

Reporte de la Actividad 10

Marco Antonio Cabello López
Grupo 1

Domingo 12 de Mayo del 2019

1 Introducción

Primeramente y como introducción, en esta actividad resolveremos la ecuación de Duffing, la cual es una ecuación diferencial no lineal que describe el movimiento de un oscilador con amortiguamiento, con coeficiente de elasticidad no lineal y al cual se le aplica un forzamiento periódico:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

Donde:

\ddot{x} es la segunda derivada de x respecto al tiempo t (aceleración).

δ es el parámetro que controla la cantidad de amortiguamiento.

\dot{x} es la primera derivada de x respecto al tiempo t (velocidad).

α es el parámetro que controla la cantidad de rigidez lineal.

x es el desplazamiento en el tiempo t .

β es el parámetro que controla la cantidad de no linealidad en la fuerza restauradora; Si $\beta = 0$, la ecuación de Duffing describe un oscilador armónico simple amortiguado.

γ es el parámetro que controla la amplitud de la fuerza motriz periódica; Si $\gamma = 0$, el sistema no tiene una fuerza motriz.

ω es el parámetro que controla la frecuencia angular de la fuerza motriz periódica.

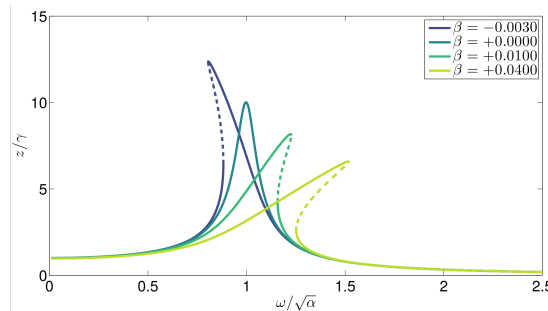


Figure 1: : Respuesta de frecuencia z/γ en función de $\omega/\sqrt{\alpha}$ para la ecuación de Duffing, con $\alpha=\gamma= 1.0$ y amortiguamiento $\delta= 0.1$.

En esta actividad resolveremos numéricamente la ecuación de Duffing utilizando la función ode de SciPy para reproducir la anterior figura, también nos interesa usar el método de integración de Runge-Kutta de cuarto orden.

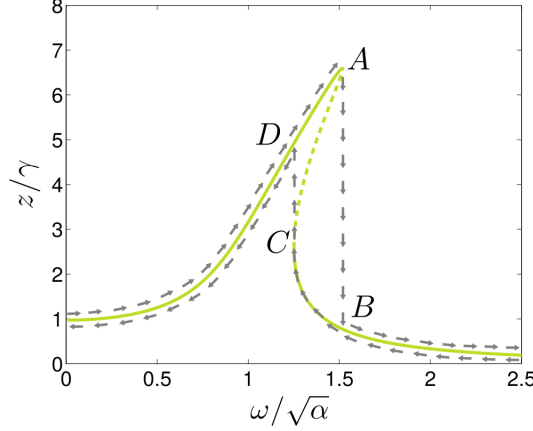


Figure 2: : Saltos en la respuesta de frecuencia. Los parámetros son: $\alpha=\gamma= 1.0$, $\beta= 0.04$ y $\delta= 0.1$.

El sistema muestra un comportamiento muy interesante. La solución presenta una discontinuidad siguiendo rutas distintas, incrementando el valor de ω y luego disminuyéndolo, además reproduciremos la figura anterior con los valores de los parámetros indicados.

1.1 Histéresis

La histéresis es la dependencia del estado de un sistema en su historia. Por ejemplo, un imán puede tener más de un posible momento magnético en un campo magnético dado, dependiendo de cómo haya cambiado el campo en el pasado. Las gráficas de un solo componente del momento a menudo forman un bucle o curva de histéresis, donde hay diferentes valores de una variable dependiendo de la dirección de cambio de otra variable. Esta dependencia de la historia es la base de la memoria en un disco duro y la remanencia que retiene un registro de la magnitud del campo magnético de la Tierra en el pasado. La histéresis se produce en materiales ferromagnéticos y ferroeléctricos, así como en la deformación de las bandas de goma y las aleaciones con memoria de forma y muchos otros fenómenos naturales. En los sistemas naturales, a menudo se asocia con cambios termodinámicos irreversibles, como las transiciones de fase, la fricción interna, y la disipación es un efecto secundario común.

