

情報処理工学 第7回

藤田 一寿

公立小松大学保健医療学部臨床工学科

カルノー図

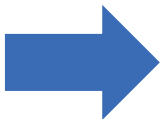
■ 真理値表から論理回路を作る

- 前述のやり方では困ることがある.
 - 式の簡単化に行き詰まる.
 - 入力が多く真理値表が複雑になっている.

■ 式の簡単化が行き詰まる例

ORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



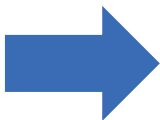
$$\begin{aligned} Y &= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \\ &= \overline{A} \cdot B + A \cdot (\overline{B} + B) \\ &= \overline{A} \cdot B + A \end{aligned}$$

ORの真理値表を論理式にうまく変換できていない…

■ 式の簡単化が行き詰まる例

ORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



$$\begin{aligned} Y &= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \\ &= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B + A \cdot B \\ &= (A + \overline{A}) \cdot B + A \cdot (B + \overline{B}) \\ &= A + B \end{aligned}$$

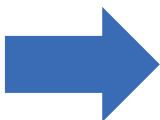
論理式の公式をうまく駆使すればORの論理式が導けるが…

簡単な方法はないのか？

■ 式の簡単化が行き詰まる例

ORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



$$\begin{aligned} Y &= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \\ &= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B + A \cdot B \\ &= (A + \overline{A}) \cdot B + A \cdot (B + \overline{B}) \\ &= A + B \end{aligned}$$

論理式の公式をうまく駆使すればORの論理式が導けるが…

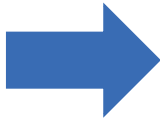
簡単な方法はないのか？  カルノー図を使うとうまくいく

■ カルノー図

- 論理式を簡略化するための表

ORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



カルノー図

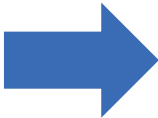
B \ A	0	1
	0	1
0	0	1
1	1	1

■ カルノー図

- 論理式を簡略化するための表

ORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



カルノー図

B \ A	0	1
	0	1
0	0	1
1	1	1

赤い部分が入力
青い部分が出力

■ カルノー図から論理式を求める

B \ A	0	1
	0	1
0	0	1
1	1	1

赤い線で囲まれた出力が1になる部分について考えてみる.

$$\overline{A} \cdot B + A \cdot B = B \cdot (A + \overline{A}) = B$$

Aが消えてBだけになった！！

■ カルノー図から論理式を求める

B \ A	0	1
	0	1
0	0	1
1	1	1

$$\overline{A} \cdot B + A \cdot B = B \cdot (A + \overline{A}) = B$$

赤い線で囲まれた部分では、Aは0と1、Bは1となる。

Aは0と1の値になる場合、AとAの否定の足し算が出てくるため、Aが消えてBのみとなった。

■ カルノー図から論理式を求める

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	1

赤い点線で囲まれた部分について考えてみる.

$$\boxed{A \cdot \overline{B}} + \boxed{A \cdot B} = A \cdot (A + \overline{B}) = A$$

前述のように考えると, Bは0と1となっているため, Bが消えた.

■ カルノー図から論理式を求める

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	1

赤い線で囲まれた部分から導かれた論理式と、赤い点線で囲まれた部分から導かれた論理式を足すと答えとなる。

$$Y = A + B$$

■ カルノー図から論理式を求める

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	1

$$\begin{aligned} Y &= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \\ &= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + \boxed{A \cdot B + A \cdot B} \\ &= (A + \overline{A}) \cdot B + A \cdot (B + \overline{B}) \\ &= A + B \end{aligned}$$

なぜ、赤い線と赤い点線の両方で囲まれた $A \cdot B$ を2回使ってよいのか？

それは $A \cdot B = A \cdot B + A \cdot B$ と変換できるためである。

3つ以上入力がある場合のカルノー図

- 入力が3つ以上の場合でも、2つのときと同じやり方で行う。
- ただし、表の中の数値の並び方に注意する。

真理値表

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

カルノー図

		AB			
		00	01	11	10
C	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

■ 例

- 真理値表をもとに論理回路を作成せよ.

