

Reporte de la Actividad 11

Marco Antonio Cabello López

Grupo 1

Lunes 27 de Mayo del 2019

1 Introducción

Primeramente y como introducción, en esta actividad exploraremos la diversidad de tipos de movimientos que posee el oscilador de Duffing, dada la combinación de fenómenos de oscilación, forzamiento periódico y amortiguamiento. Crearemos una colección de posibles movimientos, de los cuales se pide crear gráficas. Por un lado se pide hacer una gráfica de la solución del oscilador de Duffing $x(t)$ como función del tiempo (series de tiempo) y su retrato fase (puntos en el espacio fase o plano fase (x, \dot{x}) , que describen los posibles estados del sistema dinámico, dadas una condición inicial).

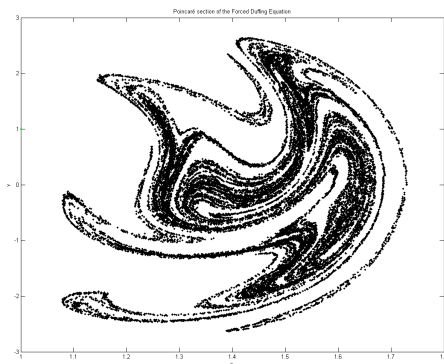


Figure 1: : Una sección de Poincaré de la ecuación de Duffing forzada que sugiere un comportamiento caótico. ($\alpha=1, \beta=5, \delta=0.2, \gamma=8$ y $\omega=0.5$).

Un mapa de Poincaré, es la intersección de una órbita periódica en el espacio de estados de un sistema dinámico continuo con un cierto subespacio de dimensión inferior, llamado la sección de Poincaré, transversal al flujo de el sistema. Más precisamente, se considera una órbita periódica con condiciones iniciales dentro de una sección del espacio, que deja esa sección después, y observa el punto en el que esta órbita regresa primero a la sección. Luego, uno crea un mapa para enviar el primer punto al segundo, de ahí el nombre del primer mapa de recurrencia. La transversalidad de la sección de Poincaré significa que las

órbitas periódicas que comienzan en el subespacio fluyen a través de él y no son paralelas a él.

1.1 Teoría del Caos

Es una rama de las matemáticas que se centra en el comportamiento de los sistemas dinámicos que son altamente sensibles a las condiciones iniciales. "Caos" es una teoría interdisciplinaria que afirma que dentro de la aparente aleatoriedad de los sistemas complejos caóticos, hay patrones subyacentes, bucles de retroalimentación constante, repetición, auto-similitud, fractales, autoorganización y dependencia en la programación en el punto inicial conocido como dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Las pequeñas diferencias en las condiciones iniciales, como las debidas a errores de redondeo en el cálculo numérico, producen resultados ampliamente divergentes para tales sistemas dinámicos, lo que hace que la predicción a largo plazo de su comportamiento sea imposible en general. Esto sucede aunque estos sistemas sean deterministas, lo que significa que su comportamiento futuro está completamente determinado por sus condiciones iniciales, sin elementos aleatorios involucrados. En otras palabras, la naturaleza determinista de estos sistemas no los hace predecibles.

Uno de los primeros defensores de la teoría del caos fue Henri Poincaré. En la década de 1880, mientras estudiaba el problema de los tres cuerpos, descubrió que puede haber órbitas que no son periódicas y, sin embargo, no aumentan ni se acercan para siempre a un punto fijo. En 1898, Jacques Hadamard publicó un estudio influyente del movimiento caótico de una partícula libre que se desliza sin fricción en una superficie de curvatura negativa constante, llamada "billar de Hadamard". Hadamard pudo demostrar que todas las trayectorias son inestables, en que todas las trayectorias de partículas divergen exponencialmente entre sí, con un exponente positivo de Lyapunov.

