

## 情報理論 2016 年度レポート課題 2

8 問以上問題を解き，2016/08/03 に提出する．

1. 図 1 のマルコフ情報源について，定常確率とエントロピーを求めよ．



図 1

2. 次の問に答えよ．

- (a) 図 2 のマルコフ情報源について，定常確率とエントロピーを求めよ．
- (b) 文字 0, 1 を出す情報源が持つ最大のエントロピーを答えよ．
- (c) 図 2 のマルコフ情報源の冗長度を求めよ．

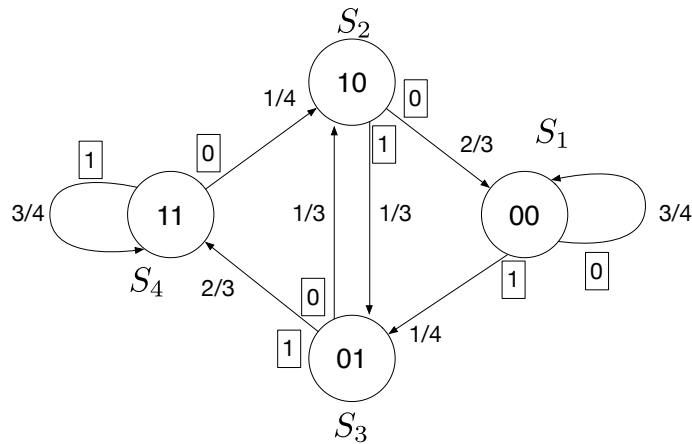


図 2

- 3. B1 と B2 の 2 つの信号を通す通信路を考える．B1 の長さは 1 秒，B2 の長さは 2 秒だとする．この通信路の容量を求めよ．また，情報を最大速度で伝送するには信号の出現確率をどうすればよいか．
- 4. 1 秒ごとに 0 と 1 がそれぞれ  $3/4$ ， $1/4$  で発生する 2 元対称通信路において，誤り率  $p$  が  $1/8$  の時の情報伝送速度を求めよ．

5. 1 秒毎に 1 文字送信するときの 2 元消失通信路の情報伝送速度  $R$  が  $(1 - p)H(X)$  であることを示せ．ただし， $X$  は送信信号とする．
6. 図 3 の通信路の通信路行列  $P$  を答え，通信路容量  $C$  を計算せよ．ただし，送信信号は 1 秒ごとに 1 文字に発生し，信号は  $1/2$  の確率で変わるとする．

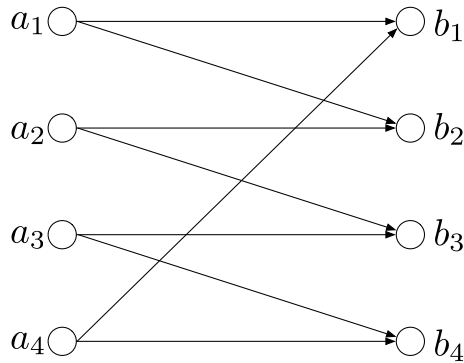


図 3

7. 情報源アルファベットが  $\{a, b, c, d, e\}$  である定常無記憶情報源  $S$  が与えられている．情報源  $S$  からの出力を表す確率変数を  $X$  とするとき，この情報源からの出力をアルファベット  $\{0, 1\}$  からなる符号による符号化する．この時次の問に答えよ．(名古屋工大 H27 編入改)
- (a) 各情報源アルファベットに対し表 1 のように符号語を割り当てた．この時 (あ) に入るアルファベット  $c$  に割り当てられるべき最短かつ適切な 2 元系列を示せ．系列の決定した時に用いた木を必ず記載せよ．

| アルファベット | 符号語   |
|---------|-------|
| $a$     | 0     |
| $b$     | 10    |
| $c$     | ( あ ) |
| $d$     | 1110  |
| $e$     | 11111 |

表 1

- (b) (a) で定めた符号割り当てがクラフトの不等式を満たすことを示せ．
- (c)  $P(a) = 1/2, P(b) = 1/4, P(c) = 1/8, P(e) = 1/16$  であるとき，平均符号長

$L$  を求めよ .

(d) (c) のとき (a) の符号は最適ではない . 最適な符号割り当てを示せ . そして , それをどのように決めたか説明せよ .

