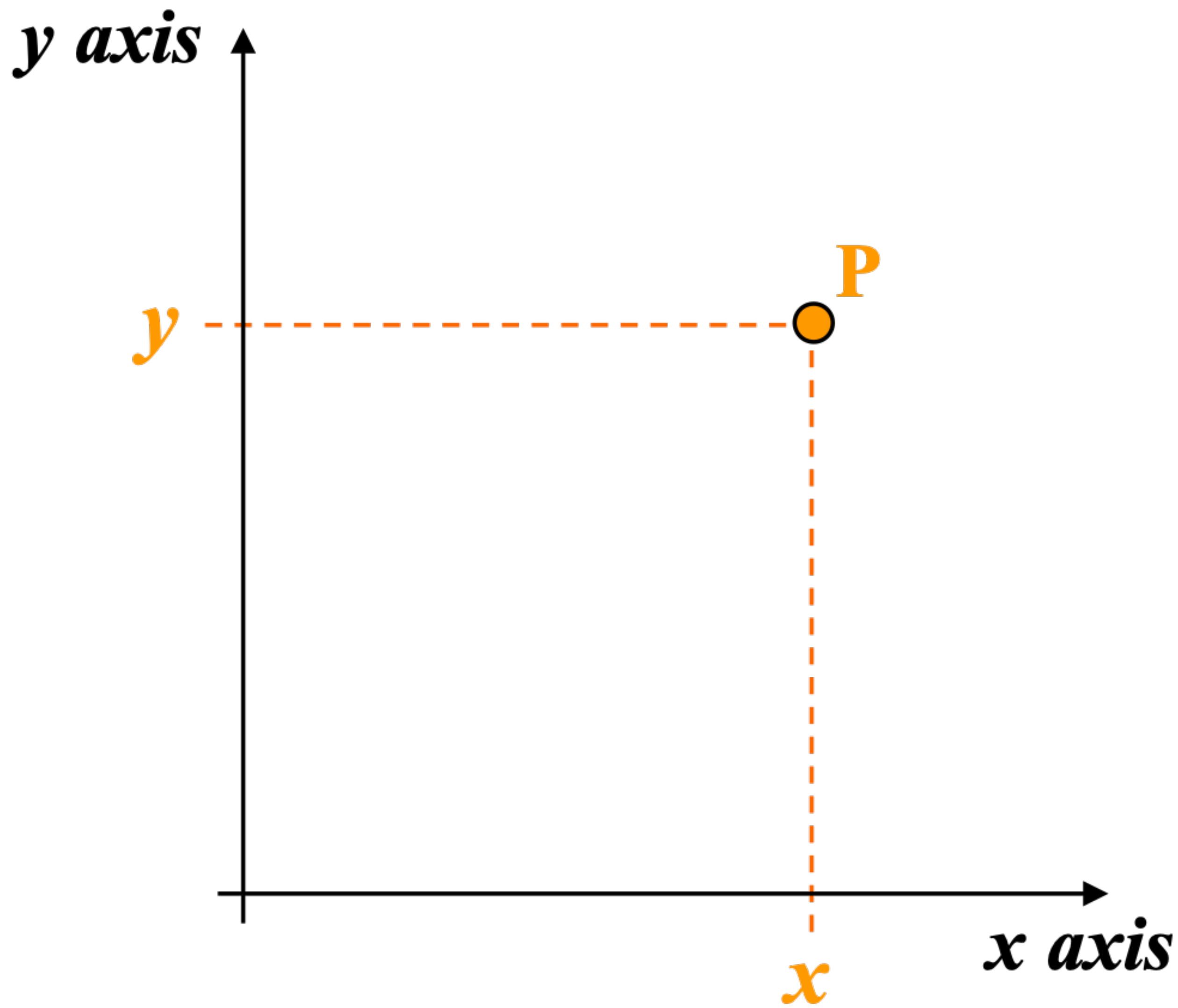
画像処理
線形変換とアフィン変換

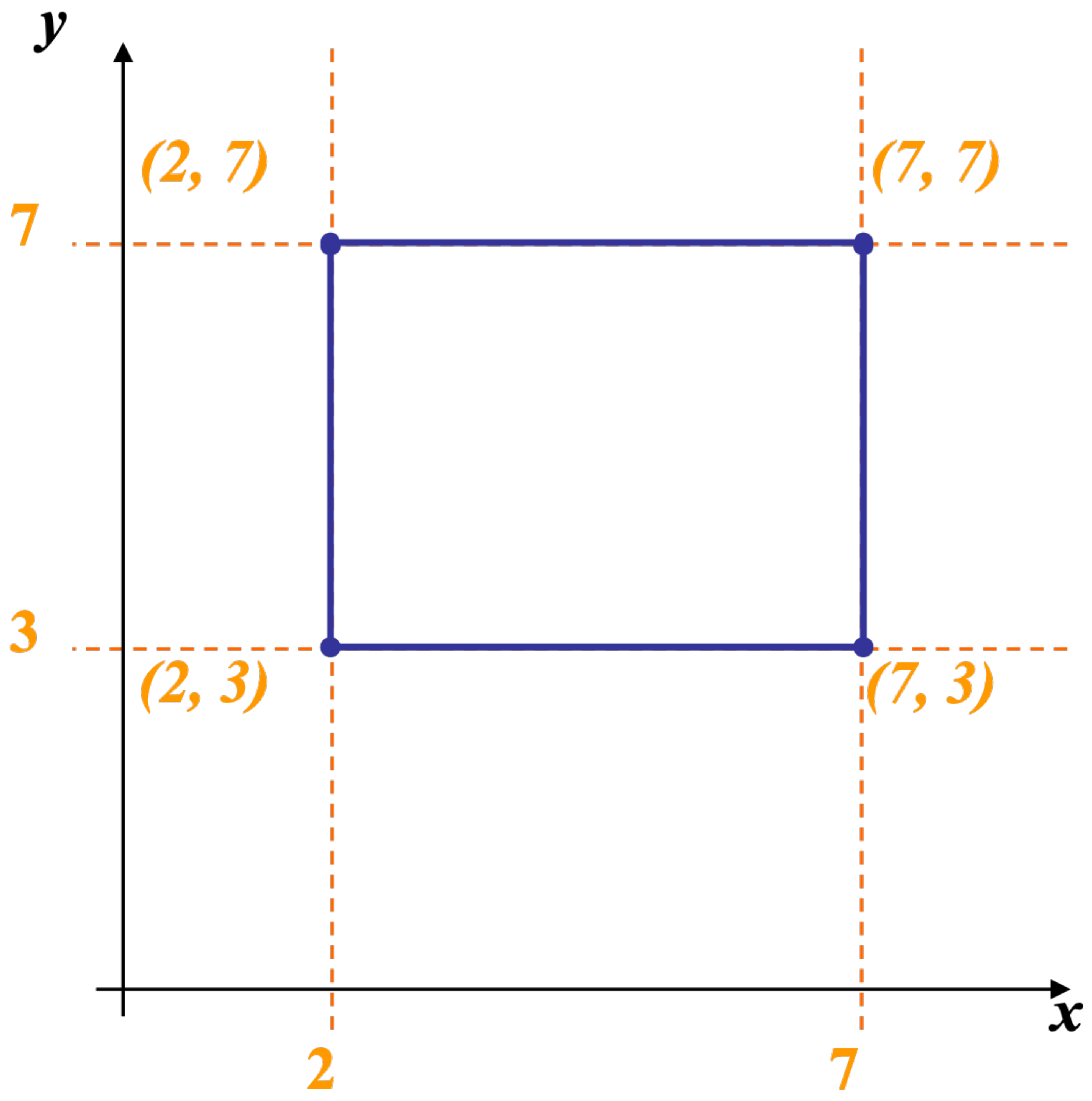
藤田 一寿

２次元直交座標系

- ２次元図形はx軸とy軸が直交した２次元直交座標系で表される。



例えば四角形は



点の表現

- ２次元座標上の点pは

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

- のように表される(列ベクトルでよく表わされる)。

図形の変換

- 図形の変換を行うためには、図形を構成する点を移動させれば良い。
- 点を移動させるには、点の場所を表すベクトルの値を変えれば良い。

線形変換

- 点pをp'に変換するとき、その変換が

$$\boldsymbol{p}' = A\boldsymbol{p}$$

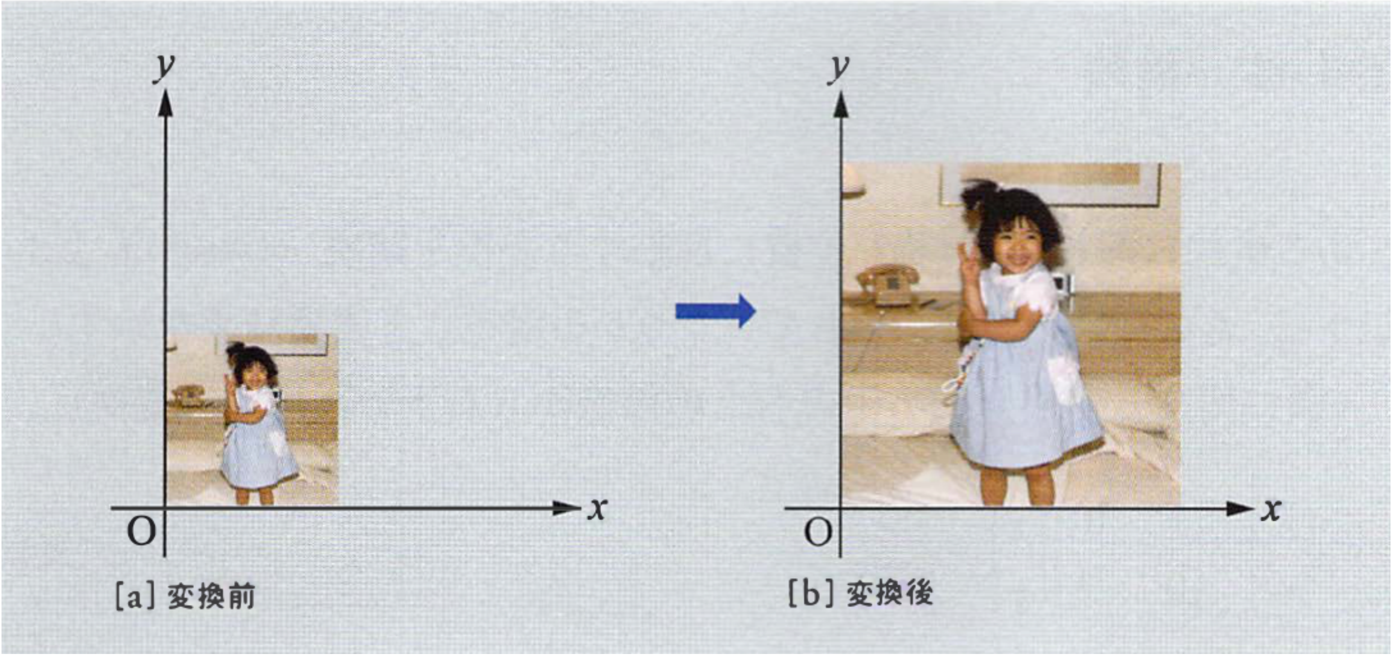
- の形で書ける場合、線形変換という。

Aは２次元図形の場合２行２列の正方行列

