

情報処理工学 第5回

藤田 一寿

公立小松大学保健医療学部臨床工学科

論理演算

■ 論理演算

- 1（真）か0（偽）の2つの入力に対して行う演算
 - コンピュータは論理演算に基づいて計算を行っている.
 - 論理演算で用いる代数をブール代数と呼ぶ.
-
- 1か0かは, 電気回路ではスイッチのオンオフ, 電流が流れる流れない, 電圧が高い低いなどに対応していると考えられる.

■ 論理演算の種類

- 論理積, AND
 - かつ, 掛け算
- 論理和, OR
 - または, 足し算
- 否定, NOT
 - ではない
- NAND
- NOR
- 排他的論理和, XOR

■ 論理積と論理式

- 掛け算に相当する計算
- 集合においては積集合に相当する
- 例
 - $0 \cdot 0 = 0$
 - $0 \cdot 1 = 0$
 - $1 \cdot 0 = 0$
 - $1 \cdot 1 = 1$
- 変数Aと変数Bの論理積の結果が変数Zとなる場合は
 - $A \cdot B = Y$
- と書ける. このように論理演算を代数式で表現したものを論理式と言う.

■ 論理積と真理値表

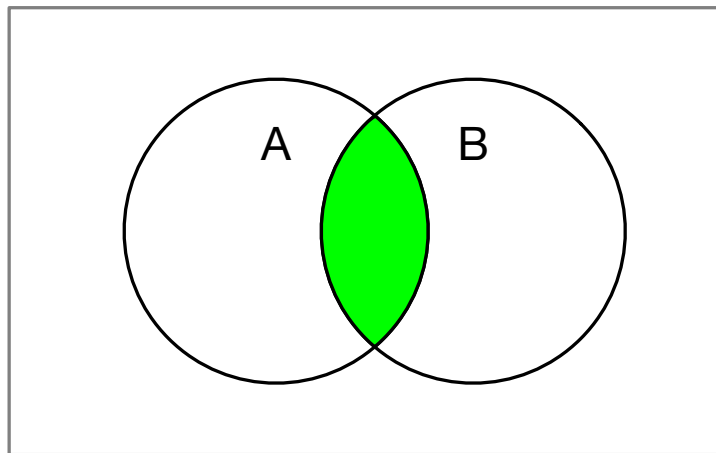
- 掛け算に相当する計算
- 例
 - $A \cdot B = Y$
 - $0 \cdot 0 = 0$
 - $0 \cdot 1 = 0$
 - $1 \cdot 0 = 0$
 - $1 \cdot 1 = 1$
- 上記の計算を表に直したものを真理値表という.

真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

■ 論理積とベン図

- 論理積は集合においては積集合に相当する.
 - $A \cdot B$ はAかつBに相当 (Aに含まれかつBにも含まれる)
- 集合を表すときにベン図を用いる.
- ベン図は論理演算を視覚的に理解する手助けとなる事がある.
- $A=1$ (真) とは集合Aに含まれることを意味する.



ベン図

論理積が1の場合はAかつBが真であることに相当
ベン図においてAかつBが真である部分はAとBが重なる部分

■ 論理和

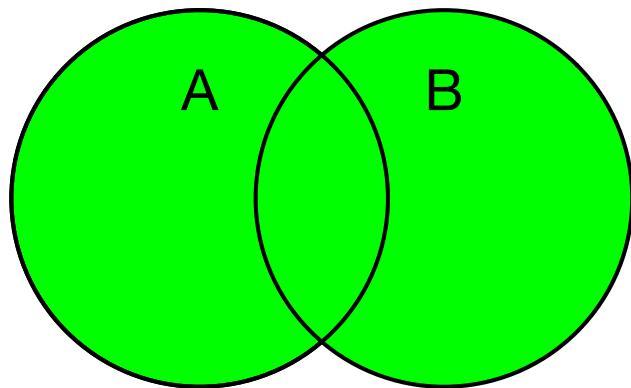
- 足し算に相当する計算
- 集合においては和集合に相当する
- 例
 - $0+0 = 0$
 - $0+1 = 1$
 - $1+0 = 1$
 - $1+1 = 1$
- 変数Aと変数Bの論理和の結果が変数Yとなる場合は
 - $A+B = Y$
- と論理式で表せる.

