SGD & ĐT TỈNH QUẢNG NINH

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG – LẦN 1

Năm học: 2025-2026

PHẦN I. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh trả lời một phương án.

Câu 1: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang là

A. $y=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $y=2$. **D.** $x=1$.

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công bội $q=-3$. Tính u_3

A. $u_3=-54$. **B.** $u_3=18$. **C.** $u_3=-18$. **D.** $u_3=54$.

Câu 3: Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh thu được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Thời gian (phút)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
Số học sinh	10	15	22	26	20	17

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

A. $32,2$. **B.** $33,2$. **C.** $32,1$. **D.** $33,1$.

Câu 4: Tập nghiệm của phương trình $\sin x=\dfrac{1}{2}$ là

A. $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{\dfrac{\pi}{3}+k2\pi;\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

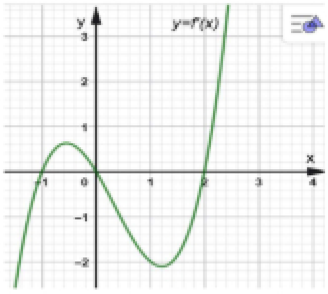
Câu 5: Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc và $OA=a,OB=2a,OC=3a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (OAC)

A. a. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $3a$. **D.** $2a$.

Câu 6: Tính thể tích khối chóp tam giác đều có cạnh đáy *2a* và độ dài đường cao a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đạo hàm $f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ -1, 0, 2 như hình dưới. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

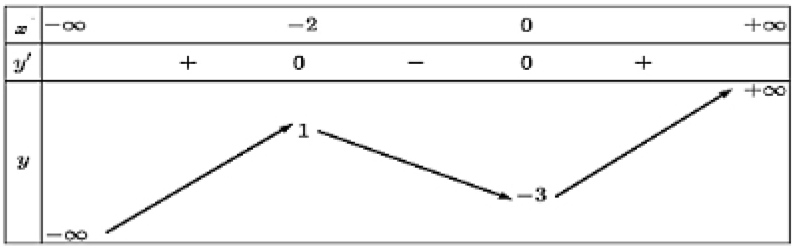


A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;\,2)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^x + \log x$

A. $y' = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x\ln 10}$. **B.** $y' = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$. **C.** $y' = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x\ln 10}$. **D.** $y' = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Giá trị cực đại của hàm số bằng

A. -2. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 1.

Câu 10: Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh từ 10 học sinh?

A. C_{10}^3. **B.** 10^3. **C.** 3^{10}. **D.** A_{10}^3.

Câu 11: Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh thu được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Thời gian (phút)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
Số học sinh	10	15	22	26	20	17

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

A. $32,2$. **B.** $32,1$. **C.** $33,1$. **D.** $33,2$.

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB'}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD'}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

PHẦN II. Trắc nghiệm chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC, với $A(5;3;1)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AB}=(-4;5;-1), \overrightarrow{AC}=(0;-1;-1).$

b) Biết điểm $D(a;b;c)$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, ta có $a+b+c=9$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-10.$

d) Gọi α là số đo A của tam giác ABC. Khi đó $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x-\ln x$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Tập xác định của hàm số là: $D=(0;+\infty).$

b) Đạo hàm $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

c) Phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=1.$

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{3};2\right]$ bằng $\dfrac{1}{3}+\ln 3.$

Câu 3: Một xưởng mộc dùng gỗ sồi để sản xuất 5 chiếc bàn mỗi ngày. Chi phí cho mỗi lần vận chuyển nguyên liệu là 5625 USD, chi phí để lưu trữ một đơn vị nguyên liệu là 10 USD mỗi ngày, trong đó một đơn vị là lượng nguyên liệu cần thiết để sản xuất một chiếc bàn, và lưu ý rằng trong mỗi ngày của chu kì sản xuất (thời gian giữa hai lần nhập nguyên liệu liên tiếp) thì lượng nguyên liệu lưu trữ trung bình mỗi ngày được tính bằng một nửa tổng lượng nguyên liệu tồn kho đầu kì và lượng nguyên liệu tồn kho cuối kì. Giả sử nguyên liệu được nhập về sau mỗi x ngày.

