情報理論04

津山工業高等専門学校情報工学科 講師
電気通信大学先進理工学科 協力研究員
藤田一寿

ver. 20150502

情報量とエントロピー

情報の定量化

- 良い情報とはなにか
- 珍しい情報が良い情報でしょう
- 珍しいとは確率が低いということに相当する
- 確率を使って情報を定量化してみよう

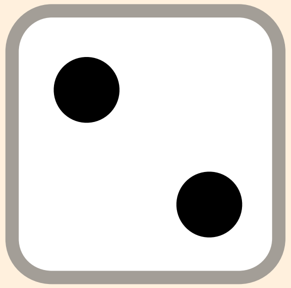
確率を使った情報の量

確率が低いほうが情報が多い

確率の逆数が情報の量になりそうだ

確率の逆数を情報量として使ってみる

サイコロの目が２であった時の情報量



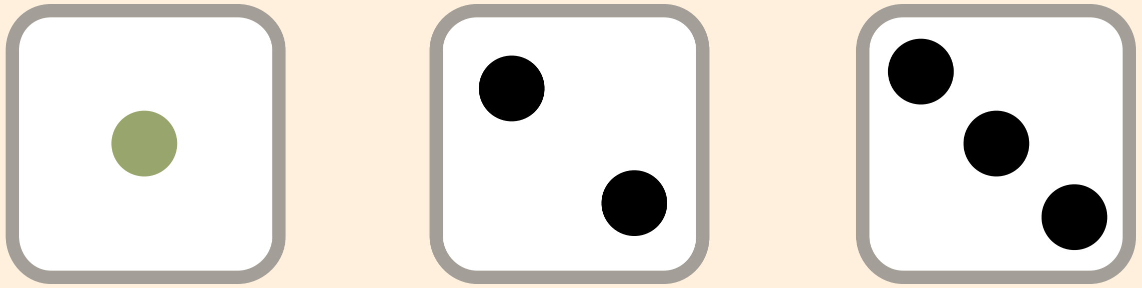
$$P(X=2)=\frac{1}{6}$$

$$I(P(X=2))=6$$

サイコロの目が3以下であった時の情報量

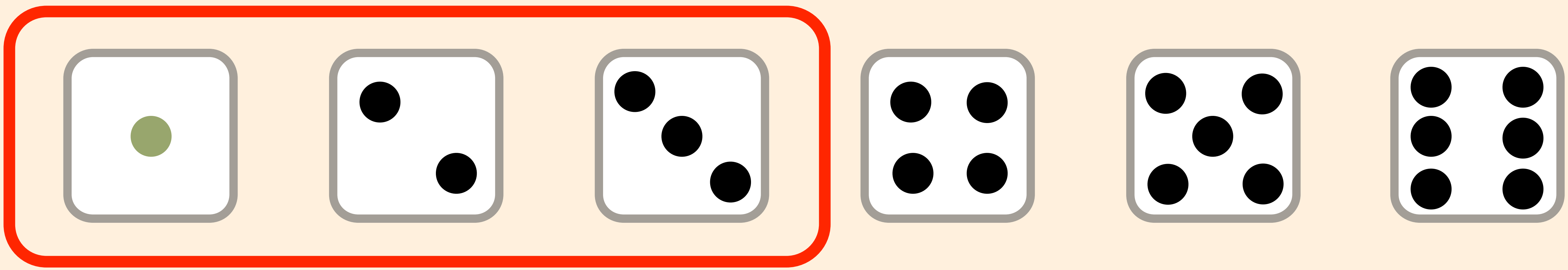
$$P(X\leq 3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$I(P(X\leq 3))=2$$

