ラプラス逆変換

Introduction to Fourier Analysis #14

山林　由明

2020.7.13_16

学籍番号　b　　　　　クラ　　　　席番号　　　　氏名

演習解答

$$L\left[e^{\gamma t}\right]=\int_0^\infty e^{\gamma t}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-(p-\gamma)t}dt=\frac{1}{(p-\gamma)}=F(p) \quad [1]$$

$$L\left[f^{(-1)}(t)\right]=L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(p)}{p}+\frac{f^{(-1)}(0)}{p} \quad [2]$$

$$L\left[e^{\gamma t}\right]=F(p)$$

積分

$$L\left[\int_0^t e^{\gamma x}dx\right]=\frac{F(p)}{p}$$

微分

問題：以上から $F(p)=\dfrac{1}{p(p-2)}$ の原関数 $f(t)=L^{-1}[F(p)]$ を求めなさい。ただし、$f^{(-1)}(0)=0$ としてよい。

$$L\left[e^{2t}\right]=\frac{1}{(p-2)}=F_1(p)$$

積分変数を τ(tau)として
0 から t まで積分

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p(p-2)}\right]=L^{-1}\left[F(p)\right]=L^{-1}\left[\frac{F_1(p)}{p}\right]=\int_0^t e^{2\tau}d\tau=\frac{1}{2}\left(e^{2t}-1\right)$$

宿題解答

$$L\left[e^{\pm\gamma t}\right]=\int_0^\infty e^{\pm\gamma t}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-(p\mp\gamma)t}dt=\frac{1}{(p\mp\gamma)}$$

$$L\left[f^{(-1)}(t)\right]=L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(p)}{p}+\frac{f^{(-1)}(0)}{p}$$

問題：以上から $F(p)=\dfrac{1}{p\left(p^2-1\right)}$ の原関数$f(t)$を求めなさい。ただし、$f^{(-1)}(0)=0$としてよい。

$$F(p)=\frac{1}{p\left(p^2-1\right)}=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)=F_2(p)-F_3(p)$$

$$F_4(p)=\frac{1}{(p-1)}=L\left[e^t\right]$$

$$F_5(p)=\frac{1}{(p+1)}=L\left[e^{-t}\right]$$

$$F_2(p)=\frac{F_4(p)}{2p}=\frac{1}{2p(p-1)}=L\left[\frac{1}{2}\int_0^t e^\tau d\tau\right]=L\left[\frac{1}{2}\left[e^\tau\right]_0^t\right]=L\left[\frac{1}{2}\left(e^t-1\right)\right]$$

$$F_3(p)=\frac{F_5(p)}{2p}=\frac{1}{2p(p+1)}=L\left[\frac{1}{2}\int_0^t e^{-\tau} d\tau\right]=L\left[-\frac{1}{2}\left[e^{-\tau}\right]_0^t\right]=L\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-t}-1\right)\right]$$

宿題解答（つづき）

$$F_2(p) - F_3(p) = L\left[\frac{1}{2}\left(e^t - 1\right)\right] - L\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-t} - 1\right)\right] = L\left[\frac{1}{2}\left(e^t - 1\right) + \left(e^{-t} - 1\right)\right]$$

$$= L\left[\frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) - 1\right] = L\left[\cosh(t) - 1\right]$$

$$F(p) = \frac{1}{p\left(p^2 - 1\right)} = L\left[\cosh(t) - 1\right] = L\left[f(t)\right]$$

よって像関数 $\dfrac{1}{p\left(p^2-1\right)}$ の原関数は $\cosh(t) - 1$ である。

ラプラス変換（復習）

フーリエ変換

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\alpha + i\omega) t} dt$$

$$L(p) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$p = \alpha + i\omega$$

- 純虚数$i\omega$が複素数sになっている。
- 積分範囲が$-\infty$からでなくゼロから始まっている。
- 過渡現象（$t < 0$ で $f(t) = 0$）だけに用いられる。
- 逆変換に複素関数論を利用する。

ラプラス変換とラプラス逆変換（復習）

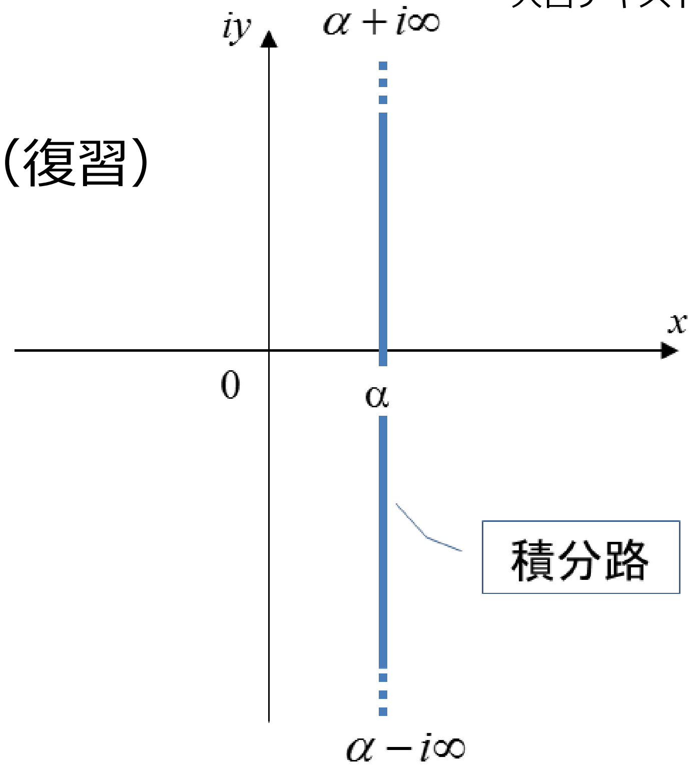
- ラプラス変換

$$F(p)=L\left[f(t)\right]=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

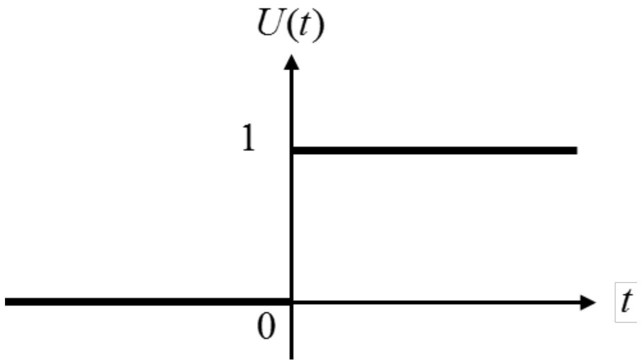
- ラプラス逆変換

$$L^{-1}\left[F(p)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p)e^{pt}dt=f(t)U(t)$$

$t<0$ (負のt)
ではゼロ

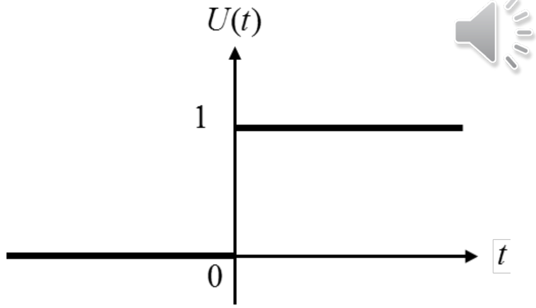


ラプラス逆変換における積分路



単位ステップ関数　$U(t)$

ラプラス変換の例[1]（復習）



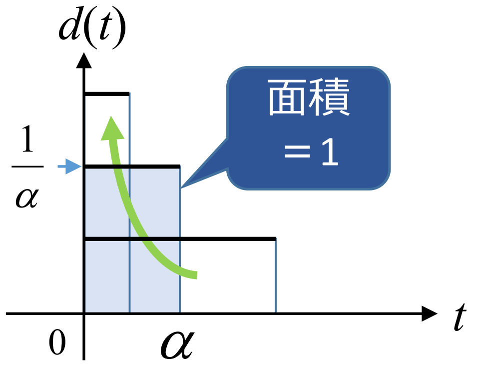
単位ステップ関数　$U(t)$

$$L[U(t)]=\int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}dt=\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^\infty=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-pb}-e^0}{-p}\right]=\left[\frac{-1}{-p}\right]=\frac{1}{p}$$

