情報理論 2017 年度レポート課題 2

8 問以上問題を解き，2017/08/03 に提出する．

1. 図 1 のマルコフ情報源について，定常確率とエントロピーを求めよ．

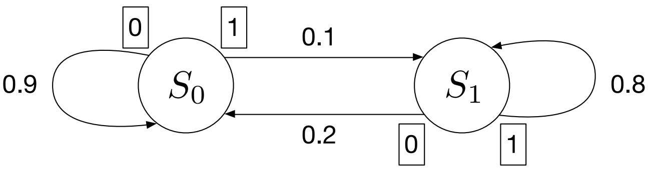

図 1

2. 次の問に答えよ．
   (a) 図 2 のマルコフ情報源について，定常確率とエントロピーを求めよ．
   (b) 文字 0，1 を出す情報源が持つ最大のエントロピーを答えよ．
   (c) 図 2 のマルコフ情報源の冗長度を求めよ．

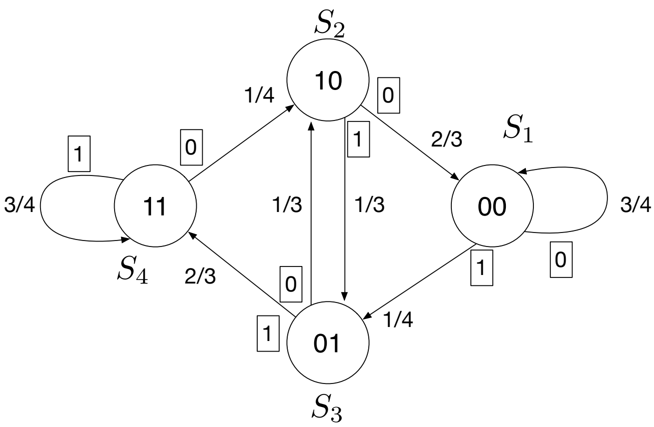

図 2

3. B1 と B2 の 2 つの信号を通す通信路を考える．B1 の長さは 1 秒，B2 の長さは 2 秒だとする．この通信路の容量を求めよ．また，情報を最大速度で伝送するには信号の出現確率をどうすればよいか．
4. 1 秒ごとに 0 と 1 がそれぞれ 3/4，1/4 で発生する 2 元対称通信路において，誤り率 p が 1/8 の時の情報伝送速度を求めよ．

5. 1 秒毎に 1 文字送信するときの 2 元消失通信路の情報伝送速度 R が $(1-p)H(X)$ であることを示せ．ただし，X は送信信号とする．

6. 図 3 の通信路の通信路行列 P を答え，通信路容量 C を計算せよ．ただし，送信信号は 1 秒ごとに 1 文字に発生し，信号は 1/2 の確率で変わるとする．

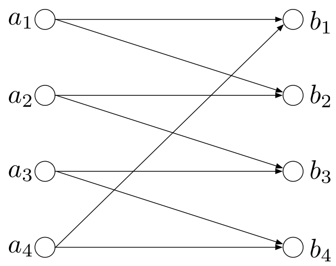

図 3

7. 情報源アルファベットが {a,b,c,d,e} である定常無記憶情報源 S が与えられている．情報源 S からの出力を表す確率変数を X とするとき，この情報源からの出力をアルファベット {0,1} からなる符号による符号化する．この時次の問に答えよ．(名古屋工大 H27 編入改)

(a) 各情報源アルファベットに対し表 1 のように符号語を割り当てた．この時 (あ) に入るアルファベット c に割り当てられるべき最短かつ適切な 2 元系列を示せ．系列の決定した時に用いた木を必ず記載せよ．