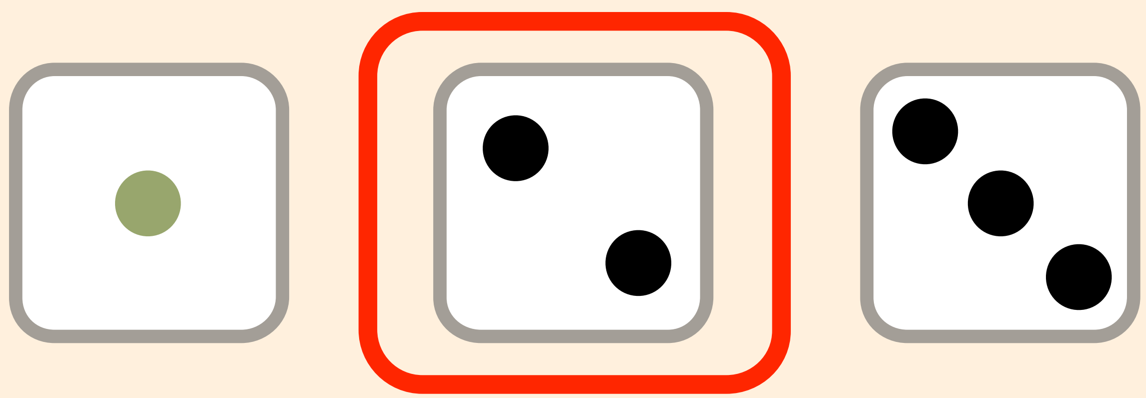


よさそうな気がする

目の選び方を変える

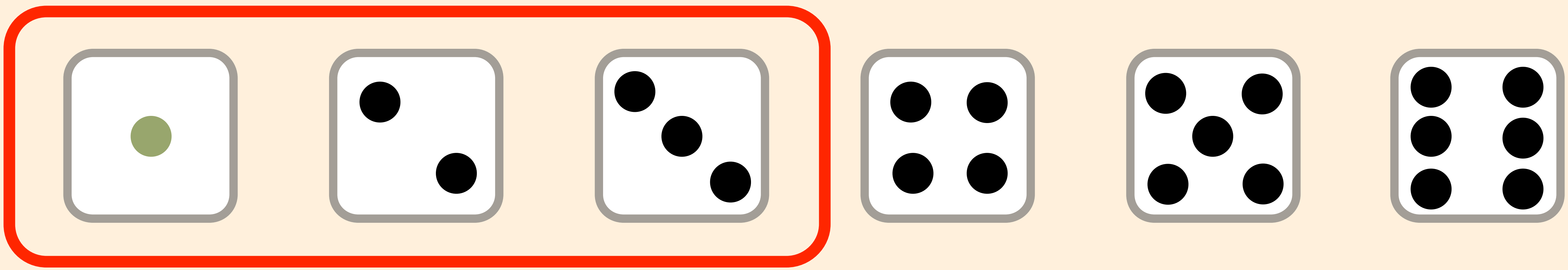


まずサイコロの目が３以下だった場合を考え、



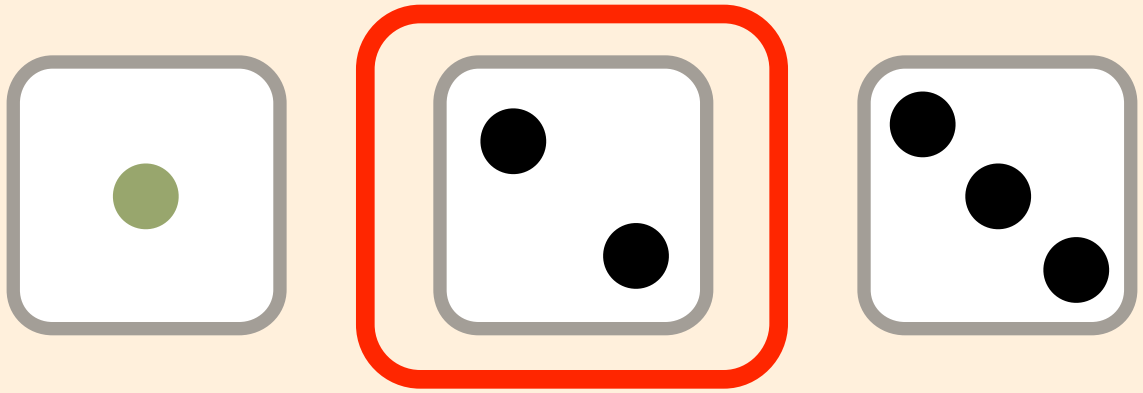
その後２をであった場合を考える

この場合も２を選んだことには変わりない。すなわち、最終的に得られる情報の量は同じでなければならない。



サイコロの目が３以下だった時に得られるの情報量

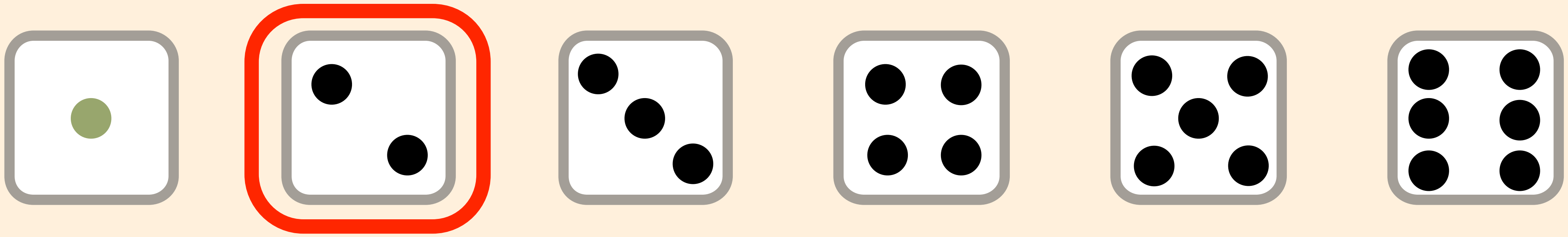
$$I(\frac{1}{2}) = 2$$



さらに３以下の目の中で２の目であった時に得られる情報量

