# Représentation "Straight line" d'un graphe planaire par l'algorithme Shift method

Directeur : M$^r$ Jef WIJSEN
Présenté par Youness KAZZOUL

Université de Mons - Faculté des Sciences

Umons - 2023

# Table des matières

# Introduction

- 2-connexe
- Triangulé
- Planaire maximal

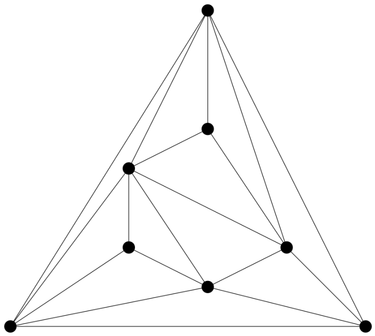

Figure 1 – Dessin en ligne droite d'un graphe planaire.

Source : Repéré sur le document Takao,Saidur

# Complexité

**Théorème De Fraysseix, Pach et Pollack <1990> M. Chrobak and T. H. Payne <1995>**

Soit $G$ un graphe plan maximal avec $n$ sommets. Shift method calcule un dessin planaire en lignes droites de $G$ sur une grille de $(2n-4)(n-2)$ en temps et en espace $\mathcal{O}(n)$ .

$1^{er}$ phase prend $\mathcal{O}(n)$
$2^{eme}$ phase prend $\mathcal{O}(d(v_k))$
$3^{eme}$ phase prend $\mathcal{O}(n)$

Représentation

Modélisation

Bases de données

Visualisation

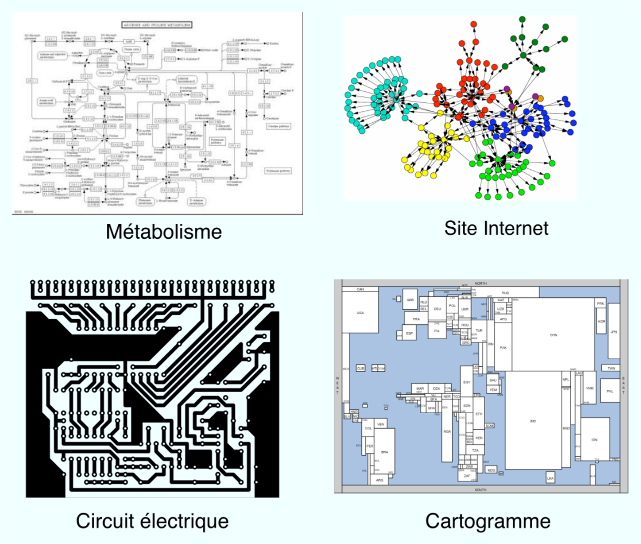


Figure 2 – Cas d'utilisation de graphe.

Source : Référence sur le document Fusy

## Conditions

Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire triangulé avec $n$ nombre de sommets $3 \leq n$. un ordre canonique $\pi = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, si les conditions suivantes sont remplies pour chaque $k$, $3 \leq k \leq n$ :

1. $\{v_1,\ v_2\}$ appartient à la face extérieure du $G$ ;
2. Les sommets $(v_1, \ldots, v_n)$ induisent un graphe $G_k$ **2-connexe** et **intérieurement triangulé** ;
3. Si $k + 1 < n$, le sommet $v_{k+1}$ se trouve sur la face externe de $G_k$. Et tous les voisins de $v_{k+1}$ apparaissent consécutivement sur la frontière $C_o(G_k)$ Takao,Saidur.

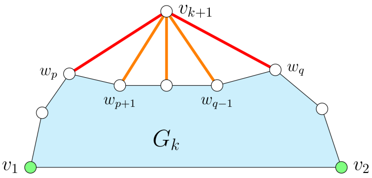


Figure 3 – Le choix du sommet $v_k$ pour l'ordre canonique.

Référence : document Kindermann

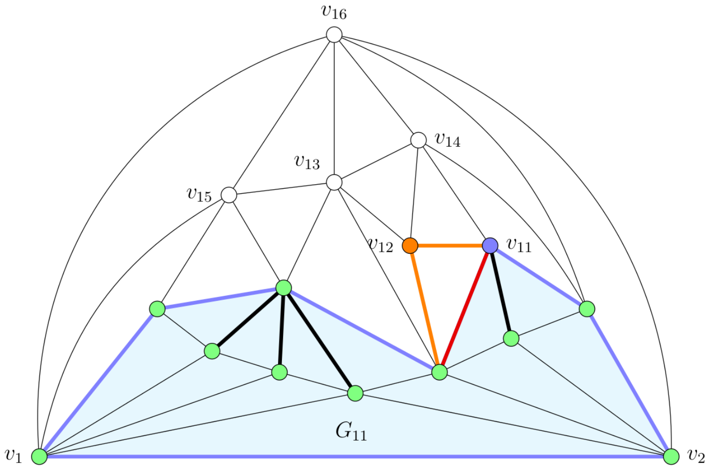


Figure 4 – Le cas d'un corde sur l'ordre canonique.