1/p を逆変換したら単位ステップ関数

原点のぎりぎり正側に
立つデルタ関数

$$\lim_{\alpha\to 0} d(t)=\delta(t-0)$$



$$L[\delta(t-0)]=\int_0^\infty \delta(t-0)e^{-pt}dt=e^{-p\cdot 0}=1$$

1 を逆変換したらデルタ関数

$$L\left[e^{\mp\gamma t}\right]=\int_0^\infty e^{\mp\gamma t}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-(p\pm\gamma)t}dt=\left[\frac{e^{-(p\pm\gamma)t}}{-(p\pm\gamma)}\right]_0^\infty=\frac{-1}{-(p\pm\gamma)}=\frac{1}{p\pm\gamma}$$

1/(p±γ) を逆変換したら指数関数　$e^{\mp\gamma t}$

$$L\left[\sin\omega t\right]=\int_0^\infty \frac{\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)}{2i}\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{2i}\int_0^\infty\left(e^{-(p-i\omega)t}-e^{-(p+i\omega)t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{\left[\frac{e^{-(p-i\omega)t}}{-(p-i\omega)}\right]_0^\infty-\left[\frac{e^{-(p+i\omega)t}}{-(p+i\omega)}\right]_0^\infty\right\}=\frac{1}{2i}\left\{\left[\frac{-1}{-(p-i\omega)}\right]-\left[\frac{-1}{-(p+i\omega)}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{(p+i\omega)-(p-i\omega)}{(p-i\omega)(p+i\omega)}\right]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ を逆変換したら正弦関数 $\sin\omega t$

$$L\left[\cos\omega t\right]=\int_0^\infty \frac{\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)}{2}\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(e^{-(p-i\omega)t}+e^{-(p+i\omega)t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{e^{-(p-i\omega)t}}{-(p-i\omega)}\right]_0^\infty+\left[\frac{e^{-(p+i\omega)t}}{-(p+i\omega)}\right]_0^\infty\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-1}{-(p-i\omega)}\right]+\left[\frac{-1}{-(p+i\omega)}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(p+i\omega)+(p-i\omega)}{(p-i\omega)(p+i\omega)}\right]=\frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ を逆変換したら正弦関数 $\cos\omega t$

$$L\left[te^{-\gamma t}\right]=\int_0^\infty te^{-\gamma t}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty te^{-(p+\gamma)t}dt=\int_0^\infty t\left(\frac{e^{-(p+\gamma)t}}{-(p+\gamma)}\right)'dt$$

$$=\left[t\left(\frac{e^{-(p+\gamma)t}}{-(p+\gamma)}\right)\right]_0^\infty-\int_0^\infty t'\left(\frac{e^{-(p+\gamma)t}}{-(p+\gamma)}\right)dt=\int_0^\infty\frac{e^{-(p+\gamma)t}}{(p+\gamma)}dt$$

$$=\frac{1}{(p+\gamma)}\left[\frac{e^{-(p+\gamma)t}}{-(p+\gamma)}\right]_0^\infty=\frac{1}{-(p+\gamma)^2}[0-1]=\frac{1}{(p+\gamma)^2}$$

$1/(p+\gamma)^2$ を逆変換したら指数関数 $te^{-\gamma t}$

主な原関数と像関数

$f(t)$,　　$t>0$	$F(p)$	$f(t)$,　　$t>0$	$F(p)$
1	$\dfrac{1}{p}$	$\cos(\omega t+\theta)$	$\dfrac{p\cos\theta-\omega\sin\theta}{p^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1	$\sin(\omega t+\theta)$	$\dfrac{p\sin\theta+\omega\cos\theta}{p^2+\omega^2}$
$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$	$\cosh\alpha t$	$\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\sinh\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
$te^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$	$f'(t)=f^{(1)}(t)$	$pF(s)-f(0)$
$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^n}$	$\int f(t)dt=f^{(-1)}(t)$	$\dfrac{F(p)-f^{(-1)}(0)}{p}$

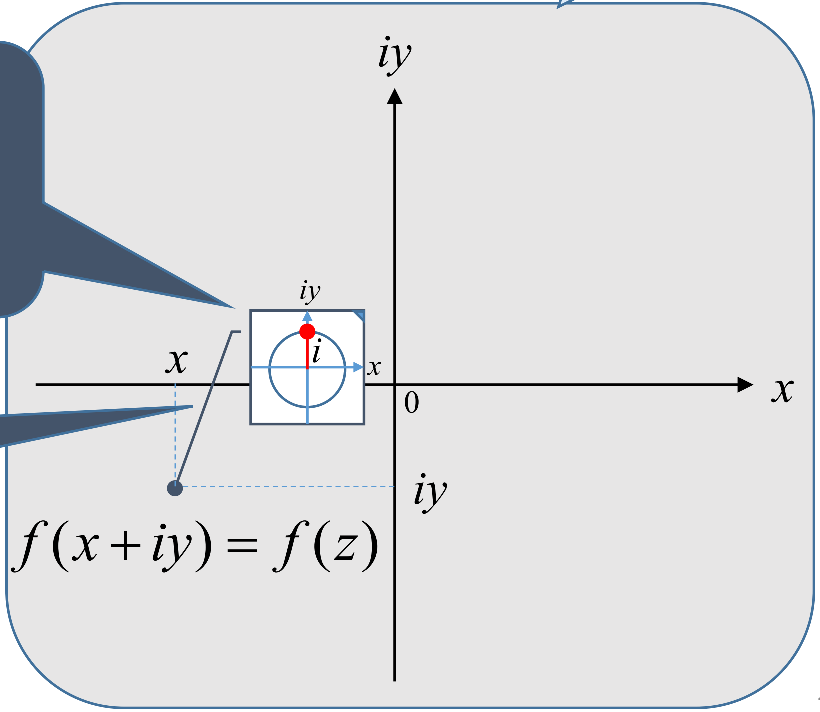
ラプラス逆変換

$$L^{-1}\left[F(p)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(p)e^{pt}dt=f(t)\,U(t)$$

この複素平面
が変数域

関数値も複素数
(複素平面が必要)

