



# Introduction to Fourier Analysis DFT & FFT

Discrete & Fast Fourier Transform  
#15 離散フーリエ変換 高速フーリエ変換

試験範囲外

2020/07/20\_23

山林 由明



# 演習解答

右の関数のラプラス逆変換 $L^{-1}[X]$ を求めなさい。

$$X(p) = \frac{p^2 + p - 2}{p^2(p-2)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p-2} \quad [1] \quad \text{とおくと}$$

部分分数展開

$$\frac{A}{p^2} + \frac{B}{p-2} = \frac{A(p-2) + Bp^2}{p^2(p-2)} = \frac{Bp^2 + Ap - 2A}{p^2(p-2)} \quad [2] \quad \text{となる。}$$

[1]と[2]を比較すると次式の関係が得られる。

$$p^2 + p - 2 = Bp^2 + Ap - 2A \quad \text{の各項を比較すると}$$

$$A = 1, B = 1 \quad \text{なので} \quad X(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-2} \quad \text{と書き改められる。}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right] = t, L^{-1}\left[\frac{1}{p-2}\right] = e^{2t} \text{ より} \quad L^{-1}[X(p)] = L^{-1}\left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-2}\right] = t + e^{2t} \quad (t > 0)$$

解答終

宿題解答[1]:

学籍番号 b

クラス

出席番号

氏名

次の像関数 $F(p)$ をラプラス逆変換しなさい。

$$F(p) = \frac{p-1}{p^2+3p+2} = \frac{p-1}{(p+2)(p+1)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+1} \quad [1] \quad \text{とおくと}$$

元の式と  
比較して

$$\frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+1} = \frac{A(p+1) + B(p+2)}{(p+2)(p+1)} = \frac{(A+B)p + A + 2B}{(p+2)(p+1)} = \frac{p-1}{p^2+3p+2} \quad [2]$$

$$A + B = 1, \quad A + 2B = -1 \quad [3]$$

$$\begin{array}{r} A + 2B = -1 \\ -) A + B = 1 \\ \hline B = -2, \\ A = 3 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{式[1]は}} \quad \frac{p-1}{(p+2)(p+1)} = \frac{3}{p+2} - \frac{2}{p+1} \quad [4]$$

$$B = -2, \\ A = 3$$

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1} \left[ \frac{3}{p+2} - \frac{2}{p+1} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \left( \frac{3}{p+2} - \frac{2}{p+1} \right) e^{pt} dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{C_2} \frac{3e^{pt}}{p+2} dp - \int_{C_2} \frac{2e^{pt}}{p+1} dp \right] = 3e^{-2t} - 2e^{-t} \quad (t > 0) \end{aligned}$$

解答終



# 別解

宿題解答[2]:

学籍番号 b

クラス

出席番号

氏名

$$F(p) = \frac{p-1}{p^2+3p+2} = \frac{p-1}{(p+2)(p+1)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+1} \quad [1] \quad \text{とおくと}$$

(p+2)を両辺に掛ける

$$\frac{(p-1)(p+2)}{(p+2)(p+1)} = \frac{A(p+2)}{p+2} + \frac{B(p+2)}{p+1}$$

$$\lim_{p \rightarrow -2} \left[ \frac{A(p+2)}{p+2} + \frac{B(p+2)}{p+1} \right] = A + 0 = A \quad \text{右辺}$$

左辺

ロビタルの定理  
(分子分母をそれぞれ微分)

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow -2} \frac{(p-1)(p+2)}{(p+2)(p+1)} &= \lim_{p \rightarrow -2} \frac{(p-1)+(p+2)}{(p+2)+(p+1)} \\ &= \lim_{p \rightarrow -2} \frac{2p+1}{2p+3} = \frac{-4+1}{-4+3} = 3 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad A = 3$$

(p+1)を両辺に掛ける

$$\frac{(p-1)(p+1)}{(p+2)(p+1)} = \frac{A(p+1)}{p+2} + \frac{B(p+1)}{p+1}$$

$$\lim_{p \rightarrow -1} \left[ \frac{A(p+1)}{p+2} + \frac{B(p+1)}{p+1} \right] = 0 + B = B$$

ロビタルの定理  
(分子分母をそれぞれ微分)

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow -1} \frac{(p-1)(p+1)}{(p+2)(p+1)} &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{(p-1)+(p+1)}{(p+2)+(p+1)} \\ &= \lim_{p \rightarrow -1} \frac{2p}{2p+3} = \frac{-2}{-2+3} = -2 \end{aligned} \quad B = -2$$

前スライド式[4]に戻る。

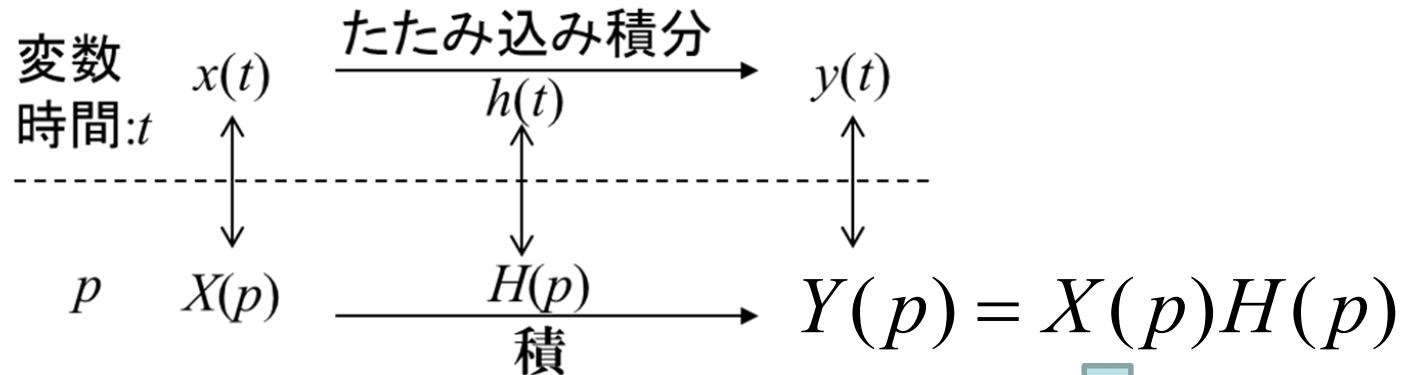


学年

# 宿題解答〔解説〕1

ある回路に入力 $x(t)$ を入力したところ、出力 $y(t)$ が得られた。  
このときの伝達関数 $H(p)$ と、インパルス応答 $h(t)$ を求めなさい。

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-t} & (t > 0) \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2e^{-t} + e^{-2t} & (t > 0) \end{cases}$$



$$h(t) = L^{-1}[H(p)]$$

インパルス応答 $h(t)$ は伝達関数  
 $H(p)$ の原関数(ラプラス逆変換)

入力の像関数 $X(p)$ と出力の像関数 $Y(p)$ の比  
で伝達関数 $H(p)$ がわかる。



学年 クラス

# 宿題解答[1]

氏名

ある回路に入力 $x(t)$ を入力したところ、出力 $y(t)$ が得られた。  
このときの伝達関数 $H(p)$ と、インパルス応答 $h(t)$ を求めなさい。

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-t} & (t > 0) \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2e^{-t} + e^{-2t} & (t > 0) \end{cases}$$

$$X(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+p)t} dt = \left[ \frac{e^{-(1+p)t}}{-(1+p)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+p}$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = H(p)$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \int_0^{\infty} (2e^{-t} + e^{-2t}) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \{2e^{-(1+p)t} + e^{-(2+p)t}\} dt \\ &= 2 \left[ \frac{e^{-(1+p)t}}{-(1+p)} \right]_0^{\infty} + \left[ \frac{e^{-(2+p)t}}{-(2+p)} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{1+p} + \frac{1}{2+p} \end{aligned}$$



# 宿題解答[2]

これらより、伝達関数 $H(p)$ は

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\frac{2}{1+p} + \frac{1}{2+p}}{\frac{1}{1+p}} = 2 + \frac{1+p}{2+p} = \frac{3p+5}{p+2}$$

分子の $p$ を  
約分で消去したい

となり、インパルス応答 $h(t)$ も

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} H(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{3p+5}{p+2} e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{3p+6-1}{p+2} e^{pt} dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{3(p+2)-1}{p+2} e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \left( 3 - \frac{1}{p+2} \right) e^{pt} dp \\ &= 3\delta(t) - e^{-2t} \end{aligned}$$

