概要

背景

- 常微分方程式の初期値問題に興味を持ち，その解の構成と一意性を示す.

目的

- 完備性と作用素の性質を用いて解の存在と一意性を示す.

主定理

- f が Lipshitz 連続なら解は一意に存在する.

主定理

- f が Lipshitz 連続なら解は一意に存在する．

定義

- Y が与式と初期条件を満たせば，それを解とする.
- 関数 f がある定数 L で Lipschitz 条件を満たすとき連続と定義.

概略

- 微分方程式の初期値問題の解に興味を持った.
- 完備空間と積分作用素を用いた理論的枠組みで構成した.
- Picard 近似と Gronwall 不等式で解の存在と一意性を示す.

主定理

- 初期値問題：
$$\frac{d}{dx}Y(x) = f(x, Y(x)), \quad Y(a) = Y_0$$
- f が Lipshitz 連続 $\Rightarrow$ 解は一意に存在.
- 解は $C(I, \mathbb{R})$ 上の不動点として構成される.

証明

関数列 (Y_n) を逐次近似法で定義する：

$$Y_{n+1}(x) = Y_0 + \int_a^x f(t, Y_n(t))dt$$

$$\|Y_{n+1} - Y_n\| \leq \frac{L^n(b-a)^n}{n!}\|Y_1 - Y_0\|$$

よって基本列となり，$C(I, \mathbb{R})$ の完備性により極限 Y が存在.
さらに 2 つの解 Y_1, Y_2 に対して：

$$|Y_1(x) - Y_2(x)| \leq \int_a^x L|Y_1(t) - Y_2(t)|dt$$

Gronwall の不等式より $Y_1 = Y_2$．よって一意.