基礎フーリエ数学
フーリエ基礎（5）

フーリエ 級 数 展 開

1. ディリクレ条件
2. 前回演習と宿題の解説（復習）
3. 結果の比較検討
4. ランプ波形/のこぎり波形のフーリエ係数
5. ランプ波形/のこぎり波形のフーリエ波形
6. 演習、宿題、自主課題

2020/5/11_14

山林

フーリエ級数展開

・ ある区間[-π≦x<π]で定義された**任意の関数** $f(x)$を三角関数の級数$S_n(x)$で近似する。

$$S_n(x) \cong A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots A_n \cos nx$$
$$+B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots B_n \sin nx$$
$$= \sum_{k=0}^{n} A_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} B_k \sin kx$$

kを0からnまで1ずつ増やしながら$A_k \cos kx$の総和を計算する

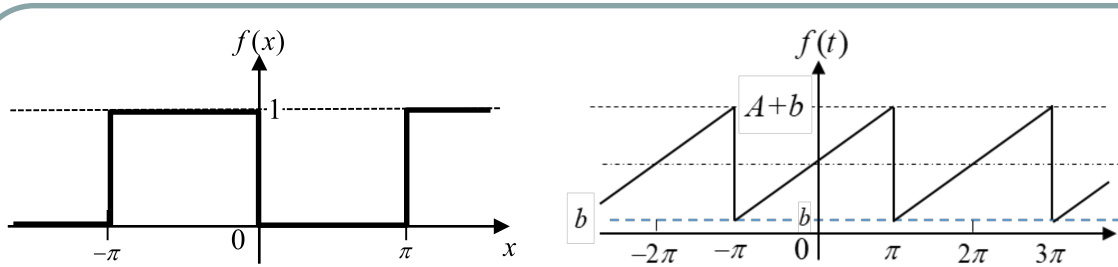
これを満たせばフーリエ級数展開可能

ディリクレ条件

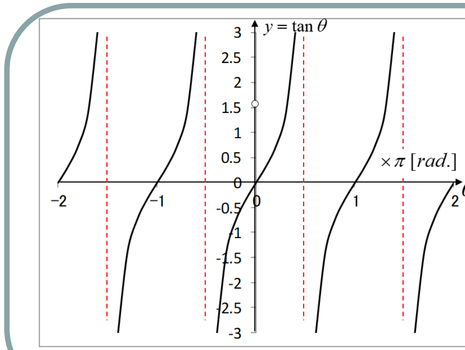
1. 周期関数である。
2. 区分的になめらか（区分的に連続で、その区間での微係数が連続）である。

区分的に連続＝定義区間内の有限個の第一種不連続点[A)]を除いて連続

A) 関数$f(x)$が定義される区間内部の点$x=a$において、
右極限$f(a+0)$と左極限$f(a-0)$が存在して　$f(a+0) \neq f(a-0)$



第一種不連続



第二種不連続

前回のまとめ

- 最小自乗法によりフーリエ展開係数が求められる。
- 初項$a_0/2$は定数部→ $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$
- コサイン級数の係数a_kは→ $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$
- サイン級数の係数はb_kは→ $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$
- 近似次数を増やすほど原関数に近づく。

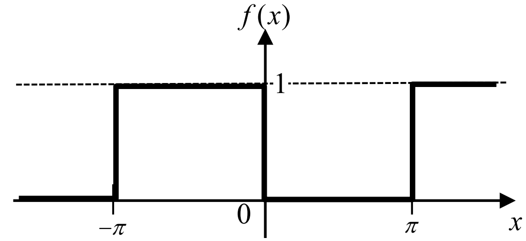
4_演習 (1/2)

学籍番号　クラス　出席番号
氏名

前回演習解答

次の周期的矩形波形のフーリエ級数展開を求めなさい。

$$f(x)=\begin{cases}1 & (-\pi<x\le 0)\\ 0 & (0<x\le\pi)\end{cases}$$



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}1dx+\int_{0}^{\pi}0dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi}\left[0-(-\pi)\right]=\frac{1}{\pi}\left[\pi\right]=1$$

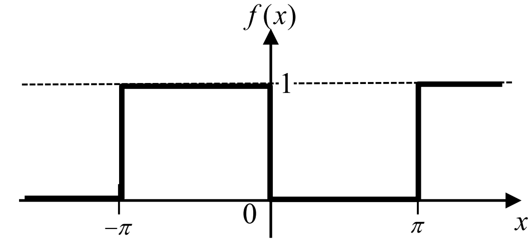
$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}1\cdot\cos kx dx+\int_{0}^{\pi}0\cdot\cos kx dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi k}\left[\sin k\cdot 0-\sin\left\{k\left(-\pi\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi k}\left[0-0\right]=0$$