と求まる。

$$L[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t) e^{pt} dt = e^0 = 1$$

$$L^{-1}[1] = \delta(t)$$

解答終

# 行列の準備(復習)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} 3\text{行} \\ 4\text{列} \end{array} \right\}$$

加法

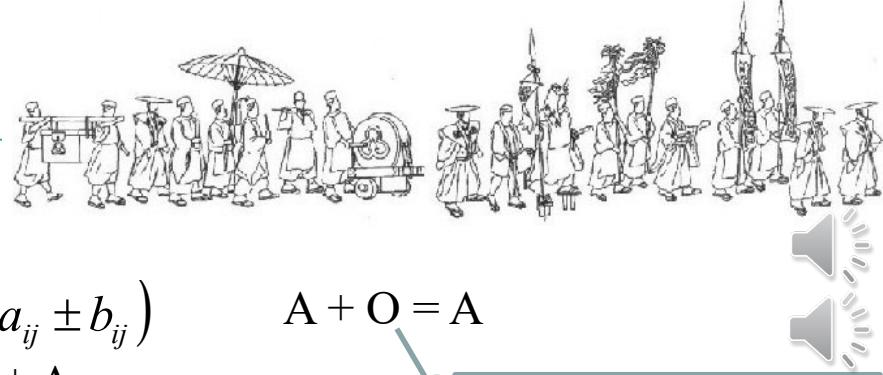
$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$$

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + O = A$$

すべての要素が0  
である「零行列」



行列の積

$$AB = (a_{ij})(b_{ij}) = \left( \sum_t a_{it} b_{tj} \right)$$

スカラ一倍

$$kA = (ka_{ij})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + (-1) \times 3 \\ (-2) \times 5 + 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 3 \\ -10 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(2 \quad -3) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = (2 \times 1 + (-3) \times (-2) \quad 2 \times (-1) + (-3) \times 2) = (2 + 6 \quad -2 - 6) = (8 \quad -8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 3 + 2 \times (-1) & 1 \times 2 + 2 \times 0 \\ 3 \times 0 + 4 \times 1 & 3 \times 3 + 4 \times (-1) & 3 \times 2 + 4 \times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+2 & 3-2 & 2+0 \\ 0+4 & 9-4 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

復習不要の諸君は  
次のスライド  
スキップ可

# 行列の準備(復習・解説)



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + (-1) \times 3 \\ (-2) \times 5 + 2 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 3 \\ -10 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the calculation of the first row of the product of two 2x3 matrices. The first matrix has columns 1, -1, and 5. The second matrix has rows 1, -2, and 2. A blue circle highlights column 1, a yellow circle highlights row 1, and a green circle highlights the intersection element 5. A blue bracket highlights the calculation  $1 \times 5 + (-1) \times 3$ , and a yellow bracket highlights the calculation  $(-2) \times 5 + 2 \times 3$ . A green arrow points from the highlighted elements to the resulting row vector  $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + (-3) \times (-2) & 2 \times (-1) + (-3) \times 2 \\ 1 \times 1 + (-2) \times (-2) & 1 \times (-1) + (-2) \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 6 & -2 - 6 \\ 1 + 4 & -1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the calculation of the product of two 2x2 matrices. The first matrix has columns 2 and -3. The second matrix has rows 1 and -2. A blue circle highlights column 1 of the first matrix, a yellow circle highlights row 1 of the second matrix, and a green circle highlights the intersection element 1. A blue bracket highlights the calculation  $2 \times 1 + (-3) \times (-2)$ , and a yellow bracket highlights the calculation  $1 \times 1 + (-2) \times (-2)$ . A green arrow points from the highlighted elements to the resulting matrix  $\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 3 + 2 \times (-1) & 1 \times 2 + 2 \times 0 \\ 3 \times 0 + 4 \times 1 & 3 \times 3 + 4 \times (-1) & 3 \times 2 + 4 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 & 3 - 2 & 2 + 0 \\ 0 + 4 & 9 - 4 & 6 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the calculation of the product of a 2x2 matrix and a 2x3 matrix. The first matrix has columns 1 and 2. The second matrix has rows 0, 1 and 3, -1 and 2, 0. A blue circle highlights column 1 of the first matrix, a yellow circle highlights row 1 of the second matrix, and a green circle highlights the intersection element 0. Blue brackets highlight the calculations  $1 \times 0 + 2 \times 1$ ,  $1 \times 3 + 2 \times (-1)$ , and  $1 \times 2 + 2 \times 0$ . Yellow brackets highlight the calculations  $3 \times 0 + 4 \times 1$ ,  $3 \times 3 + 4 \times (-1)$ , and  $3 \times 2 + 4 \times 0$ . Green arrows point from the highlighted elements to the resulting matrix  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

# DFTの準備 「回転演算子」



以下の図の円を複素平面での単位円(半径1)とするとき  
以下の複素数( $W_N$ ) $^m$ を示せ

$$W_N = e^{i \frac{2\pi}{N}}$$

$$N = 3$$

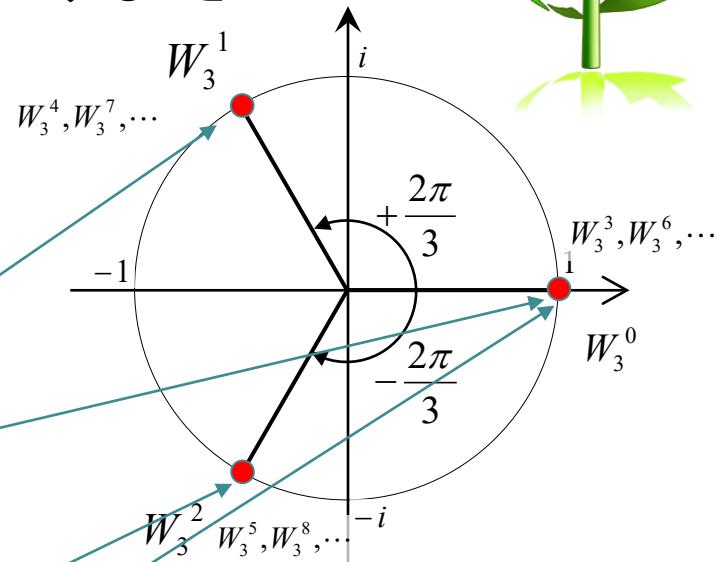
$$W_3 = e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

$$W_3^0 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 0} = e^0 = 1$$

$$W_3^1 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 1} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = W_3^4 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 4} = e^{i \frac{8\pi}{3}} = e^{i \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}\right)} = e^{i \frac{2\pi}{3}} e^{i \frac{6\pi}{3}} = e^{i \frac{2\pi}{3}} \cdot 1$$

$$W_3^2 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 2} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = W_3^5 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 5} = e^{i \frac{10\pi}{3}} = e^{i \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}\right)} = e^{i \frac{4\pi}{3}} e^{i \frac{6\pi}{3}} = e^{i \frac{4\pi}{3}} \cdot 1$$

$$W_3^3 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 3} = e^{i 2\pi} = 1 = W_3^0 = W_3^6 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 6} = e^{i \frac{12\pi}{3}} = e^{i 4\pi} = 1$$



$$N = 4$$

## 回転演算子

$$W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

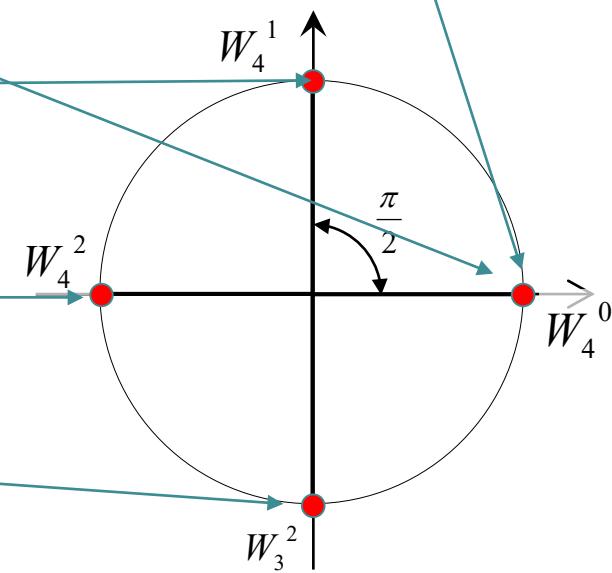
$$W_4 = e^{i\frac{2\pi}{4}}$$

$$W_4^0 = e^{i\frac{2\pi}{4} \cdot 0} = e^0 = 1 = W_4^4 = e^{i\frac{2\pi}{4} \cdot 4} = e^{i2\pi} = 1$$

$$W_4^1 = e^{i\frac{2\pi}{4} \cdot 1} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$W_4^2 = e^{i\frac{2\pi}{4} \cdot 2} = e^{i\pi} = -1$$

$$W_4^3 = e^{i\frac{2\pi}{4} \cdot 3} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$



