# 情報理論12

藤田 一寿

津山工業高等専門学校情報工学科 講師
電気通信大学先進理工学科 協力研究員

ver.20160705

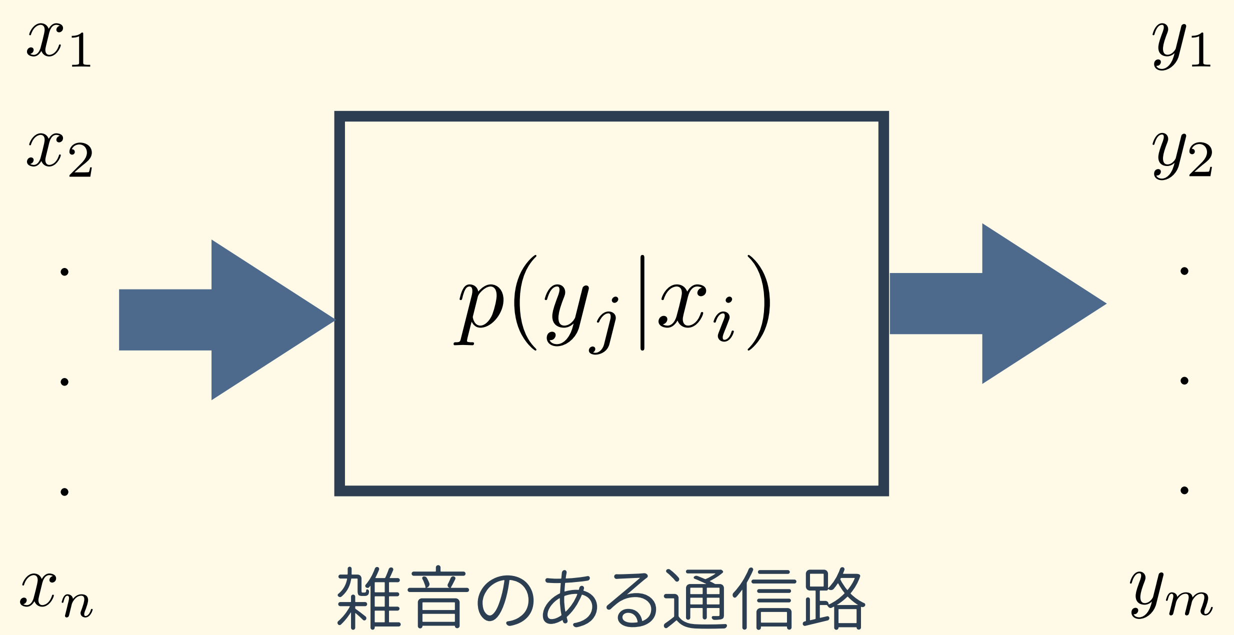
# 雑音のある通信路

# 雑音の妨害での情報伝送量

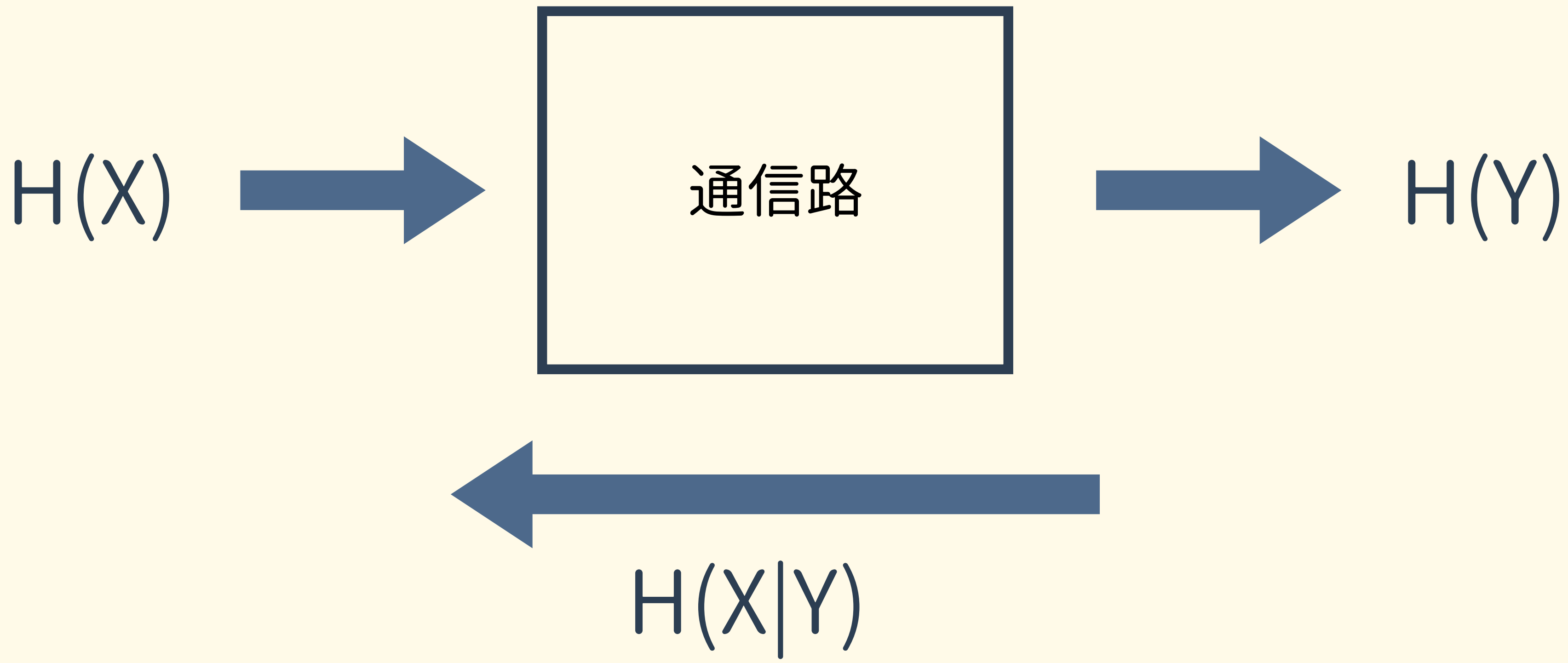
通信する上で雑音がない場合はほぼ無い

どのようにして確実に情報を送るか

# 雑音のある通信路




- 入力信号x1を送った時，なにが受信されるか？
  - y1かも知れないしy2かも知れない．
  - 雑音（ノイズ）により変わる．
- 確率的に取り扱うと，yjが出る確率はp(yj|xi)と表すことができる．




- 信号源は1秒辺りH(X)のエントロピーを持つ.
- 信号系列x1, x2, x3,…は雑音の影響によりy1, y2, y3,…に変換される.
- 受信信号は1秒辺りH(Y)のエントロピーを持つとする.
- 受信される信号の確率p(yj|xi)が分かれば,受信した信号からなんとなく元の信号が分かる.
- 受信信号が分かるという条件のもとでの情報源のエントロピーはH(X|Y)と書ける.情報源が持つ曖昧さを表す.