画鋲の上の小さな
複素平面を想定

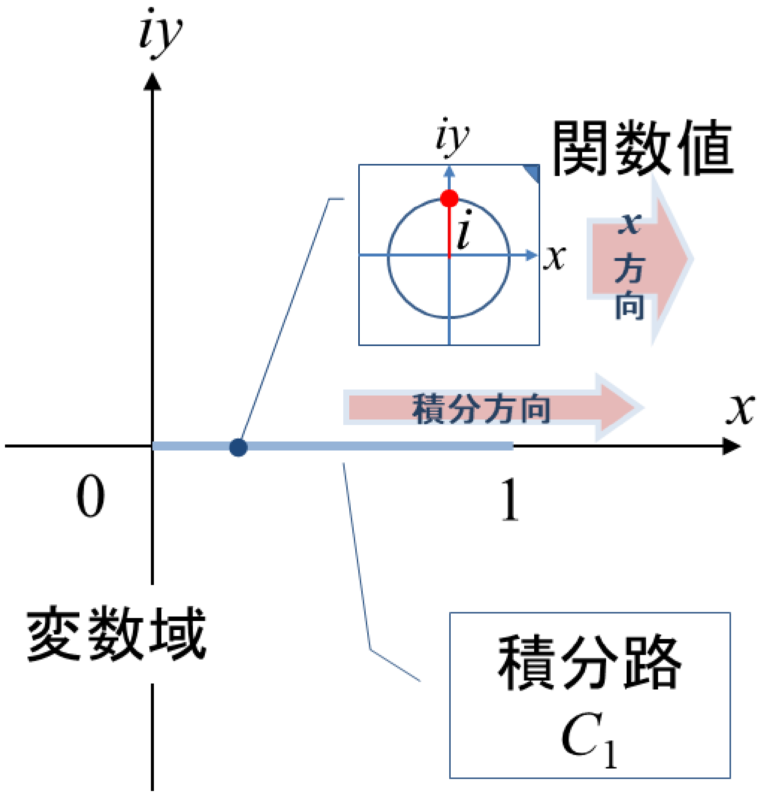


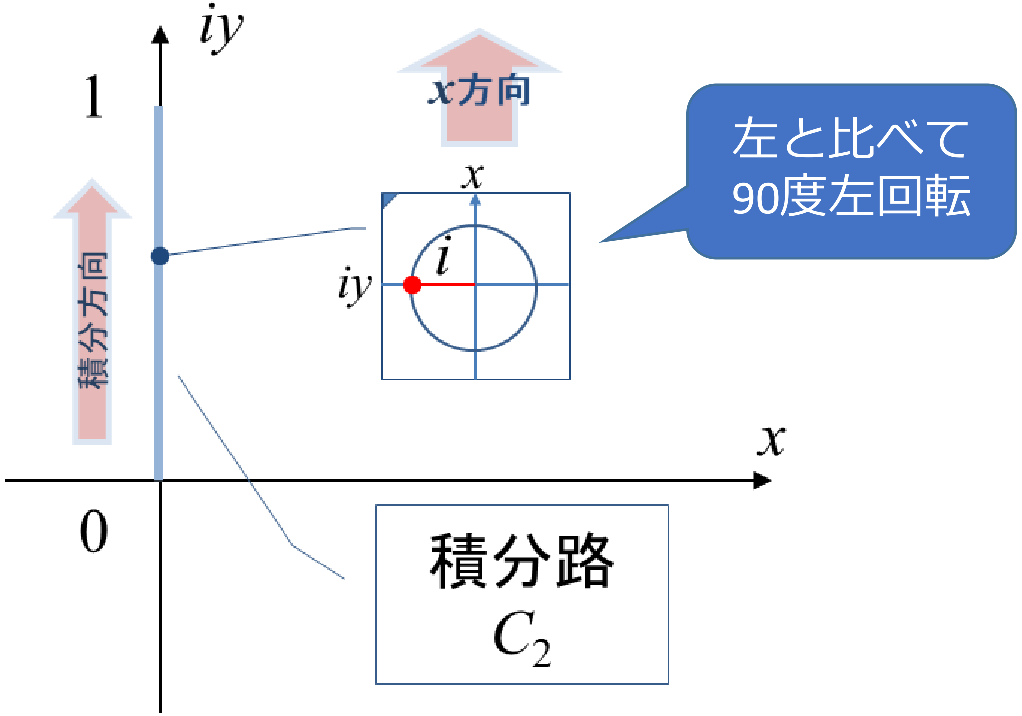
$$f(x+iy)=f(z)$$

複素積分[1]

$$\int_{C_1} i dz = \int_0^1 i dt = i[t]_0^1 = \boxed{i} \quad C_1 = \{z | z = t, 0 \le t \le 1\}$$

$$\int_{C_2} i dz = \int_0^1 i \cdot i dt = -[t]_0^1 = \boxed{-1} \quad C_2 = \{z | z = it, 0 \le t \le 1\}$$



