情報処理工学 第5回

藤田 一寿

公立小松大学保健医療学部臨床工学科

論理演算

論理演算

- 1（真）か0（偽）の2つの値（真偽値）に対して行う演算
  - 1か0だからといって2進数とは違う．

- コンピュータは論理演算を用いて計算を行っている．
- コンピュータの処理をより理解するため論理演算を学ぶ．

- 1か0かは，電気回路ではスイッチのオンオフ，電流が流れる流れない，電圧が高い低いなどに対応していると考えられる．

論理演算の種類

- 論理積，AND
  - 掛け算，かつ，に対応
- 論理和，OR
  - 足し算，または，に対応
- 否定，NOT
  - ではない

- NAND（ナンド）
- NOR（ノア）
- 排他的論理和，XOR（エックスオア）

論理積ANDと論理式

- 掛け算に相当する計算
- 集合においては積集合（かつ）に相当する
- 例
  - 0・0 = 0
  - 0・1 = 0
  - 1・0 = 0
  - 1・1 = 1
- 変数Aと変数Bの論理積の結果が変数Yとなる場合は
  - A・B = Y
- と書ける．このように論理演算を代数式で表現したものを**論理式**と言う．

論理積ANDと真理値表

- A・B＝Yは代数式ではあるが，それぞれの代数が0か1の値しか取らないので計算の全パターンを書ける．

- A・B＝Y
- 0・0＝0
- 0・1＝0
- 1・0＝0
- 1・1＝1

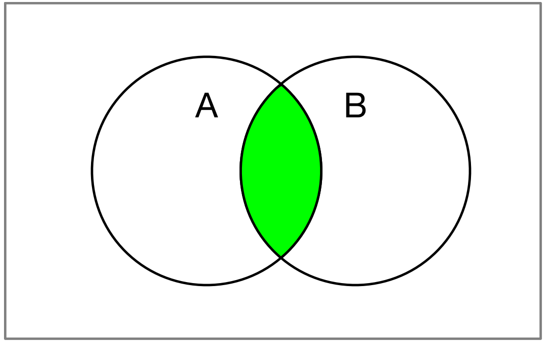
ANDの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 上記の計算を表で表したものを真理値表という．

論理積ANDとベン図

- 論理積は集合においては積集合に相当する.
  - $A \cdot B$はAかつBに相当（Aに含まれかつBにも含まれる）
- 集合はベン図を用いて表すことができる.
  - ベン図は論理演算を視覚的に理解する手助けとなる事がある.
  - A=1（真）とは集合Aに含まれることを意味する.
- $A \cdot B = 1$は，集合では「AかつBが真である」に相当する.
- ベン図においてAかつBが真である部分はAとBが重なる部分である.



ベン図

論理和OR

- 足し算に相当する計算
- 集合においては和集合（または）に相当する

- 例
  - 0+0 = 0
  - 0+1 = 1
  - 1+0 = 1
  - 1+1 = 1

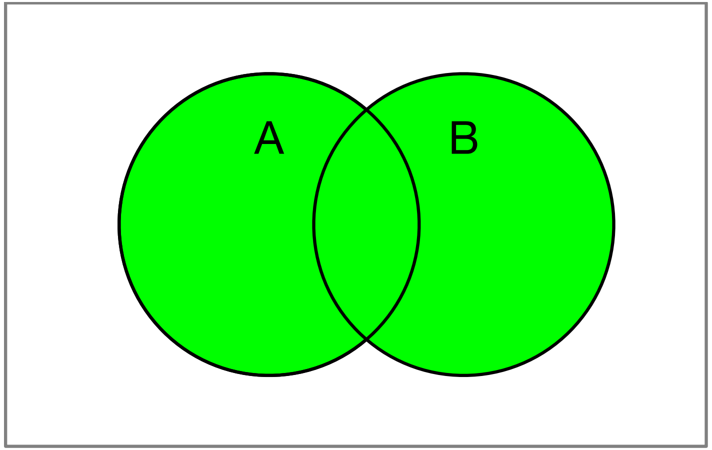
ORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- 変数Aと変数Bの論理和の結果が変数Yとなる場合は
  - A+B = Y
- と論理式で表せる.

