情報処理工学 第５回

藤田 一寿

公立小松大学保健医療学部臨床工学科

論理演算

論理演算

- 1（真）か0（偽）の2つの入力に対して行う演算
- コンピュータは論理演算に基づいて計算を行っている.
- コンピュータの処理をより理解するため論理演算を学ぶ.
- 論理演算で用いる代数をブール代数と呼ぶ.

- 1か0かは，電気回路ではスイッチのオンオフ，電流が流れる流れない，電圧が高い低いなどに対応していると考えられる.

論理演算の種類

- 論理積，AND
  - かつ，掛け算
- 論理和，OR
  - または，足し算
- 否定，NOT
  - ではない
- NAND
- NOR
- 排他的論理和，XOR

論理積と論理式

- 掛け算に相当する計算
- 集合においては積集合（かつ）に相当する
- 例
  - 0・0 = 0
  - 0・1 = 0
  - 1・0 = 0
  - 1・1 = 1
- 変数Aと変数Bの論理積の結果が変数Yとなる場合は
  - A・B = Y
- と書ける．このように論理演算を代数式で表現したものを論理式と言う．

論理積と真理値表

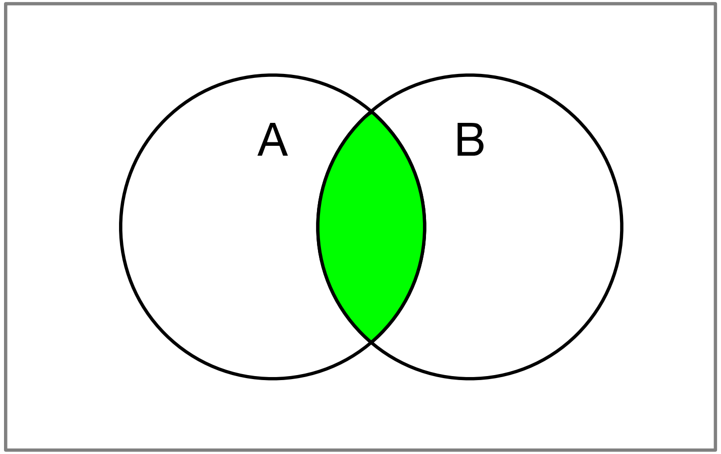
- 掛け算に相当する計算
- 例
  - A・B = Y
  - 0・0 = 0
  - 0・1 = 0
  - 1・0 = 0
  - 1・1 = 1
- 上記の計算を表に直したものを真理値表という.

真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

論理積とベン図

- 論理積は集合においては積集合に相当する.
  - A・BはAかつBに相当（Aに含まれかつBにも含まれる）
- 集合を表すときにベン図を用いる.
- ベン図は論理演算を視覚的に理解する手助けとなる事がある.
- A=1（真）とは集合Aに含まれることを意味する.