4_演習 (2/2)



$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 1\cdot\sin kx dx + \int_{0}^{\pi} 0\cdot\sin kx dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{\pi k}\left[\cos(k\cdot 0) - \cos k(-\pi)\right] = -\frac{1}{\pi k}\left[1-(-1)^k\right]$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi k} & k\text{が奇数} \\ 0 & k\text{が偶数} \end{cases}$$

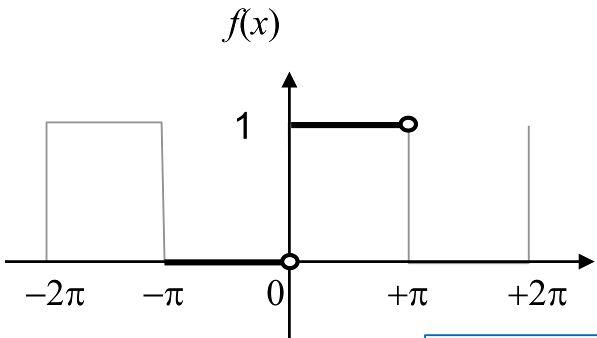
$$f(x) \cong \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(-\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{7}\sin 7x - \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots\right)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_k	1	0	0	0	0	0	0	0
b_k		$-\frac{2}{1\pi}$	0	$-\frac{2}{3\pi}$	0	$-\frac{2}{5\pi}$	0	$-\frac{2}{7\pi}$

比較検討

- 0-1の2値の矩形波



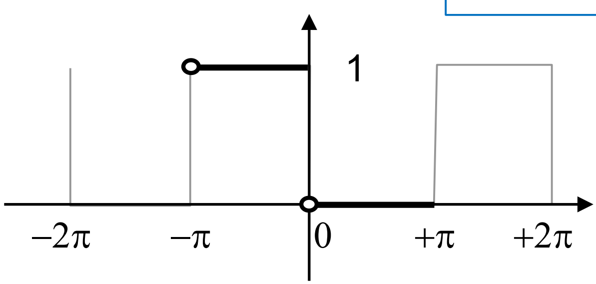
$$f(x) \cong \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots \right)$$

定数（直流）成分
（バイアス、オフセット）
は同じ

振幅
同じ

サイン級数成分は
符号反転

交流成分



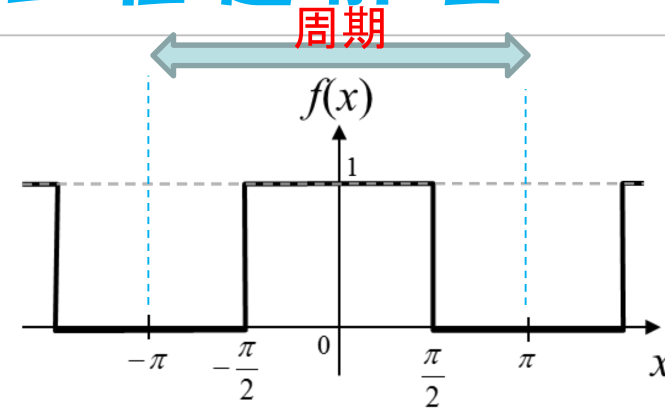
$$f(x) \cong \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(-\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{7}\sin 7x - \cdots \right)$$

4_宿題 (1/2)

学籍番号　クラス　出席番号
氏名

前回宿題解答

次の周期的矩形波形のフーリエ級数展開を求めなさい。



$$f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi < x \le -\pi/2)\\ 1 & (-\pi/2 < x \le \pi/2)\\ 0 & (\pi/2 < x \le \pi)\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2}0dx+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1dx+\int_{\pi/2}^{\pi}0dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

