テイラー展開

松本　侑万

2025

定義 1. 関数 f を C^∞ 級関数とする（すなわち無限回微分可能な関数)。f が点 a の近くで

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\frac{f''''(a)}{4!}(x-a)^4+\cdots$$

とできるとき、これを f の a の周りのテイラー展開（テーラー展開; Taylor expansion）といい、この級数をテイラー級数 (Taylor series) という。定義域全ての点 a において、その十分近くでテイラー展開可能な関数を解析的 (analytic) であるという。

定理 1. 関数 f が点 a の近くで n 回微分可能であるとする。このとき、テイラー展開は次のように与えられる：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

ここで、$f^{(k)}(a)$ は a での k 次の導関数を表し、最終項 $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ はラグランジュの剰余項 R_n として知られ、$a<c<x$ である c が存在する。展開は以下の形式で表される：

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$