ベン図

論理積が1の場合はAかつBが真であることに相当
ベン図においてAかつBが真である部分はAとBが重なる部分

論理和

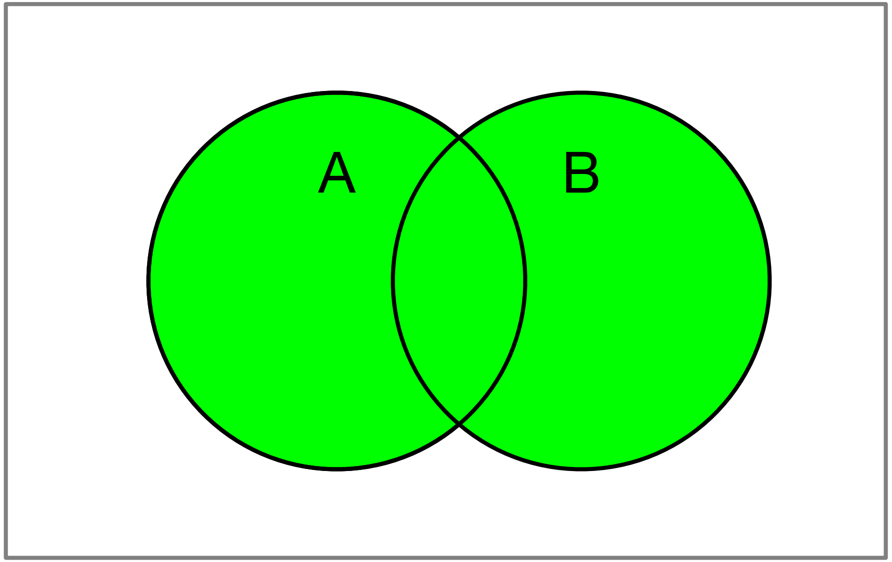
- 足し算に相当する計算
- 集合においては和集合（または）に相当する
- 例
  - 0+0 = 0
  - 0+1 = 1
  - 1+0 = 1
  - 1+1 = 1
- 変数Aと変数Bの論理和の結果が変数Yとなる場合は
  - A+B = Y
- と論理式で表せる.

真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

■ 論理和とベン図

- 論理和は集合においては和集合に相当する.
  - A+BはAまたはBに相当
  - Aに含まれるか，または，Bに含まれるか



論理和が1の場合はAまたはBが真であることに相当
ベン図においてAまたはBが真である部分はAとBすべての領域

否定

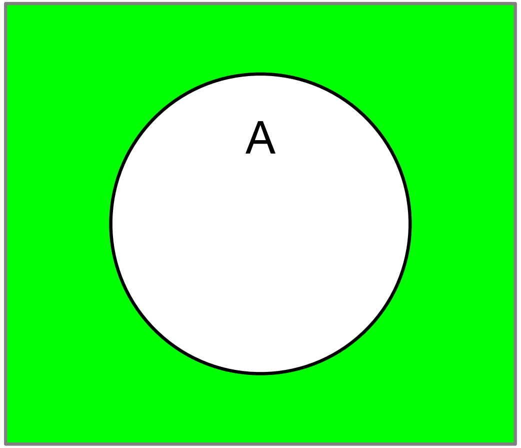
- 1（真）の否定は0（偽），0（偽）の否定は1（真）
- 集合において，補集合に相当する．Aではない．
- 変数Aの否定の結果が変数Yとなる場合は

$$\overline{A} = Y$$

- と書ける．

真理値表

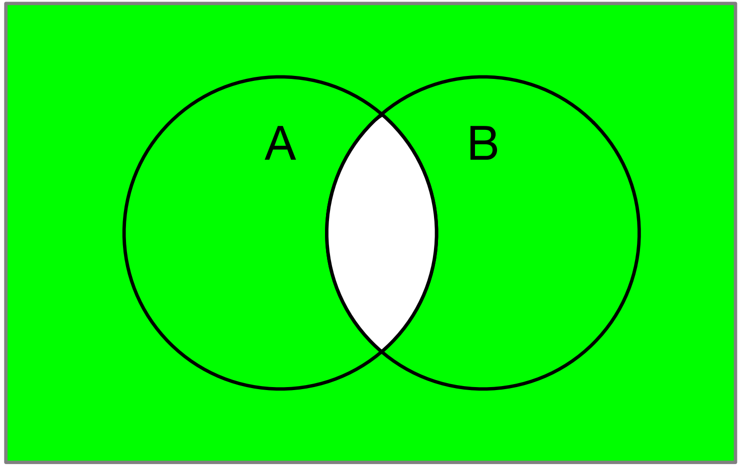
A	Y
0	1
1	0



否定が1の場合はAが偽であることに相当
ベン図においてAが偽である部分はAの外の領域

NAND

- 論理積（AND演算）を否定したもの.
- $\overline{A \cdot B} = Y$ と表せる.