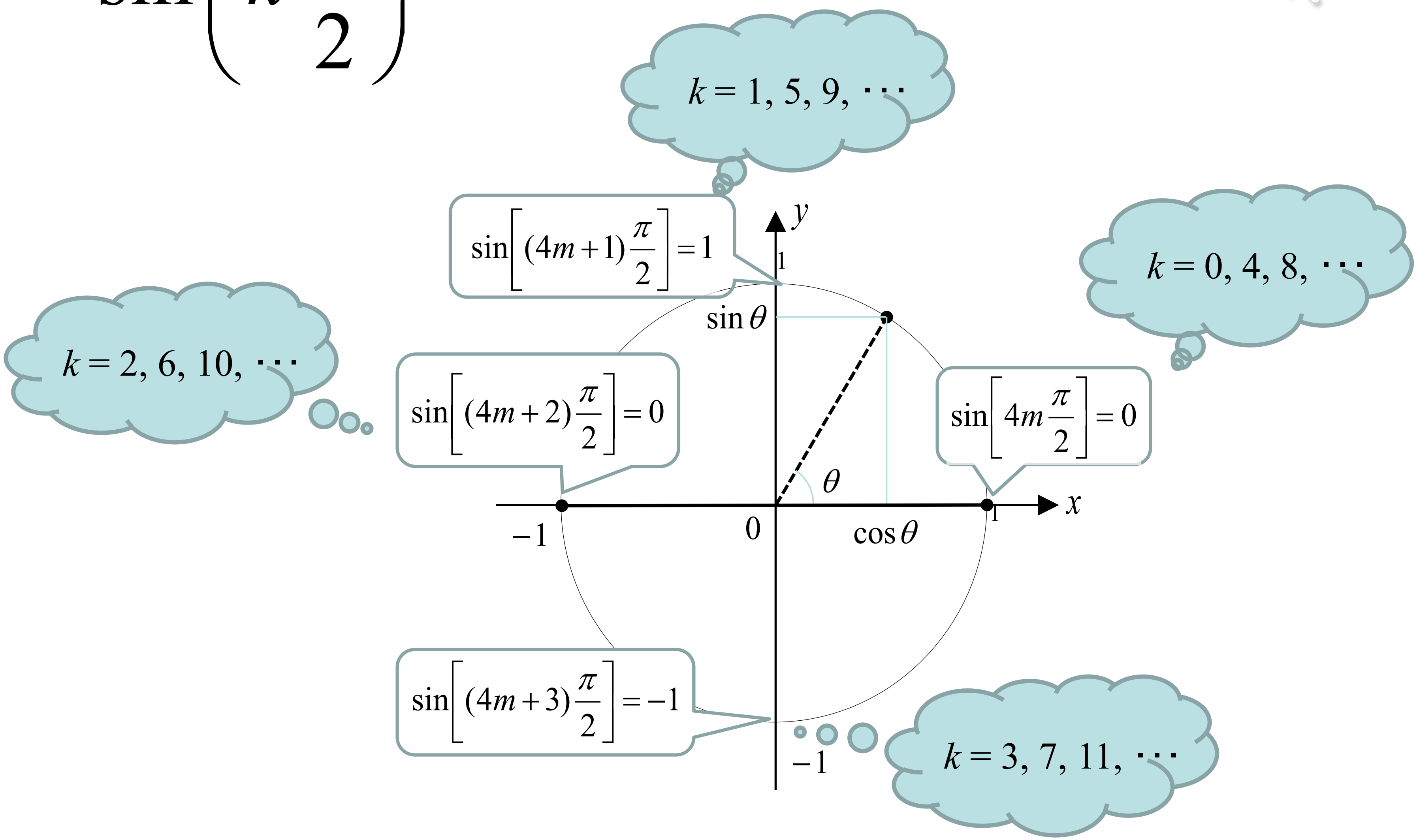
$$=\frac{1}{\pi}\left[\pi\right]=1$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2}0\cdot\cos kx dx+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}1\cdot\cos kx dx+\int_{\pi/2}^{\pi}0\cdot\cos kx dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{\pi k}\left[\sin k\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin k\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi k}\left\{\sin k\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin k\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{2}{\pi k}\sin k\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$



4_宿題 (2/2)

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 0\cdot\sin kx dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\cdot\sin kx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0\cdot\sin kx dx\right]$$

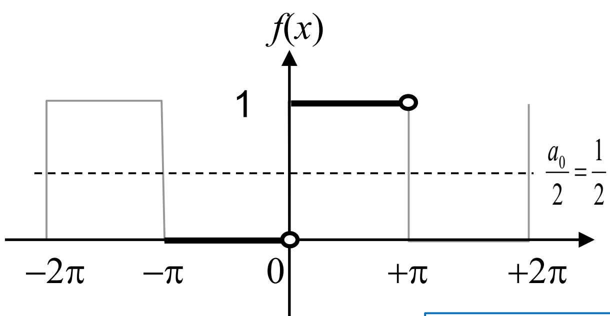
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi k}\left[\cos k\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos k\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left\{\cos k\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos k\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = 0$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_k	1	$\frac{2}{1\pi}$	0	$-\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$	0	$-\frac{2}{7\pi}$
b_k		0	0	0	0	0	0	0

