情報理論 2016 年度レポート課題 1

10 問以上問題を解き、2016/06/15 の提出する。

1. ビデオが映らなくなった事象を B、その原因として、
   - A1: ビデオの電子回路の故障 (発生確率 65%)
   - A2: モータの故障 (発生確率 25%)
   - A3: データの破損 (発生確率 10%)

   とする。このとき、条件付き確率を
   - $P(B|A1) = 30\%$
   - $P(B|A2) = 60\%$
   - $P(B|A3) = 10\%$

   とする。ベイズの定理を用いて 3 つの事後確率を求めよ。
2. ポケットにお金がないという事象 B、その原因として、
   A_1: 電車内でスリにあった
   A_2: ポケットが破れていた
   A_3: 家を出るとき忘れた
   なる 3 つが考えられるとする。各原因の事前確率を、$P(A_1) = 0.25, P(A_2) = 0.05, P(A_3) = 0.7$ とし、条件付き確率を、$P(B|A_1) = 0.35, p(B|A_2) = 0.15, P(B|A_3) = 0.5$ とするとき、事後確率 $P(A_1|B), p(A_2|B), P(A_3|B)$ を求めよ。
3. 分散を $V(X)$、期待値を $E(X)$ とするとき、$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ であることを示せ。ただし、$V(X) = E((X - E(X))^2)$ とする。
4. X と Y が互いに独立な場合、次の式が成り立つことを示せ。
   - $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
   - $E(XY) = E(X)E(Y)$
   - $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
5. 2 個の理想的なサイコロをふった場合、その目の和が 7 であった。しかし、後日、その時のサイコロの目が何であったか忘れてしまった。この場合、失われた情報量は何ビットか。(10 点)
6. ジョーカーを除くトランプ５２枚カードを引くとき
   (a) スペードの A であった時に得られる情報量を求めよ。
   (b) スペードであることのみ知った時に得られる情報量を求めよ。
   (c) A であることのみ知った時に得られる情報量を求めよ。
   (d) b と c で求めた情報量の和が a と一致することを確かめよ。
7. 台風が来るのは 1 年に１５日、満潮は 1 日に 2 時間とする。このとき、台風が来てかつ満潮という危険度の情報量は何ビットか。ただし、台風の発生の確率は一様に分布しているとする。
8. ある都市のある日の天気予報が、晴れ 45%、曇 35%、雨 12%、雪 8% のとき、エントロピー H を求めよ。
9. 「いろは」48 文字の生起確率が全て等しいと仮定した時のエントロピーを求めよ。
10. コイントスにおいて、コインの表が出る確率を p とする。このとき、コイントス

におけるエントロピーを求めよ。そして、エントロピーが最大となる p の値を求めよ。

11. X を実際の天気 { 晴, 雨 }、Y を天気予報 { 晴, 雨 } とする。このとき, 同時確率 $p(X,Y)$ は次の表で与えられる。このときの、結合エントロピー $H(X,Y)$、エントロピー $H(X)$、条件付きエントロピー $H(X|Y)$、相互情報量 $I(A,B)$ を求めよ。(15 点)

	晴れ	雨
予報が晴れ	$p(X_1,Y_1)=0.6$	$p(X_2,Y_1)=0.05$
予報が雨	$p(X_1,Y_2)=0.1$	$p(X_2,Y_2)=0.25$

12. 2 つの理想的なサイコロをランダムに降った時に、一方のサイコロの目の確率変数を X、他方のサイコロの目の確率変数を Y とする。
    (a) $H(X)$ を求めよ。
    (b) $H(X+Y)$ を求めよ。
    (c) $H(X|X+Y)$ を求めよ。
    (d) $I(X,X+Y)$ を求めよ。
13. ２人の野球解説者 A と B が、ある球団の勝つ確率をそれぞれ 8 割、6 割と予想した。もし、真の勝つ確率が 7 割だった場合どちららより正しい予想だといえるか。カルバック–ライブラーダイバージェンスを基準に考えよ。
14. 事象系 A と事象系 B があるとき、結合エントロピー $H(A,B)$ は、$H(A,B) = H(A)+H(B|A)$ となることを示せ。
15. 事象系 A と事象系 B が互いに独立であるとき条件付きエントロピー $H(A|B)$ を求めよ。
16. アルファベット $A = 1,2,...,N$ を取り得る 2 つの確率変数 X,Y が存在する。$X=x_i$ である確率は、$p(x_i)$ と表す。以下の問いに答えよ。(名工大 H27 編入)
    (a) 確率分布 $P(X)$ および $P(Y|X)$ を用い $P(X,Y)$ を表わせ。
    (b) エントロピー $H(X)$ を $p(x_i)$ を用いて表せ。
    (c) 条件付きエントロピー $H(X|Y)$ を $p(y_j)$ および $p(x_i|y_j)$ で表わせ。
    (d) 相互情報量 $I(X,Y)$ は

$$I(X,Y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0} p(x_i,y_j)\log\frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \tag{1}$$

    で表される。この定義式から $I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$ を導け。
17. 互いに背反な事象 $a_1,a_2,...,a_M$ を確率 $P(a_i)(i=1,2,...,M)$ で発生する確率試行 X と、互いに背反な事象 $b_1,b_2,...,b_N$ を確率 $P(b_j)(j=1,2,...,N)$ で発生する確率試行 Y があるとする。この時、次の問に答えよ。(名工大 H26 編入)
    (a) エントロピー $H(X)$ を $P(a_i)$ を使って表せ。
    (b) 条件付きエントロピー $H(X|Y)$ を $P(a_i,b_j),P(a_i|b_j)$ を使って表せ。
    (c) 相互情報量 $I(X,Y)$ を $H(X)$ と $H(X|Y)$ を用いて表せ。