真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

■ 論理和とベン図

- 論理和は集合においては和集合に相当する.
 - $A+B$ はAまたはBに相当
 - Aに含まれるか, または, Bに含まれるか



論理和が1の場合はAまたはB
が真であることに相当
ベン図においてAまたはBが真
である部分はAとBすべての領
域

■ 否定

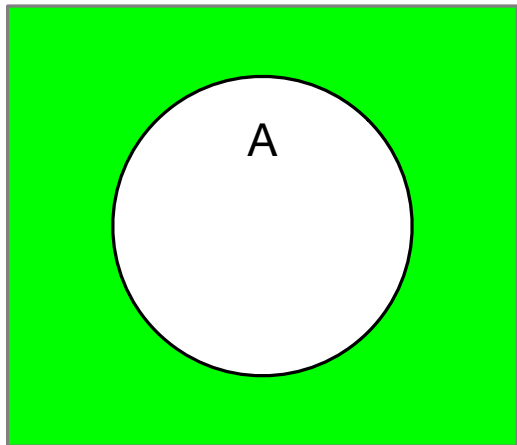
- 1（真）の否定は0（偽）， 0（偽）の否定は1（真）
- 集合において， 補集合に相当する． Aではない．
- 変数Aの否定の結果が変数Yとなる場合は

$$\overline{A} = Y$$

- と書ける．

真理値表

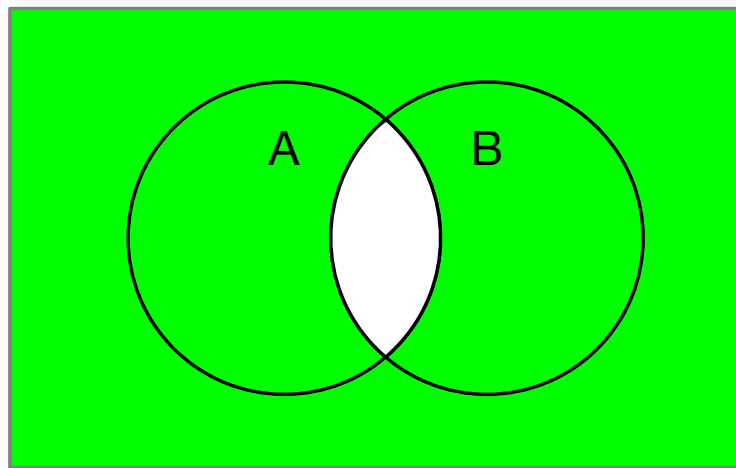
A	Y
0	1
1	0



否定が1の場合はAが偽である
ことに相当
ベン図においてAが偽である
部分はAの外の領域

■ NAND

- ANDの出力の否定したもの.
- $\overline{A \cdot B} = Y$ と表せる.

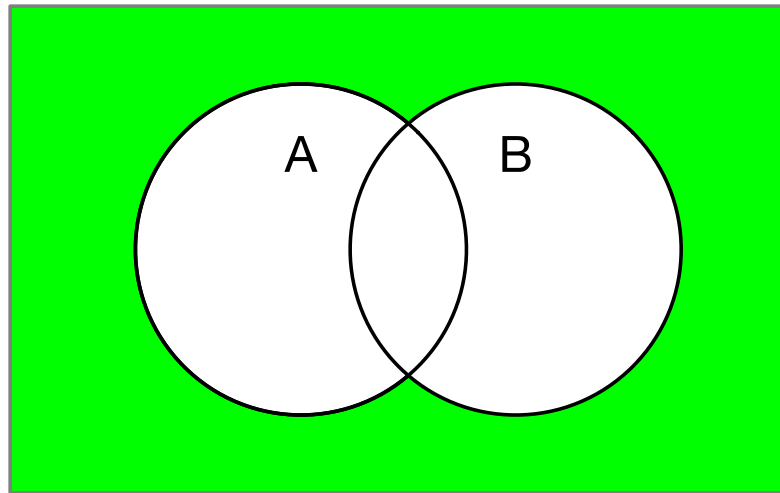


真理値表

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

■ NOR

- ORの出力の否定したもの.
- $\overline{A + B} = Y$ と表せる.

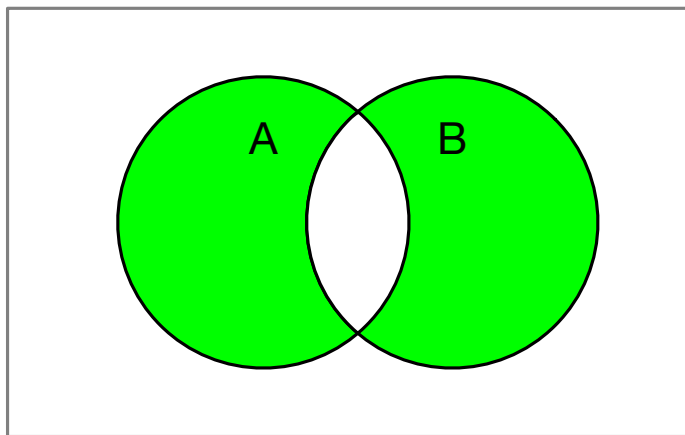


真理値表

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

■ 排他的論理和XOR

- 真理値表に示すような演算を排他的論理和（XOR, exclusive OR）と呼ぶ.
- 入力と同じなら0（偽）を出力し, 入力が異なれば1（真）を出力する.
- 論理式では $A \oplus B = Y$ と表せる.



