

情報理論 2015 年度レポート課題 1

10 問以上問題を解き、2015/06/11 の試験開始前に提出する。

1. ビデオが映らなくなった事象を B 、その原因として、

- A_1 : ビデオの電子回路の故障 (発生確率 65%)
- A_2 : モータの故障 (発生確率 25%)
- A_3 : データの破損 (発生確率 10%)

とする。このとき、条件付き確率を

- $P(B|A_1) = 30\%$
- $P(B|A_2) = 60\%$
- $P(B|A_3) = 10\%$

とする。ベイズの定理を用いて 3 つの事後確率を求めよ。

2. ポケットにお金がないという事象 B 、その原因として、

A_1 : 電車内でスリにあった

A_2 : ポケットが破れていた

A_3 : 家を出るとき忘れた

なる 3 つが考えられるとする。各原因の事前確率を、 $P(A_1) = 0.25, P(A_2) = 0.05, P(A_3) = 0.7$ とし、条件付き確率を、 $P(B|A_1) = 0.35, P(B|A_2) = 0.15, P(B|A_3) = 0.5$ とするとき、事後確率 $P(A_1|B), P(A_2|B), P(A_3|B)$ を求めよ。

3. 分散を $V(X)$ 、期待値を $E(X)$ とするとき、 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ であることを示せ。ただし、 $V(X) = E((X - E(X))^2)$ とする。

4. X と Y が互いに独立な場合、次の式が成り立つことを示せ。

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(XY) = E(X)E(Y)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

5. 2 個の理想的なサイコロをふった場合、その目の和が 7 であった。しかし、後日、その時のサイコロの目が何であったか忘れてしまった。この場合、失われた情報量は何ビットか。(10 点)

6. ジョーカーを除くトランプ 52 枚カードを引くとき

- (a) スペードの A であった時に得られる情報量を求めよ。
- (b) スペードであることのみ知った時に得られる情報量を求めよ。
- (c) A であることのみ知った時に得られる情報量を求めよ。
- (d) b と c で求めた情報量の和が a と一致することを確かめよ。

7. 台風が来るのは 1 年に 15 日、満潮は 1 日に 2 時間とする。このとき、台風が来てかつ満潮という危険度の情報量は何ビットか。ただし、台風の発生の確率は一様に分布しているとする。

8. ある都市のある日の天気予報が、晴れ 45%、曇 35%、雨 12%、雪 8% のとき、エントロピー H を求めよ。

9. 「いろは」48 文字の生起確率が全て等しいと仮定した時のエントロピーを求めよ。

10. コイントスにおいて、コインの表が出る確率を p とする。このとき、コイントス

におけるエントロピーを求めよ。そして、エントロピーが最大となる p の値を求めよ。

11. X を実際の天気 { 晴, 雨 }, Y を天気予報 { 晴, 雨 } とする。このとき, 同時確率 $p(X, Y)$ は次の表で与えられる。このときの、結合エントロピー $H(X, Y)$ 、エントロピー $H(X)$ 、条件付きエントロピー $H(X|Y)$ 、相互情報量 $I(A, B)$ を求めよ。
(15 点)

	晴れ	雨
予報が晴れ	$p(X_1, Y_1) = 0.6$	$p(X_2, Y_1) = 0.05$
予報が雨	$p(X_1, Y_2) = 0.1$	$p(X_2, Y_2) = 0.25$

12. 2 つの理想的なサイコロをランダムに降った時に、一方のサイコロの目の確率変数を X 、他方のサイコロの目の確率変数を Y とする。
(a) $H(X)$ を求めよ。
(b) $H(X + Y)$ を求めよ。
(c) $H(X|X + Y)$ を求めよ。
(d) $I(X, X + Y)$ を求めよ。
13. 2 人の野球解説者 A と B が、ある球団の勝つ確率をそれぞれ 8 割、6 割と予想した。もし、真の勝つ確率が 7 割だった場合どちらより正しい予想だといえるか。カルバック-ライブラーダイバージェンスを基準に考えよ。
14. 事象系 A と事象系 B があるとき、結合エントロピー $H(A, B)$ は、 $H(A, B) = H(A) + H(B|A)$ となることを示せ。
15. 事象系 A と事象系 B が互いに独立であるとき条件付きエントロピー $H(A|B)$ を求めよ。(15 点)
16. アルファベット $A = 1, 2, \dots, N$ を取り得る 2 つの確率変数 X, Y が存在する。 $X = x_i$ である確率は、 $p(x_i)$ と表す。以下の問いに答えよ。
(a) 確率分布 $P(X)$ および $P(Y|X)$ を用い $P(X, Y)$ を表わせ。
(b) エントロピー $H(X)$ を $p(x_i)$ を用いて表せ。
(c) 条件付きエントロピー $H(X|Y)$ を $p(y_j)$ および $p(x_i|y_j)$ で表わせ。
(d) 相互情報量 $I(X, Y)$ は

$$I(X, Y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \quad (1)$$

で表される。この定義式から $I(X, Y) = H(X) - H(X|Y)$ を導け。

17. 互いに背反な事象 a_1, a_2, \dots, a_M を確率 $P(a_i)$ ($i = 1, 2, \dots, M$) で発生する確率試行 X と、互いに背反な事象 b_1, b_2, \dots, b_N を確率 $P(b_j)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) で発生する確率試行 Y があるとする。この時、次の問に答えよ。(名古屋工大 H26 編入)
(a) エントロピー $H(X)$ を $P(a_i)$ を使って表せ。
(b) 条件付きエントロピー $H(X|Y)$ を $P(a_i, b_j), P(a_i|b_j)$ を使って表せ。
(c) 相互情報量 $I(X, Y)$ を $H(X)$ と $H(X|Y)$ を用いて表せ。