自 主 課 題 [1]

オイラーによる

学籍番号 b　　　　クラス

出席番号　　　　氏名

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin s}{s} ds = \frac{\pi}{2}} \qquad (0)$$

が成り立つことを示したい。

Hints

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g' \, dx = \left[f \cdot g \right]_a^b - \int_a^b f' \cdot g \, dx}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C = \mathrm{Arctan}\, x + C}$$

まず、関数 $g(y)$を次の積分によって定義する。

$$g(y) = \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\sin s}{s} ds, \quad y \geq 0 \qquad (1)$$

$g(y)$をyで微分すると次式が得られる。

$$\frac{g(y)}{dy} = \int_0^\infty \frac{d}{dy} \left\{ e^{-sy} \frac{\sin s}{s} \right\} ds = \boxed{-\int_0^\infty e^{-sy} \sin s \, ds} \qquad (2)$$

部分積分を2回行うと、

$$\frac{dg}{dy} = \boxed{-\frac{1}{1+y^2}} \qquad (3)$$

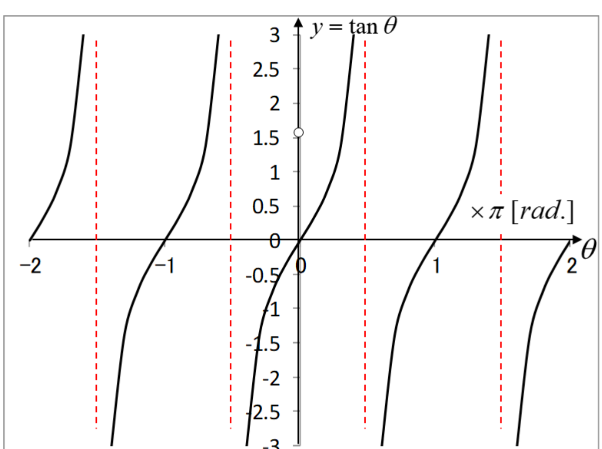
が得られる。これを積分して次式を得る。

$$g(y) = C - \tan^{-1} y \qquad (4)$$

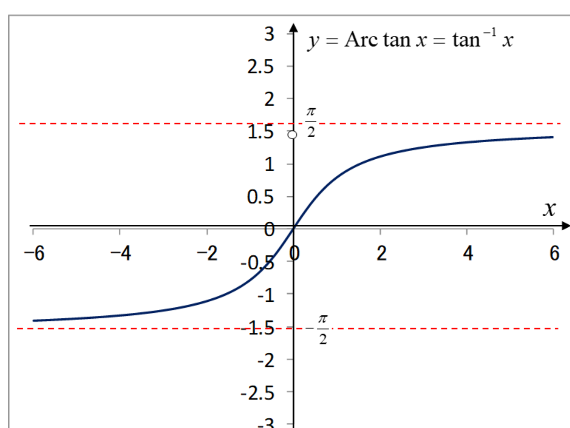
$g(\infty)$はゼロなので、$g(\infty) = 0 = C - \tan^{-1}(\infty) = C - \boxed{\pi/2}$ となるから、

$$g(y) = \int_0^\infty e^{-sy} \frac{\sin s}{s} ds = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(y) \qquad (5)$$

$y = 0$とおくと、 $\tan^{-1}(0) = 0$ であるから式（0）が得られる。



$y = \tan\theta$



$y = \mathrm{Arc\,tan}\, x = \tan^{-1} x$

部分積分を2回行って式(3)を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{g(y)}{dy} &= -\int_0^\infty e^{-sy}\sin s\, ds = -\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\, dx \\
&= \int_0^\infty e^{-xy}\left(\cos x\right)' dx \\
&= \left[e^{-xy}\cos x\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(e^{-xy}\right)' \cos x\, dx \\
&= \left[0-1\right] + y\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\, dx \\
&= -1 + y\left[\int_0^\infty e^{-xy}\left(\sin x\right)' dx\right] \\
&= -1 + y\left\{\left[e^{-xy}\sin x\ \right]_0^\infty + y\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\, dx\right\} \\
&= -1 + y\left\{\left[0-0\ \right] - y\frac{dg}{dy}\right\} \\
&= -1 - y^2\frac{dg}{dy}
\end{aligned}
$$

$$y = \tan^{-1} x = \mathrm{Arctan}\, x$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{Arctan}\, x + C = \tan^{-1} x + C}$$

逆関数を元に戻すと次式になる。

$x = \tan y$　これをyで微分する。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\tan y = \frac{d}{dy}\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right) = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$$

よって、

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

一方、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{Arctan}\, x\right) = \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right)$$