情報処理工学 第7回

藤田 一寿
公立小松大学保健医療学部臨床工学科

カルノー図

真理値表から論理回路を作る

- 前述のやり方では困ることがある.
  - 式の簡単化に行き詰まる.
  - 入力が多く真理値表が複雑になっている.

式の簡単化が行き詰まる例

ORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \\
&= \overline{A} \cdot B + A \cdot (\overline{B} + B) \\
&= \overline{A} \cdot B + A
\end{aligned}
$$

ORの真理値表を論理式にうまく変換できていない…

式の簡単化が行き詰まる例

ORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \\
&= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B + A \cdot B \\
&= (A + \overline{A}) \cdot B + A \cdot (B + \overline{B}) \\
&= A + B
\end{aligned}
$$

論理式の公式をうまく駆使すればORの論理式が導けるが…

簡単な方法はないのか？

式の簡単化が行き詰まる例

ORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B \\
&= \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} + A \cdot B + A \cdot B \\
&= (A + \overline{A}) \cdot B + A \cdot (B + \overline{B}) \\
&= A + B
\end{aligned}
$$

論理式の公式をうまく駆使すればORの論理式が導けるが…

簡単な方法はないのか？ ➡ カルノー図を使うとうまくいく

カルノー図

• 論理式を簡略化するための表

ORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

カルノー図

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	1

カルノー図

- 論理式を簡略化するための表

ORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

カルノー図

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	1

赤い部分が入力
青い部分が出力

カルノー図から論理式を求める

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	1

赤い線で囲まれた出力が1になる部分について考えてみる.

$$\boxed{\overline{A}\cdot B}+\boxed{A\cdot B}= B\cdot(A+\overline{A}) = B$$

Aが消えてBだけになった！！

カルノー図から論理式を求める

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	1

$$\overline{A}\cdot B + A\cdot B = B\cdot(A+\overline{A}) = B$$

赤い線で囲まれた部分では，Aは0と1，Bは1となる.
Aは0と1の値になる場合，AとAの否定の足し算が出てくる
ため，Aが消えてBのみとなった.

カルノー図から論理式を求める

B \ A	0	1
0	0	1
1	1	1

赤い点線で囲まれた部分について考えてみる.

$$\boxed{A \cdot \overline{B}} + \boxed{A \cdot B} = A \cdot (A + \overline{B}) = A$$

前述のように考えると，Bは0と1となっているため，Bが消えた.

カルノー図から論理式を求める

B＼A	0	1
0	0	1
1	1	1

赤い線で囲まれた部分から導かれた論理式と，赤い点線で囲まれた部分から導かれた論理式を足すと答えとなる.

$$Y = A + B$$

カルノー図から論理式を求める

B＼A	0	1
0	0	1
1	1	1

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{A}\cdot B + A\cdot \overline{B} + A\cdot B \\
&= \overline{A}\cdot B + A\cdot \overline{B} + \boxed{A\cdot B + A\cdot B} \\
&= (A+\overline{A})\cdot B + A\cdot (B+\overline{B}) \\
&= A + B
\end{aligned}
$$

なぜ，赤い線と赤い点線の療法で囲まれたA・Bを
2回使ってよいのか？
それはA・B＝A・B＋A・Bと変換できるためで
ある．

3つ以上入力がある場合のカルノー図

- 入力が3つ以上の場合でも，2つのときと同じやり方で行う.
- ただし，表の中の数値の並び方に注意する.

真理値表

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

カルノー図

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

■ 例

- 真理値表をもとに論理回路を作成せよ.

真理値表

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

カルノー図

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

演習

- 次の真理値表を論理回路になおせ．ただし，カルノー図を用いよ．

真理値表

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

演習

- 次の真理値表を論理回路になおせ．ただし，カルノー図を用いよ．

真理値表

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

加算回路

論理回路による足し算の実現

- 論理演算・論理回路には論理和はあるが，あくまでも論理的な足し算であって，算術的な足し算ではない．
- どのようにして算術的な足し算を論理式・論理回路で表現するのか？

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 10$$

算術加算の真理値表

1桁の2進数AとBの和は2桁の2進数CSとなる，という計算をすることを考える.

