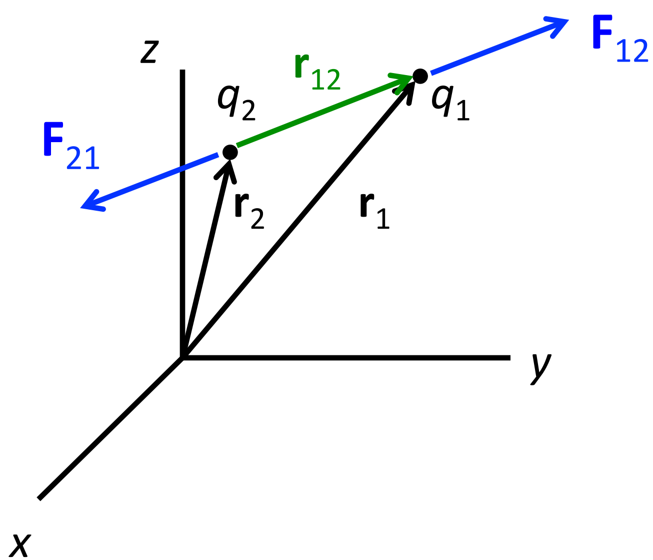
IS物理学

6月29日授業

1．4　クーロン力のベクトル表示



図は$q_1,q_2>0$または$q_1,q_2<0$の場合

$\mathbf{r}_1(x_1,y_1,z_1)$、　$\mathbf{r}_2(x_2,y_2,z_2)$

２から１に向かうベクトル：　$\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$

２から１に向かう単位ベクトル：

$$\hat{\mathbf{r}}_{12} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/r_{12} = \mathbf{r}_{12}/r_{12}$$

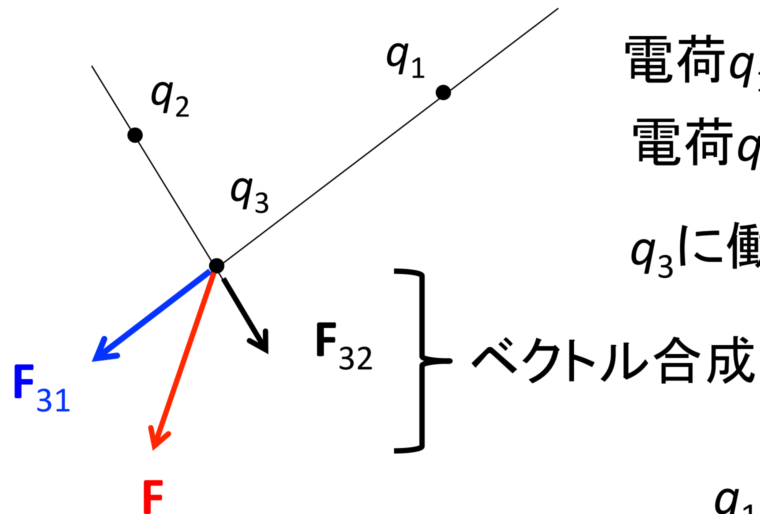
$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$\mathbf{F}_{12} = F_{12}\hat{\mathbf{r}}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} \tag{1}$$

クーロン力の大きさ、

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \tag{2}$$

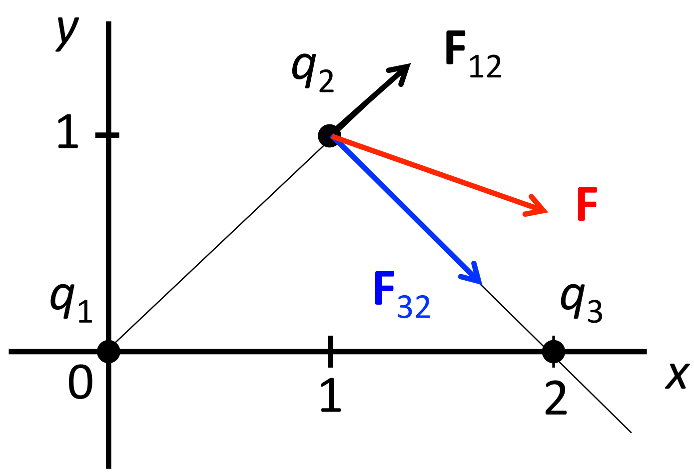
クーロン力の重ね合わせ



電荷q_1が電荷q_3に及ぼすクーロン力：$\mathbf{F}_{31}$

電荷q_2が電荷q_3に及ぼすクーロン力：$\mathbf{F}_{32}$

q_3に働く合力： $\mathbf{F}=\mathbf{F}_{31}+\mathbf{F}_{32}$ (3)



$q_1(0,0)$: 1 C, $q_2(1,1)$: 1 C, $q_3(2,0)$: −2 C

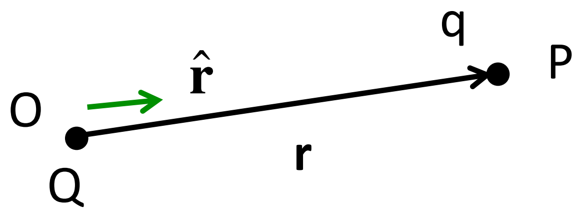
q_2に作用する合力を計算する

$\mathbf{F}_{21}=F_{21}(2^{-1/2}, 2^{-1/2})$ $\quad F_{21}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}$

