情報理論08

藤田 一寿

津山工業高等専門学校情報工学科 講師
電気通信大学先進理工学科 協力研究員

ver. 20150721

（単純）マルコフ情報源

時刻iにおける出力文字Xiが発生する確率が、一つ前の文字X_{i-1}にだけ依存する情報源を(単純)マルコフ情報源と言う。文字X_{i-1}の生起確率$P(X_{i-1})$は

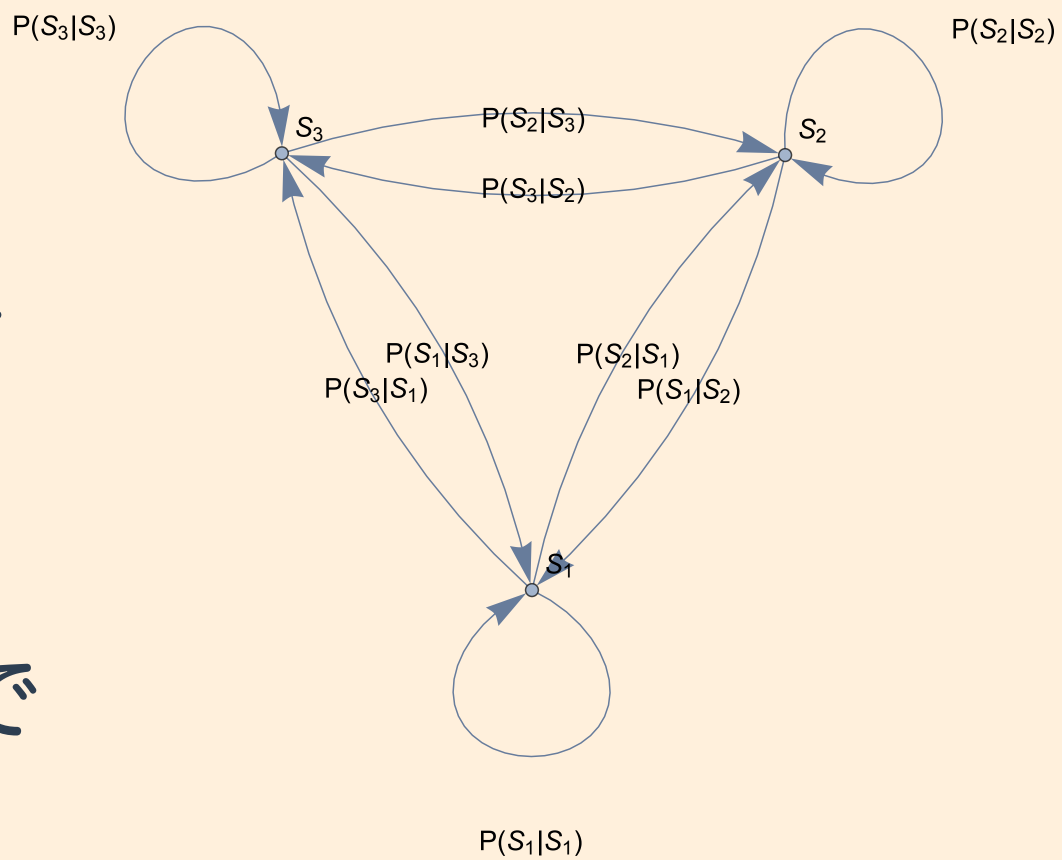
$$P(X_i) = P(X_i|X_{i-1})$$

となる。よって、文字列X^Nの同時確率$P(X^N)$は

$$\begin{aligned} P(X^N) &= P(X_1, X_2, ..., X_{N-1}, X_N) \\ &= P(X_N|X_{N-1})P(X_{N-1}|X_{N-2})...P(X_2|X_1)P(X_1) \end{aligned}$$