拡大縮小

- この式で表される線形変換は、図形を拡大縮小させる。
- x方向にSx倍、y方向にSy倍となる。

$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \boldsymbol{p}$$

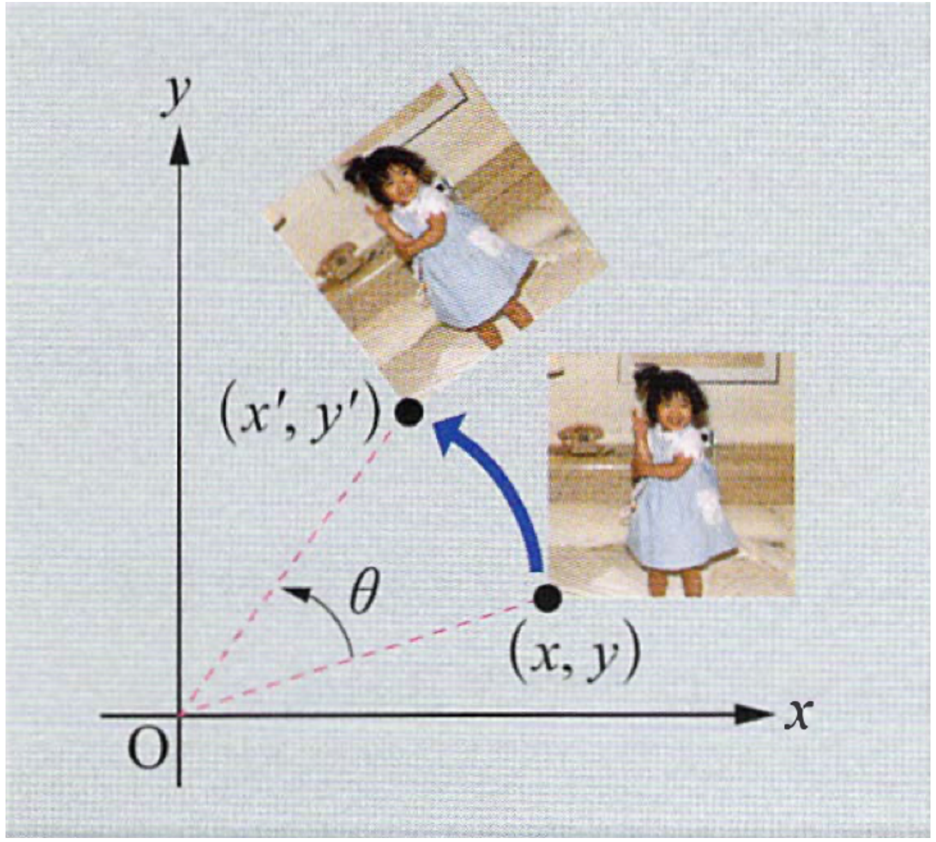


この行列とベクトルの積を計算し、この式が図形を拡大縮小することを確認せよ。

回転

- この式で表される線形変換は、図形を回転させる。

$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \boldsymbol{p}$$



この行列とベクトルの積を計算せよ。

鏡映

- ある直線に関して，対称な位置に反転する変換

x軸に関する変換

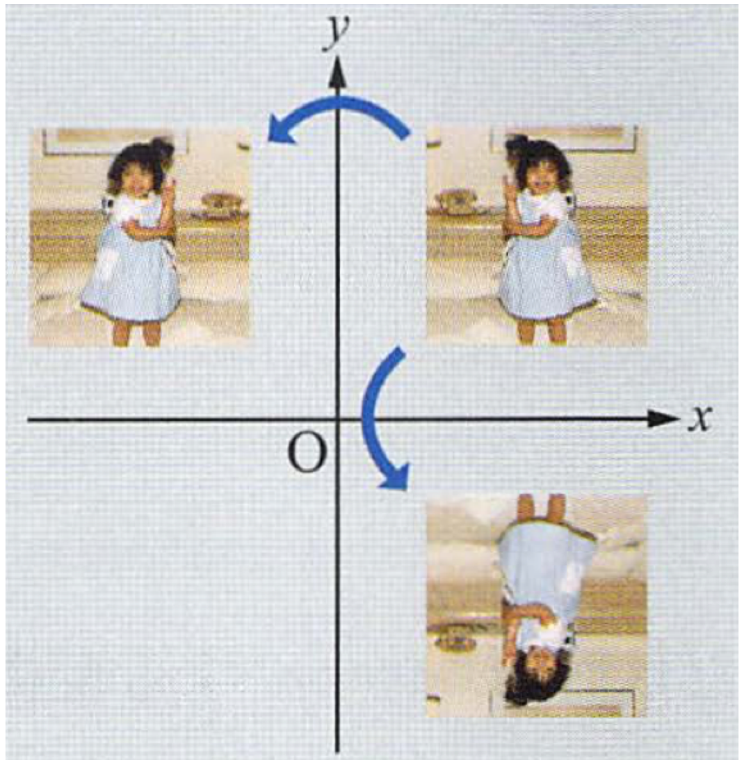
$$p' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p$$