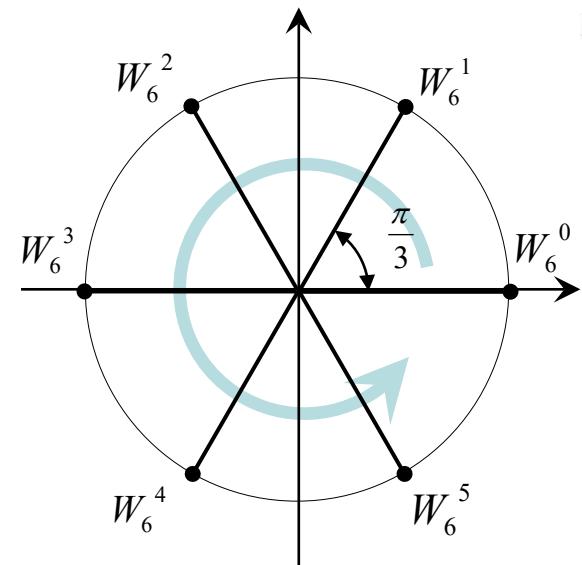


$$N = 6$$

## 回転演算子

$$W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

$$W_6 = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$



$$W_6^0 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 0} = 1$$

$$W_6^1 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 1} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_6^2 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_6^3 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 3} = e^{i\pi} = -1$$

$$W_6^4 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 4} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

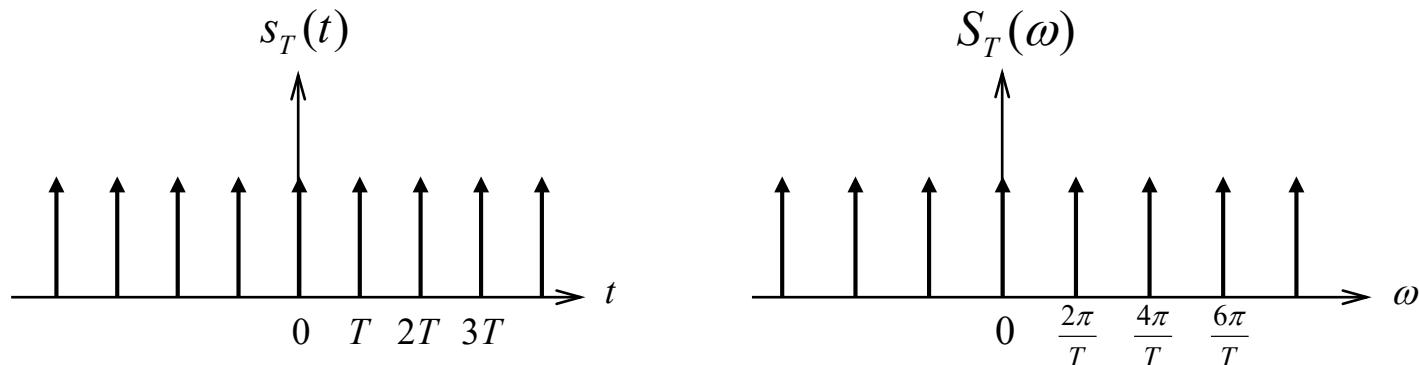
$$W_6^5 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 5} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_6^6 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 6} = e^{i2\pi} = 1 = W_6^0$$

$$W_6^7 = e^{i\frac{2\pi}{6} \cdot 7} = e^{i\frac{7\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = W_6^1$$



# 楕形関数のフーリエ変換は楕形関数



$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t} \quad \Longleftrightarrow \quad S_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inT\omega} = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

$f(t) = 1$ なる定常信号のフーリエ変換 $F(\omega)$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{-\infty} e^{i\omega s} (-ds) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s} ds = 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

$$e^{-i\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{-in\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\frac{1}{T} e^{-in\omega_0 t} \leftrightarrow \omega_0 \delta(\omega - n\omega_0)$$



# 離散フーリエ変換

(Discrete Fourier Transform: DFT)

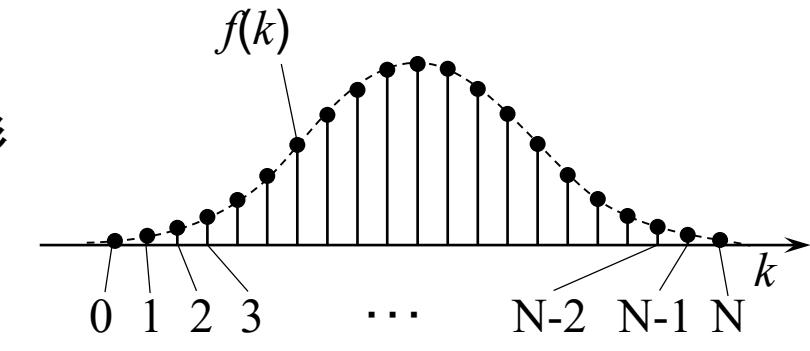
$$[1] \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

時間  $t$  について  
離散化

$$F(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i\omega k} \cdot 1$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i\omega k} \quad [2]$$

波形



角周波数  $\omega$  について  
離散化

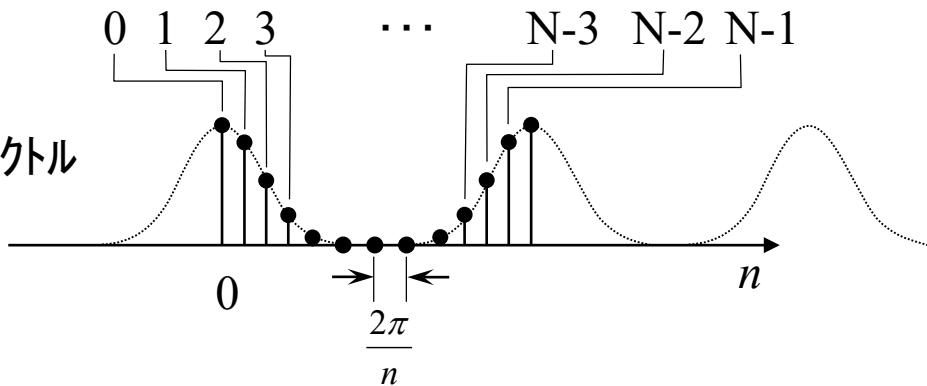
$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi n}{N} k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (W_N)^{-kn} \quad [3]$$

$$W_N = e^{i \frac{2\pi}{N}}$$

:回転演算子

スペクトル





# 逆離散フーリエ変換 (Inverse Discrete Fourier Transform: IDFT)

$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(n) e^{i \frac{2\pi}{N} nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F(n) (W_N)^{kn}$$

連続…〈積分〉

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

離散…〈総和〉

$$F(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{N} mk}$$

$$f(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) e^{i \frac{2\pi}{N} mk}$$