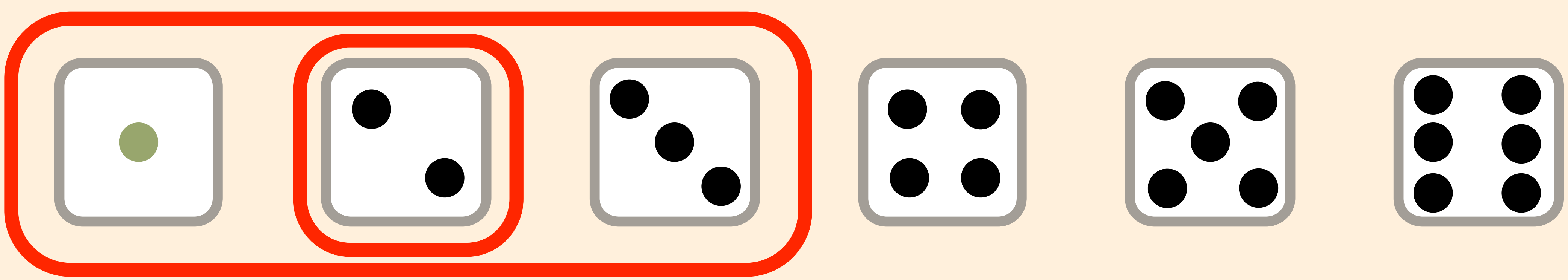
$$I(\frac{1}{3}) = 3$$

サイコロの目が２だった時の情報量



$$I(\frac{1}{6}) = 6$$

サイコロの目が３以下の目だったとき、更にその目が２であった時の情報量



$$I(\frac{1}{2}) + I(\frac{1}{3}) = 2 + 3 = 5$$

情報量が異なっている！！

　最終的に２の目が出たという情報は同じであるにもかかわらず、情報量が異なっている。確率の逆数は情報量として使えない。

$$I(\frac{1}{6}) = I(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}) = I(\frac{1}{2}) + I(\frac{1}{3}) \qquad \text{情報の加法性}$$

