

# 情報処理工学 第5回

藤田 一寿

公立小松大学保健医療学部臨床工学科

# 論理演算

## ■ 論理演算

- 1（真）か0（偽）の2つの入力に対して行う演算
  - 1か0だからといって2進数とは違う.
- コンピュータは論理演算に基づいて計算を行っている.
- コンピュータの処理をより理解するため論理演算を学ぶ.
- 1か0かは、電気回路ではスイッチのオンオフ、電流が流れる流れない、電圧が高い低いなどに対応していると考えられる.

## ■ 論理演算の種類

---

- 論理積, AND
  - 掛け算, かつに対応
- 論理和, OR
  - 足し算, またはに対応
- 否定, NOT
  - ではない
- NAND (ナンド)
- NOR (ノア)
- 排他的論理和, XOR (エックスオア)

## ■ 論理積と論理式

- 掛け算に相当する計算
- 集合においては積集合（かつ）に相当する
- 例
  - $0 \cdot 0 = 0$
  - $0 \cdot 1 = 0$
  - $1 \cdot 0 = 0$
  - $1 \cdot 1 = 1$
- 変数Aと変数Bの論理積の結果が変数Yとなる場合は
  - $A \cdot B = Y$
- と書ける. このように論理演算を代数式で表現したものを論理式と言う.

## ■ 論理積と真理値表

- $A \cdot B = Y$ は代数式ではあるが、それぞれの代数が0か1の値しか取らないので計算の全パターンを書ける.

- $A \cdot B = Y$
- $0 \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot 1 = 0$
- $1 \cdot 0 = 0$
- $1 \cdot 1 = 1$

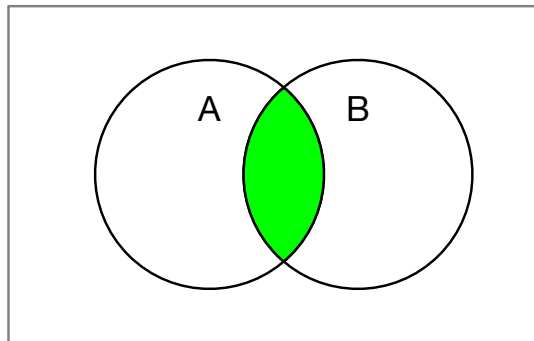
ANDの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 上記の計算を表で表したものを真理値表という.

## ■ 論理積とベン図

- 論理積は集合においては積集合に相当する.
  - $A \cdot B$ はAかつBに相当 (Aに含まれかつBにも含まれる)
- 集合はベン図を用いて表すことができる.
  - ベン図は論理演算を視覚的に理解する手助けとなる事がある.
  - $A=1$  (真) とは集合Aに含まれることを意味する.
- 論理積が1は, 集合では「AかつBが真である」に相当する.
- ベン図においてAかつBが真である部分はAとBが重なる部分である.



ベン図

## ■ 論理和

- 足し算に相当する計算
- 集合においては和集合（または）に相当する
- 例
  - $0+0 = 0$
  - $0+1 = 1$
  - $1+0 = 1$
  - $1+1 = 1$
- 変数Aと変数Bの論理和の結果が変数Yとなる場合は
  - $A+B = Y$
- と論理式で表せる.

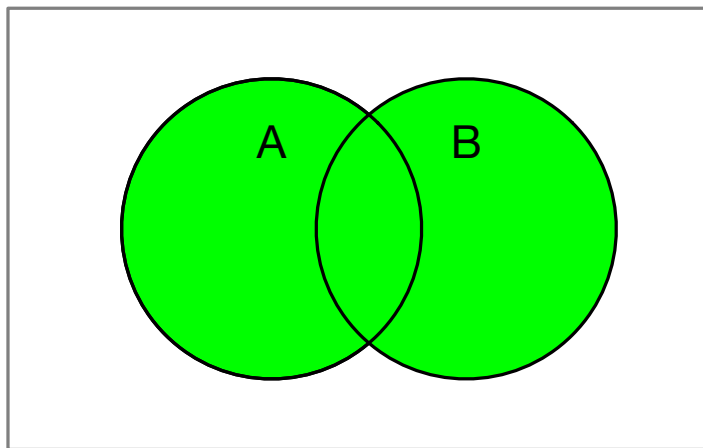
ORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



