Оглавление

1. Понятие двойного интеграла

Будем считать, что все области двумерного пространства являются квадрируемыми (имеющими площадь), а границы областей — непрерывными, гладкими, замкнутыми линиями.

Отрезок, соединяющий любые две точки границы области и принадлежащий этой области, называется *хордой*. Наибольшая из хорд — это *диаметр* области.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$, функция $f(x, y)$ задана на области D. Разобьём D на n маленьких частиц (D_i), где $S_{\Delta i} = \Delta\sigma_i$ — площадь каждой частицы. На каждой площадке выберем произвольным образом точку $M_i(\alpha_i, \beta_i)$.

Составим интегральную сумму:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i)\Delta\sigma_i.$$

Обозначим через $\lambda = \max \Delta\sigma_i$ максимальный диаметр частичных областей. Если при $\lambda \to 0$ существует предел $\lim_{\lambda \to 0} S_n$, то он называется *двойным интегралом* функции $f(x, y)$ по области D и обозначается:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$$

Если этот предел существует и конечен, то функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* в области D.

2. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

1) Механическое приложение

Если в области D распределено вещество с плотностью $\rho = f(x, y)$, то масса вещества вычисляется по формуле:

$$m = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$$

2) Геометрическое приложение

Пусть в области D задана положительная непрерывная функция $z = f(x, y)$. Тогда объём тела, лежащего в плоскости Oxy и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, вычисляется по формуле:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$$

Двойной интеграл выражает объём цилиндрического тела, образующие которого параллельны оси Oz и которое ограничено снизу областью D, а сверху — поверхностью $z = f(x, y)$.