概要

背景

- 大学では微分方程式の基礎を学んだが、理論の理解は不十分であった。
- 研究室で解析学を学び、初期値問題の解の一意性に関心を持った。
- 本研究ではその存在と一意性の証明を目的とする。

目的

- 完備性と積分作用素の有界性を利用して近似解列を構成。
- 不動点定理により解の存在を示す。
- Gronwall の不等式により一意性を証明。

主定理

一意存在性の主張

- 初期値問題に対応する積分方程式の解が存在する。
- その解は連続関数空間 $C(I;\mathbb{R})$ 上で一意である。

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))dt$$

証明

Picard 逐次近似法

- 逐次的に関数列 Y_n を構成：

$$Y_n(x) = Y_0 + \int_a^x f(t, Y_{n-1}(t))dt$$

- 関数列 $\{Y_n\}$ は $C(I)$ 上で一様収束し、極限が解。

一意性の証明

- Gronwall の不等式を用いて、2 解の差を評価：

$$|Y(x) - \tilde{Y}(x)| \leq A \exp\left(\int g\right)$$

定義

Riemann 積分

- 有界関数の分割に対し和の極限が存在 $\Rightarrow$ 積分可能
- 極限値を $\int_a^b f(x)dx$ と定義

ノルム空間と一様ノルム

- ノルム $\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$ を持つ空間
- $C(I, \mathbb{R})$ はノルム空間

補助

ノルム空間の性質

- $C(I, \mathbb{R})$ は一様ノルムに関してノルム空間
- 積分作用素 $T(f) = \int_a^x f(t)dt$ は線形・連続
- よって、$T : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$