概略

対象とする問題

- 常微分方程式の初期値問題を対象とする：

$$\frac{d}{dx}Y(x) = f(x, Y(x)), \quad Y(x_0) = Y_0$$

- 初期値問題における解の存在と一意性の証明を目的とする

理論的準備

- 関数列とその収束性についての基本事項
- Riemann 積分の性質とその応用

数式的要点

- 完備距離空間における縮小写像原理（Banach の不動点定理）を応用
- 関数空間上での写像 $T(Y)(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))dt$ の自己写像性と縮小性の

定理とその要点

主要定理の要旨

- 関数空間 $\mathcal{C}([x_0 - a, x_0 + a])$ において，積分作用素 T を定義：

$$(TY)(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))dt$$

- f が Lipschitz 連続ならば， T は縮小写像となる
- Banach の不動点定理より， T は一意の不動点を持つ
- この不動点が初期値問題の一意解を与える

補足的補題

- 一様収束する関数列の極限は連続関数である
- 積分作用素は連続性と一様収束を保つ