情報理論07

藤田 一寿

津山工業高等専門学校情報工学科 講師
電気通信大学先進理工学科 協力研究員

ver. 20170606

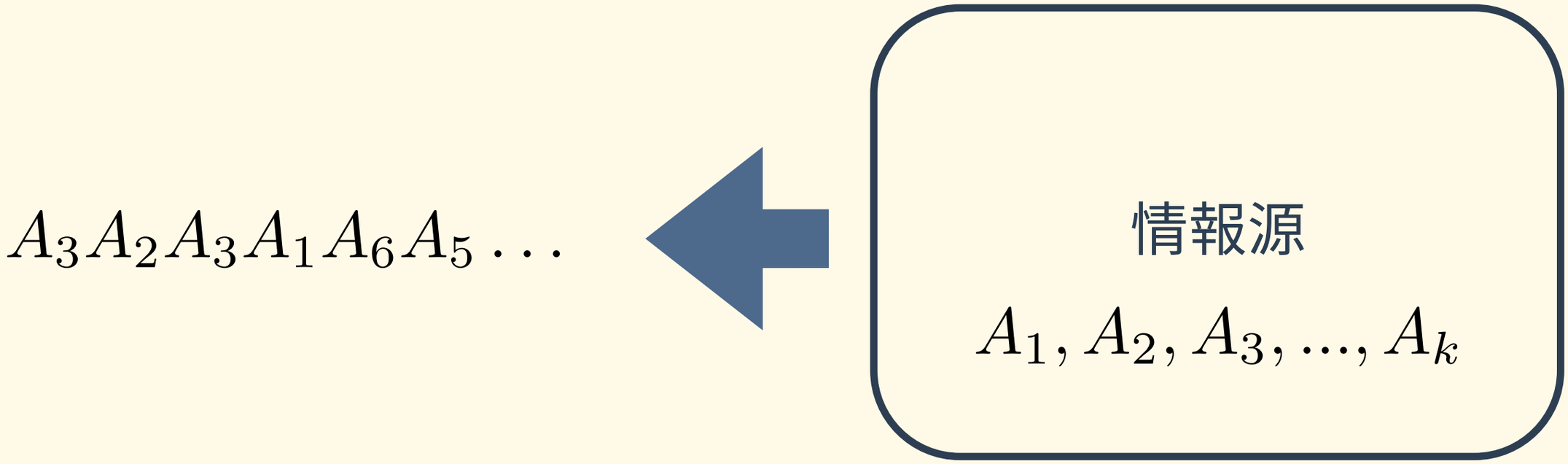
情報源

情報は湧いてくる

- 天気は、毎日変わっていく。
  - 晴れ、曇、晴れ、晴れ、曇、雨、晴れ、…
- 文章も一文字一文字が続いて出てくる。
- 事象が次々に起こるとき、その事象の発生の規則を確率的に考えることができる。事象と呼ぶのは面倒なので**文字**と呼ぶことにする。

情報源

- つまり、どこかから情報が次々に提供されると考えることができる。
- そして、提供される情報は、過去の情報に依存して確率的に決まる。
- そのような、情報が出てくる源を情報源と呼ぶ。