## ■ 論理和とベン図

- 論理和は集合においては和集合に相当する.
  - $A+B$ はAまたはBに相当
  - Aに含まれるか, または, Bに含まれるか
- 論理和が1の場合は, 集合では「AまたはBが真である」に相当
- ベン図においてAまたはBが真である部分はAとBすべての領域



## ■ 否定

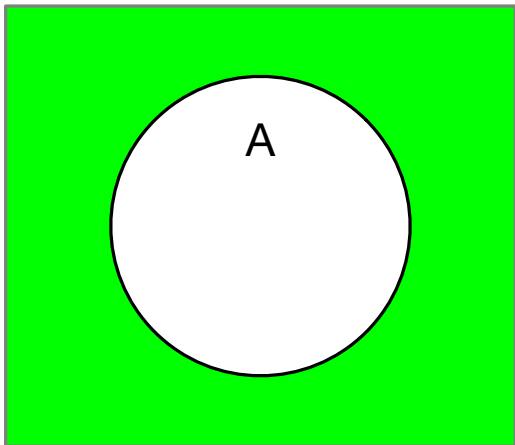
- 1（真）の否定は0（偽）， 0（偽）の否定は1（真）
- 集合において， 補集合に相当する． Aではない．
- 変数Aの否定の結果が変数Yとなる場合は

$$\overline{A} = Y$$

- と書ける．

NOTの真理値表

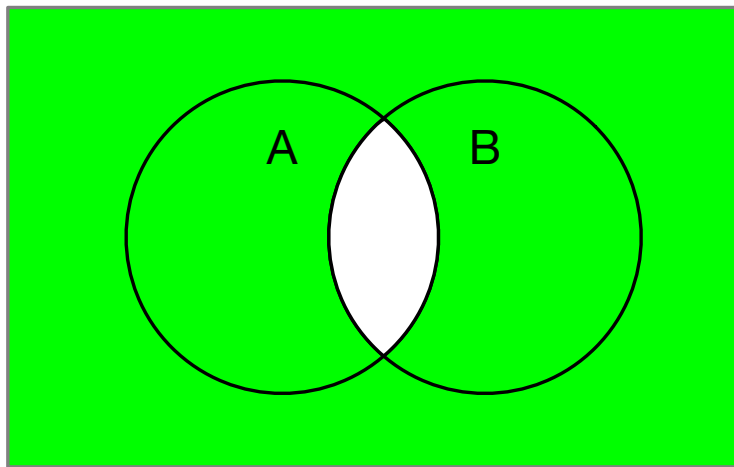
A	Y
0	1
1	0



否定が1の場合はAが偽である  
ことに相当  
ベン図においてAが偽である  
部分はAの外の領域

# ■ NAND

- 論理積（AND演算）を否定したもの.
- $\overline{A \cdot B} = Y$  と表せる.