論理和ORとベン図

- 論理和は集合においては和集合に相当する.
  - A+BはAまたはBに相当
  - Aに含まれるか，または，Bに含まれるか
- $A + B = 1$は，集合では「AまたはBが真である」に相当する.
- ベン図においてAまたはBが真である部分はAとBすべての領域である.



否定NOT

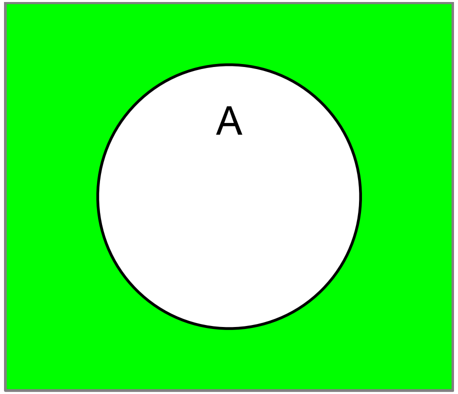
- 1（真）の否定は0（偽），0（偽）の否定は1（真）
- 集合において，補集合に相当する．Aではない．
- 変数Aの否定の結果が変数Yとなる場合は

$$\overline{A} = Y$$

- と書ける．

NOTの真理値表

A	Y
0	1
1	0

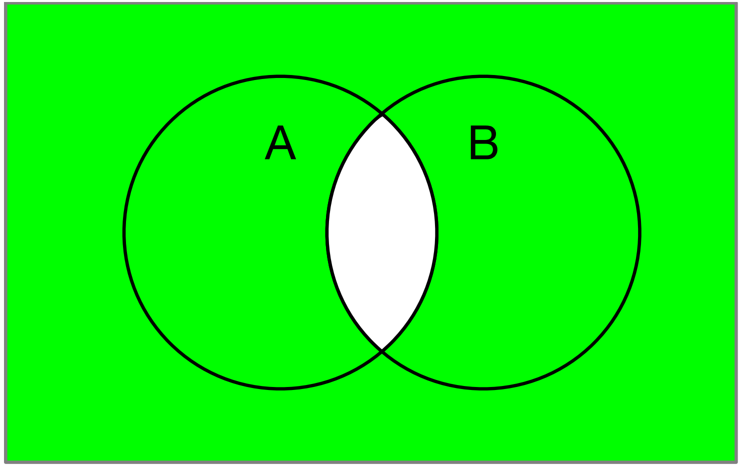


$\bar{A} = 1$はAが偽であることに相当する．
ベン図においてAが偽である部分はAの外の領域である．

NAND

- 論理積（AND演算）を否定したもの.
- $\overline{A \cdot B} = Y$と表せる.

$\overline{\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}} = 1$に対応するベン図



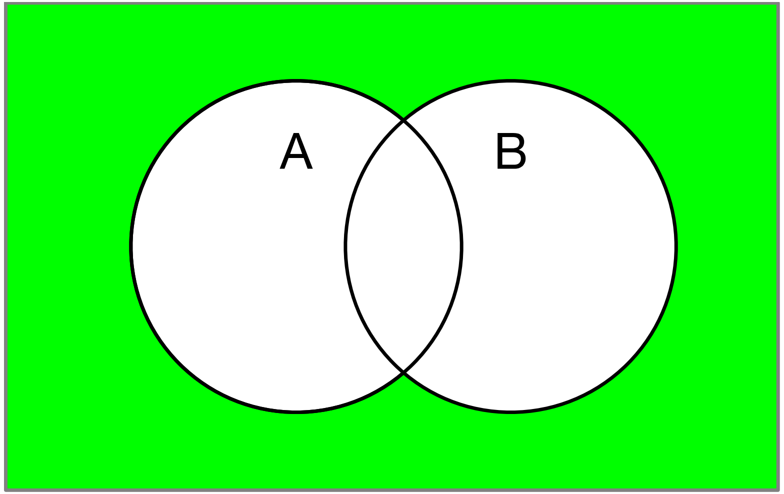
NANDの真理値表

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR

- 論理和（OR）を否定したもの.
- $\overline{A+B}=Y$と表せる.