Référence : document Kindermann

Corde : Arête reliant deux sommets non adjacents dans un cycle.

## Conditions

1. $v_1$ à (0, 0) et $v_2$ à (2k-6, 0) ;
2. Chaque sommet de $C_o(G_{k-1}) \setminus \{v_1, v_2\}$ est x-monotone ;
3. Chaque arête de la frontière du $G_{k-1} \setminus \{v_1, v_2\}$ est dessinée avec des pentes de $\pm 1$.

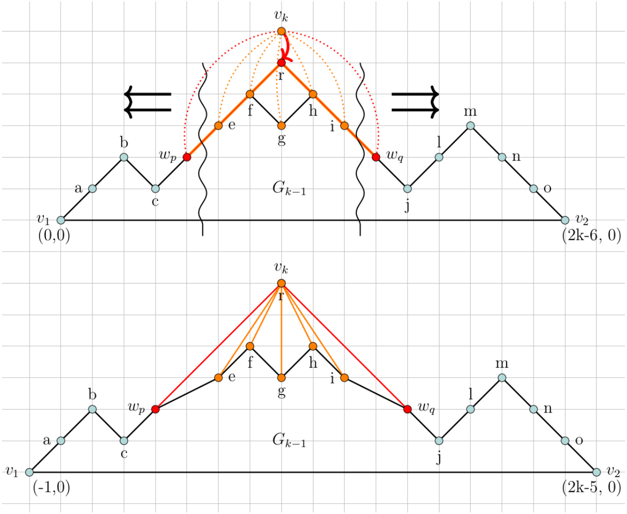


Figure 5 – Le Graphe avant et après décalage.

Référence : document Takao,Saidur

## Calcules

1. $x(v_k) = \frac{1}{2}[x(w_q) + x(w_p) + y(w_q) - y(w_p)]$
2. $y(v_k) = \frac{1}{2}[x(w_q) + x(w_p) + y(w_q) - y(w_p)]$
3. $x(v_k) - x(w_p) = \frac{1}{2}[x(w_q) - x(w_p) + y(w_q) - y(w_p)]$

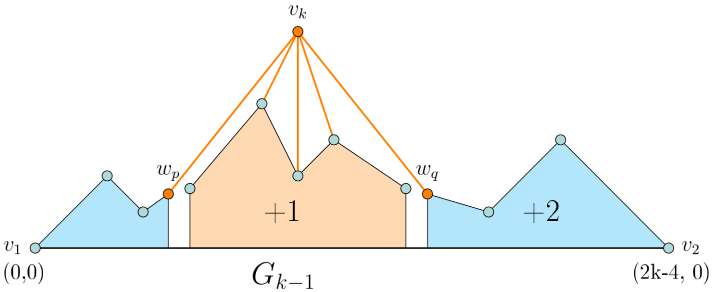


Figure 6 – Illustration du décalage dans la méthode shift.

Source : document Kindermann

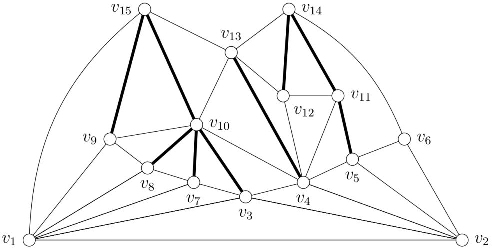


Figure 7 – Ordre canonique de $G_{15}$.

Référence : document Kindermann

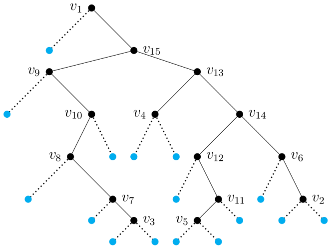


Figure 8 – La forêt $F$ de $G_{15}$.

Référence : document Kindermann

- Fils $gauche(v)$ dans $T$ ;
- Fils $droit(v)$ dans $T$ ;
- $\Delta x(v) = x(v) - x(w)$ ;
- $y(v)$.

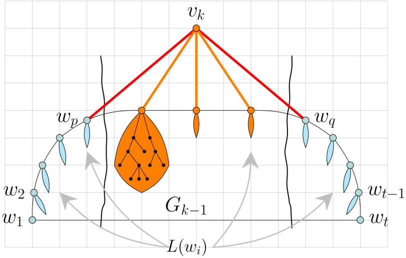


Figure 9 – Le graphe $G_k$.