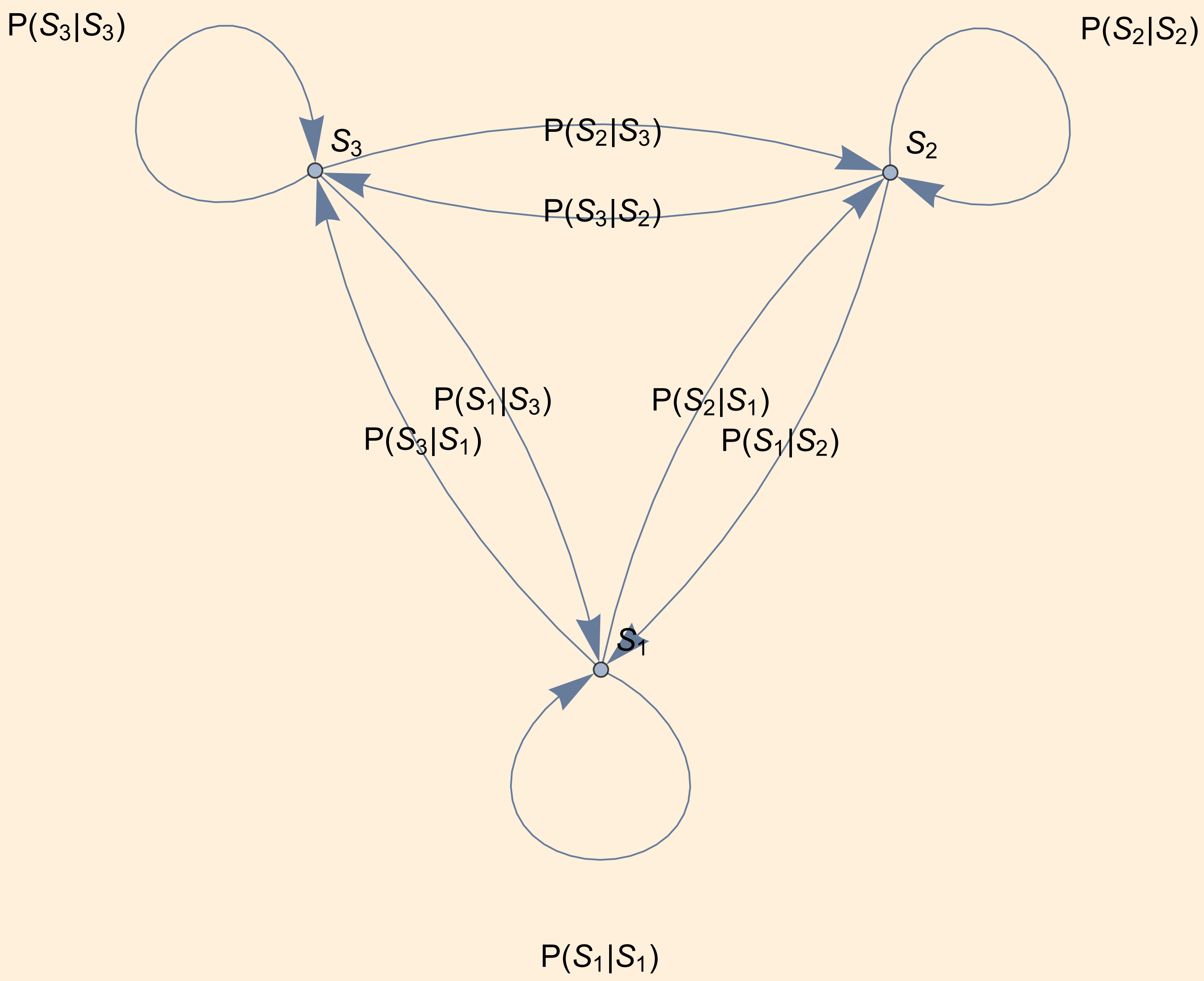
マルコフ情報源

- 内部状態をいくつか持つ
  - 内部状態をS1, S2,…,Snと表す
- 状態は確率的に変わる
- 状態S1からS2に変わるとき文字が発生する
- 状態の移り変わりを状態遷移図で表す