# 情報伝達速度

受信信号により得られた情報量Rを情報伝送速度と呼ぶ．

$$R = H(X) - H(X|Y)$$

情報源のエントロピー　　受信信号の曖昧さ

情報伝送速度Rは，式の通り送信信号と受信信号の相互情報量になっている．

$$R = H(X) - H(X|Y) = I(X, Y)$$

X,Y入れ替えても同じ

# 少し具体的に計算してみる

送信信号のエントロピー

$$H(X) = -\sum_i p(x_i) \log p(x_i)$$

受信信号が生成される確率

$$p(y_i) = \sum_i p(x_i) p(y_j | x_i)$$

xiとyjの同時確率を求め周辺化している

受信信号のエントロピー

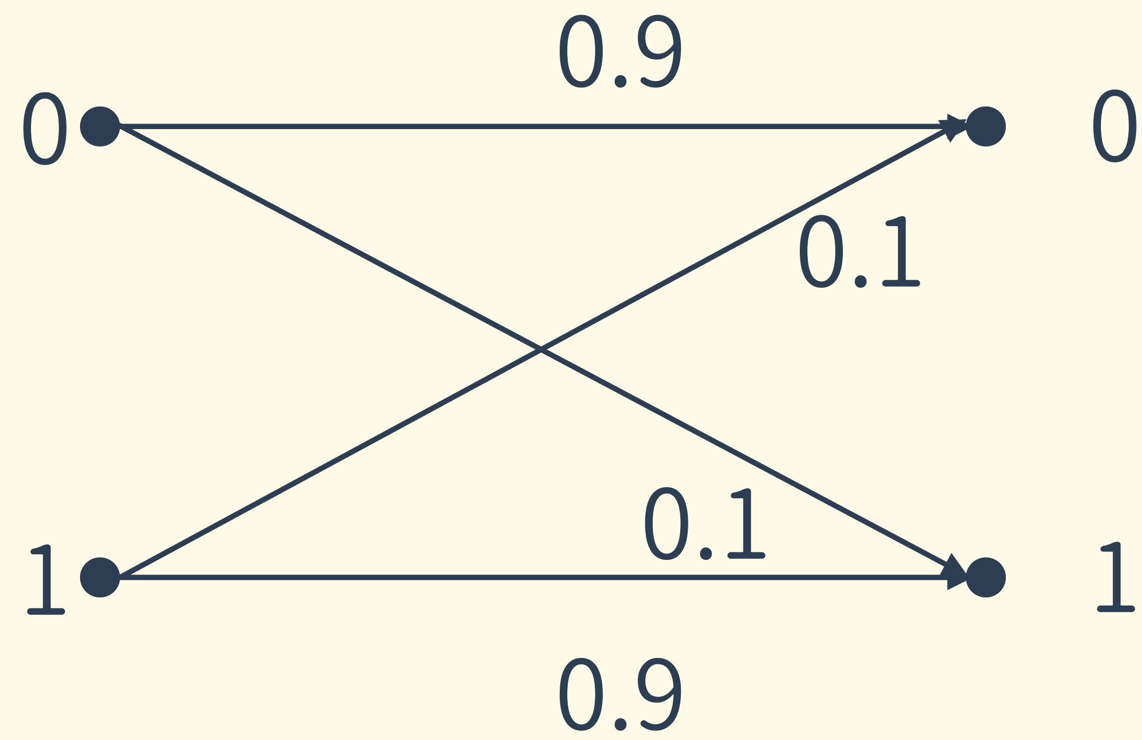
$$H(Y) = -\sum_j p(y_j) \log p(y_j)$$

## 受信信号が分かっているものとして，送信信号の曖昧さ

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(y_j|x_i)p(x_i)}{p(y_j)}$$

$$H(X|Y) = -\sum_i \sum_j p(y_j)p(x_i|y_j) \log p(x_i|y_j)$$

# 例

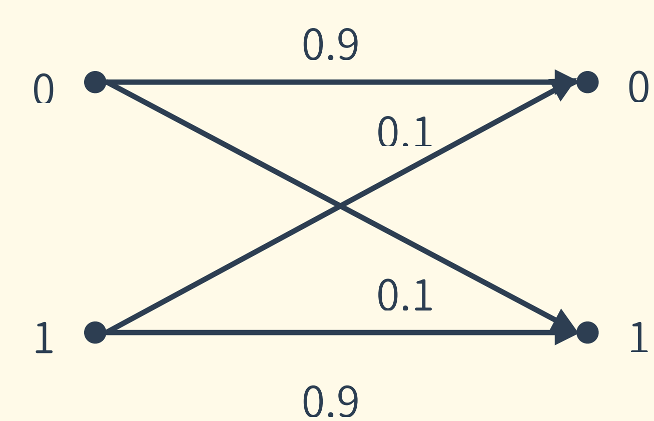



雑音のため,0.1の確率で信号が変わってしまう通信路

$$p(y=0|x=0)=p(y=1|x=1)=0.9$$
$$p(y=0|x=1)=p(y=1|x=0)=0.1$$

0もしくは1を等確率に1秒間に1000個出力する信号源が無記憶情報源とすると，そのエントロピーは

$$
\begin{aligned}
H(X) &= 1000 \times (-\sum_i p(x_i) \log p(x_i)) \\
&= 1000 \times (-\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}) \\
