



Introduction to Fourier Analysis

DFT & FFT

Discrete & Fast Fourier Transform

#15 離散フーリエ変換 高速フーリエ変換

試験範囲外

2020/07/20_23

山林 由明



演習解答

右の関数のラプラス逆変換 $L^{-1}[X]$ を求めなさい。

$$X(p) = \frac{p^2 + p - 2}{p^2(p-2)}$$

部分分数展開

$$X(p) = \frac{p^2 + p - 2}{p^2(p-2)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p-2} \quad [1] \quad \text{とおくと}$$

$$\frac{A}{p^2} + \frac{B}{p-2} = \frac{A(p-2) + Bp^2}{p^2(p-2)} = \frac{Bp^2 + Ap - 2A}{p^2(p-2)} \quad [2] \quad \text{となる。}$$

[1]と[2]を比較すると次式の関係が得られる。

$$p^2 + p - 2 = Bp^2 + Ap - 2A \quad \text{の各項を比較すると}$$

$$A = 1, B = 1 \quad \text{なので} \quad X(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-2} \quad \text{と書き改められる。}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] = t, \quad L^{-1}\left[\frac{1}{p-2}\right] = e^{2t} \quad \text{より} \quad L^{-1}[X(p)] = L^{-1}\left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-2}\right] = t + e^{2t} \quad (t > 0)$$

解答終



次の像関数 $F(p)$ をラプラス逆変換しなさい。

$$F(p) = \frac{p-1}{p^2+3p+2} = \frac{p-1}{(p+2)(p+1)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+1} \quad [1] \quad \text{とおくと}$$

因数分解

部分分数展開

元の式と
比較して

$$\frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+1} = \frac{A(p+1)+B(p+2)}{(p+2)(p+1)} = \frac{(A+B)p + A+2B}{(p+2)(p+1)} = \frac{p-1}{p^2+3p+2} \quad [2]$$

$$A+B=1, \quad A+2B=-1 \quad [3]$$

$$A+2B=-1$$

$$-) A+B=1$$

$$B=-2,$$

$$A=3$$

式[1]は

$$\frac{p-1}{(p+2)(p+1)} = \frac{3}{p+2} - \frac{2}{p+1} \quad [4]$$

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1} \left[\frac{3}{p+2} - \frac{2}{p+1} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \left(\frac{3}{p+2} - \frac{2}{p+1} \right) e^{pt} dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{C_2} \frac{3e^{pt}}{p+2} dp - \int_{C_2} \frac{2e^{pt}}{p+1} dp \right] = 3e^{-2t} - 2e^{-t} \quad (t > 0) \end{aligned}$$

解答終



別解

宿題解答[2]:

学籍番号 b

クラス

出席番号

氏名

$$F(p) = \frac{p-1}{p^2+3p+2} = \frac{p-1}{(p+2)(p+1)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+1} \quad [1] \quad \text{とおくと}$$

(p+2)を両辺に掛ける

$$\frac{(p-1)(p+2)}{(p+2)(p+1)} = \frac{A(p+2)}{p+2} + \frac{B(p+2)}{p+1}$$

$$\lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{A(p+2)}{p+2} + \frac{B(p+2)}{p+1} \right] = A + 0 = A \quad \leftarrow \text{右辺}$$

左辺

ロピタルの定理
(分子分母をそれぞれ微分)

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow -2} \frac{(p-1)(p+2)}{(p+2)(p+1)} &= \lim_{p \rightarrow -2} \frac{(p-1) + (p+2)}{(p+2) + (p+1)} \\ &= \lim_{p \rightarrow -2} \frac{2p+1}{2p+3} = \frac{-4+1}{-4+3} = 3 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad A = 3$$

(p+1)を両辺に掛ける

$$\frac{(p-1)(p+1)}{(p+2)(p+1)} = \frac{A(p+1)}{p+2} + \frac{B(p+1)}{p+1}$$

$$\lim_{p \rightarrow -1} \left[\frac{A(p+1)}{p+2} + \frac{B(p+1)}{p+1} \right] = 0 + B = B$$

ロピタルの定理
(分子分母をそれぞれ微分)

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow -1} \frac{(p-1)(p+1)}{(p+2)(p+1)} &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{(p-1) + (p+1)}{(p+2) + (p+1)} \\ &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{2p}{2p+3} = \frac{-2}{-2+3} = -2 \end{aligned} \quad B = -2$$

前スライド式[4]に戻る。

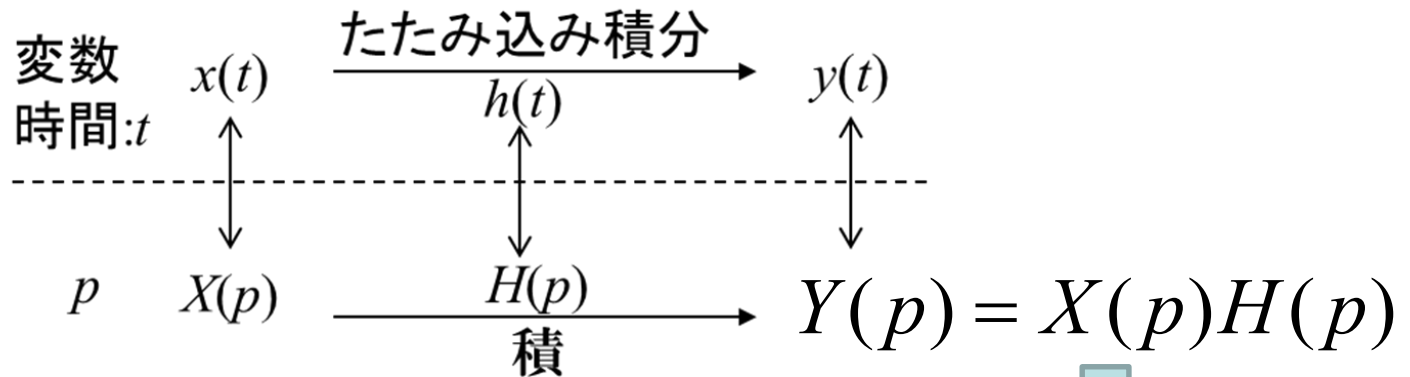


学年

宿題解答[解説] 1

ある回路に入力 $x(t)$ を入力したところ、出力 $y(t)$ が得られた。
このときの伝達関数 $H(p)$ と、インパルス応答 $h(t)$ を求めなさい。

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-t} & (t > 0) \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2e^{-t} + e^{-2t} & (t > 0) \end{cases}$$



$$h(t) = L^{-1}[H(p)]$$

インパルス応答 $h(t)$ は伝達関数 $H(p)$ の原関数(ラプラス逆変換)

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

入力の像関数 $X(p)$ と出力の像関数 $Y(p)$ の比で伝達関数 $H(p)$ がわかる。



学年

クラス

宿題解答[1]

氏名

ある回路に入力 $x(t)$ を入力したところ、出力 $y(t)$ が得られた。
このときの伝達関数 $H(p)$ と、インパルス応答 $h(t)$ を求めなさい。

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-t} & (t > 0) \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2e^{-t} + e^{-2t} & (t > 0) \end{cases}$$

$$X(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+p)t} dt = \left[\frac{e^{-(1+p)t}}{-(1+p)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+p}$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = H(p)$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \int_0^{\infty} (2e^{-t} + e^{-2t}) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \{ 2e^{-(1+p)t} + e^{-(2+p)t} \} dt \\ &= 2 \left[\frac{e^{-(1+p)t}}{-(1+p)} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{-(2+p)t}}{-(2+p)} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{1+p} + \frac{1}{2+p} \end{aligned}$$



宿題解答[2]

これらより、伝達関数 $H(p)$ は

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\frac{2}{1+p} + \frac{1}{2+p}}{\frac{1}{1+p}} = 2 + \frac{1+p}{2+p} = \frac{3p+5}{p+2}$$