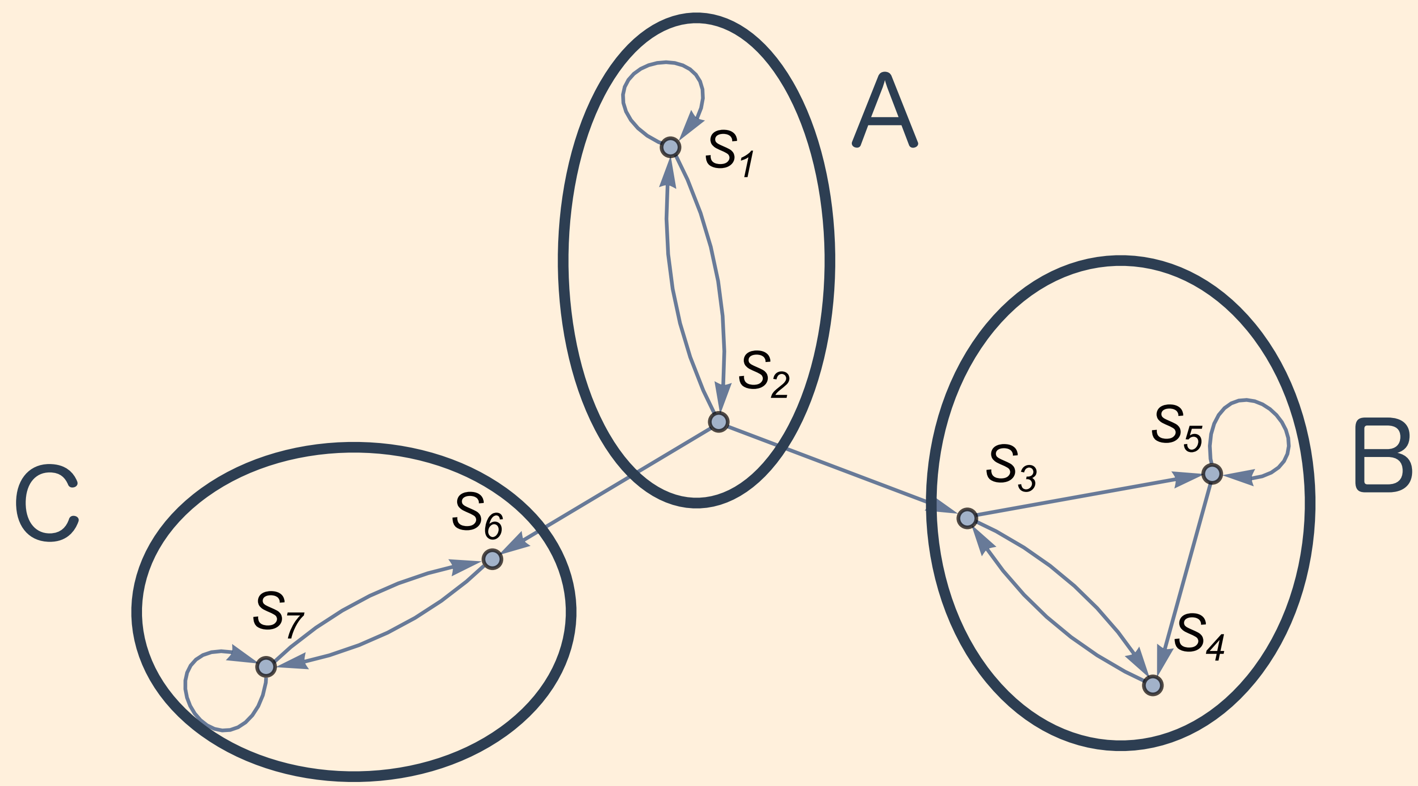


マルコフ連鎖

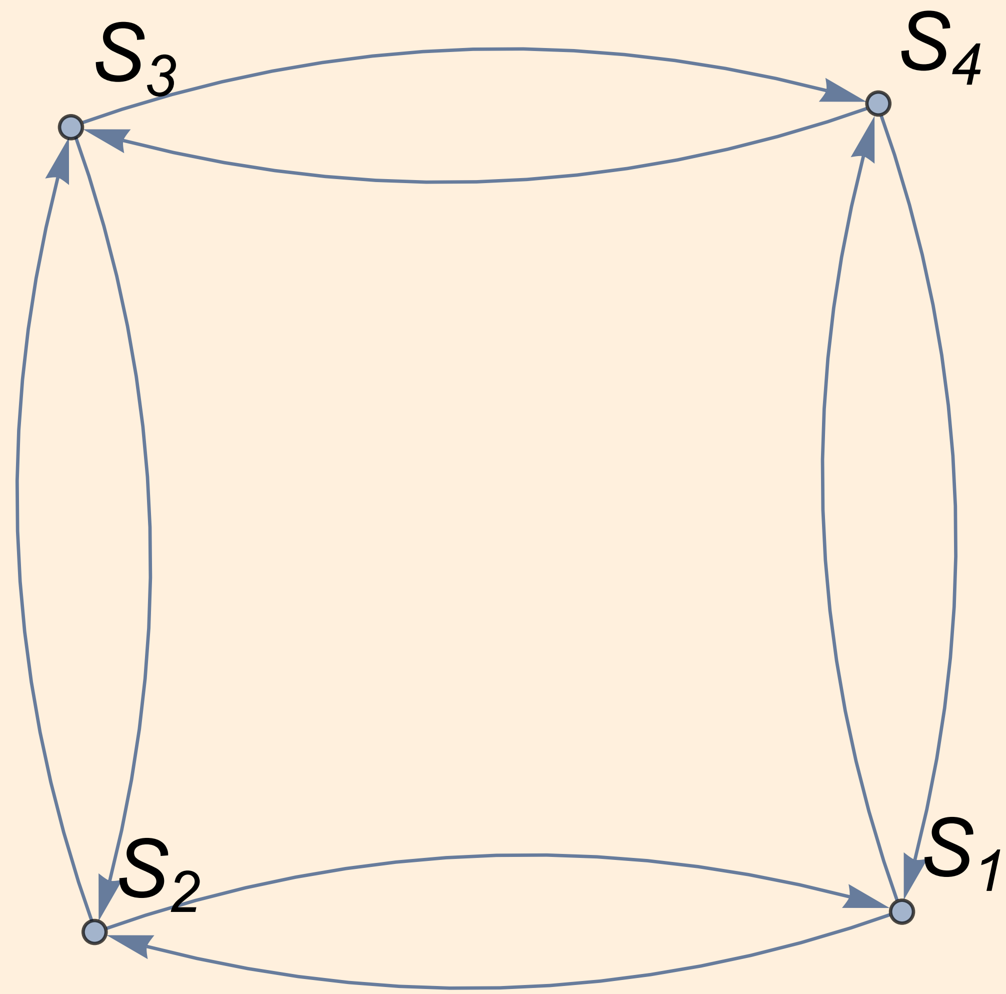
現在の状態に依存して、確率的に状態が遷移していく過程をマルコフ連鎖と呼ぶ。



- 閉部分集合
  - 他の状態に遷移できない部分集合 (BとC)
- 強連結成分
  - 必ず他の状態に遷移できる部分集合 (BとC)
- 消散部分
  - 留まる確率が０いずれになるの状態 (A)
- 分解不可能
  - 全体が一つの強閉部分集合からなる (Bだけ、Cだけなら分離不可能)
  - 今後は分離不可能なマルコフ連鎖を取り扱う