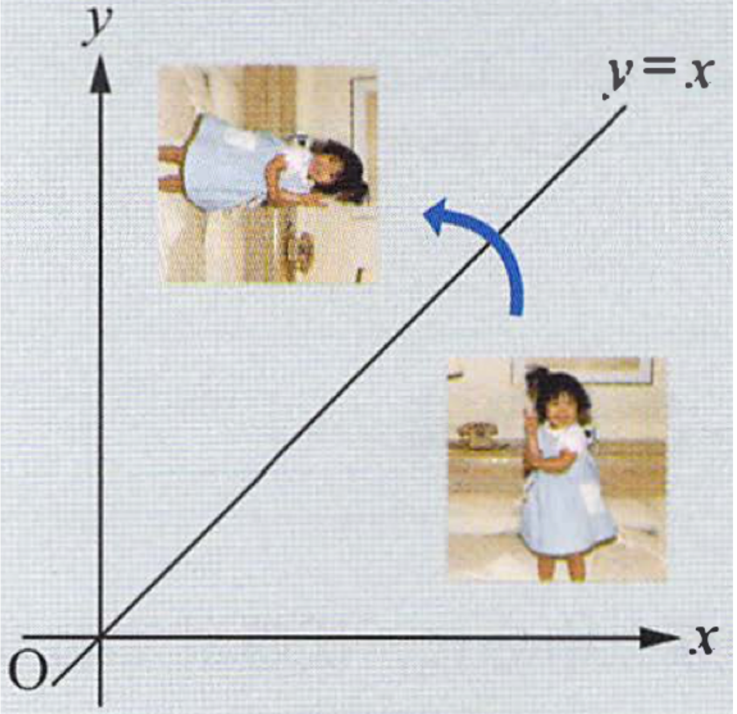
y軸に関する変換

$$p' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} p$$

y=xに関する変換

$$p' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} p$$





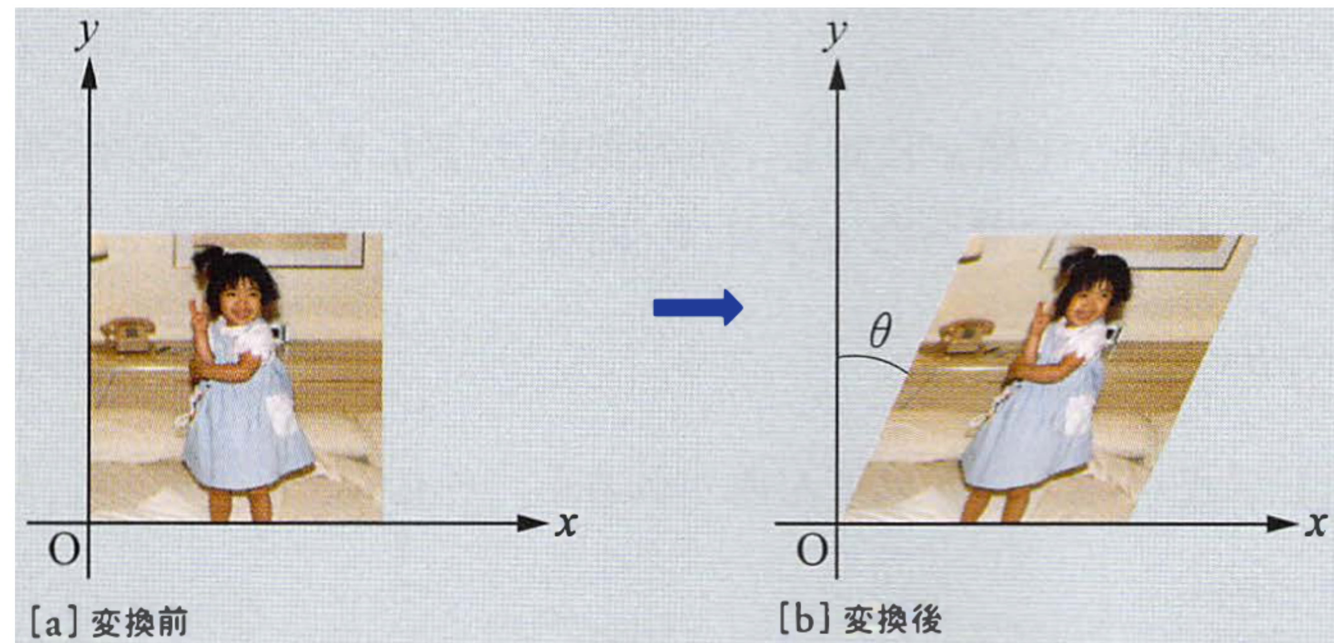
スキュー（せん断）

- 長方形の画像を傾け平行四辺形の形に変換する

x軸方向に傾ける

$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}$$

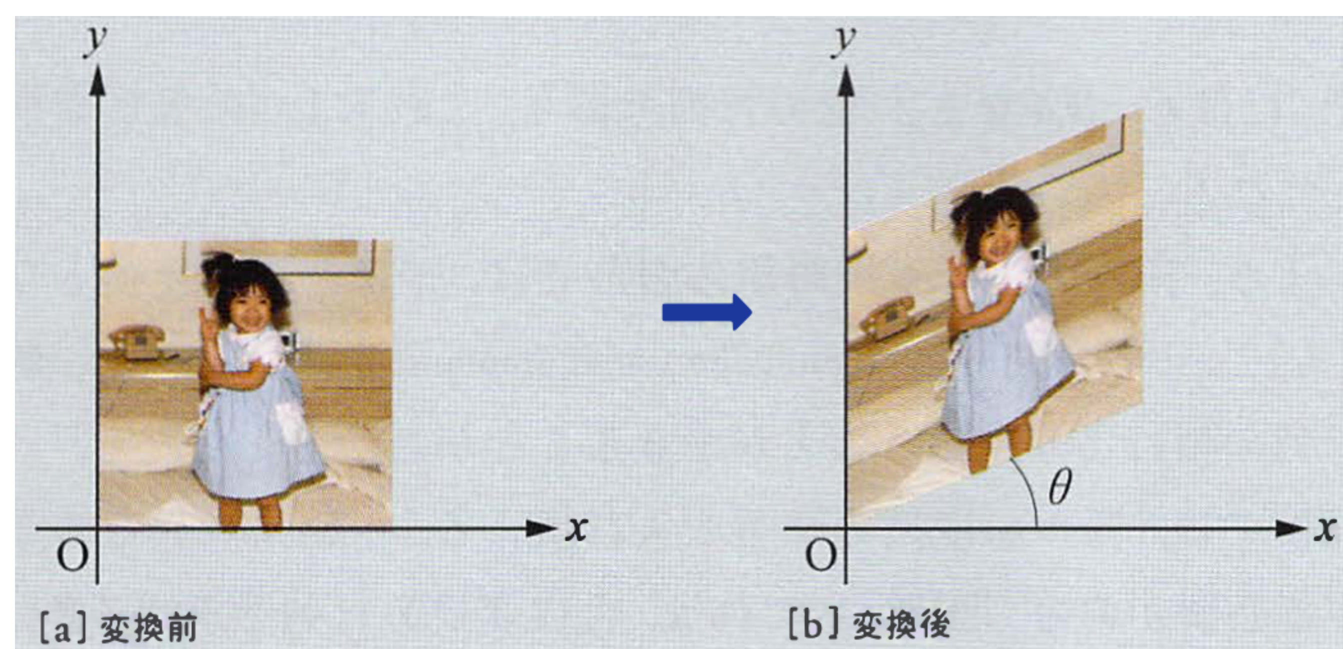
$$b = \tan\theta$$



y軸方向に傾ける

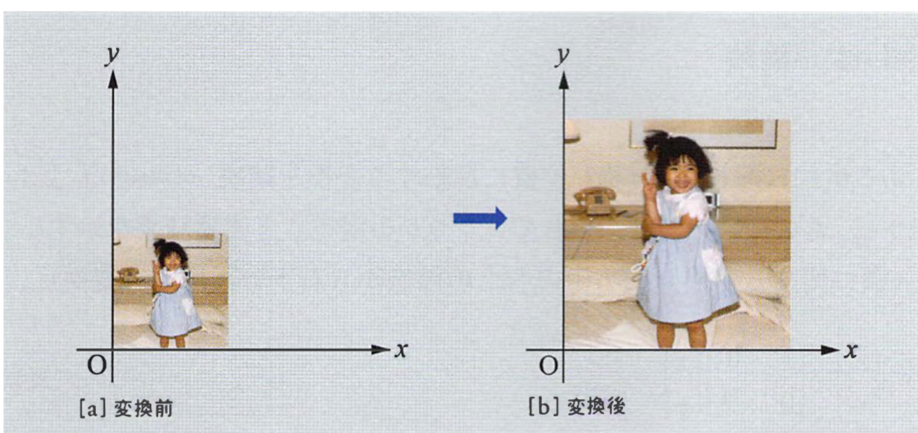
$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}$$

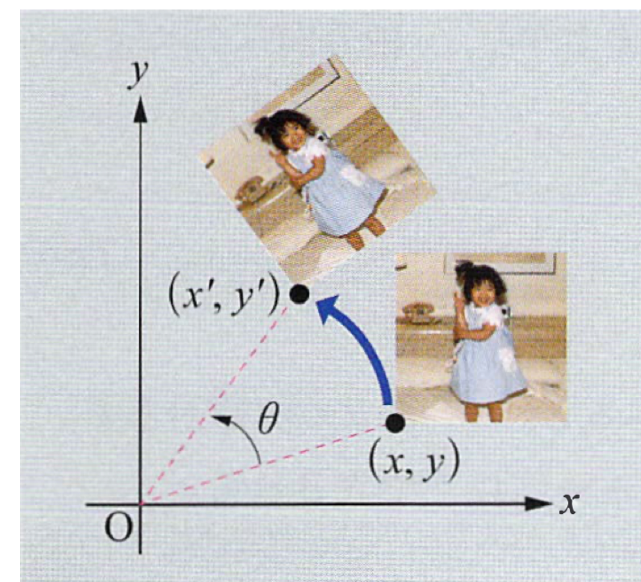
$$c = \tan\theta$$