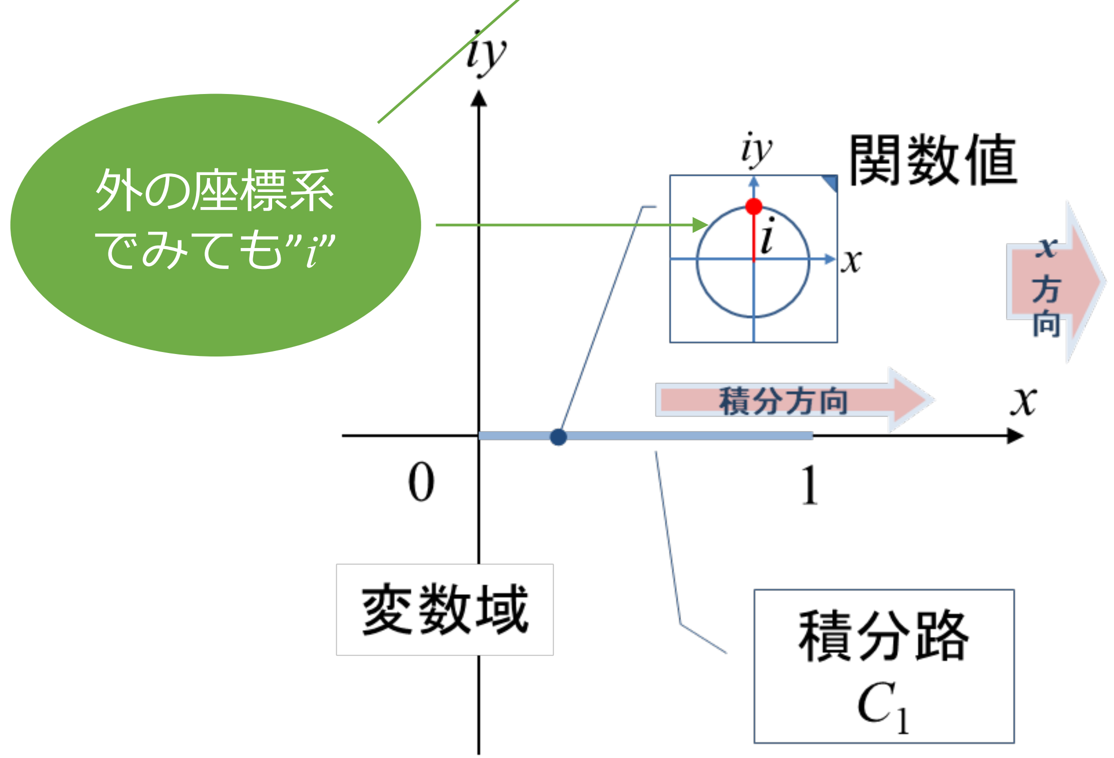


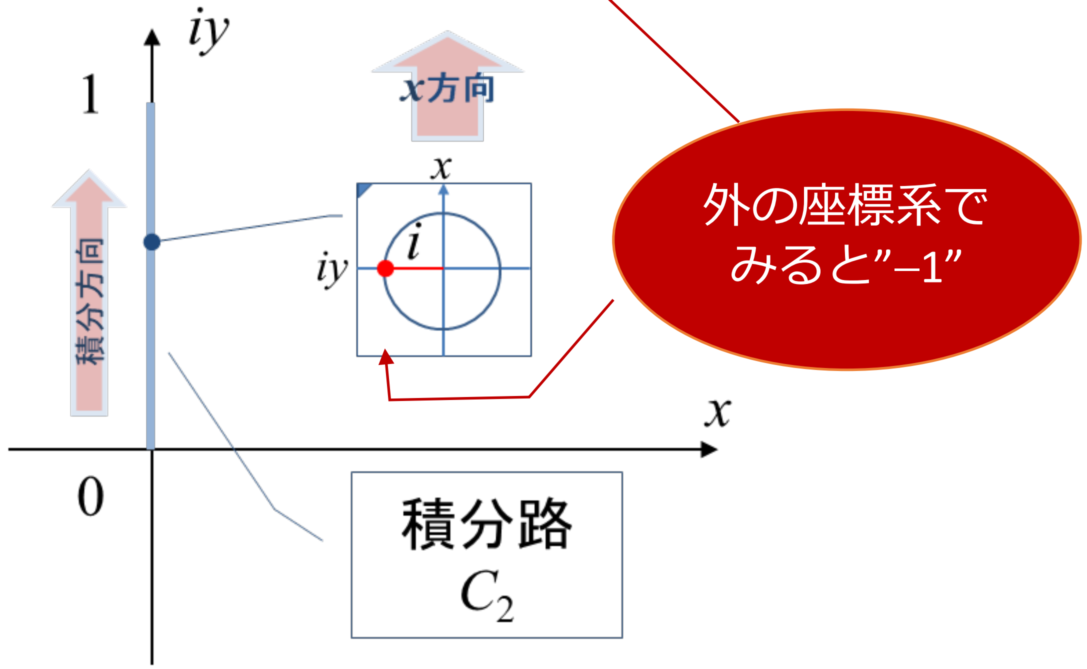
複素積分[2]

複素数を積分すると
積分路によって積分値が変わる

$$\int_{C_1} i\,dz = \int_0^1 i\,dt = i\left[t\right]_0^1 = \boxed{i} \quad C_1 = \left\{ z \middle| z = t,\, 0 \le t \le 1 \right\}$$

$$\int_{C_2} i\,dz = \int_0^1 i \cdot i\,dt = -\left[t\right]_0^1 = \boxed{-1} \quad C_2 = \left\{ z \middle| z = it,\, 0 \le t \le 1 \right\}$$





「積分路をたどる方向が、吹き出し内でのx軸の正方向になる」

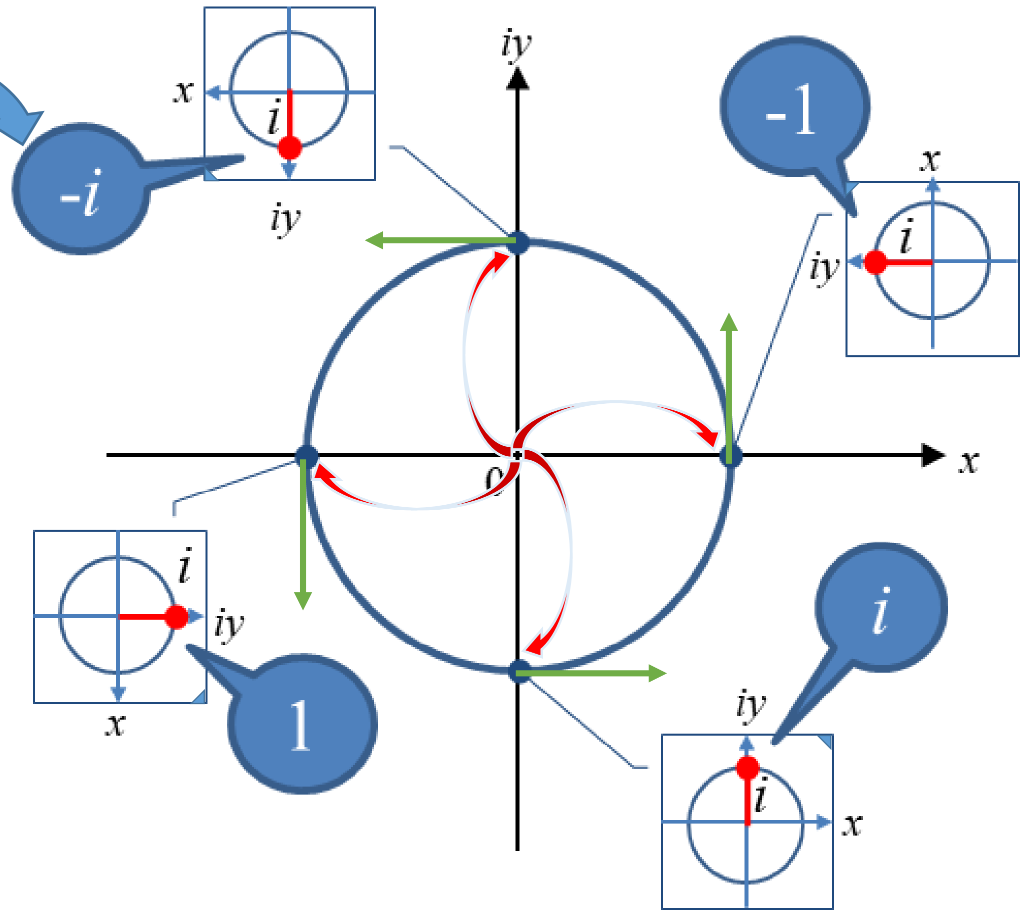
複素積分[3]

「積分路をたどる方向が、吹き出し内でのx軸の正方向になる」

外から見たら

<u>広い複素平面の立場では、</u>
互いに同絶対値で
逆符号
になっている

定数関数は
周回積分するとゼロ



円形の積分路での積分

複素積分[4]

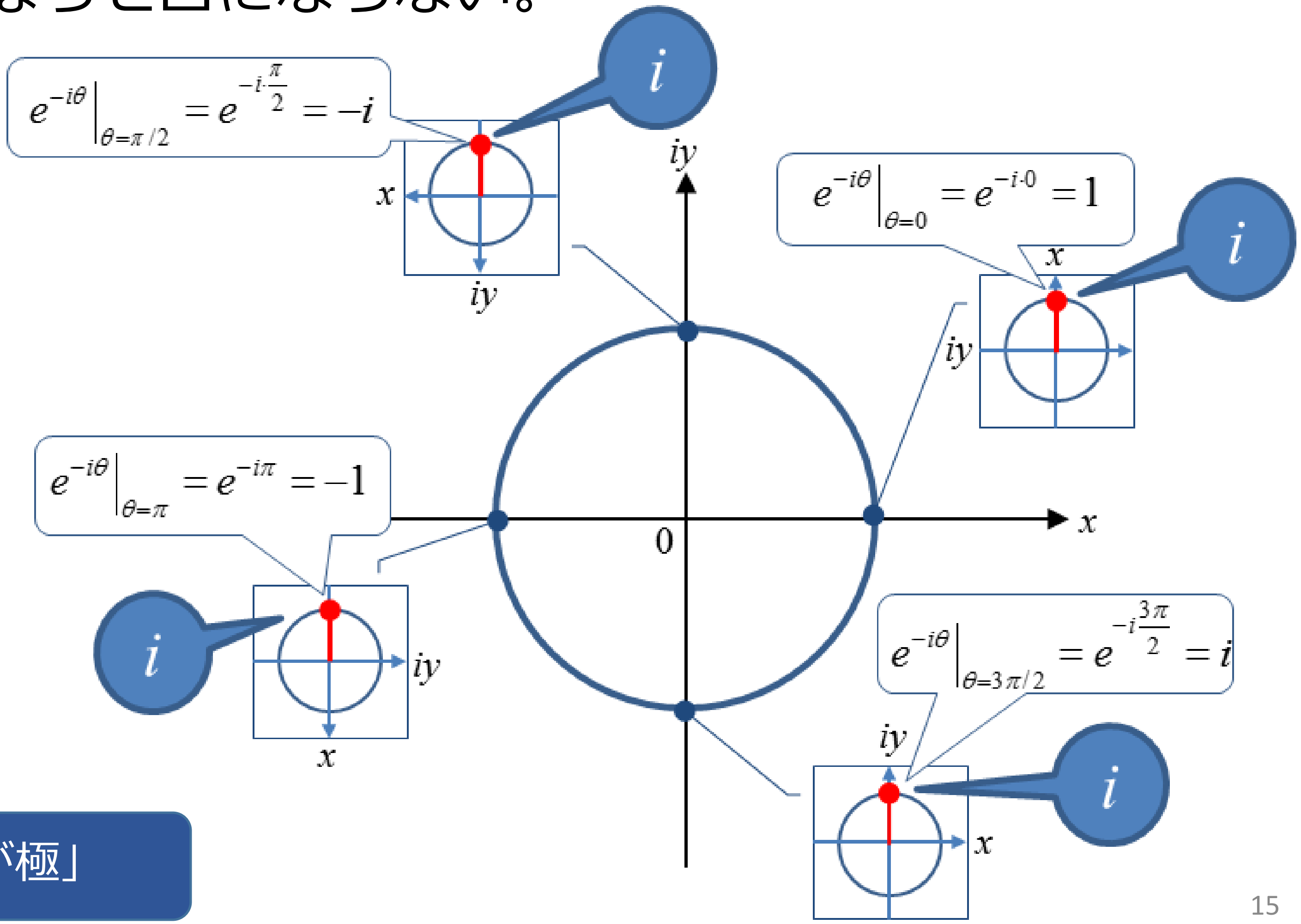
一周まわって積分する間に、吹き出し中の関数値が逆方向に１回転して、
積分路の回転を打ち消す関数ならゼロにならない。