分子の p を
約分で消去したい

となり、インパルス応答 $h(t)$ も

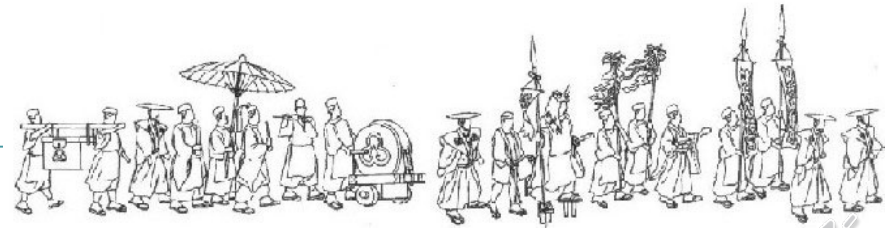
$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} H(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{3p+5}{p+2} e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{3p+6-1}{p+2} e^{pt} dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{3(p+2)-1}{p+2} e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \left(3 - \frac{1}{p+2} \right) e^{pt} dp \\ &= 3\delta(t) - e^{-2t} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\begin{aligned} L[\delta(t)] &= \int_0^{\infty} \delta(t) e^{pt} dt = e^0 = 1 \\ L^{-1}[1] &= \delta(t) \end{aligned}$$

解答終

行列の準備(復習)



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}} \right\} \begin{matrix} \text{3行} \\ \text{4列} \end{matrix}$$

加法

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$$

$$A + O = A$$

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

すべての要素が0
である「零行列」

行列の積

$$AB = (a_{ij})(b_{ij}) = \left(\sum_t a_{it} b_{tj} \right)$$

スカラー倍

$$kA = (ka_{ij})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + (-1) \times 3 \\ (-2) \times 5 + 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 3 \\ -10 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(2 \quad -3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = (2 \times 1 + (-3) \times (-2) \quad 2 \times (-1) + (-3) \times 2) = (2 + 6 \quad -2 - 6) = (8 \quad -8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 3 + 2 \times (-1) & 1 \times 2 + 2 \times 0 \\ 3 \times 0 + 4 \times 1 & 3 \times 3 + 4 \times (-1) & 3 \times 2 + 4 \times 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 + 2 & 3 - 2 & 2 + 0 \\ 0 + 4 & 9 - 4 & 6 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

復習不要の諸君は
次のスライド
スキップ可

行列の準備(復習・解説)



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + (-1) \times 3 \\ (-2) \times 5 + 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 3 \\ -10 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + (-3) \times (-2) & 2 \times (-1) + (-3) \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + 6 & -2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 3 + 2 \times (-1) & 1 \times 2 + 2 \times 0 \\ 3 \times 0 + 4 \times 1 & 3 \times 3 + 4 \times (-1) & 3 \times 2 + 4 \times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 + 2 & 3 - 2 & 2 + 0 \\ 0 + 4 & 9 - 4 & 6 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

DFTの準備 「回転演算子」



以下の図の円を複素平面での単位円(半径1)とするととき
以下の複素数 $(W_N)^m$ を示せ

$$W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

$$N = 3$$

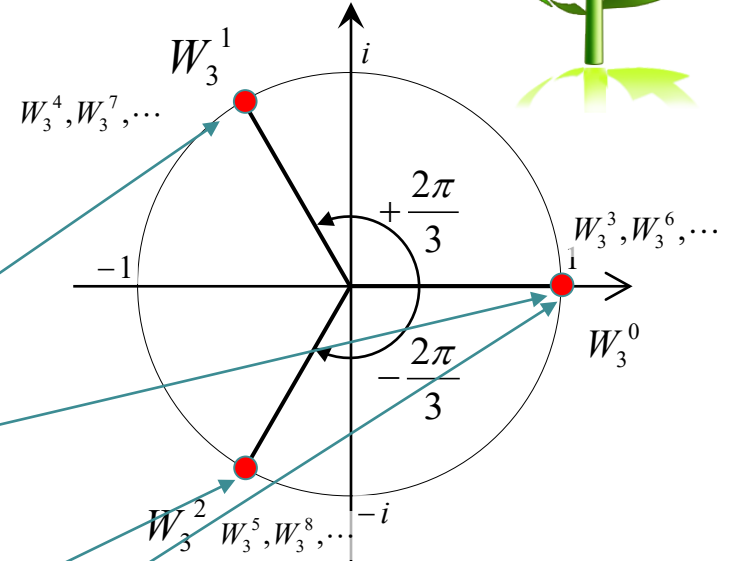
$$W_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$W_3^0 = e^{i\frac{2\pi}{3} \cdot 0} = e^0 = 1$$

$$W_3^1 = e^{i\frac{2\pi}{3} \cdot 1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = W_3^4 = e^{i\frac{2\pi}{3} \cdot 4} = e^{i\frac{8\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot 1$$

$$W_3^2 = e^{i\frac{2\pi}{3} \cdot 2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = W_3^5 = e^{i\frac{2\pi}{3} \cdot 5} = e^{i\frac{10\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \cdot 1$$

$$W_3^3 = e^{i\frac{2\pi}{3} \cdot 3} = e^{i2\pi} = 1 = W_3^0 = W_3^6 = e^{i\frac{2\pi}{3} \cdot 6} = e^{i\frac{12\pi}{3}} = e^{i4\pi} = 1$$



$$N = 4$$

回轉演算子

$$W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$



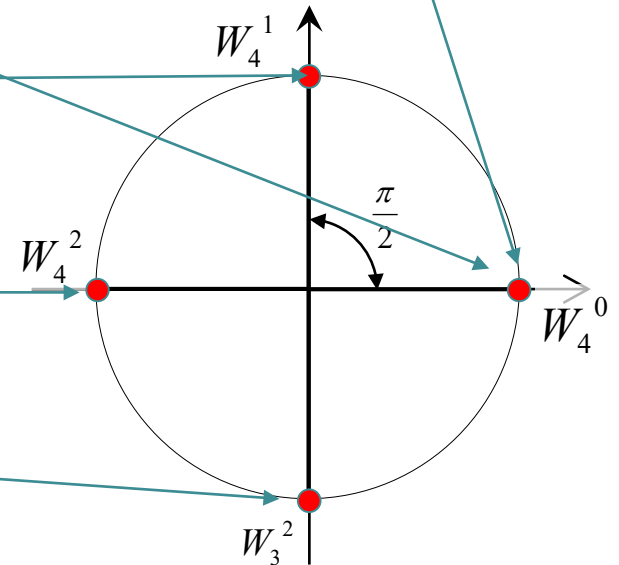
$$W_4 = e^{i\frac{2\pi}{4}}$$

$$W_4^0 = e^{i\frac{2\pi}{4} \cdot 0} = e^0 = 1 = W_4^4 = e^{i\frac{2\pi}{4} \cdot 4} = e^{i2\pi} = 1$$

$$W_4^1 = e^{i\frac{2\pi}{4} \cdot 1} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$W_4^2 = e^{i\frac{2\pi}{4} \cdot 2} = e^{i\pi} = -1$$

$$W_4^3 = e^{i\frac{2\pi}{4} \cdot 3} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

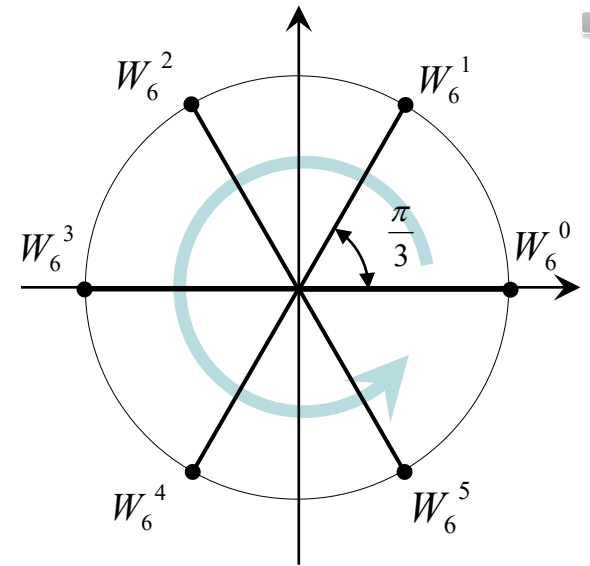


$$N = 6$$

回轉演算子

$$W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

$$W_6 = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$



$$W_6^0 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 0} = 1$$

$$W_6^1 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 1} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_6^2 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_6^3 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 3} = e^{i\pi} = -1$$

$$W_6^4 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 4} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

