情報理論 2017 年度レポート課題 1

10 問以上問題を解き、2017/06/15 の講義終了時に提出する。

1. ビデオが映らなくなった事象を B、その原因として、
   - A1: ビデオの電子回路の故障 (発生確率 65%)
   - A2: モータの故障 (発生確率 25%)
   - A3: データの破損 (発生確率 10%)

   とする。このとき、条件付き確率を
   - $P(B|A1) = 30\%$
   - $P(B|A2) = 60\%$
   - $P(B|A3) = 10\%$

   とする。ベイズの定理を用いて 3 つの事後確率を求めよ。
2. ポケットにお金がないという事象 B、その原因として、
   A_1: 電車内でスリにあった
   A_2: ポケットが破れていた
   A_3: 家を出るとき忘れた
   なる 3 つが考えられるとする。各原因の事前確率を、$P(A_1) = 0.25, P(A_2) = 0.05, P(A_3) = 0.7$ とし、条件付き確率を、$P(B|A_1) = 0.35, p(B|A_2) = 0.15, P(B|A_3) = 0.5$ とするとき、事後確率 $P(A_1|B), p(A_2|B), P(A_3|B)$ を求めよ。
3. 分散を $V(X)$、期待値を $E(X)$ とするとき、$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ であることを示せ。ただし、$V(X) = E((X - E(X))^2)$ とする。
4. X と Y が互いに独立な場合、次の式が成り立つことを示せ。
   - $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
   - $E(XY) = E(X)E(Y)$
   - $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
5. 2 個の理想的なサイコロをふった場合、その目の和が 7 であった。しかし、後日、その時のサイコロの目が何であったか忘れてしまった。この場合、失われた情報量は何ビットか。(10 点)
6. ジョーカーを除くトランプ５２枚カードを引くとき
   （a）スペードの A であった時に得られる情報量を求めよ。
   （b）スペードであることのみ知った時に得られる情報量を求めよ。
   （c）A であることのみ知った時に得られる情報量を求めよ。
   （d）b と c で求めた情報量の和が a と一致することを確かめよ。
7. 台風が来るのは 1 年に１５日、満潮は 1 日に 2 時間とする。このとき、台風が来てかつ満潮という危険度の情報量は何ビットか。ただし、台風の発生の確率は一様に分布しているとする。
8. ある都市のある日の天気予報が、晴れ 45%、曇 35%、雨 12%、雪 8% のとき、エントロピー H を求めよ。
9. 「いろは」48 文字の生起確率が全て等しいと仮定した時のエントロピーを求めよ。
10. コイントスにおいて、コインの表が出る確率を p とする。このとき、コイントス

におけるエントロピーを求めよ。そして、エントロピーが最大となる p の値を求めよ。

11. X を実際の天気 { 晴, 雨 }、Y を天気予報 { 晴, 雨 } とする。このとき, 同時確率 $p(X,Y)$ は次の表で与えられる。このときの、結合エントロピー $H(X,Y)$、エントロピー $H(X)$、条件付きエントロピー $H(X|Y)$、相互情報量 $I(A,B)$ を求めよ。(15 点)

	晴れ	雨
予報が晴れ	$p(X_1,Y_1)=0.6$	$p(X_2,Y_1)=0.05$
予報が雨	$p(X_1,Y_2)=0.1$	$p(X_2,Y_2)=0.25$