絶対値
＝1

$$\boxed{\frac{1}{z} = e^{-i\theta}}$$ は
周回積分すると
$2\pi i$

$$\int_C \frac{A}{z} dz = 2\pi i A$$

「z＝0が極」



複素積分[5]

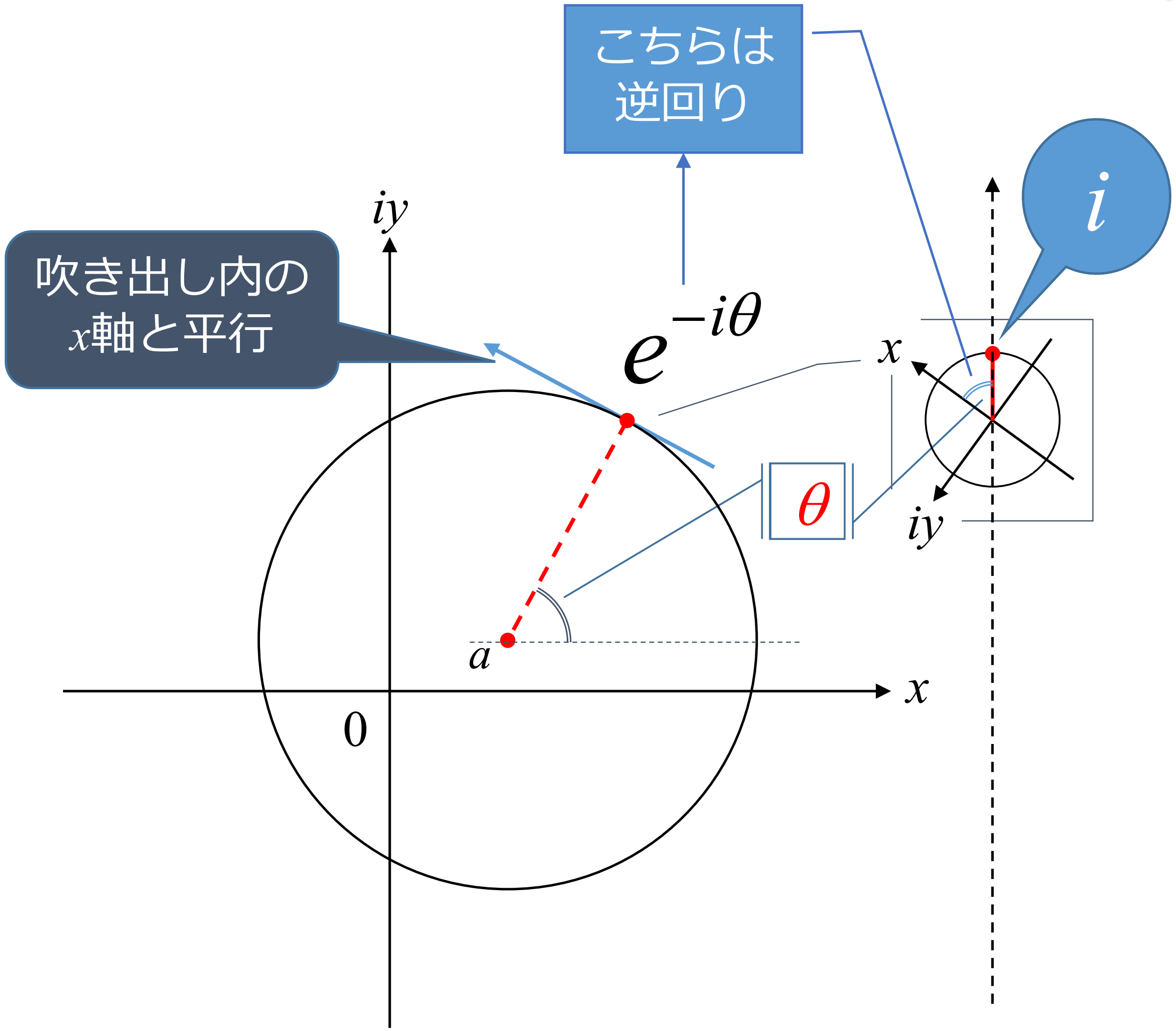
$\frac{1}{z} = e^{-i\theta}$ は周回積分すると$2\pi i$

周回積分路に入っていれば、
a へ平行移動しても同じ

極の周りを
周回積分すれば

$$\int_C \frac{A}{z-a} dz = 2\pi i A$$

「$z = a$ が極」



$e^{-i\theta}$の周回積分（一般の角）

コーシーの積分公式 [1]

定理：$f(z)$が微分可能な関数（解析的）であれば、領域Dの中の
任意の点z_0とその領域の中の閉曲線Cに対して、

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

証明

$f(z)=f(z_0)+\left[f(z)-f(z_0)\right]$ とおくと左辺は

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz + \int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$
$$= 2\pi i f(z_0) + \int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

- zをz_0に近づける。ただし、$z = z_0$のところは第1項が分担してくれているので、限りなく近づけるだけ。
- この極限値は微分と同じ。
- 微分可能ということは、これは微係数に収束する。
- 微係数という定数を周回積分すると、第２項はゼロ。

いっけん面倒な定積分値が一気に求まる。

コーシーの積分公式 [2]

