

情報理論 2015 年度レポート課題 2

10 問以上問題を解き、2015/07/30 の試験開始前に提出する。

1. 図 1 のマルコフ情報源について、定常確率とエントロピーを求めよ。



図 1

2. 次の問に答えよ。

- (a) 図 2 のマルコフ情報源について、定常確率とエントロピーを求めよ。
 (b) 文字 0, 1 を出す情報源が持つ最大のエントロピーを答えよ。
 (c) 図 2 のマルコフ情報源の冗長度を求めよ。

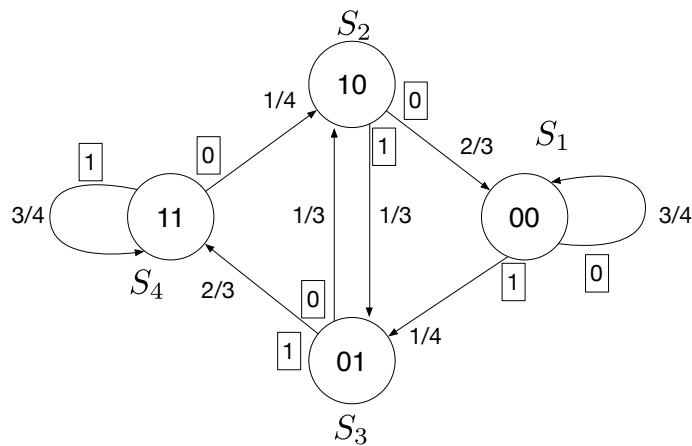


図 2

3. B1 と B2 の 2 つの信号を通す通信路を考える。B1 の長さは 1 秒、B2 の長さは 2 秒だとする。この通信路の容量を求めよ。また、情報を最大速度で伝送するには信号の出現確率をどうすればよいか。
4. 1 秒ごとに 0 と 1 がそれぞれ $3/4$, $1/4$ で発生する 2 元対称通信路において、誤り率 p が $1/8$ の時の情報伝送速度を求めよ。
5. 1 秒毎に 1 文字送信するときの 2 元消失通信路の情報伝送速度 R が $(1-p)H(X)$ であることを示せ。ただし、 X は送信信号とする。
6. 図 3 の通信路の通信路行列 P を答え、通信路容量 C を計算せよ。ただし、送信信号は 1 秒ごとに 1 文字に発生し、信号は $1/2$ の確率で変わるとする。
7. 情報源アルファベットが $\{a,b,c,d,e\}$ である定常無記憶情報源 S が与えられている。情報源 S からの出力を表す確率変数を X とするとき、この情報源からの出力をアルファベット $\{0,1\}$ からなる符号による符号化する。この時次の問に答えよ。
 (名古屋工大 H27 編入改)
- (a) 各情報源アルファベットに対し表のように符号語を割り当てた。この時 (あ)