&= 1000 \times (-\log \frac{1}{2}) \\
&= 1000
\end{aligned}
$$




1000桁の2進数なので当たり前．

信号が伝送されると雑音により各文字が0.1の確率で変異する．

そう考えると1000個の文字のうち900個が変異せずに到達すると考えられる．そう考えると900ビットの情報が伝送されたと言いたくなるが，果たしてそれは正しいのか？

# 曖昧さ

$$
\begin{aligned}
H(X|Y) &= 1000 \times (-\sum_i \sum_j p(y_j)p(x_i|y_j) \log p(x_i|y_j)) \\
&= 1000 \times (-p(y_0)p(x_0|y_0) \log p(x_0|y_0) - p(y_0)p(x_1|y_0) \log p(x_1|y_0) \\
&- p(y_1)p(x_0|y_1) \log p(x_0|y_1) - p(y_1)p(x_1|y_1) \log p(x_1|y_1)) \\
&= 1000 \times (-0.5 \times 0.9 \log 0.9 - 0.5 \times 0.1 \log 0.1 \\
&- 0.5 \times 0.9 \log 0.9 - 0.5 \times 0.1 \log 0.1) \\
&= 1000 \times (-0.9 \log 0.9 - 0.1 \log 0.1) \\
&= 469
\end{aligned}
$$

# 情報伝送速度Rは

$$
\begin{aligned}
R &= 1000 - 469 \\
&= 531
\end{aligned}
$$

900個の文字があたっていても，どれがあたっているかわからないので0.1の確率で雑音が入ってしまっても情報は半分に減る．

# ノイズによりでたらめな文字列になったら

- 信号が0.5の確率で変異しそれを受信するとすると，受信信号で現れる各文字の出現確率が0.5となる．結局曖昧さは$H(X|Y)=1000$ビットとなる．
- つまり，最大転送速度は0ビットとなり，何も情報を伝えていないことになる．

