

# 情報理論08

藤田 一寿

津山工業高等専門学校情報工学科 講師  
電気通信大学先進理工学科 協力研究員

# (単純) マルコフ情報源

時刻*i*における出力文字 $X_i$ が発生する確率が、一つ前の文字 $X_{i-1}$ にだけ依存する情報源を(単純)マルコフ情報源と言う。文字 $X_{i-1}$ の生起確率 $P(X_{i-1})$ は

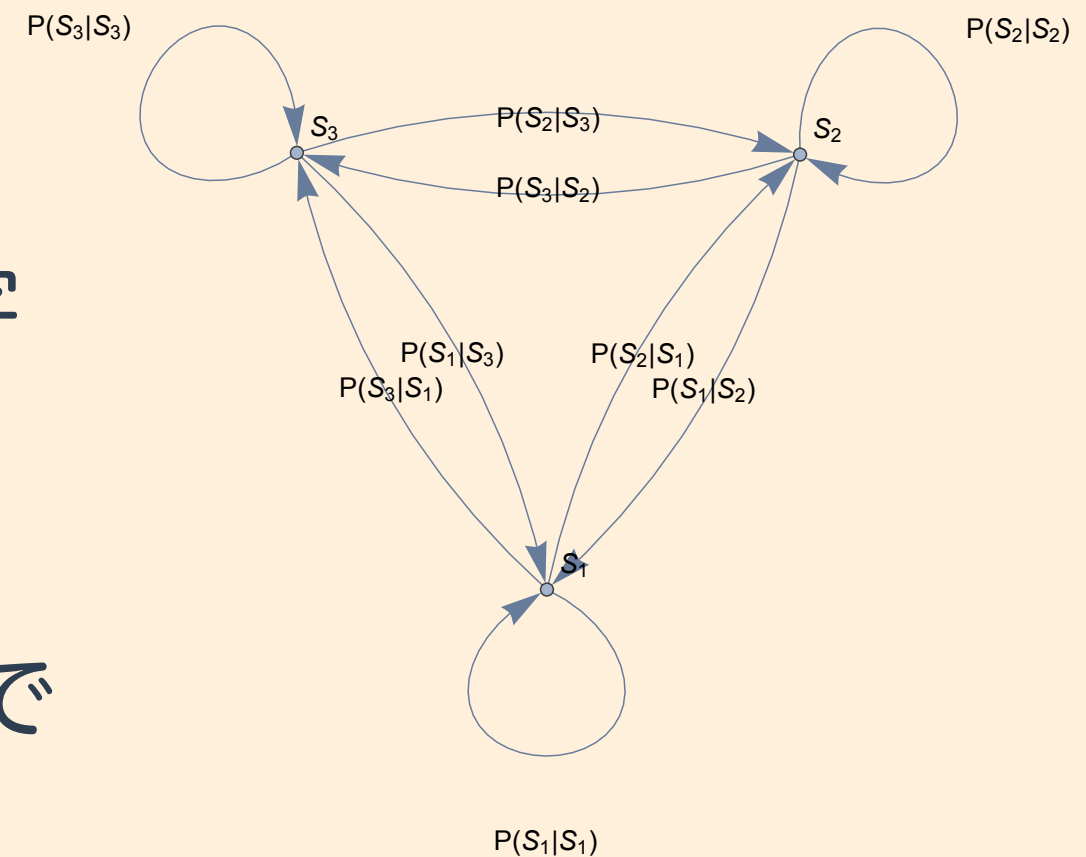
$$P(X_i) = P(X_i | X_{i-1})$$

となる。よって、文字列 $X^N$ の同時確率 $P(X^N)$ は

$$\begin{aligned} P(X^N) &= P(X_1, X_2, \dots, X_{N-1}, X_N) \\ &= P(X_N | X_{N-1}) P(X_{N-1} | X_{N-2}) \dots P(X_2 | X_1) P(X_1) \end{aligned}$$

