【演習1】 三角関数、指数法則 ディリクレの不連続積分(前半部)

学籍番号 b クラス

出席番号 氏名

図は適宜利用

$$-(a-b)=(\boxed{b}-a)$$

$$\frac{1}{x}=x^{\boxed{-1}},\quad a^0=\boxed{1}$$

$$a^x/a^y=\frac{a^x}{a^y}=a^{\boxed{x-y}}$$

$$(a^x)^{\boxed{y}}=a^{xy},\ (a^x)^{-y}=a^{\boxed{-xy}}$$

$$\cos(45^\circ)=\cos\left(\frac{\pi}{\boxed{4}}\right)=\frac{\sqrt{\boxed{2}}}{2}$$

$$\sin(-45^\circ)=\sin\left(-\frac{\boxed{\pi}}{4}\right)=-\frac{\sqrt{\boxed{2}}}{2}$$

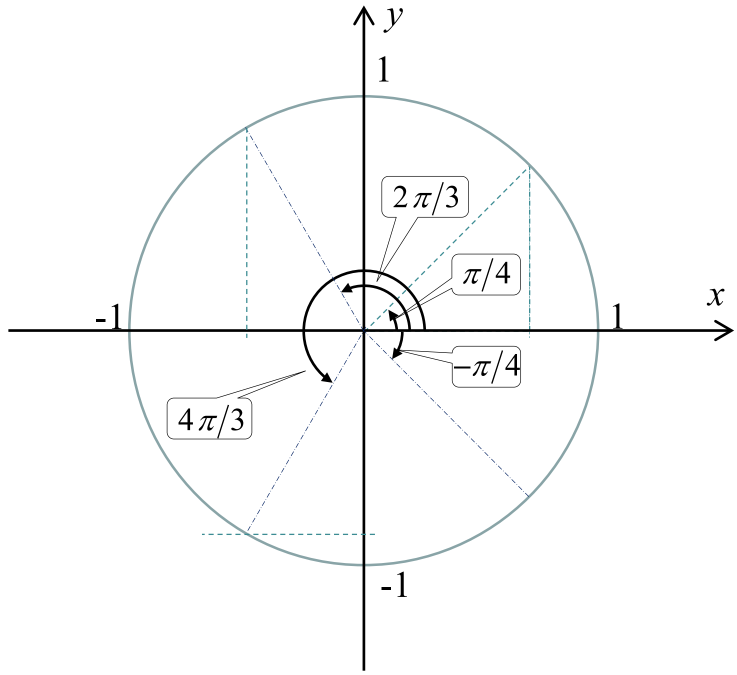
$$\sin(240^\circ)=\sin\left(\frac{4\pi}{\boxed{3}}\right)=-\frac{\sqrt{\boxed{3}}}{\boxed{2}}$$

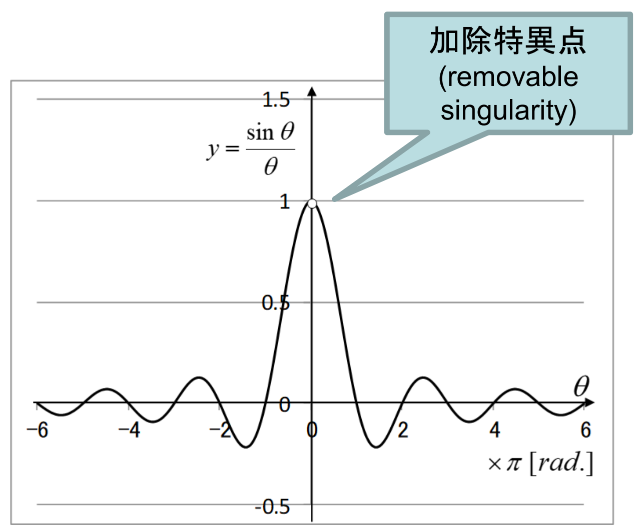
$$\cos(120^\circ)=\cos\left(\frac{2\pi}{\boxed{3}}\right)=-\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$$

$$\sin(-\pi)=\boxed{0}\qquad\cos(\pi)=\boxed{-1}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\boxed{1},\qquad \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=\boxed{e}$$

$$\log_a b=\frac{\log_e \boxed{b}}{\log_e a},\qquad \log_a \boxed{a}=1$$



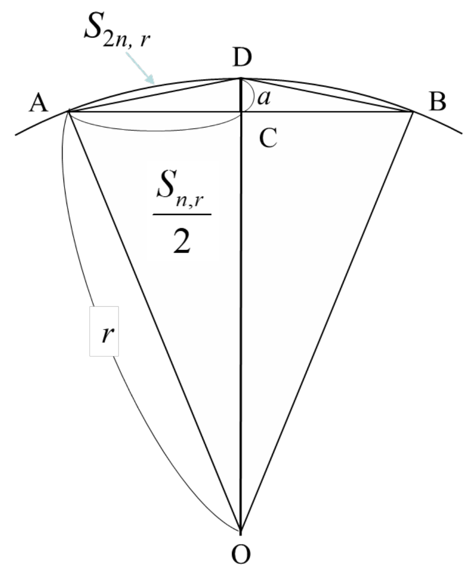


サンプリング関数
標本化関数

【演習2】

自分のノートに以下を写しながら計算し、この紙は空欄を埋めて提出すること。

単位円の内接正N角形（右図）において
S_{2n}とS_nの関係（漸化式）は以下のように求められる。



⊿ACDにピタゴラスの定理を適用すると

$$S_{2n,r}{}^2 = \left(\frac{S_{n,r}}{2}\right)^2 + a^2 \qquad (1)$$

次に、⊿ OCAに適用すると

$$OC = r - a = \sqrt{r^2 - \boxed{\left(\frac{S_{n,r}}{2}\right)^2}} \qquad (2)$$