同じ関数

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

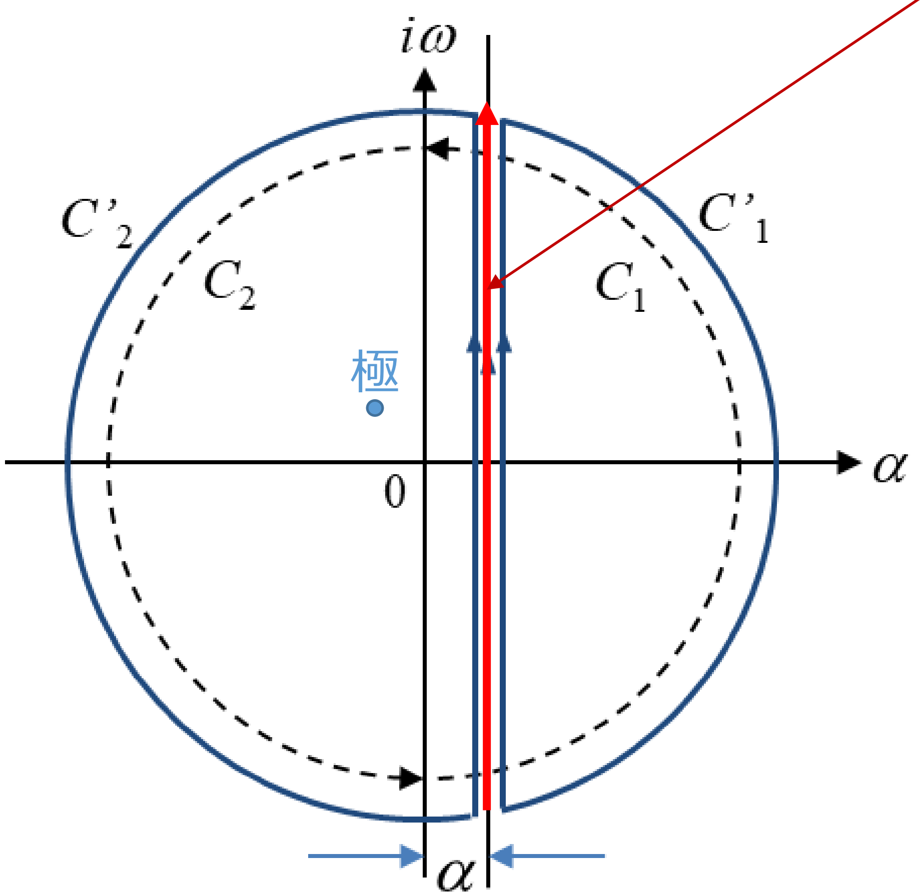
同じ値

ラプラス逆変換[1]

$$L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(p)e^{pt}\,dt$$

極を
含む C_2'
周回積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(p)e^{pt}\,dt$$
$$= L^{-1}[F(p)]$$



二通りの周回積分路

極を
含まない C_1'
周回積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(p)e^{pt}\,dt = 0$$

- 「負のtではゼロ」
- ラプラス変換が正の時間$(t > 0)$だけを扱うことに対応

ラプラス逆変換[2]

$$L^{-1}\left[F(p)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p)e^{pt}dt = f(t)U(t)$$

例1

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1'} \frac{1}{p-a}e^{pt}dp = 0 \qquad (t<0)$$

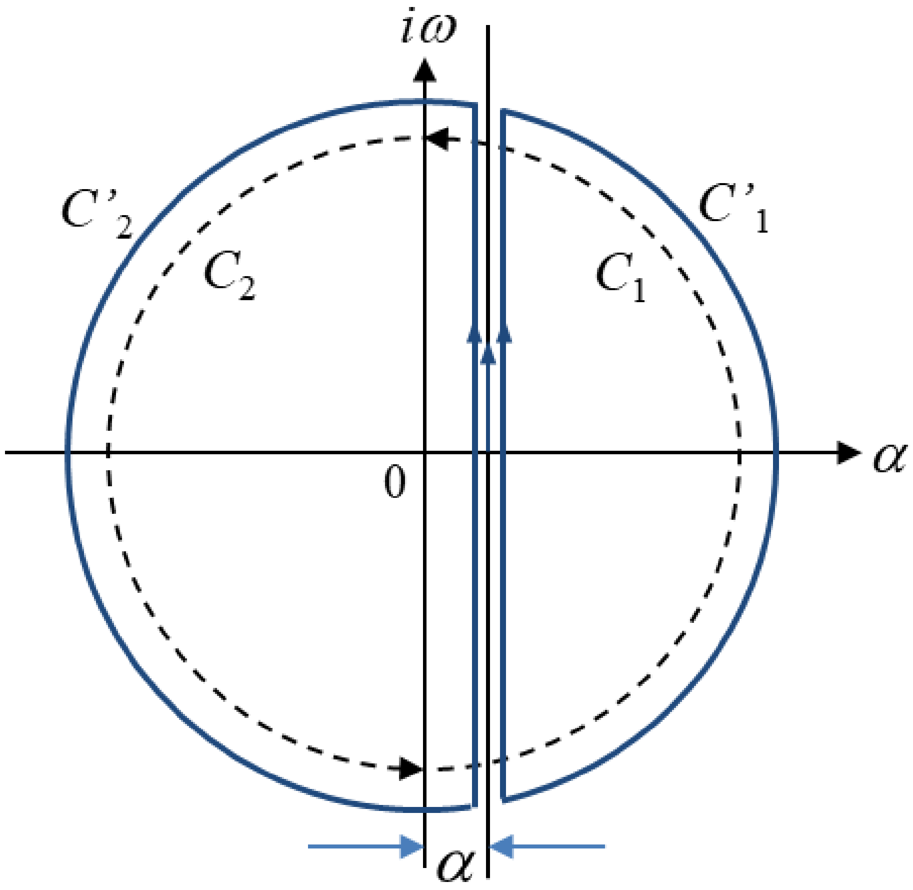
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2'} \frac{1}{p-a}e^{pt}dp = e^{\alpha t} \qquad (t>0)$$

例2 $F(p) = \dfrac{1}{p+1}$

$p+1=0$

$p=-1$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{1}{p+1}e^{pt}\,dp = e^{-1\cdot t} = e^{-t}$$



二通りの周回積分路

ラプラス逆変換（例1）

$$F(p) = -\frac{4}{p} \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{-4}{p} e^{pt}\, dp = -4e^{0\cdot t} = -4$$

$$F(p) = \frac{1}{p+1} \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{1}{p+1} e^{pt}\, dp = e^{-1\cdot t} = e^{-t}$$

$$F(p) = \frac{1}{2p+1} \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{1}{2p+1} e^{pt}\, dp \qquad 2p = s, \quad dp = \frac{ds}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{1}{s+1} e^{\frac{s}{2}t} \frac{ds}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{1}{s+1} e^{\frac{s}{2}t} ds = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}$$

ラプラス逆変換（例2）

$$F(p)=\frac{3}{p+4}-\frac{5}{p-2}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\left(\frac{3}{p+4}-\frac{5}{p-2}\right)e^{pt}\,dp$$

$$=\frac{3}{2\pi i}\int_{C_2}\left(\frac{1}{p+4}\right)e^{pt}\,dp-\frac{5}{2\pi i}\int_{C_2}\left(\frac{1}{p-2}\right)e^{pt}\,dp=3e^{-4t}-5e^{2t}$$

$$F(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

虚数を用いて因数分解

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{\omega}{(p+i\omega)(p-i\omega)}=\frac{p-i\omega-(p+i\omega)}{-2i(p+i\omega)(p-i\omega)}=\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{(p-i\omega)}-\frac{1}{(p+i\omega)}\right\}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)e^{pt}\,dp=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}=\sin\omega t$$

ラプラス逆変換（例3）

証明略

$$f'(p_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(p)}{(p-p_0)^2}dp$$

$$f''(p_0)=\frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(p)}{(p-p_0)^3}dp$$

$$f^{(n)}(p_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(p)}{(p-p_0)^{n+1}}dp$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} F(p)e^{pt}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{e^{pt}}{(p-0)^2}\,dp$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\boxed{\left(\frac{1}{p^2}\right)}e^{pt}\,dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{e^{pt}}{(p-0)^2}\,dp$$

$$=\left(e^{pt}\right)'\Big|_{p=0}=te^{pt}\Big|_{p=0}=\boxed{t}$$

比較

$$L[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}},\quad L[\boxed{t}]=\boxed{\frac{1}{p^2}}=F(p)$$