La histéresis puede ser un retraso dinámico entre una entrada y una salida que desaparece si la entrada varía más lentamente, esto se conoce como histéresis dependiente de la velocidad. Sin embargo, fenómenos como los bucles de histéresis magnética son principalmente independientes de la velocidad, lo que hace posible una memoria duradera.

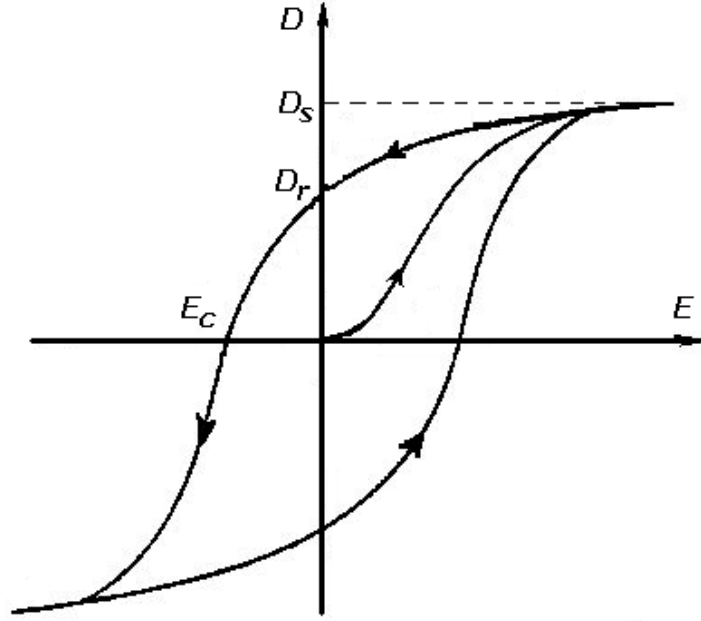


Figure 3: : Desplazamiento eléctrico del campo D de un material ferroeléctrico a medida que el campo eléctrico E primero se reduce y luego se aumenta. Las curvas forman un bucle de histéresis.

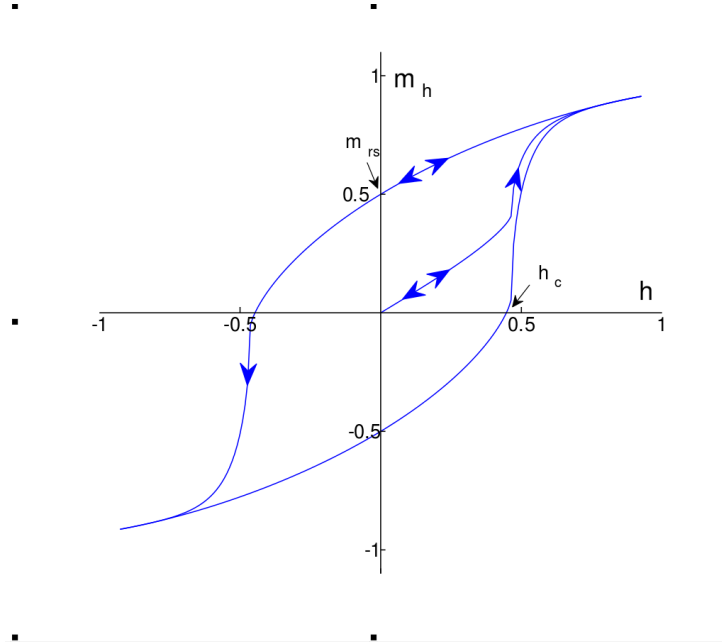


Figure 4: : Modelo teórico de magnetización m contra campo magnético h . Comenzando en el origen, la curva ascendente es la curva de magnetización inicial. La curva descendente después de la saturación, junto con la curva de retorno inferior, forma el bucle principal. Las intercepciones h_c y m_{rs} son la coercitividad y la remanencia de saturación.

