Movimiento de un Proyectil con Resistencia al Aire

Cabello Lopez Marco Antonio
Actividad 4
Departamento de Fisica
Universidad de Sonora

Hermosillo, Sonora a Viernes 27 de Octubre del 2017

1 Planteamiento del problema

Elije un proyectil de masa m, lanzado a un tiempo $t_0 = 0$ al nivel de la superficie terrestre con un ángulo θ y una velocidad inicial v_0.
Estudiaremos el efecto de la interaccion del objeto con las fuerzas de friccion y la aceleracion de la gravedad correspondientes.

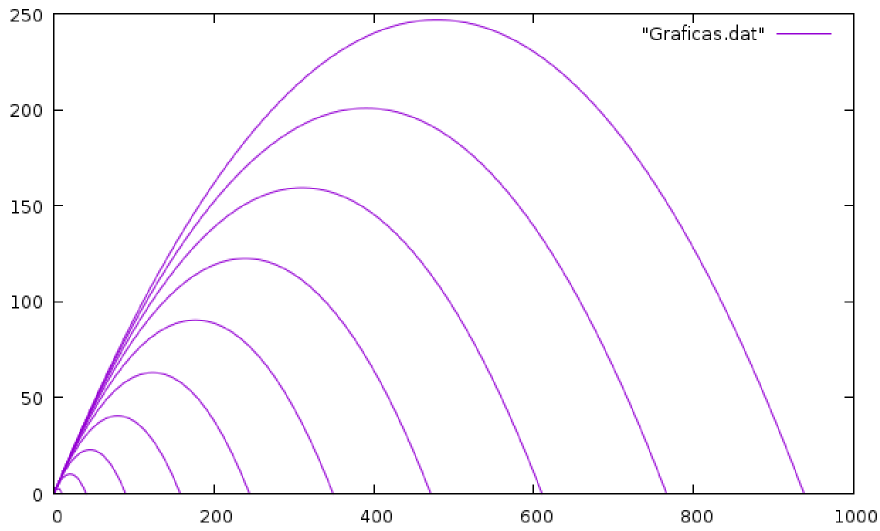

Figure 1: Trayectoria de un proyectil con resistencia al aire.

Considerando el movimiento en el plano cartesiano, la ecuación del movimiento, es la siguiente:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv \tag{1}$$

En donde $v = (v_x, v_y)$ es la velocidad del proyectil, $g = (0, -g)$ es la aceleración gravitacional y c es una constante positiva. Las ecuaciones que describen el movimiento por componentes, son:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -cv_x$$
$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - cv_y \tag{2}$$

Las ecuaciones anteriores, pueden resolverse usando métodos numéricos, como el método de integración de Euler. Este método consiste en solucionar una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, a través de un procedimiento numérico de primer orden, partiendo de unos valores iniciales. En general, si se conoce el valor de una funcion $y(t)$, para un t_0 dado, el siguiente valor de la función para $t_0 + h$, tomando un h lo sufientemente pequeño, puede determinarse, empleando una expansión de Taylor alrededor de t_0, como esta:

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_0) + O(h^3) \tag{3}$$

Despreciando los terminos cuadráticos y mayores de h, obtenemos:

$$y'(t_0) \simeq \frac{f(t_0) - f(t_0 + h)}{h} \tag{4}$$

Tomando $y'(t_0) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ y $t_n = t_0 + nh$, el siguiente paso de t_n a t_{n+1}, para $y(t)$según el método de Euler, corresponde a:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \tag{5}$$

2 Desarrolo de las ecuaciones de movimiento

2.1 Componente Horizontal de la Velocidad

Considerando la ecuación diferencial de la componente horizontal de la velocidad, tenemos:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{c}{m}v_x = f(t, v_x(t)) \tag{6}$$

Según el método de Euler el valor de $v_x(t_{n+1})$ a partir de t_n, corresponde a:

$$\begin{aligned} v_x(t_{n+1})) &= v_x(t_n) - \frac{\delta t}{m} c v_x(t_n) \\ v_x(t_{n+1})) &= v_x(t_n)[1 - \frac{\delta t}{m}c] \end{aligned} \tag{7}$$

Donde $h = \delta t$. La componente x de la posición se determinar a partir de:

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \simeq \frac{x_{n+1} - x_n}{\delta t} \tag{8}$$