入力（1桁の2進数）：A，B
和（足した結果の1桁目）：S
桁上げ（足した結果の2桁目）：C　キャリーという

真理値表

A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

真理値表から論理式を立てる

真理値表

A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

2出力あるので論理式は2つ立つ.
出力が1の部分に注目して論理式を作る.

$$C = A \cdot B$$

$$S = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \oplus B$$

半加算器

この真理値表及び論理式は1桁の2進数の和のみを可能にしている.
このような加算を実現する論理回路を半加算器という.

真理値表

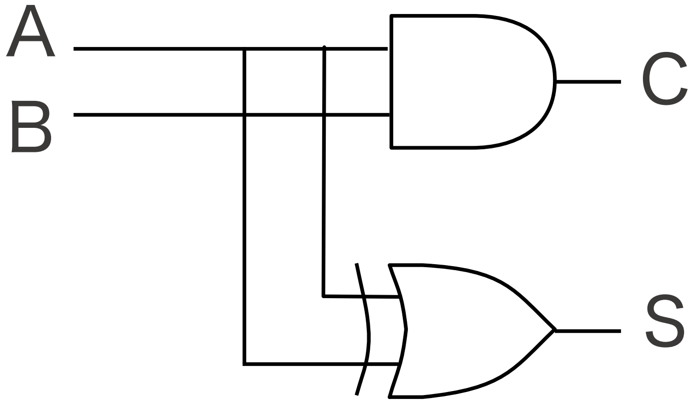
A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

論理式

$$C = A \cdot B$$

$$S = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} = A \oplus B$$

半加算器の論理回路



全加算器

- 半加算器では1桁の2進数の足し算を論理式・論理回路で実現できている.
- 2桁以上の2進数の足し算はどのように論理式・論理回路で実現すればよいか

$$
\begin{array}{rcrcr}
0 & + & 0 & = & 0 \\
0 & + & 1 & = & 1 \\
0 & + & 10 & = & 10 \\
0 & + & 11 & = & 11 \\
1 & + & 0 & = & 0 \\
10 & + & 1 & = & 1 \\
11 & + & 10 & = & 10 \\
11 & + & 11 & = & 100
\end{array}
$$

問題を分割して考える

- 何桁もの足し算をいきなり考えるのは難しい.
- ある1桁の足し算だけ考える.
- ある1桁の足し算は，その桁と桁上りの3つの数字の和で表せる.

$$\begin{array}{r} 11 \\ +\ 11 \\ \hline 110 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 1 & \\ 1 & \\ +\ 1 & \text{下の桁の桁上り} \\ \hline 11 & \end{array}$$

2桁目の足し算を考えると，それぞれの桁（1と1）と下の桁の桁上り（1）の足し算（11）となっている.

真理値表

ある桁の足し算を実現するには3つの2進数の和が計算できれば良い.

$$\begin{array}{rr} & A \\ & B \\ + & X \\ \hline & CS \end{array}$$

入力：A, B, X（桁上り）
和（足した結果の1桁目）：S
桁上げ（足した結果の2桁目）：C

真理値表

A	B	X	C	A
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

真理値表から論理式を立てる

$$C = \overline{A} \cdot B \cdot X + A \cdot \overline{B} \cdot X + A \cdot B \cdot \overline{X} + A \cdot B \cdot X$$
$$= B \cdot X + A \cdot X + A \cdot B$$
$$S = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot X + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{X} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{X} + A \cdot B \cdot X$$