$\mathbf{F}_{32}=F_{32}(2^{-1/2}, -2^{-1/2})$ $\quad F_{32}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2}{2}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$F_x=\frac{3}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0} \qquad F_y=-\frac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}$$

１．５　静電場



原点Oの電荷Qから距離rだけ離れた地点Pに電荷qを置くと、電荷qに作用するクーロン力**F**は、

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^3}\mathbf{r} \qquad [\mathrm{N}] \qquad (4)$$

となるが、この式を変形して、

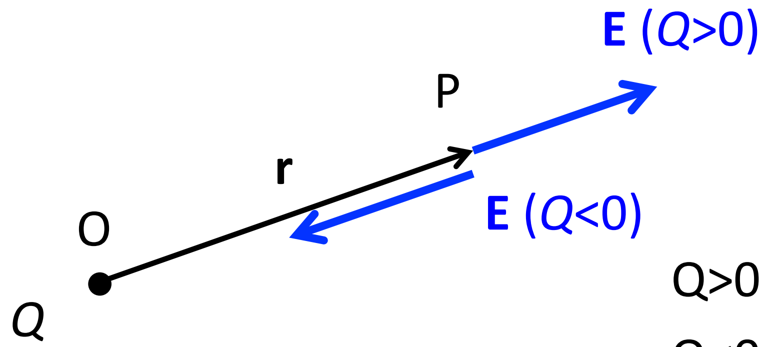
$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^3}\mathbf{r} = q\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\mathbf{r} \qquad (5)$$

このベクトル**E**を、点電荷QがP点に作る電場（ベクトル）を呼び、その大きさEを電場の強さという。ここで、

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad (6)$$

は、ベクトル**E**の$\hat{\mathbf{r}}$方向成分である。

1．静電場



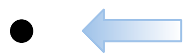
点電荷Qからr離れた
P点の電場**E**は、

Q>0 のとき：OP線上にあって外向き

Q<0 のとき：OP線上にあって内向き

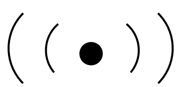
電場のまとめ

クーロンの法則は、r離れた2電荷間に力が作用することを言っている。電場の考え方はこの2電荷の間に働く力をもとに導出した。



孤立した一つだけの電荷

空間に一つだけ電荷があるときは、クーロンの法則を
適用する相手の電荷がないのだから、電場もないのか？

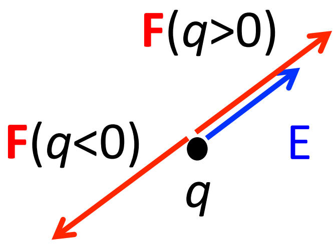


振動

左図のように空間の電荷が加速度運動（例えば単振動）
をすると、電波が発生することは日常経験することである。
この原因は孤立した電荷の周りに作られた電場が振動する
ためであると電磁気学から説明できている。