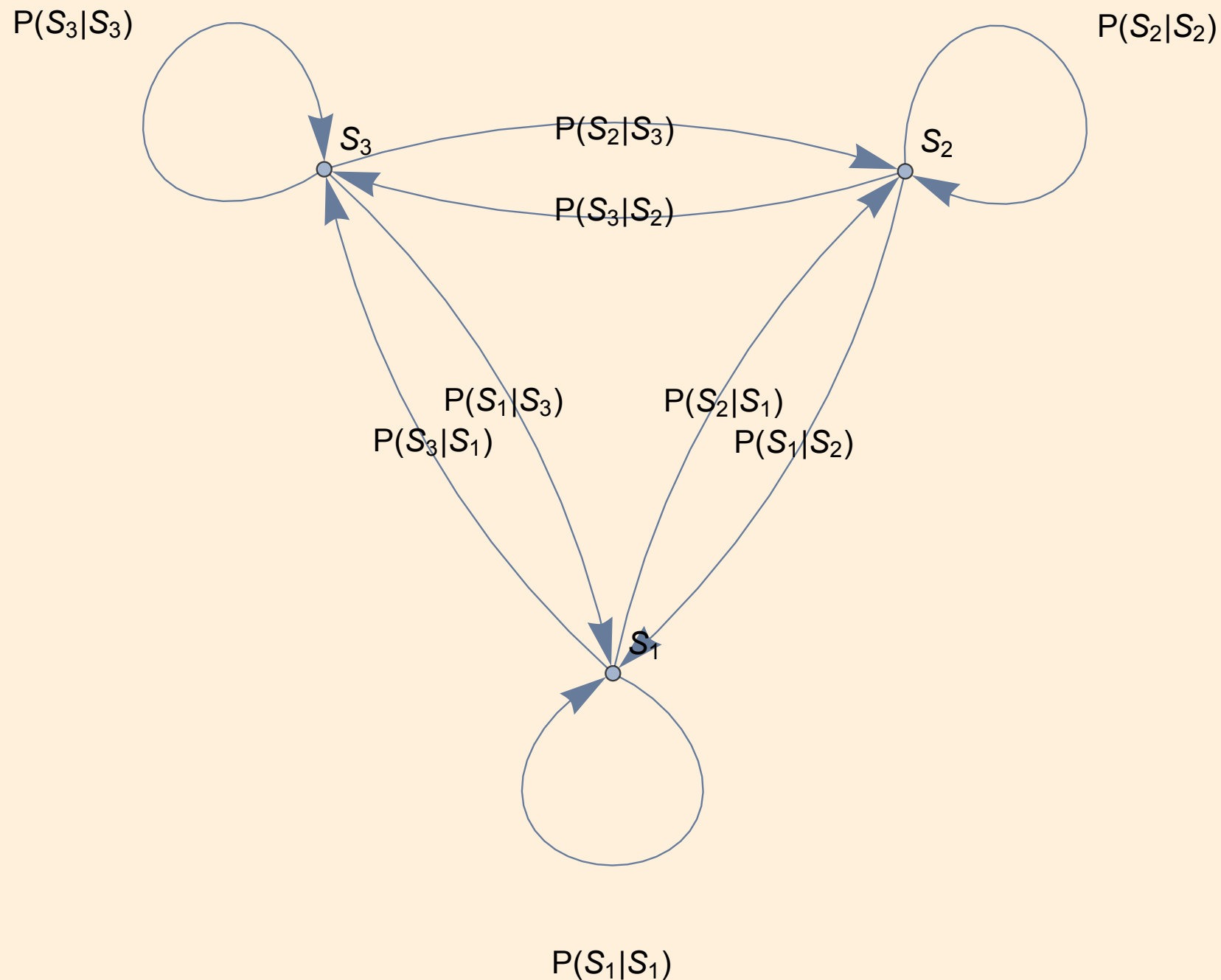
# マルコフ情報源

- ▶ 内部状態をいくつか持つ
  - ▶ 内部状態を $S_1, S_2, \dots, S_n$ と表す
- ▶ 状態は確率的に変わる
- ▶ 状態 $S_1$ から $S_2$ に変わるとき文字が発生する
- ▶ 状態の移り変わりを状態遷移図で表す