真理値表

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

カルノー図

		AB			
		00	01	11	10
C	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

		AB		00	01	11	10
		C					
0				0	0	1	0
1				0	1	1	1

■ 演習

- 次の真理値表から論理回路を作れ。ただし、カルノー図を用いよ。

真理値表

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

■ 演習

- 次の真理値表から論理回路をつくれ。ただし，カルノー図を用いよ。

真理値表

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

加算回路

■ 論理回路による足し算の実現

- 論理演算・論理回路には論理和はあるが、あくまでも論理的な足し算であって、算術的な足し算ではない。
- どのようにして算術的な足し算を論理式・論理回路で表現するのか？

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 10$$

■ 算術加算の真理値表

1桁の2進数AとBの和は2桁の2進数CSとなる，という計算をすることを考える．

入力（1桁の2進数）：A, B

和（足した結果の1桁目）：S

桁上げ（足した結果の2桁目）：C キャリーという

真理値表

A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

■ 真理値表から論理式を立てる

真理値表

A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

2出力あるので論理式は2つ立つ。
出力が1の部分に注目して論理式を作る。

$$C = A \cdot B$$

$$S = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \oplus B$$

■ 半加算器

この真理値表及び論理式は1桁の2進数の和のみを可能にしている.
このような加算を実現する論理回路を半加算器という.

真理値表

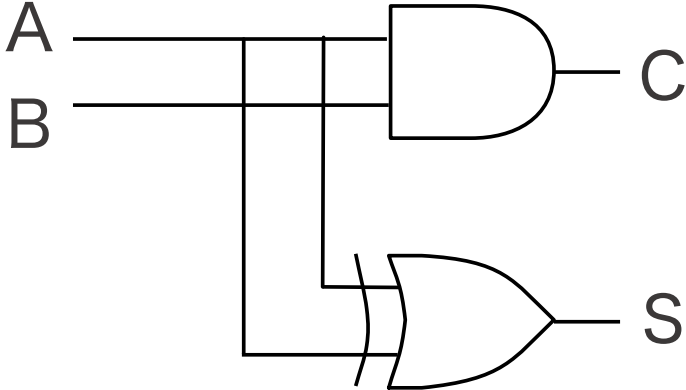
A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

論理式

$$C = A \cdot B$$

$$S = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \oplus B$$

■ 半加算器の論理回路



■ 全加算器

- 半加算器では1桁の2進数の足し算を論理式・論理回路で実現できている.
- 2桁以上の2進数の足し算はどのように論理式・論理回路で実現すればよいか

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$0 + 10 = 10$$

$$0 + 11 = 11$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 10$$

$$10 + 1 = 11$$

$$11 + 10 = 101$$

$$11 + 11 = 110$$

■ 問題を分割して考える

- 何桁ものの足し算をいきなり考えるのは難しい.
- ある1桁の足し算だけ考える.
- ある1桁の足し算は, その桁と桁上りの3つの数字の和で表せる.

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 11 \\ \hline 110 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ + \textcircled{1} \\ \hline 11 \end{array} \text{ 下の桁の桁上り}$$

2桁目の足し算を考えると, それぞれの桁 (1と1) と下の桁の桁上り (1) の足し算 (11) となっている.

■ 真理値表

ある桁の足し算を実現するには3つの2進数の和が計算できれば良い.

$$\begin{array}{r} A \\ B \\ + X \\ \hline CS \end{array}$$

真理値表

入力：A, B, X (桁上り)
和 (足した結果の1桁目) : S
桁上げ (足した結果の2桁目) : C

A	B	X	C	A
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

■ 真理値表から論理式を立てる

$$C = \overline{A} \cdot B \cdot X + A \cdot \overline{B} \cdot X + A \cdot B \cdot \overline{X} + A \cdot B \cdot X$$

$$= B \cdot X + A \cdot X + A \cdot B$$

$$S = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot X + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{X} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{X} + A \cdot B \cdot X$$