周期的連鎖



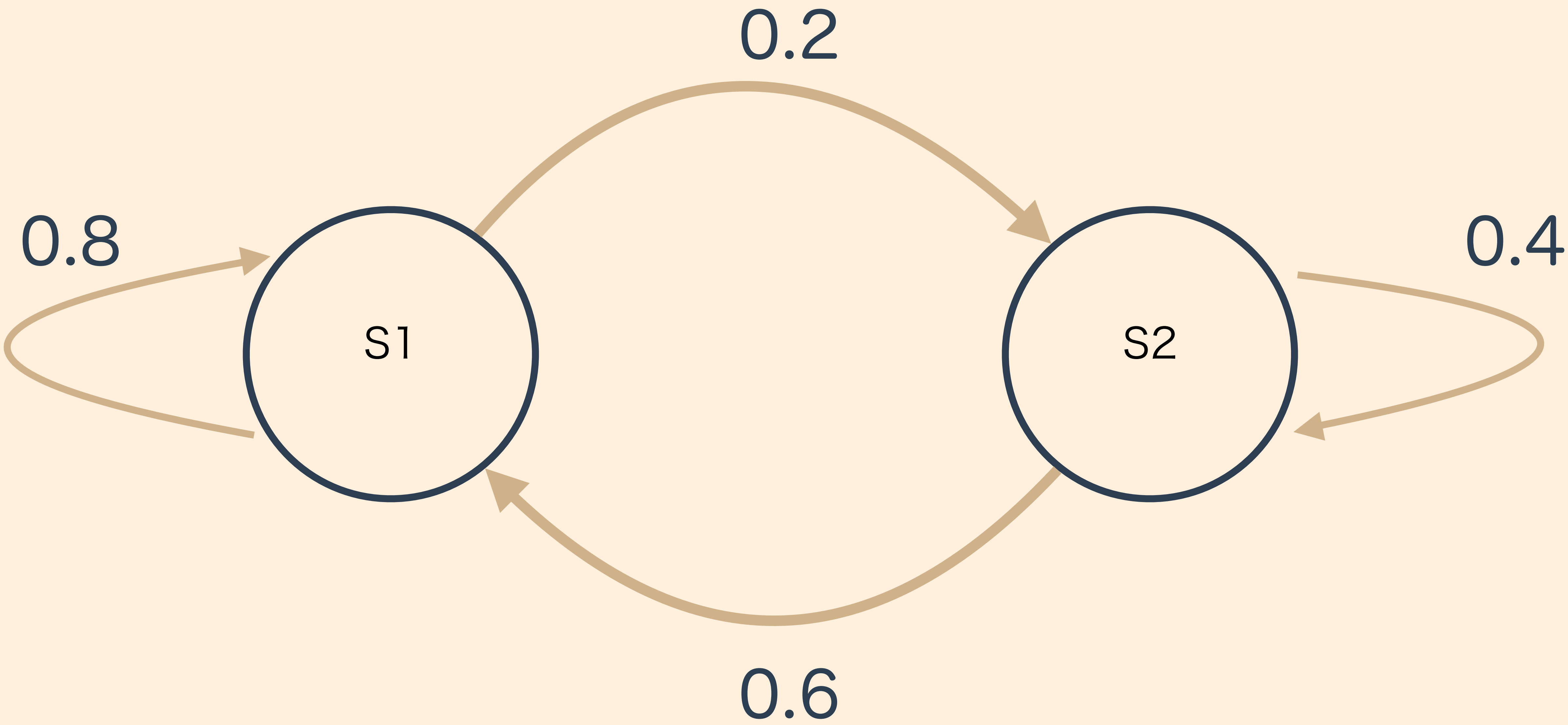
時刻１のとき状態S1であったとすると、
時刻が偶数の時状態はS2かS4であり、偶数の時S1かS2である。