したがって、電場は電荷のまわりの空間に必ず実在
する。

電場**E**がある空間に電荷qが置かれると、その電荷に力、



$$\mathbf{F}=q\mathbf{E} \tag{7}$$

が作用する。このときの電場は一つの電荷が作る場合もあるし、複数の電荷や電荷が連続的に分布して作る場合も含めるので、**F**を電気力と呼ぶ。

<u>電場の単位</u>

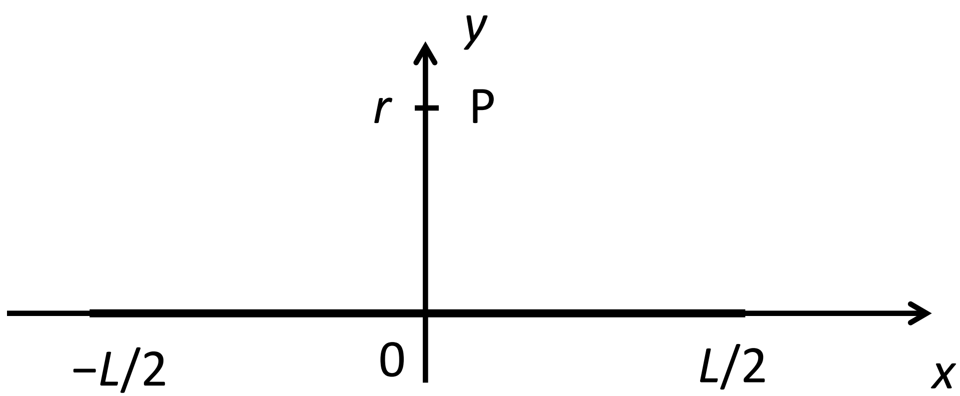
(7)式から、電場の単位は、力÷電荷=N/C、となる。

<u>電場の重ね合わせ</u>

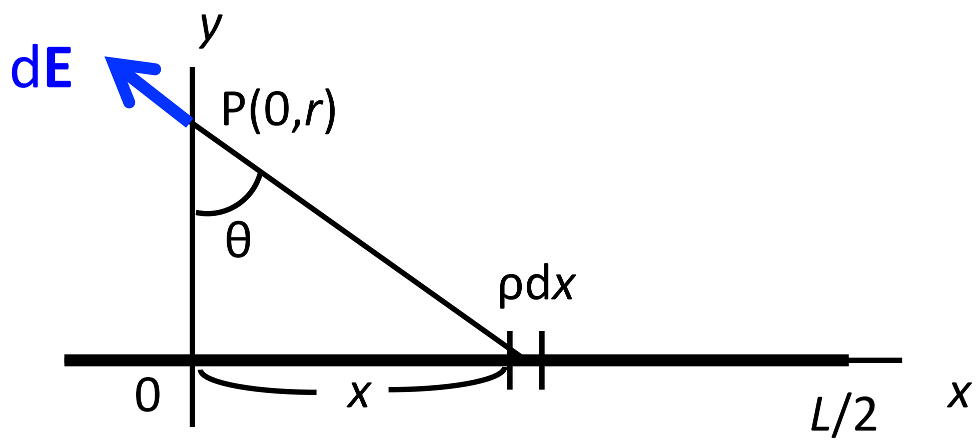
電場はベクトルなので、複数の電荷の作る電場は平行四辺形の原理にしたがって重ね合わされる。

１．６　空間分布した電荷の作る電場

長さLの直線上に、密度（クーロン/m）ρで一様に電荷が分布している場合を考える。直線の中心Oから距離rの位置Pでの電場を求めたい。



図のように座標軸をとる。原点からx離れた位置の微少長さdxを考える。この部分の電荷はρdxである。



dxは微分量なので、ρdxを点電荷と見なすことが出来る。

ρdxがP点に作る電場をd**E**(dE_x,dE_y)とすると、d**E**の大きさをdEは、

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dx}{x^2 + r^2} \qquad (8)$$

となるので、電場のy方向成分dE_yは、

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dx}{x^2 + r^2}\cdot\cos\theta \qquad (9)$$

したがって、長さ*L*の電荷分布全体では式(9)を積分して、

$$E_y = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dx}{x^2 + r^2} \cdot \cos\theta \qquad (10)$$

となる。積分変数をxからθに変換すると、*x*=*r*tanθ、なので

dx/dθ=r/cos²θとなり、また、θの範囲は、

$$-\theta_0 \le \theta \le \theta_0,\quad \tan\theta_0 = L/2r \qquad (11)$$

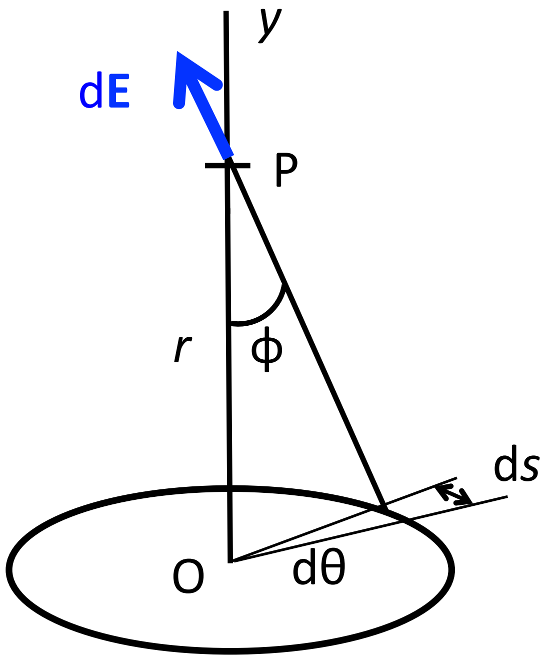
である。積分(10)はθについての定積分として、

$$E_y = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dx}{x^2 + r^2} \cdot \cos\theta = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{r^2(1 + \tan^2\theta)} \cdot \frac{r d\theta}{\cos^2\theta} \cdot \cos\theta$$

$$= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos\theta\, d\theta = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r} \sin\theta_0 = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4r^2}} \qquad (12)$$

x方向の電場成分は、$-x$の所にあるdxの微小領域からの電場と打ち消し有って0となる。

つぎに、図のように電荷密度ρ [C/m]の電荷が水平面内で円をつくり、円の中心Oから真上にrだけ離れた位置Pでの電場を求める。円の半径をRとする。



微少な弧の長さをdsとすると、ds=Rdθ

となるので、この部分の電荷は、ρds である。したがって、この部分がP点につくる電場の大きさをdEとすると、電場のy方向成分dE_yは、前と同様にして、

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho ds}{r^2+R^2}\cos\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho R d\theta}{r^2+R^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}}$$

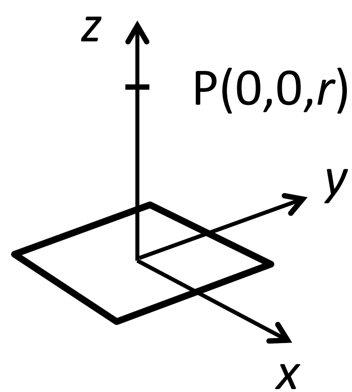
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho r R}{(r^2+R^2)^{3/2}}d\theta$$