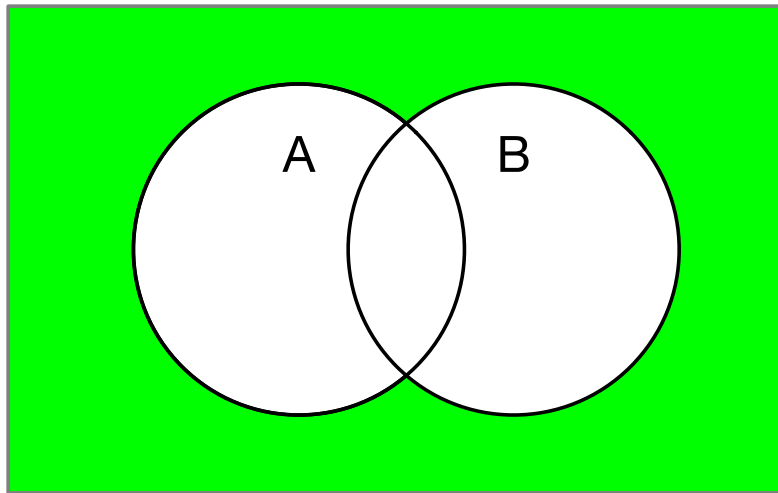


NANDの真理値表

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

# NOR

- 論理和（OR）を否定したもの.
- $\overline{A + B} = Y$  と表せる.

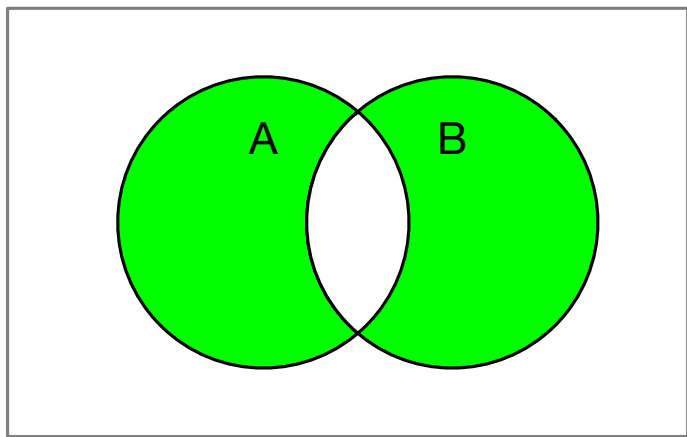


NORの真理値表

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

## ■ 排他的論理和XOR

- 右下の真理値表に示すような演算を排他的論理和（XOR, exclusive OR）と呼ぶ.
- 入力と同じなら0（偽）を出力し，入力が異なれば1（真）を出力する.
- 論理式では  $A \oplus B = Y$  と表せる.



XORの真理値表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

真理値表を作る

■ 論理式から真理値表を求める

$$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = Y$$

A	B	Y

## ■ 論理式から真理値表を求める

まず入力A・Bを埋める.

$$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = Y$$

A	B	Y
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	



## ■ 論理式から真理値表を求める

論理式に値を代入して、Yを計算する。

$$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = Y$$

この論理式はXOR

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$   
 $0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$   
 $1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$   
 $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

## ■ 演習

- 次の論理式の真理値表をかけ.

$$Y = \overline{A} + B$$

$$Y = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$Y = A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{C}$$

## 演習

- 次の論理式の真理値表をかけ.

$$Y = \overline{A} + B$$

(1)

A	B	Y
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

(2)

A	B	Y
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

$$Y = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

(3)

A	B	C	Y
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

$$Y = \underline{A \cdot B \cdot C} + \underline{A \cdot \overline{C}}$$

## 演習

- 次の論理式の真理値表をかけ.

$$Y = \overline{A} + B$$

(1)

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(2)

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$Y = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

(3)

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$Y = \underline{A \cdot B \cdot C} + \underline{A \cdot \overline{C}}$$