Source : document Kindermann

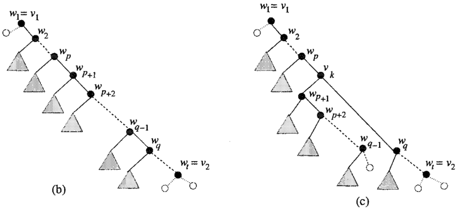

Figure 10 – (b) l'arbre $T$ du $G_{k-1}$, et (c) l'arbre $T$ du $G_k$.

source :Takao,Saidur

 Algorithme Shift method

**Algorithm 1 – Shift method**

**Entrée:** Graphe planaire $G$ à n sommets, et son ordre canonique
**Sortie:** Dessin planaire en line droite du $G$ sur une grille $(2n-4) \times (n-2)$

Soit $v_1, \ldots, v_n$ l'ordre canonique du graphe $G$ ;
Soit $w_1, w_2, \ldots, w_t$ le $C_o(G_{k-1})$ de $G_{k-1}$ ;
Soit $w_p, w_{p+1}, \ldots, w_q$ les voisins de $v_k$ sur $C_o(G_{k-1})$ ;

$(\Delta x(v_1), y(v_1), gauche(v_1), droit(v_1)) = (0, 0, null, v_3)$ ; ▷ Initialisation
$(\Delta x(v_3), y(v_3), gauche(v_3), droit(v_3)) = (1, 1, null, v_2)$ ;
$(\Delta x(v_2), y(v_2), gauche(v_2), droit(v_2)) = (1, 0, null, null)$ ;
**Pour** $4 \leq k \leq n$ **Faire**
    $\Delta x(w_{p+1}) = \Delta x(w_{p+1}) + 1$ ; ▷ Augmenter le décalage de $w_{p+1}$ de 1
    $\Delta x(w_q) = \Delta x(w_q) + 1$ ▷ Augmenter le décalage de $w_q$ de 1
    $\Delta x(w_p, w_q) = \Delta x(w_{p+1}) + .... + \Delta x(w_q)$ ; ▷ $\mathcal{O}(d(v_k))$
    $\Delta x(v_k) = \frac{1}{2}[\Delta x(w_p, w_q) + y(w_q) - y(w_p)]$ ; *cf.*(4) ;
    $y(v_k) = \frac{1}{2}[\Delta x(w_p, w_q) + y(w_q) + y(w_p)]$ ; *cf.*(3) ;
    $\Delta x(w_q) = \Delta x(w_p, w_q) - \Delta x(v_k)$ ; ▷ Ajuster le décalage de $w_q$
    **Si** $(p+1) \neq q$ **Alors**
        $\Delta x(w_{p+1}) = \Delta x(w_{p+1}) - \Delta x(v_k)$ ;
    **Fin Si**
    $droit(w_p) = v_k$ et $droit(v_k) = w_q$ ; ▷ Insertion de $v_k$

▷ À suivre

 Algorithme Shift method

  **Si** $(p+1) \neq q$ **Alors**
    $gauche(v_k) = w_{p+1}$ et $droit(w_{q-1}) = nil$ ;
  **Sinon**
    $gauche(v_k) = nil$ ;
  **Fin Si**
**Fin Pour**
$x(v_1) = 0$ ;
AccumulateOffset($\mathrm{v}_1, x(v_1)$);   $\triangleright\ \mathcal{O}(n)$

**Algorithm 2** Procedure AccumulateOffset

**Entrée:** ($v$ : sommet ; $\delta$ : entier)
**Si** $v \neq null$ **Alors**
  $\Delta(v) = \Delta(v) + \delta$
  Accumulate-Offset($gauche(v), \Delta x(v)$)
  Accumulate-Offset($droit(v), \Delta x(v)$)
**Fin Si**

# Conclusion

- Shift method, De Fraysseix, Pach et Pollack offre une approche efficace pour créer des représentations visuelles claires et ordonnées de ces graphes.
- Compréhension de la représentation en ligne droite des graphes planaires.
- Visualisation et l'analyse de ces graphes
- Un temps d'exécution en $\mathcal{O}(n)$ en temps et en espace.
- Plus grande quantité de données.

- Une grande importance entre les liens.

- Les relations sont stockées nativement.

- Tout est un graphe de relations interconnectées.

- Parcourir rapidement les données ; des millions de connexions par seconde, par cœur.

Source : https://neo4j-com


Figure 11 – Exemple d'une base de donnée orientée graphe.

Référence : https://www.avolutionsoftware.com/

# Annexe

Toutes les sources et l'intégralité de ce code qu'ont servi à la rédaction de cette présentation se trouvent sur le document latex sur ce lien :

https://github.com/Kazzoul-Youness/StraightLine-ShiftMethod

# Références

De Fraysseix, Pach et Pollack (1990). *How to draw a planar graph on a grid*. Combinatorica, 10(1), 41-51. doi : 10.1007/BF02125347. Consulté Janvier 2023.

Fusy, (2007). *Combinatoire des cartes planaires et applications algorithmiques*. PhD thesis, Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée.

Kindermann, P. (2010). *Planar Straight-Line Drawings I : Canonical Order & Shift Method*. Consulté Mars 2022 - url : https://seafile.rlp.net/f/57a4d71cdf114a3dbbf0/.

M. Chrobak and T. H. Payne (1995). A linear-time algorithm for drawing a planar graph on a grid. Consulté novembre 2023.

Takao,Saidur (2017). *Planar graph drawing*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Consulté Novembre 2022.

# Questions

Questions