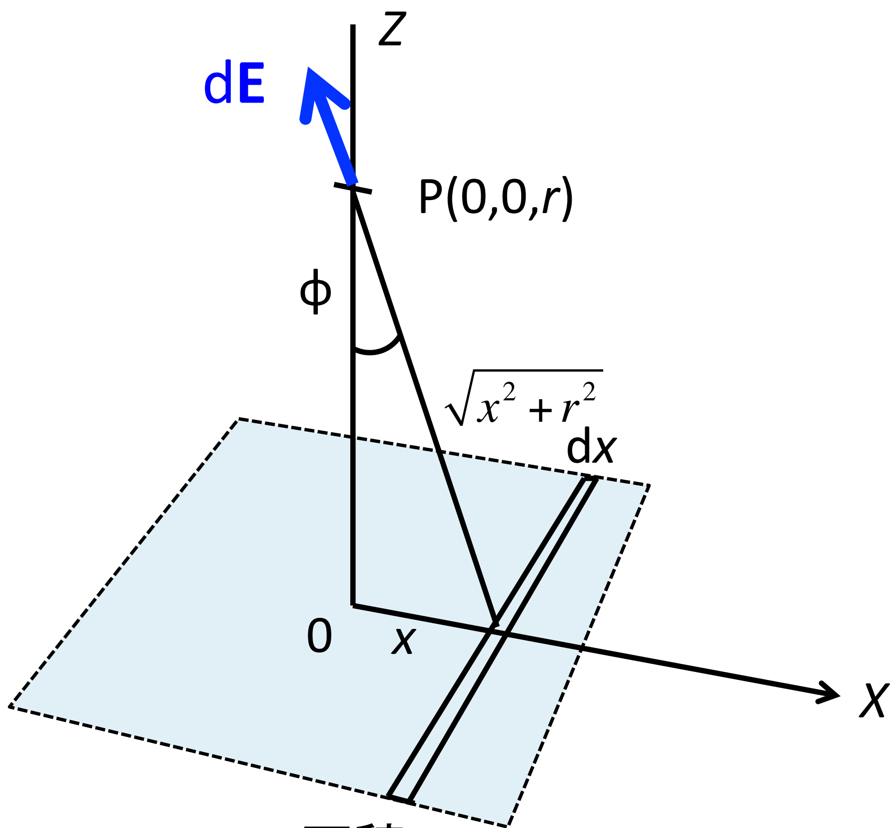
となり、θで積分すると、

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho r R}{(r^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho r R}{(r^2+R^2)^{3/2}} \qquad (13)$$

と求められる。また、水平面内の電場成分は打ち消し有って0である。

次に、電荷が水平面内に置いた一辺*L*の正方形の中に一様に面密度σ(C/m^2)で分布し、面の中心から高さ*r*の場所での電場を求めよう。





図のように、原点からx離れたところの幅dx、長さLの細長い線上の電荷がP点につくる電場**dE**はP点を含むXZ面上にある。この電場の大きさd*E*は、

式(12)で、*r*を $\sqrt{x^2+r^2}$ で、電荷量ρ*L*をσ*L*d*x*で置き換えればよいから、

$$dE = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}} \cdot \frac{\sigma L dx}{\sqrt{L^2+4(x^2+r^2)}}$$ と計算できる。

ここで、線は、$-L/2 \leq x \leq L/2$、の範囲に広がっているので、$-x$とxの場所にある線からの電場はx成分同士が打ち消し合う。

したがって、可能なxの領域を積分すると、電場のz成分のみが残るので、z方向成分、

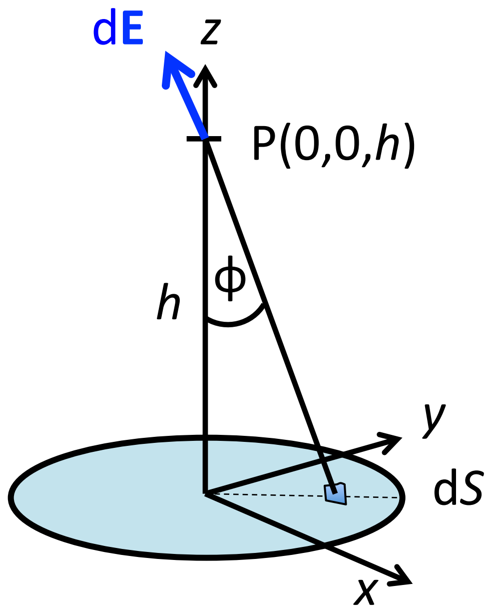
$$dE_z = dE\cos\phi = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}} \cdot \frac{\sigma L dx}{\sqrt{L^2+4(x^2+r^2)}} \cdot \frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)} \cdot \frac{\sigma r L dx}{\sqrt{L^2+4(x^2+r^2)}} \qquad (14)$$