アルファベット	符号語
a	0
b	10
c	(あ)
d	1110
e	11111

表 1

(b) (a) で定めた符号割り当てがクラフトの不等式を満たすことを示せ．

(c) $P(a)=1/2, P(b)=1/4, P(c)=1/8, P(e)=1/16$ であるとき，平均符号長 L を求めよ．

(d) (c) のとき (a) の符号は最適ではない．最適な符号割り当てを示せ．そして，

それをどのように決めたか説明せよ．

8. 0，1 の 2 種類の記号からなるアルファベットを持つ単純マルコフ情報源を考える．記号 0 が発生した状態を S_0，記号 1 が発生した状態を $S1$ とし，記号の発生に関する条件付き確率が $P(0 \mid 0) = 0.25, P(1 \mid 0) = 0.75, P(0 \mid 1) = P(1 \mid 1) = 0.5$ であるとする．ここで $P(ll0)$ は，記号 0 が発生した次に記号 1 が発生する確率を表す．この とき，以下の (a) から (c) の問いについて答えよ．答えだけではなく導出過程も示すこと．また，計算においては対数に関してもっとも簡単な形 (例:$\log_2 6$ は $\log_2 3 + 1$ に変形すること．(名古屋工大 H26 編入)
   (a) このマルコフ情報源の状態遷移図を描け．
   (b) 各状態の定常確率を求めよ．
   (c) このマルコフ情報源の 1 記号当りのエントロピーを計算せよ．

9. ある情報源から 5 種類の通報 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ が独立に生起し，それらの生起確率が $P(\mu_1) = 0.3, P(\mu_2) = 0.13, P(\mu_3) = 0.22, P(\mu_4 = 0.15), P(\mu_5) = 0.2$ であるとき，次の (a) から (d) の問いについて答えよ．(名古屋工大 H26 編入)
   (a) これらの通報を 0,1 の二元符号によりハフマン符号化せよ．
   (b) これらの通報を 0,1,2 の三元符号によりハフマン符号化せよ．
   (c) (a)，(b) で作成したそれぞれのハフマン符号がクラフトの不等式を満足することを示せ．
   (d) (a)，(b) で作成したそれぞれのハフマン符号の平均符号長を求めよ．

10. 以下の分布により定まる定常マルコフ情報源を考える．ここで，確率 $P(i \mid j)$ は $P(X_t = i \mid X_{t-1} = j)$ を表し，$X \in \{0, 1, 2\}$ は時刻 t における出力を表す確率変数である．ただし，記述のない確率は 0 とする．

$$p(0 \mid 0) = \frac{1}{2}, p(1 \mid 0) = \frac{1}{2}, \tag{1}$$

$$p(1 \mid 1) = \frac{2}{3}, p(2 \mid 1) = \frac{1}{3}, \tag{2}$$

$$p(2 \mid 2) = \frac{3}{4}, p(0 \mid 2) = \frac{1}{4}, \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

以下の問に答えよ．(名古屋工大 H27 編入)
   (a) 上記のマルコフ情報源の状態遷移図を書け．
   (b) 上記のマルコフ情報源における定常確率分布 $P(X_t)$ を求めよ．
   (c) 1 信号あたりのエントロピー $H(X_t \mid X_{t-1})$ を求めよ．

11. 送信信号，受信信号を共に 0,1 とする定常無記憶通信路を考える．送信記号および受信記号を表す確率変数をそれぞれ $X, Y \in 0, 1$ とし，その遷移確率 $P(Y = i \mid X = j), i, j, \in 0, 1$ は下図によって与えられていることとする．また，送信信号の生起確率 (入力分布) を $P(X = 0) = a, P(X = 1) = 1 - a$ とする． 以下の問に答えよ．(名古屋工大 H27 編入)

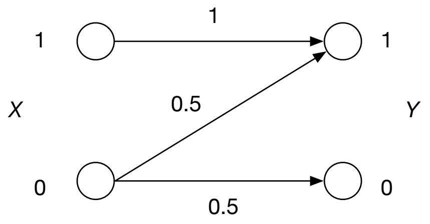

図 4　問 1

(a) エントロピー $H(Y)$ を a を用い表せ．

(b) 条件付きエントロピー $H(Y \mid X)$ を a を用い表せ．

(c) 相互情報量 $I(X, Y)$ を最大にする a を求めよ．ただし，$I(X, Y)$ は $a(0 \leq a \leq 1)$ に関して上に凸であることを用いて良い．