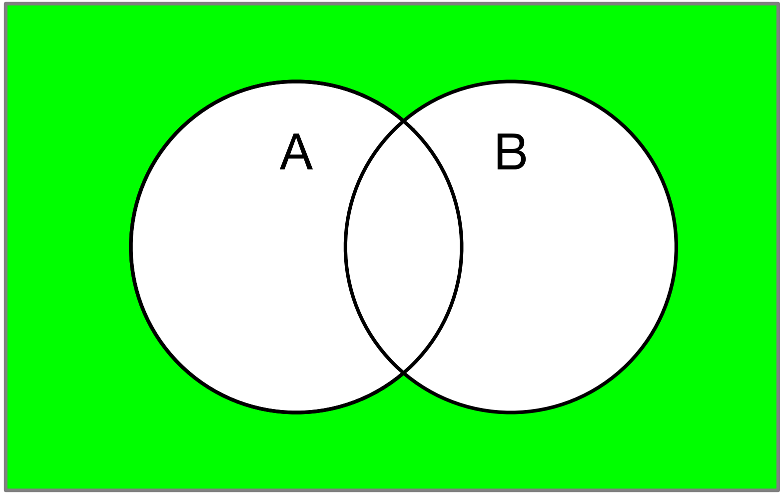


真理値表

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR

- 論理和（OR）を否定したもの.
- $\overline{A+B}=Y$ と表せる.

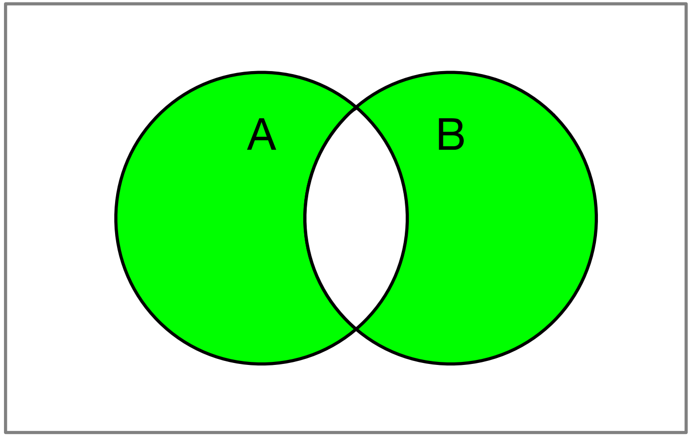


真理値表

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

排他的論理和XOR

- 右下の真理値表に示すような演算を排他的論理和（XOR, exclusive OR）と呼ぶ.
- 入力が同じなら0（偽）を出力し，入力が異なれば1（真）を出力する.
- 論理式では $A \oplus B = Y$ と表せる.



A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

論理式から真理値表を求める

$$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = Y$$

A	B	Y

論理式から真理値表を求める

まず入力A・Bを埋める.

$$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = Y$$

A	B	Y
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

論理式から真理値表を求める

$$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = Y$$

この論理式はXOR

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$

$1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

演習

- 次の論理式の真理値表をかけ.

$$Y = \overline{A} + B$$

$$Y = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$Y = A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{C}$$

演習

- 次の論理式の真理値表をかけ.

$$Y = \overline{A} + B$$

(1)

A	B	Y
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

$$Y = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

(2)

A	B	Y
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

$$Y = \underline{A \cdot B \cdot C} + \underline{A \cdot \overline{C}}$$

(3)

A	B	C	Y
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

演習

- 次の論理式の真理値表をかけ.

$$Y = \overline{A} + B$$

(1)

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$Y = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

(2)

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$Y = A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{C}$$

(3)