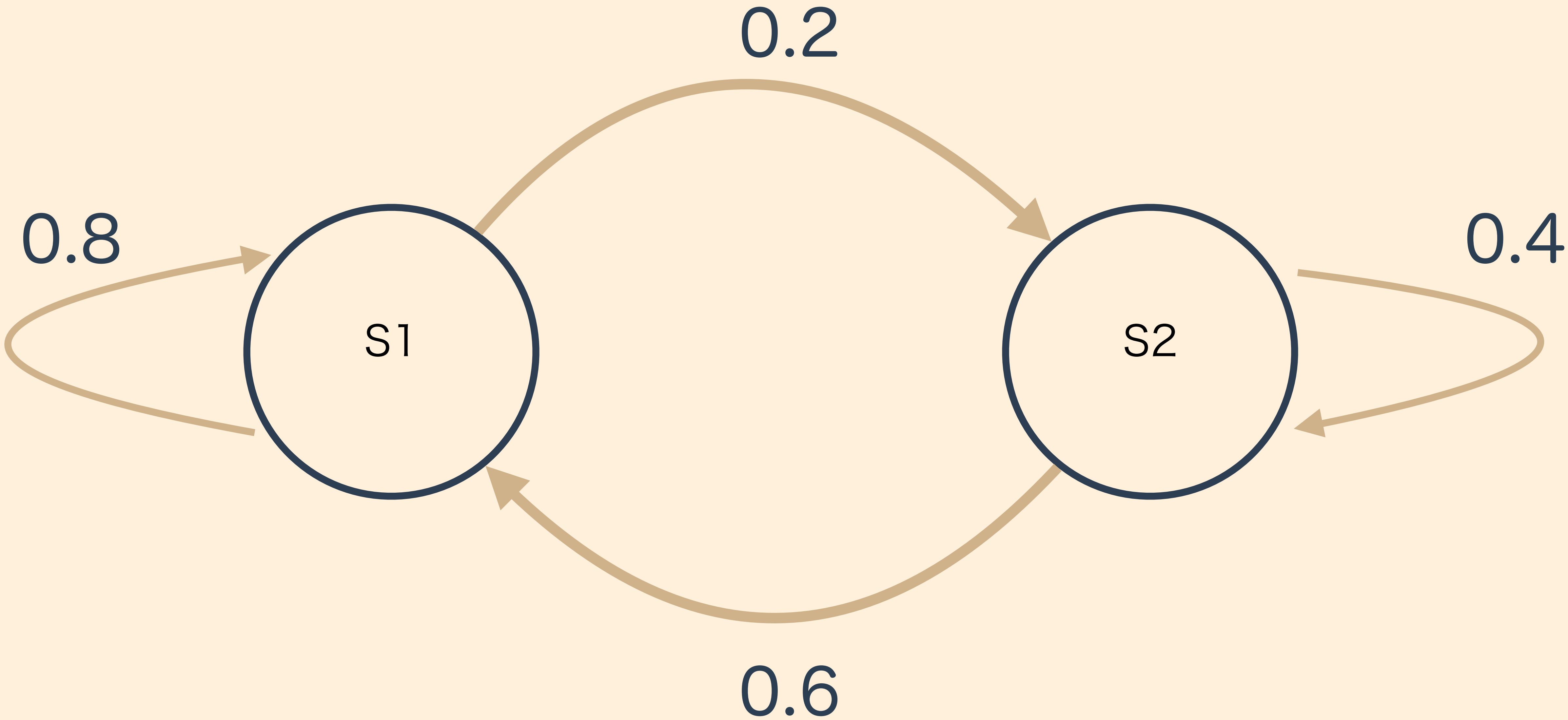
遷移確率行列

- 状態を遷移する確率を表す行列
- Sα からSβ の状態に移動する確率の一覧

$$
P = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} S_1 & \dots & S_\beta & \dots & S_\gamma \end{array} \\
\begin{array}{c} S_1 \\ \vdots \\ S_\alpha \\ \vdots \\ S_\gamma \end{array} &
\begin{pmatrix}
p_{11} & \dots & \dots & \dots & p_{1\gamma} \\
\vdots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & p_{\alpha\beta} & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
p_{\gamma 1} & \dots & \dots & \dots & p_{\gamma\gamma}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

