参考：ポール･J･ナーイン著、小山信也訳
「**オイラー博士の素敵な数式**」第4章
日本評論社　(2011)

自主課題 [5]_
解答

学籍番号　b　　クラス
出席番号　　氏名

オイラーの手紙(1744年)

に現れた(たぶん)史上初の「フーリエ級数」

$$x(t)=\frac{\pi-t}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}=\sin t+\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}+\cdots \qquad (1)$$

を求めてみよう。オイラーはまず等比級数 $S(t)=e^{it}+e^{i2t}+e^{i3t}\cdots$

を考えた。収束性の問題（例えば $S(0)=1+1+1+\cdots=\infty$) に構わず
に普通に「和」を求めた。つまり両辺に e^{it} を掛けて

$$e^{it}S(t)=e^{i2t}+e^{i3t}+e^{i4t}\cdots$$

$$S(t)-e^{it}S(t)=e^{it}$$

を得る。よって次のように書ける。

$$S(t)=\frac{e^{it}}{1-e^{it}} \qquad (2)$$

自 主 課 題 [5] 解答　つづき

すると、

$$S(t)=\frac{e^{it}}{1-e^{it}}=\boxed{\frac{e^{it}\left(1-e^{-it}\right)}{\left(1-e^{it}\right)\left(1-e^{-it}\right)}=\frac{\cos t+i\sin t-1}{2-\left(e^{it}+e^{-it}\right)}=\frac{-\left(1-\cos t\right)+i\sin t}{2\left(1-\cos t\right)}}$$

②

①

$$=\boxed{-\frac{1}{2}}+i\boxed{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sin t}{1-\cos t}\qquad(3)$$

この因子を忘れていました。
お詫びして訂正します。

一方、$S(t)$にオイラーの公式を適用すると、

①

$$S(t)=e^{it}+e^{i2t}+e^{i3t}\cdots$$
$$=\boxed{\cos t+\cos 2t+\cos 3t+}\cdots+i\left(\boxed{\sin t+\sin 2t+\sin 2t+}\cdots\right)\qquad(4)$$

これら式(3), (4)の実部を比較すると

$$\cos t+\cos 2t+\cos 3t+\cdots=\boxed{-\frac{1}{2}}.$$

①

これを項別に積分して次式を得る。

$$\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t+\cdots=-\boxed{\frac{1}{2}}t+C.$$

ただし、Cは積分定数で<u>π/2に等しい</u>。よって

なぜ、積分定数はπ/2に等しいと言えるのか？
（別途証明すること）
ヒント「ライプニッツの公式」

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}=\sin t+\frac{\sin 2t}{2}+\frac{\sin 3t}{3}+\cdots=-\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi-t}{2}=x(t)$$

積分定数の算出

⑤

$\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t + \cdots$ において、$t = \frac{\pi}{2}$ とおくと

$$\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi}{2} + \cdots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\cdots$$

となるが、ここでライプニッツの公式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

を参照すると

$$\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi}{2} + \cdots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

これより

$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + C$ 　　よって $C = \frac{\pi}{2}$ と求まる。