概略

概要

- 常微分方程式の初期値問題における解の存在と一意性を解析
- 完備な関数空間における逐次近似法を用いて解の構成を行う
- Gronwall の不等式により解の一意性を保証する

主定理

定理（解の存在と一意性）

- 区間 $I = [a, b]$ 上で連続な関数 $f(x, y)$ に対して，以下の初期値問題を考える：

$$\frac{d}{dx}Y(x) = f(x, Y(x)),$$
$$Y(a) = Y_0$$

- f が y に関して Lipschitz 連続であれば，一意な解 $Y(x)$ が存在する
- 解は以下の積分方程式の不動点として構成できる：

$$Y(x) = Y_0 + \int_a^x f(t, Y(t))\,dt$$

評価

- 初期値 $Y(a) = Y_0$ に対し，2つの解 $Y_1(x), Y_2(x)$ の差を考える：

$$
\begin{aligned}
|Y_1(x) - Y_2(x)| &= \left| \int_a^x [f(t, Y_1(t)) - f(t, Y_2(t))]\, dt \right| \\
&\leq \int_a^x L|Y_1(t) - Y_2(t)| dt
\end{aligned}
$$

- Gronwall の不等式により，解の差は次のように評価される：

$$
|Y_1(x) - Y_2(x)| \leq 0 \cdot e^{L(x-a)} = 0
$$

- よって，$Y_1(x) = Y_2(x)$ が成立し，一意性が示される