12. 2 つの理想的なサイコロをランダムに降った時に、一方のサイコロの目の確率変数を X、他方のサイコロの目の確率変数を Y とする。
    (a) $H(X)$ を求めよ。
    (b) $H(X+Y)$ を求めよ。
    (c) $H(X|X+Y)$ を求めよ。
    (d) $I(X,X+Y)$ を求めよ。
13. 2 人の野球解説者 A と B が、ある球団の勝つ確率をそれぞれ 8 割、6 割と予想した。もし、真の勝つ確率が 7 割だった場合どちららより正しい予想だといえるか。カルバック–ライブラーダイバージェンスを基準に考えよ。
14. 事象系 A と事象系 B があるとき、結合エントロピー $H(A,B)$ は、$H(A,B) = H(A)+H(B|A)$ となることを示せ。
15. 事象系 A と事象系 B が互いに独立であるとき条件付きエントロピー $H(A|B)$ を求めよ。
16. アルファベット $A = 1,2,...,N$ を取り得る 2 つの確率変数 X,Y が存在する。$X = x_i$ である確率は、$p(x_i)$ と表す。以下の問いに答えよ。(名工大 H27 編入)
    (a) 確率分布 $P(X)$ および $P(Y|X)$ を用い $P(X,Y)$ を表わせ。
    (b) エントロピー $H(X)$ を $p(x_i)$ を用いて表せ。
    (c) 条件付きエントロピー $H(X|Y)$ を $p(y_j)$ および $p(x_i|y_j)$ で表わせ。
    (d) 相互情報量 $I(X,Y)$ は

$$I(X,Y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0} p(x_i,y_j)\log\frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \tag{1}$$

    で表される。この定義式から $I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$ を導け。
17. 互いに背反な事象 $a_1,a_2,...,a_M$ を確率 $P(a_i)(i = 1,2,...,M)$ で発生する確率試行 X と、互いに背反な事象 $b_1,b_2,...,b_N$ を確率 $P(b_j)(j = 1,2,...,N)$ で発生する確率試行 Y があるとする。この時、次の問に答えよ。(名工大 H26 編入)
    (a) エントロピー $H(X)$ を $P(a_i)$ を使って表せ。
    (b) 条件付きエントロピー $H(X|Y)$ を $P(a_i,b_j),P(a_i|b_j)$ を使って表せ。
    (c) 相互情報量 $I(X,Y)$ を $H(X)$ と $H(X|Y)$ を用いて表せ。
18. A および B のエントロピーをそれぞれ $H(A),H(B)$ とするとき, 以下の問に答え

よ.(山形大院平成 25 年)

（a）エントロピー $H(A)$ と条件付きエントロピー $H(A|B)$ の差 $H(A) - H(A|B)$ を何と呼ぶか答えよ.

（b）次の式の空欄 (a), (b) を埋めよ.

$$H(A) - H(A|B) = H(B) - (a) \tag{2}$$
$$= H(A) + H(B) - (b) \tag{3}$$

19. 45 名からなるクラスがあるとする. そのうち 25 名が男子で 20 名が女子である. 男子の中で 20 名, 女子の中で 10 名がスポーツをやっている. 以下の問に答えよ.

（a）ある生徒の性別を知ることによって得られる平均情報量 (エントロピー) を答えよ.

（b）ある生徒のスポーツをやっているかいないかを知ることによって得られる平均情報量 (エントロピー) を答えよ.

（c）性別とスポーツをやっているかいないかを同時に知ることによって得られる平均情報量 (エントロピー) を答えよ.

（d）スポーツをやっているかいないかを知ることによって性別について得られる相互情報量を答えよ.

（e）性別がわかっているという条件のもとに, スポーツをやっているかいないかを知る事によって得られる条件付き情報量 (エントロピー) を答えよ.

20. 雑音中より信号を検出する装置 A と B がある. 実際に信号が存在する場合を x_1, 存在しない場合を x_2, 装置によって存在すると判定される場合を y_1, 存在しないと判定される場合を y_2, 測定不能を y_3 とする. それぞれの組み合わせ結合確率は下の表に示されている. このとき, どちらの装置のほうが優れているといえるか.

表 1　装置 A

X \ Y	y_1	y_2
x_1	0.4	0.1
x_2	0.1	0.4

表 2　装置 B

X \ Y	y_1	y_2	y_3
x_1	0.35	0.05	0.1
x_2	0.05	0.35	0.1