a) Một chu kì sản xuất, xưởng mộc phải nhập về $5x$ đơn vị nguyên liệu.

b) Chi phí để lưu trữ nguyên liệu trong x ngày của một chu kì sản xuất là $50x^2$ USD.

c) Hàm chi phí trung bình mỗi ngày trong một chu kì sản xuất là $c(x)=50x+\frac{5625}{x}$.

d) Để chi phí trung bình mỗi ngày của một chu kì sản xuất là ít nhất thì xưởng mộc nên nhập hàng mỗi 15 ngày và mỗi lần nhập về 75 đơn vị nguyên liệu.

Câu 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông cân tại A, hình chiếu vuông góc H của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết $AA'=BC=2a$.

a) Độ dài đường cao hình lăng trụ bằng $\frac{4a\sqrt{2}}{3}$.

b) Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng $4a^3\sqrt{2}$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC gấp ba lần khoảng cách từ H đến $(ACC'A')$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC bằng $\frac{2a\sqrt{34}}{17}$.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 sao cho các đường thẳng A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 lần lượt vuông góc với các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Biết thể tích khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ bằng $\frac{a}{b}\sqrt{2}$ với a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b$.

Câu 2: Anh A mở một nhà hàng lẩu. Anh đã trang bị cho mỗi bàn ăn một nồi lẩu có dạng hai hình trụ đồng trụ. Bán kính đáy nồi (ngoài) $R=15$ cm, bán kính trụ giữa (trong) là $r=3,5$ cm, chiều cao long nồi là $h=10$ cm. Để khách hàng có trải nghiệm tốt nhất, anh A cần xác định chiều dài tối thiểu L của chiếc đũa sao cho dù đầu đũa có bị trượt vào vị trí nào trong nồi, phần đầu đũa thừa ra ngoài miệng nồi vẫn phải lớn hơn 5 cm. Tính L (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 3: Mèo Táo có mở một cửa hàng sách và đang cần tuyển nhân viên trông coi cửa hàng. Để tuyển nhân viên đòi hỏi có khả năng tư duy và suy luận tốt; Táo đưa ra thử thách như sau: Bộ truyện tranh thám tử Kenichi gồm 44 tập đang được sắp xếp từ 1 tới 44 trên giá (giả sử đang tính từ trái qua phải và tất cả cuốn truyện được sắp xếp cùng chiều). Yêu cầu hãy thực hiện việc sắp xếp các tập truyện theo trình tự ngược lại từ 44 tới 1 theo quy tắc: đổi chỗ 2 tập truyện đang xếp liên tiếp sẽ bị tính 1 điểm; đổi chỗ 2 tập truyện mà ở giữa chúng có 3 tập khác thì không bị tính điểm. Bạn An muốn ứng tuyển vào nhân viên cửa hàng. Hỏi điểm số của An nhỏ nhất là bao nhiêu điểm để thực hiện được thử thách trên.

Câu 4: Mặt cầu tâm I bán kính $R>0$ là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách I một khoảng bằng R. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên hệ trục là centimet, một tổ kiến có bề mặt là một mặt cầu tâm là gốc tọa độ và bán kính $R=6\text{cm}$, ở điểm $A(20;0;0)$ có 10 miếng mồi và ở điểm $B(0;20;0)$ có 3 miếng mồi. Một con kiến trên bề mặt tổ, mỗi lần đi đến A hoặc B tha đúng một miếng mồi về tổ. Hỏi tổng quãng đường ngắn nhất con kiến đó đi là bao nhiêu centimet để con kiến tha hết 13 miếng mồi về tổ (kết quả làm tròn hàng đơn vị)?

