

情報理論12

藤田 一寿

津山工業高等専門学校情報工学科 講師
電気通信大学先進理工学科 協力研究員

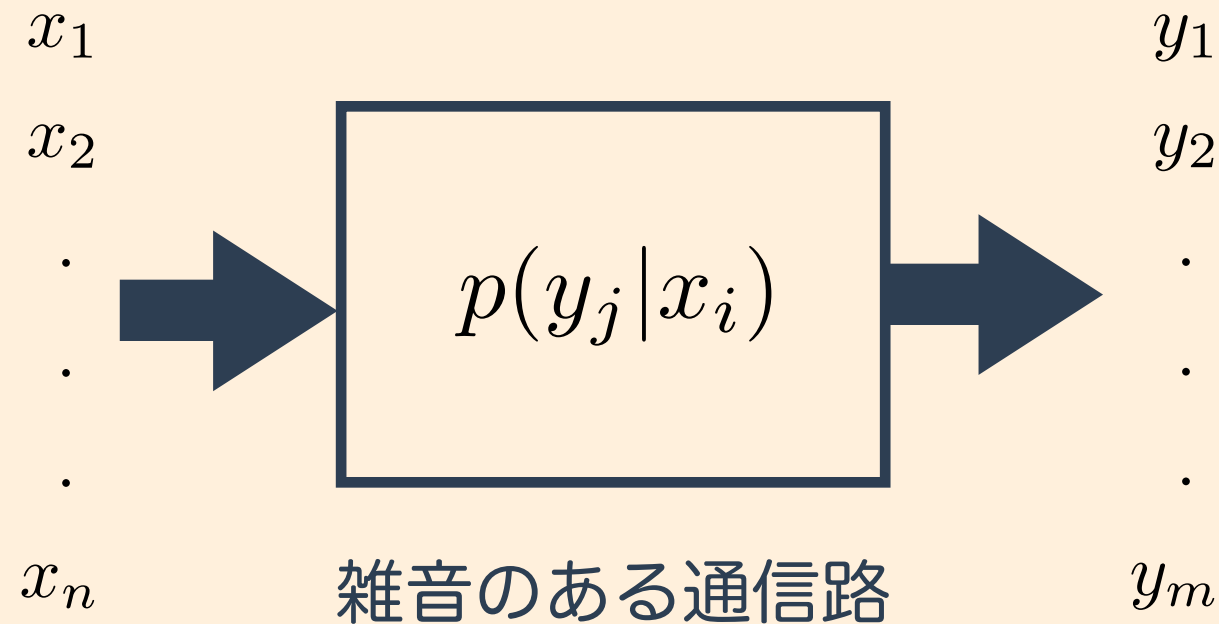
ver.20150701

雑音のある通信路

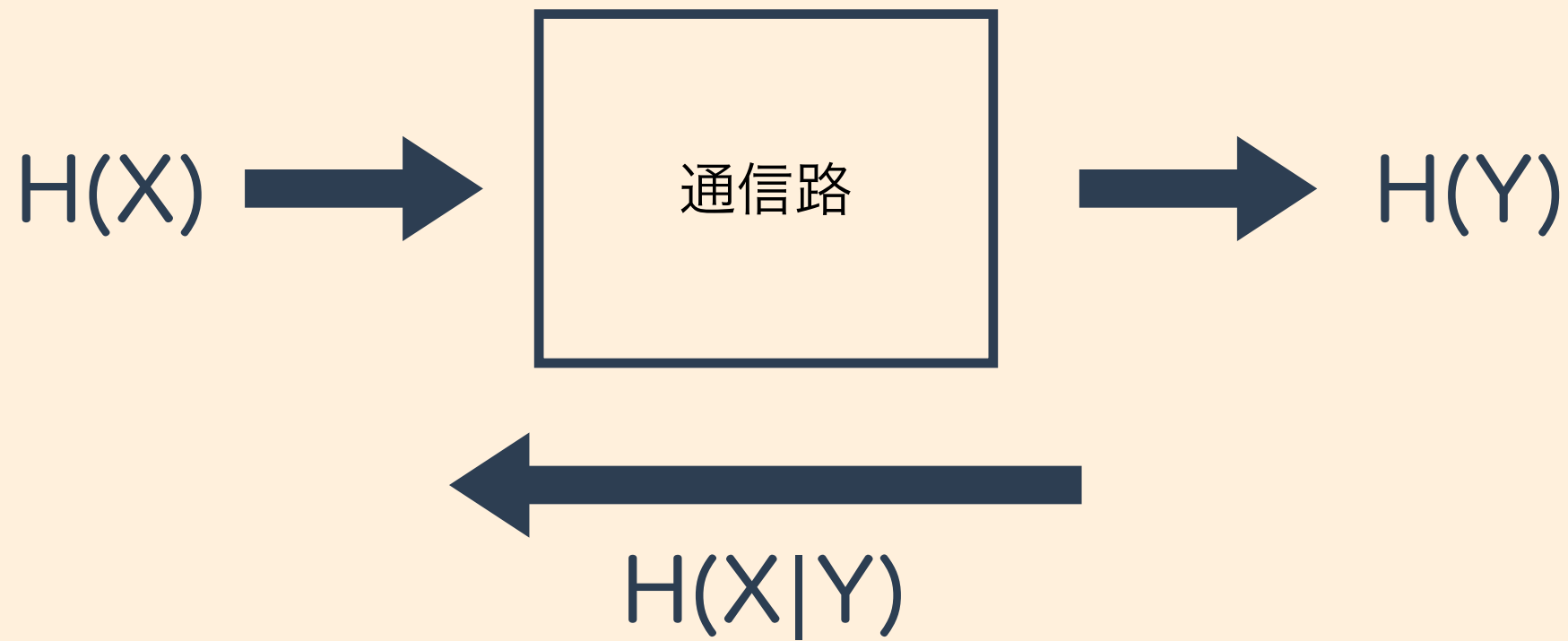
雑音の妨害での情報伝送量

通信する上で雑音がない場合はほぼ無い
どのようにして確実に情報を送るか

雑音のある通信路



- ▶ 入力信号 x_1 を送った時、なにが受信されるか？
 - ▶ y_1 かも知れないし y_2 かも知れない.
 - ▶ 雑音（ノイズ）により変わる.
- ▶ 確率的に取り扱うと、 y_j が出る確率は $p(y_j | x_i)$ と表すことができる.



- ▶ 信号源は1秒辺り $H(X)$ のエントロピーを持つ.
- ▶ 信号系列 x_1, x_2, x_3, \dots は雑音の影響により y_1, y_2, y_3, \dots に変換される.
- ▶ 受信信号は1秒辺り $H(Y)$ のエントロピーを持つとする.
- ▶ 受信される信号の確率 $p(y_j|x_i)$ が分かれば, 受信した信号からなんとなく元の信号が分かる.
- ▶ 受信信号が分かるという条件のもとでの情報源のエントロピーは $H(X|Y)$ と書ける. 情報源が持つ曖昧さを表す.

情報伝達速度

受信信号により得られた情報量 R を情報伝送速度と呼ぶ.

$$R = H(X) - H(X|Y)$$

情報源のエントロピー 受信信号の曖昧さ

情報伝送速度 R は、式の通り送信信号と受信信号の相互情報量になっている.