(d) この通信路の通信路容量を示せ．

12. 記号を 0，1 を発生する 2 重マルコフ情報源の状態遷移図が図のように与えられているとする．この時次の問に答えよ．(東京農工院 H26)

(a) 各状態の定常確率 $P(00), P(01), P(10), P(11)$ を求めよ．

(b) 情報源のエントロピーを求めよ．

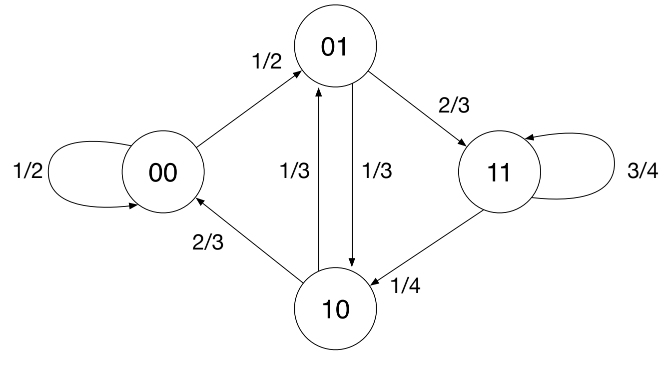

図 5

13. 'a', 'b', 'c', 'd' の 4 種類の文字 (X) を生成する情報源がある．各文字の正規確率をそれぞれ p_a, p_b, p_c, p_d とした時，以下の問に答えよ．(山形大院 H23)

(a) 4 種類の文字の生起確率が不明であり，それらを等確率であると仮定した場合の情報源のエントロピー $H_1(X)$ を求めよ．

(b) 表に示すように 4 種類の文字の生起確率が与えられたとする．このときの情報源のエントロピー $H_2(X)$ を求めよ．

(c) (1)，(2) により 4 種類の文字の生起確率を知ることにより得られる情報量 I を求めよ．

(d) 次に，表に示す 3 つの符号 C_1, C_2, C_3 により符号化を行う．これらの符号を用いた場合のそれぞれの平均符号長 L_1, L_2, L_3 を求め，符号効率が良い順に並べよ．(10 点)

(e) この情報源のハフマン符号を求めよ．また，この符号を用いた時の平均符号長 L_H を求めよ．

文字	生起確率	符号 C_1	符号 C_2	符号 C_3
'a'	1/8	00	110	0
'b'	1/4	01	10	10
'c'	1/2	10	0	110
'd'	1/8	11	1110	1110

14. 情報源のアルファベットを $S = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$，符号アルファベットを $D = 0, 1$ とする．S 上の確率変数 X が従う確率分布 P_X，および可変長符号 C が以下のように与えられている時，以下の問に答えよ．(名工大編入 H28)

x	α	β	γ	δ
$P_X(x)$	1/2	1/4	1/8	1/8
$C(x)$	0	10	1110	110

(a) 符号系列 011101110010110 を復号し，情報源アルファベットを使用して書け．

(b) X のエントロピー $H(X)$ を求めよ．

(c) 上記の表に基づいて平均符号長 $L(C)$ を求めよ．

(d) 上記の表の符号は平均符号長が最小ではない．情報源アルファベット S の要

素 γ に割り振った符号語 $C(\gamma)$ について，この符号系を瞬時復号可能かつ最小にするように変更したものを示せ.

