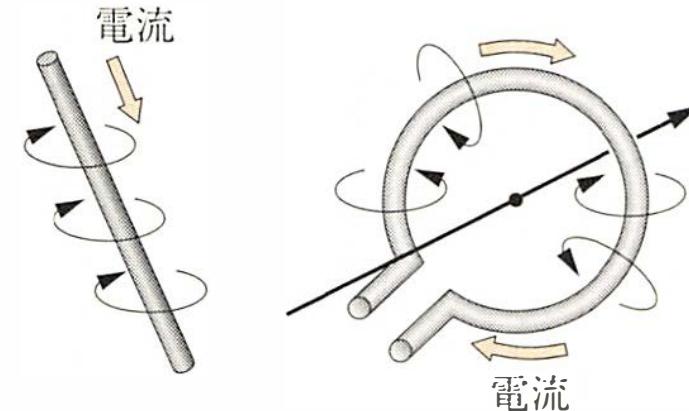
点Cの磁場の磁束密度は

$$B_C = 2 \times 100 \times \cos \frac{\pi}{6} = 100 \times \sqrt{3} = 1.7 \times 10^2 \text{ T}$$



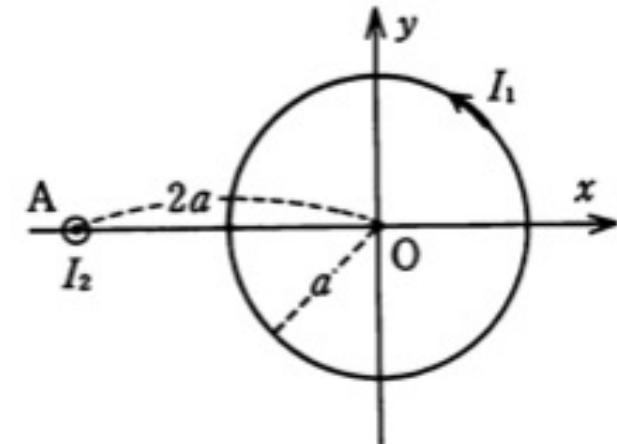
■ 円形コイルが作る磁場

- 半径 r の円形コイルに電流を流したとき、その中心の磁場の磁束密度は
- $$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$
- ビオ・サバールの法則を用いると求まるが、範囲外なので説明しない。



■ 問題

- xy座標面上に原点Oを中心とした半径 a [m]の円形導線があり、これに I_1 [A]の電流が反時計回りに流れている。また、x軸上、原点Oから $2a$ [m]負の方向に離れた点Aに、xy座標面に垂直な導線が張られ、画面から出していく方向に I_2 の電流が流した。このとき点Oに発生する磁場の方向と磁束密度の大きさを求めよ。ただし地磁気は考慮しない。



問題

- xy座標面上に原点Oを中心とした半径 $a[m]$ の円形導線があり、これに $I_1[A]$ の電流が反時計回りに流れている。また、x軸上、原点Oから $2a[m]$ 負の方向に離れた点Aに、xy座標面に垂直な導線が張られ、画面から出していく方向に I_2 の電流が流した。このとき点Oに発生する磁場の方向と磁束密度の大きさを求めよ。ただし地磁気は考慮しない。

円電流が作る磁場は画面から出していく方向である。
 また、電流Aが作る磁場はy軸に正の方向である。
 よって磁場 \mathbf{B} は図のようになる。

円電流 I_1 が作る磁場の磁束密度 B_1 は

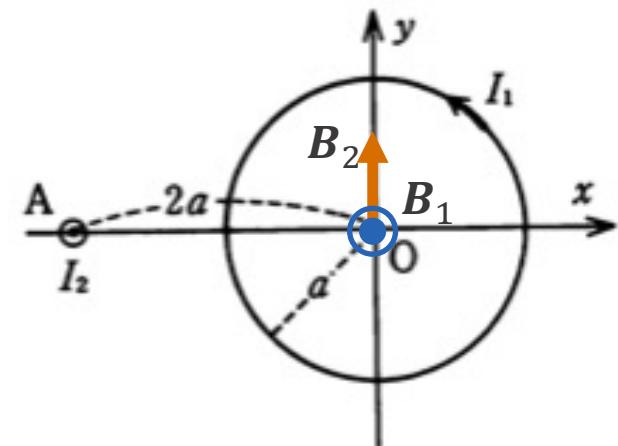
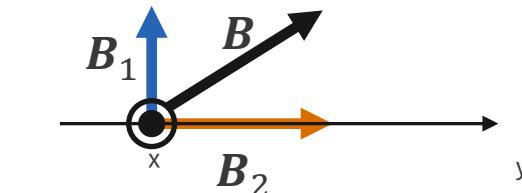
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2a}$$

電流 I_2 が作る磁場の磁束密度 B_2 は

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{2a}$$

よって磁場 \mathbf{B} は

$$B = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi 2a}\right)^2} = \frac{\mu_0}{2a} \sqrt{I_1^2 + \frac{I_2^2}{4\pi}} [\text{T}]$$



■ 問題

- ・正しい文章を選べ.
1. 電荷間に働く力の大きさは電荷間の距離に比例する。
 2. 一様な電界中の電荷に働く力の大きさは電界の強さに反比例する。
 3. 一様な電界中の電荷に働く力の方向は電界の方向に直交する。
 4. 一様な磁界中の線電流に働く力の大きさは磁束密度に比例する。
 5. 同方向に流れる平行な線電流の間に働く力は斥力である。

■ 問題

- 正しい文章を選べ.
- 電荷間に働く力の大きさは電荷間の距離に比例する.
 - 一様な電界中の電荷に働く力の大きさは電場の強さに反比例する.
 - 一様な電界中の電荷に働く力の方向は電場の方向に直交する.
 - 一様な磁界中の線電流に働く力の大きさは磁束密度に比例する.
 - 同方向に流れる平行な線電流の間に働く力は斥力である.
-
- $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}$ なので距離の2乗に反比例する. よって間違い.
 - $F = qE$ なので力は電場の強さに比例する. よって間違い
 - 電荷は電場から、電場に平行な力を受ける. よって間違い.
 - $F = IBl \sin \theta$ なので、力は磁束密度に比例する. よって正しい.
 - 先の問題の通り引力である. よって間違い.