Reporte de la Actividad 9

Marco Antonio Cabello López
Grupo 1

Lunes 6 de Mayo del 2019

1 Introducción

Primeramente y como introducción, en esta actividad resolveremos numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, mediante las bibliotecas NumPy y SciPy, las cuales se pueden utilizar para encontrar soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales.

Resolveremos numéricamente el sistema resorte-masa acoplado que aparece en las notas de R. Fitzpatrick, utilizando la función odeint de SciPy. Para ello adaptamos el código que aparece en el Cookbook de SciPy.

2 Desarrollo de la actividad

2.1 Modelo físico

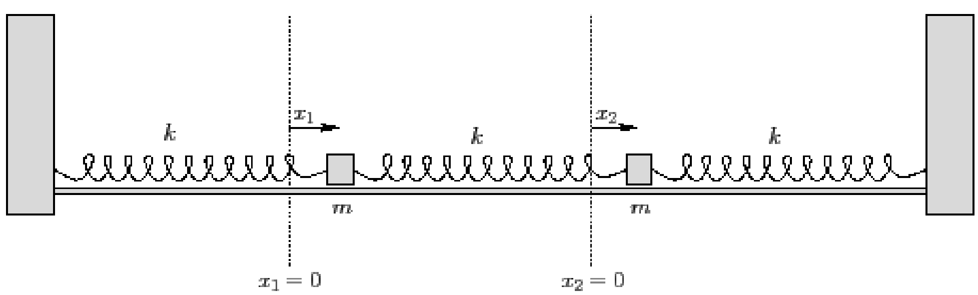

Figure 1: : Sistema masa-resorte acoplado con 2 grados de libertad.

Consideramos un sistema mecánico que consiste en dos masas idénticas m que pueden deslizarse libremente sobre una superficie horizontal sin fricción. Supongamos que las masas están unidas entre sí, y a dos paredes inmóviles, mediante tres resortes horizontales idénticos de la constante de resorte k, como se muestra en la Figura 1. El estado instantáneo del sistema se especifica convenientemente por los desplazamientos de la izquierda y masas derechas, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente.

Las extensiones de los resortes izquierdo, medio y derecho son x_1, $x_2 - x_1$ y $-x_2$, respectivamente, asumiendo que $x_1 = x_2 = 0$ corresponde a la configuración de equilibrio en la que los resortes no están extendidos. Las ecuaciones de movimiento de las dos masas son así:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(-x_2)$$

Aquí, hemos hecho uso del hecho de que una masa unida al extremo izquierdo de un resorte de extensión x y una constante de resorte k experimenta una fuerza horizontal $+k\,x$, mientras que una masa unida a la derecha El final de la misma primavera experimenta una fuerza igual y opuesta $-k\,x$.

2.2 Metodología

Determinamos la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales, mediante el algoritmo que aparece en el Cookbook de SciPy. Aquí se apoyan en las bibliotecas NumPy y SciPy para realizar los cálculos, empleando la función odeint, la cual soluciona ecuaciones diferenciales de primer orden.

Sin embargo, el problema abordado aquí es distinto al nuestro, ya que en nuestro caso la configuración de masas y resortes incluye un resorte extra. Las ecuaciones diferenciales

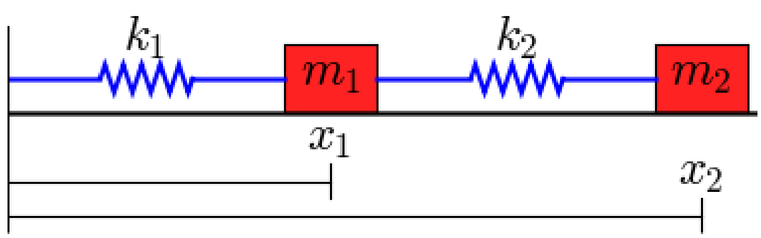

Figure 2: : Sistema masa-resorte acoplado solucionado en el Cookbook de SciPy.

que describen este sistema son:

$$m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + k_1(x_1 - L_1) - k_2(x_2 - x_1 - L_2) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1 - L_2) = 0$$

Además de las diferencias en el problema físico, el sistema de referencia tomado para las variables también resulta ser distinto, puesto que aquí se incluyen como parámetros las longitudes naturales de los resortes (L_1 y L_2), y las posiciones de las masas x_1 y x_2 se miden a partir de la pared izquierda, mientras que en el primer sistema se mide el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio para cada masa.