$$R = H(X) - H(X|Y) = I(X, Y)$$

X , Y 入れ替えても同じ

少し具体的に計算してみる

送信信号のエントロピー

$$H(X) = - \sum_i p(x_i) \log p(x_i)$$

受信信号が生成される確率

$$p(y_i) = \sum_i p(x_i) p(y_j | x_i) \quad \text{xiとyjの同時確率を求め周辺化している}$$

受信信号のエントロピー

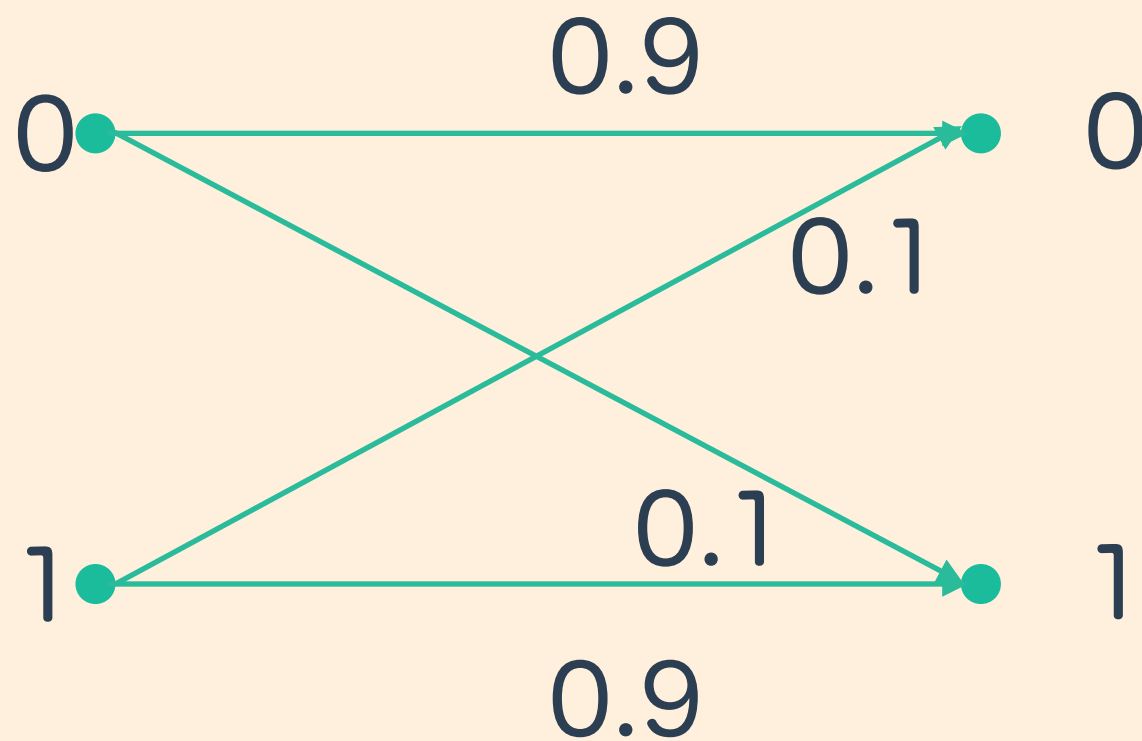
$$H(Y) = - \sum_j p(y_j) \log p(y_j)$$

受信信号が分かっているものとして，送信信号の曖昧さ

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(y_j|x_i)p(x_i)}{p(y_j)}$$

$$H(X|Y) = - \sum_i \sum_j p(y_j)p(x_i|y_j) \log p(x_i|y_j)$$

例



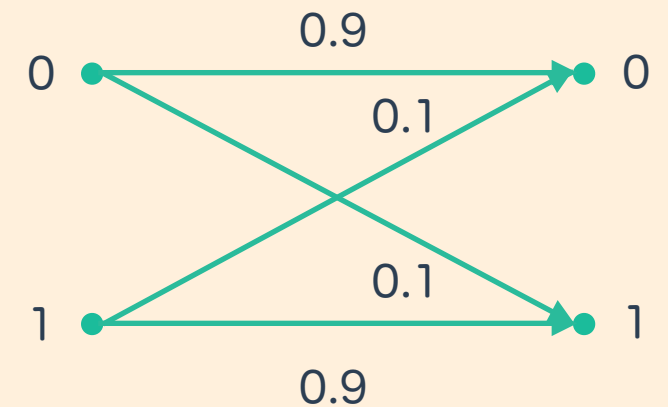
雑音のため，0.1の確率で信号が変わってしまう通信路

$$p(y = 0|x = 0) = p(y = 1|x = 1) = 0.9$$

$$p(y = 0|x = 1) = p(y = 1|x = 0) = 0.1$$

0もしくは1を等確率に1秒間に1000個出力する信号源が無記憶情報源とすると、そのエントロピーは

$$\begin{aligned} H(X) &= 1000 \times \left(- \sum_i p(x_i) \log p(x_i) \right) \\ &= 1000 \times \left(-\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right) \\ &= 1000 \times \left(-\log \frac{1}{2} \right) \\ &= 1000 \end{aligned}$$



1000桁の2進数なので当たり前.

信号が伝送されると雑音により各文字が0.1の確率で変異する.