が成り立たなければならない。

加法性が成り立つとすると

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

が成り立つ。上記の式が成り立つとき

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\varepsilon x) - f(x)}{\varepsilon x} &= \frac{f(1+\varepsilon)}{\varepsilon x} \\ &= \frac{1}{x}\frac{f(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\end{aligned}$$

ε →0の極限を取ると

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon x) - f(x)}{\varepsilon x} = \frac{c}{x}$$

ただしcは次の式で表す。

$$c = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$$

先ほどのε→0の極限は、導関数そのものなので

$$f'(x) = \frac{c}{x}$$

上記の微分方程式をとくと

$$f(x) = c\log x + d$$

確率が１の時、得られる情報は０とすると

$$f(1) = d = 0$$

$$f(x) = c\log x$$

*x*が確率の場合、*p*は１以下で、情報量は*p*が減少すればするほど増えなければならないので、*c*は負となる。

ビット、ニット、ディット

$c = -1/\log_2 e$	**logの底が２**	ビット
$c = -1$	**logの底がe**	ニット、ナット
$c = -1/\log_{10} e$	**logの底が10**	ディット

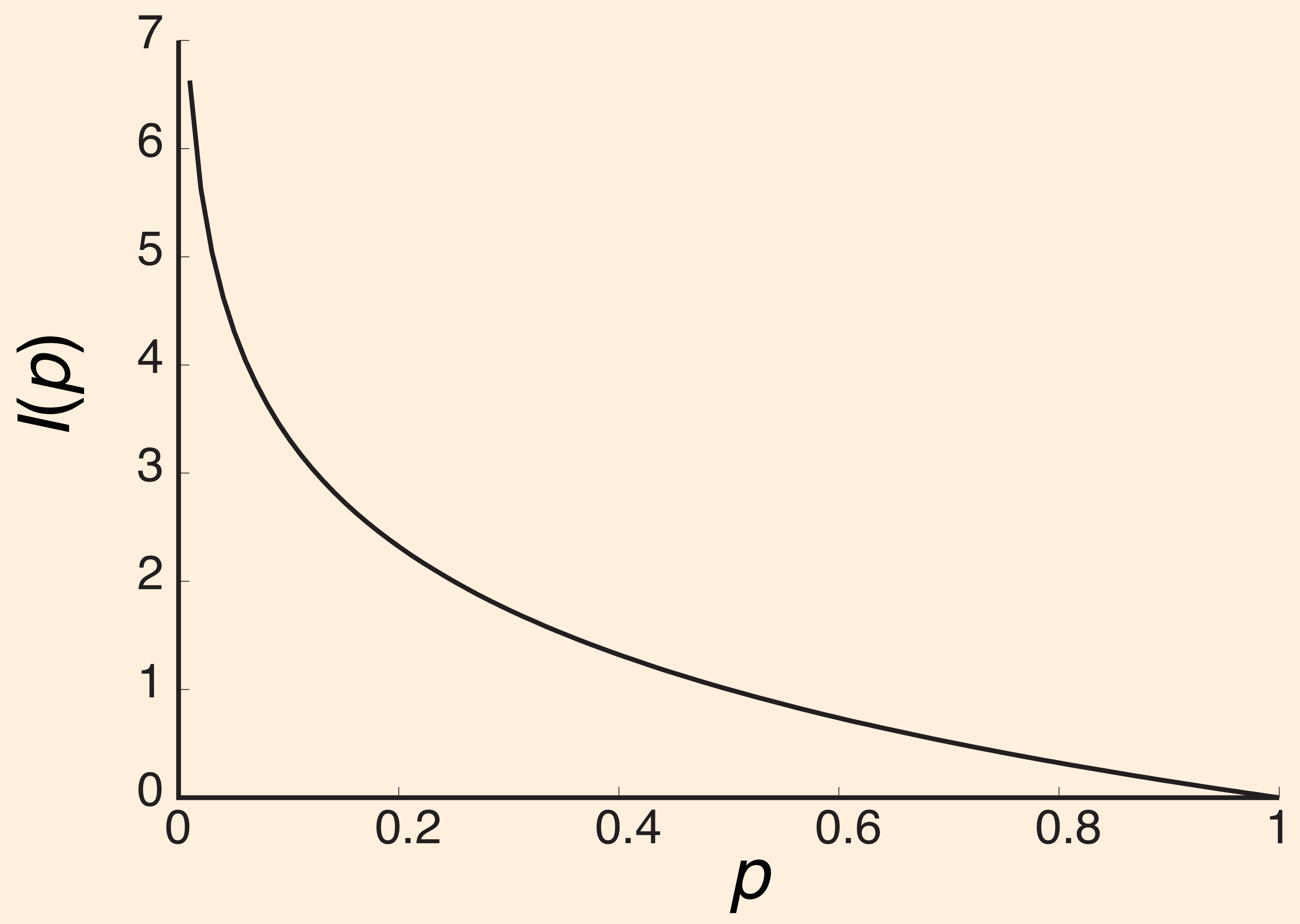
$$1\mathrm{bit} = \log 2\mathrm{nit} = \log_{10} 2\mathrm{dit}$$