$\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}}=1$に対応するベン図



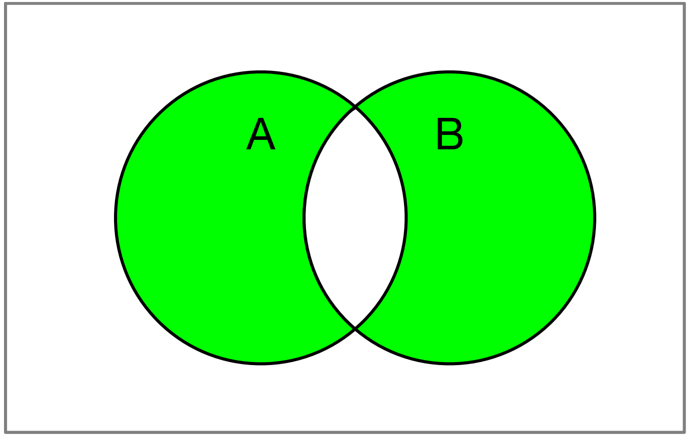
NORの真理値表

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

排他的論理和XOR

- 右下の真理値表に示すような演算を排他的論理和（XOR, exclusive OR）と呼ぶ.
- 入力が同じなら0（偽）を出力し，入力が異なれば1（真）を出力する.
- 論理式では$A \oplus B = Y$と表せる.

A⊕B = 1に対応するベン図



XORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

真理値表を作る

論理式から真理値表を求める

$$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = Y$$

A	B	Y

論理式から真理値表を求める

まず入力A・Bを埋める.

$$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = Y$$

A	B	Y
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

論理式から真理値表を求める

論理式に値を代入して，Yを計算する.

$$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = Y$$

この論理式はXOR

A	B	Y	
0	0	0	0・1+1・0=0
0	1	1	0・0+1・1=1
1	0	1	1・1+0・0=1
1	1	0	1・0+0・1=0

演習

- 次の論理式の真理値表をかけ.

(1) $\mathrm{Y} = \overline{\mathrm{A}} + \mathrm{B}$

(2) $\mathrm{Y} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + \bar{A} \cdot \bar{B}$

(3) $\mathrm{Y} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot C + A \cdot \bar{C}$

(1)

A	B	Y
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

(2)

A	B	Y
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

(3)

A	B	C	Y
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

演習

- 次の論理式の真理値表をかけ.

(1) $Y = \bar{A} + B$

(2) $Y = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

(3) $Y = A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{C}$

(1)

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(2)

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(3)

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

ベン図を使う

演習

- 次の論理式をベン図で表わせ．ただし，論理式が真となる部分を塗りつぶせ．

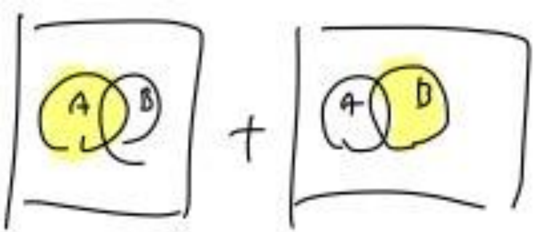
$$A + \overline{A} \cdot B$$

$$A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$

演習

- 次の論理式をベン図で表わせ．ただし，論理式が真となる部分を塗りつぶせ．

$$A + \overline{A} \cdot B$$

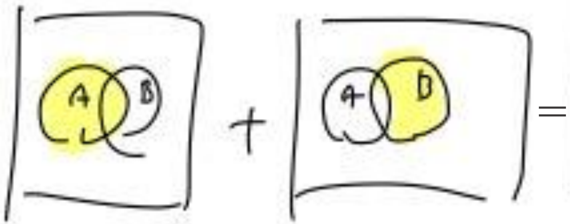


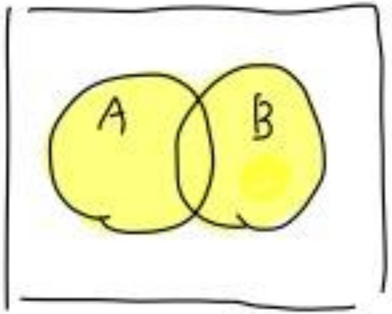
$$A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$