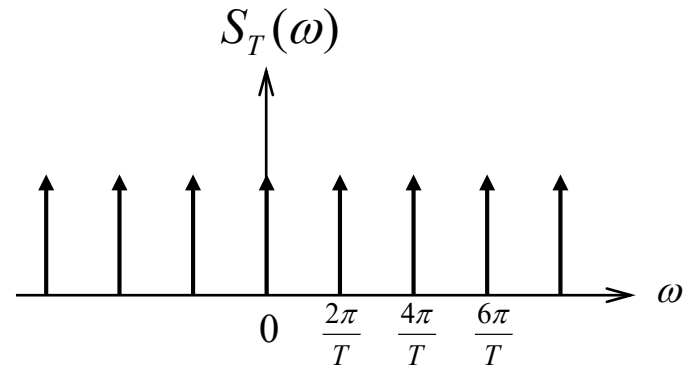
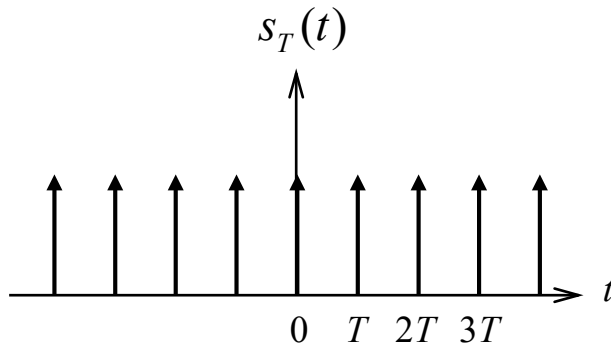
$$W_6^5 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 5} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_6^6 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 6} = e^{i2\pi} = 1 = W_6^0$$

$$W_6^7 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 7} = e^{i\frac{7\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = W_6^1$$



楕形関数のフーリエ変換は楕形関数



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t} \quad \longleftrightarrow \quad S_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inT\omega} = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$f(t) = 1$ なる定常信号のフーリエ変換 $F(\omega)$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s} (-ds) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s} ds = 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

$$e^{-i\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{-in\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\frac{1}{T} e^{-in\omega_0 t} \leftrightarrow \omega_0 \delta(\omega - n\omega_0)$$



離散フーリエ変換

(Discrete Fourier Transform: DFT)

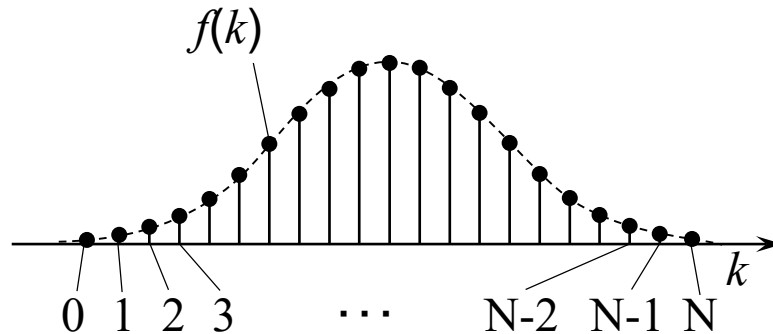
$$[1] \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

時間 t について
離散化

$$F(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i\omega k} \cdot 1$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i\omega k} \quad [2]$$

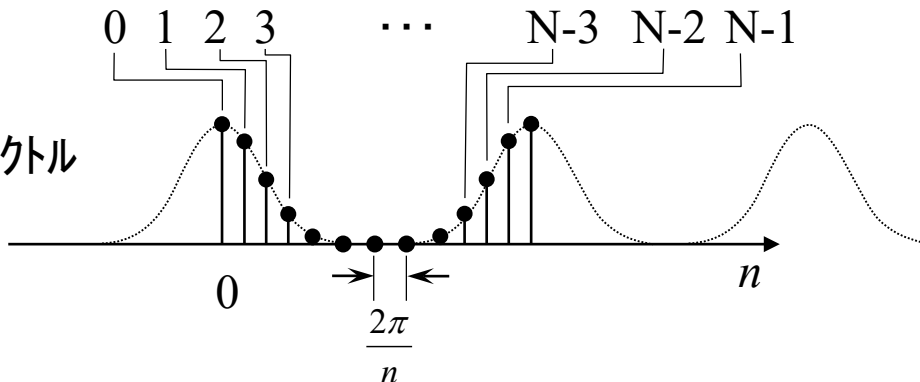
波形



角周波数 ω について
離散化

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi n}{N} k}$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (W_N)^{-kn} \quad [3]$$

スペクトル



$$W_N = e^{i \frac{2\pi}{N}}$$

: 回転演算子



逆離散フーリエ変換

(Inverse Discrete Fourier Transform: IDFT)

$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{i \frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(n) (W_N)^{kn}$$

連続・・・〈積分〉

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

離散・・・〈総和〉

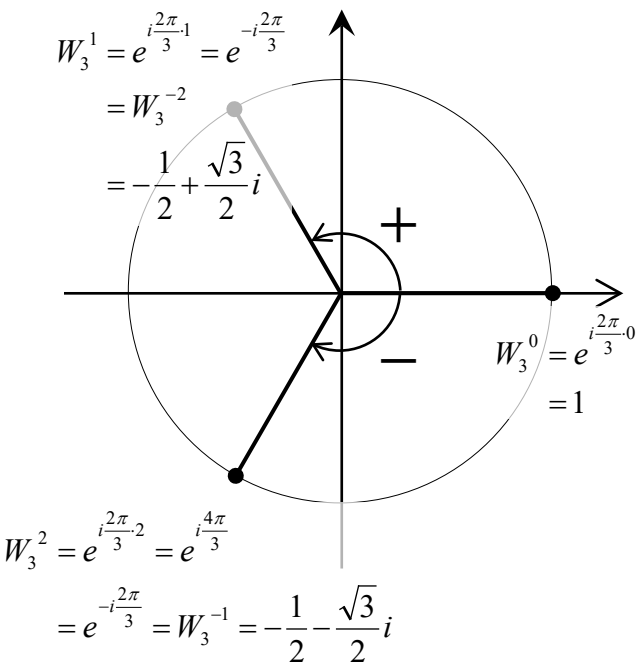
$$F(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{N} mk}$$
$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) e^{i \frac{2\pi}{N} mk}$$

回転演算子

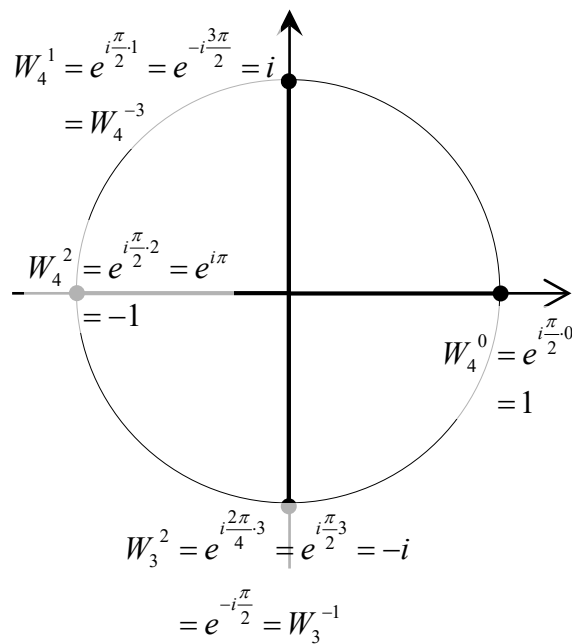


- DFTやIDFTで用いる $W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ を回転演算子と呼ぶ。
任意の整数Pに対して W_N はPN乗で繰り返す周期性を持つ。