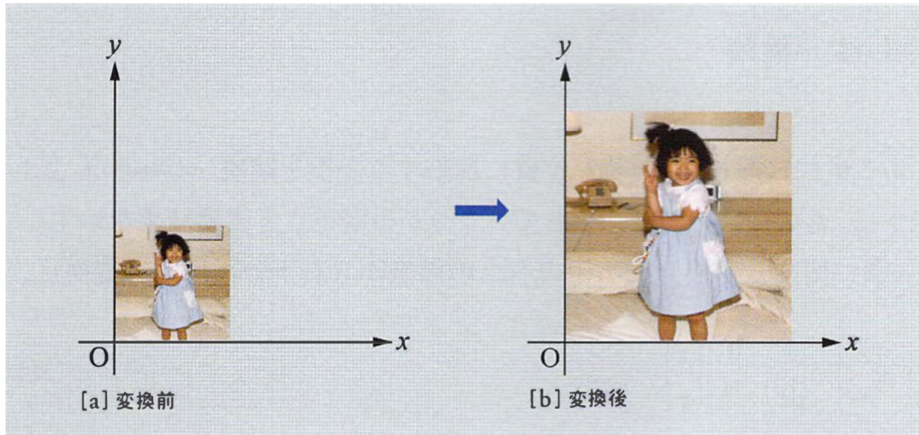


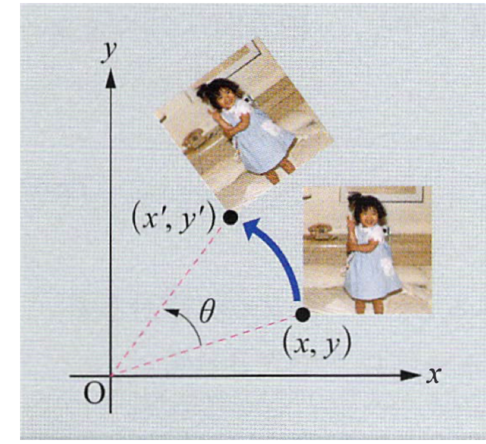
合成変換

- 拡大して反転する、もしくは鏡映してスキューするなど複数の処理をする変換行列はどうなるのか？









$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{p}'' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \boldsymbol{p}'$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}'' &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \boldsymbol{p}' \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} S_x \cos\theta & -S_y \sin\theta \\ S_x \sin\theta & S_y \cos\theta \end{pmatrix}} \boldsymbol{p} \end{aligned}$$