そう考えると1000個の文字のうち900個が変異せずに到達する
と考えられる. そう考えると900ビットの情報が伝送されたと言
いたくなるが、果たしてそれは正しいのか？

曖昧さ

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= 1000 \times \left(- \sum_i \sum_j p(y_j) p(x_i|y_j) \log p(x_i|y_j) \right) \\ &= 1000 \times \left(-p(y_0)p(x_0|y_0) \log p(x_0|y_0) - p(y_0)p(x_1|y_0) \log p(x_1|y_0) \right. \\ &\quad \left. - p(y_1)p(x_0|y_1) \log p(x_0|y_1) - p(y_1)p(x_1|y_1) \log p(x_1|y_1) \right) \\ &= 1000 \times \left(-0.5 \times 0.9 \log 0.9 - 0.5 \times 0.1 \log 0.1 \right. \\ &\quad \left. - 0.5 \times 0.9 \log 0.9 - 0.5 \times 0.1 \log 0.1 \right) \\ &= 1000 \times \left(-0.9 \log 0.9 - 0.1 \log 0.1 \right) \\ &= 469 \end{aligned}$$

情報伝送速度Rは

$$\begin{aligned} R &= 1000 - 469 \\ &= 531 \end{aligned}$$

900個の文字があたっているけど、どれがあたっているかわからないので
0.1の確率で雑音が入ってしまっても情報は半分に減る。

ノイズによりでたらめな文字列になったら

- ▶ 信号が0.5の確率で変異しそれを受信するとすると、受信信号で現れる各文字の出現確率が0.5となる。結局曖昧さは $H(X|Y)=1000$ ビットとなる。
- ▶ つまり、最大転送速度は0ビットとなり、何も情報を伝えていないことになる。

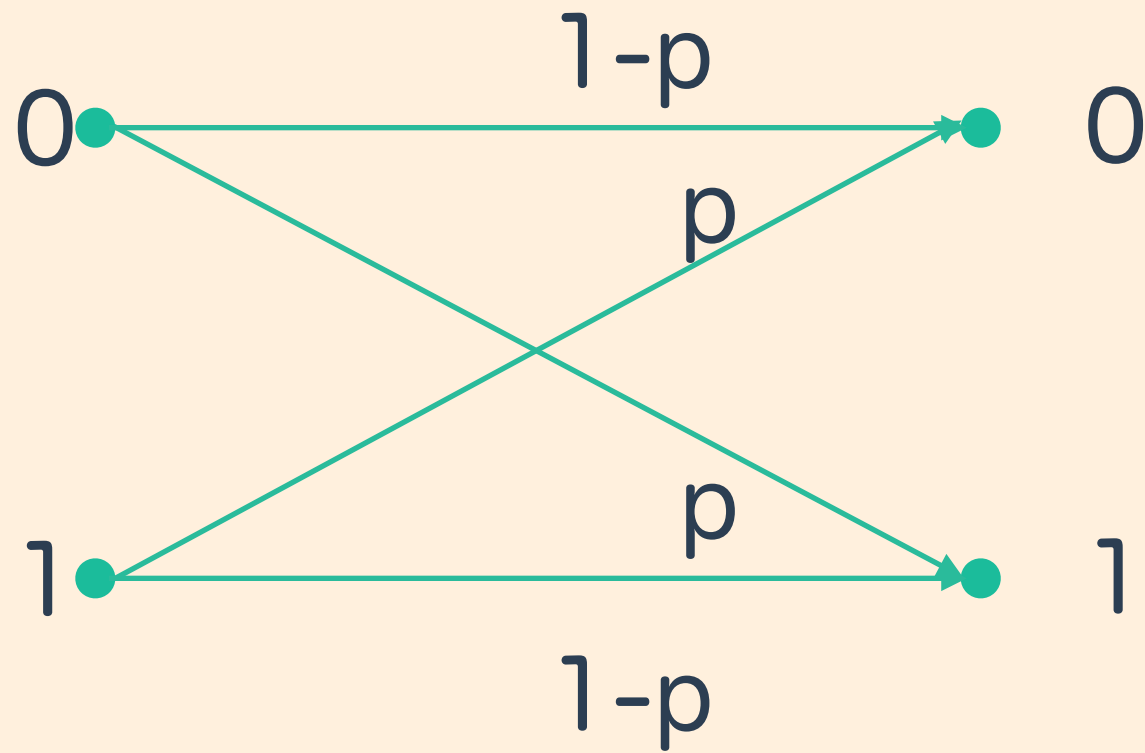
通信路容量

- ▶ 通信路容量を大きくするには

$$C = \max_{p_i} R$$

- ▶ 雑音の影響が少ない信号の確率を増やす.