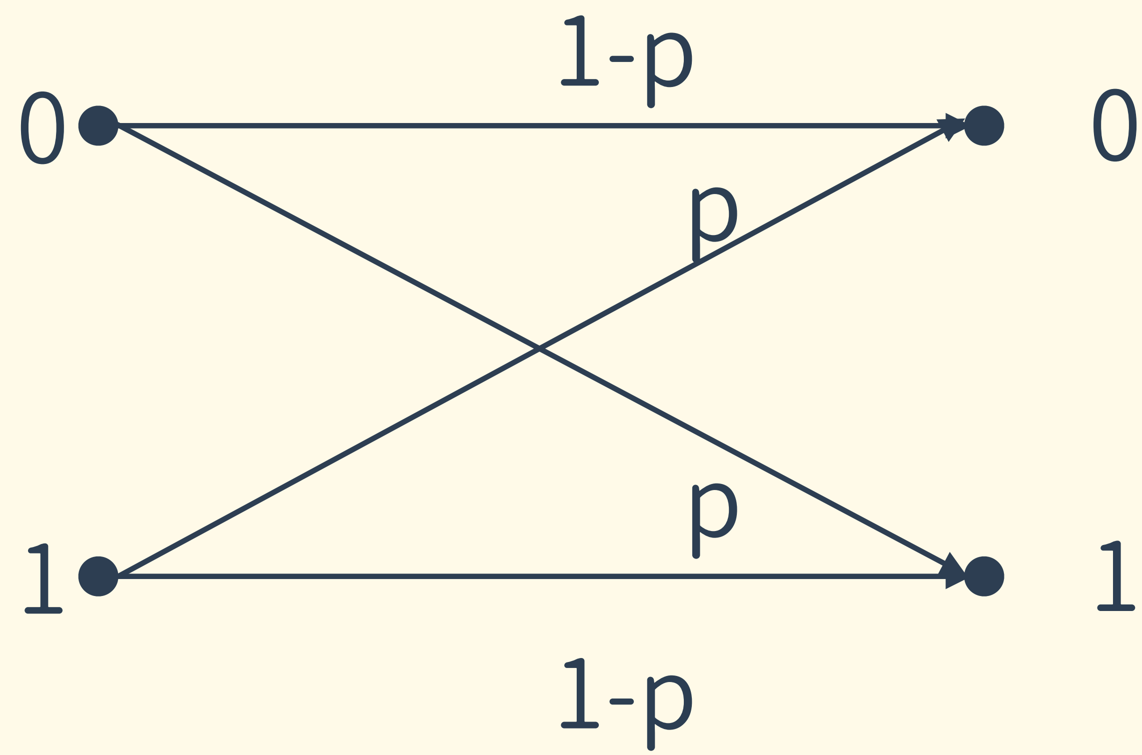
# 通信路容量

- 通信路容量は，伝送速度の最大値

$$C = \max_{p_i} R$$

- 通信路容量を大きくするには雑音の影響が少ない信号の確率を増やす．

# 2元対称通信路




通信路行列 $P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} p(0|0) & p(1|0) \\ p(0|1) & p(1|1) \end{bmatrix}$$

$$H(X) = -p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1$$

$$H(Y) = -q_0 \log q_0 - q_1 \log q_1$$

$$H(Y|X) = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$$

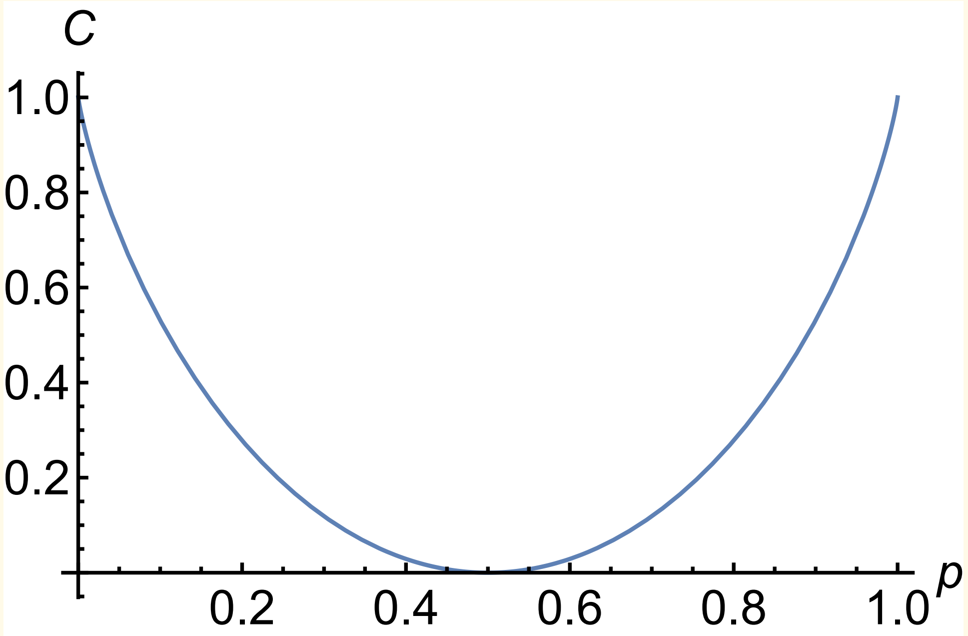
$$\begin{aligned} R = I(X,Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= -q_0 \log q_0 - q_1 \log q_1 + p \log p + (1-p) \log(1-p) \end{aligned}$$