Luego:

$$x_{n+1} = x_n + \delta t v_x(t_n) \tag{9}$$

2.2 Componente Vertical de la Velocidad

Similarmente al proceso realizado para v_x, tenemos:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{c}{m}v_y = f(t, v_y(t)) \tag{10}$$

$$v_y(t_{n+1})) = v_y(t_n)[1 - \frac{\delta t}{m}c] - g\delta t \tag{11}$$

$$y_{n+1} = y_n + \delta t v_y(t_n) - g\delta t \tag{12}$$

3 Solucion numerica del problema

El código de la aplicación fortran para determinar las trayectorias de un proyectil esférico con resistencia del aire y velocidades v_0 entre 2 y 10 m/s, con valores iniciales $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ y $x_0 = 0$, usando el método de integración de Euler. El código Fortran corresponde a:

```
program resistenciaAire
  implicit none

   !************************************************************************************
   !  Programa para calcular la trayectoria de un proyectil esférico con resistencia del
   !
   !     m -------------- masa del proyectil
   !     r -------------- radio del proyectil
   !     v0 ------------- velocidad de lanzamiento
   !     vt-------------- velocidad terminal
   !     cd-------------- coeficiente de arrastre
   !     rho_a----------- densidad de aire
   !     a--------------- ángulo de lazamiento en grados
   !     dt-------------- incremento del tiempo
   !     g--------------- aceleración gravitacional
   ! ***********************************************************************************

  !Definición de parámetros y variables

  real, parameter:: g=9.8, pi=3.1415927, rho_a=1.128, cd =0.45, dt=0.01
  real, parameter:: m=0.5, theta = 45., r = 0.5
  integer, parameter:: size=1000
  integer::i,j
  real::vt,a,C,v0
  real, dimension(0:size) ::t,v_x,v_y,x,y

  !*************************************************************************************
  !*************************************************************************************
  !Calculo de la velocidad terminal

  vt= sqrt((2*m*g)/(rho_a*pi*r**2*cd))

  !Calculo de la constante positiva C
  C = m*g / vt

  ! convirtiendo ángulo a radianes
  a = theta * pi / 180.0
  !Condiciones iniciales
  !*************************************************************************************
  !*************************************************************************************
  !Defición de Loops

  open(1, file='friccion.dat', status='unknown')

    do j=2,10,2
```

```
!************************************************************************************
!Condiciones Iniciales
 v0=real(j)
   t(0)=0.
   x(0)=0.
   y(0)=0.
   v_x(0)=v0*cos(a)
   v_y(0)=v0*sin(a)
  write(1,1000) t(0), x(0), y(0), v_x(0), v_y(0)

!Cálculo del primer punto despreciando la fricción

   t(1)= t(0)+dt
   x(1) = x(0) + v0*t(1)*cos(a)
   y(1) = y(0) + v0*t(1)*sin(a)-0.5*g*t(1)**2
   v_x(1) = v0*cos(a)
   v_y(1) = v0*sin(a)-g*t(1)
   write(1,1000) t(1), x(1), y(1),v_x(1),v_y(1)
!************************************************************************************
!Cálculos considerando la fricción del aire

 do i=2,size

   t(i) = t(i-1) + dt
   x(i) = x(i-1) + dt*v_x(i-1)
   y(i) = y(i-1) + dt*v_y(i-1)
   v_x(i)= v_x(i-1)*(1-(dt*C)/m)
   v_y(i)= v_y(i-1)*(1-(dt*C)/m)-dt*g

   if (y(i)<0.) exit

   write(1,1000) t(i), x(i), y(i),v_x(i),v_y(i)
   1000 format(f18.15,5x,f18.15, 5x, f18.15, 5x, f18.15,5x,f18.15)
   end do
   write(1,1100)
   1100 format(/)
 !***********************************************************************************
 !Vaciando las variables para el cálculo con el siguiente valor de la velocidad inicia
   do i=2,size
   t(i)=0.
   x(i)=0.
   y(i)=0.
   v_x(i)=0.
   v_y(i)=0.
   end do

   end do
   close(1)
```

```
end program resistenciaAire
```

El Scritp para la graficación de los datos de salida usando Gnuplot corresponde a:

```
set title "Trayectoria Movimiento de Protectiles con Resistencia del Aire"
set title font ",15" norotate
set xlabel "Alcance Horizontal"
set xlabel font "Verdana,12"
set ylabel "Alcance Vertical"
set ylabel font "Verdana,12"
set style data points
set xrange [0:3.5]
set yrange [0:1.5]
set pointsize 0.4
plot "friccion.dat" index 0 using 2:3  with linespoints ls 5 title "Vo = 2",\
"friccion.dat" index 1 using 2:3  with linespoints ls 6 title "Vo = 4",\
 "friccion.dat" index 2 using 2:3  with linespoints ls 7 title "Vo = 6",\
"friccion.dat" index 3 using 2:3  with linespoints ls 8 title "Vo = 8",\
 "friccion.dat" index 4 using 2:3  with linespoints ls 9 title "Vo = 10"
```