拡大と回転を行う行列

一般的に書くと

- xをAにより変換を行う

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

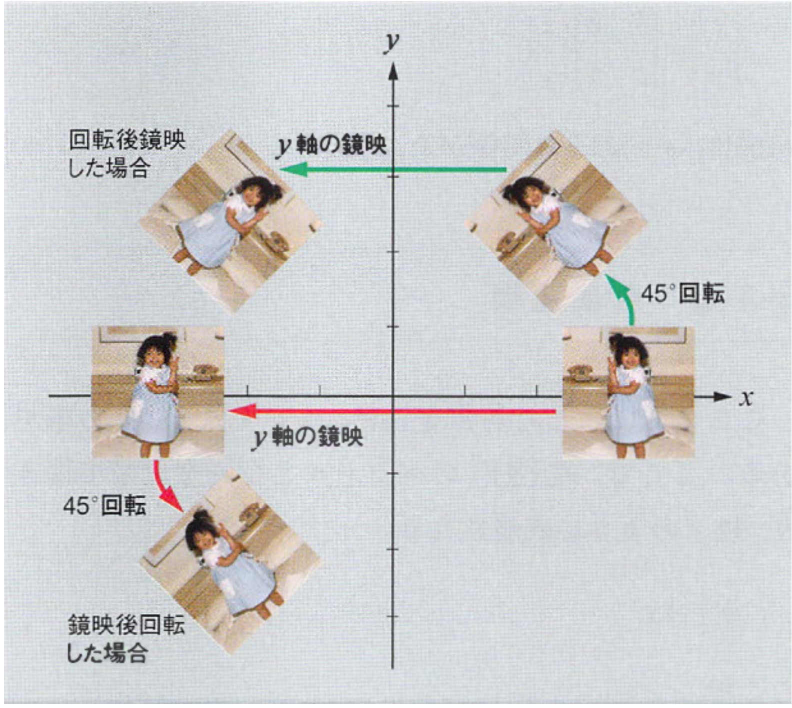
- x'をBにより変換を行う

$$\boldsymbol{x}'' = B\boldsymbol{x}'$$

- 以上をまとめて書くと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'' &= B\boldsymbol{x}' \\ &= B(A\boldsymbol{x}) \\ &= (BA)\boldsymbol{x} \\ &= C\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

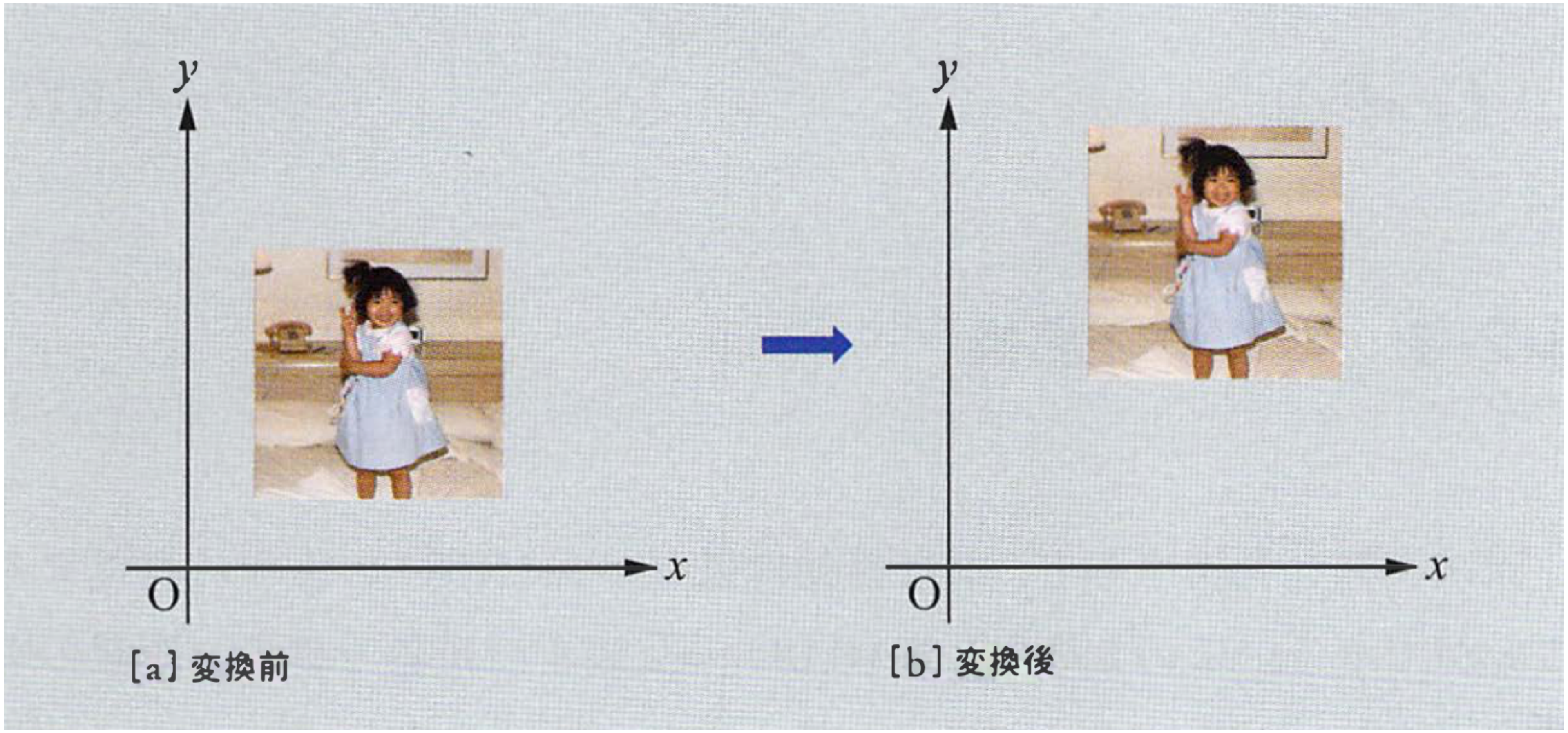
Cは $C = BA$ と表される2x2の行列となる．そして，任意の線形変換の組み合わせを表す合成変換は1つの行列で表すことが可能である．
交換側は成り立たない．