情報量

確率pの事象が実際に起こったことを知らせる情報に含まれる情報量を

$$I(p) = -\log_2 p \text{ ビット}$$

と定義する。



演習

- ジョーカーを除くトランプ５２枚カードを引くとき
  - スペードのAであった時に得られる情報量を求めよ。
  - スペードであることのみ知った時に得られる情報量を求めよ。
  - Aであることのみ知った時に得られる情報量を求めよ。
- 台風が来るのは１年に１５日、満潮は１日に２時間とする。このとき、台風が来てかつ満潮という危険度の情報量は何ビットか。(それぞれの事象の確率分布は一様分布しているものとする。)
- ２つのサイコロを降った時、その目の和が７であったとする。しかし、後日その時のサイコロの目がいくつであったか忘れてしまった。この場合、失われた情報量は何ビットか。

塩野著「デジタル情報理論」より

情報量の期待値

- 確率pの事象が起こった時に得られる情報量

$$I(p) = -\log_2 p$$

- 将来得られる情報量ではない
- 期待値を使えば良いのではないか

- $A_1, A_2, ..., A_n$ のn個の事象がある。

- それぞれの事象が起こる確率は $p_1, p_2, ..., p_n$ である。

- 得られる情報量の期待値は

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_{i=1}^{n}(-\log_2 p_i)p_i \\
&= -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i
\end{aligned}
$$

情報量の期待値が高いということは、どの事象が起こるか予想がつかないので、将来得られる情報量は多いということ。言い換えれば不確実度が高い。
情報量の期待値が低いということは、どの事象が起こるかわかりきっているので、将来得られる情報量は少ないということ。言い換えれば、不確実度は低い。

