Оглавление

1. Понятие двойного интеграла

Будем считать, что все области двумерного пространства являются квадрируемыми (имеющими площадь), а границы областей — непрерывными, гладкими, замкнутыми линиями.

Отрезок, соединяющий любые две точки границы области и принадлежащий этой области, называется *хордой*. Наибольшая из хорд — это *диаметр* области.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$, функция $f(x, y)$ задана на области D. Разобьём D на n маленьких частиц (D_i), где $S_{\Delta i} = \Delta\sigma_i$ — площадь каждой частицы. На каждой площадке выберем произвольным образом точку $M_i(\alpha_i, \beta_i)$.

Составим интегральную сумму:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i, \beta_i)\Delta\sigma_i.$$

Обозначим через $\lambda = \max \Delta\sigma_i$ максимальный диаметр частичных областей. Если при $\lambda \to 0$ существует предел $\lim_{\lambda\to 0} S_n$, то он называется *двойным интегралом* функции $f(x, y)$ по области D и обозначается:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$$

Если этот предел существует и конечен, то функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* в области D.

2. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

1) Механическое приложение

Если в области D распределено вещество с плотностью $\rho = f(x, y)$, то масса вещества вычисляется по формуле:

$$m = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$$

2) Геометрическое приложение

Пусть в области D задана положительная непрерывная функция $z = f(x, y)$. Тогда объём тела, лежащего в плоскости Oxy и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, вычисляется по формуле:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$$

Двойной интеграл выражает объём цилиндрического тела, образующие которого параллельны оси Oz и которое ограничено снизу областью D, а сверху — поверхностью $z = f(x, y)$.

3. Основные свойства двойного интеграла

1) Аддитивность

Если $f(x,y)$ интегрируема в области D, то она интегрируема в любой подобласти $D' \subset D$ (D, D' — квадрируемые области).

Если $f(x,y)$ интегрируема на D_1 и D_2, то $f(x,y)$ интегрируема на $D = D_1 \cup D_2$.

Если $D = D_1 \cup D_2$, где D_1 и D_2 — квадрируемые множества без общих внутренних точек, то:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

2) Линейность

Пусть $f(x,y)$, $g(x,y)$ интегрируемы на D, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha \cdot f(x,y) + \beta \cdot g(x,y)$ интегрируема на D и:

$$\iint\limits_D [\alpha \cdot f(x,y) + \beta \cdot g(x,y)]\,dx\,dy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy$$

3) Монотонность

Если $f(x,y)$, $g(x,y)$ интегрируемы на D и $f(x,y) \leq g(x,y)$ для любого $(x,y) \in D$, то:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy$$

4) Интегрируемость произведения

Если $f(x,y)$, $g(x,y)$ интегрируемы на D, то $f(x,y) \cdot g(x,y)$ также интегрируема на D.

5) Теорема о среднем

Пусть:

1. $f(x,y)$, $g(x,y)$ — интегрируемы на D
2. $g(x,y) \geq 0$ на D
3. $m = \inf\limits_{D} f(x,y)$, $M = \sup\limits_{D} f(x,y)$

Тогда существует $\mu \in [m, M]$ такое, что:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy = \mu \iint\limits_{D} g(x,y)\,dx\,dy$$

4. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ и задана непрерывная функция $f(x, y)$. Предположим, что D ограничена непрерывной замкнутой кривой $\partial D = l$, которую любая вертикальная или горизонтальная прямая пересекает не более чем в двух точках.

Предположим, что D расположена в прямоугольнике:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

Прямые $x = a$ и $x = b$ точками касания делят границу на две части: $l = l_1 \cup l_2$. Предположим, что:

$$l_1 : y = y_1(x); \quad l_2 : y = y_2(x)$$

тогда двойной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy$$

Второй случай (интегрирование в обратном порядке): пусть прямые $y = c$ и $y = d$ точками касания делят границу l на две части: $l = l_3 \cup l_4$ так, что:

$$l_3 : x = x_1(y); \quad l_4 : x = x_2(y)$$

тогда двойной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx$$

Интегралы в правых частях первого и второго случая называются *повторными*.

5. Криволинейные координаты на плоскости

Пусть двумерная квадрируемая область $G \subset \mathbb{R}^2$ задана функциями:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \in G$$

Эта система функций определяет отображение области G в область $D \subset \mathbb{R}^2$.

