Date

$$\frac{e^{it}}{1-e^{it}} = \frac{\cos t + i\sin t}{1-(\cos t + i\sin t)}$$

$$= \frac{(\cos t + i\sin t)(1-\cos t + i\sin t)}{(1-\cos t - i\sin t)(1-\cos t + i\sin t)}$$

$$= \frac{\cos t - \cos^2 t + i\sin t\cos t + i\sin t - i\sin t\cos t - \sin^2 t}{1 - 2\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t}$$

$$= \frac{\cos t - 1 + i\sin t}{2 - 2\cos t} = \frac{-(1-\cos t)}{2(1-\cos t)} + \frac{i\sin t}{2(1-\cos t)}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2}} + \frac{i\sin t}{2(1-\cos t)}$$

$$S(t) = e^{it} + e^{i2t} + e^{i3t} + \cdots\cdots$$

$$= \left(\boxed{\cos t + \cos 2t + \cos 3t + \cdots\cdots}\right) + i\left(\boxed{\sin t + \sin 2t + \sin 3t + \cdots\cdots}\right)$$

$$\cos t + \cos 2t + \cos 3t + \cdots\cdots = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

両辺をtで積分すると、

$$\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t + \cdots\cdots = \boxed{-\frac{1}{2}t} + C \quad (C:\text{積分定数}) \quad -①$$

続いて、$C = \frac{\pi}{2}$ であることを証明する。

No.
Date

$F(t) = \sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t + \cdots\cdots$ とおく。

$F(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\cdots$

これは、ライプニッツの公式より、

$F(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$ と表すことができる。 — ②

ここで、①式

$$\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t + \cdots\cdots = -\frac{t}{2} + C$$

において、$t = \frac{\pi}{2}$ とすると、

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\cdots = -\frac{\pi}{4} + C$$

$$\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + C \quad (\because ②より)$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{2}$$

よって、積分定数は、$C = \frac{\pi}{2}$ である。 … (証明終)