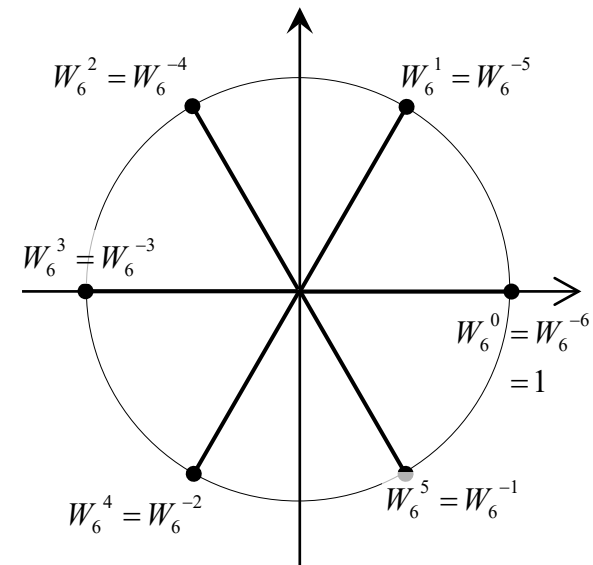
$$W_N^{(h+PN)} = e^{i\frac{2\pi}{N}(h+PN)} = e^{i\frac{2\pi}{N}h + i\frac{2\pi}{N}PN} = e^{i\frac{2\pi}{N}h} e^{i2\pi P} = e^{i\frac{2\pi}{N}h} = W_N^h$$



$$W_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$



$$W_4 = e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$



$$W_6 = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$



離散フーリエ変換の計算例(1)

$$F(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{N} mk}$$

□ データ数4 ($m = 0 \sim 3$)

入力 $f(0), f(1), f(2), f(3)$

出力 $F(0), F(1), F(2), F(3)$

□ $N = 4$ とする

$$\begin{aligned} e^{-i \frac{\pi}{2} \cdot 0} &= \cos 0 + i \sin 0 = W_4^{-0} = W_4^{-4} = W_4^{-8} = W_4^4 = 1 \\ e^{-i \frac{\pi}{2} \cdot 1} &= \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i \frac{3\pi}{2}} = W_4^{-1} = W_4^{-5} = W_4^3 = -i \\ e^{-i \frac{\pi}{2} \cdot 2} &= e^{-i\pi} = \cos \pi - i \sin \pi = W_4^{-2} = W_4^{-6} = W_4^2 = -1 \\ e^{-i \frac{\pi}{2} \cdot 3} &= \cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2} = e^{i \frac{\pi}{2}} = W_4^{-3} = W_4^{-7} = W_4^1 = i \end{aligned}$$

$m = 0 \sim 3$

$$F(0) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 0 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-0 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot 1^k = f(0) \cdot 1^0 + f(1) \cdot 1^1 + f(2) \cdot 1^2 + f(3) \cdot 1^3 \quad [1]$$

$$F(1) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 1 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-1 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (-i)^k = f(0)(-i)^0 + f(1)(-i)^1 + f(2)(-i)^2 + f(3)(-i)^3$$

$$F(2) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 2 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-2 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (-1)^k = f(0)(-1)^0 + f(1)(-1)^1 + f(2)(-1)^2 + f(3)(-1)^3$$

$$F(3) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 3 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-3 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (i)^k = f(0)(i)^0 + f(1)(i)^1 + f(2)(i)^2 + f(3)(i)^3$$



離散フーリエ変換の計算例(2)

$$F(m) = \sum_{k=0}^3 f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} mk}$$

$$F(0) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 0 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-0 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot 1^k = f(0) \cdot 1^0 + f(1) \cdot 1^1 + f(2) \cdot 1^2 + f(3) \cdot 1^3$$

$$F(1) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 1 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-1 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (-i)^k = f(0)(-i)^0 + f(1)(-i)^1 + f(2)(-i)^2 + f(3)(-i)^3$$

$$F(2) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 2 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-2 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (-1)^k = f(0)(-1)^0 + f(1)(-1)^1 + f(2)(-1)^2 + f(3)(-1)^3$$

$$F(3) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 3 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-3 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (i)^k = f(0)(i)^0 + f(1)(i)^1 + f(2)(i)^2 + f(3)(i)^3$$

整理すると

$$F(0) = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

$$F(1) = f(0) \cdot 1 + f(1)(-i) - f(2) \cdot 1 + f(3)(i) = f(0) - i \cdot f(1) - f(2) + i \cdot f(3)$$

$$F(2) = f(0) \cdot 1 + f(1)(-1) + f(2) \cdot 1 + f(3)(-1) = f(0) - f(1) + f(2) - f(3)$$

$$F(3) = f(0) \cdot 1 + f(1)(i) + f(2)(-1) + f(3)(-i) = f(0) + i \cdot f(1) - f(2) - i \cdot f(3)$$

離散フーリエ変換の計算例(3)

$$F(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{N} mk} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{-m \cdot k}$$

$m \cdot k$	$k = 0$	1	2	3
$m = 0$	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	4	6
3	0	3	6	9

• 行列表示

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ W_4^0 & W_4^{-2} & W_4^{-4} & W_4^{-6} \\ W_4^0 & W_4^{-3} & W_4^{-6} & W_4^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ W_4^0 & W_4^{-2} & W_4^0 & W_4^{-2} \\ W_4^0 & W_4^{-3} & W_4^{-2} & W_4^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ f(0) - i \cdot f(1) - f(2) + i \cdot f(3) \\ f(0) - f(1) + f(2) - f(3) \\ f(0) + i \cdot f(1) - f(2) - i \cdot f(3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F(0) &= f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ F(1) &= f(0) \cdot 1 + f(1)(-i) - f(2) \cdot 1 + f(3)(i) = f(0) - i \cdot f(1) - f(2) + i \cdot f(3) \\ F(2) &= f(0) \cdot 1 + f(1)(-1) + f(2) \cdot 1 + f(3)(-1) = f(0) - f(1) + f(2) - f(3) \\ F(3) &= f(0) \cdot 1 + f(1)(i) + f(2)(-1) + f(3)(-i) = f(0) + i \cdot f(1) - f(2) - i \cdot f(3) \end{aligned}$$

同じ結果



離散フーリエ変換の計算例(4)

- 数値例1: $N=4$ 、 $f(0)=1$, $f(1)=1$, $f(2)=1$, $f(3)=1$

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1+1 \\ 1-i \cdot 1 - 1 + i \cdot 1 \\ 1-1+1-1 \\ 1+i \cdot 1 - 1 - i \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

定常信号の
フーリエ変換が
 δ 関数になることに
対応

- 数値例2: $N=4$ 、 $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+3+4 \\ 1-i \cdot 2 - 3 + i \cdot 4 \\ 1-2+3-4 \\ 1+i \cdot 2 - 3 - i \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2+2i \\ -2 \\ -2-2i \end{pmatrix}$$



離散フーリエ変換の計算例(5)

- 数値例1: $N = 3$ 、 $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 \\ W_3^0 & W_3^{-1} & W_3^{-2} \\ W_3^0 & W_3^{-2} & W_3^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 \\ W_3^0 & W_3^{-1} & W_3^{-2} \\ W_3^0 & W_3^{-2} & W_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^0 & \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^0 & \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^0 \\ \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^0 & \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^{-1} & \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^{-2} \\ \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^0 & \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^{-2} & \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} f(0) + f(1) + f(2) \\ f(0) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) f(1) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) f(2) \\ f(0) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) f(1) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 \\ 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