エントロピー

n個の事象がそれぞれ確率 $p_1, p_2, ..., p_n$ で生じるとき、どの事象がどれだけ発生したかの不確実度を

$$H(p_1, p_2, ..., p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

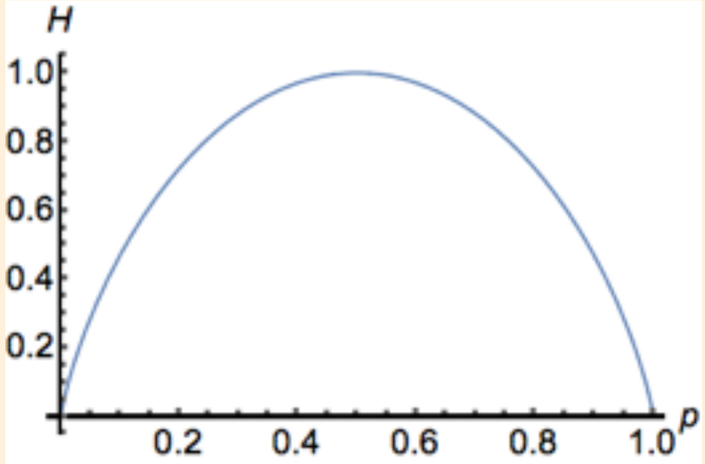
とし、エントロピーと呼ぶ。

例 コイントス

- 事象が２つの場合それぞれの事象が起きる確率は、pとq = (1 - p)である。

- コイントスの場合、表が出る確率をp, 裏が出る確率をqと考えられる。

- コイントスのエントロピーは



$$
\begin{aligned}
H &= -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) \\
&= -p\log_2(p/(1-p)) - \log_2(1-p)
\end{aligned}
$$

表もしくは裏が出やすいコインは
エントロピーが低いと言える。

問題

先ほどのコイントスのエントロピーが最大値とするpの値を求めよ

エントロピーは非負

エントロピー*H*は

$$H \geq 0$$

であり、H=0が成り立つときは、piのうち一つが 1
残りは 0 の場合である。

ただし、 $0 \log_2 0 = 0$ とする。

エントロピーの最大値

すべての事象が等確率に起こるとき、エントロピーは最大値となる。

$$p_i = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
H_{\max} &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(-\log_2 n) \\
&= n \times \frac{1}{n}\log_2 n \\
&= \log_2 n
\end{aligned}$$