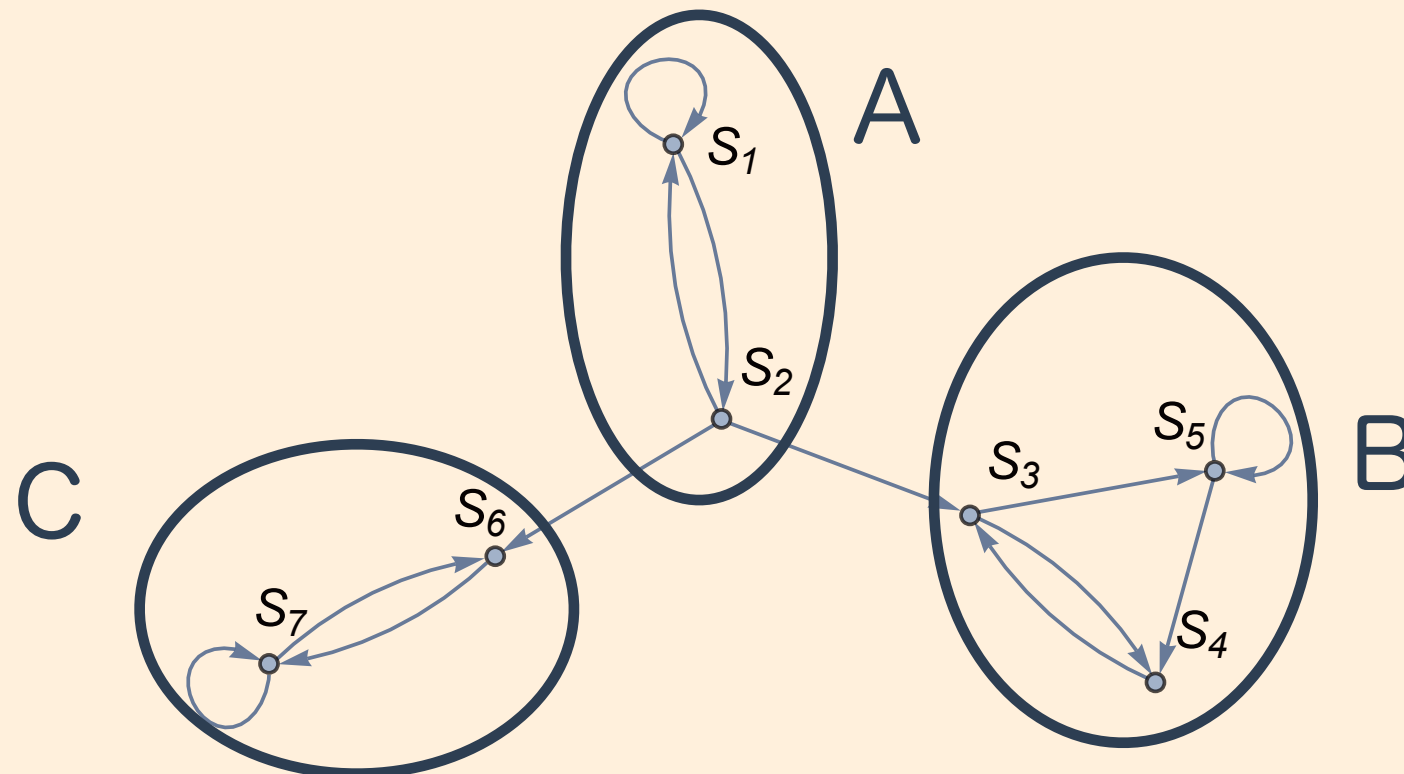


# マルコフ連鎖

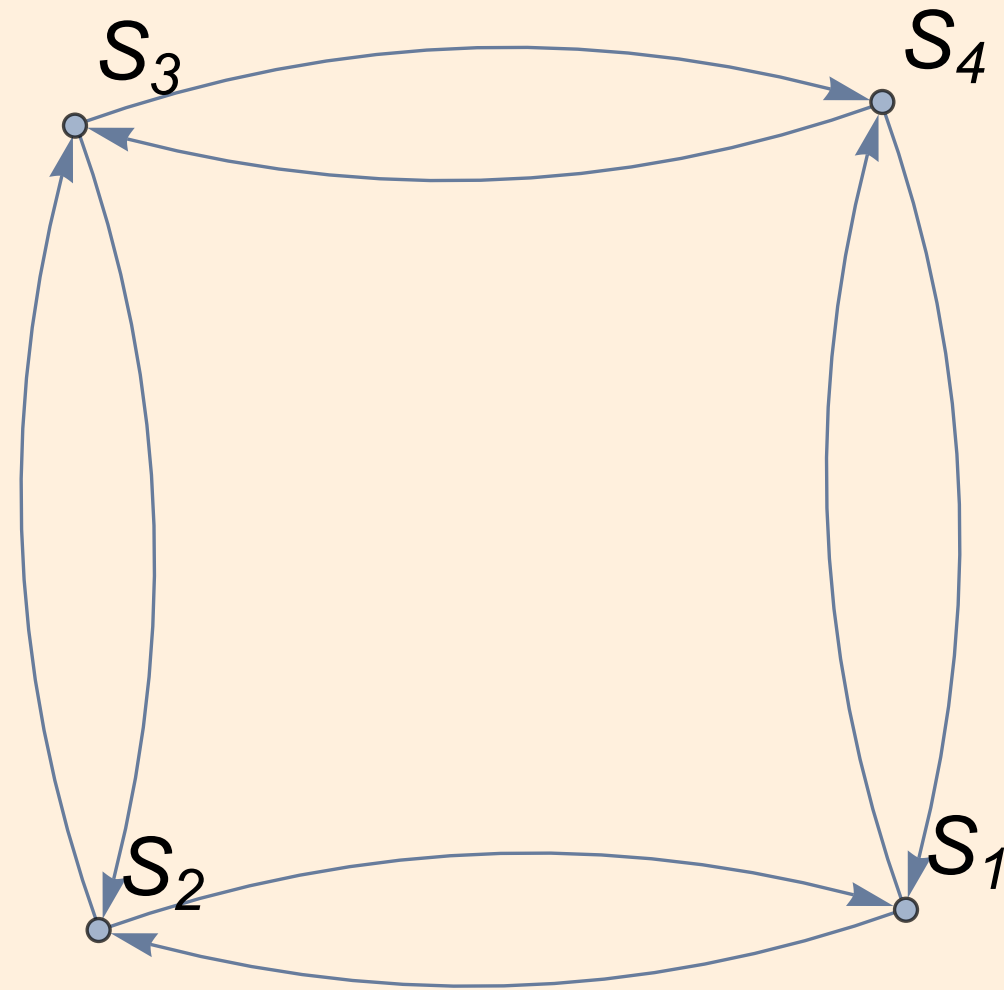
現在の状態に依存して、確率的に状態が遷移していく過程をマルコフ連鎖と呼ぶ。



- ▶ 閉部分集合
  - ▶ 他の状態に遷移できない部分集合 (BとC)
- ▶ 強連結成分
  - ▶ 必ず他の状態に遷移できる部分集合 (B内およびC内)
- ▶ 消散部分
  - ▶ 留まる確率が0いずれになるの状態 (A)
- ▶ 分解不可能
  - ▶ 全体が一つの強閉部分集合からなる (Bだけ、Cだけなら分離不可能)
  - ▶ 今後は分離不可能なマルコフ連鎖を取り扱う