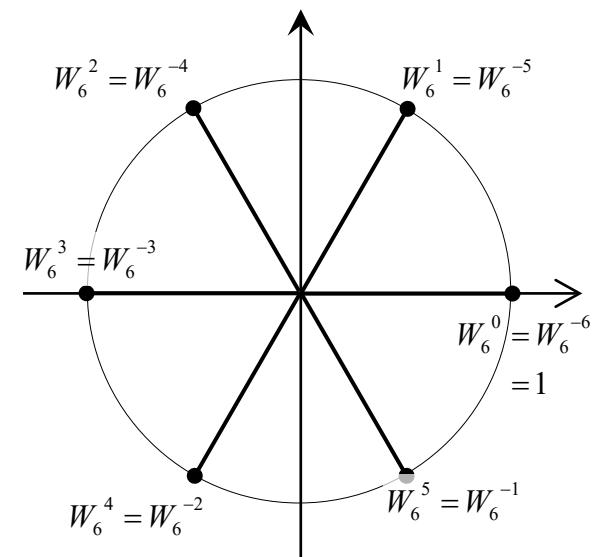
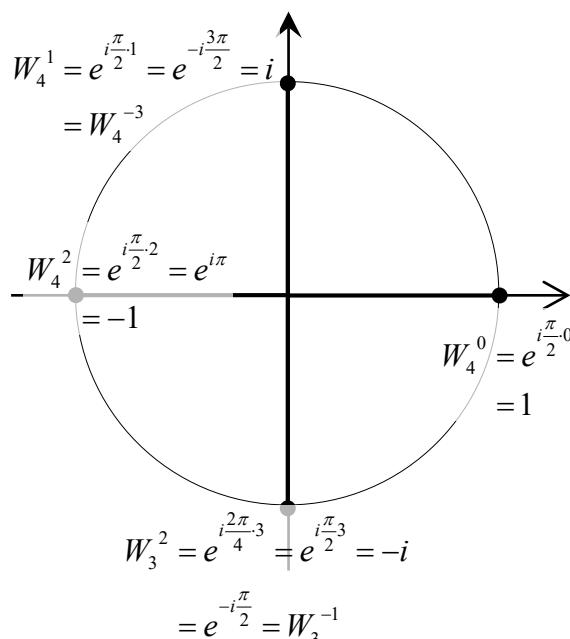
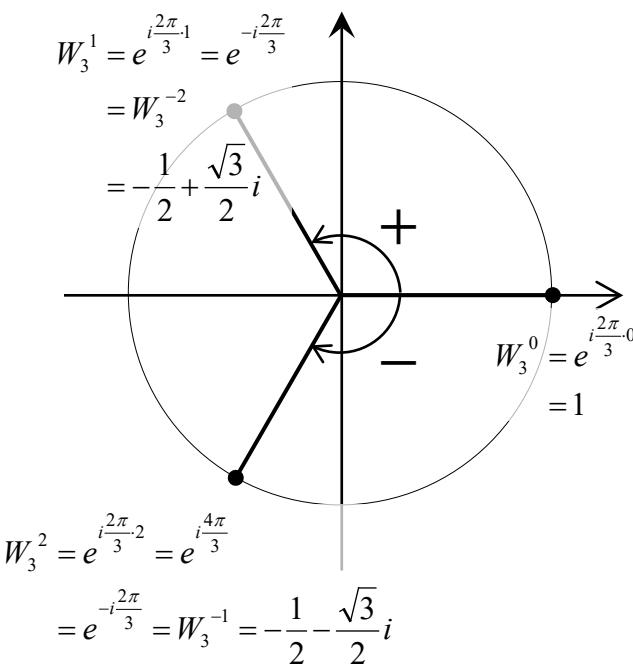


# 回転演算子

- DFTやIDFTで用いる  $W_N = e^{\frac{i2\pi}{N}}$  を回転演算子と呼ぶ。  
任意の整数Pに対して  $W_N$  は  $PN$ 乗で繰り返す周期性を持つ。



$$W_N^{(h+PN)} = e^{\frac{i2\pi}{N}(h+PN)} = e^{\frac{i2\pi}{N}h + i\frac{2\pi}{N}PN} = e^{\frac{i2\pi}{N}h} e^{i2\pi P} = e^{\frac{i2\pi}{N}h} = W_N^h$$



$$W_3 = e^{\frac{i2\pi}{3}}$$

$$W_4 = e^{\frac{i2\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

$$W_6 = e^{\frac{i2\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$$



# 離散フーリエ変換の計算例(1)

$$F(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{N} m k}$$

□ データ数4 ( $m = 0 \sim 3$ )

入力  $f(0), f(1), f(2), f(3)$   
出力  $F(0), F(1), F(2), F(3)$

□  $N = 4$  とする

**m = 0~3**

$$e^{-i \frac{\pi}{2} \cdot 0} = \cos 0 + i \sin 0 = W_4^{-0} = W_4^{-4} = W_4^{-8} = W_4^4 = 1$$

$$e^{-i \frac{\pi}{2} \cdot 1} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i \frac{3\pi}{2}} = W_4^{-1} = W_4^{-5} = W_4^3 = -i$$

$$e^{-i \frac{\pi}{2} \cdot 2} = e^{-i\pi} = \cos \pi - i \sin \pi = W_4^{-2} = W_4^{-6} = W_4^2 = -1$$

$$e^{-i \frac{\pi}{2} \cdot 3} = \cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2} = e^{i \frac{\pi}{2}} = W_4^{-3} = W_4^{-7} = W_4^1 = i$$

$$F(0) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 0 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-0 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot 1^k = f(0) \cdot 1^0 + f(1) \cdot 1^1 + f(2) \cdot 1^2 + f(3) \cdot 1^3 \quad [1]$$

$$F(1) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 1 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-1 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (-i)^k = f(0)(-i)^0 + f(1)(-i)^1 + f(2)(-i)^2 + f(3)(-i)^3$$

$$F(2) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 2 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-2 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (-1)^k = f(0)(-1)^0 + f(1)(-1)^1 + f(2)(-1)^2 + f(3)(-1)^3$$

$$F(3) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 3 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-3 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (i)^k = f(0)(i)^0 + f(1)(i)^1 + f(2)(i)^2 + f(3)(i)^3$$



# 離散フーリエ変換の計算例(2)

$$F(m) = \sum_{k=0}^3 f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} m k}$$

$$F(0) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 0 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-0 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot 1^k = f(0) \cdot 1^0 + f(1) \cdot 1^1 + f(2) \cdot 1^2 + f(3) \cdot 1^3$$

$$F(1) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 1 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-1 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (-i)^k = f(0)(-i)^0 + f(1)(-i)^1 + f(2)(-i)^2 + f(3)(-i)^3$$

$$F(2) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 2 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-2 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (-1)^k = f(0)(-1)^0 + f(1)(-1)^1 + f(2)(-1)^2 + f(3)(-1)^3$$

$$F(3) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{4} 3 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \cdot W_4^{-3 \cdot k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) (i)^k = f(0)(i)^0 + f(1)(i)^1 + f(2)(i)^2 + f(3)(i)^3$$

整理すると

$$F(0) = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

$$F(1) = f(0) \cdot 1 + f(1)(-i) - f(2) \cdot 1 + f(3)(i) = f(0) - i \cdot f(1) - f(2) + i \cdot f(3)$$

$$F(2) = f(0) \cdot 1 + f(1)(-1) + f(2) \cdot 1 + f(3)(-1) = f(0) - f(1) + f(2) - f(3)$$

$$F(3) = f(0) \cdot 1 + f(1)(i) + f(2)(-1) + f(3)(-i) = f(0) + i \cdot f(1) - f(2) - i \cdot f(3)$$



# 離散フーリエ変換の計算例(3)

$$F(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{N} m k} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{-m \cdot k}$$

$m \cdot k$	$k = 0$	1	2	3
$m = 0$	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	4	6
3	0	3	6	9

- 行列表示



$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ W_4^0 & W_4^{-2} & W_4^{-4} & W_4^{-6} \\ W_4^0 & W_4^{-3} & W_4^{-6} & W_4^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ W_4^0 & W_4^{-2} & W_4^0 & W_4^{-2} \\ W_4^0 & W_4^{-3} & W_4^{-2} & W_4^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ f(0) - i \cdot f(1) - f(2) + i \cdot f(3) \\ f(0) - f(1) + f(2) - f(3) \\ f(0) + i \cdot f(1) - f(2) - i \cdot f(3) \end{pmatrix}$$

$$F(0) = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

$$F(1) = f(0) \cdot 1 + f(1)(-i) - f(2) \cdot 1 + f(3)(i) = f(0) - i \cdot f(1) - f(2) + i \cdot f(3)$$

$$F(2) = f(0) \cdot 1 + f(1)(-1) + f(2) \cdot 1 + f(3)(-1) = f(0) - f(1) + f(2) - f(3)$$

$$F(3) = f(0) \cdot 1 + f(1)(i) + f(2)(-1) + f(3)(-i) = f(0) + i \cdot f(1) - f(2) - i \cdot f(3)$$

同じ結果





# 離散フーリエ変換の計算例(4)

- 数値例1:  $N=4$ 、 $f(0)=1, f(1)=1, f(2)=1, f(3)=1$

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1+1 \\ 1-i\cdot 1-1+i\cdot 1 \\ 1-1+1-1 \\ 1+i\cdot 1-1-i\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

