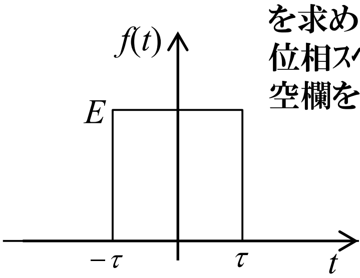
2019年度春学期 フーリエ数学・基礎 定期試験問題（解答付き）

学年　クラス　出席番号　学籍番号　氏名

1. 下図に示す単一パルス$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$を求めよ。さらにその振幅スペクトル、位相スペクトルを解答図に描くとともに空欄を適切に埋めなさい。



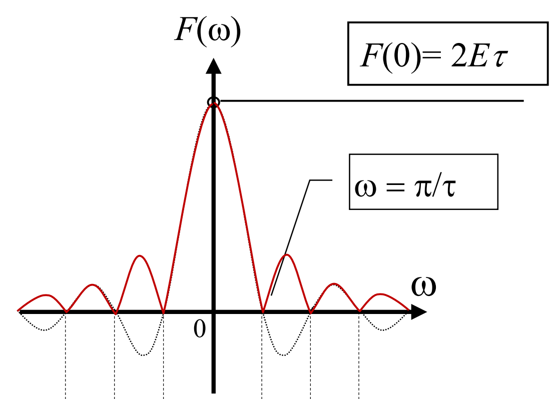
$$f(t)=E \qquad (|t|\le\tau)$$
$$=0 \qquad (|t|>\tau)$$

ただし、右の定義を使用してよい。

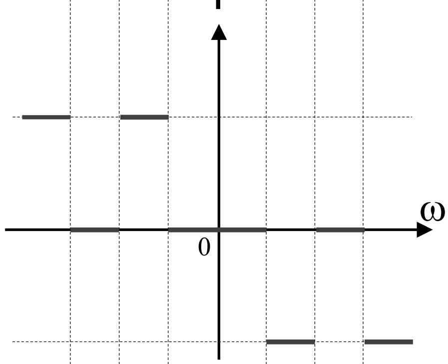
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$$

計算式

$$F(\omega)=\int_{-\tau}^{\tau} E\cdot e^{-i\omega t}dt = E\left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-\tau}^{\tau}$$
$$=\frac{E}{-i\omega}\left(e^{-i\omega\tau}-e^{i\omega\tau}\right)=\frac{E}{i\omega}\left(e^{i\omega\tau}-e^{-i\omega\tau}\right)$$
$$=\frac{2E}{\omega}\frac{\left(e^{i\omega\tau}-e^{-i\omega\tau}\right)}{2i}=\frac{2E}{\omega}\sin(\omega\tau)$$
$$=2E\tau\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}$$



振幅スペクトル



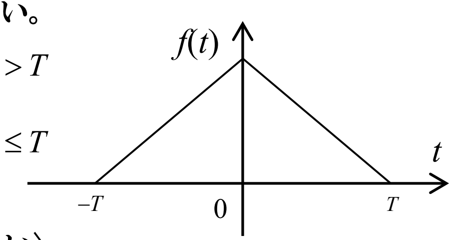
位相スペクトル

解答欄

$$F(\omega)=\quad 2E\tau\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}$$

2. 右図の三角パルス$f(t)$のフーリエ変換を求めて、解答欄の空欄に記入しなさい。

$$f(t)=\begin{cases}0 & |t|>T\\ E\left(1-\dfrac{|t|}{T}\right) & |t|\le T\end{cases}$$



計算式〈要所のみで良い〉

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt=2\int_0^T E\left(1-\frac{t}{T}\right)\cdot\cos\omega t\, dt$$
$$=2E\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)\cdot\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)' dt$$
$$=2E\left\{\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\cdot\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)\right]_0^T-\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)'\cdot\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)dt\right\}$$
$$=2E\left\{0-\sin 0+\frac{1}{\omega T}\int_0^T\sin\omega t\, dt\right\}=2E\frac{1}{\omega T}\left[\frac{\cos\omega t}{-\omega}\right]_0^T$$
$$=\frac{2E}{-\omega^2 T}[\cos\omega T-1]=\frac{2E}{\omega^2 T}[1-\cos\omega T]$$

解答欄

$$F(\omega)=\frac{2E}{\boxed{\omega^2 T}}\left[1-\boxed{\cos}\,\omega T\right]$$

3. 関数 f の微分$f^{(1)}$ のラプラス変換$L[f^{(1)}]$ を求めよ。

計算式

$$L\left[f^{(1)}(t)\right]=\int_0^{\infty} f^{(1)}(t)e^{-pt}dt$$
$$=\left[f^{(1)}(t)e^{-pt}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty} f(t)(-p)e^{-pt}dt$$
$$=\lim_{b\to\infty}\left[f^{(-1)}(b)e^{-pb}\right]-f^{(1)}(0)e^{-p\cdot 0}+p\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$$
$$=-f^{(1)}(0)+pF(p)$$

解答欄

$$L\left[f^{(1)}(t)\right]=pF(p)-f^{(1)}(0)$$

4. 次の関数$F(p)$のラプラス逆変換 $f(t)$ を求めなさい。ただし、$t>0$ とする。

$$F(p)=\frac{8p+11}{p^2+p-12}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2'}\frac{e^{pt}}{p-a}dp=e^{\alpha t}\quad (t>0)}$$