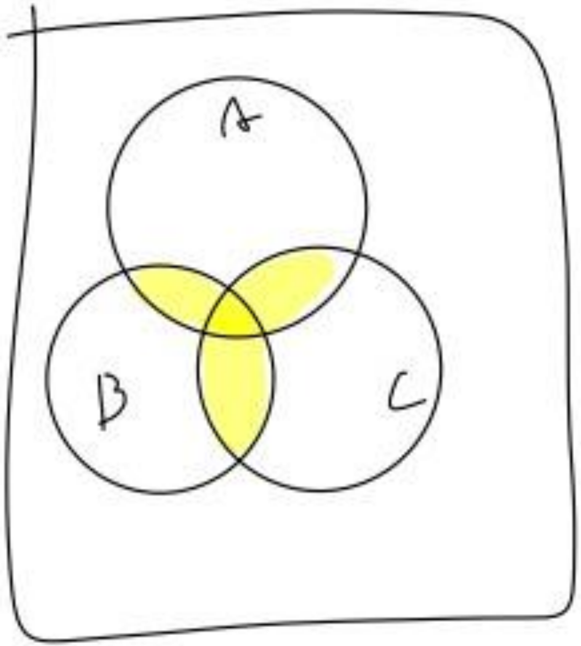
演習

- 次の論理式をベン図で表わせ．ただし，論理式が真となる部分を塗りつぶせ．

$$A + \overline{A} \cdot B$$





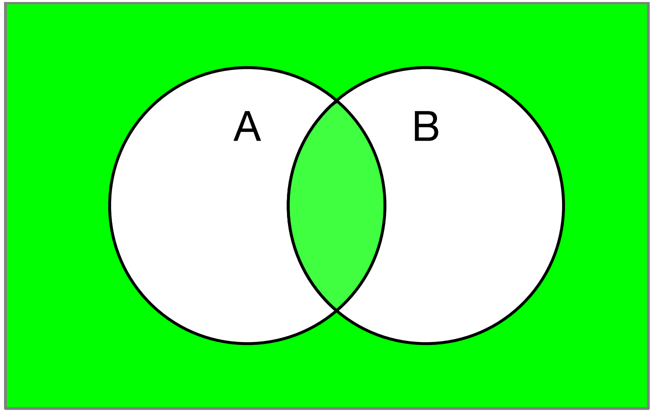


$$A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$

ベン図の足し算は塗られた部分が足し合わされる．

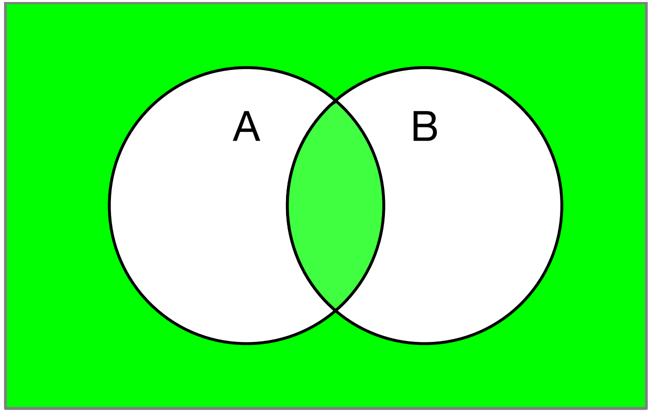
演習

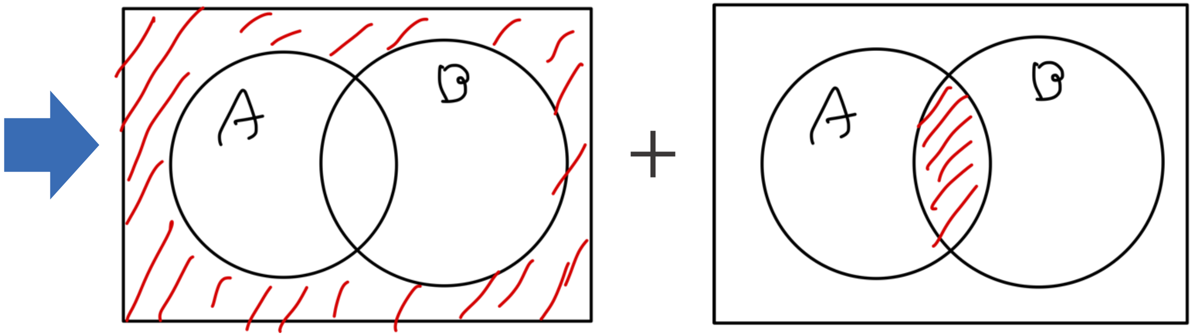
- 次のベン図が表す論理式を示せ.



演習

- 次のベン図が表す論理式を示せ.





$$\overline{A + B} + A \cdot B$$

論理演算

論理演算の公理・定理

$$A + 0 = A$$

$$A \cdot 1 = A$$

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + \overline{A} = 1$$

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

覚える必要なし．言いたいことは2点のみ．

- 論理演算は，交換則が成り立つ．つまり，中学校で習った数学が使える．
- ここまでのスライドの内容を理解していれば自明なことばかり．

$$A + A = A$$

$$A \cdot A = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