Edward Lorenz fue uno de los primeros pioneros de la teoría. Su interés en el caos surgió accidentalmente a través de su trabajo sobre la predicción del tiempo en 1961. Lorenz estaba usando una computadora digital simple, una Royal McBee LGP-30, para ejecutar su simulación del tiempo. Quería volver a ver una secuencia de datos y, para ahorrar tiempo, comenzó la simulación en medio de su curso. Lo hizo ingresando una copia impresa de los datos que correspondían a las condiciones en medio de la simulación original. Para su sorpresa, el clima que la máquina comenzó a predecir era completamente diferente del cálculo anterior. Lorenz rastreó esto hasta la copia impresa de la computadora. La computadora trabajó con una precisión de 6 dígitos, pero la impresión redondea las variables a un número de 3 dígitos, por lo que un valor como 0.506127 se imprimió como 0.506. Esta diferencia es minúscula, y el consenso en ese momento habría sido que no debería tener ningún efecto práctico. Sin embargo, Lorenz descubrió que los pequeños cambios en las condiciones iniciales producían grandes cambios en el resultado a largo plazo. El descubrimiento de Lorenz, que dio su nombre a los atractores de Lorenz, mostró que incluso el modelado atmosférico detallado no puede, en general, hacer predicciones meteorológicas precisas a largo plazo.

2 Desarrollo de la actividad

2.1 Metodología

Primeramente, importamos las librerías para la visualización y el análisis de datos:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from math import cos
from scipy.integrate import ode
```

Posteriormente, determinamos la solución numérica de la ecuación de Duffing utilizando la función `ode` de SciPy con las condiciones iniciales $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$, y los parámetros $\alpha, \delta, \omega, \beta$ constantes:

```
 $\alpha = -1.0$ 
 $\delta = 0.3$ 
 $\omega = 1.2$ 
 $\beta = 1.0$ 
```

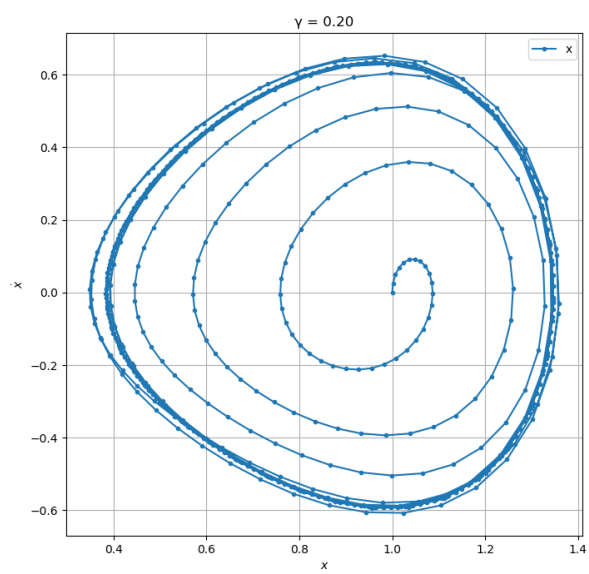
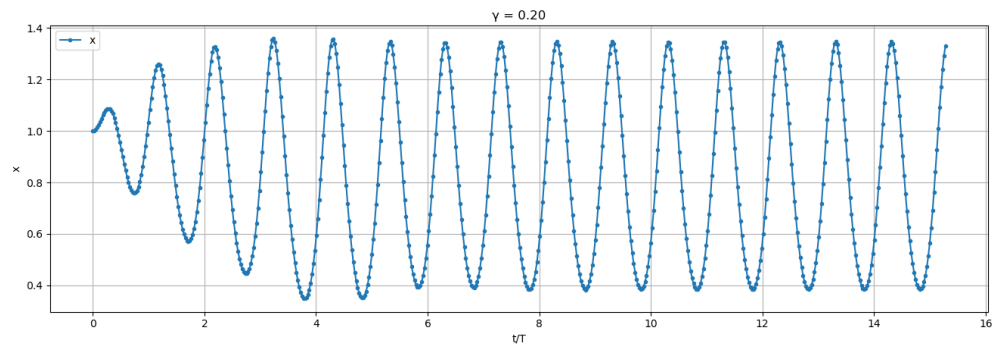
, y variamos γ :

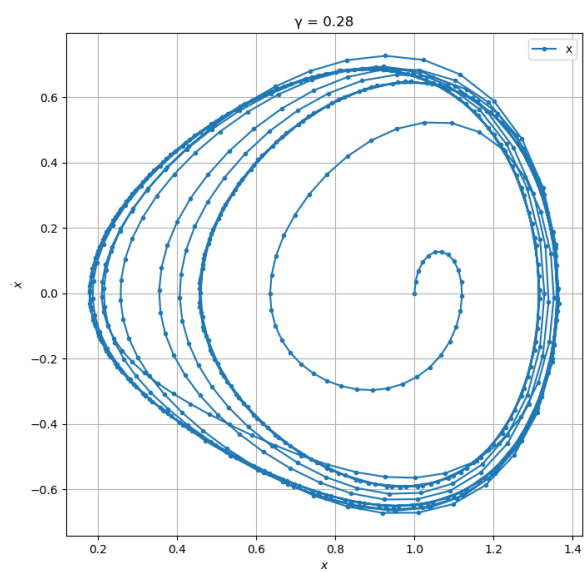
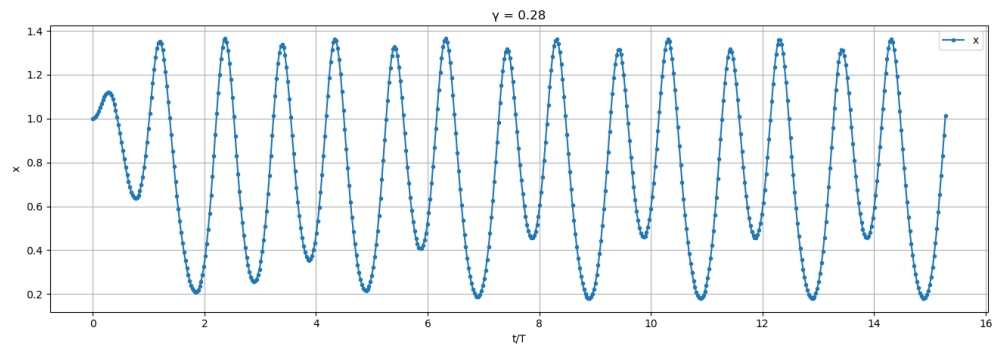
```
 $\gamma = 0.20$ 
 $\gamma = 0.28$ 
 $\gamma = 0.29$ 
 $\gamma = 0.37$ 
 $\gamma = 0.50$ 
 $\gamma = 0.65$ 
```

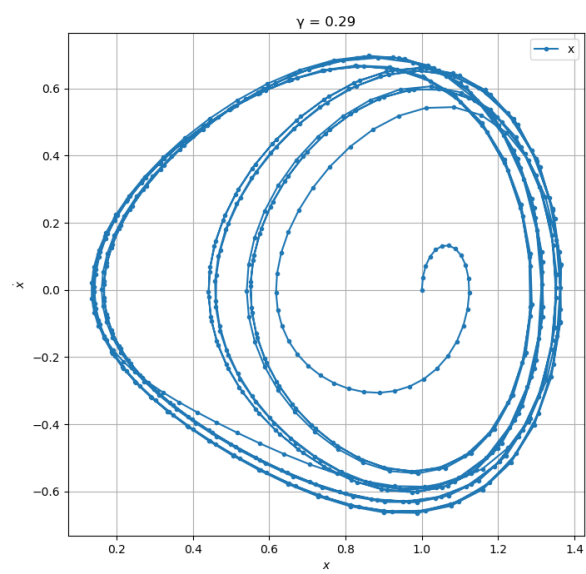
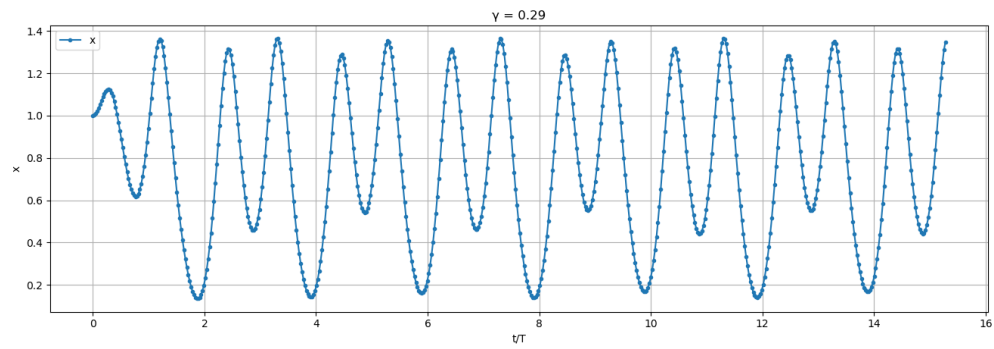
Finalmente, elaboramos las gráficas en cada caso asociado a cada valor del parámetro que controla la amplitud de la fuerza motriz periódica.

