概要

背景

- 微分方程式の基礎を学ぶ中で理解を深めた

目的

- 初期値問題における解の一意性を証明

主張

- 完備性と積分作用素の性質を用い大域解の一意性を示す

主定理

定理

- f が Lipschitz 連続ならば、任意の初期値に対し解は一意に存在

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} Y(x) &= f(x, Y(x)), \quad x \in (a, b) \\
Y(a) &= Y_0
\end{aligned}
$$

証明

方法

- Picard の逐次近似法により近似列を構成
- 完備性により基本列が極限を持つ
- Gronwall の不等式により一意性を示す

$$|Y_1(x) - Y_2(x)| \leq \int_a^x L|Y_1(t) - Y_2(t)|dt \Rightarrow Y_1(x) = Y_2(x)$$

定義

初期値問題の解

- $Y \in C(I;\mathbb{R}) \cap C^1(I^i;\mathbb{R})$ が以下を満たす：

$$\frac{d}{dx}Y(x) = f(x, Y(x)), \quad Y(a) = Y_0$$

定義

Lipschitz 条件

- $\forall (x, Y), (x, Z) \in \Omega$:

$$|f(x, Y) - f(x, Z)| \leq L|Y - Z|$$

補助

空間の性質

- $C(I;\mathbb{R})$ は完備空間
- 積分作用素は線形かつ有界

$$T(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

補助

逐次近似法

- 反復列 $Y_{n+1}(x) = Y_0 + \int_a^x f(t, Y_n(t))dt$ を考える
- $\{Y_n\}$ は一様収束し、極限は解に一致

補助

Gronwall 不等式

- $u(x) \leq C + \int_a^x \alpha(t)u(t)dt \Rightarrow u(x) \leq C \exp\left(\int_a^x \alpha(t)dt\right)$

$$|Y_1(x) - Y_2(x)| \leq 0 \Rightarrow Y_1(x) = Y_2(x)$$