15. 定常無記憶通信路に対し，コイントスを行って発生した系列を入力する．コインの表を 1，裏を 0 で示し，コインの表と裏はそれぞれ $p(0 \geq 1)$ と $1-p$ の確率にて発生するものとする．入力が 0 の時も 1 の時もこの通信路において確率 ε で反転誤り (入力が 1 の時出力が 0，入力が 0 の時出力が 1 となること) が発生するものとする．通信路の通信シンボルを示す確率変数を X，通信路出力の確率変数を Y とする．このとき次の問に答えよ．(名工大編入 H28)
   (a) 通信路出力の確率 $P_Y(0), P_Y(1)$ を p，e を用いて示せ.
   (b) コインを 1 回だけふった結果を通信路に入力した時，通信路入出力の相互情報量 $I(X, Y)$ をお求めよ.
   (c) (2) と同じ条件における通信路の通信路容量 C，および C を達成する p を求めよ.
   (d) コインを n 回降った結果を通信路に入力した時の，通信路の入出力間の相互情報量 $I(X^n, Y^n)$ を求めよ.
16. 送信確率がそれぞれ $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/16$ である 5 種類の送信記号 a, b, c, d, e を送信する情報源 S があるとし，この 5 種類の送信機号をハフマン符号化で符号化することを考える．このとき，以下の問に答えよ．ただし，符号化は 0 と 1 の 2 元符号化であるとする．(山形大院 H28)
   (a) 5 種類の送信記号 a, b, c, d, e をハフマン符号化する場合の，ハフマン符号木を書け.
   (b) (1) で描いたハフマン符号木を用いて 5 種類の送信記号をそれぞれ符号化せよ.
   (c) (2) の符号が結果の符号語がクラフトの不等式を満足することを示せ.
   (d) 5 種類の送信記号 a, b, c, d, e をハフマン符号化した時の平均符号長を求めよ.
17. 図 7 に表わされるような，送信信号が $X = \{0, 1, 2\}$，受信信号が $Y = \{0, 1, 2\}$ であり，確率 p で隣の信号と誤って受信される通信路がある．この通信路の $X = \{0, 1, 2\}$ の生起確率をそれぞれ $\{\alpha, \alpha, (1-2\alpha)\}$ とするとき，以下の問に答えよ．(山形大院 H27)
   (a) この通信路の通信路行列 T を p を用いて表わせ.
   (b) 受信信号 Y のエントロピー $H(Y)$ を，α と p を用い表わせ.
   (c) X と Y に関する条件付きエントロピー $H(Y \mid X)$ を，必要に応じ α と p を用いて表わせ.
   (d) この通信路の通信路容量 C を p を用いて表わせ.

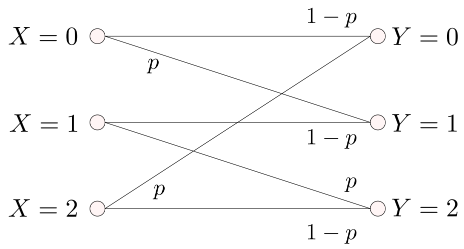

図 6

18. 記号 a, b を送信する単純マルコフ情報源 S があるとし，記号 a, b, c を送信した状態をそれぞれ状態 1，状態 2，状態 3 と番号付けをする．この単純マルコフ情報源の状態遷移図は図 1 のように与えられているとする．情報量の log の底は 2 として解答せよ．(山形大院 H29)
   (a) この単純マルコフ情報源 S における状態 i から状態 j への状態遷移確率を i 行 j 列の成分とする状態遷移確率行列 T を求めよ．
   (b) 各状態 i に滞在する確率 u_i を横ベクトル化した状態遷移確率 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ を考える．(1) で求めた状態遷移確率行列 T と状態確率ベクトル $\boldsymbol{u}$ の成分の値 (定常確率) を求めよ．
   (c) この単純マルコフ情報源 S のエントロピーの値は 1.571 と比べて大きい小さいか答えよ．その理由を述べて答えよ．ただし，$\log_2 3 \simeq 1.585$，$\log_2 5 \simeq 2.322$ とする．

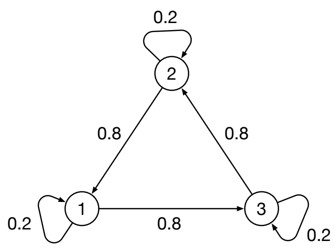

図 7　単純マルコフ情報源 S の状態遷移図．各状態間の→の数字が対応する各状態間の遷移確率を表す．

19. ある通信路を介して送信信号集合 $A = \{a_1, a_2\}$ に属する記号を伝送したところ，

受信機号集合 $B=\{b_1,b_2\}$ に属する記号として受信されたとする．これらの記号に関する結合確率をそれぞれ $P(a_1,b_1)=c$，$P(a_1,b_2)=d$，$P(a_2,b_1)=e$，$P(a_2,b_2)=f$ とおくとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\log_2 3=1.58$，$\log_2 5=2.32$ とする．なお，結合確率は同時確率ともいう．(金沢大院 H28)