ベン図を使う

## ■ 演習

- 次の論理式をベン図で表わせ。ただし、論理式が真となる部分を塗りつぶせ。

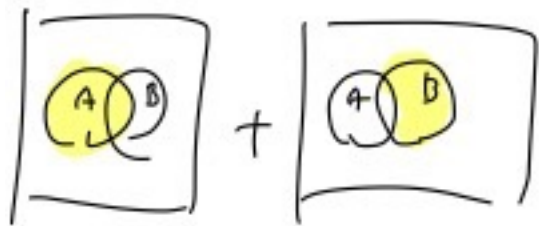
$$A + \overline{A} \cdot B$$

$$A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$

## ■ 演習

- 次の論理式をベン図で表わせ。ただし、論理式が真となる部分を塗りつぶせ。

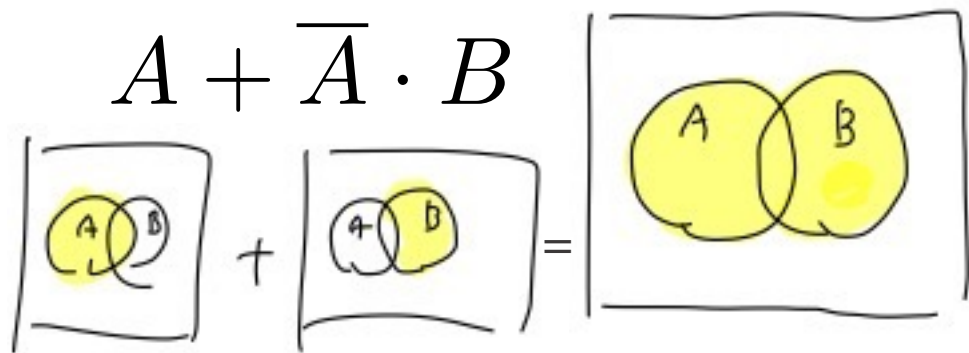
$$A + \overline{A} \cdot B$$



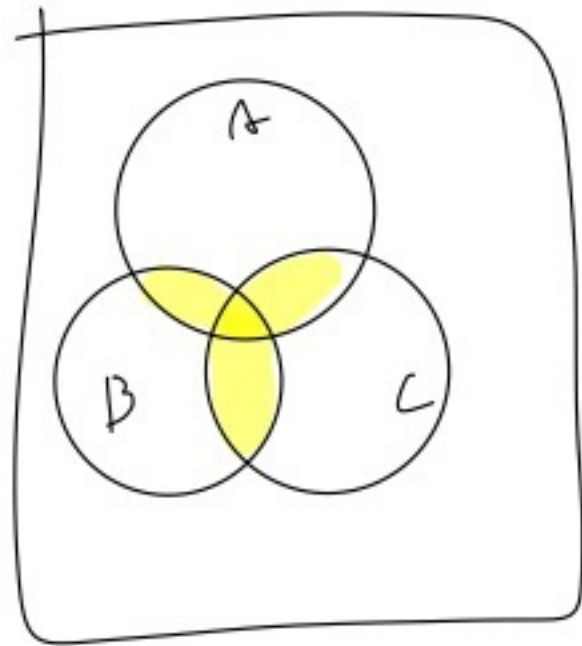
$$A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$

## 演習

- 次の論理式をベン図で表わせ。ただし、論理式が真となる部分を塗りつぶせ。



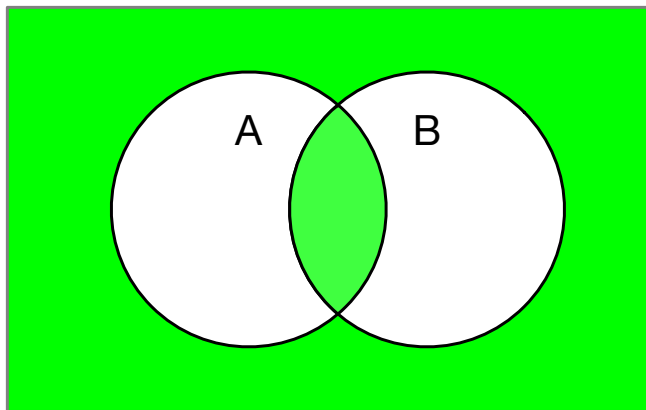
$$A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$





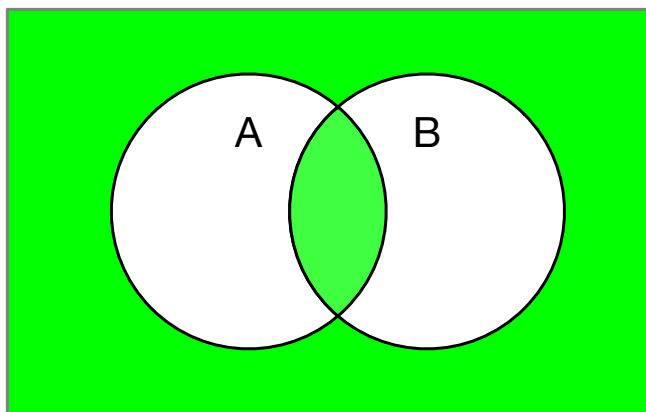
## ■ 演習

- 次のベン図が表す論理式を示せ.