平行移動

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

単なる足し算で良い

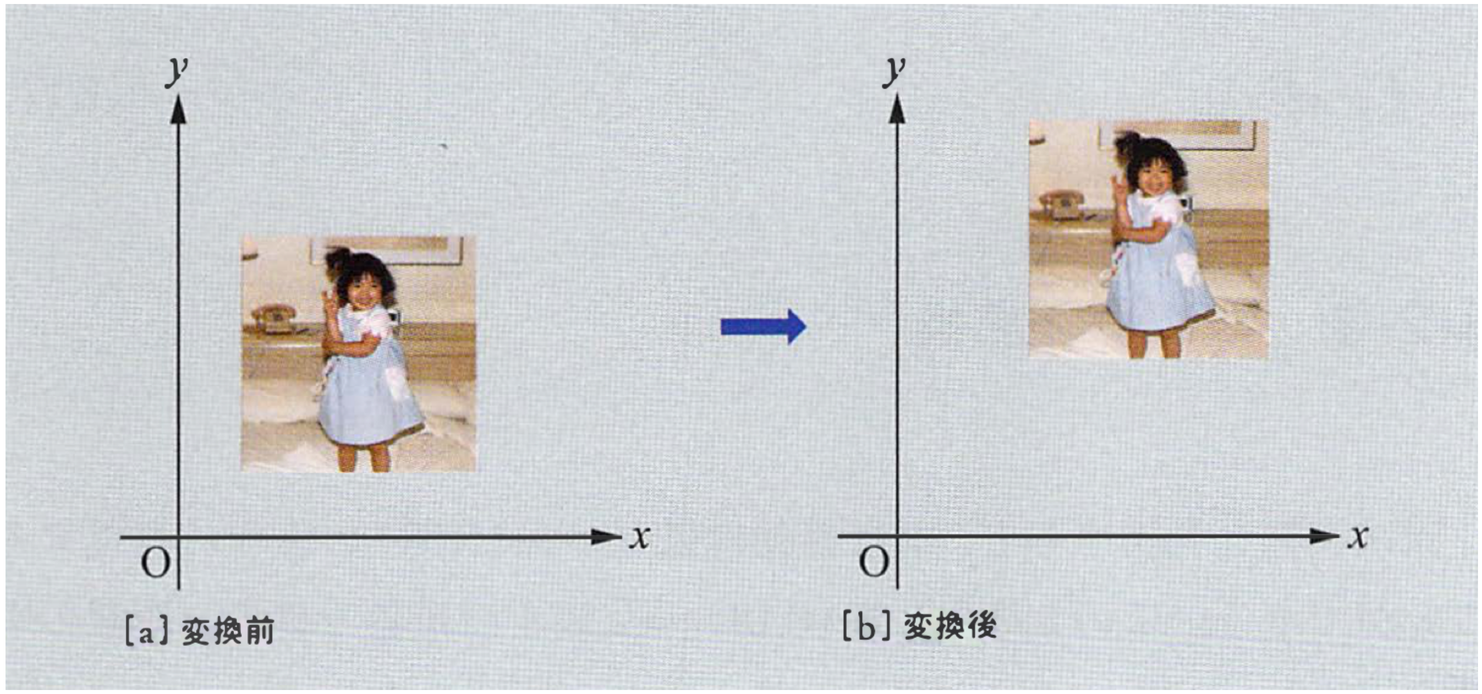


アフィン変換

- 線形変換と平行移動を同時に表現できる　$\boldsymbol{p}' = A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t}$

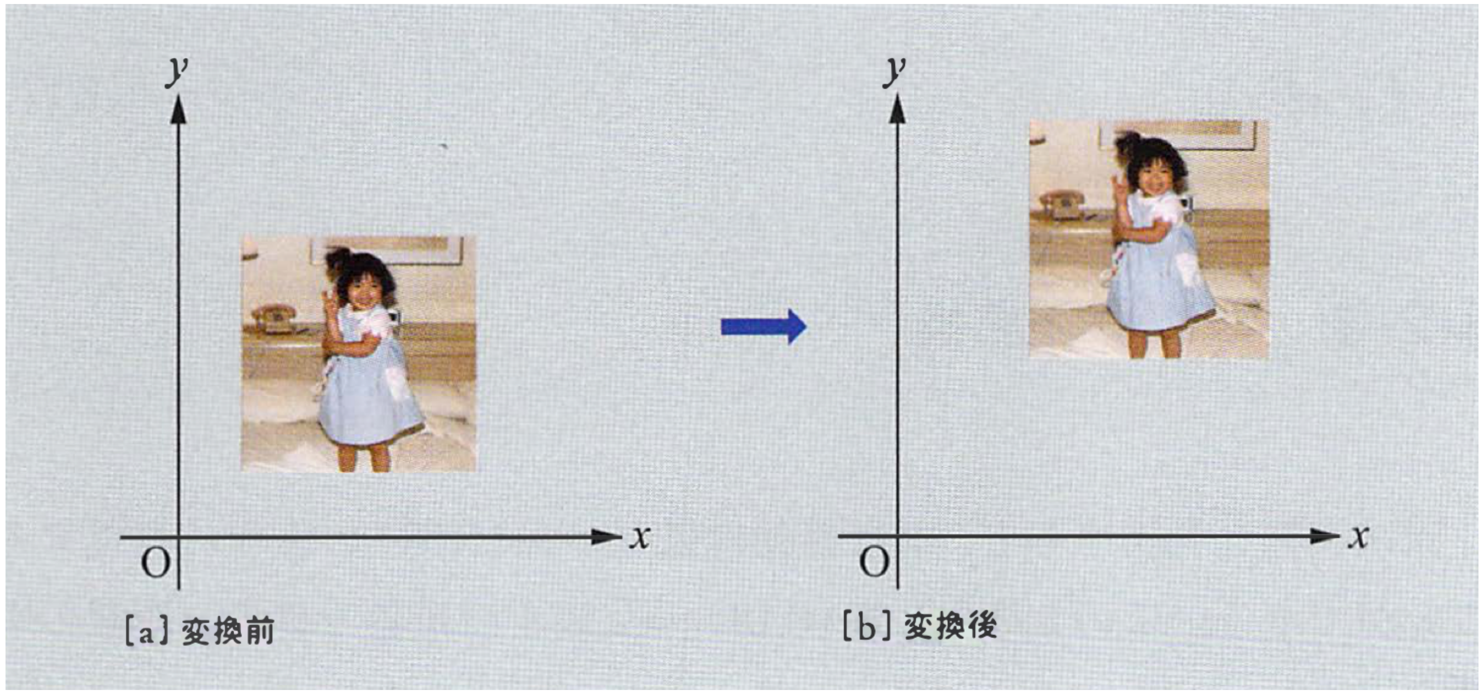
$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}$$



平行移動

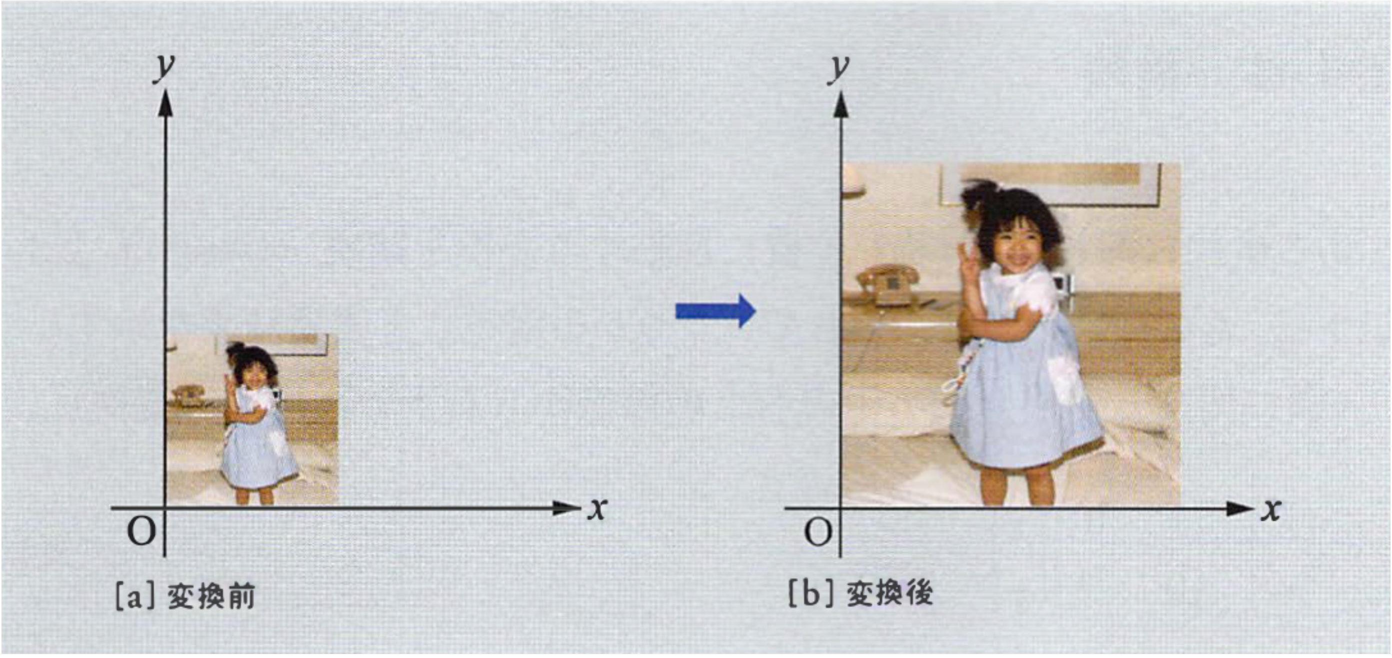
$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}$$