定常信号の  
フーリエ変換が  
 $\delta$ 関数になることに  
対応

- 数値例2:  $N=4$ 、 $f(0)=1, f(1)=2, f(2)=3, f(3)=4$

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+3+4 \\ 1-i\cdot 2-3+i\cdot 4 \\ 1-2+3-4 \\ 1+i\cdot 2-3-i\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2+2i \\ -2 \\ -2-2i \end{pmatrix}$$



# 離散フーリエ変換の計算例(5)

- 数値例1:  $N = 3, f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 \\ W_3^0 & W_3^{-1} & W_3^{-2} \\ W_3^0 & W_3^{-2} & W_3^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 \\ W_3^0 & W_3^{-1} & W_3^{-2} \\ W_3^0 & W_3^{-2} & W_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^0 & \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^0 & \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^0 \\ \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)_3^0 & \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{-1} & \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{-2} \\ \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^0 & \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{-2} & \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} f(0) + f(1) + f(2) \\ f(0) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)f(1) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)f(2) \\ f(0) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)f(1) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



# 離散フーリエ変換(まとめ)

$$\text{DFT: } F(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{N} mk} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W_N^{-mk}$$

$$\text{iDFT: } f(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) W_N^{mk}$$

$$\text{where } W_N = e^{i \frac{2\pi}{N}}$$

DFT, iDFTそれぞれに  $N^2$  回の掛け算が必要

- ・これを削減できれば高速計算が可能に
- ・1965年、クーリーとチューキーによる高速フーリエ変換 (Fast Fourier Transform: FFT) の考案



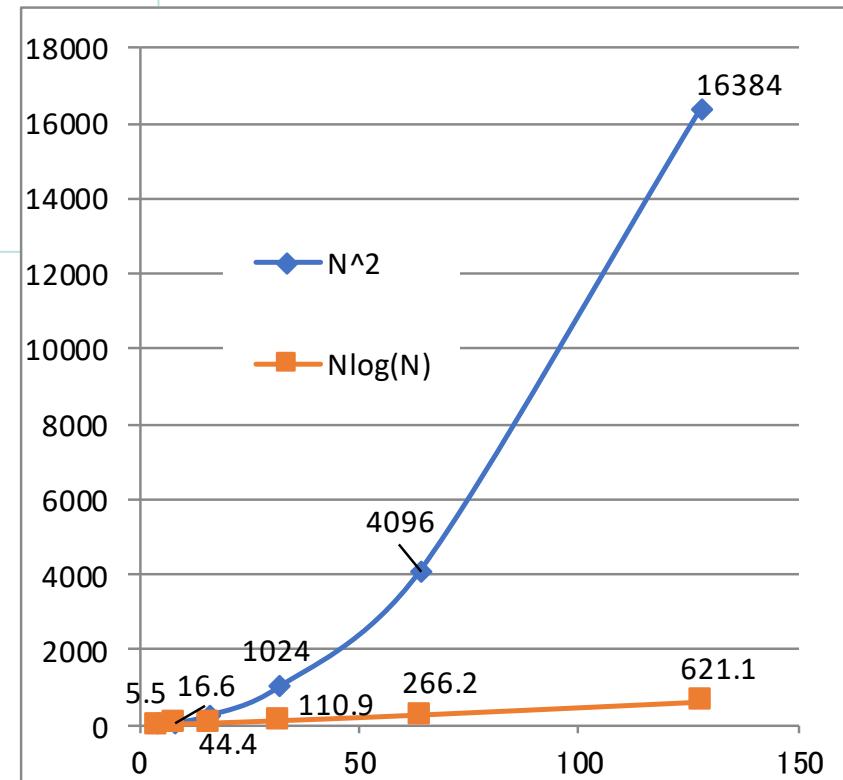
# 高速フーリエ変換とは

$$F(m) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i \frac{2\pi}{N} mk} = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) W^{-mk} \quad W = e^{i \frac{2\pi}{N}}$$

- 離散的フーリエ変換（計算量が  $O(N^2)$  となる）の結果を、次数  $N$  が2の累乗のときに  $O(N \log N)$  の計算量で得るアルゴリズムである。

- ランダウの記号 (Landau symbol) は、関数の極限における値の変化度合いに、おおよその評価を与えるための記法。
- 記号  $O$  は「程度」の意味のOrderから。
  - ・ウィキペディア「ランダウの記号」より

この革命的方法が、電子計算機の使用と相呼応して、今までに実時間的に不可能だった工学上の種々な不規則現象の周期性の解析や多変数フーリエ解析などを可能にした。



# 高速フーリエ変換

参考文献

篠崎・富山・若林 共著、「現代工学のための応用フーリエ解析」8.4 高速フーリエ変換(FFT)  
現代工学社(2005)



$$F(m) = \sum_{k=0}^7 f(k) e^{-i\frac{\pi}{4}mk} = \sum_{k=0}^7 f(k) W^{-mk}$$

$$= \sum_{k=0}^7 f(k) w^{mk}$$

$$f(k) = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) W^{mk}$$

$$W_8 = e^{i\frac{2\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = w_8^{-1}$$

$$W_8^2 = e^{i\frac{2\pi}{8} \cdot 2} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$= W_8^{10} = W_8^{18} \dots$$

$$W_8^3 = e^{i\frac{2\pi}{8} \cdot 3} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

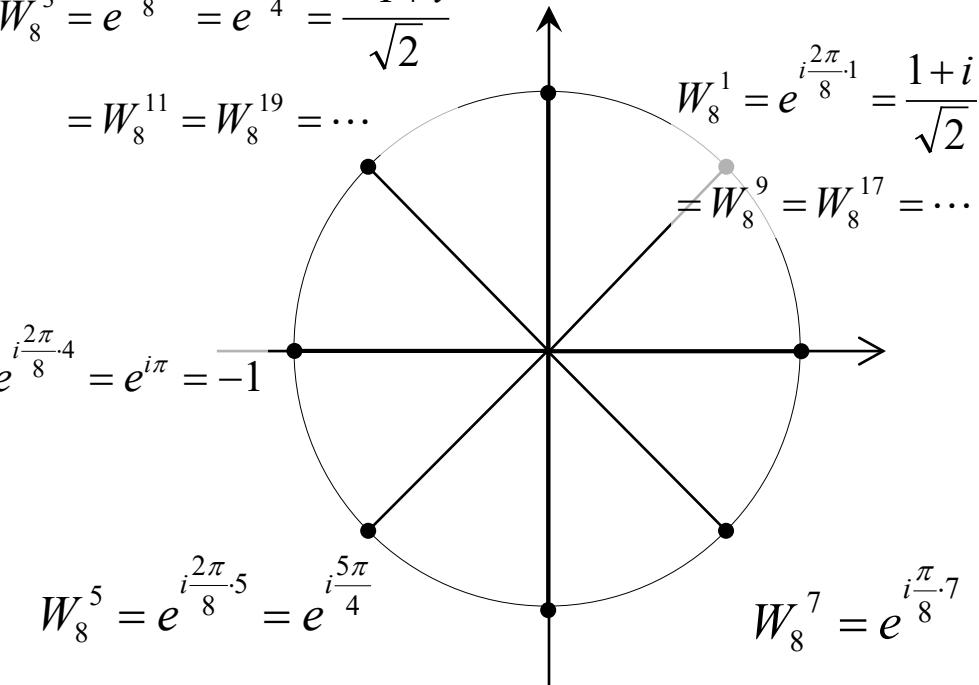
$$= W_8^{11} = W_8^{19} = \dots$$

$$W_8^4 = e^{i\frac{2\pi}{8} \cdot 4} = e^{i\pi} = -1$$

$$W_8^5 = e^{i\frac{2\pi}{8} \cdot 5} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$W_8^6 = e^{i\frac{2\pi}{8} \cdot 6} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

$$W_8^7 = e^{i\frac{2\pi}{8} \cdot 7}$$





# 高速フーリエ変換

$$F(m) = \sum_{k=0}^7 f(k) e^{-i \frac{\pi}{4} m k} = \sum_{k=0}^7 f(k) W^{-mk}$$