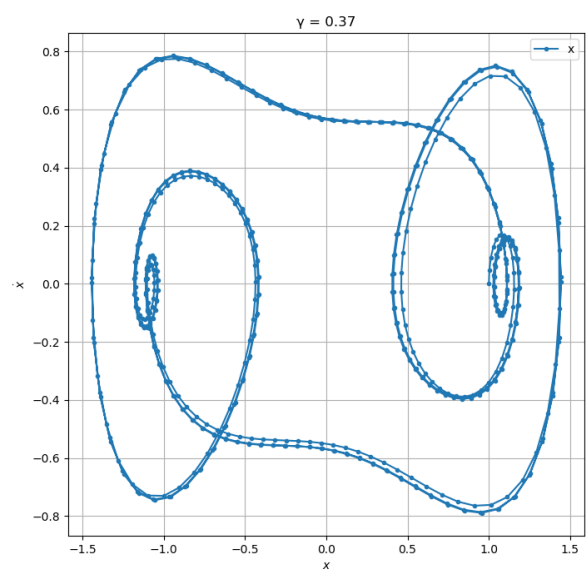
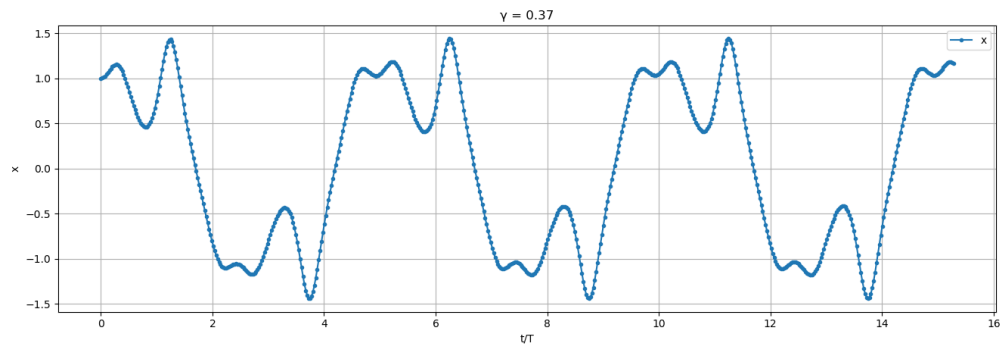
2.2 Resultados

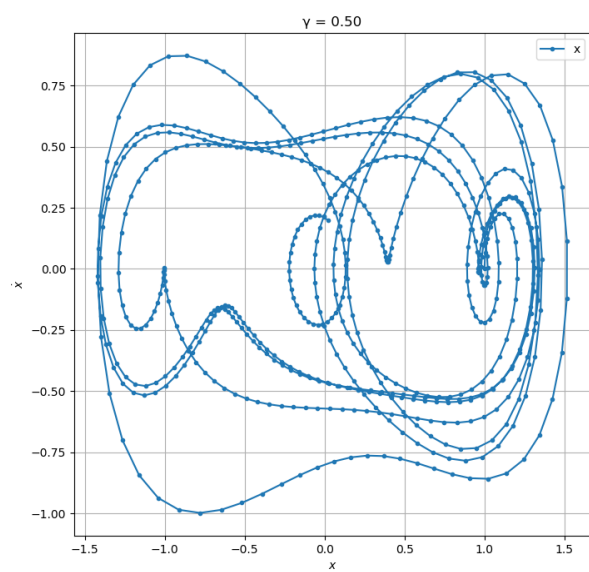
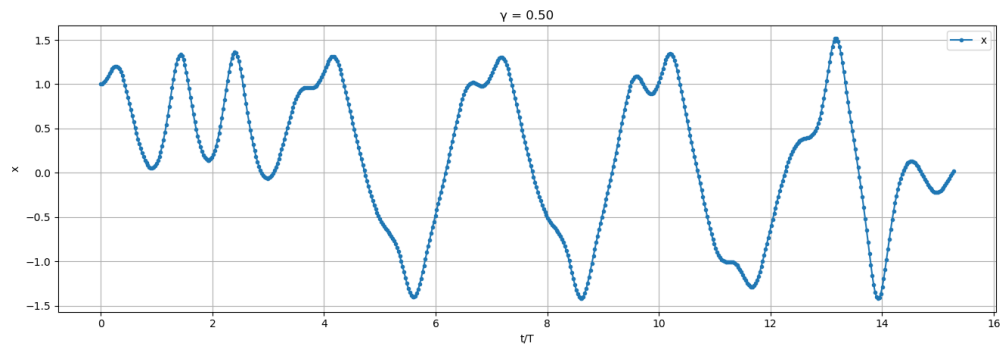
Reproducimos las gráficas solicitadas de las soluciones numéricas de la ecuación de Duffing con sus respectivos retratos de fase:

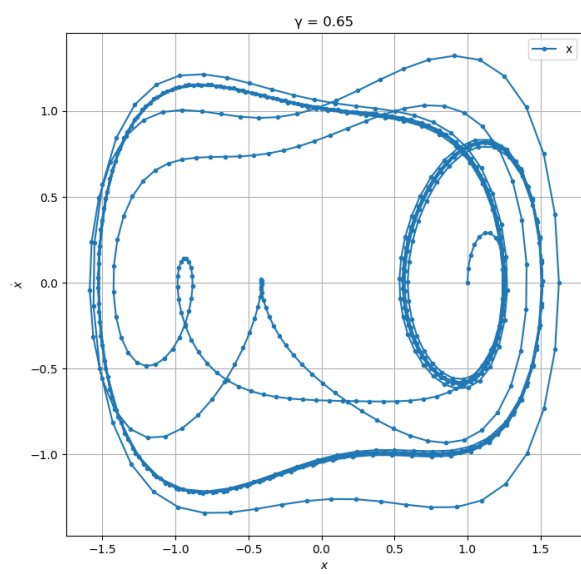
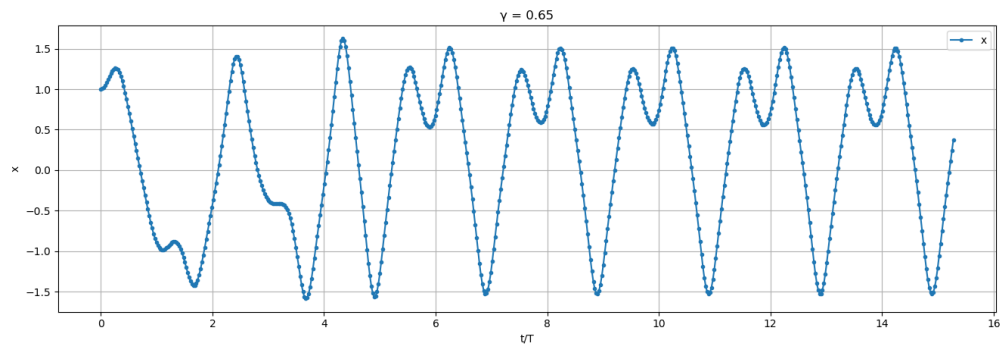












3 Conclusiones

Podemos observar algunos ejemplos típicos de las series de tiempo y retratos de fase de la ecuación de Duffing, que muestran la aparición de subarmónicos a través de la bifurcación de duplicación del período, así como comportamiento caótico.

La amplitud de fuerza aumenta desde $\gamma = 0.20$ hasta $\gamma = 0.65$, los puntos azules en los retratos de fase son a veces t que son un múltiplo entero del período $T = 2\pi/\omega$.

4 Referencias

- Chaos theory.
https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory
- Duffing Equation.
https://en.wikipedia.org/wiki/Duffing_equation
- Phase portrait.
https://en.wikipedia.org/wiki/Phase_portrait