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

演習

- 次の論理式をベン図で表わせ．ただし，論理式が真となる部分を塗りつぶせ．

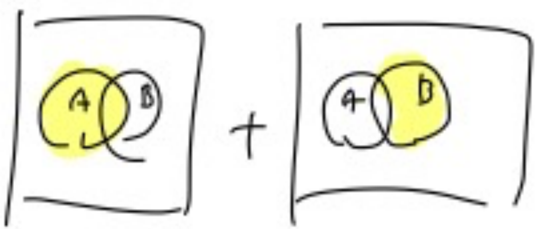
$$A + \overline{A} \cdot B$$

$$A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$

演習

- 次の論理式をベン図で表わせ．ただし，論理式が真となる部分を塗りつぶせ．

$$A + \overline{A} \cdot B$$

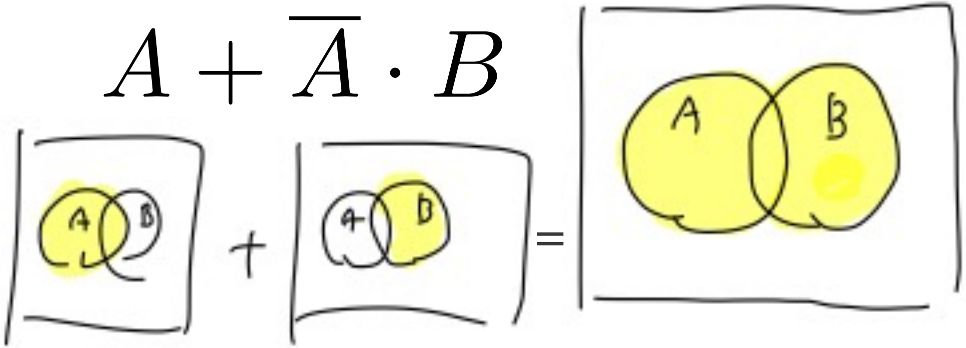


$$A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$

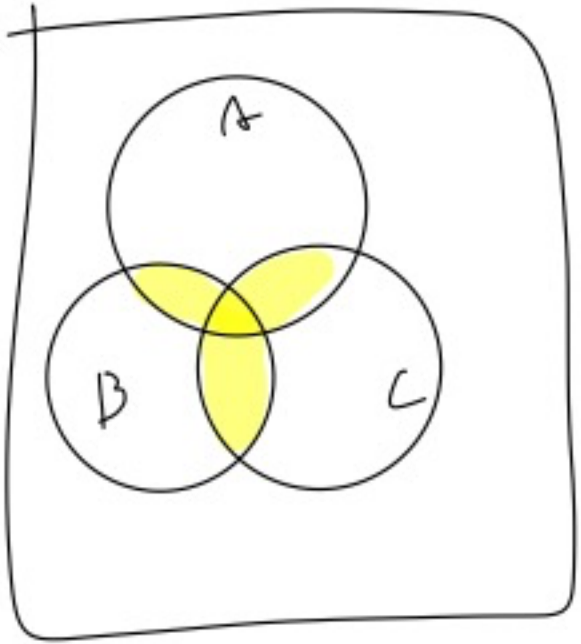
演習

- 次の論理式をベン図で表わせ．ただし，論理式が真となる部分を塗りつぶせ．

$$A + \overline{A} \cdot B$$

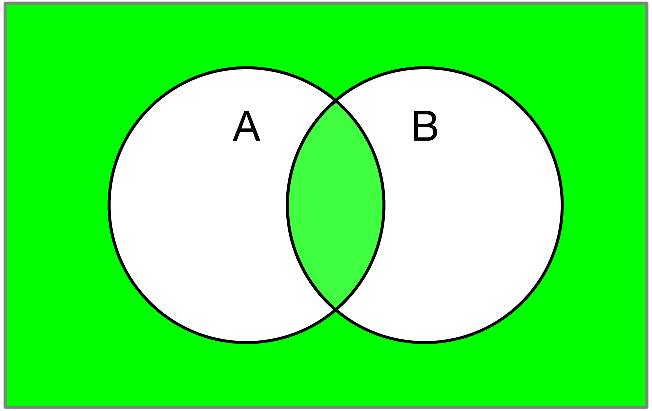


$$A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$



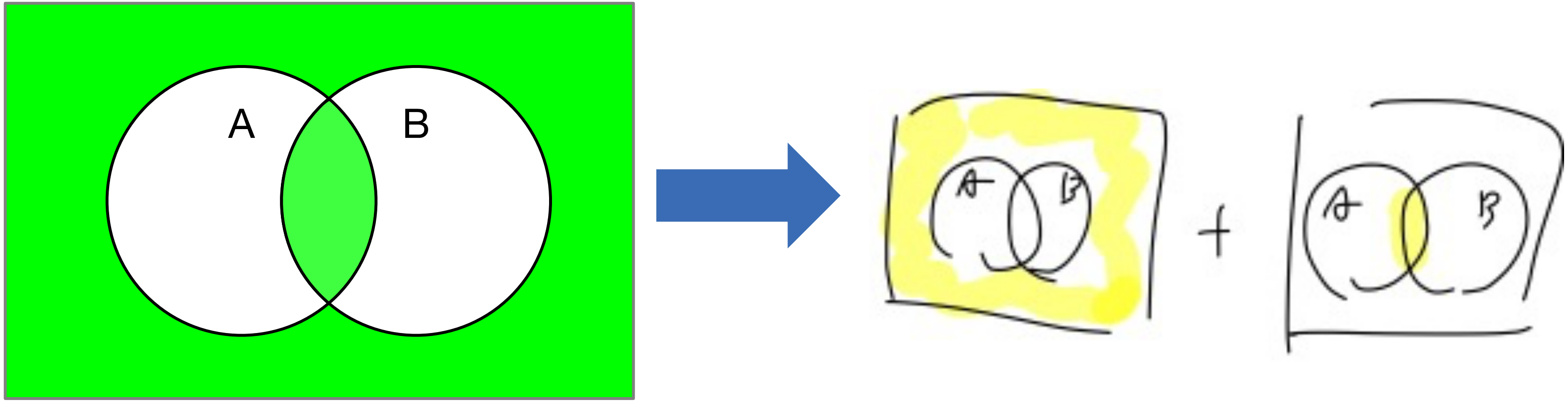
演習

- 次のベン図が表す論理式を示せ.



演習

- 次のベン図が表す論理式を示せ.



$$\overline{A+B} + A\cdot B$$