(a) $c=3/4$，$d=3/32$，$e=1/32$，$f=1/8$ のとき，エントロピー $H(A)$ を求めよ．

(b) $c=\alpha/2$，$d=\beta/2$，$e=\beta/2$，$f=\alpha/8$ のとき，α と β の間に成り立つ関係式を求めよ．そして，その関係式を用いて，エントロピー $H(A)$ と条件付きエントロピー $H(A\mid B)$ を求めよ．ただし，$H(A\mid B)$ は α のみの式として求めること．

(c) (2) と同じ条件のとき，相互情報量 $I(A,B)$ が最大となる α と β の条件を示せ．

(d) 受信記号集合が $B=A$ となる通信路を介して，発生確率が $P(a_1)=3/4$，$P(a_2)=1/4$ である $A=a_1,a_2$ に属する記号を伝送すると，a_1 を送信したときのみ確率 $1/8$ で誤って a_2 と受信された．送信記号と受信機号を区別するために，$a_1'=a_1$，$a_2'=a_2$ と沖，受信信号集合を $A'=a_1',a_2'$ としたとき，a_2' を受信したときの a_1 の事後確率を求めよ．

20. 情報源アルファベットを $\{a,b,c\}$ とする無記憶情報源 s を考える．また，各アルファベットが出力される確率は，それぞれ $P(a)=0.125, P(b)=0.5, P(c)=0.375$ とする．なお必要ならば $\log_2 3=1.58$ を用いること．(金沢大院 H28)

(a) 情報源 s の 2 元ハフマン符号を構成せよ．また，その時の平均符号長 l を求めよ．

(b) 情報源 s から出力される情報源アルファベット n 個をまとめたものを新しい情報源アルファベットとみなすとき，その情報源を n 次拡大情報源とよび，s^n で表す．$n=2$ のときの n 次拡大情報源について，エントロピー $H(s^2)$ を求め，2 元ハフマン符号を構成し符号木を示せ．また，この時の s の情報源記号 1 つあたりの平均符号長 l' を求めよ．

(c) 一般に，無記憶情報源 S に対して，以下の条件を満足する平均符号長 L を持つ 2 元瞬時符号を構成できることが知られている．なお，$H(S)$ は情報源 S のエントロピーである．

$$H(S)\leq L<H(S)+1 \tag{5}$$

また，n 次拡大情報源 S^n のエントロピー $H(S^n)$ と $H(S)$ の間には，

$$H(S^n) = nH(S) \tag{6}$$

の関係が成り立つ．これらを用いて，シャノンの第 1 基本定理 (情報源符号化定理) について説明せよ．

(d) n 次拡大情報源 S^n について，任意の瞬時符号を構成した際に，情報源記号 1 つ当たりの平均符号長 l' が加減の 5% 以内に収まるための n の条件を求めよ．

21. 毎日の朝食としてパンを食べたか米を食べたかを出力するマルコフ情報源 (出力記号の集合は { パン，米 }) に関する以下の問いに答えよ． (金沢大学 H26)
    (a) 当日の朝食としてパンを食べる確率とコメを食べる確率が，前日の朝食だけに基づいて決定される単純マルコフ情報源 (状態集合は $A = \{$ パン, 米 $\}$) を考える．
        i. 2 連続でパンを食べる遷移確率が 2/3 で，2 連続で米を食べる確率が 1/3 のとき，状態遷移図をかけ．
        ii. 同じ条件で，十分に時間が経過して定常状態に達したときの各状態の確率 (定常確率) を求めよ．
        iii. 同じ条件で，十分に時間が経過して定常状態に達したときのエントロピー $H(A)$ を求めよ．ただし，$\log_2 3 = 1.58$ として，小数点第 3 位を四捨五入した数値を答えること．
    (b) 当日の朝食としてパンを食べる確率とコメを食べる確率が，前日と前々日の朝食だけに基づいて決定される 2 重マルコフ情報源 (状態集合は $B = \{$ パンパン, パン米, 米パン, 米米 $\}$) を考える．
        i. 前日と前々日に同じものを食べたときはかなざる前日とは違うものを食べ，そうでないときは等確率でパンか米を食べるとき，状態遷移図をかけ．ただし，確率 0 の繊維はかかないこと．
        ii. 同じ条件で，十分に時間が経過して定常状態に達したときの各状態の確率を求めよ．
        iii. 同じ条件で，十分に時間が経過して定常状態に達したときのエントロピー $H(B)$ を求めよ．ただし，$\log_2 3 = 1.58$ とし，小数第 3 位を四捨五入した数値を答えること．