# 周期的連鎖



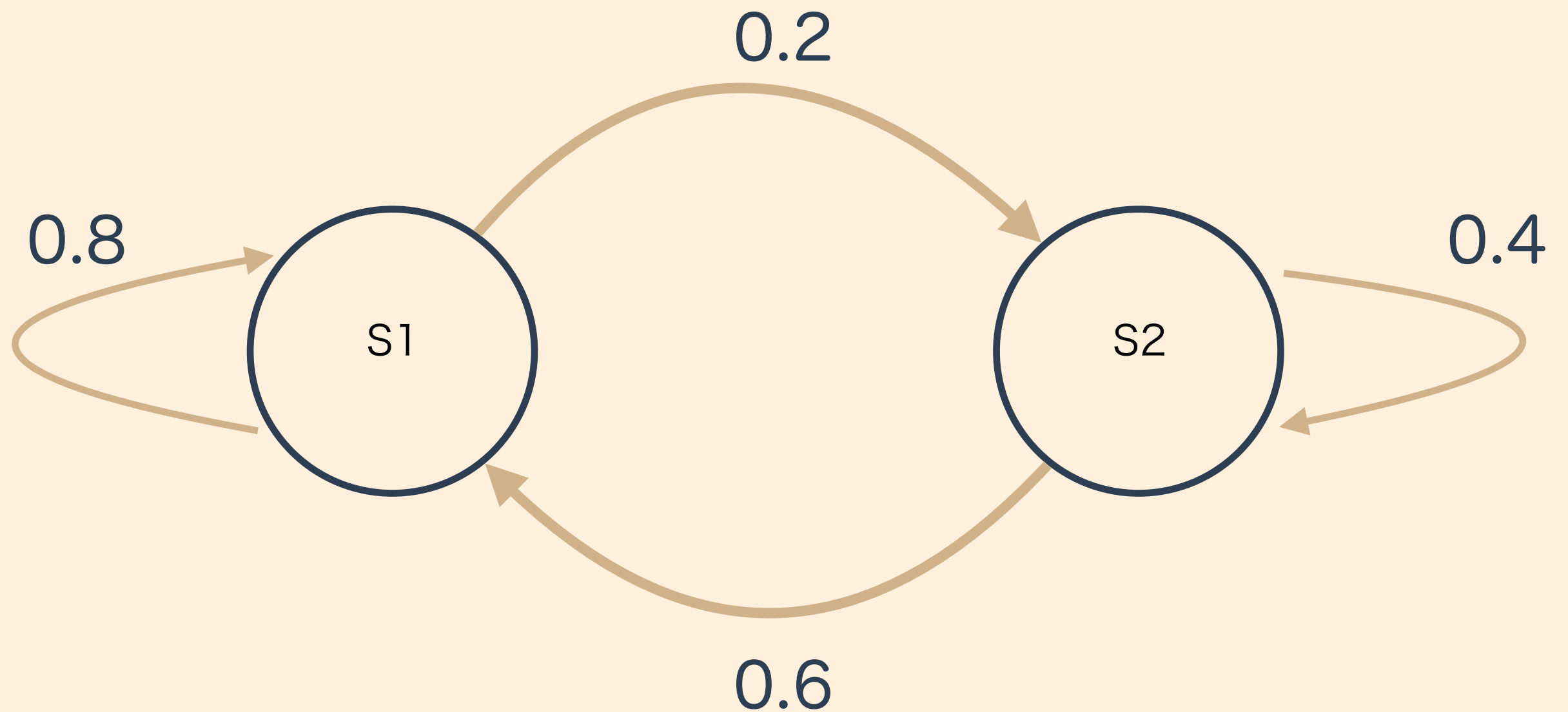
時刻 1 のとき状態  $S_1$  であったとすると、  
時刻が偶数の時状態は  $S_2$  か  $S_4$  であり、偶数の時  $S_1$  か  $S_3$  である。