離散フーリエ変換(まとめ)



$$\text{DFT: } F(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{N} mk} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{-mk}$$

$$\text{iDFT: } f(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) W_N^{mk}$$

$$\text{where } W_N = e^{i \frac{2\pi}{N}}$$

DFT, iDFTそれぞれに N^2 回の掛け算が必要

- これを削減できれば高速計算が可能に
- 1965年、クーリーとチューキーによる高速フーリエ変換(Fast Fourier Transform: FFT)の考案

高速フーリエ変換とは

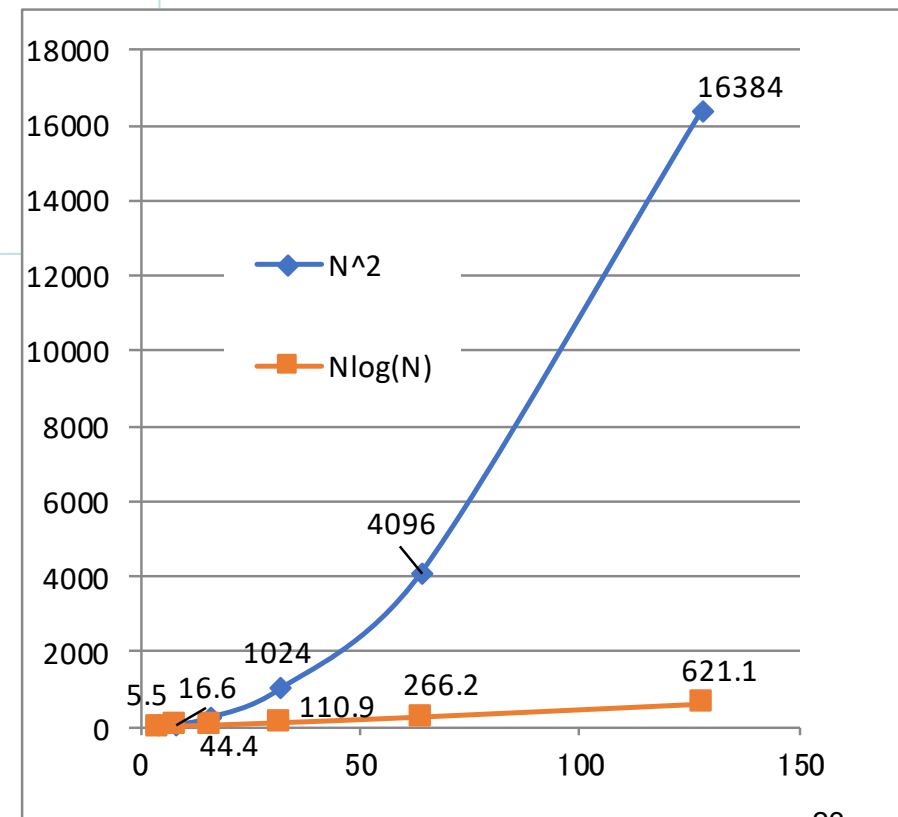


$$F(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{N} mk} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W^{-mk} \quad W = e^{i \frac{2\pi}{N}}$$

- 離散的フーリエ変換（計算量が $O(N^2)$ となる）の結果を、
次数 N が2の累乗のときに
 $O(N \log N)$ の計算量で得る
アルゴリズムである。

- ランダウの記号 (Landau symbol) は、関数の極限における値の変化度合いに、おおよその評価を与えるための記法。
- 記号 O は「程度」の意味の Order から。
 - ・ウィキペディア「ランダウの記号」より

この革命的方法が、電子計算機の使用と相呼応して、いままでに実時間的に不可能だった工学上の種々な不規則現象の周期性の解析や多変数フーリエ解析などを可能にした。



高速フーリエ変換

参考文献

篠崎・富山・若林 共著、「現代工学のための
応用フーリエ解析」8.4 高速フーリエ変換(FFT)
現代工学社(2005)



$$F(m) = \sum_{k=0}^7 f(k) e^{-i\frac{\pi}{4}mk} = \sum_{k=0}^7 f(k) W^{-mk}$$

$$= \sum_{k=0}^7 f(k) w^{mk}$$

$$f(k) = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) W^{mk}$$

$$W_8 = e^{i\frac{2\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = w_8^{-1}$$

$$W_8^3 = e^{i\frac{2\pi}{8} \cdot 3} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

$$= W_8^{11} = W_8^{19} = \dots$$

$$W_8^4 = e^{i\frac{2\pi}{8} \cdot 4} = e^{i\pi} = -1$$

$$W_8^5 = e^{i\frac{2\pi}{8} \cdot 5} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$W_8^6 = e^{i\frac{2\pi}{8} \cdot 6} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

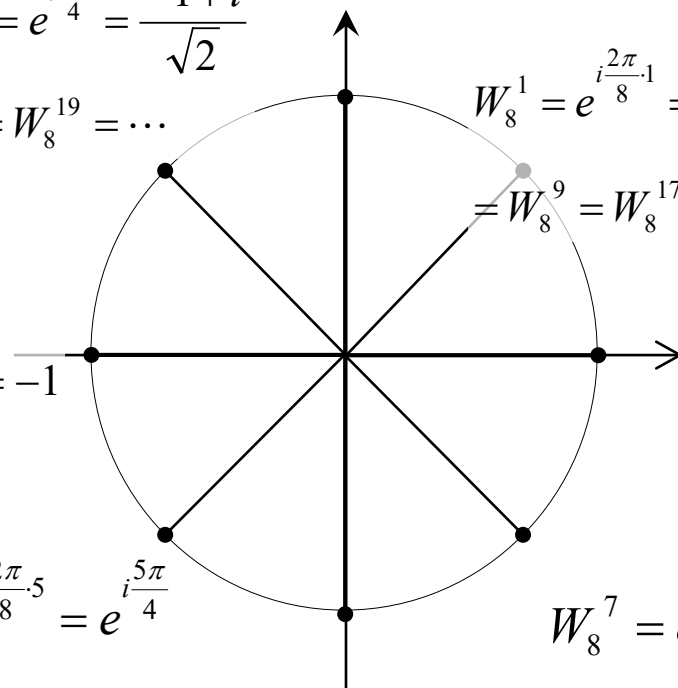
$$W_8^2 = e^{i\frac{2\pi}{8} \cdot 2} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$= W_8^{10} = W_8^{18} \dots$$

$$W_8^1 = e^{i\frac{2\pi}{8} \cdot 1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$= W_8^9 = W_8^{17} = \dots$$

