[1]

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos\beta x \, dx$$

をβに関して微分する。

$$\frac{dI}{d\beta} = -\int_0^\infty \boxed{x e^{-\alpha^2 x^2} \sin\beta x} \, dx$$

これをxに関して部分積分する。

$$\frac{dI}{d\beta} = -\int_0^\infty x e^{-\alpha^2 x^2} \sin\beta x \, dx$$

$$= \boxed{\frac{1}{\beta}\left[x e^{-\alpha^2 x^2} \cos\beta x\right.}\Big]_0^\infty - \boxed{\frac{1}{\beta}}\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos\beta x \, dx$$

$$= -\boxed{\frac{1}{\beta}} I$$

よって、次式を得る。

$$\frac{dI}{I} = -\boxed{\frac{1}{\beta}} d\beta =$$

これを積分して、定数をCとして、下式を得る。

$$I = Ce^{-\boxed{\frac{1}{\beta}}}$$

[2] $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$ を導出する。

$I_1 = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} dx$ において $\alpha x = t$ とおくと、

$dx = \dfrac{dt}{\alpha}$ なので、次の積分 I_2 を求めればよい。

$$I_1 = \boxed{\frac{1}{\alpha}}\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \boxed{\frac{1}{\alpha}} I_2$$

I_2 において $t = yz$ とおくと、$dt = z\,dy$ であるから、

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-y^2 z^2} \cdot z\,dy = \int_0^\infty z \cdot e^{-y^2 z^2} dy$$

一方、$I_2 = \displaystyle\int_0^\infty e^{-z^2} dz$ とも書ける。

よって、

$$\begin{aligned} I_2^2 &= \int_0^\infty e^{-z^2} dz \int_0^\infty \boxed{e^{-y^2 z^2}}\, z\,dy \\ &= \int_0^\infty dy \int_0^\infty z \cdot \boxed{e^{-z^2} \cdot e^{-y^2 z^2}}\, dz \\ &= \int_0^\infty dy \int_0^\infty z \cdot e^{-z^2 (\boxed{1 + y^2})} dz \end{aligned}$$

と変形できる。

$$\int_0^\infty z e^{-z^2(1+y^2)} dz = \left[\frac{e^{-z^2(1+y^2)}}{-2(1+y^2)} \right]_0^\infty = \frac{1}{2(\boxed{1+y^2})}$$

$\frac{\sin}{\cos}$

よって、I_2^2 は、

$$I_2^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{\boxed{1+y^2}}$$

$$dy = \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$y \to \tan\theta$$

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ \infty & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$I_2^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\boxed{\frac{\pi}{2}}} \frac{\boxed{\frac{1}{\cos^2\theta}}}{1+\tan^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\boxed{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, d\theta$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

ここで、$I_2 > 0$ なので、

$$I_2 = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

よって、

$$\int_0^\alpha e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{\alpha} I_2 = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}}$$