8. 0, 1 の 2 種類の記号からなるアルファベットを持つ単純マルコフ情報源を考える . 記号 0 が発生した状態を  $S_0$  , 記号 1 が発生した状態を  $S_1$  とし , 記号の発生に関する条件付き確率が  $P(0|0) = 0.25, P(1|0) = 0.75, P(0|1) = P(1|1) = 0.5$  であるとする . ここで  $P(1|0)$  は , 記号 0 が発生した次に記号 1 が発生する確率を表す . このとき , 以下の (a) から (c) の問いについて答えよ . 答えだけではなく導出過程も示すこと . また , 計算においては対数に関してもっとも簡単な形 (例:  $\log_2 6$  は  $\log_2 3 + 1$  に変形すること . (名古屋工大 H26 編入)

(a) このマルコフ情報源の状態遷移図を描け .

(b) 各状態の定常確率を求めよ .

(c) このマルコフ情報源の 1 記号当りのエントロピーを計算せよ .

9. ある情報源から 5 種類の通報  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$  が独立に生起し , それらの生起確率が  $P(\mu_1) = 0.3, P(\mu_2) = 0.13, P(\mu_3) = 0.22, P(\mu_4) = 0.15, P(\mu_5) = 0.2$  であるとき , 次の (a) から (d) の問いについて答えよ . (名古屋工大 H26 編入)

(a) これらの通報を 0,1 の二元符号によりハフマン符号化せよ .

(b) これらの通報を 0,1,2 の三元符号によりハフマン符号化せよ .

(c) (a) , (b) で作成したそれぞれのハフマン符号がクラフトの不等式を満足することを示せ .

(d) (a) , (b) で作成したそれぞれのハフマン符号の平均符号長を求めよ .

10. 以下の分布により定まる定常マルコフ情報源を考える . ここで , 確率  $P(i | j)$  は  $P(X_t = i | X_{t-1} = j)$  を表し ,  $X \in \{0, 1, 2\}$  は時刻  $t$  における出力を表す確率変数である . ただし , 記述のない確率は 0 とする .

$$p(0 | 0) = \frac{1}{2}, p(1 | 0) = \frac{1}{2}, \quad (1)$$

$$p(1 | 1) = \frac{2}{3}, p(2 | 1) = \frac{1}{3}, \quad (2)$$

$$p(2 | 2) = \frac{3}{4}, p(0 | 2) = \frac{1}{4}, \quad (3)$$

$$(4)$$

以下の問に答えよ . (名古屋工大 H27 編入)

(a) 上記のマルコフ情報源の状態遷移図を書け .

(b) 上記のマルコフ情報源における定常確率分布  $P(X_t)$  を求めよ .

(c) 1 信号あたりのエントロピー  $H(X_t | X_{t-1})$  を求めよ .

11. 送信信号 , 受信信号を共に 0,1 とする定常無記憶通信路を考える . 送信記号および受信記号を表す確率変数をそれぞれ  $X, Y \in 0,1$  とし , その遷移確率  $P(Y = i | X = j), i, j \in 0,1$  は下図によって与えられていることとする . また , 送信信号の生起確率 ( 入力分布 ) を  $P(X = 0) = a, P(X = 1) = 1 - a$  とする . 以下の問に答えよ . (名古屋工大 H27 編入)