Предположим, что отображение удовлетворяет следующим условиям:

1. Оно взаимно однозначно и имеет обратное отображение:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (x, y) \in D$$

2. Функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ непрерывно дифференцируемы в области G, причём якобиан отображения:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

В силу непрерывности частных производных функций, якобиан сохраняет свой знак в области G. Отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между двумя областями, а также между кусочно-гладкими кривыми в областях D и G.

Линия $u = u_0$ в G соответствует гладкой кривой L в области D, описываемой уравнениями:

$$x = x(u_0, v), \quad y = y(u_0, v)$$

Аналогично, линия $v = v_0$ соответствует кривой l в области D:

$$x = x(u, v_0), \quad y = y(u, v_0)$$

Так как отображение взаимно однозначно, то через каждую точку $(x, y) \in D$ проходит единственная линия каждого семейства, соответствующая значениям $u = u_0$, $v = v_0$. Поэтому значения (u, v) однозначно определяют точку $(x, y) \in D$. Придавая u и v допустимые значения, на плоскости Oxy получим два семейства координатных линий. Значения u и v называются криволинейными координатами точки $(x, y) \in D$.

Частным случаем криволинейных координат является полярная система координат с началом в точке O. Переход от полярных координат к декартовым задаётся формулами:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

где $r \geq 0$ — полярный радиус, φ — полярный угол.

6. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть отображение

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и отображает область G на D. Причём якобиан этого отображения отличен от нуля.

Тогда площадь квадрируемого замкнутого множества D может быть выражена двойным интегралом по области G:

$$S_D = \iint\limits_D dx\, dy = \iint\limits_G |J|\, du\, dv$$

где J — якобиан преобразования:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

7. Замена переменных в произвольном двойном интеграле

Пусть отображение

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и отображает область G на D, причём якобиан этого отображения отличен от нуля.

Если $f(x, y)$ непрерывна в D или допускает разрывы вдоль конечного числа кусочно-гладких кривых, оставаясь ограниченной в D, тогда справедлива формула замены переменных:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J|\,du\,dv$$

где J — якобиан преобразования:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

8. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

где x — независимая переменная, y — неизвестная функция, y' — её производная, а F — заданная функция трёх переменных, определённая в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $x \in (a, b)$, $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, которая является решением уравнения, если при её подстановке получается тождество:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, \quad x \in (a, b)$$

Важным частным случаем является уравнение вида:

$$y' = f(x, y)$$

где $f(x, y)$ — функция двух переменных, определённая в $D \subset \mathbb{R}^2$.

Уравнение $y' = f(x, y)$ является обыкновенным дифференциальным уровнением 1-го порядка, разрешённым относительно производной. Простейшим примером уравнения, разрешённого относительно производной, является:

$$y' = f(x)$$

решение которого связано с нахождением первообразной непрерывной $f(x)$:

$$y = \int f(x)\,dx + C$$

Дифференциальное уравнение может иметь бесконечное количество решений. Каждое конкретное решение называется *частным решением* уравнения. Множество всех частных решений этого уравнения является *общим решением*. Решить Дифференциальное уравнение — значит найти его общее решение.

Часто требуется найти не общее решение уравнения $y' = f(x, y)$, а некоторое частное решение $y(x)$, для которого известно, что в некоторой точке x_0 оно принимает значение y_0:

$$y(x_0) = y_0$$

Задача решения уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*, при этом условие $y(x_0) = y_0$ называется *начальным условием*. Как правило, задача Коши имеет единственное решение в отличие от решения уравнения $y' = f(x, y)$.

9. Геометрический смысл уравнения

В каждой точке $(x, y) \in D$ поставим в соответствие прямую, проходящую через эту точку под углом, тангенс которого равен функции $\tan\alpha = f(x, y)$. В этом случае говорят, что правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ задаёт *поле направлений.*

Интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$ называется кривая, график которой лежит в D и в каждой точке этого графика существует касательная, которая совпадает с прямой поля направлений для этой точки.

Пусть $\varphi(x)$ — решение уравнения $y' = f(x, y)$, тогда график этой функции является интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$ и обратно, если некоторая интегральная кривая является графиком функции $\varphi(x)$, то $\varphi(x)$ является решением.

С геометрической точки зрения, решение уравнения $y' = f(x, y)$ — задача построения интегральных кривых этого уравнения. Следовательно, задача Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$ эквивалентна задаче нахождения интегральной кривой, проходящей через заданную точку $(x_0, y_0) \in D$.