平行移動になっていることを確かめよ

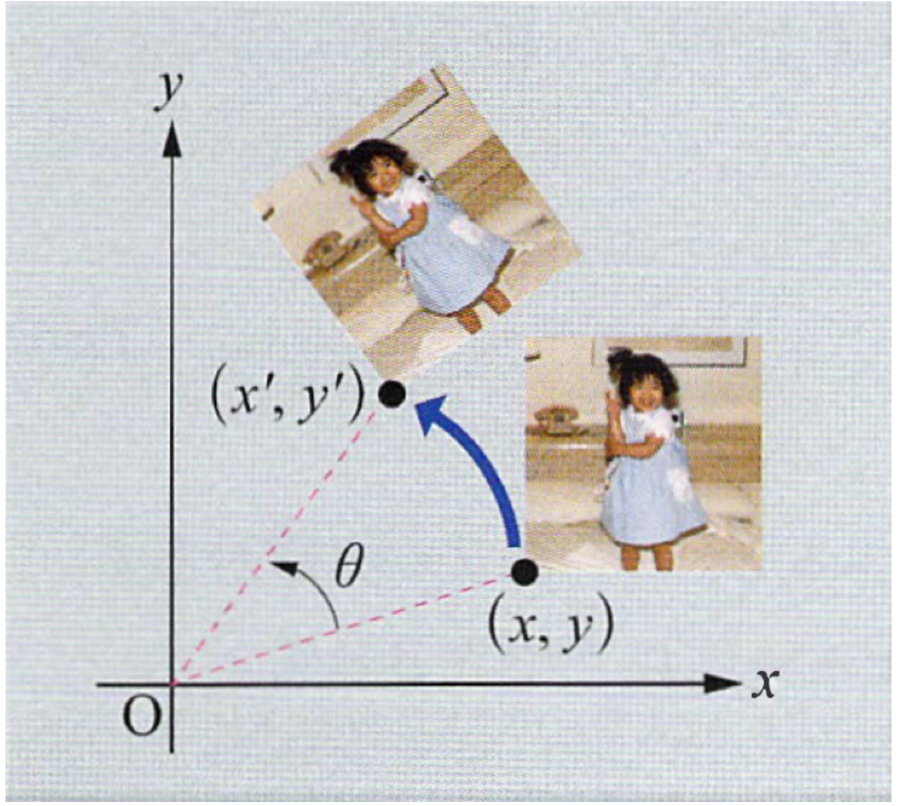
拡大縮小

$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}$$



回転

$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}$$



回転→移動(ユークリッド変換)

$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}'' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}' \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p} \end{aligned}$$

回転→拡大縮小→移動(相似変換)

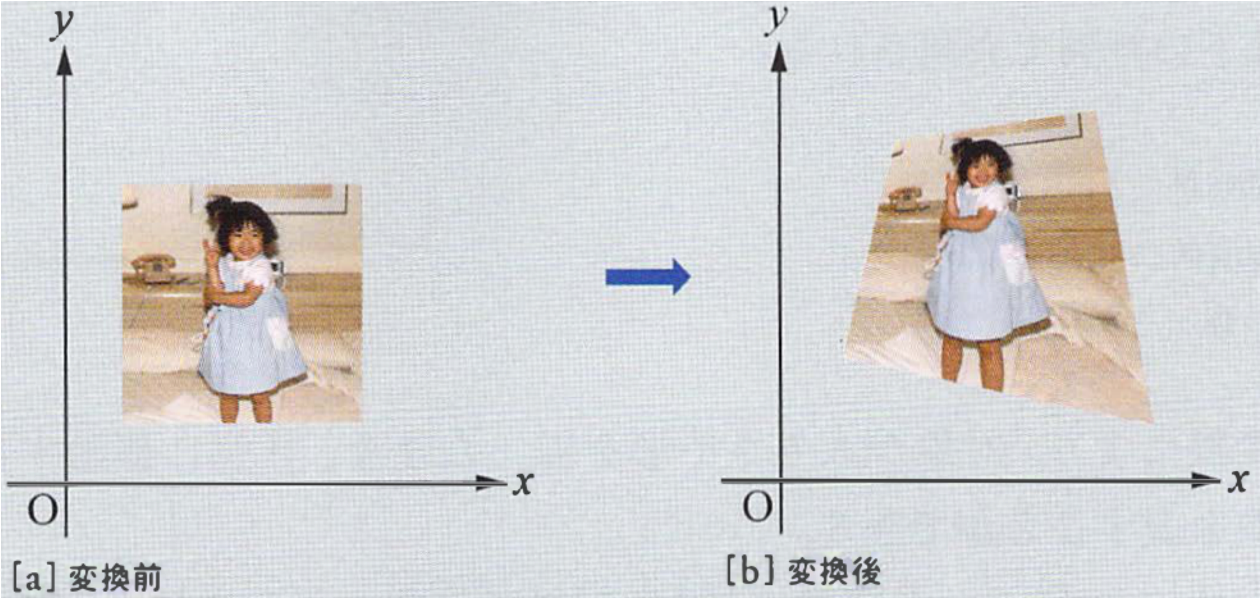
$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}'' &= \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}' \\ &= \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ &= \begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & 0 \\ s\sin\theta & s\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p} \end{aligned}$$