2 Desarrollo de la actividad

2.1 Metodología

Primeramente, importamos las librerías para la visualización y el análisis de datos:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import cos
from scipy.integrate import ode
```

Posteriormente, determinamos la solución numérica de la ecuación de Duffing (Figure 1) utilizando la función ode de SciPy mantuvimos los parámetros α, γ, δ , constantes:

$$\begin{aligned}\alpha &= \gamma = 1.0 \\ \delta &= 0.1\end{aligned}$$

, y variamos β :

$$\begin{aligned}\beta &= -0.0030 \\ \beta &= +0.0000 \\ \beta &= +0.0100 \\ \beta &= +0.0400\end{aligned}$$

Ahora determinamos la solución numérica de la ecuación de Duffing (Figure 2) utilizando el método de integración de Runge-Kutta de cuarto orden, también utilizamos la función ode de SciPy.

Finalmente, indicamos los parámetros para la solución de la ecuación de Duffing:

$$\begin{aligned}\alpha &= \gamma = 1.0 \\ \beta &= 0.04 \\ \delta &= 0.1\end{aligned}$$

2.2 Resultados

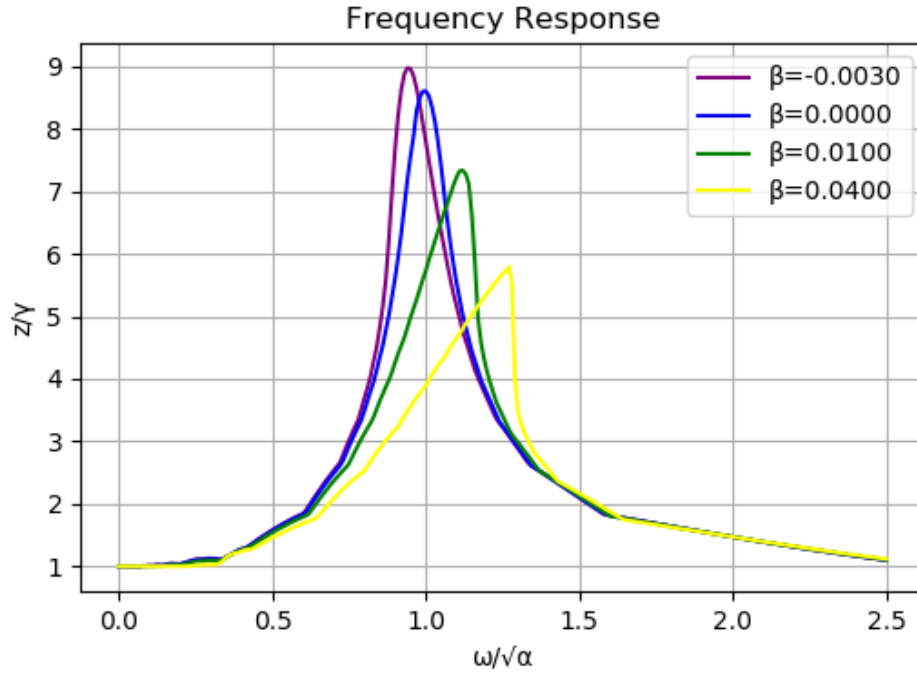
Reproducimos las figuras solicitadas de las soluciones numéricas de la ecuación de Duffing. De la figura 1 podemos observar lo siguiente en su respuesta de frecuencia:

Si $\beta < 0$ la ecuación de Duffing describe un oscilador armónico subamortiguado.

Si $\beta > 0$ la ecuación de Duffing describe un oscilador armónico sobreamortiguado.

Si $\beta = 0$, la ecuación de Duffing describe un oscilador armónico simple amortiguado.

La respuesta de frecuencia de este oscilador describe la amplitud z de la respuesta en estado estable de la ecuación (es decir, $x(t)$) a una frecuencia de excitación ω . Para un oscilador lineal con $\beta = 0$, la respuesta de frecuencia también es lineal. Sin embargo, para un coeficiente cúbico distinto de cero, la respuesta de frecuencia se vuelve no lineal. Dependiendo del tipo de no linealidad, el oscilador Duffing puede mostrar una respuesta de frecuencia de endurecimiento, reblandecimiento o mezcla de endurecimiento y ablandamiento.



De la figura 2 podemos observar lo siguiente en su respuesta de frecuencia:

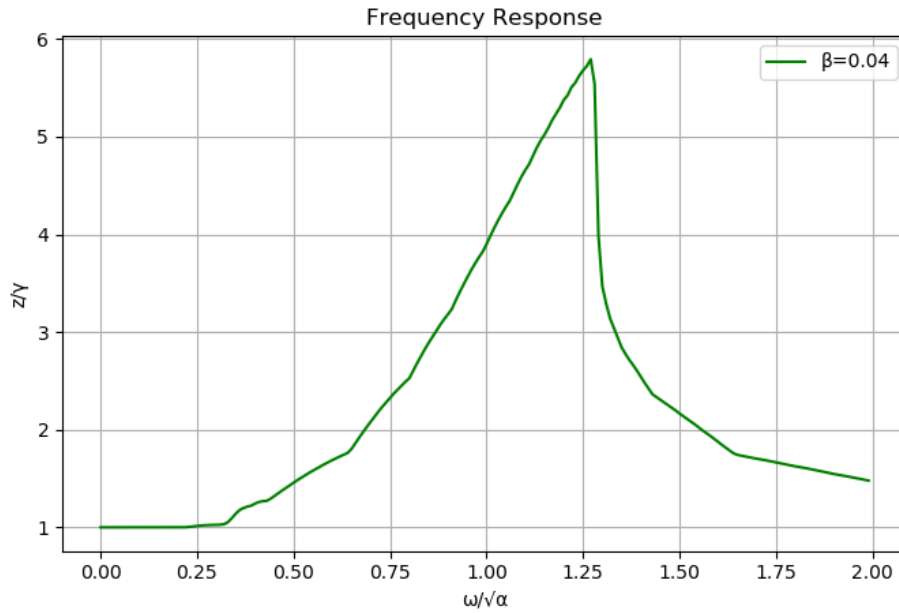
Describe un oscilador armónico sobreamortiguado. Para ciertos rangos de los parámetros en la ecuación de Duffing, la respuesta de frecuencia ya no puede ser una función de un solo valor para forzar la frecuencia ω . Para un oscilador de resorte "duro" ($\alpha > 0$ y lo suficientemente positivo $\beta > \beta_{c+} > 0$) la respuesta de frecuencia sobresale hacia el lado de alta frecuencia y hacia el lado de baja frecuencia para el oscilador de resorte "suave"

($\alpha > 0$ y $\beta < \beta_c < 0$). El lado saliente inferior es inestable, es decir, las partes de línea discontinua en las figuras de la respuesta de frecuencia no se pueden realizar durante un tiempo sostenido. En consecuencia, el fenómeno del saltos aparece cuando:

Si ω aumenta lentamente (con otros parámetros fijos), la amplitud de respuesta z cae repentinamente de A hasta B.

Si ω disminuye lentamente, de C la amplitud salta a D, luego de eso sigue la rama superior de la respuesta de frecuencia.

Los saltos A–B y C–D no coinciden, por lo que el sistema muestra histéresis según la dirección de barrido de la frecuencia.



3 Conclusiones

La ecuación de Duffing es un ejemplo de un sistema dinámico que muestra un comportamiento caótico, además presenta en la respuesta de frecuencia el fenómeno de resonancia de salto que es una especie de comportamiento de histéresis de frecuencia.

La ecuación describe el movimiento de un oscilador amortiguado con un potencial más complejo que en el movimiento armónico simple (que corresponde al caso $\beta = \delta = 0$), en términos físicos, modela, por ejemplo, un sistema acoplado péndulo-resorte cuya rigidez del resorte no obedece exactamente a la ley de Hooke.

4 Referencias

- Hysteresis.
<https://en.wikipedia.org/wiki/Hysteresis>
- Duffing Equation.
https://en.wikipedia.org/wiki/Duffing_equation
- A modified phase-fitted Runge–Kutta method for the numerical solution of the Schrödinger equation.
<https://link.springer.com/content/pdf/10.1023/A:1013185619370.pdf>