２つの状態の例





$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

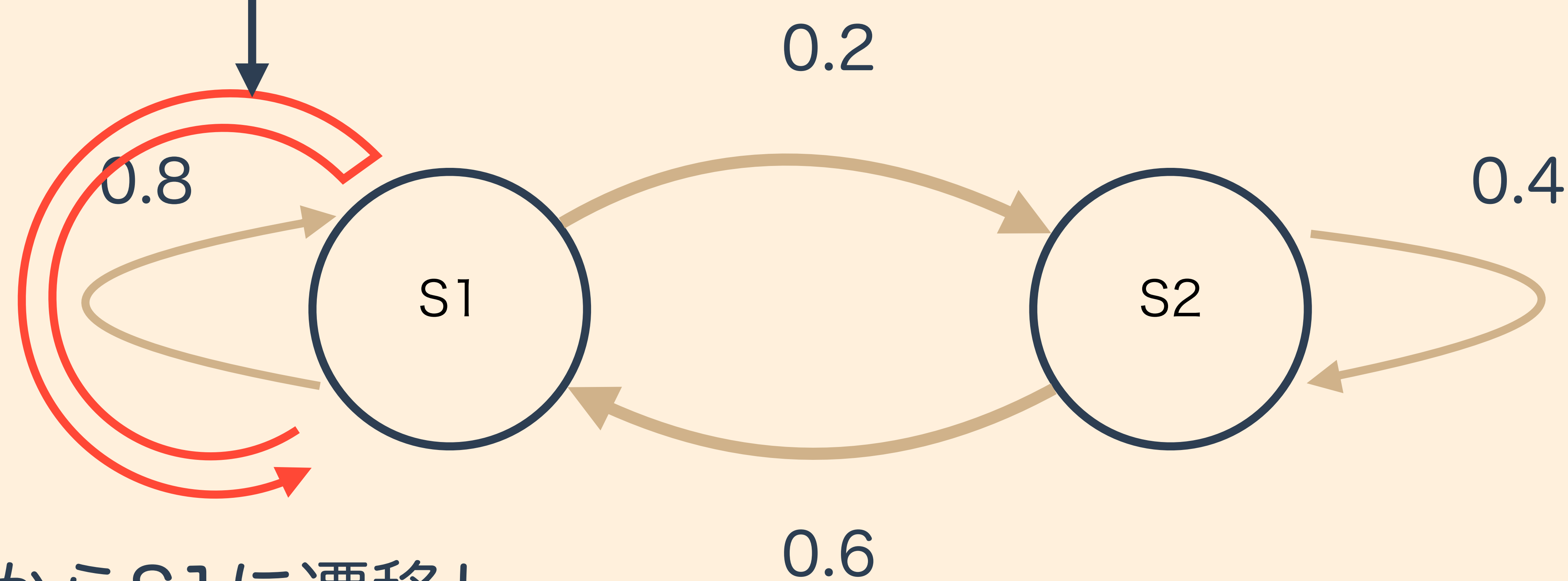
PにPをかけてみる

$$P^2 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}^2 + p_{12}p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} \\ p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22} & p_{22}^2 + p_{12}p_{21} \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{p_{11}^2} + p_{12}p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} \\ p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22} & p_{22}^2 + p_{12}p_{21} \end{pmatrix}$$



S1からS1に遷移し、
さらにS1に遷移する

$$P^2 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{p_{11}^2} + \boxed{p_{12}p_{21}} & \boxed{p_{11}p_{12}} + \boxed{p_{12}p_{22}} \\ p_{11}p_{12} + p_{21}p_{22} & p_{22}^2 + p_{12}p_{21} \end{pmatrix}$$

はじめに	S1	S1	S1	S1
次に	S1	S2	S1	S2
その次に	S1	S1	S2	S2

無限回遷移するとどうなる？

$$P^\infty = \lim_{n\to\infty} P^n$$ が存在する。

$$P^\infty = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^\mathrm{T} \\ \boldsymbol{u}^\mathrm{T} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}^\mathrm{T} \end{bmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}$$

P∞は同一の列ベクトルuから成る。

uは次の条件を満たし、一意に決まる。

$$\boldsymbol{u}^\mathrm{T} P = \boldsymbol{u}^\mathrm{T}$$ uを定常確率(分布)という

$$\sum u_i = 1, u_i \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

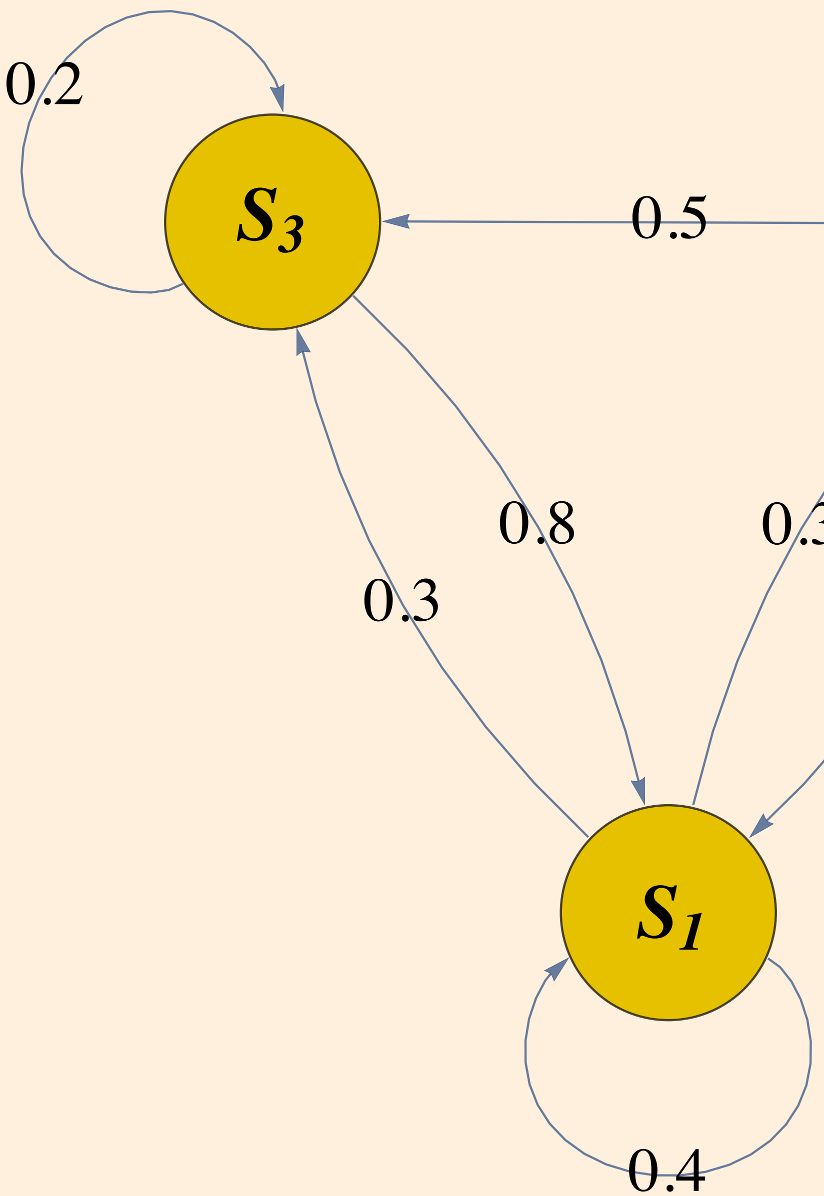
$$\begin{aligned} 0.8u_1 + 0.6u_2 &= u_1 \\ 0.2u_1 + 0.4u_2 &= u_2 \end{aligned}$$