最大値をどう求めるのか

$\sum_i p_i = 1$ の条件のもと、Hの最大化を行う。

ラグランジュの未定乗数法を使う。未定乗数 λ を導入すると

$$\frac{\partial}{\partial p_i}(-\sum_i p_i \log p_i - \lambda \sum_i p_i) = 0$$

$$-p_i \times \frac{1}{p_i} - \log p_i - \lambda = 0$$

$$\log p_i = -1 - \lambda$$

$$p_i = \exp(-1 - \lambda)$$ piは定数と分かる

ここでは、情報量にnitを用いている。

ここで$pi = c$とおくと(先ほどの式から定数だと分かっている)、

$$\sum_i c = 1$$

$$nc = 1$$

$$c = 1/n$$

よって、Hが最大値となる時のpiは

$$p_i = \frac{1}{n}$$

演習

- ある都市のある日の天気予報が、晴れ45%、曇35%、雨12%、雪8%のとき、エントロピーHを求めよ。

- 「いろは」４８文字の生起確率が全て等しいときと仮定した時のエントロピーHを求めよ。

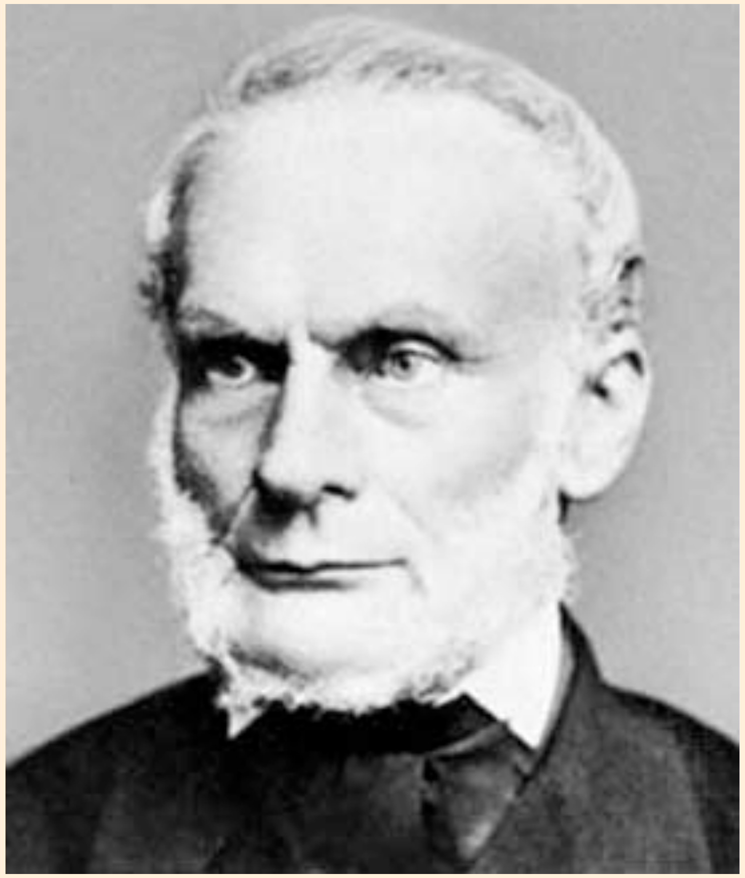
塩野著「デジタル情報理論」より

エントロピーの歴史

- 1850年クラウジウスがエントロピーという言葉を作る。熱力学で用いる物理量。
- 1877年ボルツマンが状態の数をエントロピーと結びつけた。
- 1948年シャノンが情報理論におけるエントロピーを導入する。
    - 情報理論が確立

クラウジウス

- 1822年生まれ
- 1854年熱力学第二法則を確立
- 1865年エントロピーを初めて使う



熱力学

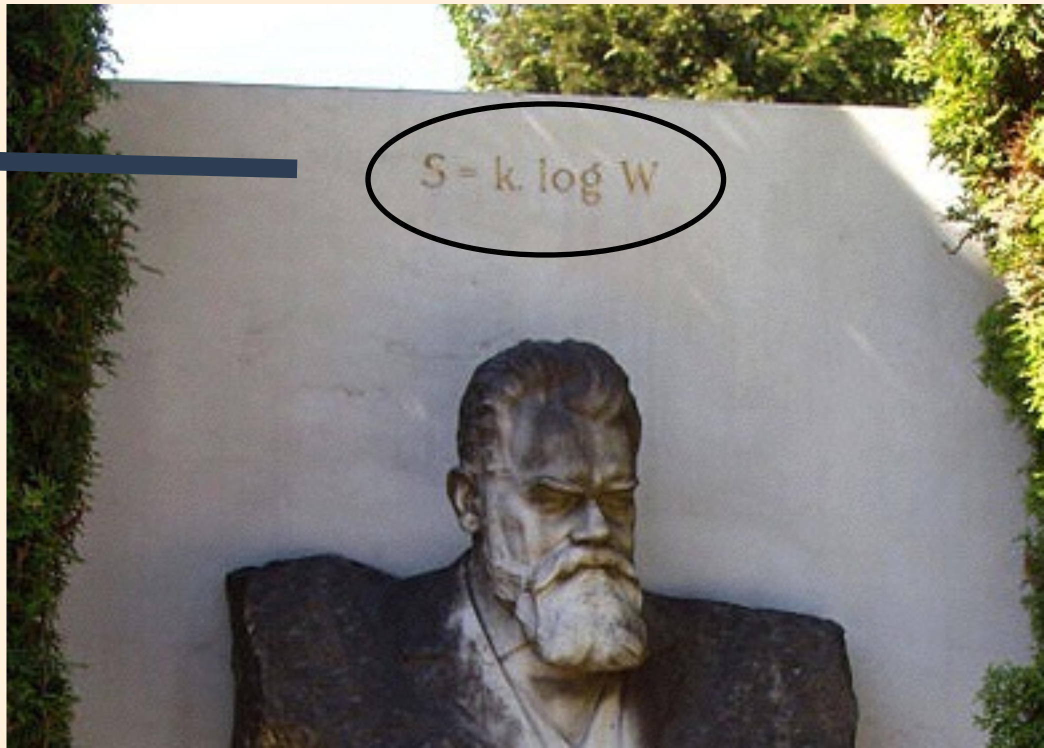
- 現象論的な学問
- 要素を考えない
  - 熱のやりとりのみに注目
  - 原子が存在していようがいまいが関係ない
- 原子を前提としていないので、乱雑さとは無縁

$$\Delta Q = T\Delta S$$

ボルツマン(1844-1906)

