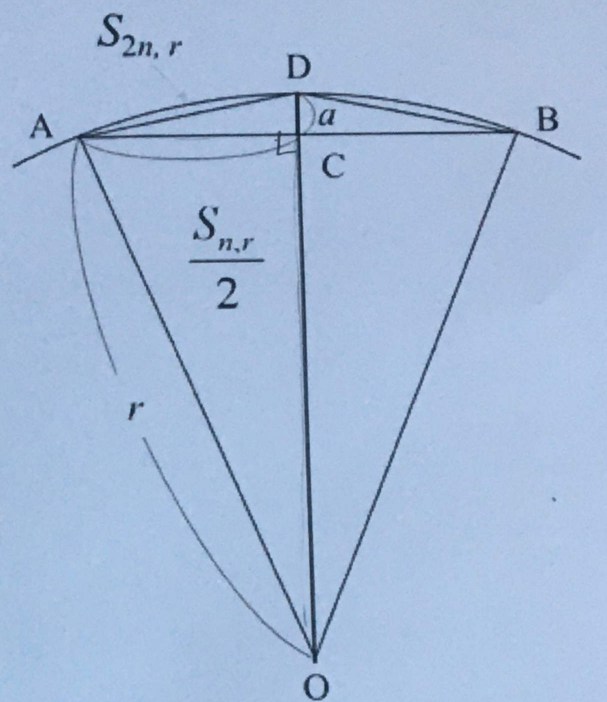
【演習2】

自分のノートに以下を写しながら計算し、
この紙は空欄を埋めて提出すること。

単位円の内接正N角形（右図）において
S_{2n}とS_nの関係（漸化式）は以下のように求められる。



⊿ACDにピタゴラスの定理を適用すると

$$S_{2n,r}{}^2 = \left(\frac{S_{n,r}}{2}\right)^2 + a^2 \qquad (1)$$

次に、⊿ OCAに適用すると

$$OC = r - a = \sqrt{r^2 - \boxed{\left(\frac{S_{n,r}}{2}\right)^2}} \qquad (2)$$

であるから、(1), (2)より

$$S_{2n,r}{}^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{\boxed{4} - \left(\boxed{\frac{S_{n,r}}{r}}\right)^2} \qquad (3)$$

【演習3】 出典：吉田 武著「新装版オイラーの贈物」、東海大学出版会2012年、p. 33 , p.163

指数関数e^xのマクローリン展開での剰余項について考えたい。

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k + R_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^{\boxed{n}} + R_{n+1}$$

における剰余項R_{n+1}を評価する。ラグランジュ型の剰余項: $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<c<x)$ を用いると

$$R_{n+1} = \frac{\boxed{e^x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\boxed{f(x) = e^x = \left(e^x\right)'}$$

となる。xを固定して考えると、$0<c<x$より、$1<e^c<e^x$であり

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = e^c \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^c \lim_{n\to\infty} a_n$$

とおく。ここで、$0<x<1$ の範囲にあれば、明らかに $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となるので、$x>1$の場合について考える。

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \frac{x}{\boxed{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = \boxed{0}$$

これにより、

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = e^c \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

すなわち、剰余項はゼロに収束する。従って、e^xの級数展開は実数全体で定義される。