Rが最大になるのはq0=q1=0.5 (p0=p1=0.5)とき．よって

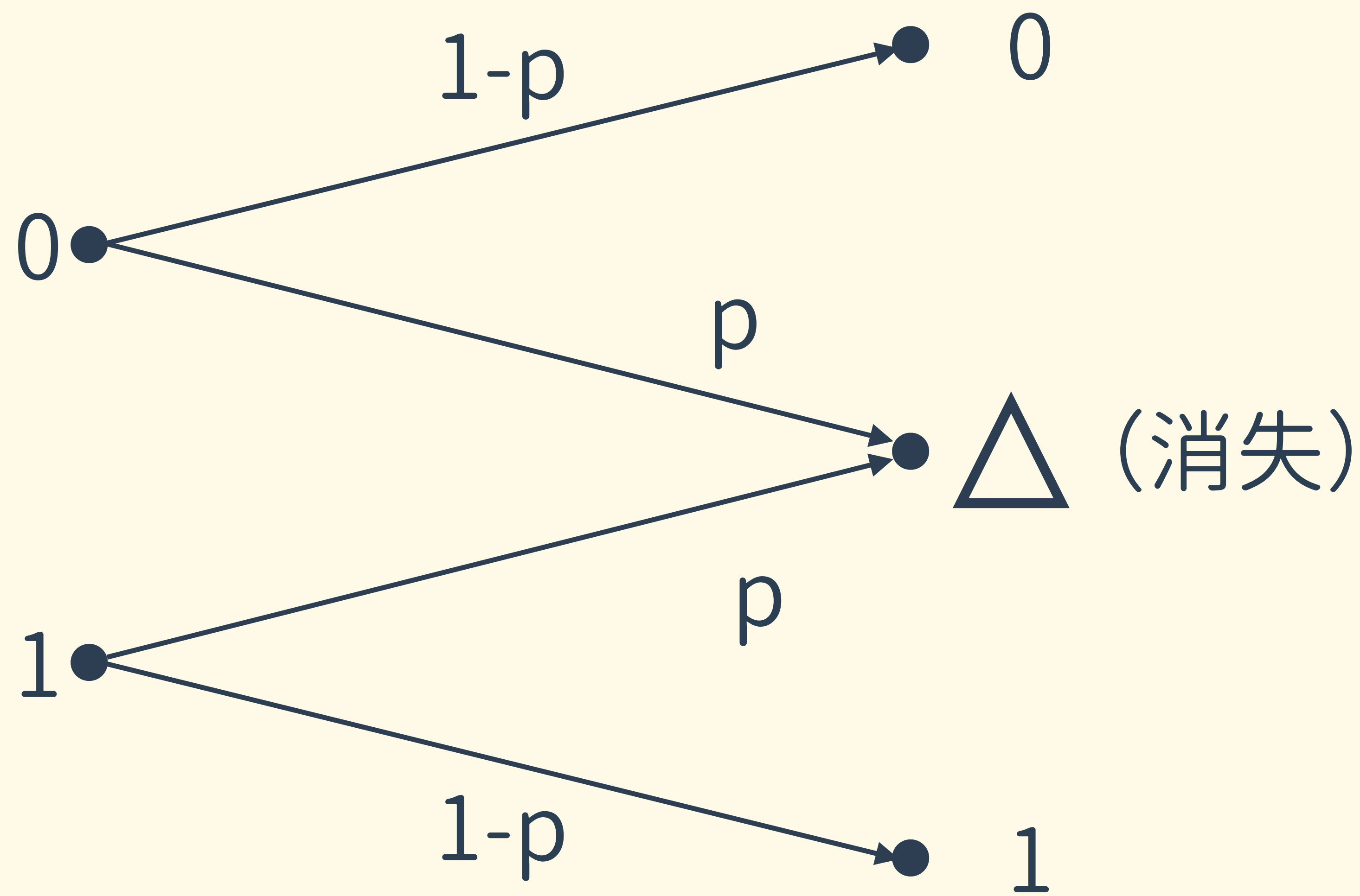
$$C = 1 + p \log p + (1-p) \log(1-p)$$

となる．

p=0.5の時，伝送速度は0となる．p=1の場合は常に信号が入れ替わることが分かっているので，確実に信号が伝わる事となり，伝送速度が1となる．



# 2元消失通信路

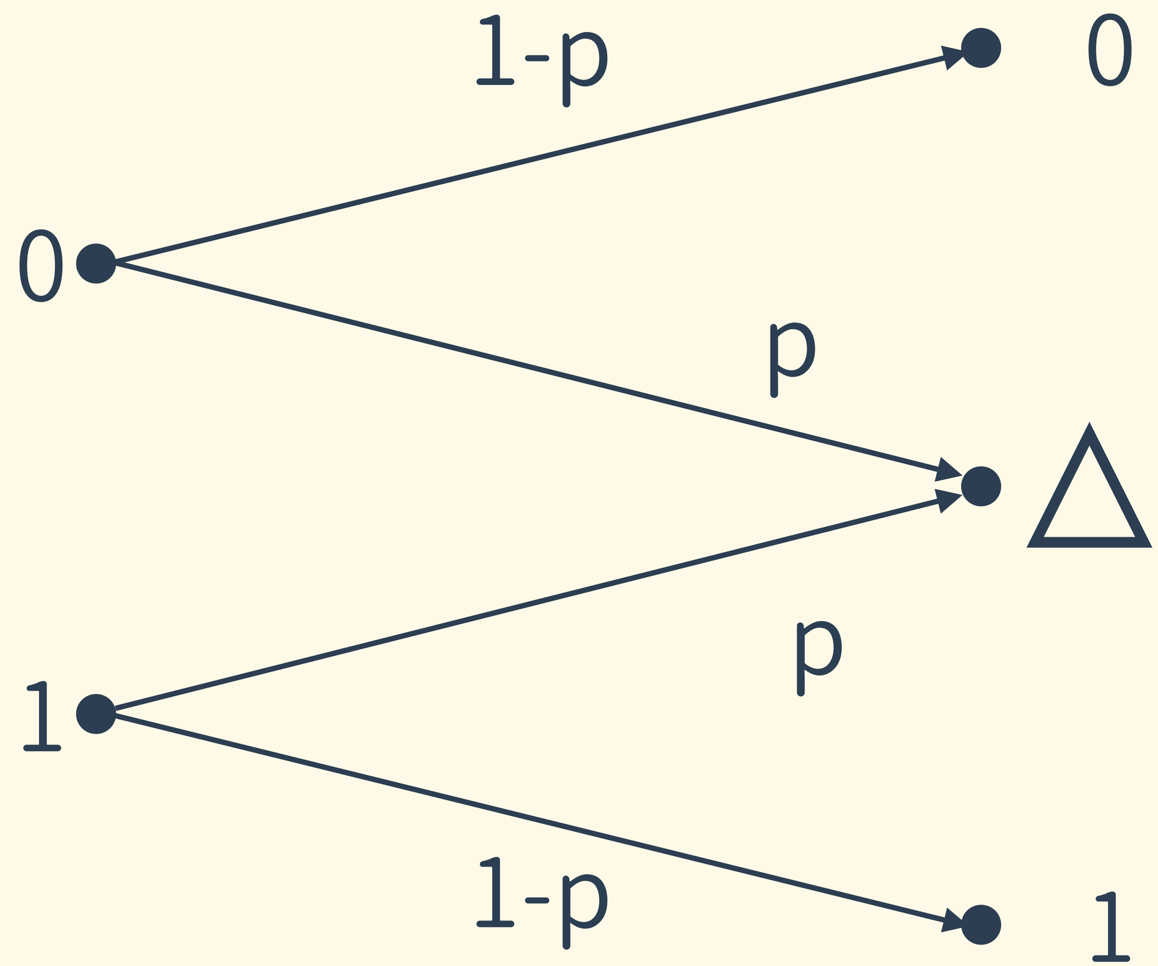