$$u_1 + u_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

次のマルコフ連鎖の定常確率を求めよ

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array}$$



マルコフ連鎖のエントロピー

現在文字Xαである場合のエントロピー

$$H(X|X_\alpha) = -\sum_i q_{i\alpha} \log q_{i\alpha}$$

文字が生成される定常確率をuαとすると

$$H = \sum_\alpha u_\alpha H(X|X_\alpha)$$

２重マルコフ情報源

次に生成する文字の生起確率が以前に生成された２つの文字に依存する。

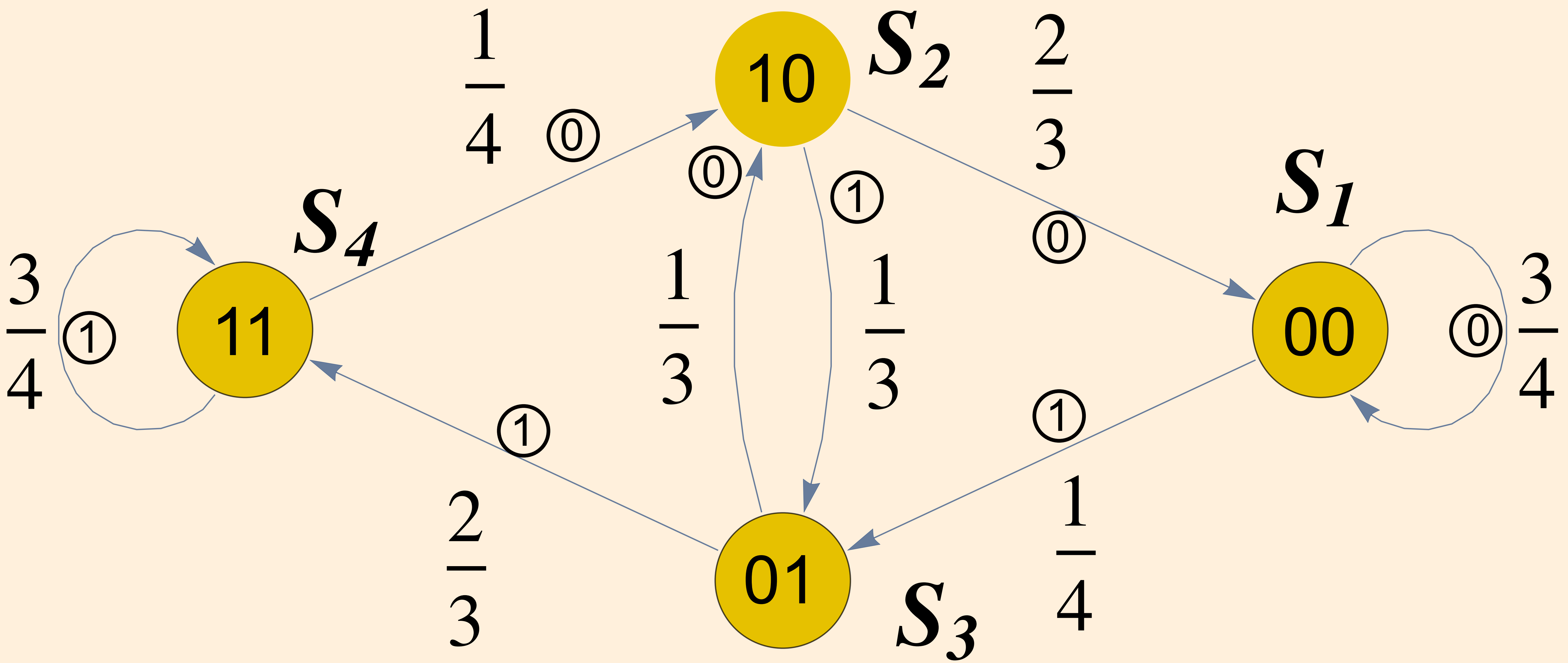
以前に発生した２文字をx1x2とすると、次に発生する文字x3の生成確率は

$$p(x_3|x_1x_2)$$

とかける。

$$p(0|00) = \frac{3}{4}, p(1|00) = \frac{1}{4} \qquad p(0|10) = \frac{2}{3}, p(1|10) = \frac{1}{3}$$