22. 情報源アルファベットを {a, b} とする無記憶情報源 S_1 があり，S_1 が情報源記号 $i \in \{\mathrm{a, b}\}$ を出力する確率 $P(i)$ は $P(\mathrm{a}) = p, P(\mathrm{b}) = 1 - p$ で与えられる．また，次の状態遷移図で表される 2 元単純マルコフ情報源 S_2 がある．図中の記号 x/y

は，y の確率で状態が遷移し，遷移によって情報源記号 x が出力されることを表す．このとき，以下の問に答えよ．ただし，解が数値の場合は，四捨五入した小数点 2 桁で答えよ．必要に応じて $\log_2 3 = 1.58$，$\log_2 5 = 2.32$ を用いて良い．(金沢大院 H25)

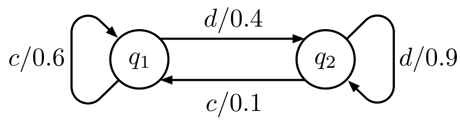

図 8

（a）無記憶情報源とマルコフ情報源の違いを説明し, 具体的な例をそれぞれあげよ．

（b）情報源 S_1 のエントロピー $H(S_1)$ を求めよ．

（c）情報源 S_1 の 2 次の拡大情報源 S_1^2 のエントロピー $H(S_1^2)$ を求めよ．ただし，$p = 0.8$ とする．

（d）上記 (3) の 2 次の拡大情報源 S_1^2 において，aa を 0，ab を 10，ba を 110，bb を 111 と符号化した場合の情報源記号あたりの平均符号長を求めよ．

（e）情報源 S_2 の状態 q_1, q_2 の定常分布 w_1, w_2 をそれぞれ求めよ．

（f）情報源 S_2 のエントロピー $H(S_2)$ を求めよ．

23. 無記憶情報源 $A = \left\{ \begin{matrix} a_1, a_1, \cdots, a_n \\ P(a_1), P(a_1), \cdots, P(a_n) \end{matrix} \right\}$,$B = \left\{ \begin{matrix} b_1, b_1, \cdots, b_n \\ P(b_1), P(b_1), \cdots, P(b_n) \end{matrix} \right\}$ において，$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して情報源記号 a_i の発生確率 $P(a_i)$ が $P(a_i) > 0, \sum_{i=1}^{n} = P(a_i) = 1$ を満たし，$i = 1, 2, \cdots, m$ に対して情報源記号 b_i の発生確率 $P(b_i)$ が $P(b_i) > 0, \sum_{i=1}^{m} = P(b_i) = 1$ を満たす．この時以下の問いに答えよ．

（a）$n < m$ のとき，$i = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して $P(a_i) = P(b_i)$ であり,$i = n, n+1, \cdots, m$ に対して $P(b_i)$ はすべて等しいとする．エントロピー $H(A)$ と $H(B)$ のさ $H(B) - H(A)$ を $P(a_n), m, n$ の式で表せ．

（b）$n = m$ のとき，$-\sigma_{i=1}^{n} P(a_i) \log_2 P(a_i) \leq -\sigma_{i=1}^{n} P(a_i) \log_2 P(b_i)$ が成り立つことを示せ，ただし，$x > 0$ に対し $\ln x \leq x - 1$ が成り立つことを用いてよい．ここで，$\ln x$ は x の自然対数をあらわす．