$$W_8^7 = e^{i\frac{\pi}{8} \cdot 7}$$





高速フーリエ変換

$$F(m) = \sum_{k=0}^7 f(k) e^{-i\frac{\pi}{4}mk} = \sum_{k=0}^7 f(k) W^{-mk}$$

$$= \sum_{k=0}^7 f(k) w^{mk}$$

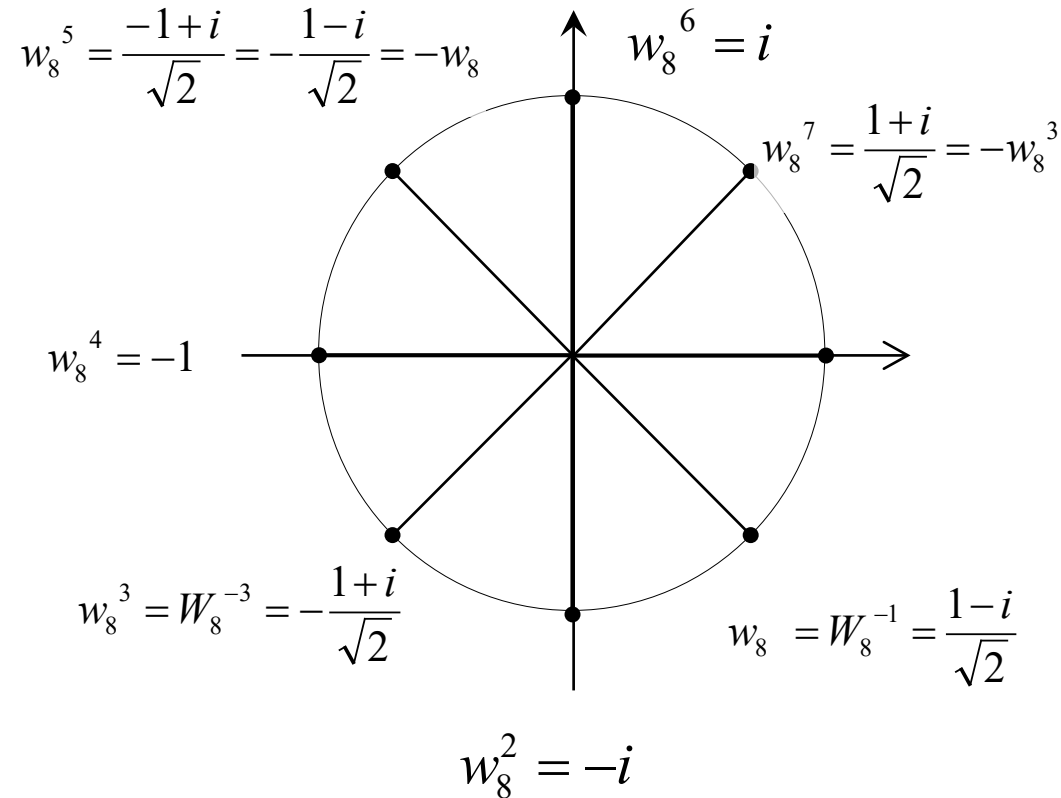
$$f(k) = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) W^{mk}$$

$$w_8 = e^{-i\frac{2\pi}{8}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$$

を用いることにする。





- 8分割の場合のDFTを書き下すと以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \\ F(4) \\ F(5) \\ F(6) \\ F(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_8^{-0.0} & W_8^{-0.1} & W_8^{-0.2} & W_8^{-0.3} & W_8^{-0.4} & W_8^{-0.5} & W_8^{-0.6} & W_8^{-0.7} \\ W_8^{-1.0} & W_8^{-1.1} & W_8^{-1.2} & W_8^{-1.3} & W_8^{-1.4} & W_8^{-1.5} & W_8^{-1.6} & W_8^{-1.7} \\ W_8^{-2.0} & W_8^{-2.1} & W_8^{-2.2} & W_8^{-2.3} & W_8^{-2.4} & W_8^{-2.5} & W_8^{-2.6} & W_8^{-2.7} \\ W_8^{-3.0} & W_8^{-3.1} & W_8^{-3.2} & W_8^{-3.3} & W_8^{-3.4} & W_8^{-3.5} & W_8^{-3.6} & W_8^{-3.7} \\ W_8^{-4.0} & W_8^{-4.1} & W_8^{-4.2} & W_8^{-4.3} & W_8^{-4.4} & W_8^{-4.5} & W_8^{-4.6} & W_8^{-4.7} \\ W_8^{-5.0} & W_8^{-5.1} & W_8^{-5.2} & W_8^{-5.3} & W_8^{-5.4} & W_8^{-5.5} & W_8^{-5.6} & W_8^{-5.7} \\ W_8^{-6.0} & W_8^{-6.1} & W_8^{-6.2} & W_8^{-6.3} & W_8^{-6.4} & W_8^{-6.5} & W_8^{-6.6} & W_8^{-6.7} \\ W_8^{-7.0} & W_8^{-7.1} & W_8^{-7.2} & W_8^{-7.3} & W_8^{-7.4} & W_8^{-7.5} & W_8^{-7.6} & W_8^{-7.7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{pmatrix}$$



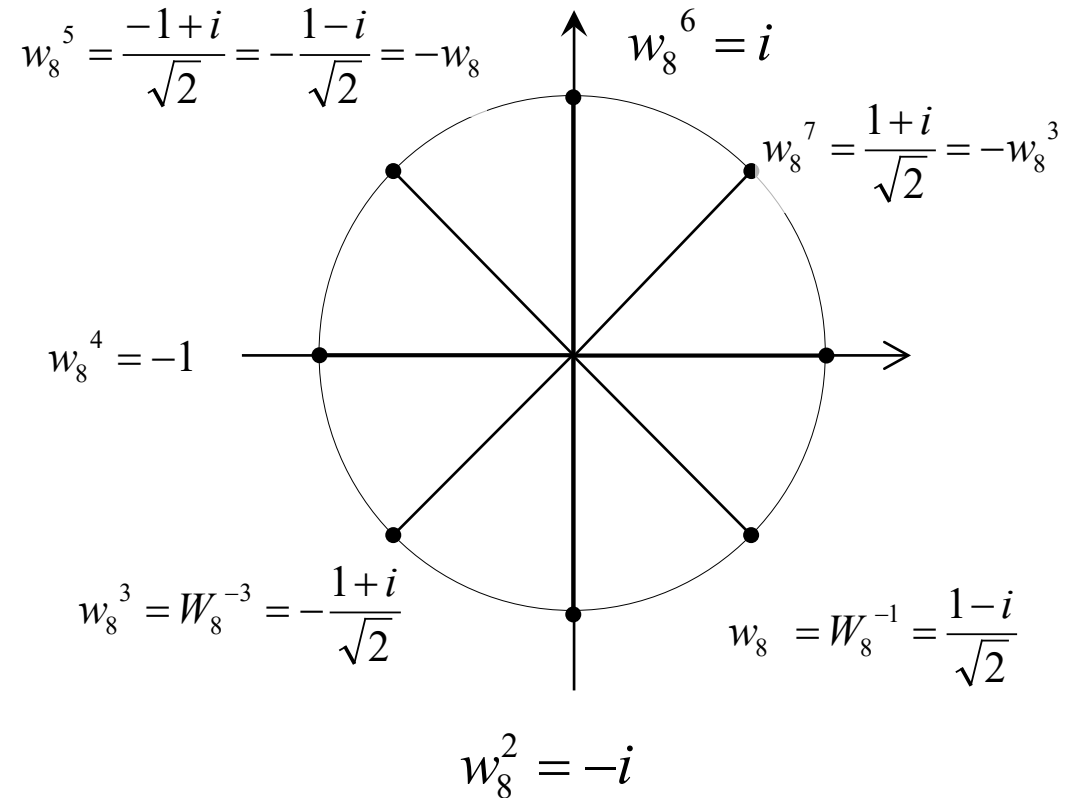
$$[C] = \begin{pmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^{-1} & W_8^{-2} & W_8^{-3} & W_8^{-4} & W_8^{-5} & W_8^{-6} & W_8^{-7} \\ W_8^0 & W_8^{-2} & W_8^{-4} & W_8^{-6} & W_8^{-8} & W_8^{-10} & W_8^{-12} & W_8^{-14} \\ W_8^0 & W_8^{-3} & W_8^{-6} & W_8^{-9} & W_8^{-12} & W_8^{-15} & W_8^{-18} & W_8^{-21} \\ W_8^{-0} & W_8^{-4} & W_8^{-8} & W_8^{-12} & W_8^{-16} & W_8^{-20} & W_8^{-24} & W_8^{-28} \\ W_8^0 & W_8^{-5} & W_8^{-10} & W_8^{-15} & W_8^{-20} & W_8^{-25} & W_8^{-30} & W_8^{-35} \\ W_8^0 & W_8^{-6} & W_8^{-12} & W_8^{-18} & W_8^{-24} & W_8^{-30} & W_8^{-36} & W_8^{-42} \\ W_8^0 & W_8^{-7} & W_8^{-14} & W_8^{-21} & W_8^{-28} & W_8^{-35} & W_8^{-42} & W_8^{-49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{pmatrix}$$