論理演算の公理・定理

$$A + 0 = A$$
$$A \cdot 1 = A$$
$$A + B = B + A$$
$$A \cdot B = B \cdot A$$
$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$A + \overline{A} = 1$$
$$A \cdot \overline{A} = 0$$

$$A + A = A$$
$$A \cdot A = A$$
$$A + 1 = 1$$
$$A \cdot 0 = 0$$
$$A \cdot (A + B) = A$$
$$A + (A \cdot B) = A$$
$$\overline{\overline{A}} = A$$
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$
$$A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$$
$$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$$

■ ド・モルガンの定理

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

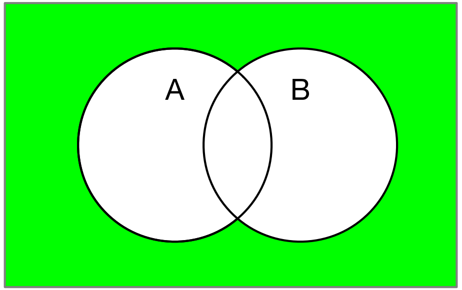
$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

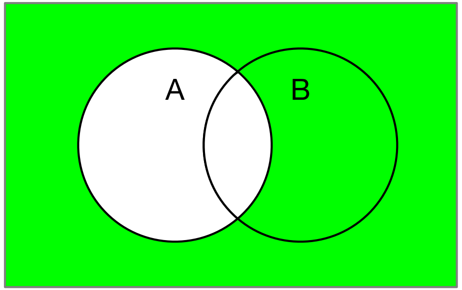
全体の否定が個別の否定に変わり，かつ和と積が入れ替わる.