- 1844年ウィーン生まれ
- 1877年ボルツマンの関係式発表
  - エントロピーは状態の数と関係がある

$$S = k \log W$$



wikipediaより

統計力学

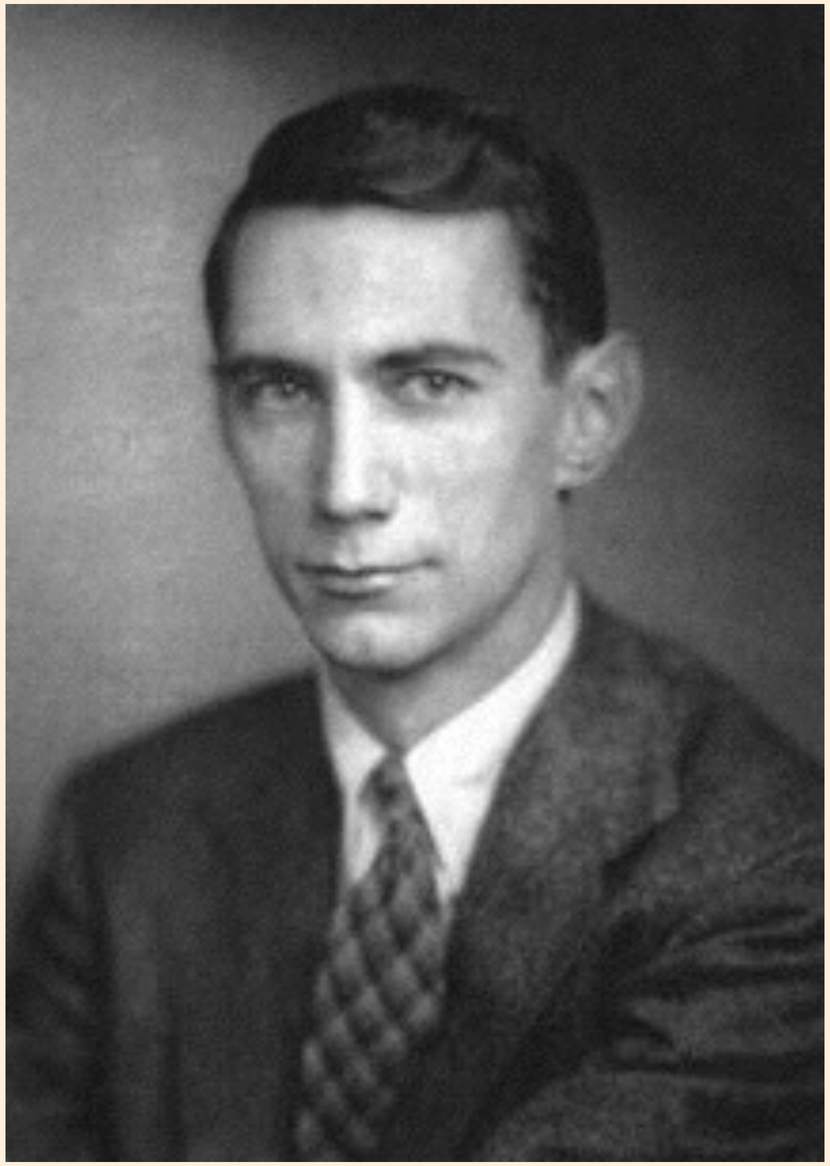
- 原子の存在を前提としている。
  - 還元主義的
- 原子の状態がばらばらだとエントロピーが増える。
  - 現実社会に当てはめると乱雑さといえるかも。
- 状態数Wの対数がエントロピー

$$S = k \log W$$

ボルツマンの関係式

シャノン(1916-2001)

- 1916年ミシガン州出身
- 1948年通信の数学理論発表
  - 情報を定量化
  - 情報源符号化
  - 通信路符号化



wikipediaより

まとめ

- 情報量

$$I(p) = -\log_2 p \quad \text{ビット}$$

- エントロピー

$$H(p_1, p_2, ..., p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

次回

- 結合エントロピー
- 相互エントロピー