## ■ 演習

- 次のベン図が表す論理式を示せ.



$$\overline{A+B} + A \cdot B$$

# 論理演算

## ■ 論理演算の公理・定理

$$A + 0 = A$$

$$A \cdot 1 = A$$

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + \overline{A} = 1$$

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

$$A + A = A$$

$$A \cdot A = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

$$A + (A \cdot B) = A$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$$

$$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$$

覚える必要なし. 言いたいことは2点のみ.

- 論理演算は, 交換則が成り立つ. つまり, 中学校で習った数学が使える.
- ここまでのスライドの内容を理解していれば自明なことばかり.

# ■ 復習がてら、いくつか確認してみる

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot 1 = A$$

$$A + 0 = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

$$A + \bar{A} = 1$$

論理積

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

論理和

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

## ■ ド・モルガンの定理

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

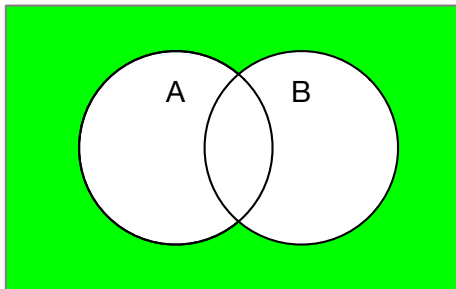
$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

全体の否定が個別の否定に変わり，かつ和と積が入れ替わる．

# ■ ド・モルガンの定理をベン図で確認

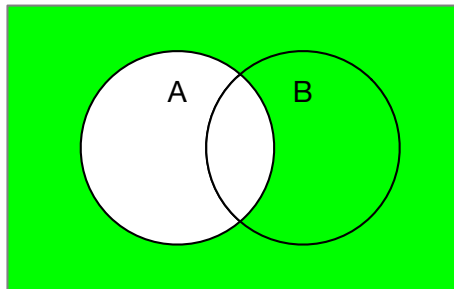
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A + B}$$