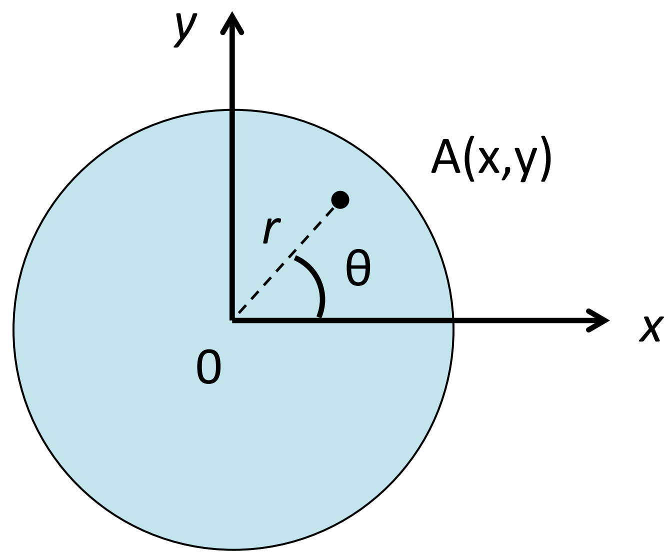
を積分すればよい。

平面に電荷が広がる場合でより簡単な例

半径Rの円内に面密度σ(C/m^2)で一様に電荷が分布。高さhの点P。



微少面積dSをどのように考えるのか？

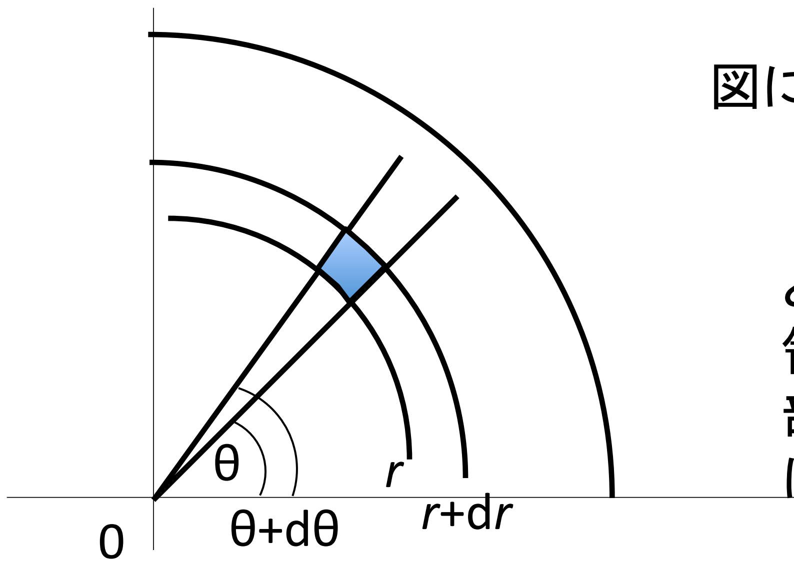


円内の任意の点A(x,y)において、x、yの代わりに変数(r,θ)を使う。

x=$r$sinθ、y=$r$cosθ

ただし、0≤r≤R、0≤θ≤2π

変数(r, θ)を、r〜r+dr、θ〜θ+dθまで変化させる。



図に示した小さな面積をdSとすると、

$$dS = r\,d\theta\,dr \qquad (15)$$

と表せる。したがって、この微少領域の電荷は、σdS、となるので、この部分がP点に作る電場**dE**の大きさdEは次のようになる。

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sigma dS}{r^2+h^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r}{r^2+h^2}drd\theta \qquad (16)$$

また、円内には原点Oをはさんで図に示したdSと対称の位置に微小領域が存在し、そこからの電場とを重ね合わせるとz方向成分dE_zだけが残るので、結局、式(16)から、

$$dE_z = dE\cos\phi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r}{r^2+h^2}drd\theta\cdot\frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}} = \frac{\sigma h}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r}{(h^2+r^2)^{3/2}}drd\theta \qquad (17)$$

式（１７）を可能な(r,θ)について積分するが、この積分は変数を２つ含むので２重積分あるいは、単に重積分と言う。すなわち、

$$E_z = \iint dE_Z = \frac{\sigma h}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\left[\int_0^{2\pi}d\theta\right]\frac{r}{(h^2+r^2)^{3/2}}dr = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r}{(h^2+r^2)^{3/2}}dr \qquad (18)$$

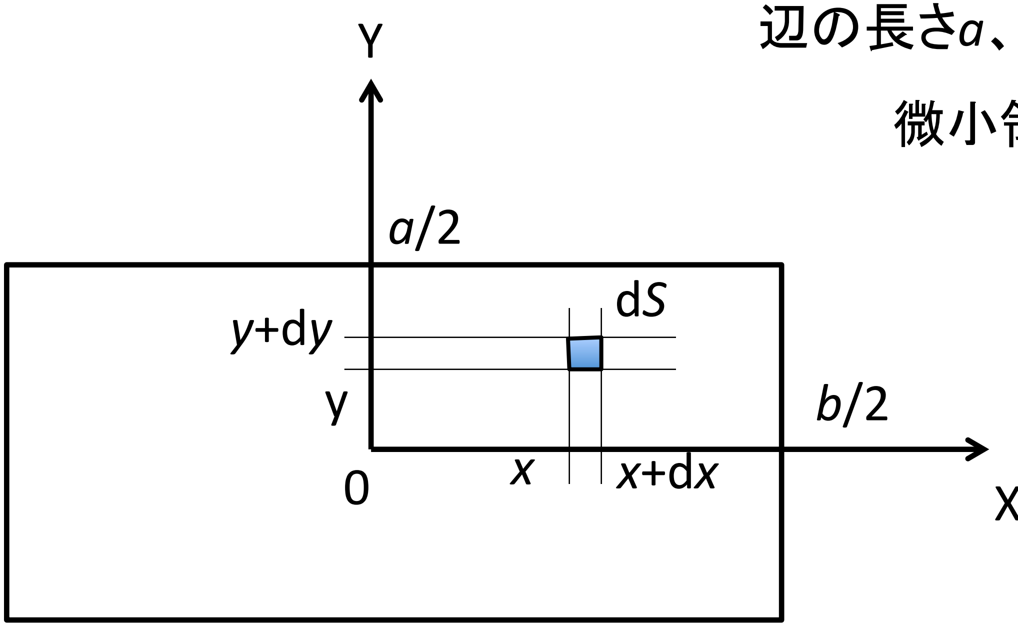
と与えられる。rの積分は、例えば、$r=h\tan\phi$、と変数変換すると、