2元对称通信路



通信路行列 $P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} p(0|0) & p(1|0) \\ p(0|1) & p(1|1) \end{bmatrix}$$

$$H(X) = -p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1$$

$$H(Y) = -q_0 \log q_0 - q_1 \log q_1$$

$$H(Y|X) = -p \log p - (1 - p) \log(1 - p)$$

$$R = I(X, Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

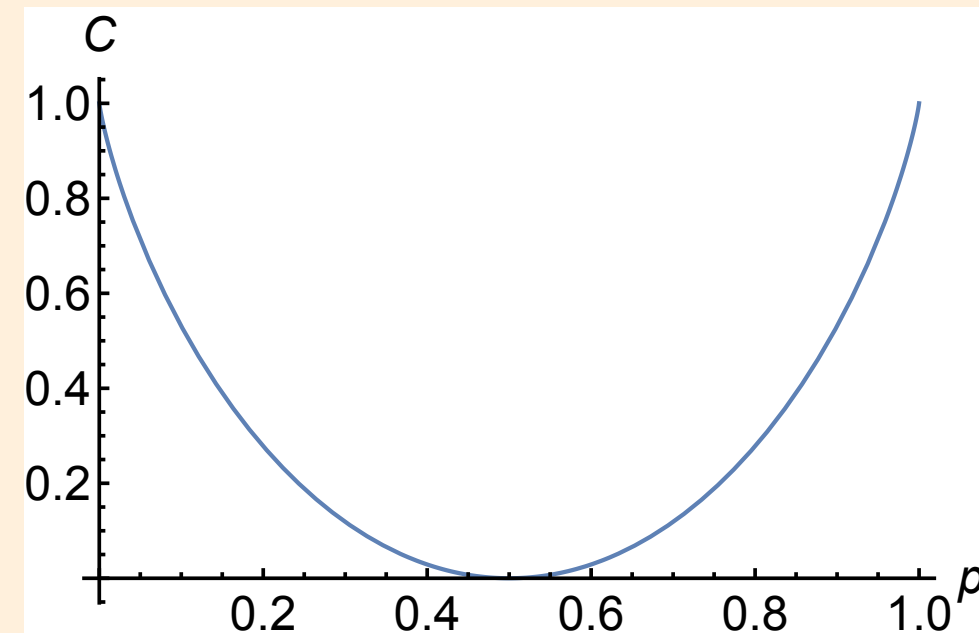
$$= -q_0 \log q_0 - q_1 \log q_1 + p \log p + (1 - p) \log(1 - p)$$

Rが最大になるのは $q_0=q_1=0.5$ ($p_0=p_1=0.5$)とき. よって

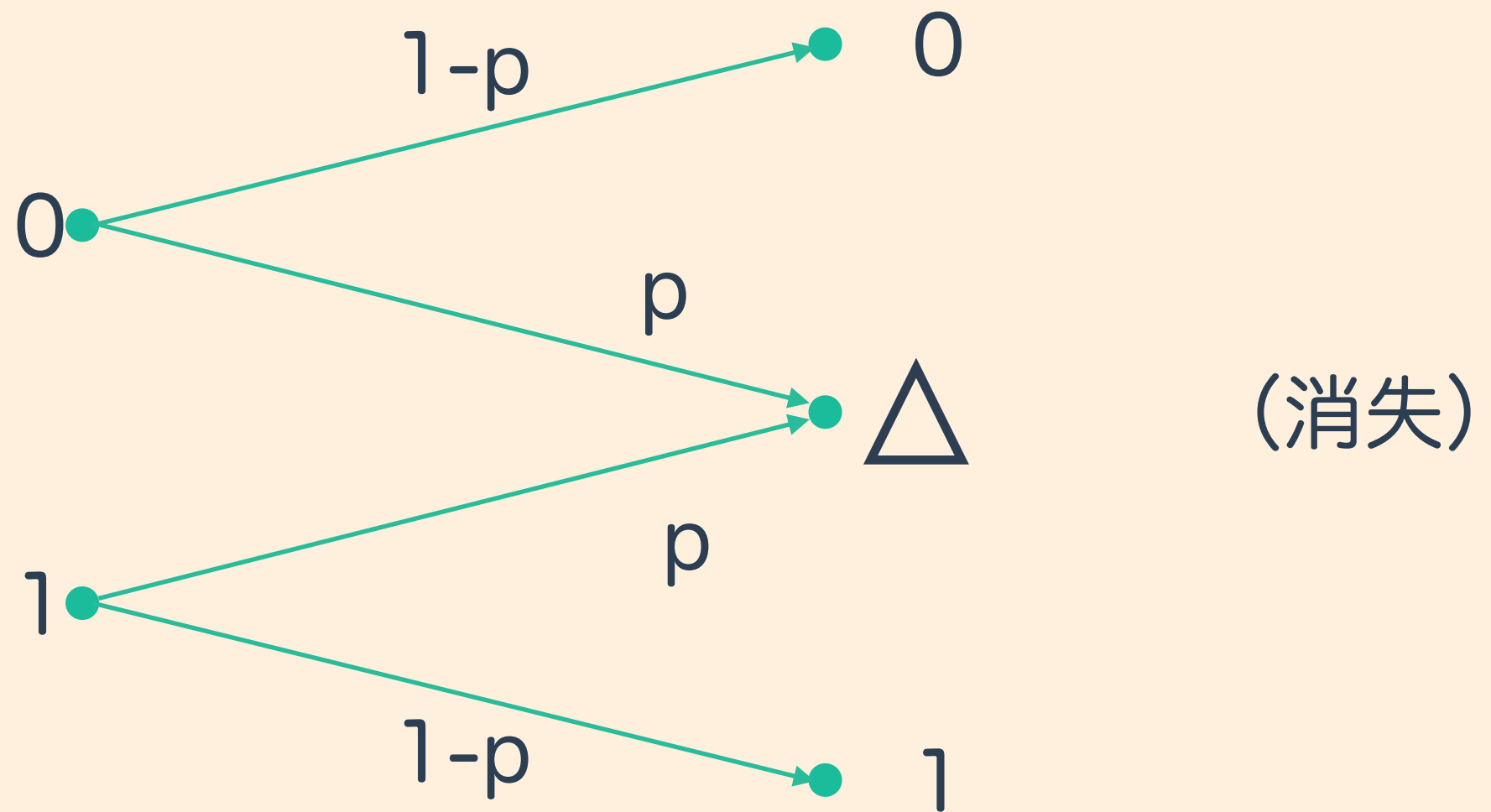
$$C = 1 + p \log p + (1 - p) \log(1 - p)$$