比較検討

- 0-1の2値の矩形波

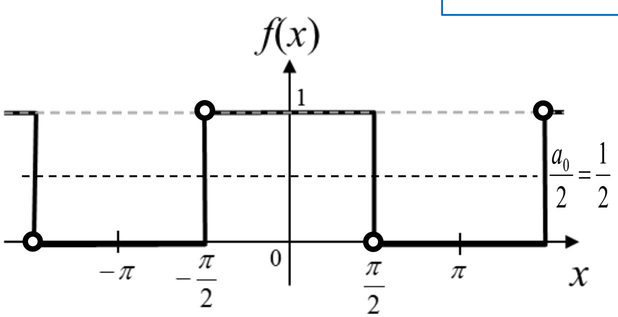


$$f(x) \cong \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots \right)$$

定数（直流）成分
（バイアス、オフセット）
は同じ

振幅
同じ

奇関数ではサイン級数成分のみ
偶関数ではコサイン級数成分のみ



$$f(x) \cong \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x - \cdots \right)$$

部分積分の復習[1]
《熟達者はスキップ可》

積の微分 →
$$\frac{d}{dx}(f\cdot g)=(f\cdot g)'=\underline{f'\cdot g+f\cdot g'}$$

$[a,b]$ 間で定積分する

$$\int_a^b (f\cdot g)'\,dx=\overbrace{[f\cdot g]_a^b=\int_a^b f'\cdot g\,dx+\int_a^b f\cdot g'\,dx}\qquad(1)$$

移項して
$$\int_a^b f\cdot g'\,dx=[f\cdot g]_a^b-\int_a^b f'\cdot g\,dx\qquad(2)$$

積の積分
は一方の因子を
何かの微分だとする。

微分する

そのまま

$$\boxed{\int_a^b \boxed{f}\cdot\boxed{g'}\,dx=\left[\boxed{f}\cdot\boxed{g}\right]_a^b-\int_a^b \boxed{f'}\cdot\boxed{g}\,dx}\qquad(3)$$

積分する

部分積分の例[2]

《熟達者はスキップ可》

積の積分
は一方の因子を
何かの微分だとする。

$$\int_a^b x\cdot\cos x\,dx=\int_a^b \boxed{x}\cdot\boxed{(\sin x)'}\,dx$$

そのまま

微分する

積分する

$$=\left[\boxed{x}\cdot\boxed{\sin x}\right]_a^b-\int_a^b \boxed{x'}\cdot\boxed{\sin x}\,dx$$

$$=\left[b\cdot\sin b-a\cdot\sin a\right]-\int_a^b 1\cdot\sin x\,dx$$

$$=\left[b\cdot\sin b-a\cdot\sin a\right]+\left[\cos x\right]_a^b$$

$$=\left[b\cdot\sin b-a\cdot\sin a\right]+\left[\cos b-\cos a\right]$$

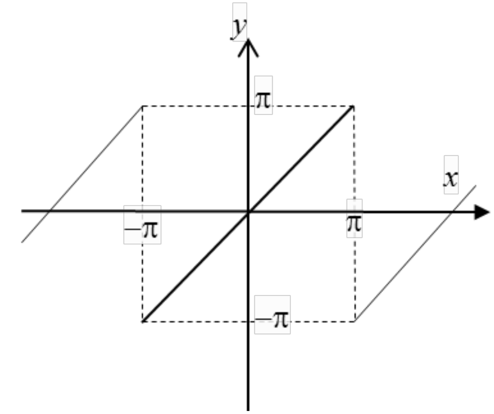
ランプ波形/のこぎり波（鋸歯状波）[1]

$$f(x) = x \quad [-\pi \le x < \pi]$$

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g' \, dx = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g \, dx}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(-\pi)^2\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2\right] = 0$$



ランプ波形（のこぎり波形）

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(\frac{\sin kx}{k}\right)' dx$$

$$\boxed{\sin(-x) = -\sin(x)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x}{k}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\{\pi\sin k\pi - (-\pi)\sin(-k\pi)\} - \frac{1}{k^2}[-\cos kx]_{-\pi}^{\pi}\right]$$