回路の過渡応答解析[1]

$t=0$でスイッチを閉じる回路の動作を表す
微分方程式

$$v(t)=L\frac{d\,j(t)}{dt}+R\,j(t),\quad j(0)=0$$

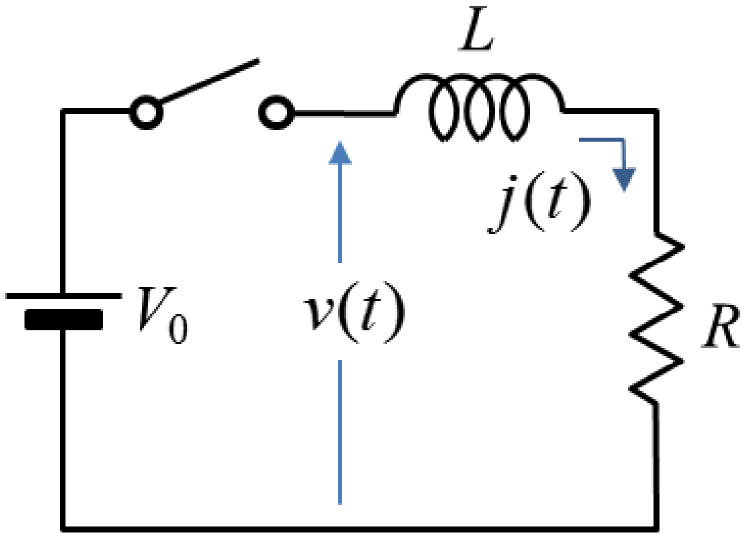
$t<0$ で
$v(t)=0$

ラプラス変換して

$$\frac{V(p)}{\boxed{p}}=LpJ(p)+RJ(p)-L\,j(0)=J(p)\left(Lp+R\right)-L\,j(0)$$

初期値 $j(0)=0$として、$J(p)$について解くと

$$J(p)=\frac{V(p)}{p\left(Lp+R\right)}$$



$t=0$でスイッチを閉じる回路

後藤尚久 著　「なっとくする電気数学」
講談社 (2010), p.148-149

回路の過渡応答解析[2]

$$J(p)=\frac{V(p)}{p(Lp+R)}=\frac{V(p)}{pL\left(p+\dfrac{R}{L}\right)}$$

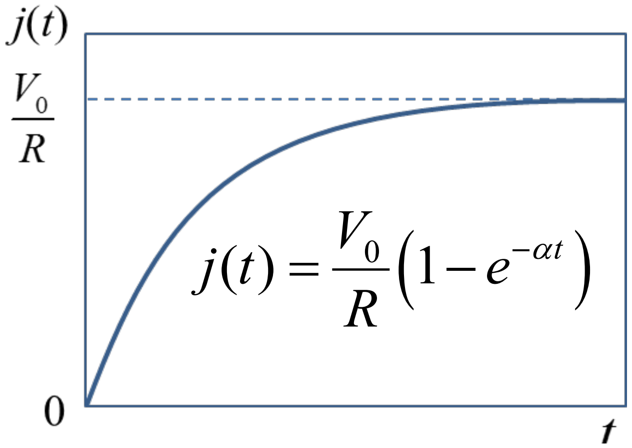
$\alpha = R/L$ とおいて部分分数展開すると

$$J(p)=\frac{V_0}{Lp(p+\alpha)}=\frac{V_0}{L\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{V_0}{R}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\alpha}\right)$$

これを逆変換することで、時間波形が得られる。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{V_0}{R}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\alpha}\right)e^{pt}\,dp$$

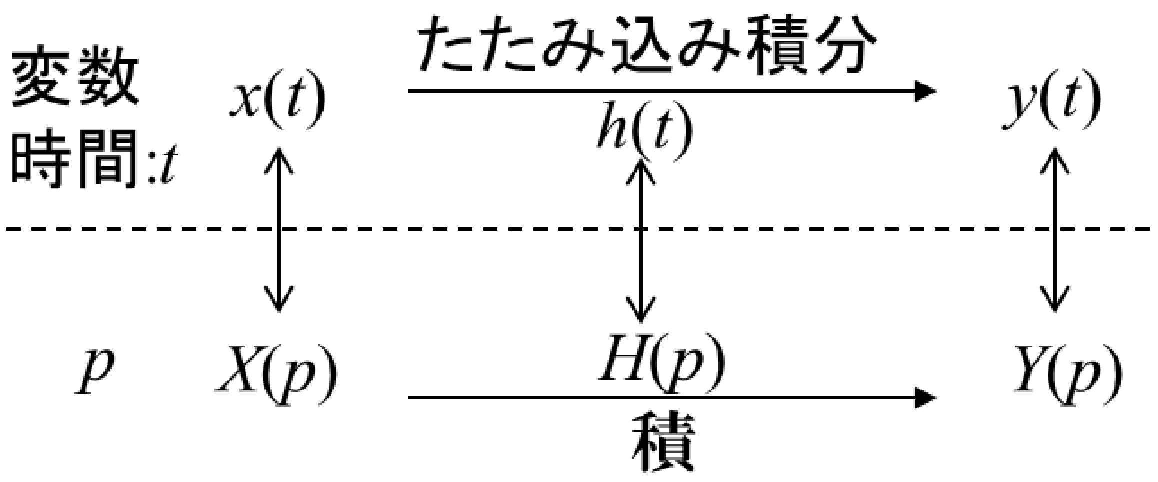
$$=\frac{V_0}{R}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\left(\frac{1}{p}\right)e^{pt}\,dp-\frac{V_0}{R}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\left(\frac{1}{p+\alpha}\right)e^{pt}\,dp=\frac{V_0}{R}\left(1-e^{-\alpha t}\right)\quad (t>0)$$



回路に流れる電流

後藤尚久 著　「なっとくする電気数学」
講談社 (2010), p.148-149

伝達関数 $H(p)$



$$Y(p) = H(p) \cdot X(p)$$

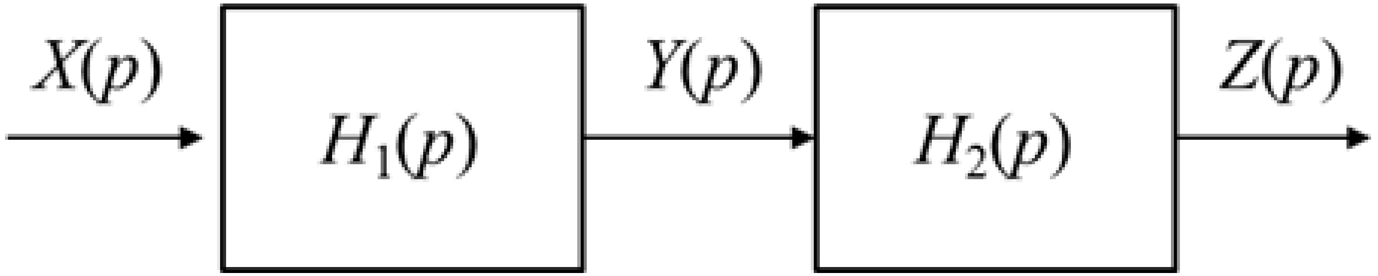
畳み込み積分と伝達関数$H(p)$はラプラス変換対

$$Z(p) = H_2(p) \cdot Y(p)$$

$$Y(p) = H_1(p) \cdot X(p)$$

$$Z(p) = H_2(p) \cdot H_1(p) \cdot X(p)$$

$$= H(p) \cdot X(p)$$



$$H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p)$$

伝達関数の零点と極[1]

