自主課題 [1]　ディリクレの不連続積分（前半部）オイラーによる

学籍番号 b 2190290　クラス 2C

出席番号 8　氏名 大友 一樹

$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin s}{s}\,ds = \frac{\pi}{2}}$　(0)　が成り立つことを示したい。

Hints

$$\int_a^b f\cdot g'\,dx = \left[f\cdot g\right]_a^b - \int_a^b f'\cdot g\,dx$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + C = \mathrm{Arctan}\,x + C$$

まず、関数 $g(y)$ を次の積分によって定義する。

$$g(y) = \int_0^\infty e^{-sy}\frac{\sin s}{s}\,ds, \quad y \ge 0 \qquad (1)$$

$g(y)$ を y で微分すると次式が得られる。

$$\frac{g(y)}{dy} = \int_0^\infty \frac{d}{dy}\left\{e^{-sy}\frac{\sin s}{s}\right\}ds = \boxed{\int_0^\infty -e^{-sy}\sin s\,ds} \qquad (2)$$

部分積分を2回行うと、

$$\frac{dg}{dy} = \boxed{\frac{1}{y^2+1}} \qquad (3)$$

が得られる。これを積分して次式を得る。

$$g(y) = C - \tan^{-1}y \qquad (4)$$

$g(\infty)$ はゼロなので、$g(\infty) = 0 = C - \tan^{-1}(\infty) = C - \boxed{\frac{\pi}{2}}$ となるから、

$$g(y) = \int_0^\infty e^{-sy}\frac{\sin s}{s}\,ds = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(y) \qquad (5)$$

$y = 0$ とおくと、 $\tan^{-1}(0) = 0$ であるから式（0）が得られる。