# 遷移確率行列

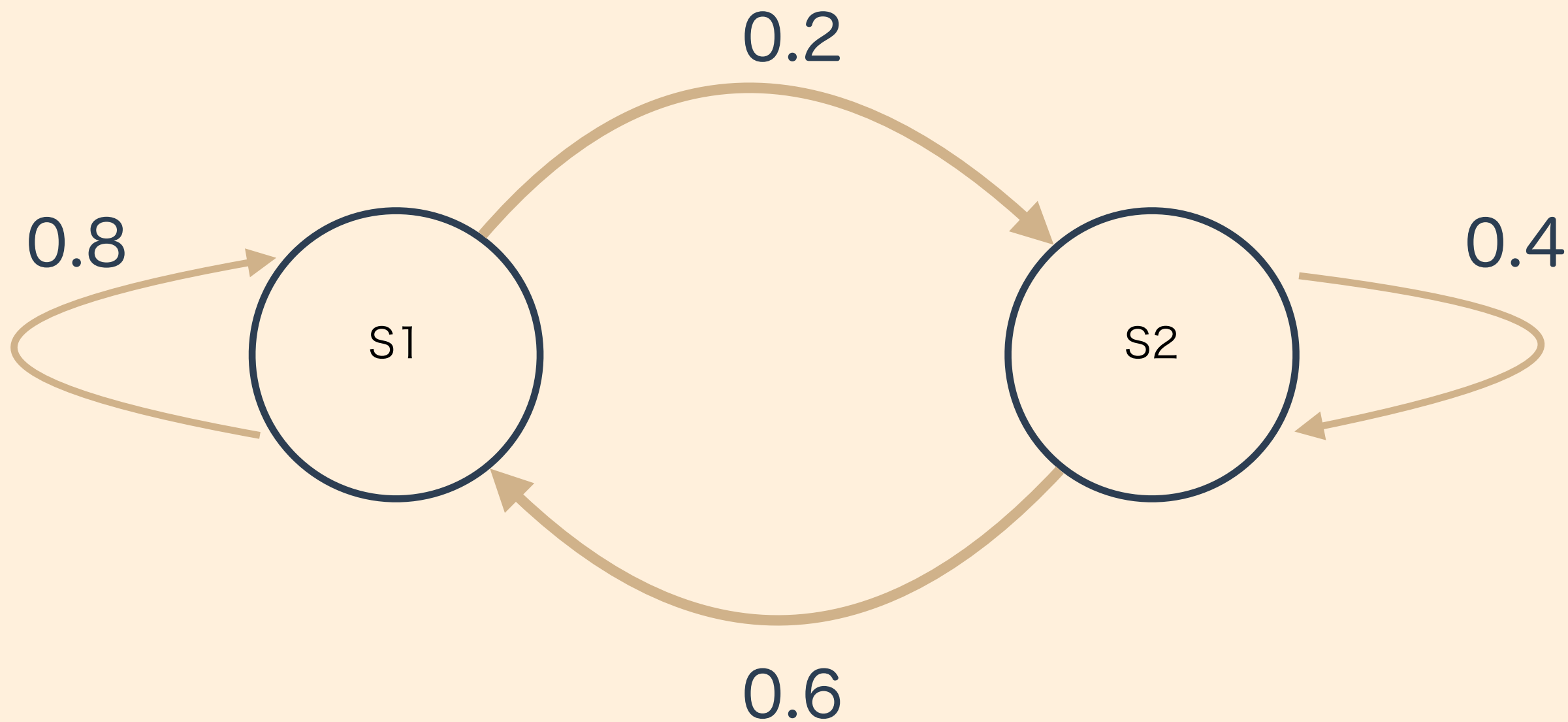
- ▶ 状態を遷移する確率を表す行列
- ▶  $S_\alpha$  から  $S_\beta$  の状態に移動する確率の一覧

$$P = \begin{matrix} & S_1 & \dots & S_\beta & \dots & S_\gamma \\ \begin{matrix} S_1 \\ \vdots \\ S_\alpha \\ \vdots \\ S_\gamma \end{matrix} & \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & \dots & \dots & p_{1\gamma} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & p_{\alpha\beta} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ p_{\gamma 1} & \dots & \dots & \dots & p_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