となる.

$p=0.5$ の時, 伝送速度は0となる. $p=1$ の場合は常に信号が入れ替わることが分かっているので, 確実に信号が伝わる事となり, 伝送速度が1となる.



2元消失通信路

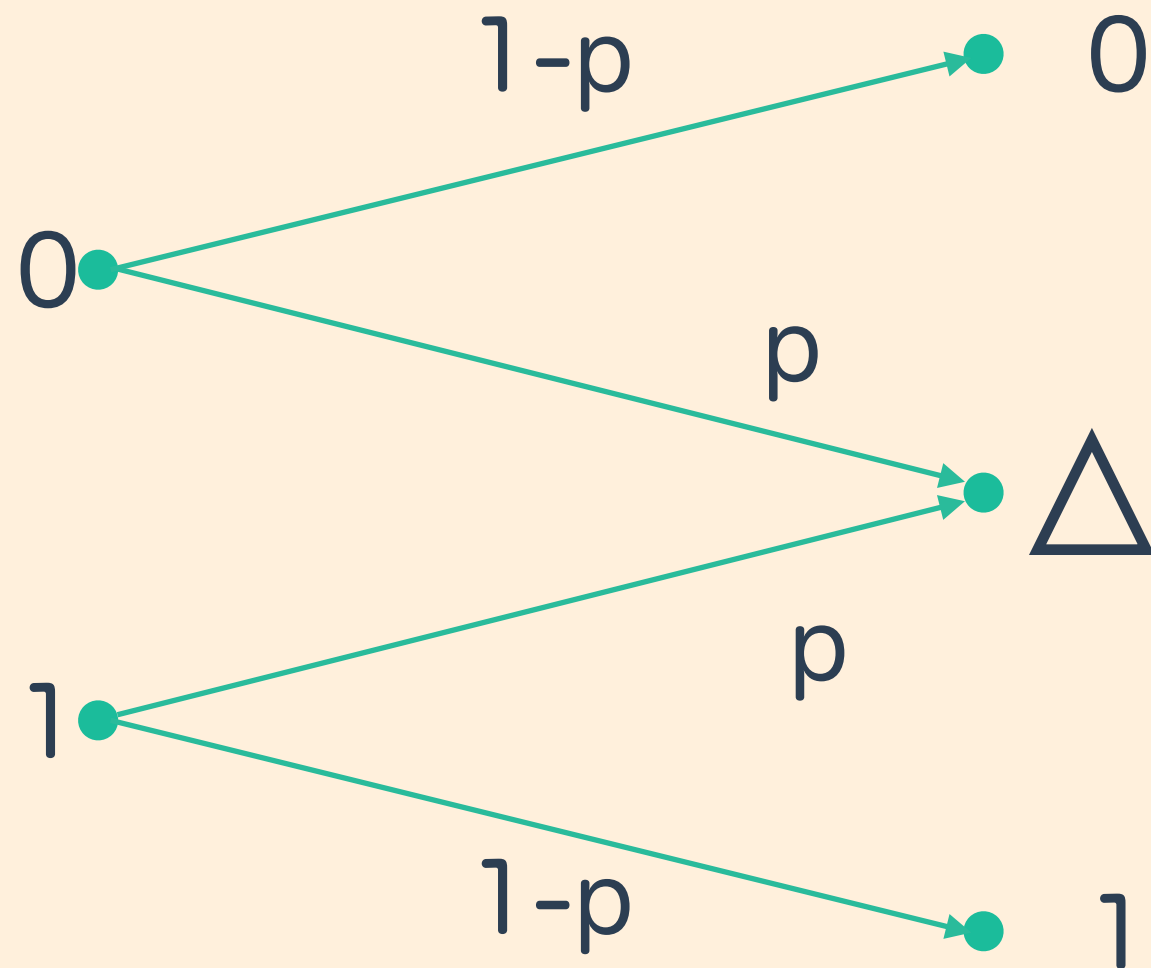


0, 1を1秒ごとに1つ送る通信路

出力信号は0, 1, Δ

信号は確率 p で Δ に変わる

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix}$$

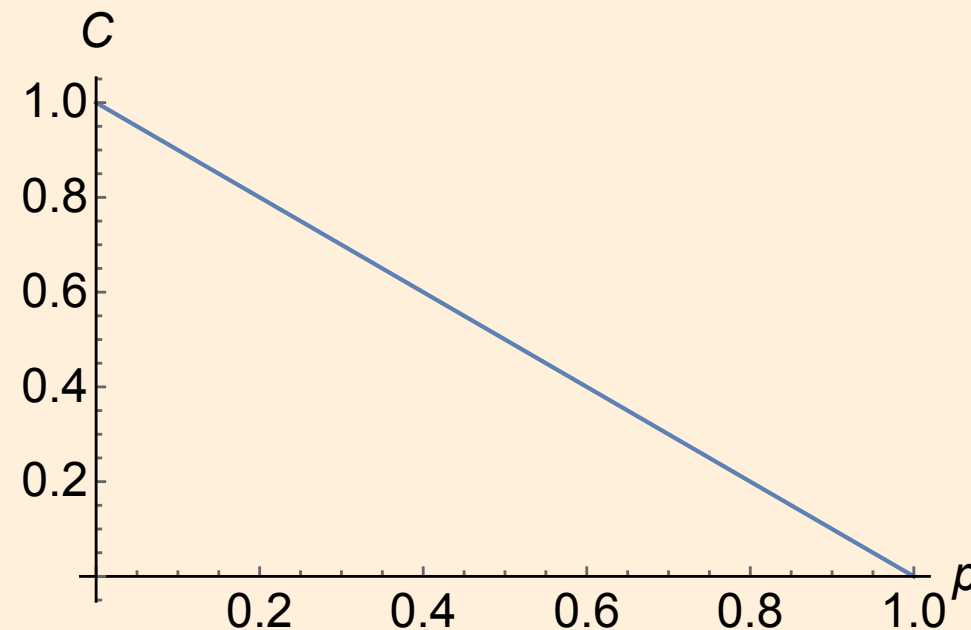


$$\begin{aligned}
 H(Y) &= -p_0(1-p) \log(p_0(1-p)) - p_1(1-p) \log(p_1(1-p)) \\
 &= -(1-p)(\log p_0 + \log p_1) - (1-p) \log(1-p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(Y|X) &= \sum_i \sum_j p(x_i) p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i) \\
 &= -(1-p) \log(1-p)
 \end{aligned}$$

$$R = H(Y) - H(Y|X) = (1-p)H(X)$$

Rを最大化する p_0 , p_1 はそれぞれ0.5であるから, 最大通信路容量Cは $C = 1 - p$ となる.



2元対称通信路とくらべてみると, 消失通信路では $p = 0.1$ のとき $C = 0.9$ となり, 例1の0.53と比べ大きい.