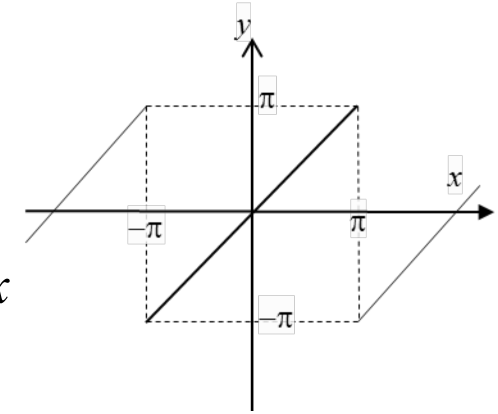
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{k}\{\sin k\pi - \sin k\pi\} + \frac{1}{k^2}[\cos k\pi - \cos(-k\pi)]\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{k}\{0\} - \frac{1}{k^2}[\cos k\pi - \cos k\pi]\right] = 0$$

$$\boxed{\cos x = \cos(-x)}$$

ランプ波形/のこぎり波（鋸歯状波）[2]

$$f(x) = x \quad [-\pi \le x < \pi]$$

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g' \, dx = \left[f \cdot g \right]_a^b - \int_a^b f' \cdot g \, dx}$$



ランプ波形（のこぎり波形）

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \left(\frac{-\cos kx}{k} \right)' dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \left[-\frac{x}{k}\cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\left\{ \pi \cos k\pi - (-\pi)\cos(-k\pi) \right\} + \frac{1}{k^2}\left[\sin kx \right]_{-\pi}^{\pi} \right]$$

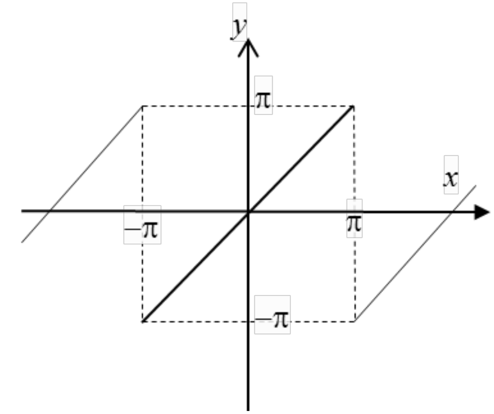
$$\boxed{\cos x = \cos(-x)}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\left\{ 2\pi \cos k\pi \right\} + \frac{1}{k^2}\left[\sin k\pi - \sin(-k\pi) \right] \right]$$

$$= -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

ランプ波形/のこぎり波（鋸歯状波）[3]

$$f(x) = x \quad [-\pi \le x < \pi]$$



ランプ波形（のこぎり波形）

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0,$$

$$b_k = -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \qquad (k \ge 1)$$

k	1	2	3	4	5	6
b_k	2	$2\cdot\frac{-1}{2}=-1$	$2\cdot\frac{-1}{3}=\frac{2}{3}$	$2\cdot\frac{-1}{4}=-\frac{1}{2}$	$2\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$	$2\cdot\frac{-1}{6}=-\frac{1}{3}$

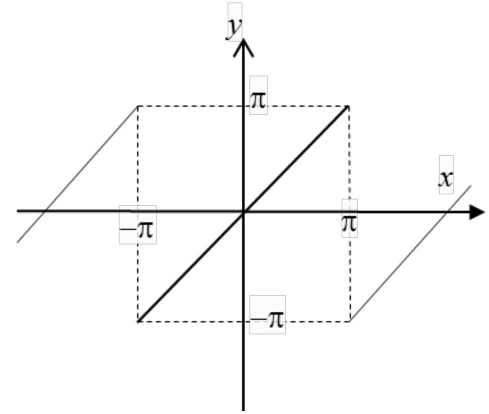
$$S_6(x) = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x - \frac{1}{3}\sin 6x$$

$$= 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{6}\sin 6x\right)$$

ランプ波形/のこぎり波（鋸歯状波）[4]