A_1からA_kまでの文字を持っている情報源から、文字が発生する。

この文字の集合をアルファベットとよぶ。

時刻t(t = 1, 2, 3, ⋯)に発生する文字をx_tと表すと、その時刻に出た文字がA_iなら

$$x_t = A_i$$

と表される。

M元情報源

情報源のアルファベットが

$$\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, ..., a_M)$$

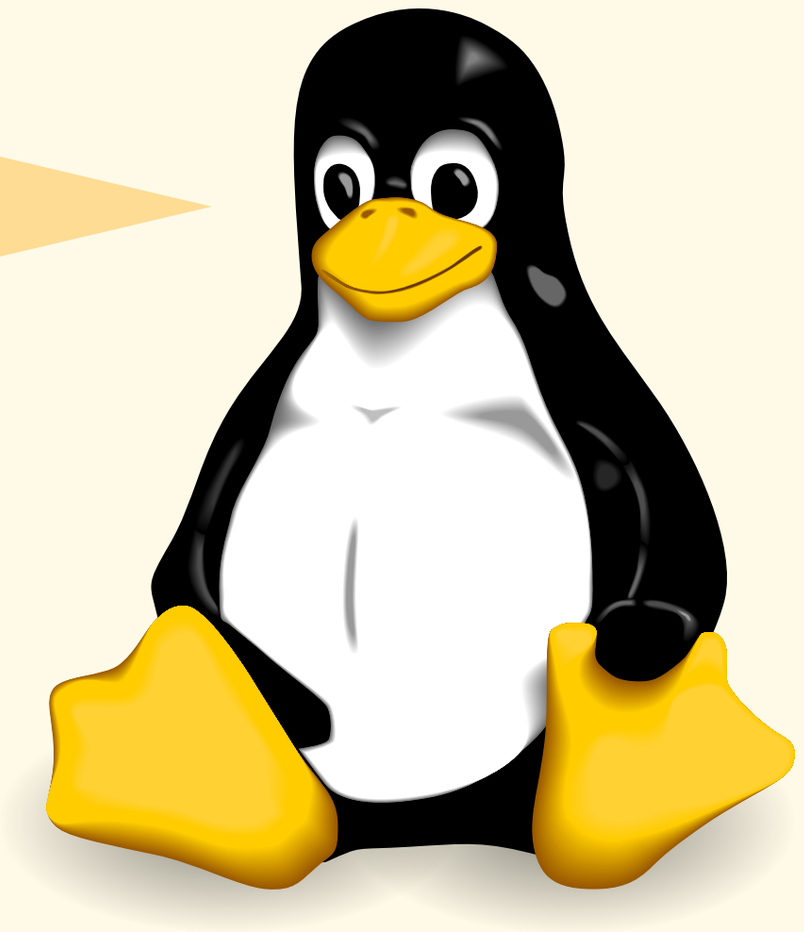
で表されるとき、M元情報源という。

2進信号：2元情報源

サイコロ：6元情報源

Tさんが情報源の場合

今日もLinux日和だ。



Tさん

x1=今

x2=日

.

.

.

文字で区切るか単語で区切るかは問題設定によって変わる。

発生する文字列は独立に出てくるのではなく、以前出た文字列に依存すると考える。

- 曇の日の次の日は雨がふるかもしれない。
- エントロピーという文字列がよく出てくる講義に、「クーロンの法則」という文字列は現れにくい。

時刻tに発生する文字x_tが、以前出た文字列に …$x_{t-2}x_{t-1}$依存するとする。以前出たs個の文字の系列が

$$x_{t-s} \dots x_{t-2} x_{t-1}$$

であるとき、x_tの出る確率は

$$p(x_t | x_{t-s} \dots x_{t-1})$$

と書ける。ここで文字列x_{t-s}…$x_{t-2}x_{t-1}$が出る確率を

$$p(x_{t-s} \dots x_{t-1})$$

と書くとすると、文字列x_{t-s}…x_tが出る確率は

$$
\begin{aligned}
p(x_{t-s}\dots x_{t-1}x_t) &= p(x_t|x_{t-s}\dots x_{t-1})p(x_{t-s}\dots x_{t-1}) \\
&= p(x_t|x_{t-s}\dots x_{t-1})p(x_{t-1}|x_{t-s}\dots x_{t-2})p(x_{t-s}\dots x_{t-2}) \\
&= p(x_t|x_{t-s}\dots x_{t-1})p(x_{t-1}|x_{t-s}\dots x_{t-2})\dots p(x_{t-s+1}|x_{t-s})p(x_{t-s})
\end{aligned}
$$

と書ける。

情報源からは、逐次確率的に文字がされており、その生成する確率は過去に生成された文字が何であったかに依存する。このような情報源を記憶情報源という。

定常的な情報源

情報源から出る文字の発生確率分布が時間によらず変化しない情報源を定常的な情報源という。

情報源の性質が時間がたっても変わらないということは
$p(x_t|x_{t-s}\dots x_{t-1})$ はtが何であっても同じだということである。

$$p(x_{t+r}) = p(x_t)$$
$$p(x_{t+r}|x_{t+r-s}\dots x_{t+r-1}) = p(x_t|x_{t-s}\dots x_{t-1})$$

Dさんの場合

朝

デーモンが好きです。ペンギンは嫌いです。

夜

デーモンが好きです。ペンギンも大好きです。

デーモン君が定常情報源ならば、時間によらずデーモン君はペンギンのあとに嫌いと言うと考えられる。

情報源のエントロピー

時刻tにおける情報源から生成される文字のエントロピーは

$$H(X_t) = -\sum p(x_t) \log p(x_t)$$

と表せる。Xtは時刻tの文字xtをあらわす確率変数である。
情報源は定常的であると考えると1文字のエントロピーは

$$H(X) = -\sum_i p(x = A_i) \log p(x = A_i)$$

となる。情報源から過去に出た文字を考えなければこれで良いが…

情報源から出てきた2文字のエントロピー

$$H(X_1X_2) = -\sum_{x_1x_2} p(x_1x_2)\log p(x_1x_2)$$

情報源から出てきたn文字のエントロピー

$$H(X^n) = -\sum_{x^n} p(x^n)\log p(x^n) \qquad X^n = X_1X_2...X_n$$
$$x^n = x_1x_2...x_n$$

H(Xn)の平均は

$$H_n = \frac{H(X^n)}{n}$$

1文字のエントロピーは

$$H = \lim_{n\to\infty} \frac{H(X^n)}{n}$$

n→無限大の極限を取らないと期待値にならない

無記憶情報源

- 過去に発生した文字が、それ以降に発生する文字に影響しないような情報源を無記憶情報源と言う。
  - 各文字の発生確率は互いに独立(i.i.d.)である。
- 文字列$x_1 \cdots x_t$が発生する確率は次のように書き表せる。

$$p(x_1 x_2 x_3 ... x_t) = p(x_1)p(x_2)p(x_3)...p(x_t)$$

- 1文字のエントロピーは

$$H(X) = -\sum_x p(x) \log p(x)$$