$$p(0|01) = \frac{1}{3}, p(1|01) = \frac{2}{3} \qquad p(0|11) = \frac{1}{4}, p(1|11) = \frac{3}{4}$$



$$
P = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} P = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}
$$

$$
u = (\frac{8}{22}, \frac{3}{22}, \frac{3}{22}, \frac{8}{22})^{\mathrm{T}}
$$

次に出てくる文字のエントロピー

- 情報源が状態S1, S4にあるとき、次に出てくる文字のエントロピーは

$$
\begin{aligned}
H(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) &= -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\log\frac{3}{4} \\
&= 0.811
\end{aligned}
$$

- 情報源が状態S2, S3にあるとき、次に出てくる文字のエントロピーは

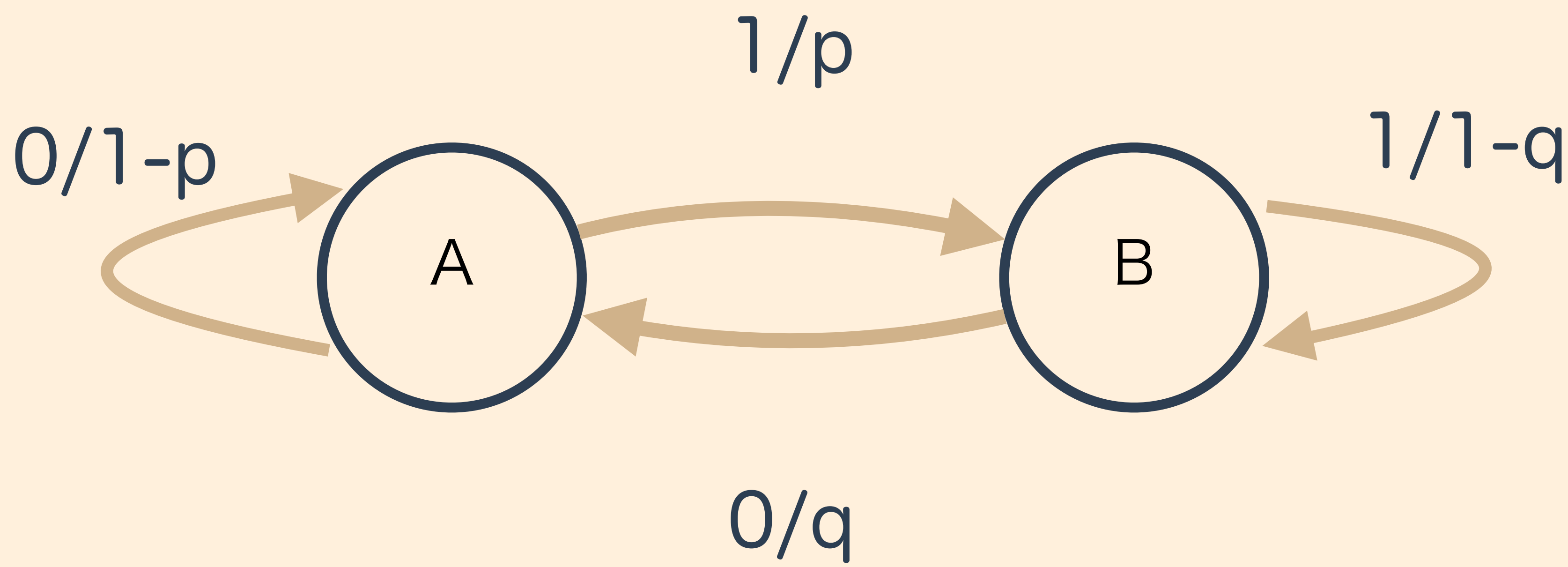
$$
\begin{aligned}
H(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) &= -\frac{1}{3}\log\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log\frac{2}{3} \\
&= 0.918
\end{aligned}
$$

情報源のエントロピー

- 情報源のエントロピーは、次に文字が出てくるエントロピーの期待値であるので、

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{3}{22} \times 0.92 \times 2 + \frac{8}{22} \times 0.81 \times 2 \\
&= 0.84
\end{aligned}
$$

演習問題2.2



- 2元マルコフ情報源について次の問に答えよ

1.定常確率p(A)=p(0)とp(B)=p(1)の値を求めよ。

2.このマルコフ情報源のエントロピーを求めよ。