$$f(x) = x \quad [-\pi \le x < \pi]$$

$$S_6(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{6}\sin 6x \right)$$



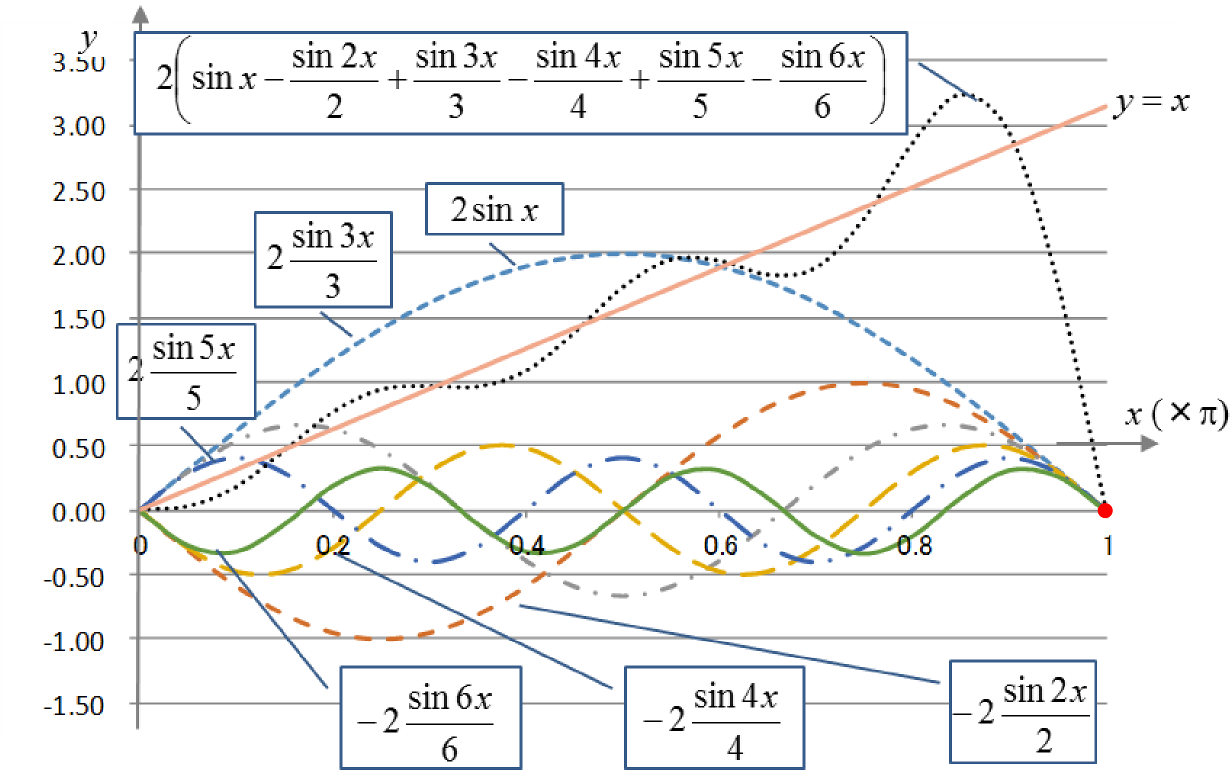
ランプ波形（のこぎり波形）

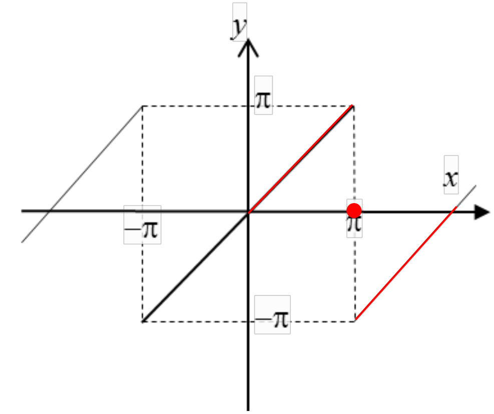
ランプ波のフーリエ成分 ($0 \leqq x \leqq \pi$, $k = 1 \sim 6$)

$\sin(0.9 * \pi)$

x/π	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\sin x$	0.00	0.31	0.59	0.81	0.95	1.00	0.95	0.81	0.59	0.31	0.00
$(\sin 2x)/(-2)$	0.00	−0.29	−0.48	−0.48	−0.29	0.00	0.29	0.48	0.48	0.29	0.00
$(\sin 3x)/(3)$	0.00	0.27	0.32	0.10	−0.20	−0.33	−0.20	0.10	0.32	0.27	0.00
$(\sin 4x)/(-4)$	0.00	−0.24	−0.15	0.15	0.24	0.00	−0.24	−0.15	0.15	0.24	0.00
$(\sin 5x)/(5)$	0.00	0.20	0.00	−0.20	0.00	0.20	0.00	−0.20	0.00	0.20	0.00
$(\sin 6x)/(-6)$	0.00	−0.16	0.10	0.10	−0.16	0.00	0.16	−0.10	−0.10	0.16	0.00
$S_6(x)$	0.00	0.18	0.76	0.96	1.08	1.73	1.94	1.89	2.86	2.94	0.00