$$A + (A \cdot B) = A$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$$

$$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$$

復習がてら，いくつか確認してみる

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot 1 = A$$

$$A + 0 = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

$$A + \bar{A} = 1$$

論理積

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

論理和

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

■ ド・モルガンの定理

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

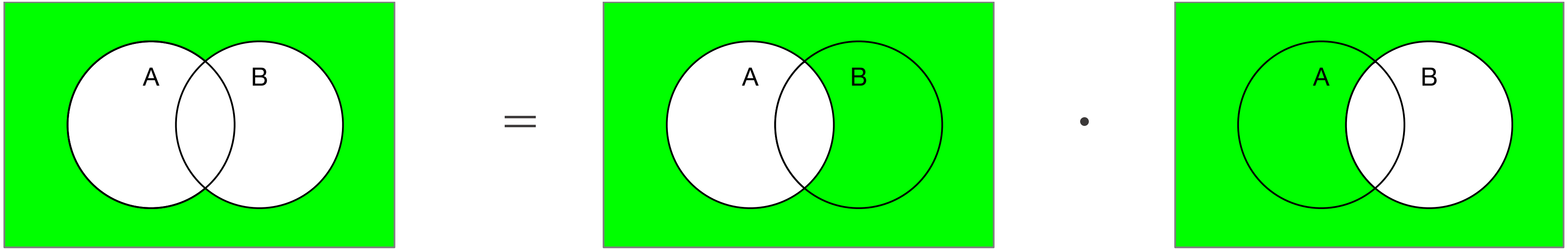
$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

全体の否定が個別の否定に変わり，かつ和と積が入れ替わる．

ド・モルガンの定理をベン図で確認

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$\overline{A+B}$ $\qquad$ $\overline{A}$ $\qquad$ $\overline{B}$