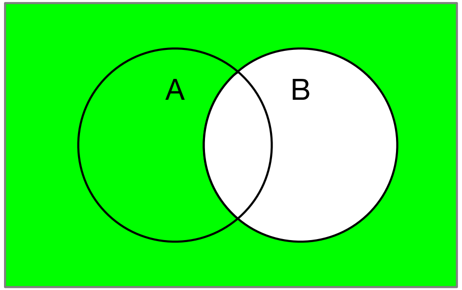
■ ド・モルガンの定理をベン図で確認

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$\overline{A+B}$ $=$ $\overline{A}$ $\cdot$ $\overline{B}$





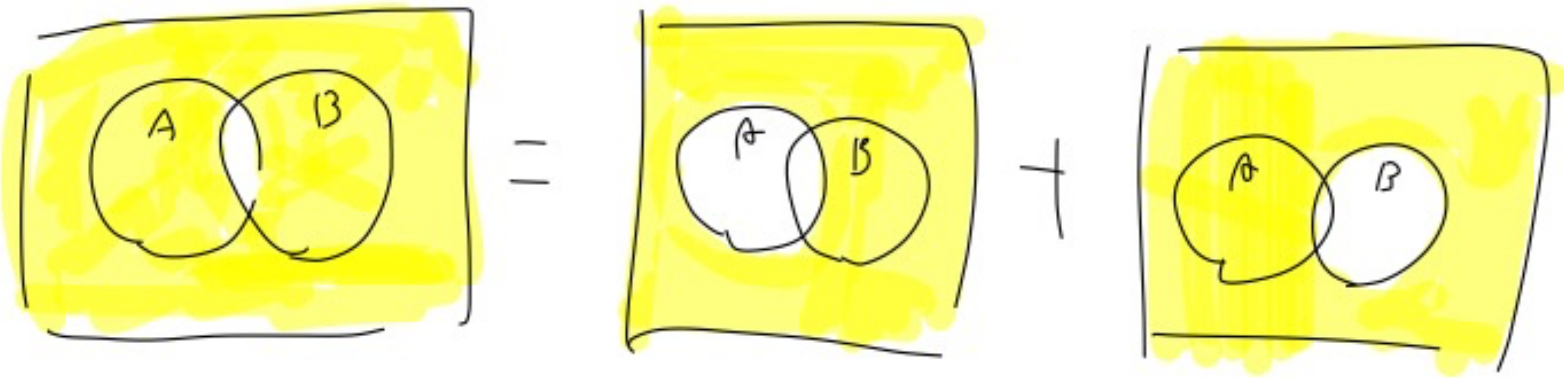


演習

- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ の計算をベン図で確認せよ.

演習

- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ の計算をベン図で確認せよ.



論理式の簡単化

- 論理式をより短い簡単な形にすることを簡単化という.
- 次の論理式を簡単化してみる.

$$
\begin{aligned}
(A+B)\cdot(A+C) &= A\cdot A + A\cdot C + A\cdot B + B\cdot C \\
&= \underline{A\cdot(A+B) + A\cdot(A+C)} + B\cdot C \\
&= A + B\cdot C
\end{aligned}
$$

A(A+B+C) = A

演習

- 次の論理式を簡単にせよ.

$$(A + B) \cdot (A + \overline{B})$$

$$\overline{A \cdot B} + \overline{A} \cdot B$$

$$(A + B) \cdot (A + C) + C \cdot (A + \overline{B})$$

演習

- 次の論理式を簡単にせよ.

$$(A+B)\cdot(A+\overline{B}) = \underbrace{A\cdot A}_{A} + A\cdot\overline{B} + A\cdot B + \underbrace{B\cdot\overline{B}}_{0}$$

$$= A + A\cdot\underbrace{(\overline{B}+B)}_{1}$$

$$= A$$

$$\overline{A\cdot B} + \overline{A}\cdot B = \overline{A} + \overline{B} + \overline{A}\cdot B$$

ドモルガン

$$= \overline{A}\cdot(1+B) + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A\cdot B}$$

$$(A+B)\cdot(A+C) + C\cdot(A+\overline{B}) = A\cdot A + A\cdot C + A\cdot B + B\cdot C + A\cdot C + \overline{B}\cdot C$$

$$= A(A+B+C) + C\cdot(B+\overline{B})$$

$$= A + C$$