$$= \sum_{k=0}^7 f(k) w^{mk}$$

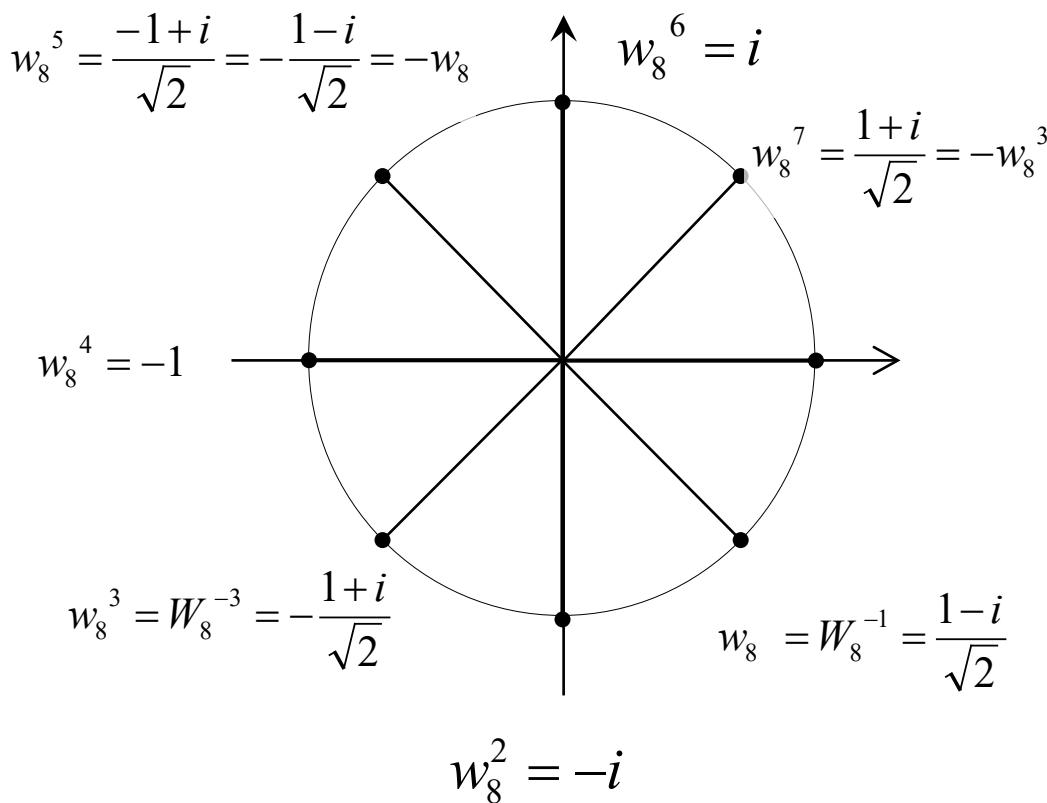
$$f(k) = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) W^{mk}$$

$$w_8 = e^{-i \frac{2\pi}{8}} = e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$$

を用いることとする。



$$w_8^2 = -i$$



- 8分割の場合のDFTを書き下すと以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \\ F(4) \\ F(5) \\ F(6) \\ F(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_8^{-0.0} & W_8^{-0.1} & W_8^{-0.2} & W_8^{-0.3} & W_8^{-0.4} & W_8^{-0.5} & W_8^{-0.6} & W_8^{-0.7} \\ W_8^{-1.0} & W_8^{-1.1} & W_8^{-1.2} & W_8^{-1.3} & W_8^{-1.4} & W_8^{-1.5} & W_8^{-1.6} & W_8^{-1.7} \\ W_8^{-2.0} & W_8^{-2.1} & W_8^{-2.2} & W_8^{-2.3} & W_8^{-2.4} & W_8^{-2.5} & W_8^{-2.6} & W_8^{-2.7} \\ W_8^{-3.0} & W_8^{-3.1} & W_8^{-3.2} & W_8^{-3.3} & W_8^{-3.4} & W_8^{-3.5} & W_8^{-3.6} & W_8^{-3.7} \\ W_8^{-4.0} & W_8^{-4.1} & W_8^{-4.2} & W_8^{-4.3} & W_8^{-4.4} & W_8^{-4.5} & W_8^{-4.6} & W_8^{-4.7} \\ W_8^{-5.0} & W_8^{-5.1} & W_8^{-5.2} & W_8^{-5.3} & W_8^{-5.4} & W_8^{-5.5} & W_8^{-5.6} & W_8^{-5.7} \\ W_8^{-6.0} & W_8^{-6.1} & W_8^{-6.2} & W_8^{-6.3} & W_8^{-6.4} & W_8^{-6.5} & W_8^{-6.6} & W_8^{-6.7} \\ W_8^{-7.0} & W_8^{-7.1} & W_8^{-7.2} & W_8^{-7.3} & W_8^{-7.4} & W_8^{-7.5} & W_8^{-7.6} & W_8^{-7.7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{pmatrix}$$



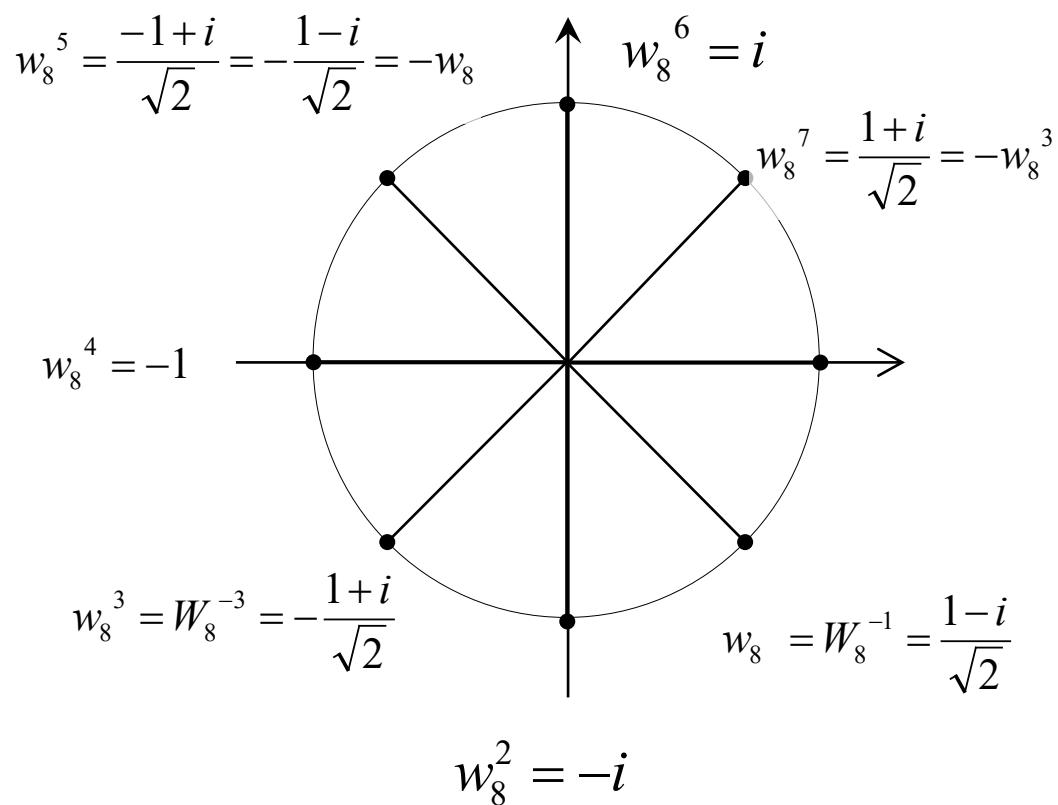
$$[C] = \left( \begin{array}{cccccccc} W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^{-1} & W_8^{-2} & W_8^{-3} & W_8^{-4} & W_8^{-5} & W_8^{-6} & W_8^{-7} \\ W_8^0 & W_8^{-2} & W_8^{-4} & W_8^{-6} & W_8^{-8} & W_8^{-10} & W_8^{-12} & W_8^{-14} \\ W_8^0 & W_8^{-3} & W_8^{-6} & W_8^{-9} & W_8^{-12} & W_8^{-15} & W_8^{-18} & W_8^{-21} \\ W_8^{-0} & W_8^{-4} & W_8^{-8} & W_8^{-12} & W_8^{-16} & W_8^{-20} & W_8^{-24} & W_8^{-28} \\ W_8^0 & W_8^{-5} & W_8^{-10} & W_8^{-15} & W_8^{-20} & W_8^{-25} & W_8^{-30} & W_8^{-35} \\ W_8^0 & W_8^{-6} & W_8^{-12} & W_8^{-18} & W_8^{-24} & W_8^{-30} & W_8^{-36} & W_8^{-42} \\ W_8^0 & W_8^{-7} & W_8^{-14} & W_8^{-21} & W_8^{-28} & W_8^{-35} & W_8^{-42} & W_8^{-49} \end{array} \right) \begin{array}{l} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{array}$$