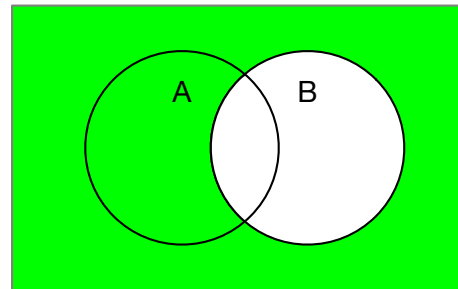
=

$$\overline{A}$$



•

$$\overline{B}$$



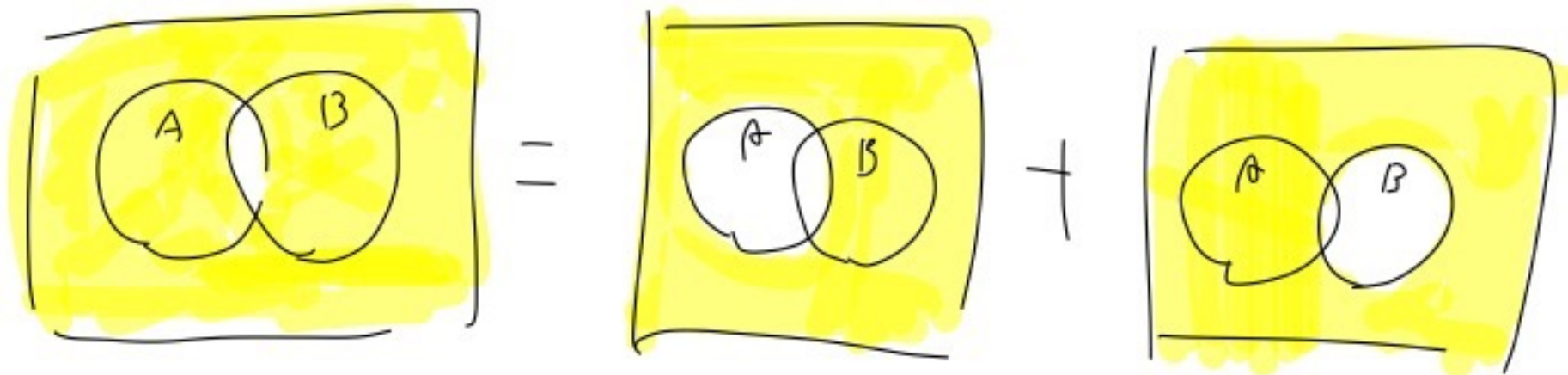
## ■ 演習

- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$  の計算をベン図で確認せよ.



## ■ 演習

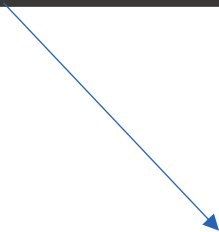
- $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$  の計算をベン図で確認せよ.



## ■ 論理式の簡単化

- 論理式をより短い簡単な形にすることを簡単化という.
- 次の論理式を簡単化してみる.

$$\begin{aligned}(A + B) \cdot (A + C) &= A \cdot A + A \cdot C + A \cdot B + B \cdot C \\&= \underline{A \cdot (A + B) + A \cdot (A + C)} + B \cdot C \\&= A + B \cdot C\end{aligned}$$


$$A(A+B+C) = A$$

## ■ 演習

---

- 次の論理式を簡単にせよ.

$$(A + B) \cdot (A + \overline{B})$$

$$\overline{A \cdot B} + \overline{A} \cdot B$$

$$(A + B) \cdot (A + C) + C \cdot (A + \overline{B})$$

## 演習

- 次の論理式を簡単にせよ.

$$\begin{aligned}(A + B) \cdot (A + \bar{B}) &= \underbrace{(A \cdot A)}_A + A \cdot \bar{B} + A \cdot B + \underbrace{(B \cdot \bar{B})}_0 \\&= A + A \cdot (\bar{B} + B) \\&= A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{A \cdot B} + \bar{A} \cdot B &= \bar{A} + \bar{B} + \bar{A} \cdot B \\ \text{ドモルガンの} &= \bar{A} \cdot (1 + B) + \bar{B} = \bar{A} + \bar{B} = \overline{A \cdot B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A + B) \cdot (A + C) + C \cdot (A + \bar{B}) &= A \cdot A + A \cdot C + A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C + \bar{B} \cdot C \\&= A(A + B + C) + C(B + \bar{B}) \\&= A + C\end{aligned}$$

## ■ 演習

- 次の論理式で誤っているのはどれか（第30回ME2種） .
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $A + A \cdot B = A$
- $A + \bar{A} = 1$
- $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$
- $A + \bar{B} = \bar{A} \cdot B$

## ■ 演習

• 次の論理式で誤っているのはどれか（第30回ME2種）。

1.  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

2.  $A + A \cdot B = A$

3.  $A + \bar{A} = 1$

4.  $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

5.  $A + \bar{B} = \bar{A} \cdot B$

## ■ 演習

• 次の論理式で誤っているのはどれか（第30回ME2種）。

1.  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

2.  $A + A \cdot B = A$

3.  $A + \bar{A} = 1$

4.  $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

5.  $A + \bar{B} = \bar{A} \cdot B$

1.  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

2.  $A + A \cdot B = A(1 + B) = A$

3.  $A + \bar{A} = 1$

4.  $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

5.  $A + \bar{B}$ これ以上簡単にできない