であるから、(1), (2)より

$$S_{2n,r}{}^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{\boxed{4} - \left(\boxed{\frac{S_{n,r}}{r}}\right)^2} \qquad (3)$$

【演習3】

出典：吉田 武著「新装版 オイラーの贈物」、東海大学出版会2012年、p. 33 , p.163 .

指数関数 e^x のマクローリン展開での剰余項について考えたい。

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + R_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^{\boxed{n}} + R_{n+1}$$

における剰余項R_{n+1}を評価する。ラグランジュ型の剰余項：$R_{n+1} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < c < x)$ を用いると

$$R_{n+1} = \frac{\boxed{e^c}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\boxed{f(x) = e^x = \left(e^x\right)'}$$

となる。xを固定して考えると、$0 < c < x$ より、$1 < e^c < e^x$ であり

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = e^c \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^c \lim_{n\to\infty} a_n$$

とおく。ここで、 $0 < x < 1$ の範囲にあれば、明らかに $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となるので、$x > 1$の場合について考える。

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \frac{x}{\boxed{n+1}} \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = \boxed{0}$$

これにより、

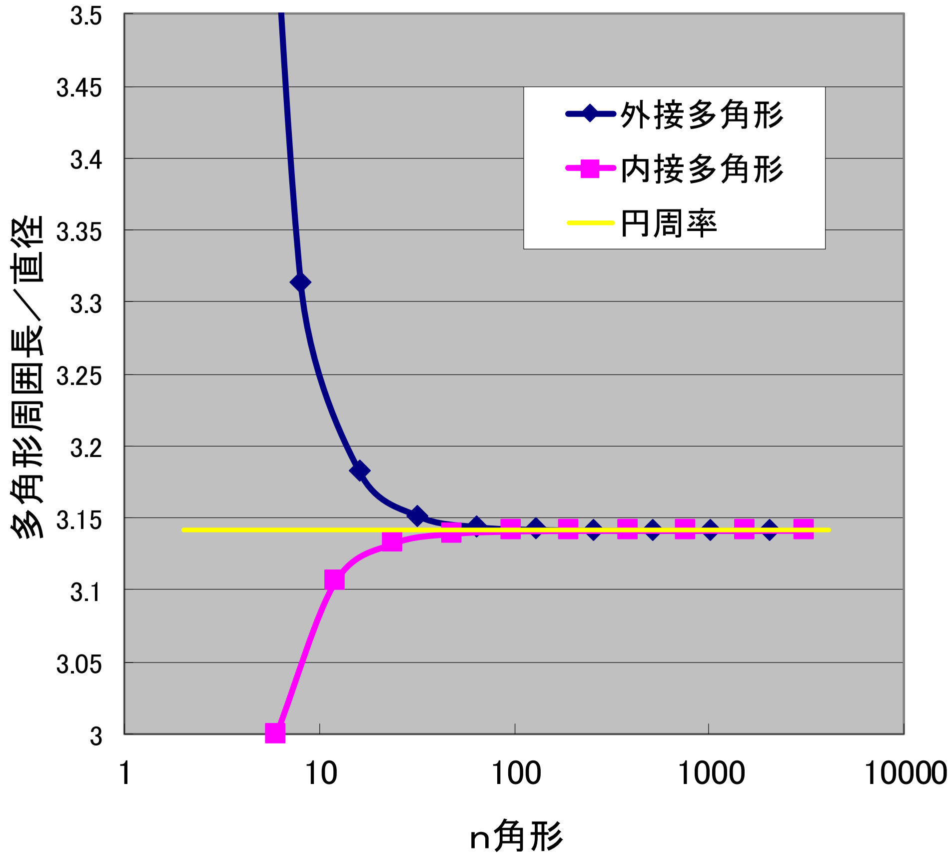
$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = e^c \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

すなわち、剰余項はゼロに収束する。従って、e^xの級数展開は実数全体で定義される。

$$e^x = \sum_{k=0}^{\boxed{\infty}} \frac{1}{k!}x^k = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

演習2　式(3)の導出

$$
\begin{aligned}
S_{2n,r}{}^2 &= \left(\frac{S_{n,r}}{2}\right)^2 + \left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{S_{n,r}}{2}\right)^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{S_{n,r}}{2}\right)^2 + r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \left(\frac{S_{n,r}}{2}\right)^2} + r^2 - \left(\frac{S_{n,r}}{2}\right)^2 \\
&= 2r^2 - r^2\sqrt{4 - \left(\frac{S_{n,r}}{r}\right)^2}
\end{aligned}
$$



アルキメデスのアルゴリズムによる円周率の近似