# 高速フーリエ変換

$$\begin{aligned}
 W_8 &= e^{i\frac{2\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \\
 &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_8 &= e^{-i\frac{2\pi}{8}} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
 &= \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$





# 高速フーリエ変換

- 回転演算子

$$W_8^0 = W_8^{-8} = W_8^{-16} = W_8^{-24} = W_8^{-32} = W_8^{-40} = W_8^{-48} = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 0} = 1$$

$$W_8^{-1} = W_8^{-9} = W_8^{-17} = W_8^{-25} = W_8^{-33} = W_8^{-41} = W_8^{-49} = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 1} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} = w_8$$

$$W_8^{-2} = W_8^{-10} = W_8^{-18} = W_8^{-26} = W_8^{-34} = W_8^{-42} = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 2} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

$$W_8^{-3} = W_8^{-11} = W_8^{-19} = W_8^{-27} = W_8^{-35} = W_8^{-43} = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 3} = -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = w_8^3$$



# 高速フーリエ変換

- 回転演算子

$$W_8^{-4} = W_8^{-12} = W_8^{-20} = W_8^{-28} = W_8^{-36} = W_8^{-44} = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 4} = e^{-i\pi} = -1$$

$$W_8^{-5} = W_8^{-13} = W_8^{-21} = W_8^{-29} = W_8^{-37} = W_8^{-45} = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 5} = \frac{(-1+i)}{\sqrt{2}} = -w_8$$

$$W_8^{-6} = W_8^{-14} = W_8^{-22} = W_8^{-30} = W_8^{-38} = W_8^{-46} = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 6} = e^{-i\frac{\pi}{2} \cdot 3} = i$$

$$W_8^{-7} = W_8^{-15} = W_8^{-23} = W_8^{-31} = W_8^{-39} = W_8^{-47} = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 7} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = -w_8^3$$



$$[C] = \left( \begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & f(0) \\ 1 & w_8 & -i & w_8^3 & -1 & -w_8 & i & -w_8^3 & f(1) \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i & f(2) \\ 1 & w_8^3 & i & w_8 & -1 & -w_8^3 & -i & -w_8 & f(3) \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & f(4) \\ 1 & -w_8 & -i & -w_8^3 & -1 & w_8 & i & w_8^3 & f(5) \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i & f(6) \\ 1 & -w_8^3 & i & -w_8 & -1 & w_8^3 & -i & w_8 & f(7) \end{array} \right)$$

- これは次のように分割できる



$$\begin{aligned}
 [C] &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} f(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ w_8 \\ -i \\ w_8 \\ -1 \\ -w_8 \\ i \\ -w_8^3 \end{pmatrix} f(1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \\ 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} f(2) + \begin{pmatrix} 1 \\ w_8^3 \\ i \\ w_8 \\ -1 \\ -w_8^3 \\ -i \\ -w_8 \end{pmatrix} f(3) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} f(4) + \begin{pmatrix} 1 \\ -w_8 \\ -i \\ -w_8^3 \\ -1 \\ w_8 \\ i \\ w_8^3 \end{pmatrix} f(5) + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \\ 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} f(6) + \begin{pmatrix} 1 \\ -w_8^3 \\ i \\ -w_8 \\ -1 \\ w_8^3 \\ -i \\ w_8 \end{pmatrix} f(7) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} f(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} f(2) + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -1 \\ -i \\ 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} f(4) + \begin{pmatrix} 1 \\ w_8 \\ -i \\ w_8 \\ -1 \\ -w_8 \\ i \\ -w_8^3 \end{pmatrix} f(1) + \begin{pmatrix} 1 \\ w_8^3 \\ i \\ w_8 \\ -1 \\ -w_8^3 \\ -i \\ -w_8 \end{pmatrix} f(3) + \begin{pmatrix} 1 \\ -w_8 \\ -i \\ -w_8^3 \\ -1 \\ w_8 \\ i \\ w_8^3 \end{pmatrix} f(5) + \begin{pmatrix} 1 \\ -w_8^3 \\ i \\ -w_8 \\ -1 \\ w_8^3 \\ -i \\ w_8 \end{pmatrix} f(7)
 \end{aligned}$$

- これはさらに次のようにまとめられる。



$$\text{ここで } w_8 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{より} \quad w_8^3 = \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^3 = e^{-i\frac{\pi}{4} \cdot 3} = \left( \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right) = -\left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)$$

$$-iw_8 = -i \cdot \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{-i+i^2}{\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right) = -\left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)$$

また 
$$\begin{cases} -iw_8 = w_8^3 \\ w_8 = \frac{w_8^3}{-i} = iw_8^3 \end{cases}$$
 だから

$[C] =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} f(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \\ 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} f(2) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} f(4) + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \\ 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} f(6) + \begin{pmatrix} 1 \\ w_8 \\ -i \\ w_8 \\ -1 \\ -w_8 \\ i \\ -w_8^3 \end{pmatrix} f(1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -iw_8 \\ i \\ iw_8^3 \\ -1 \\ iw_8 \\ -i \\ -iw_8^3 \end{pmatrix} f(3) + \begin{pmatrix} 1 \\ -w_8 \\ -i \\ -w_8^3 \\ -1 \\ w_8 \\ i \\ w_8^3 \end{pmatrix} f(5) + \begin{pmatrix} 1 \\ iw_8 \\ i \\ -iw_8^3 \\ -1 \\ -iw_8 \\ -i \\ iw_8^3 \end{pmatrix} f(7)$$

と書き換えられるので、さらに次のようにまとめられる。



$$[C] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(2) \\ f(4) \\ f(6) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ w_8 & -iw_8 & -w_8 & iw_8 \\ -i & i & -i & i \\ w_8^3 & iw_8^3 & -w_8^3 & -iw_8^3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -w_8 & iw_8 & w_8 & -iw_8 \\ i & -i & i & -i \\ -w_8^3 & -iw_8^3 & w_8^3 & iw_8^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(3) \\ f(5) \\ f(7) \end{pmatrix}$$

破線で囲んだ部分は、上の部分に対し符号が反転している。



そこで、次の行列を定義する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} = [W]$$

これを用いて

$$\begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = [W] \begin{pmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_4 \\ f_6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \end{pmatrix} = [W] \begin{pmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

を作つておく。



すると、次のようになっていることが判る。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & 1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(2) \\ f(4) \\ f(6) \end{pmatrix} = [W] \begin{pmatrix} f(0) \\ f(2) \\ f(4) \\ f(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ w_8 & -iw_8 & -w_8 & w_8 \\ -i & i & -i & i \\ w_8^3 & iw_8^3 & -w_8^3 & -iw_8^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(3) \\ f(5) \\ f(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_4 \\ w_8 D_5 \\ -i D_6 \\ w_8^3 D_7 \end{pmatrix}$$

これら $[D]$ を用いるとスペクトル $[C]$ は  
右の式①で求められる

$$[C] = \begin{bmatrix} D_0 + D_4 \\ D_1 + w_8 D_5 \\ D_2 - i D_6 \\ D_3 + w_8^3 D_7 \\ D_0 - D_4 \\ D_1 - w_8 D_5 \\ D_2 + i D_6 \\ D_3 - w_8^3 D_7 \end{bmatrix}$$

①



この行列の第2列と第3列を入れ替えてみる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} = [W] \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix}$$

すると、計算は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(4) \\ f(2) \\ f(6) \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(2) \\ f(6) \end{pmatrix} \right) \\ \begin{pmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(5) \\ f(3) \\ f(7) \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(5) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(3) \\ f(7) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