（c）A に足しする r 元符号を考える．$i = 1, 2, \cdots n$ に対し,$l_i \geq -\log_2 P(a_i)/\log_2 r$ を満たす正の整数 l_i を a_i の符号語の長さとするとき，クラフトの不等式が成立することを示せ．ただし，$r \leq 2$ とする．

（d）$n = 2, P(a_1) = P(a_2) = 1/2$ とする．A の出力を雑音のない通信路 C を介し

て送信すると受信記号集合 $B' = \{b'_1, b'_2, b'_3\}$ の要素そして受信された．この通信路 C において，$i = 1, 2$ と $j = 1, 2, 3$ に対して条件付き確率 $P(b'_j \mid a_i)$ を $P_{ij} = P(b'_j \mid a_i)$ とおく．$p_{11} = 1, p_{22} = p_{23} = 1/2$ であるとき，エントロピー $H(B')$ を求めよ．なお，雑音のない通信路では，受信記号が定まれば，送信記号は一意に定まる．

24. 6 つの情報シンボル $(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)$ とそれぞれの生起確率 $(1/2, 1/4, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16$ が与えられたとき，2 元マルコフ符号化しなさい，さらにその平均符号長を求めるとともに，それが情報源のエントロピーと等しいことを示しなさい．(神戸大院 H26)
25. 2 元対称通信路を与え，その通信路容量を求めなさい．(神戸大院 H26)
26. 情報源記号が $\{0, 1\}$ の単純マルコフ情報源 X がある．記号 x を出力した後，記号 y を出力する確率を $p(y \mid x))$ と書くとき，$p(0 \mid 0) = 0.1, p(1 \mid 0) = 0.9, p(0 \mid 1) = 0.8, p(1 \mid 1) = 0.2$ とする．(神戸大院 H27)
   (a) 記号 0 を出力した後の状態を S_0，記号 1 を出力した後の状態を S_1 として，情報源 X の状態遷移図をかけ．
   (b) 各状態 S_0，S_1 について，その状態を記憶のない情報源と考え，それぞれのエントロピーを求めよ．
   (c) 情報源 X のエントロピーを求めよ．
27. 情報源記号が $\{0,\ 1\}$ の無記憶情報源 S において，0 の生起確率を 5/6，1 の生起確率を 1/6，とする．(神戸大院 H27)
   (a) S のエントロピーを求めよ．
   (b) S の 2 次の拡大情報源 S^2 を 2 元ハフマン符号化したときの平均符号長を求めよ．
   (c) 情報源 S が出力する系列に対して，0 から 3 までのランレングスを用いてブロック化し，その情報源ブロックを 2 元ハフマン符号に符号化したときに，(2) のハフマン符号化より情報源記号 1 つあたりの平均符号長が小さくなることを示せ．
28. 無記憶の 2 元情報源 S がある．情報源記号は 0 と 1 で，それぞれの生起確率は $P(0) = 0.8, P(1) = 0.2$ である．この情報源 S が出力する系列に対して，情報源記号 1 つあたりの平均符号長が 1 より小さくなるような符号化をせよ．(神戸大院 H28)
29. 情報源符号化に関する以下の問いに答えなさい．(京都工芸 H29)
   (a) 情報記号 $S_i (i = 1, 2, \cdots, M)$ から構成される無記憶情報源 $S =$

$\{S_1, S_2, \cdots, S_M\}$ の平均情報量 (エントロピー)$H(S)$ は次の式で表せる．ただし，$P(S_i)$ は情報記号 S_i の生起確率である．

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{N} P(S_i) \log_2 P(S_i) \tag{7}$$

情報記号数 $M = 4$ で生起確率 $P(S_i)$ が次の表で与えられる場合，平均情報量 (エントロピー)$H(S)$ を求めよ．

情報記号 S_i	S_1	S_2	S_3	S_4
生起確率 $P(S_i)$	0.5	0.25	0.125	0.125

（b）情報源記号符号化の例として，カンマ符号を用いる．カンマ符号では表の情報記号 S_i を順に 0，01，001，0001 と符号化する．個のカンマ符号の平均符号長 $\bar{n}$ を求めよ．