Basándonos en la solución propuesta en las notas de R. Fitzpatrick, escribimos las ecuaciones de movimiento para las dos masas como:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_2)$$

Sustituimos estas ecuaciones a nuestro nuevo sistema, y obtenemos:

$$m_1\ddot{x}_1 = -b_1\dot{x}_1 + k_1(x_1 - L_1) - k_2(x_1 - L_1 + L_2 - x_2)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -b_2\dot{x}_2 - k_3(x_2 - L_2) - k_2(x_2 - L_2 + L_1 - x_1)$$

Este es un par de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Para resolverlas mediante la función de SciPy debemos convertir esto en un sistema de primer orden, para ello introducimos las siguientes variables:

$$y_1 = \dot{x}_1$$
$$y_2 = \dot{x}_2$$

Reescribimos ahora las ecuaciones de segundo orden, obteniendo un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden:

$$\dot{x}_1 = y_1$$
$$\dot{y}_1 = (-b_1 y_1 + k_1(x_1 - L_1) - k_2(x_1 - L_1 + L_2 - x_2))/m_1$$

$$\dot{x}_2 = y_2$$
$$\dot{y}_2 = (-b_2 y_2 - k_3(x_2 - L_2) - k_2(x_2 - L_2 + L_1 - x_1))/m_2$$

Estas son las ecuaciones que fueron implementadas en Python para ser resueltas mediante la función odeint, de esta forma generamos un archivo de texto con las posiciones de las masas, las cuales fueron graficadas posteriormente.

2.3 Resultados

Tomamos las siguientes condiciones iniciales para el sistema:

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$
$$m_1 = m_2 = 1$$
$$L_1 = L_2 = 1$$
$$b_1 = b_2 = 0$$
$$x_1 = 1$$
$$y_1 = x_2 = y_2 = 0$$

Los parámetros para la gráfica fueron stoptime=30 y numpoints=750. El resultado fue el siguiente:

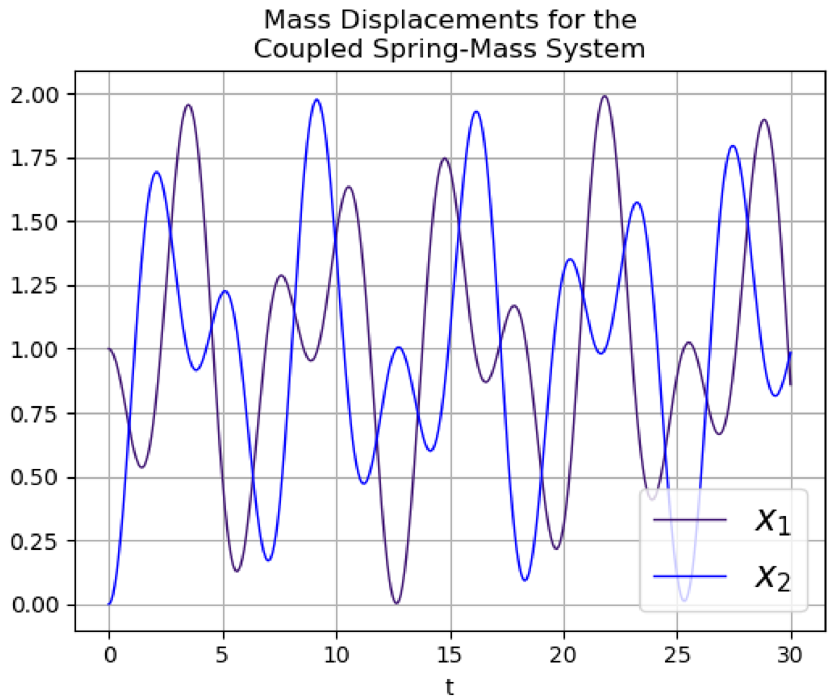

Figure 3: : Sistema masa-resorte acoplado.

3 Conclusiones

Al desarrollar esta actividad podemos concluir que Python puede ser una herramienta muy útil a la hora de modelar diversos sistemas físicos, ya que las librerías que contiene permiten trabajar en problemas matemáticos, como la resolución de ecuaciones diferenciales.

4 Referencias

- Coupled spring-mass system.
  https://scipy-cookbook.readthedocs.io/items/CoupledSpringMassSystem.html
- Two Spring-Coupled Masses.
  https://farside.ph.utexas.edu/teaching/315/Waves/node18.html