計算式

$$F(p)=\frac{8p+11}{p^2+p-12}=\frac{A}{p+4}+\frac{B}{p-3}$$ とおくと

$$F(p)=\frac{A}{p+4}+\frac{B}{p-3}=\frac{A(p-3)+B(p+4)}{(p+5)(p-3)}$$

$$=\frac{(A+B)p-\left(3A-4B\right)}{(p+5)(p-3)}$$

$$A+B=8,\quad 3A-4B=-11$$

$$3A+3B=24,\quad 3A-4B=-11$$

$$7B=35,\quad B=5,\quad A=3$$

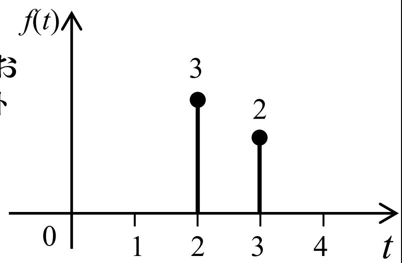
$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\left(\frac{3}{p+5}+\frac{5}{p-3}\right)e^{pt}\,dp$$

$$=\frac{3}{2\pi i}\int_{C_2}\left(\frac{1}{p+5}\right)e^{pt}\,dp+\frac{5}{2\pi i}\int_{C_2}\left(\frac{1}{p-3}\right)e^{pt}\,dp$$

$$=3e^{-5t}+5e^{3t}$$

解答欄 $\boxed{f(t)=3e^{-5t}+5e^{3t}}$

5. 右の図のようなインパルス信号のスペクトル$F(\omega)$およびエネルギー密度スペクトル$P(\omega)$を求めよ。



計算式

$$f(t)=3\delta(t-2)+2\delta(t-3)$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{3\delta(t-2)+2\delta(t-3)\right\}e^{-i\omega t}dt$$

$$=3e^{-i\omega\cdot 2}+2e^{-i\omega\cdot 3}=3e^{-i2\omega}+2e^{-i3\omega}$$

$$P(\omega)=F(\omega)F^*(\omega)$$

$$=\left(3e^{-i2\omega}+2e^{-i3\omega}\right)\left(3e^{i2\omega}+2e^{i3\omega}\right)$$

$$=9+3\times 2e^{i(-2+3)\omega}+3\times 2e^{-i(3-2)\omega}+2e^{-i3\omega}\times 2e^{i3\omega}$$

$$=9+6\left(e^{i\omega}+e^{-i\omega}\right)+4=13+12\cos(\omega)$$

解答欄

スペクトル $\boxed{F(\omega)=3e^{-i2\omega}+2e^{-i3\omega}}$

エネルギー密度スペクトル $\boxed{P(\omega)=13+12\cos(\omega)}$

6. 離散的フーリエ変換(DFT)における回転演算子

$$W_N=e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

において、$N=4$の場合について以下に示せ。

$$W_4^0=\boxed{e^{i\frac{2}{4}\pi\cdot 0}=1}$$

$$W_4^{-1}=\boxed{e^{-i\frac{2}{4}\pi\cdot 1}=-i}$$

$$W_4^{-2}=\boxed{e^{-i\frac{2}{4}\pi\cdot 2}=-1}$$

$$W_4^{-3}=\boxed{e^{-i\frac{2}{4}\pi\cdot 3}=i}$$

また、$N=4$として$f(0)=1$、$f(1)=-1$、$f(2)=1$、$f(3)=-1$のときのDFTを求めよ。なお、以下の公式を使用してよい。

$$\begin{pmatrix}F(0)\\F(1)\\F(2)\\F(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}W_4^0&W_4^0&W_4^0&W_4^0\\W_4^0&W_4^{-1}&W_4^{-2}&W_4^{-3}\\W_4^0&W_4^{-2}&W_4^{-4}&W_4^{-6}\\W_4^0&W_4^{-3}&W_4^{-6}&W_4^{-9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(0)\\f(1)\\f(2)\\f(3)\end{pmatrix}$$

計算式

$$\begin{pmatrix}F(0)\\F(1)\\F(2)\\F(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}W_4^0&W_4^0&W_4^0&W_4^0\\W_4^0&W_4^{-1}&W_4^{-2}&W_4^{-3}\\W_4^0&W_4^{-2}&W_4^{-4}&W_4^{-6}\\W_4^0&W_4^{-3}&W_4^{-6}&W_4^{-9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(0)\\f(1)\\f(2)\\f(3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}W_4^0&W_4^0&W_4^0&W_4^0\\W_4^0&W_4^{-1}&W_4^{-2}&W_4^{-3}\\W_4^0&W_4^{-2}&W_4^{0}&W_4^{-2}\\W_4^0&W_4^{-3}&W_4^{-2}&W_4^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(0)\\f(1)\\f(2)\\f(3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-i&-1&i\\1&-1&1&-1\\1&i&-1&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1+1-1\\1+i-1-i\\1+1+1+1\\1-i-1+i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\end{pmatrix}$$

解答欄

$F(0)=\boxed{0}$

$F(1)=\boxed{0}$

$F(2)=\boxed{4}$

$F(3)=\boxed{0}$