われわれの通常扱う範囲での伝達関数はせいぜい有理関数程度

$$H(p) = c\frac{(p-\beta_1)(p-\beta_2)\cdots\cdots}{(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\cdots\cdots}$$

$\beta_1, \beta_2, \cdots$：伝達関数の零点
$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$：伝達関数の極

極：電気回路について方程式を立てたときの係数行列式をゼロと置いたときの方程式の解で、回路の固有振動数（複素数）。

過渡項　$A_i e^{\alpha_i t} = A_i e^{a_i t + i\omega_i t}$

$a_i > 0$ 振動は増大
$a_i < 0$ 振動は減衰

伝達関数の零点と極[2]

抵抗、コンデンサ、インダクタ（受動素子）のみで構成される回路では、

過渡項が時間的に増大することはない。

＝ α_iの実部が正になることはない。

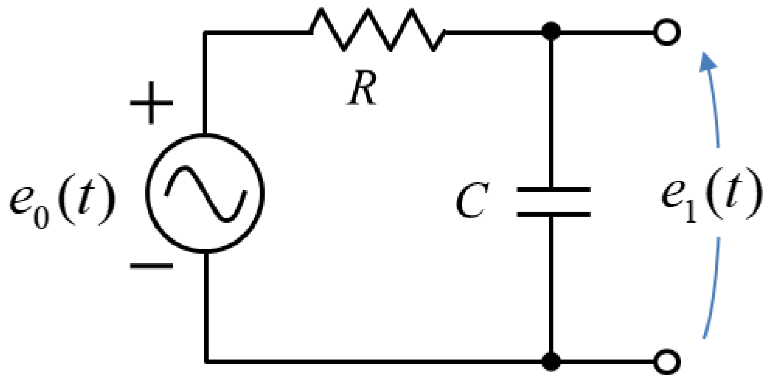
＝極が複素平面の右半平面にない。

$$\mathrm{Re}[\alpha_i] \leq 0$$

回路や装置の中で生じる振動がかってに大きくならない（安定である）ことを意味する重要な表現。

例題1-1

右の回路に次の波形を入力した時の出力電圧$e_1(t)$



RC回路

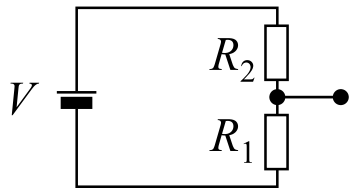
$C = 1$ [F]、$R = 1$ [Ω]

$$e_0(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-\alpha t} & (t \geq 0) \end{cases}$$

$$E_0(p) = \int_0^{\infty} e_0(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + p)t} dt$$

$$= \frac{-1}{-(\alpha + p)} = \frac{1}{p + \alpha}$$

伝達関数は直流電気回路と同様に、像関数で



$$V_o = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V$$

$R_1 \to 1/pC$

$R_2 \to R$

$$H(p) = \frac{\dfrac{1}{pC}}{\dfrac{1}{pC} + R} = \frac{1}{pCR + 1}$$

例題1-2

$C = 1$ [F]、$R = 1$ [Ω]のとき

$$E_1(p) = H(p)E_0(p) = \boxed{\frac{1}{(p+1)}\frac{1}{(p+\alpha)}} \quad [1]$$

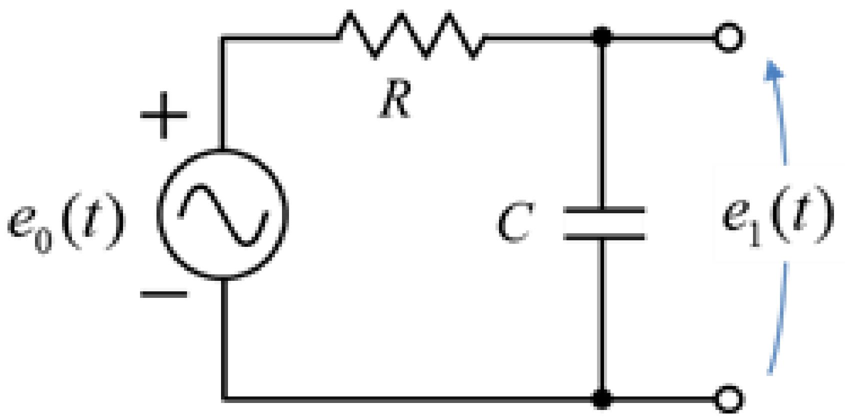


図 9-6-2　RC 回路

これを部分分数展開して

同じであるべき

$$\frac{A}{p+1} - \frac{B}{p+\alpha} = \frac{A(p+\alpha) - B(p+1)}{(p+1)(p+\alpha)} = \boxed{\frac{(A-B)p + (A\alpha - B)}{(p+1)(p+\alpha)}}$$

$$A = B$$

$$A\alpha - B = A\alpha - A = 1$$

$$A(\alpha - 1) = 1$$

$$A = 1/(\alpha - 1)$$

$$E_1(p) = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+\alpha}\right)$$

α ≠ 1のときは

$$e_1(t) = \frac{1}{\alpha - 1}\left(e^{-t} - e^{-\alpha t}\right)$$

α = 1のときは
式[1]に戻り

$$E_1(p)\big|_{\alpha=1} = H(p)E_0(p)\big|_{\alpha=1} = \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$e_1(t) = te^{-t}$$

R02_July Fourier[14]

まとめ

$$L^{-1}\left[F(p)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(p)e^{pt}dt$$

ラプラス逆変換

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2'}\frac{1}{p-a}e^{pt}dp=e^{\alpha t}\qquad(t>0)$$

コーシーの積分公式の利用例

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \text{変数} & & & \\ \text{時間:}t & x(t) \arrow[rr, "\text{たたみ込み積分}", "h(t)"'] \arrow[d, leftrightarrow] & & y(t) \arrow[d, leftrightarrow] \\ p & X(p) \arrow[rr, "H(p)", "\text{積}"'] & & Y(p) \end{tikzcd}$$

畳み込み積分と伝達関数$H(p)$はラプラス変換対 $L\left[y(t)\right]=H(p)$

$$Y(p)=H(p)\cdot X(p)$$

われわれの通常扱う範囲での伝達関数はせいぜい<u>有理関数</u>程度

$$H(p)=c\frac{(p-\beta_1)(p-\beta_2)\cdots\cdots}{(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\cdots\cdots}$$

$\beta_1, \beta_2, \cdots$：伝達関数の零点
$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$：伝達関数の極

極：電気回路の固有振動数（複素数）。

過渡項 $\mathrm{Re}[\alpha_i]\leq 0$

回路や装置の中で生じる振動がかってに大きくならない（安定である）ことを意味する重要な表現。

演習

学年　　　クラス　　　学籍番号b　　　　　　　　出席番号　　　氏名

右の関数のラプラス逆変換$L^{-1}[X(p)]$を求めなさい。

$$X(p) = \frac{p^2 + p - 2}{p^2(p-2)}$$

宿題:

学籍番号　b	クラス	出席番号	氏名

次の像関数$F(p)$をラプラス逆変換しなさい。

$$F(p)=\frac{p-1}{p^2+3p+2}$$

宿題1

学年　クラス　学籍番号b　出席番号　氏名

ある回路に入力$x(t)$を入力したところ、出力$y(t)$が得られた。
このときの伝達関数$H(p)$と、インパルス応答$h(t)$を求めなさい。

$$x(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ e^{-t} & (t>0)\end{cases}\qquad y(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 2e^{-t}+e^{-2t} & (t>0)\end{cases}$$