0,1を1秒ごとに1つ送る通信路

出力信号は0,1,△

信号は確率pで△に変わる

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{bmatrix}$$

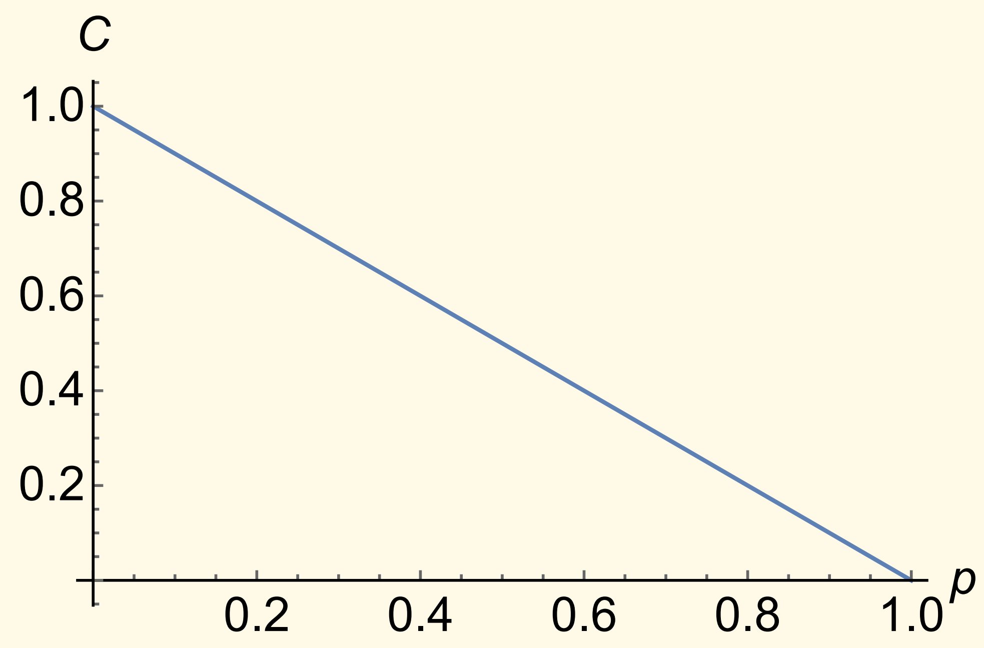



$$H(Y) = -p_0(1-p)\log(p_0(1-p)) - p_1(1-p)\log(p_1(1-p))$$
$$= -(1-p)(p_0\log p_0 + p_1\log p_1) - (1-p)\log(1-p)$$

$$H(Y|X) = \sum_i \sum_j p(x_i)p(y_j|x_i)\log p(y_j|x_i)$$
$$= -(1-p)\log(1-p)$$

$$R = H(Y) - H(Y|X) = (1-p)H(X)$$

Rを最大化するp0，p1はそれぞれ0.5であるから，
最大通信路容量Cは$C = 1 - p$となる．




2元対称通信路とくらべてみると，消失通信路ではp = 0.1のときC = 0.9となり，例1の0.53と比べ大きい．