A	B	X	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

■ 全加算器

半加算器は出力の桁上りは考えていた。
しかし、それだけでは、1桁の2進数の足し算しか実現できない。

複数の桁の計算を実現するためには、下の桁の桁上りのことも考える必要がある。

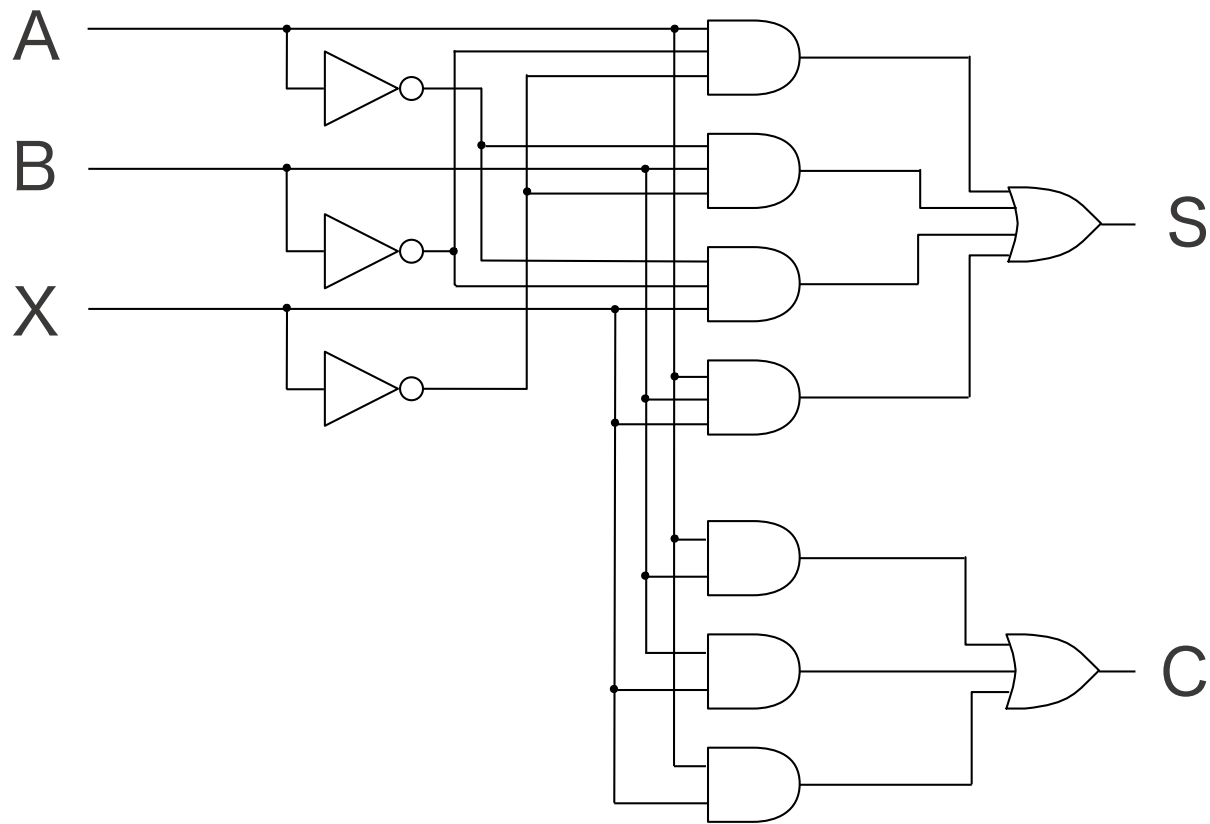
この真理値表・論理式のように、下の桁の桁上りのことも考えた論理回路を全加算器という。

$$\begin{aligned} C &= \overline{A} \cdot B \cdot X + A \cdot \overline{B} \cdot X + A \cdot B \cdot \overline{X} + A \cdot B \cdot X \\ &= B \cdot X + A \cdot X + A \cdot B \end{aligned}$$

$$S = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot X + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{X} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{X} + A \cdot B \cdot X$$

A	B	X	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

■ 全加算器の論理回路



覚えなくて良いよ