自　主　課　題_2

$x^5-1=0$の根を求める（解答-1）

解　$x=1$が根であることを利用すると、与式は次のように因数分解できる。

$$x^5-1=(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right) \tag{1}$$

まず、右辺第2の因子である4次方程式

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0 \tag{2}$$

を解く。そこで、$x=0$は根ではないので

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \tag{3}$$

としてもよい。そこで、

$$t=x+\frac{1}{x} \tag{4}$$

おくと、

$x^5-1=0$の根を求める（解答-2）

解（続き）

$$t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \qquad (5)$$

だから、次の2次方程式を得る。

$$t^2 + t - 1 = 0 \qquad (6)$$

これを解いて、

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad (7)$$

の2根が得られる。

未知数を元に戻すと

$$x^2 - \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)x + 1 = 0,$$

$$x^2 + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)x + 1 = 0$$

の2つの２次方程式が得られる。
これらを解くと、１の５乗根が得られる。

$$x = 1,$$

$$\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right),$$

$$\frac{1}{4}\left(\boxed{-1-\sqrt{5} \pm} i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$

修正箇所〔赤枠〕