# 2つの状態の例





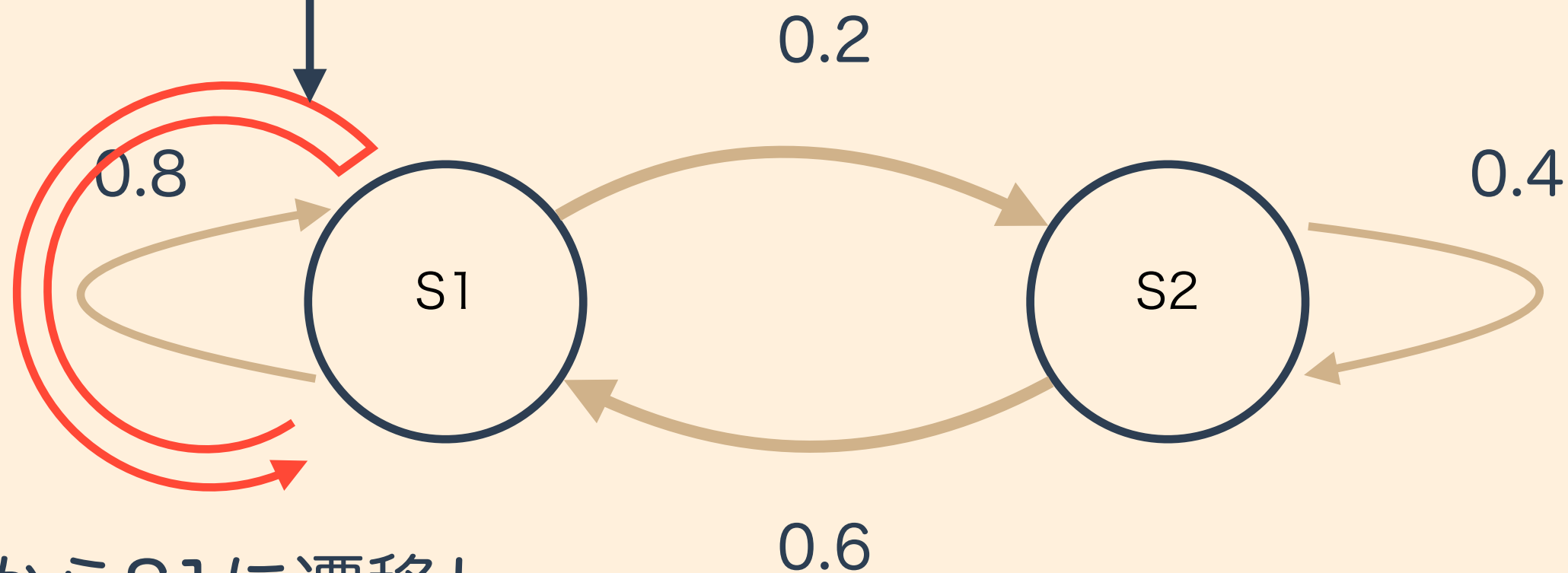


$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

# PにPをかけてみる

$$\begin{aligned} P^2 &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_{11}^2 + p_{12}p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} & p_{22}p_{12} + p_{22}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \boxed{p_{11}^2} + p_{12}p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} & p_{22}p_{12} + p_{22}^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



S1からS1に遷移し、  
さらにS1に遷移する

$$\begin{aligned}
 P^2 &= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \boxed{p_{11}^2} + \boxed{p_{12}p_{21}} & \boxed{p_{11}p_{12}} + \boxed{p_{12}p_{22}} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} & p_{22}p_{12} + p_{22}^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

はじめに

S1

S1

S1

S1

次に

S1

S2

S1

S2

その次に

S1

S1

S2

S2

# 無限回遷移するとどうなる？

$P^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$  が存在する。

$$P^\infty = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^T \\ \boldsymbol{u}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}^T \end{bmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}$$

$P^\infty$ は同一の列ベクトル $\boldsymbol{u}$ から成る。

$\boldsymbol{u}$ は次の条件を満たし、一意に決まる。

$$\boldsymbol{u}^T P = \boldsymbol{u}^T \quad \boldsymbol{u} \text{を定常確率(分布)という}$$