高速フーリエ変換

$$\begin{aligned} W_8 &= e^{i\frac{2\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_8 &= e^{-i\frac{2\pi}{8}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &= \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$





高速フーリエ変換

- 回転演算子

$$W_8^0 = W_8^{-8} = W_8^{-16} = W_8^{-24} = W_8^{-32} = W_8^{-40} = W_8^{-48} = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 0} = 1$$

$$W_8^{-1} = W_8^{-9} = W_8^{-17} = W_8^{-25} = W_8^{-33} = W_8^{-41} = W_8^{-49} = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 1} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} = w_8$$

$$W_8^{-2} = W_8^{-10} = W_8^{-18} = W_8^{-26} = W_8^{-34} = W_8^{-42} = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 2} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

$$W_8^{-3} = W_8^{-11} = W_8^{-19} = W_8^{-27} = W_8^{-35} = W_8^{-43} = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 3} = -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = w_8^3$$



高速フーリエ変換

- 回転演算子

$$W_8^{-4} = W_8^{-12} = W_8^{-20} = W_8^{-28} = W_8^{-36} = W_8^{-44} = e^{-i\frac{\pi}{4}\cdot 4} = e^{-i\pi} = -1$$

$$W_8^{-5} = W_8^{-13} = W_8^{-21} = W_8^{-29} = W_8^{-37} = W_8^{-45} = e^{-i\frac{\pi}{4}\cdot 5} = \frac{(-1+i)}{\sqrt{2}} = -w_8$$

$$W_8^{-6} = W_8^{-14} = W_8^{-22} = W_8^{-30} = W_8^{-38} = W_8^{-46} = e^{-i\frac{\pi}{4}\cdot 6} = e^{-i\frac{\pi}{2}\cdot 3} = i$$

$$W_8^{-7} = W_8^{-15} = W_8^{-23} = W_8^{-31} = W_8^{-39} = W_8^{-47} = e^{-i\frac{\pi}{4}\cdot 7} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = -w_8^3$$



$$[C] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_8 & -i & w_8^3 & -1 & -w_8 & i & -w_8^3 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & w_8^3 & i & w_8 & -1 & -w_8^3 & -i & -w_8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -w_8 & -i & -w_8^3 & -1 & w_8 & i & w_8^3 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -w_8^3 & i & -w_8 & -1 & w_8^3 & -i & w_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{pmatrix}$$

- これは次のように分割できる



$$\begin{aligned}
[C] &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} f(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ w_8 \\ -i \\ w_8 \\ -1 \\ -w_8 \\ i \\ -w_8^3 \end{pmatrix} f(1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \\ 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} f(2) + \begin{pmatrix} 1 \\ w_8^3 \\ i \\ w_8 \\ -1 \\ -w_8^3 \\ -i \\ -w_8 \end{pmatrix} f(3) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} f(4) + \begin{pmatrix} 1 \\ -w_8 \\ -i \\ -w_8^3 \\ -1 \\ w_8 \\ i \\ w_8^3 \end{pmatrix} f(5) + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \\ 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} f(6) + \begin{pmatrix} 1 \\ -w_8^3 \\ i \\ -w_8 \\ -1 \\ w_8^3 \\ -i \\ w_8 \end{pmatrix} f(7) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} f(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \\ 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} f(2) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} f(4) + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \\ 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} f(6) + \begin{pmatrix} 1 \\ w_8 \\ -i \\ w_8 \\ -1 \\ -w_8 \\ i \\ -w_8^3 \end{pmatrix} f(1) + \begin{pmatrix} 1 \\ w_8^3 \\ i \\ w_8 \\ -1 \\ -w_8^3 \\ -i \\ -w_8 \end{pmatrix} f(3) + \begin{pmatrix} 1 \\ -w_8 \\ -i \\ -w_8^3 \\ -1 \\ w_8 \\ i \\ w_8^3 \end{pmatrix} f(5) + \begin{pmatrix} 1 \\ -w_8^3 \\ i \\ -w_8 \\ -1 \\ w_8^3 \\ -i \\ w_8 \end{pmatrix} f(7)
\end{aligned}$$

- これはさらに次のようにまとめられる。



ここで $w_8 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ より $w_8^3 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3 = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 3} = \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$

$$-iw_8 = -i \cdot \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{-i+i^2}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$$

また $\boxed{\begin{matrix} -iw_8 = w_8^3 \\ w_8 = \frac{w_8^3}{-i} = iw_8^3 \end{matrix}}$ だから

$$[C] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} f(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \\ 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} f(2) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} f(4) + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \\ 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} f(6) + \begin{pmatrix} 1 \\ w_8 \\ -i \\ w_8 \\ -1 \\ -w_8 \\ i \\ -w_8^3 \end{pmatrix} f(1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -iw_8 \\ i \\ iw_8^3 \\ -1 \\ iw_8 \\ -i \\ -iw_8^3 \end{pmatrix} f(3) + \begin{pmatrix} 1 \\ -w_8 \\ -i \\ -w_8^3 \\ -1 \\ w_8 \\ i \\ w_8^3 \end{pmatrix} f(5) + \begin{pmatrix} 1 \\ iw_8 \\ i \\ -iw_8^3 \\ -1 \\ -iw_8 \\ -i \\ iw_8^3 \end{pmatrix} f(7)$$

と書き換えられるので、さらに次のようにまとめられる。



$$[C] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(2) \\ f(4) \\ f(6) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ w_8 & -iw_8 & -w_8 & iw_8 \\ -i & i & -i & i \\ w_8^3 & iw_8^3 & -w_8^3 & -iw_8^3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -w_8 & iw_8 & w_8 & -iw_8 \\ i & -i & i & -i \\ -w_8^3 & -iw_8^3 & w_8^3 & iw_8^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(3) \\ f(5) \\ f(7) \end{pmatrix}$$

破線で囲んだ部分は、上の部分に対し符号が反転している。



そこで、次の行列を定義する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} = [W]$$

これを用いて

$$\begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = [W] \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_4 \\ f_6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \end{pmatrix} = [W] \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

を作っておく。



すると、次のようになっていることが判る。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & 1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(2) \\ f(4) \\ f(6) \end{pmatrix} = [W] \begin{pmatrix} f(0) \\ f(2) \\ f(4) \\ f(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ w_8 & -iw_8 & -w_8 & w_8 \\ -i & i & -i & i \\ w_8^3 & iw_8^3 & -w_8^3 & -iw_8^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(3) \\ f(5) \\ f(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_4 \\ w_8 D_5 \\ -iD_6 \\ w_8^3 D_7 \end{pmatrix}$$

これら $[D]$ を用いるとスペクトル $[C]$ は
右の式①で求められる

$$[C] = \begin{bmatrix} D_0 + D_4 \\ D_1 + w_8 D_5 \\ D_2 - i D_6 \\ D_3 + w_8^3 D_7 \\ D_0 - D_4 \\ D_1 - w_8 D_5 \\ D_2 + i D_6 \\ D_3 - w_8^3 D_7 \end{bmatrix}$$

①



この行列の第2列と第3列を入れ替えてみる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} = [W] \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix}$$

すると、計算は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(4) \\ f(2) \\ f(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(2) \\ f(6) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(2) \\ f(6) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(2) \\ f(6) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(2) \\ f(6) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(5) \\ f(3) \\ f(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(5) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(3) \\ f(7) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(5) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(3) \\ f(7) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(5) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(3) \\ f(7) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(5) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(3) \\ f(7) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$