ランプ波形/のこぎり波（鋸歯状波）[5]





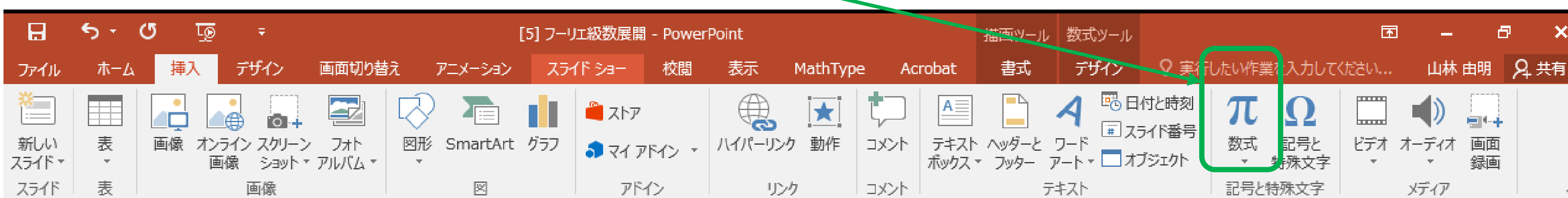
ランプ波形（のこぎり波形）

参考情報

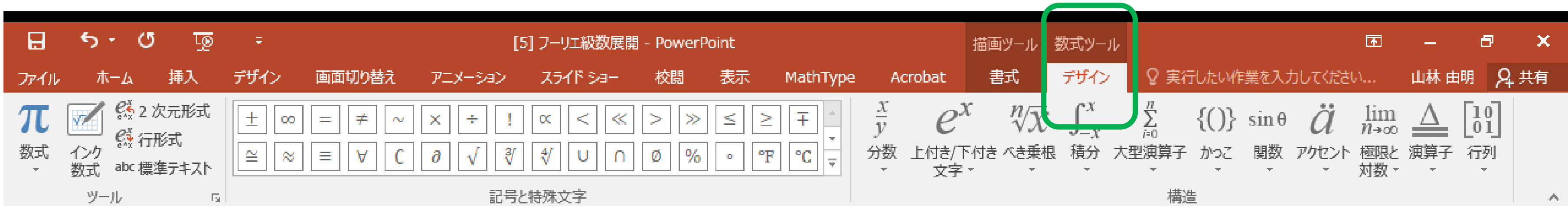
数式エディタの使い方

《パワーポイントの場合》

- ここをクリックすると
- 操作リボンが現れます。



$$A = \pi r^2$$



5_演習

学籍番号	b	学年		ｸﾗｽ	
出席番号		氏名			

- 次の1次から7次までのﾌｰﾘｴ成分を計算して、その総和を求めてみよう。

$$S_7(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{7}\sin 7x\right)$$

x/π	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\sin x$											
$(\sin 2x)/(-2)$											
$(\sin 3x)/(3)$											
$(\sin 4x)/(-4)$											
$(\sin 5x)/(5)$											
$(\sin 6x)/(-6)$											
$(\sin 7x)/(7)$											
$S_7(x)$											

注意

- 電卓で計算するときは角度がラジアンのﾓｰﾄﾞになっていることを確認すること。
- CASIOの"*fx*系"電卓では「SHIFT」→「SETUP」→「4: Rad」