$$\frac{r}{(h^2+r^2)^{3/2}}dr = \frac{h\tan\phi}{h^3/\cos^3\phi}\cdot\frac{h}{\cos^2\phi}d\phi = \frac{1}{h}\sin\phi d\phi$$ となるので、

$$E_z = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{h}\cdot\int_0^{\phi_0}\sin\phi\,d\phi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\cos\phi\right]_0^{\phi_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\phi_0) \qquad (19)$$

と求められた。ただし、$\tan\phi_0=R/h$、である。

重積分について



辺の長さ*a*、*b*の長方形

微小領域の面積d*S*

$$ab = \int dS$$

は確かである。

ここで、d*S*は、

d*S*=d*x*d*y*

と表せるので、積分は、

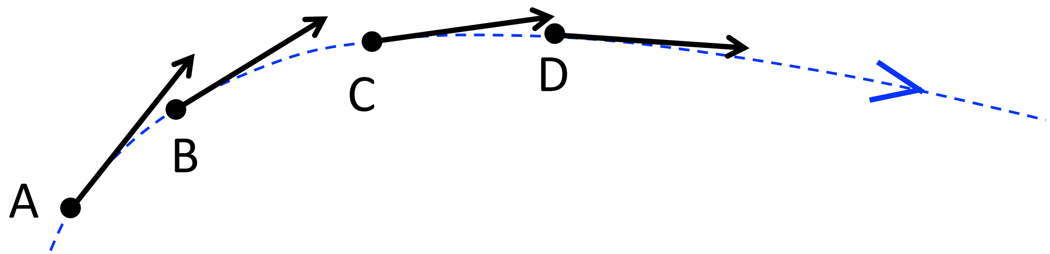
$$\int dS = \iint dx\,dy = \int_{-b/2}^{b/2}\left[\int_{-a/2}^{a/2} dy\right]dx = \int_{-b/2}^{b/2} a\,dx = ab$$ となる。

積分、 $I = \iint f(x,y)\,dx\,dy$ は、長方形の内部の点で定義される関数

f(*x*,*y*)の積分を意味している。

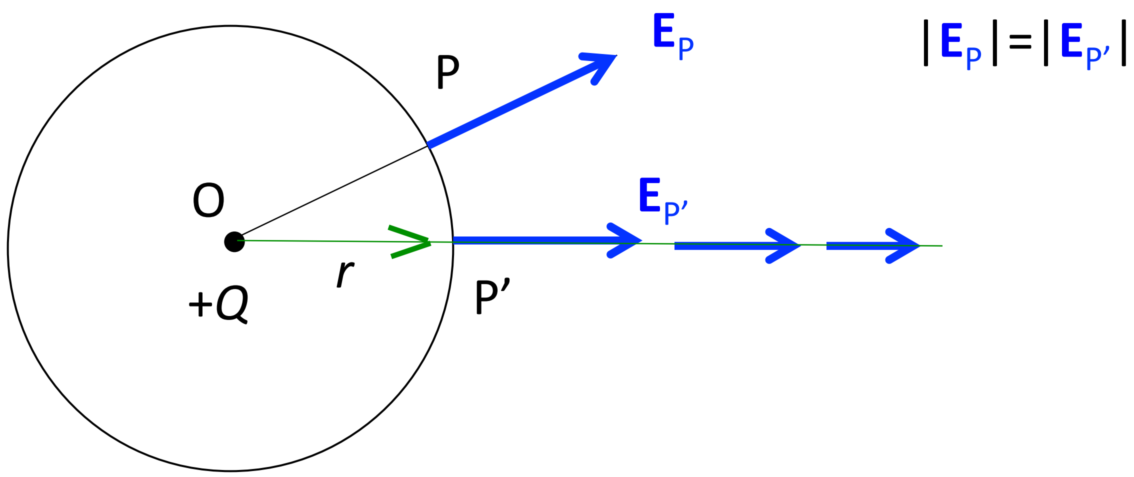
１．７　電気力線

空間に電荷が分布していると、空間に電場が存在する。
電場はベクトルで空間の任意の位置で定義されている。



A、B、C、D点での電場が図のような矢印で表現されている。
このとき、各矢印の方向が接線ベクトルであるような曲線を描くことができ、この曲線を電気力線と呼ぶ。また、電気力線の向きは電場の向く向きと定義する。