$$\sum u_i = 1, u_i \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

$$0.8u_1 + 0.6u_2 = u_1$$

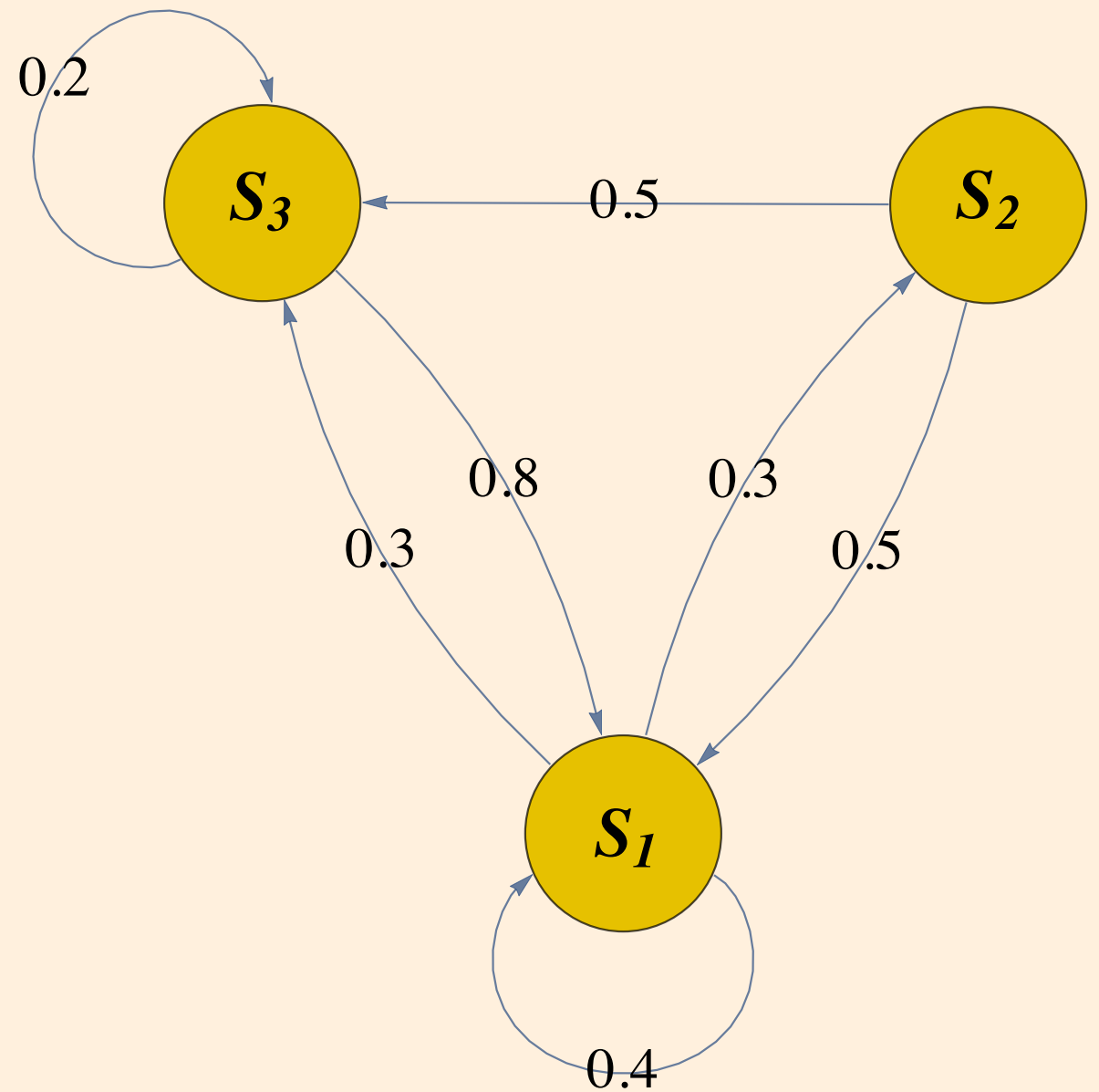
$$0.2u_1 + 0.4u_2 = u_2$$

$$u_1 + u_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

# 次のマルコフ連鎖の定常確率を求めよ

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



# マルコフ連鎖のエントロピー

現在文字 $X_\alpha$ である場合のエントロピー

$$H(X|X_\alpha) = - \sum_i q_{i\alpha} \log q_{i\alpha}$$

文字が生成される定常確率を $u_\alpha$ とすると

$$H = \sum_\alpha u_\alpha H(X|X_\alpha)$$



# 2重マルコフ情報源

次に生成する文字の生起確率が以前に生成された2つの文字に依存する。

以前に発生した2文字を $x_1x_2$ とすると、次に発生する文字 $x_3$ の生成確率は

$$p(x_3|x_1x_2)$$

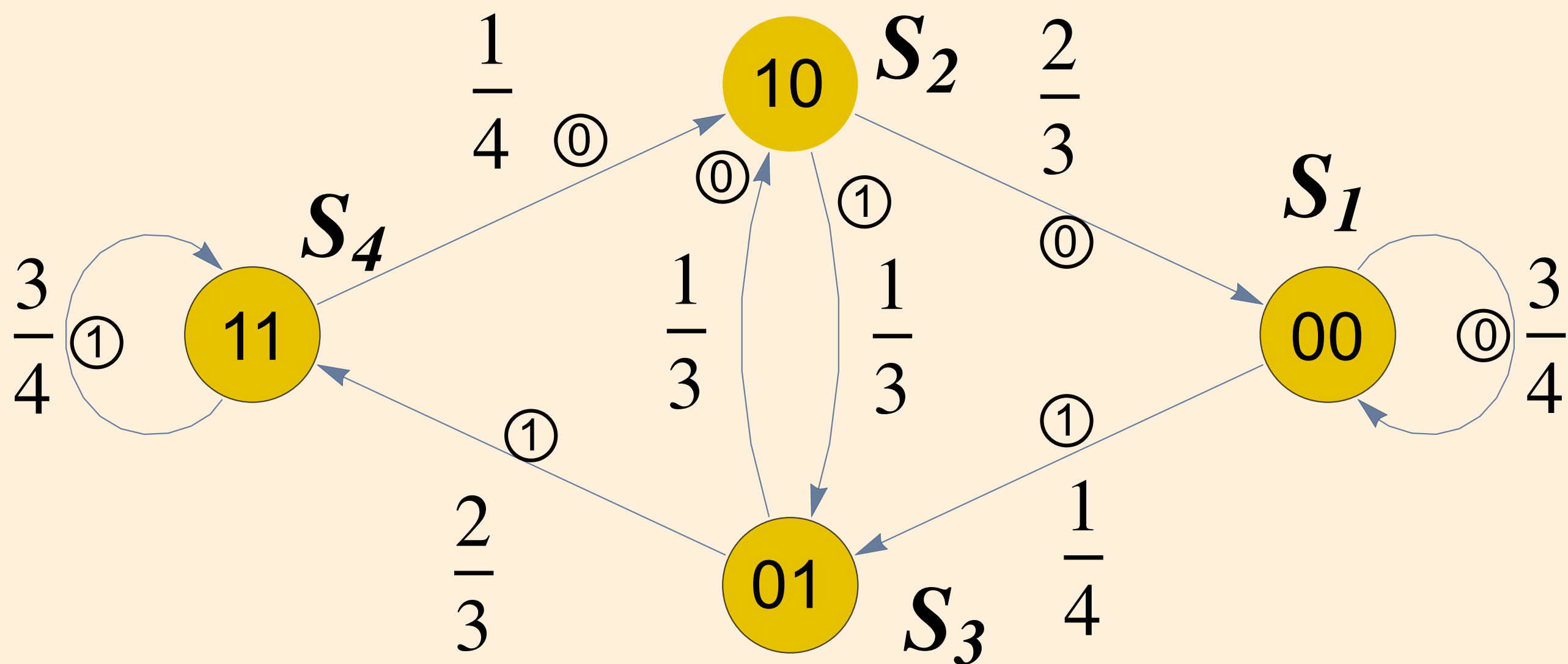
とかける。

$$p(0|00) = \frac{3}{4}, p(1|00) = \frac{1}{4}$$

$$p(0|10) = \frac{2}{3}, p(1|10) = \frac{1}{3}$$

$$p(0|01) = \frac{1}{3}, p(1|01) = \frac{2}{3}$$

$$p(0|11) = \frac{1}{4}, p(1|11) = \frac{3}{4}$$



$$P = \begin{matrix} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{u}^T P = \boldsymbol{u}^T$$