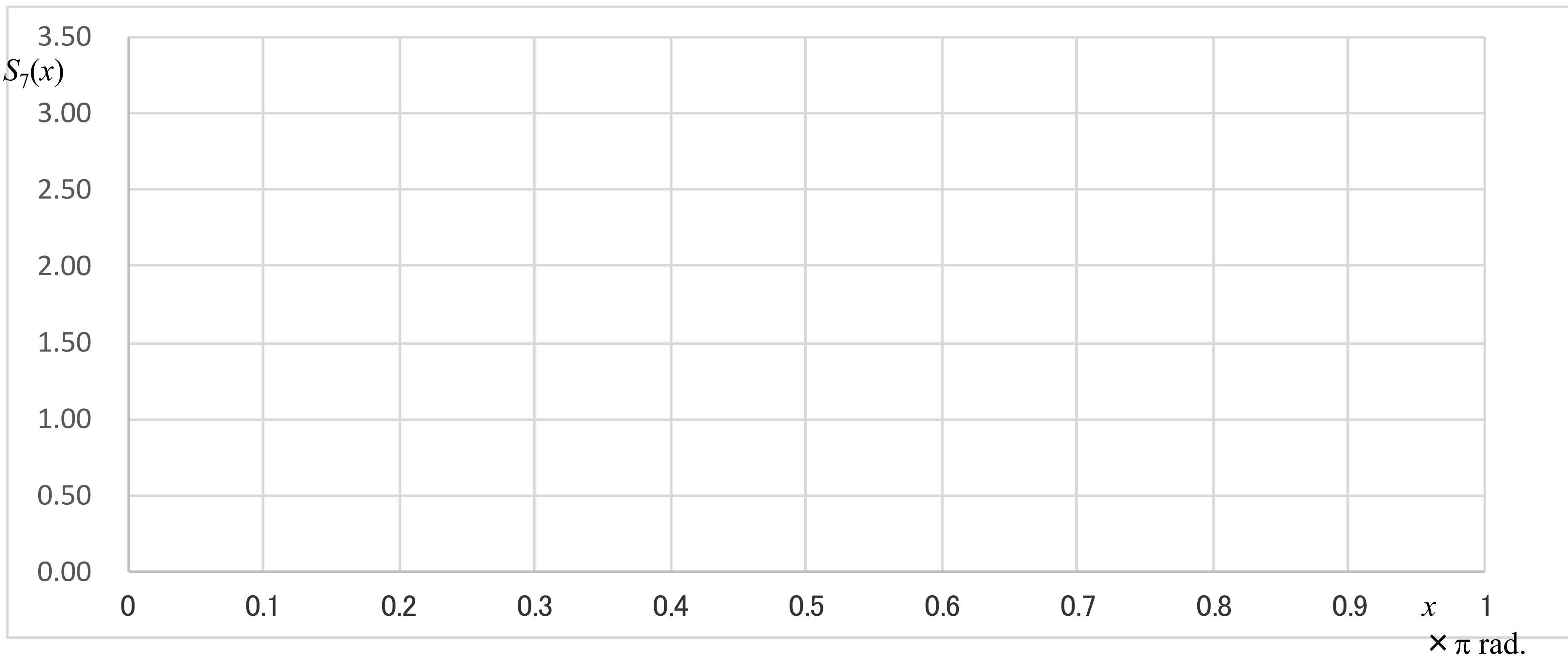
5_宿題

学籍番号	b	学年		クラス	
出席番号		氏名			

- 次の1次から7次までのﾌｰﾘｴ成分の総和をグラフにプロットしてみよう。

$$S_7(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{7}\sin 7x \right)$$

注：エクセルなど数値計算ソフトの結果を貼り付けても良い。



学籍番号　b　　　　　　　　クラス

出席番号　　　　　　　氏名

オイラーの手紙(1744年)

に現れた(たぶん)史上初の「フーリエ級数」

$$x(t)=\frac{\pi-t}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}=\sin t+\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}+\cdots \qquad (1)$$

を求めてみよう。オイラーはまず等比級数 $S(t)=e^{it}+e^{i2t}+e^{i3t}\cdots$

を考えた。収束性の問題（例えば $S(0)=1+1+1+\cdots=\infty$）に構わずに普通に「和」を求めた。つまり両辺に e^{it} を掛けて

$$e^{it}S(t)=e^{i2t}+e^{i3t}+e^{i4t}\cdots$$

$$S(t)-e^{it}S(t)=e^{it}$$

を得る。よって次のように書ける。

$$S(t)=\frac{e^{it}}{1-e^{it}} \qquad (2)$$

すると、

$$S(t)=\frac{e^{it}}{1-e^{it}}=\boxed{}$$

$$=\boxed{}+i\frac{\sin t}{1-\cos t} \qquad (3)$$

一方、$S(t)$にオイラーの公式を適用すると、

$$S(t)=e^{it}+e^{i2t}+e^{i3t}\cdots$$

$$=\boxed{}\cdots+i(\boxed{}\cdots) \qquad (4)$$

これら式(3), (4)の実部を比較すると

$$\cos t+\cos 2t+\cos 3t+\cdots=\boxed{}$$

これを項別に積分して次式を得る。

$$\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots=-\boxed{}+C.$$

ただし、Cは<u>積分定数でπ/2に等しい</u>。よって

なぜ、積分定数はπ/2に等しいと言えるのか？
（別途証明すること）
ヒント「ライプニッツの公式」

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}=\sin t+\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}+\cdots=-\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi-t}{2}=x(t)$$