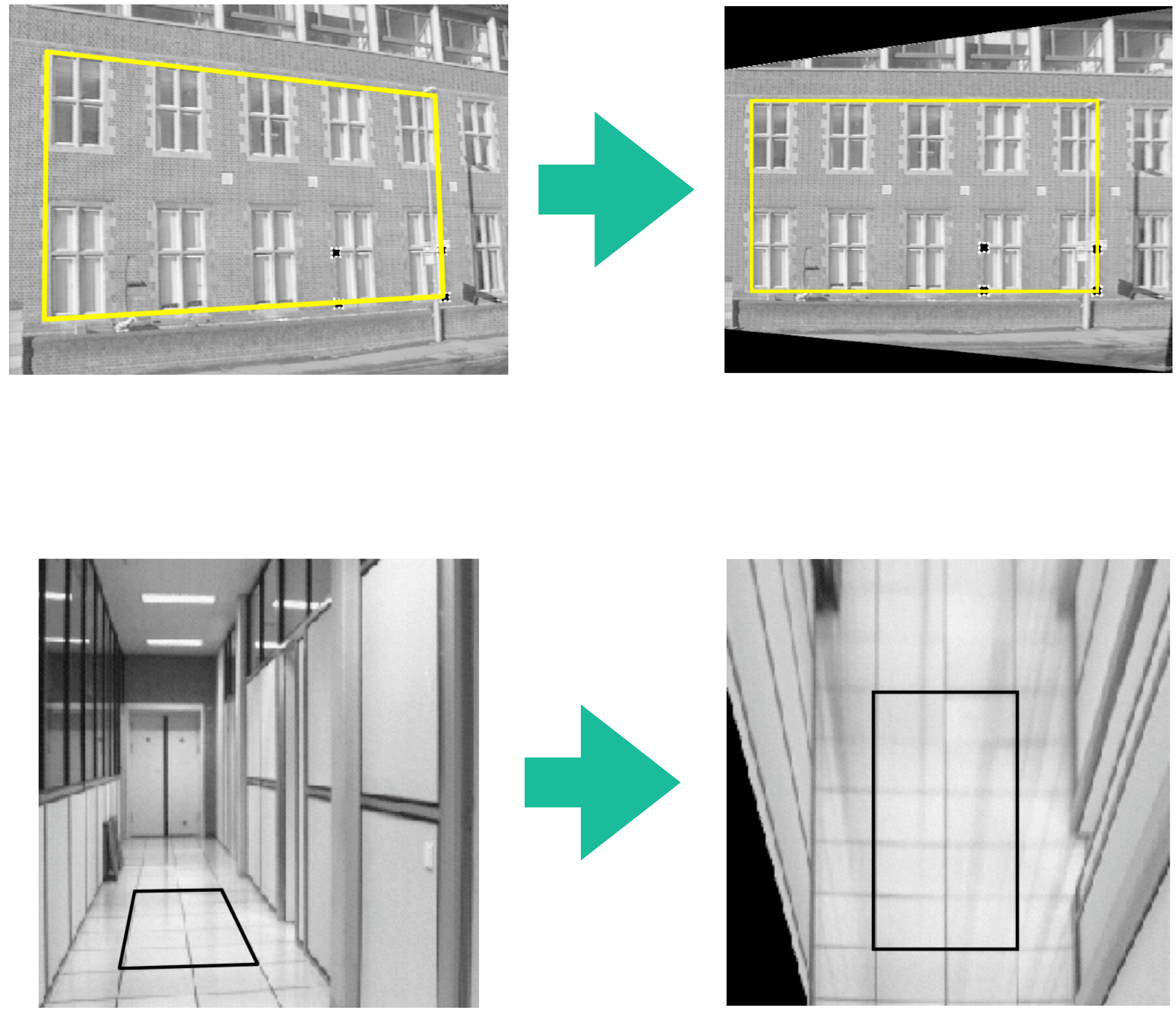
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}''' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}'' \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & 0 \\ s\sin\theta & s\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p} \\
&= \begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{p}
\end{aligned}
$$

射影変換

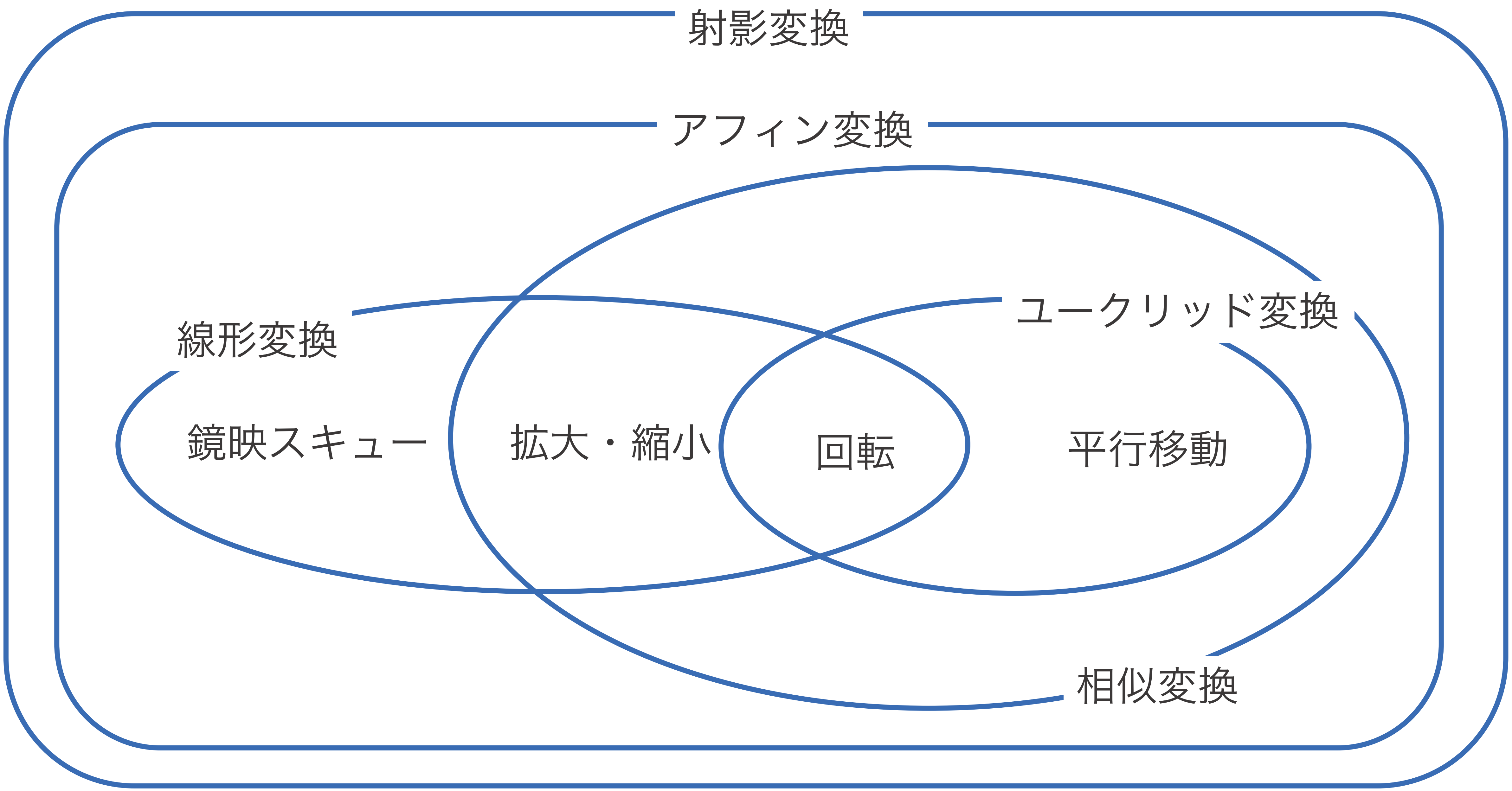
$$\boldsymbol{p}' \sim \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \boldsymbol{p}$$



p'は右辺の定数倍になっているので等号になっていない．3番目の要素を1にする必要あり．



それぞれの変換の関係



注意

- 画素の場所は離散的である(整数で表される).
- しかし，多くの場合，変換後の値は小数である.

- 変換後の値を離散値に直す必要がある.

- 補完もしくはリサンプリング(再標本化)する必要がある.