直交行列 $[U] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ が基本になっていることが判る。

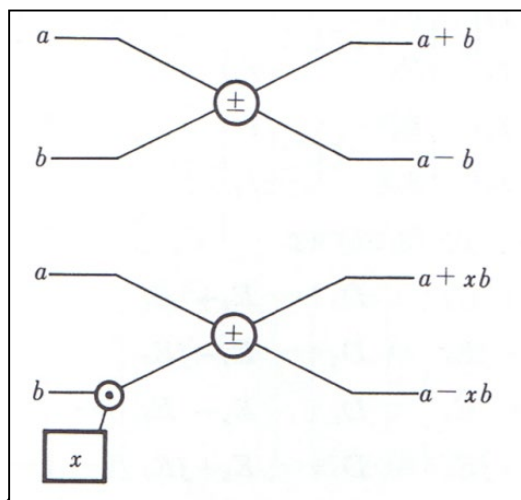
そこで、

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \end{pmatrix} = [U] \begin{pmatrix} f(0) \\ f(4) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = [U] \begin{pmatrix} f(1) \\ f(5) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_4 \\ E_5 \end{pmatrix} = [U] \begin{pmatrix} f(2) \\ f(6) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_6 \\ E_7 \end{pmatrix} = [U] \begin{pmatrix} f(3) \\ f(7) \end{pmatrix}$$

で定義される(E)を用いると
右のように(D_j)が求まるので、これを
①式に代入すればよい。

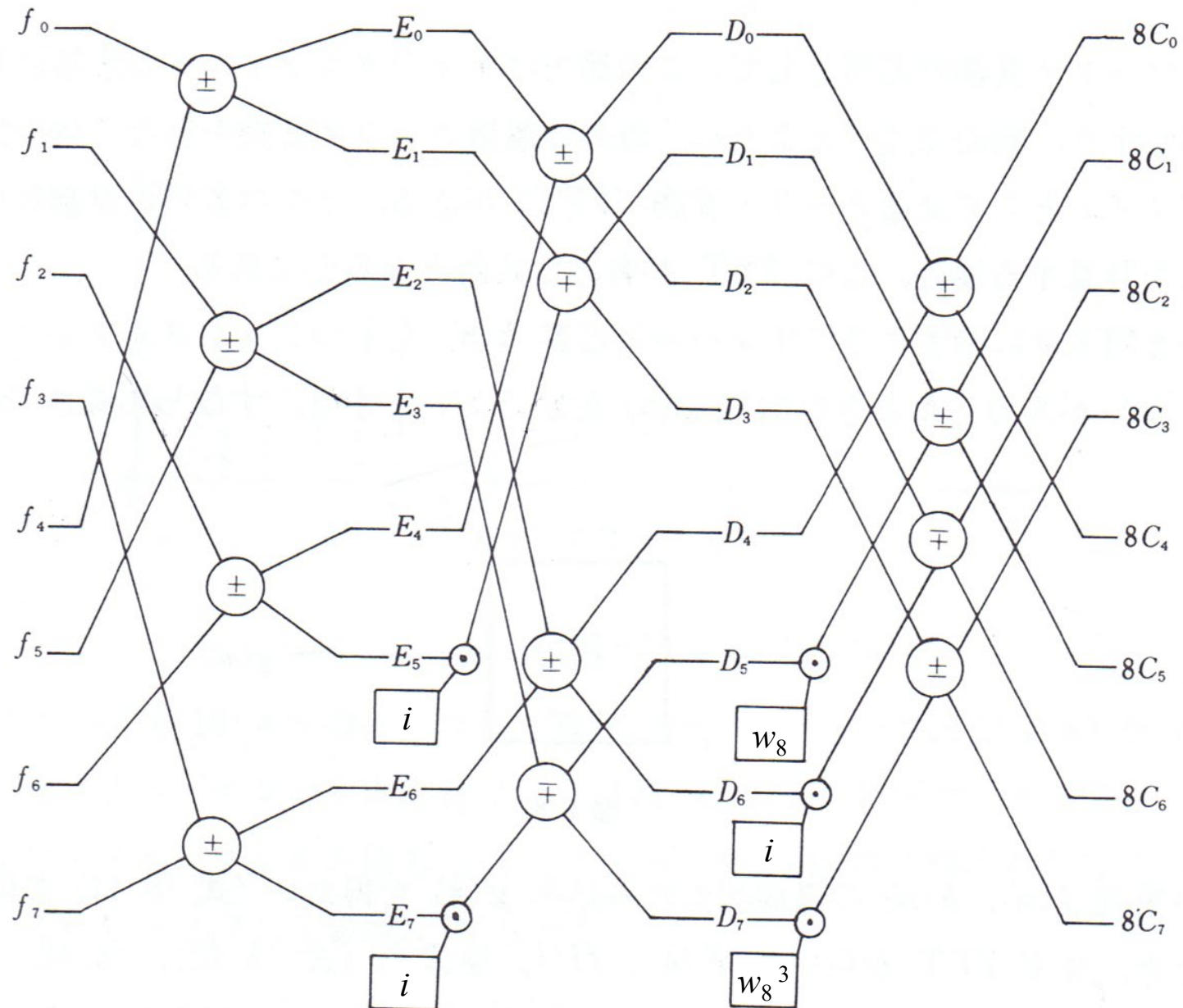
以下のような演算を定義すると



$$\begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_4 \\ -iE_5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -E_4 \\ iE_5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 + E_4 \\ E_1 - iE_5 \\ E_0 - E_4 \\ E_1 + iE_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_6 \\ -iE_7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -E_6 \\ iE_7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 + E_6 \\ E_3 - iE_7 \\ E_2 - E_6 \\ E_3 + iE_7 \end{pmatrix}$$

FFTのアルゴリズムは、、、





講義を終えるにあたり

- ・ フーリエ級数やフーリエ変換を含む学問は情報化社会の今日では、今や物理工学のみならず経済学や医学にいたるまであらゆる分野で利用されており、非常に重要な位置をしめているといえる。
- ・ 観測された波形から情報をどのように引き出し、分析し、使用するかということ、すなわち情報処理が大切なのである。フーリエ解析はこのことを可能にしてくれる強力な方法である。
 - 篠崎・富山・若林 共著、「現代工学のための応用フーリエ解析」まえがき 現代工学社(2005)

例題

離散的フーリエ変換(DFT)における回転演算子 $W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ において、 $N=4$ の場合、右のように簡単になる。

$N=4$ として $f(0)=1$ 、 $f(1)=0$ 、 $f(2)=1$ 、 $f(3)=0$ のときのDFTを求めよ。

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ W_4^0 & W_4^{-2} & W_4^{-4} & W_4^{-6} \\ W_4^0 & W_4^{-3} & W_4^{-6} & W_4^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} W_4^0 &= \boxed{} \\ W_4^{-1} &= \boxed{} \\ W_4^{-2} &= \boxed{} \\ W_4^{-3} &= \boxed{} \end{aligned}$$



例題

離散的フーリエ変換(DFT)における回転演算子 $W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ $W_4 = e^{i\frac{2\pi}{4}}$
 において、 $N=4$ の場合、右のように簡単になる。

$N=4$ として $f(0)=1, f(1)=0, f(2)=1, f(3)=0$ のときのDFTを求めよ。

$$\begin{aligned} W_4^0 &= \\ W_4^{-1} &= \\ W_4^{-2} &= \\ W_4^{-3} &= \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ W_4^0 & W_4^{-2} & W_4^{-4} & W_4^{-6} \\ W_4^0 & W_4^{-3} & W_4^{-6} & W_4^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} \\ e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot (-1)} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot (-2)} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot (-3)} \\ e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot (-2)} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot (-4)} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot (-6)} \\ e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot (-3)} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot (-6)} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot (-9)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1+0 \\ 1-0i-1+0i \\ 1-0+1-0 \\ 1+0i-1-0i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



離散的フーリエ変換(DFT)における回転演算子
において、 $N=3$ の場合、右のように簡単になる。

$$W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

$N=3$ として $f(0)=1, f(1)=0, f(2)=1$ のときのDFTを求めよ。

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 \\ W_3^0 & W_3^{-1} & W_3^{-2} \\ W_3^0 & W_3^{-2} & W_3^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix}$$

$W_3^0 =$

$W_3^{-1} =$

$W_3^{-2} =$