（c）情報源符号化では Shannon 符号もよく知られている．この場合，情報記号 S_i の符号長 n_i は生起確率 $P(S_i)$ に応じて次の式のように選ばれる．

$$-\log_2 P(S_i) \leq n_i < -\log_2 P(S_i) + 1 \tag{8}$$

情報記号 S_1 から S_4 の符号長をそれぞれ求め，Shannon 符号の平均符号長 $\bar{n}$ を求めよ．

（d）一般に情報記号数 M の情報源 $S = \{S_1, S_2, \cdots, S_M\}$ を Shannon 符号化したとき，その平均情報量 $H(S)$ と平均符号長 $\bar{n}$ には次の関係式が成り立つ．この関係式を導け．

$$H(S) \leq \bar{n} < H(S) + 1 \tag{9}$$

30. 通信路符号化に関する次の問に答えよ．(京都工芸 H29)

（a）1 ビットの情報記号を符号長 3 に符号化する $(3, 1)$ 反復記号を考える．この $(3, 1)$ 反復符号の符号語は 000 と 111 である．これらの符号語間のハミング距離はいくらか．

（b）2 元対称通信路 (下図) を介してこの $(3, 1)$ 反復符号を用いて情報伝送したい．符号語が全く誤りなく伝送される確率 P_c を求めよ．ただし，通信路の誤り確率 $p << 1$ とする．

（c）この 2 元対称通信路で誤りが発生しても $(3, 1)$ 反復符号で多数決により誤りを検出して (多数決符号)，情報記号が正しく複合できる確率 P_d と正しく複合できない確率 P_e を求めよ．

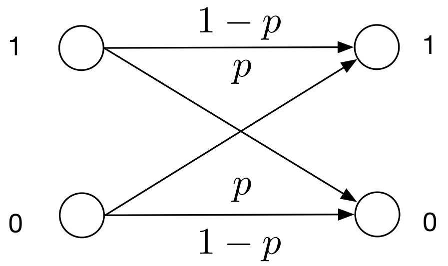

図 9

31. 片面に “1”，他面に “2” と書かれてあるコインが 3 枚ある．以下の問に答えよ．(山形大院 H27 改)
   (a) このコイン 3 枚を同時に投げると，表面に現れる数字の和は $\{3, 4, 5, 6\}$ のいずれかとなる．これらの数字の和の生起確率をそれぞれ求めよ．ただし，コインの表および裏が出る確率は等しいとする．
   (b) 前問の確率事象を情報源 S とすると，エントロピー $H(S)$ はいくらになるか答えよ．
   (c) 表に示す符号 C_1 のように，S を符号アルファベット 0 と 1 からなる符号で表すことを考える．この符号の平均符号長を求めよ．

数字の和	3	4	5	6
符号	00	01	10	11

   (d) C_1 よりも平均符号長が短く，かつ瞬時複合可能な符号 C_2 を求め，表に準じた表として表わせ．
   (e) (4) で求めた C_2 に対する平均符号長を求めよ．
32. 以下の表に示す分布により定まる 2 重マルコフ情報源 S について考える．ここで，$X_t \in \{0, 1\}$ は時刻 t における出力を表す確率変数である．
   (a) マルコフ情報源 S のシャノン線図 (状態遷移図) を書け．ただし，$X_{t-1} = i, X_{t-2} = j$ の状態を S_{ij} で表し，図には遷移確率の値も示すこと．なお，出力に独立な変数がある場合には，状態数を減らすため，その変数を省略した新たな状態を導入しても構わない．新たな状態を導入した場合，その定義を示すこと．
   (b) マルコフ情報源 S が定常分布にあるとき，記号 0, 1 の生起確率 $P(X_t = 0), P(X_t = 1)$ を求めよ．

X_t	X_{t-1}	X_{t-2}	$P(X_t \mid X_{t-1}, X_{t-2})$
0	0	0	1/2
0	0	1	1/4
0	1	0	1/3
0	1	1	1/3
1	0	0	1/2
1	0	1	3/4
1	1	0	2/3
1	1	1	2/3