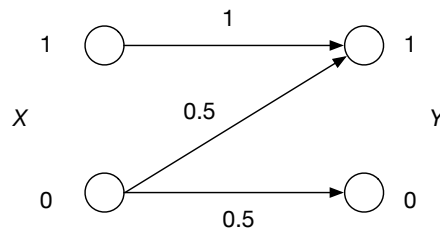


図 4 問 1

- (a) エントロピー  $H(Y)$  を  $a$  を用い表せ .  
 (b) 条件付きエントロピー  $H(Y | X)$  を  $a$  を用い表せ .  
 (c) 相互情報量  $I(X, Y)$  を最大にする  $a$  を求めよ . ただし ,  $I(X, Y)$  は  $a(0 \leq a \leq 1)$  に関して上に凸であることを用いて良い .  
 (d) この通信路の通信路容量を示せ .
12. 記号を 0, 1 を発生する 2 重マルコフ情報源の状態遷移図が図のように与えられているとする . この時次の問に答えよ . (東京農工院 H26)
- (a) 各状態の定常確率  $P(00), P(01), P(10), P(11)$  を求めよ .  
 (b) 情報源のエントロピーを求めよ .
13. 'a' , 'b' , 'c' , 'd' の 4 種類の文字 ( $X$ ) を生成する情報源がある . 各文字の正規確率をそれぞれ  $p_a, p_b, p_c, p_d$  とした時 , 以下の問に答えよ . (山形大院 H23)
- (a) 4 種類の文字の生起確率が不明であり , それらを等確率であると仮定した場合の情報源のエントロピー  $H_1(X)$  を求めよ .  
 (b) 表に示すように 4 種類の文字の生起確率が与えられたとする . このときの情報源のエントロピー  $H_2(X)$  を求めよ .  
 (c) (1) , (2) により 4 種類の文字の生起確率を知ることにより得られる情報量  $I$  を求めよ .  
 (d) 次に , 表に示す 3 つの符号  $C_1, C_2, C_3$  により符号化を行う . これらの符号を

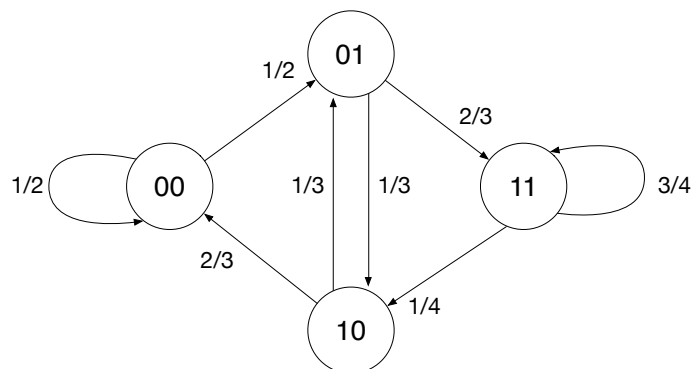


図 5

用いた場合のそれぞれの平均符号長  $L_1, L_2, L_3$  を求め、符号効率が良い順に並べよ。(10 点)

(e) この情報源のハフマン符号を求めよ。また、この符号を用いた時の平均符号長  $L_H$  を求めよ。

| 文字  | 生起確率 | 符号 $C_1$ | 符号 $C_2$ | 符号 $C_3$ |
|-----|------|----------|----------|----------|
| 'a' | 1/8  | 00       | 110      | 0        |
| 'b' | 1/4  | 01       | 10       | 10       |
| 'c' | 1/2  | 10       | 0        | 110      |
| 'd' | 1/8  | 11       | 1110     | 1110     |

14. 情報源のアルファベットを  $S = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ 、符号アルファベットを  $D = 0, 1$  とする。  $S$  上の確率変数  $X$  が従う確率分布  $P_X$ 、および可変長符号  $C$  が以下のように与えられている時、以下の問に答えよ。(名工大編入 H28)

| $x$      | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ |
|----------|----------|---------|----------|----------|
| $P_X(x)$ | 1/8      | 1/4     | 1/8      | 1/8      |
| $C(x)$   | 0        | 11      | 1110     | 1110     |

- (a) 符号系列 0111011100101110 を復号し、情報源アルファベットを使用して書け。  
(b)  $X$  のエントロピー  $H(X)$  を求めよ。