$$\boldsymbol{u} = \left( \frac{8}{22}, \frac{3}{22}, \frac{3}{22}, \frac{8}{22} \right)^T$$

# 次に出てくる文字のエントロピー

- ▶ 情報源が状態S1, S4にあるとき、次に出てくる文字のエントロピーは

$$\begin{aligned} H\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) &= -\frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \log \frac{3}{4} \\ &= 0.811 \end{aligned}$$

- ▶ 情報源が状態S2, S3にあるとき、次に出てくる文字のエントロピーは

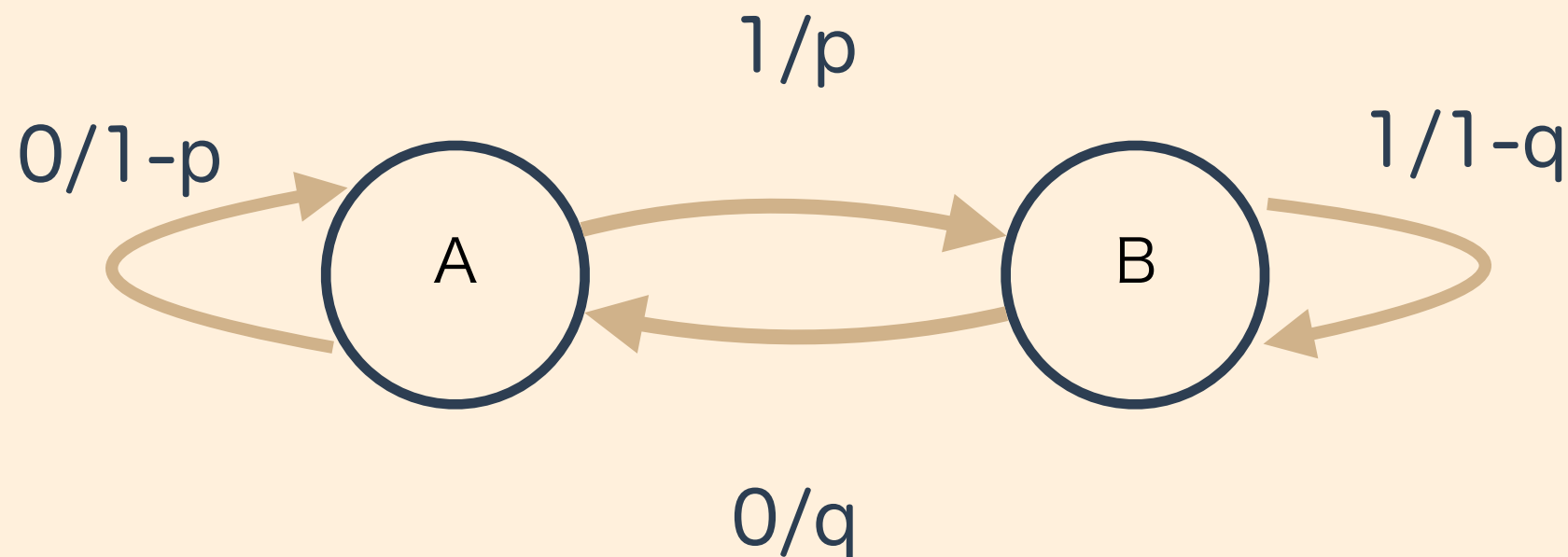
$$\begin{aligned} H\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) &= -\frac{1}{3} \log \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \log \frac{2}{3} \\ &= 0.918 \end{aligned}$$

# 情報源のエントロピー

- ▶ 情報源のエントロピーは、次に文字が出てくるエントロピーの期待値であるので、

$$\begin{aligned} H &= \frac{3}{22} \times 0.92 \times 2 + \frac{8}{22} \times 0.81 \times 2 \\ &= 0.84 \end{aligned}$$

# 演習問題2.2



- ▶ 2元マルコフ情報源について次の問に答えよ
  1. 定常確率  $p(A)=p(0)$  と  $p(B)=p(1)$  の値を求めよ。
  2. このマルコフ情報源のエントロピーを求めよ。