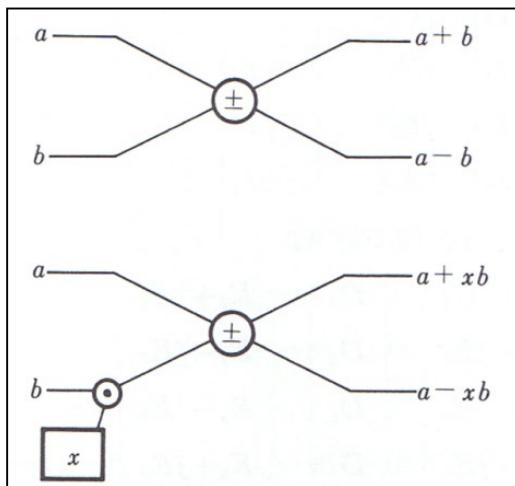


直交行列  $[U] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  が基本になっていることが判る。

そこで、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \end{pmatrix} &= [U] \begin{pmatrix} f(0) \\ f(4) \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} &= [U] \begin{pmatrix} f(1) \\ f(5) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E_4 \\ E_5 \end{pmatrix} &= [U] \begin{pmatrix} f(2) \\ f(6) \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} E_6 \\ E_7 \end{pmatrix} &= [U] \begin{pmatrix} f(3) \\ f(7) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

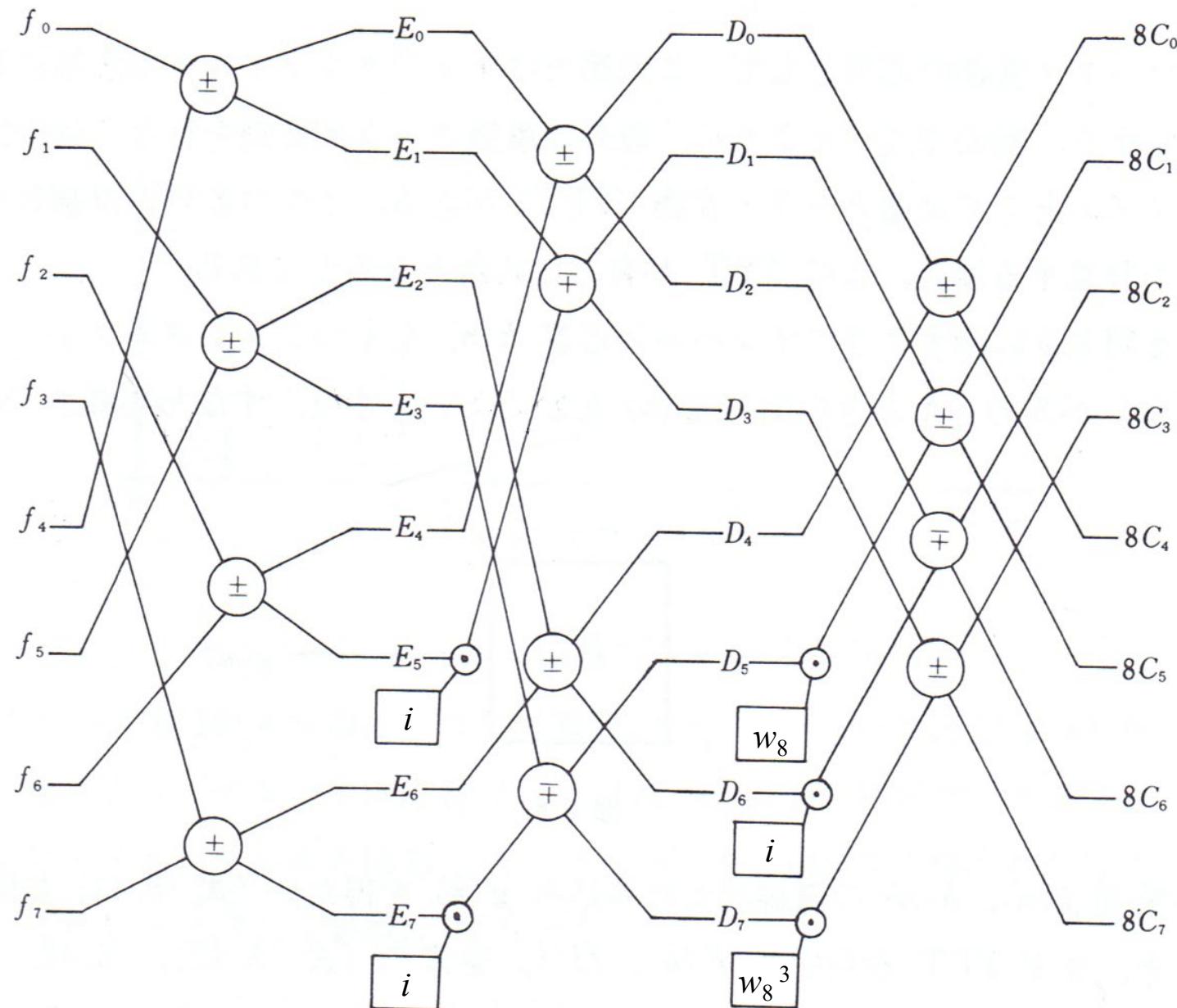
で定義される( $E$ )を用いると  
右のように( $D_j$ )が求まるので、これを  
①式に代入すればよい。  
以下のような演算を定義すると



$$\begin{pmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E_0) \\ (E_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_4 \\ -iE_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 + E_4 \\ E_1 - iE_5 \\ E_0 - E_4 \\ E_1 + iE_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E_2) \\ (E_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_6 \\ -iE_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 + E_6 \\ E_3 - iE_7 \\ E_2 - E_6 \\ E_3 + iE_7 \end{pmatrix}$$

# FFTのアルゴリズムは、、、





# 講義を終えるにあたり

- ・ フーリエ級数やフーリエ変換を含む学問は情報化社会の今日では、今や物理工学のみならず経済学や医学にいたるまであらゆる分野で利用されており、非常に重要な位置をしめているといえる。
- ・ 観測された波形から情報をどのように引き出し、分析し、使用するかということ、すなわち情報処理が大切なのである。フーリエ解析はこのことを可能してくれる強力な方法である。
  - 篠崎・富山・若林 共著、「現代工学のための応用フーリエ解析」まえがき 現代工学社(2005)



## 例題

離散的フーリエ変換(DFT)における回転演算子  $W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$   
において、 $N=4$ の場合、右のように簡単になる。

$N=4$ として  $f(0)=1, f(1)=0, f(2)=1, f(3)=0$  のときのDFTを求めよ。

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ W_4^0 & W_4^{-2} & W_4^{-4} & W_4^{-6} \\ W_4^0 & W_4^{-3} & W_4^{-6} & W_4^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

$$W_4^0 = \boxed{\phantom{000}}$$
$$W_4^{-1} = \boxed{\phantom{000}}$$
$$W_4^{-2} = \boxed{\phantom{000}}$$
$$W_4^{-3} = \boxed{\phantom{000}}$$

## 例題

離散的フーリエ変換(DFT)における回転演算子  $W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$   $W_4 = e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

において、 $N=4$ の場合、右のように簡単になる。

$N=4$ として  $f(0)=1, f(1)=0, f(2)=1, f(3)=0$  のときのDFTを求めよ。

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^{-1} & W_4^{-2} & W_4^{-3} \\ W_4^0 & W_4^{-2} & W_4^{-4} & W_4^{-6} \\ W_4^0 & W_4^{-3} & W_4^{-6} & W_4^{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} & e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} \\ e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} & e^{i\frac{\pi}{2} \times -1} & e^{i\frac{\pi}{2} \times -2} & e^{i\frac{\pi}{2} \times -3} \\ e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} & e^{i\frac{\pi}{2} \times -2} & e^{i\frac{\pi}{2} \times -4} & e^{i\frac{\pi}{2} \times -6} \\ e^{i\frac{\pi}{2} \cdot 0} & e^{i\frac{\pi}{2} \times -3} & e^{i\frac{\pi}{2} \times -6} & e^{i\frac{\pi}{2} \times -9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1+0 \\ 1-0i-1+0i \\ 1-0+1-0 \\ 1+0i-1-0i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$W_4^0 =$
$W_4^{-1} =$
$W_4^{-2} =$
$W_4^{-3} =$



学年

クラス

学籍番号b

出席番号

氏名

離散的フーリエ変換(DFT)における回転演算子において、 $N=3$ の場合、右のように簡単になる。

$$W_N = e^{\frac{i2\pi}{N}}$$

$N=3$ として  $f(0)=1, f(1)=0, f(2)=1$  のときのDFTを求めよ。

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 \\ W_3^0 & W_3^{-1} & W_3^{-2} \\ W_3^0 & W_3^{-2} & W_3^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{pmatrix}$$

$W_3^0 =$	<input type="text"/>
$W_3^{-1} =$	<input type="text"/>
$W_3^{-2} =$	<input type="text"/>