A	B	X	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

全加算器

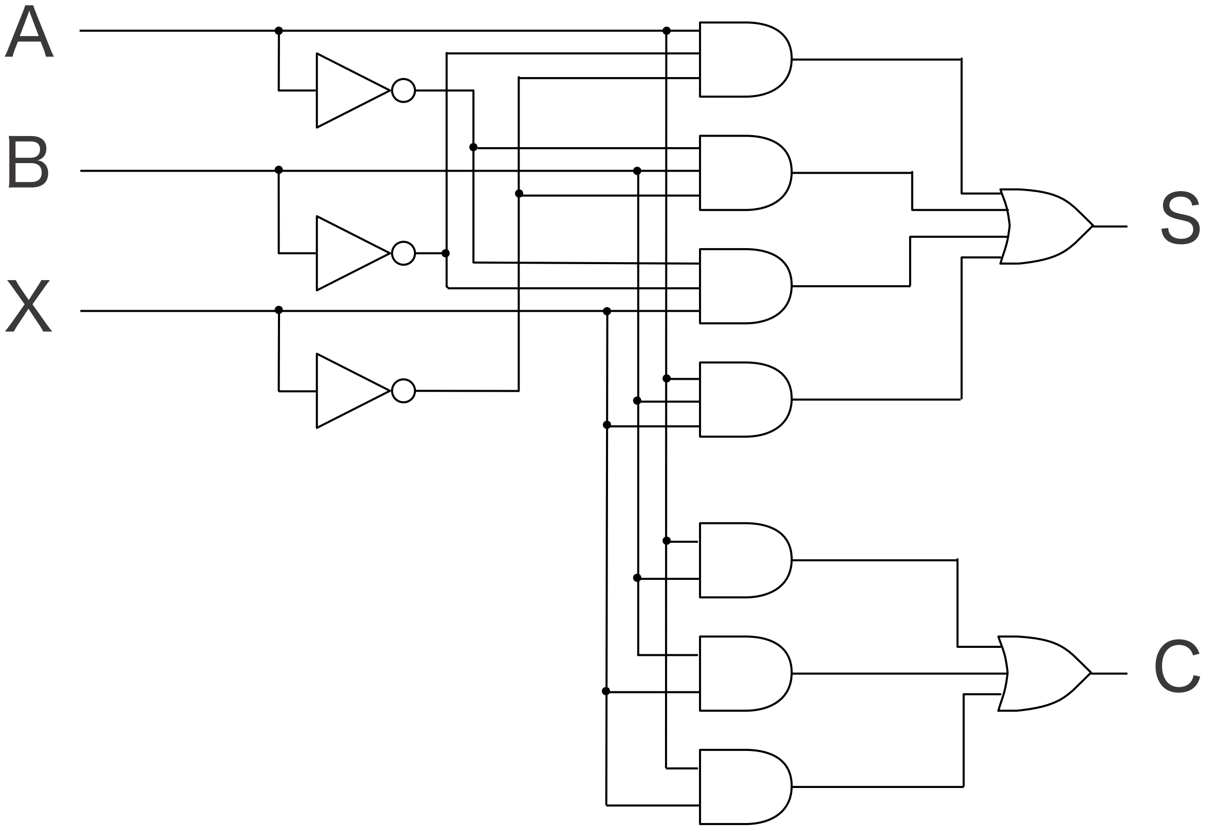
半加算器は出力の桁上りは考えていた．
しかし，それだけでは，1桁の2進数の足し算しか実現できない．
複数の桁の計算を実現するためには，下の桁の桁上りのことも考える必要がある．
この真理値表・論理式のように，下の桁の桁上りのことも考えた論理回路を全加算器という．

$$C = \overline{A} \cdot B \cdot X + A \cdot \overline{B} \cdot X + A \cdot B \cdot \overline{X} + A \cdot B \cdot X$$
$$= B \cdot X + A \cdot X + A \cdot B$$

$$S = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot X + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{X} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{X} + A \cdot B \cdot X$$

A	B	X	C	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

全加算器の論理回路



覚えなくて良いよ