- (c) 上記の表に基づいて平均符号長  $L(C)$  を求めよ．
- (d) 上記の表の符号は平均符号長が最小ではない．情報源アルファベット  $S$  の要素  $\gamma$  に割り振った符号語  $C(\gamma)$  について，この符号系を瞬時復号可能かつ最小にするように変更したものを示せ．
15. 定常無記憶通信路に対し，コイントスを行って発生した系列を入力する．コインの表を 1，裏を 0 で示し，コインの表と裏はそれぞれ  $p(0 \geq 1)$  と  $1 - p$  の確率にて発生するものとする．入力が 0 の時も 1 の時もこの通信路において確率  $\varepsilon$  で反転誤り（入力が 1 の時出力が 0，入力が 0 の時出力が 1 となること）が発生するものとする．通信路の通信シンボルを示す確率変数を  $X$ ，通信路出力の確率変数を  $Y$  とする．このとき次の問に答えよ．（名工大編入 H28）
- (a) 通信路出力の確率  $P_Y(0), P_Y(1)$  を  $p, \varepsilon$  を用いて示せ．
- (b) コインを 1 回だけふった結果を通信路に入力した時，通信路入出力の相互情報量  $I(X, Y)$  を求めよ．
- (c) (2) と同じ条件における通信路の通信路容量  $C$ ，および  $C$  を達成する  $p$  を求めよ．
- (d) コインを  $n$  回降った結果を通信路に入力した時の，通信路の入出力間の相互情報量  $I(X^n, Y^n)$  を求めよ．
16. 送信確率がそれぞれ  $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/16$  である 5 種類の送信記号  $a, b, c, d, e$  を送信する情報源  $S$  があるとし，この 5 種類の送信機号をハフマン符号化で符号化することを考える．このとき，以下の問に答えよ．ただし，符号化は 0 と 1 の 2 元符号化であるとする．
- (a) 5 種類の送信記号  $a, b, c, d, e$  をハフマン符号化する場合の，ハフマン符号木を書け．
- (b) (1) で描いたハフマン符号木を用いて 5 種類の送信記号をそれぞれ符号化せよ．また，結果の符号語がクラフトの不等式を満足することを示せ．
- (c) 5 種類の送信記号  $a, b, c, d, e$  をハフマン符号化した時の平均符号長を求めよ．
17. 送信信号，受信信号を共に 0, 1 とする定常無記憶通信路を考える．送信記号および受信記号を表す確率変数をそれぞれ  $X, Y \in 0, 1$  とし，その遷移確率  $P(Y = i | X = j), i, j \in 0, 1$  は下図によって与えられていることとする．また，送信信号の生起確率（入力分布）を  $P(X = 0) = a, P(X = 1) = 1 - a$  とする．以下の問に答えよ．（名古屋工大 H27 編入）（5 点  $\times 4 = 20$  点）
- (a) エントロピー  $H(Y)$  を  $a$  を用い表せ．
- (b) 条件付きエントロピー  $H(Y | X)$  を  $a$  を用い表せ．

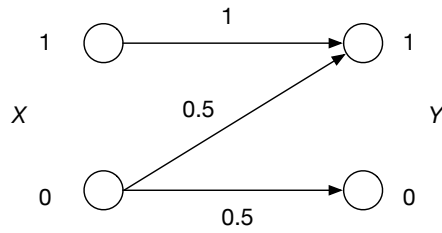


図 6

- (c) 相互情報量  $I(X, Y)$  を最大にする  $a$  を求めよ．ただし， $I(X, Y)$  は  $a(0 \leq a \leq 1)$  に関して上に凸であることを用いて良い．
- (d) この通信路の通信路容量を示せ．
18. 図 7 に表わされるような，送信信号が  $X = \{0, 1, 2\}$ ，受信信号が  $Y = \{0, 1, 2\}$  であり，確率  $p$  で隣の信号と誤って受信される通信路がある．この通信路の  $X = \{0, 1, 2\}$  の生起確率をそれぞれ  $\{\alpha, \alpha, (1 - 2\alpha)\}$  とするとき，以下の問に答えよ．(山形大院 H27)

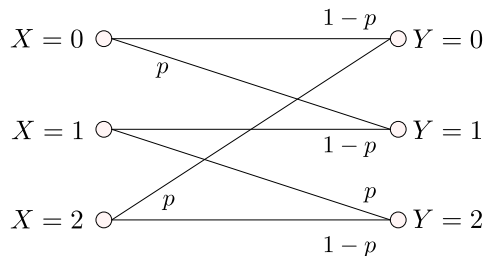


図 7

- (a) この通信路の通信路行列  $T$  を  $p$  を用いて表わせ．
- (b) 受信信号  $Y$  のエントロピー  $H(Y)$  を， $\alpha$  と  $p$  を用いて表わせ．
- (c)  $X$  と  $Y$  に関する条件付きエントロピー  $H(Y | X)$  を，必要に応じ  $\alpha$  と  $p$  を用いて表わせ．
- (d) この通信路の通信路容量  $C$  を  $p$  を用いて表わせ．