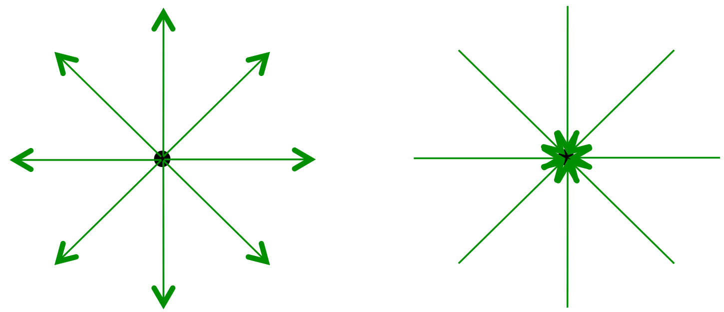
孤立した点電荷+Qを考える。正の点電荷のまわりの電場は、半径rの球面上では皆おなじ大きさであり、その方向は、その地点の位置ベクトルの方向に向かう。



電場の大きさを矢印の長さで表すと、例えば線分OP'上では、Oから離れるにしたがって矢印は短くなるが同じ直線上にある。したがって、Oから出てP'を通る外向きの直線が電気力線である。

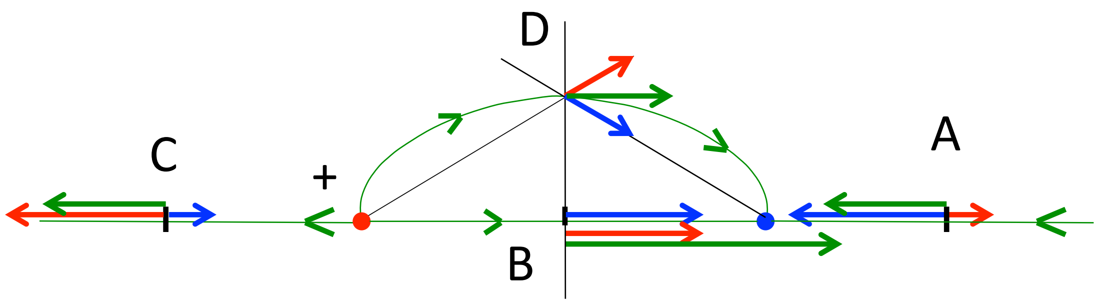
1．静電場

孤立した点電荷では電気力線は放射状に分布



正電荷のまわり　　負電荷のまわり

二つの異符号の点電荷のまわりの電気力線

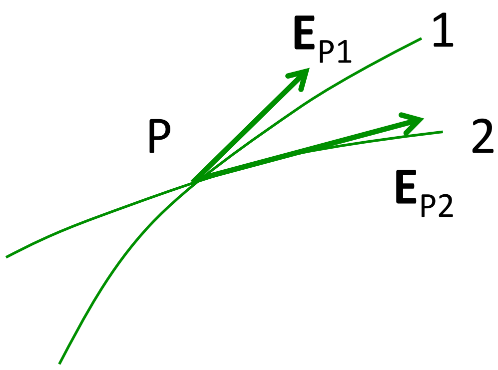


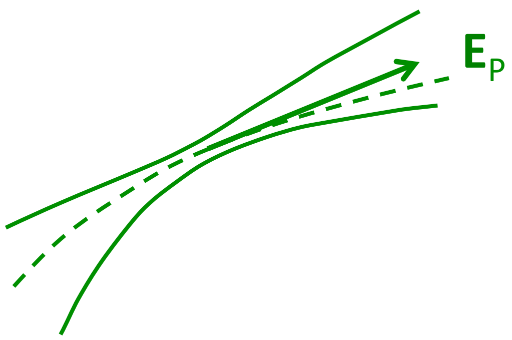
それぞれの電荷が作る電場を矢印で表す

電気力線の特徴

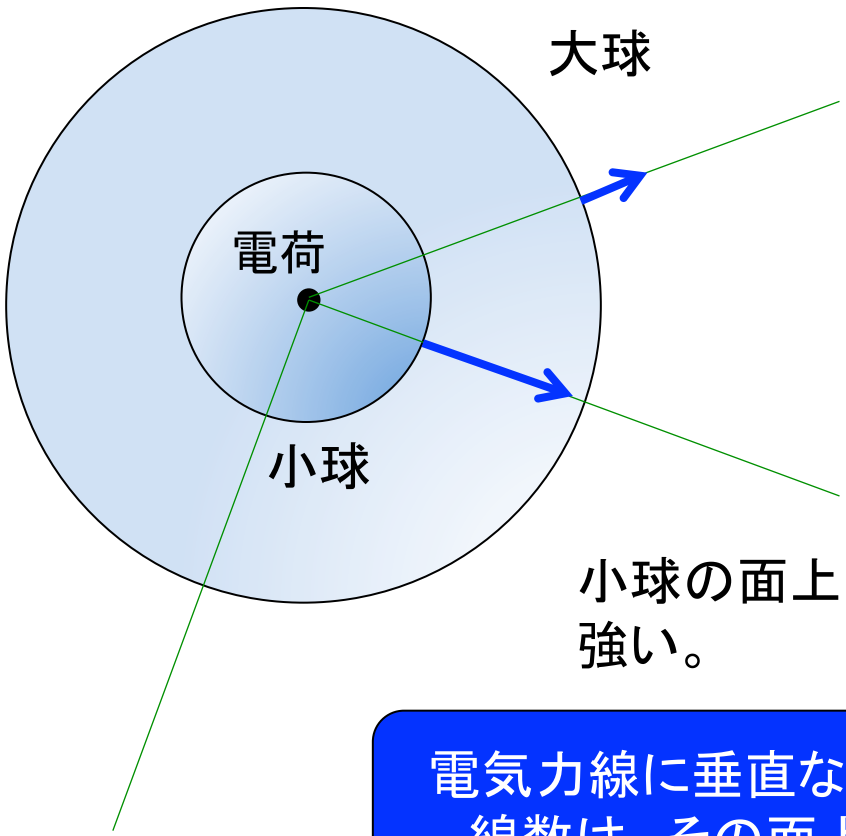
電気力線は正電荷から出て、負電荷に入る。

電気力線は交差しない（電場が0となる点は除く）。
交差するとその点で二つの異なる電場が定義できることになる。しかし、これは$\mathbf{E}_P=\mathbf{E}_{P1}+\mathbf{E}_{P2}$という電場である。





電気力線の密度と電場の大きさ



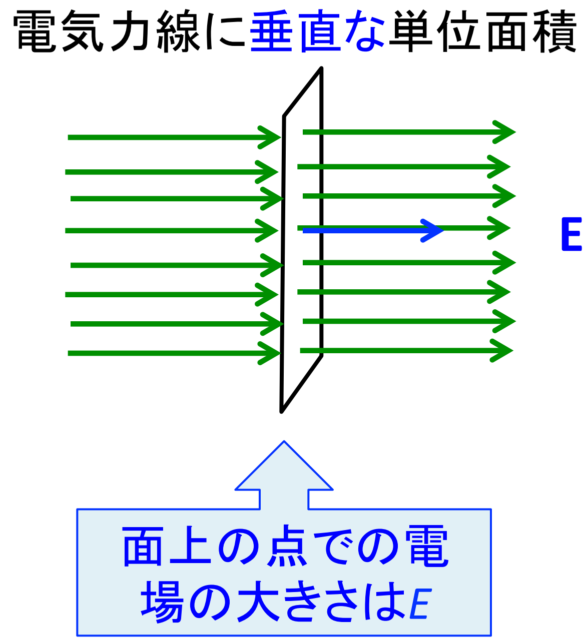
電荷を中心とする球を考える。電気力線は電荷から放射状に出ている。