A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

■ 論理式から真理値表を求める

$$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = Y$$

A	B	Y

- 次の論理式の真理値表をかけ.

$$Y = \overline{A} + B$$

$$Y = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$Y = A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{C}$$

■ 演習

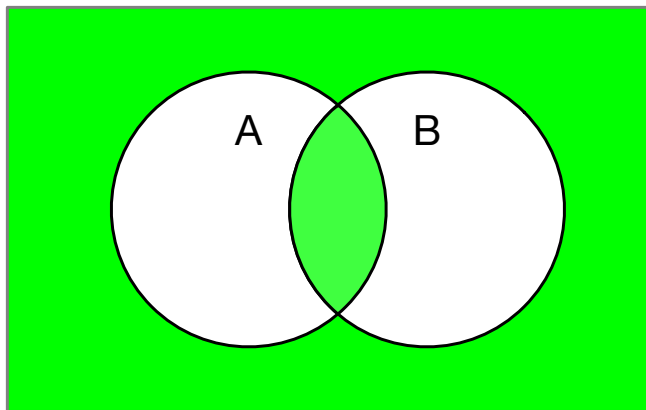
- 次の論理式をベン図で表わせ。ただし，論理式が真となる部分を塗りつぶせ。

$$A + \overline{A} \cdot B$$

$$A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$

■ 演習

- 次のベン図が表す論理式を示せ.



$$A + 0 = A$$

$$A \cdot 1 = A$$

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$\underline{A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + \overline{A} = 1$$

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

$$A + A = A$$

$$A \cdot A = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

$$A + (A \cdot B) = A$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$$

$$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$$

■ ド・モルガンの定理

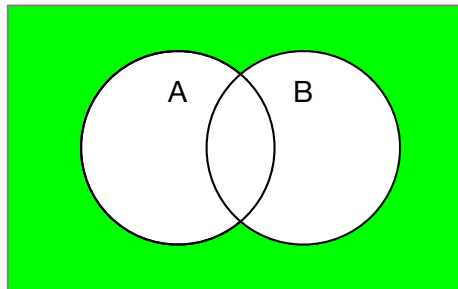
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

全体の否定が個別の否定に変わり，かつ和と積が入れ替わる．

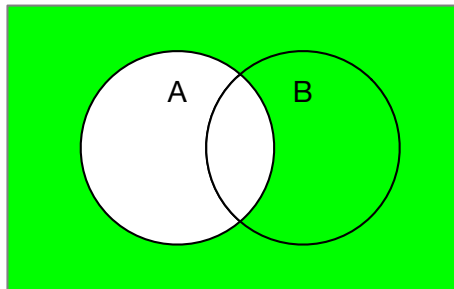
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A + B}$$



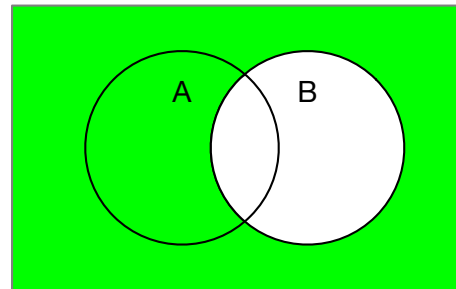
=

$$\overline{A}$$



•

$$\overline{B}$$



■ 演習

- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ の計算をベン図で確認せよ.

■ 論理式の簡単化

- 論理式をより短い簡単な形にすることを簡単化という.
- 次の論理式を簡単化してみる.

$$\begin{aligned}(A + B) \cdot (A + C) &= A \cdot A + A \cdot C + A \cdot B + B \cdot C \\ &= A \cdot (A + B) + A \cdot (A + C) + B \cdot C \\ &= A + B \cdot C\end{aligned}$$

- 次の論理式を簡単にせよ.

$$(A + B) \cdot (A + \overline{B})$$

$$\overline{A \cdot B} + \overline{A} \cdot B$$

$$(A + B) \cdot (A + C) + C \cdot (A + \overline{B})$$