概略

概要

- 常微分方程式の初期値問題に対する理論的理解を深めた
- 完備性と積分作用素を用いて解を構成
- Gronwall の不等式により解の一意性を証明

主定理

主定理

- $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が Lipschitz 連続であると仮定
- 任意の $Y_0 \in \mathbb{R}$ に対して
- 初期値問題

$$\frac{d}{dx}Y(x) = f(x, Y(x)), \quad Y(a) = Y_0$$

の解は $C(I, \mathbb{R})$ 上に一意に存在する

証明

証明の構成

- 逐次近似列：$Y_0(x) \equiv Y_0,\ Y_n(x) = Y_0 + \int_a^x f(t, Y_{n-1}(t))dt$
- 一様収束の評価：
$$|Y_n(x) - Y_{n-1}(x)| \leq ML^{n-1}\frac{|x-a|^n}{n!}$$
- 一様収束により極限関数 Y が解となる
- Gronwall の不等式により解の一意性を導く