大きな球を貫く電気力線の数は、小さな球を貫く電気力線と同じである。

面の単位面積あたりの電気力線の数は、小球の方が多い。

小球の面上の点での電場は、大球よりも強い。

電気力線に垂直な面の単位面積あたりの電気力線数は、その面上の電場の大きさに比例する



面上の電場の大きさがE [N/C]のとき、E本の電気力線を引くと決める。

したがって、面の面積がS [m^2]のとき、面を貫く電気力線の数をΦとすると、

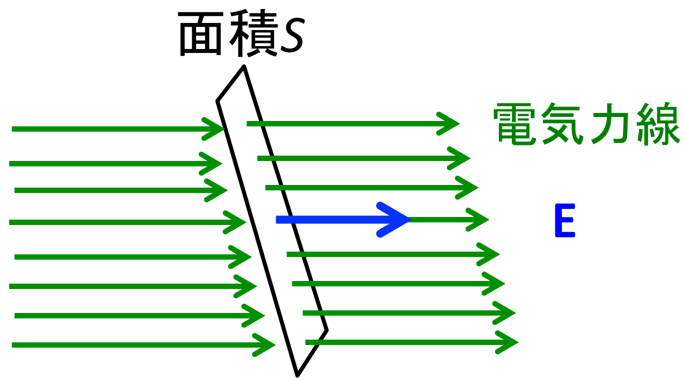
$$\Phi = ES \tag{20}$$

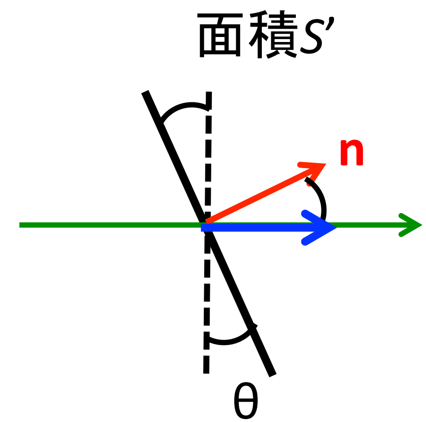
となり、Φを電気力線束と呼ぶ。

点電荷Qを中心とする半径rの球面：

$$\Phi = E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{21}$$

面積Sの面が、電場の方向と角度θだけ傾いている場合





電気力線束は、面Sの電場方向への射影$S'=S\cos\theta$を貫く数である。

$$\Phi=S'E=SE\cos\theta \qquad (22)$$

また、面に垂直な方向の単位ベクトル**n**を面法線ベクトルと呼ぶ。

この**n**を使って、面積ベクトル、$\mathbf{S}=S\mathbf{n}$、を定義すると、式(22)は**S**と**E**の内積として、

$$\Phi=\mathbf{S}\cdot\mathbf{E} \qquad (23)$$

と表せる。