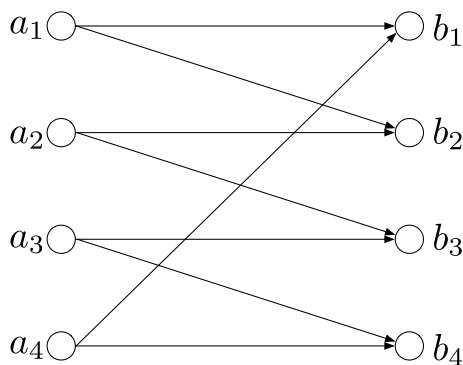


図 3

アルファベット	符号語
a	0
b	10
c	(あ)
d	1110
e	11111

に入るアルファベット c に割り当てられるべき最短かつ適切な 2 元系列を示せ。系列の決定した時に用いた木を必ず記載せよ。

- (b) (a) で定めた符号割り当てがクラフトの不等式を満たすことを示せ。
- (c) $P(a) = 1/2, P(b) = 1/4, P(c) = 1/8, P(e) = 1/16$ であるとき、平均符号長 L を求めよ。
- (d) (c) のとき (a) の符号は最適ではない。最適な符号割り当てを示せ。そして、それをどのように決めたか説明せよ。
8. 0, 1 の 2 種類の記号からなるアルファベットを持つ単純マルコフ情報源を考える。記号 0 が発生した状態を S_0 、記号 1 が発生した状態を S_1 とし、記号の発生に関する条件付き確率が $P(0|0) = 0.25, P(1|0) = 0.75, P(0|1) = P(1|1) = 0.5$ であるとする。ここで $P(1|0)$ は、記号 0 が発生した次に記号 1 が発生する確率を表す。このとき、以下の (a) から (c) の問いについて答えよ。答えだけではなく導出過程も示すこと。また、計算においては対数に関してもっとも簡単な形 (例: $\log_2 6$ は $\log_2 3 + 1$ に変形すること。(名古屋工大 H26 編入)
- (a) このマルコフ情報源の状態遷移図を描け。
- (b) 各状態の定常確率を求めよ。
- (c) このマルコフ情報源の 1 記号当りのエントロピーを計算せよ。
9. ある情報源から 5 種類の通報 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ が独立に生起し、それらの生起確率が $P(\mu_1) = 0.3, P(\mu_2) = 0.13, P(\mu_3) = 0.22, P(\mu_4) = 0.15, P(\mu_5) = 0.2$ であるとき、次の (a) から (d) の問いについて答えよ。(名古屋工大 H26 編入)
- (a) これらの通報を 0,1 の二元符号によりハフマン符号化せよ。
- (b) これらの通報を 0,1,2 の三元符号によりハフマン符号化せよ。
- (c) (a)、(b) で作成したそれぞれのハフマン符号がクラフトの不等式を満足するこ

とを示せ。

(d) (a)、(b) で作成したそれぞれのハフマン符号の平均符号長を求めよ。

10. 以下の分布により定まる定常マルコフ情報源を考える。ここで、確率 $P(i | j)$ は $P(X_t = i | X_{t-1} = j)$ を表し、 $X \in \{0, 1, 2\}$ は時刻 t における出力を表す確率変数である。ただし、記述のない確率は 0 とする。

$$p(0 | 0) = \frac{1}{2}, p(1 | 0) = \frac{1}{2}, \quad (1)$$

$$p(1 | 1) = \frac{2}{3}, p(2 | 1) = \frac{1}{3}, \quad (2)$$

$$p(2 | 2) = \frac{3}{4}, p(0 | 2) = \frac{1}{4}, \quad (3)$$

$$(4)$$

以下の問に答えよ。(名古屋工大 H27 編入)

(a) 上記のマルコフ情報源の状態遷移図を書け。

(b) 上記のマルコフ情報源における定常確率分布 $P(X_t)$ を求めよ。

(c) 1 信号あたりのエントロピー $H(X_t | X_{t-1})$ を求めよ。

11. 送信信号、受信信号を共に 0, 1 とする定常無記憶通信路を考える。送信記号および受信記号を表す確率変数をそれぞれ $X, Y \in 0, 1$ とし、その遷移確率 $P(Y = i | X = j), i, j \in 0, 1$ は下図によって与えられていることとする。また、送信信号の生起確率（入力分布）を $P(X = 0) = a, P(X = 1) = 1 - a$ とする。以下の問に答えよ。(名古屋工大 H27 編入)

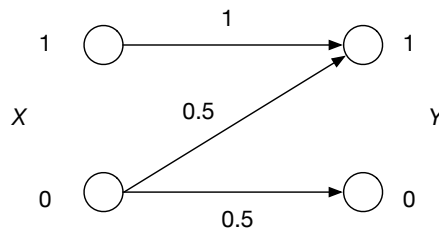


図 4 問 1

(a) エントロピー $H(X)$ を a を用い表せ。

(b) 条件付きエントロピー $H(X | Y)$ を a を用い表せ。

(c) 相互情報量 $I(X, Y)$ を最大にする a を求めよ。ただし、 $I(X, Y)$ は $a(0 \leq a \leq 1)$ に関して上に凸であることを用いて良い。

(d) この通信路の通信路容量を示せ。

12. 記号を 0, 1 を発生する 2 重マルコフ情報源の状態遷移図が図のように与えられているとする。この時次の問に答えよ。(東京農工院 H26)

(a) 各状態の定常確率 $P(00), P(01), P(10), P(11)$ を求めよ。

(b) 情報源のエントロピーを求めよ。

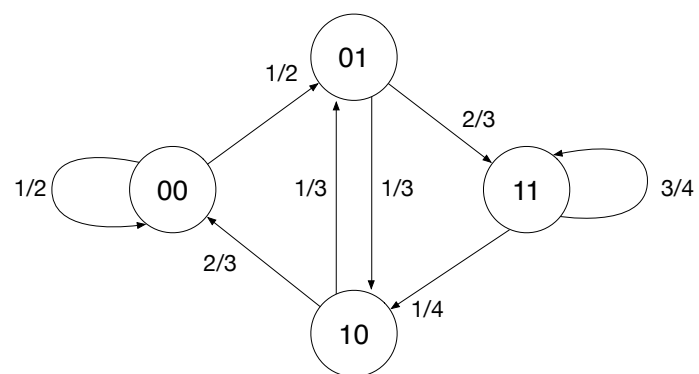


图 5