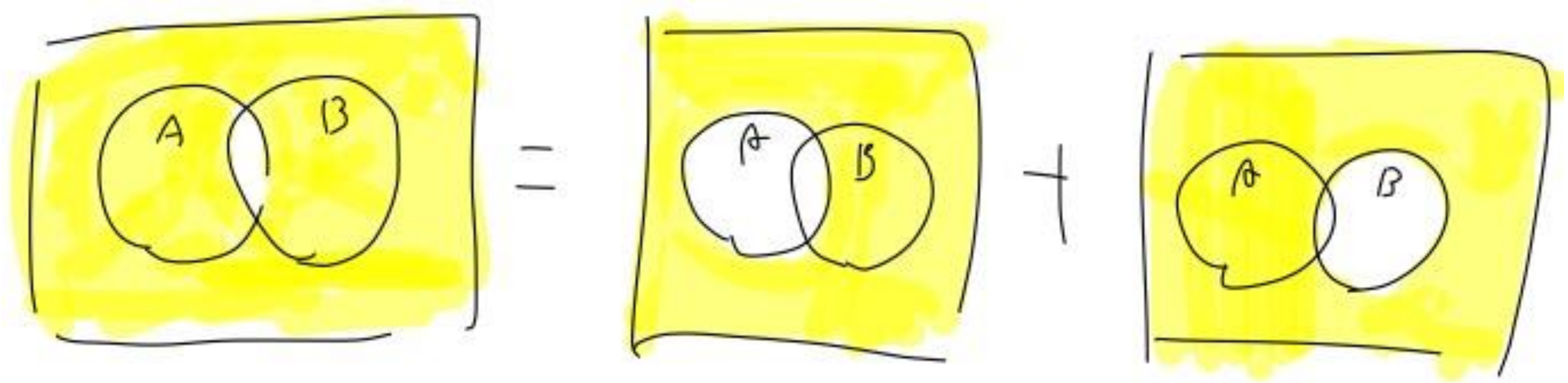
ベン図の掛け算は塗られた部分のうち重複する部分が残る.

演習

- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ の計算をベン図で確認せよ.

演習

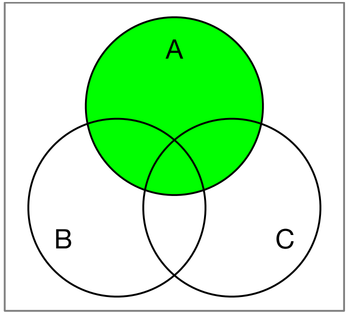
- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ の計算をベン図で確認せよ.



論理式の簡単化

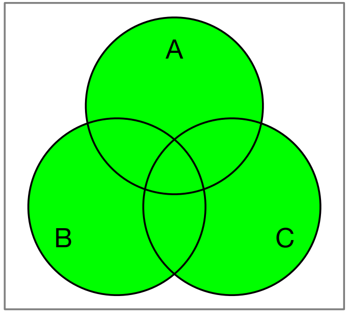
- 論理式をより短い簡単な形にすることを簡単化という.
- 次の論理式を簡単化してみる.

$$
\begin{aligned}
(A + B) \cdot (A + C) &= A \cdot A + A \cdot C + A \cdot B + \mathrm{B} \cdot C \\
&= \underline{A \cdot (A + B + C)} + B \cdot C \\
&= \underline{A} + B \cdot C
\end{aligned}
$$



A

$\cdot$



$A + B + C$

演習

- 次の論理式を簡単にせよ.

$$(A + B) \cdot (A + \overline{B})$$

$$\overline{A \cdot B} + \overline{A} \cdot B$$

$$(A + B) \cdot (A + C) + C \cdot (A + \overline{B})$$

演習

- 次の論理式を簡単にせよ．

$$(A+B)\cdot(A+\overline{B}) = A\cdot A + A\cdot\overline{B} + A\cdot B + \underbrace{B\cdot\overline{B}}_{0}$$

$$= A + A\cdot\underbrace{(\overline{B}+B)}_{1}$$

$$= A$$

$$\overline{A\cdot B} + \overline{A}\cdot B = \overline{A} + \overline{B} + \overline{A}\cdot B$$

ドモルガン

$$= \overline{A}\cdot(1+B) + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A\cdot B}$$

$$(A+B)\cdot(A+C) + C\cdot(A+\overline{B}) = A\cdot A + A\cdot C + A\cdot B + B\cdot C + A\cdot C + \overline{B}\cdot C$$

$$= A(A+B+C) + C\cdot(B+\overline{B})$$

$$= A+C$$

演習

- 次の論理式で誤っているのはどれか（第30回ME2種）.

1. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
2. $A + A \cdot B = A$
3. $A + \bar{A} = 1$
4. $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$
5. $A + \bar{B} = \bar{A} \cdot B$

演習

- 次の論理式で誤っているのはどれか（第30回ME2種）．

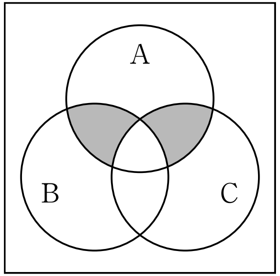
1. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
2. $A + A \cdot B = A$
3. $A + \bar{A} = 1$
4. $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$
5. $A + \bar{B} = \bar{A} \cdot B$

1. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
2. $A + A \cdot B = A(1 + \mathrm{B}) = \mathrm{A}$
3. $A + \bar{A} = 1$
4. $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$
5. $A + \bar{B}$これ以上簡単にできない

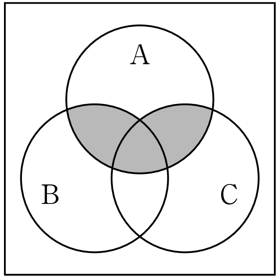
演習

- 次のベン図が表す論理式を答えよ． ただし，図中の網掛け部分が論理値の 1 を表す．第33回臨床工学技士国家試験改

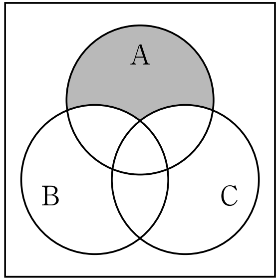
1.



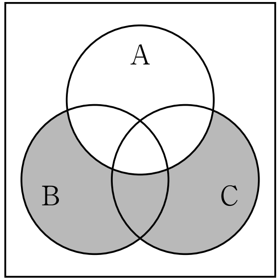
2.



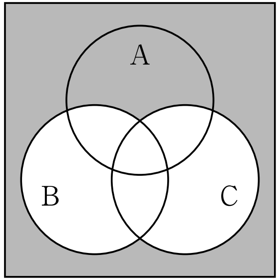
3.



4.



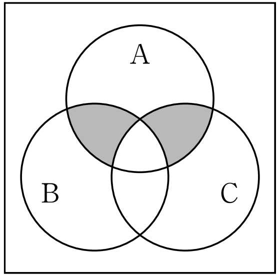
5.



演習

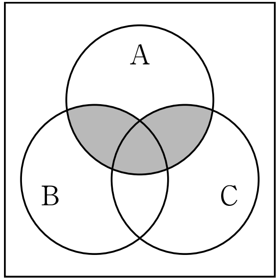
- 次のベン図が表す論理式を答えよ． ただし，図中の網掛け部分が論理値の 1 を表す．第33回臨床工学技士国家試験改

1.



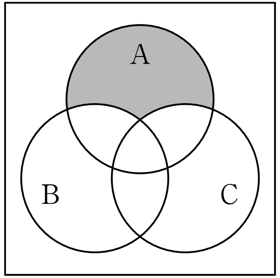
$A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C$
$= A \cdot (B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C)$

2.



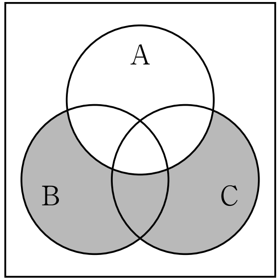
$A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$

3.



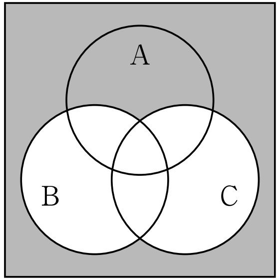
$A \cdot \overline{(B + C)} = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$

4.



$\bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot C = \bar{A} \cdot (B + C)$

5.



$\bar{B} \cdot \bar{C} = \overline{B + C}$