Câu 5: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{2x^3+3x^2-3x-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

Câu 6: Một trang trại dự định dành 100 ha đất để trồng ba loại cây: Cao su, Cây phê và Hồ tiêu. Lợi nhuận hàng năm ước tính của Cao su là 40 triệu đồng/ha, Cà phê là 60 triệu đồng/ha và Hồ tiêu là 80 triệu đồng/ha. Do các yếu tố về quy hoạch và tài nguyên nước, diện tích trồng các loại cây phải tuân thủ các điều kiện sau:

Tổng diện tích trồng Cà phê và Hồ tiêu không được vượt quá diện tích trồng Cao su.
Diện tích trồng Hồ tiêu không được vượt quá 20 ha.
Diện tích trồng Cà phê không được vượt quá 3 lần diện tích trồng Hồ tiêu.
Hỏi tổng lợi nhuận thu được hàng năm của trang trại đó lớn nhất là bao nhiêu tỷ đồng?

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Trắc nghiệm 4 phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh trả lời một phương án.

Câu 1: Đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang là

A. $y=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $y=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang $y=2$.

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công bội $q=-3$. Tính u_3

A. $u_3=-54$. **B.** $u_3=18$. **C.** $u_3=-18$. **D.** $u_3=54$.

Lời giải

$u_2=2.(-3)=-6 \Rightarrow u_3=-6.(-3)=18$.

Câu 3: Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh thu được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Thời gian (phút)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
Số học sinh	10	15	22	26	20	17

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

A. $32,2$. **B.** $33,2$. **C.** $32,1$. **D.** $33,1$.

Lời giải

Nhóm chứa trung vị là $[30;40)$

$$M_e=30+\frac{\frac{110}{2}-(10+15+22)}{26}.(40-30)=33,1$$.

Câu 4: Tập nghiệm của phương trình $\sin x=\frac{1}{2}$ là

A. $\left\{\frac{\pi}{6}+k2\pi;\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi;\frac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;\frac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

$\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi;x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$.

Câu 5: Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc và $OA=a,OB=2a,OC=3a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (OAC)

A. a. **B.** $a\sqrt{6}$. **C.** $3a$. **D.** $2a$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}OB\perp OA\\OB\perp OC\end{cases}\Rightarrow OB\perp(OAC)\Rightarrow d\left(B,(OAC)\right)=OB=2a$.

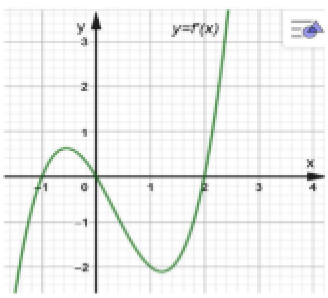
Câu 6: Tính thể tích khối chóp tam giác đều có cạnh đáy *2a* và độ dài đường cao a.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Do chóp đều nên đáy là tam giác đều $S=\frac{1}{3}.a.\left(\frac{1}{2}2a.2a.\sin 60^0\right)=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đạo hàm $f'(x)$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ -1, 0, 2 như hình dưới. Hỏi hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;\,2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) > 0$ trên khoảng $(-1;0)$ do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^x + \log x$

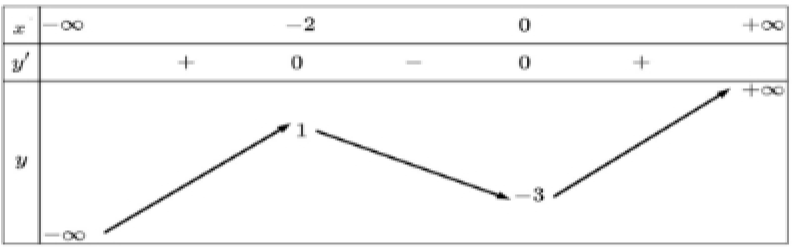
A. $y' = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x\ln 10}$. **B.** $y' = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$. **C.** $y' = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x\ln 10}$. **D.** $y' = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x}$.

Lời giải

TXĐ : $D = (0;+\infty)$

Ta có $y = \mathrm{e}^x + \log x$ hay $y = \mathrm{e}^x + \log_{10} x$ suy ra $y' = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x\ln 10}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Giá trị cực đại của hàm số bằng

A. -2. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 1.

Lời giải

Từ bảng biến thiên trên ta thấy ngay giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ bằng 1.

Câu 10: Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh từ 10 học sinh?

A. C_{10}^3. **B.** 10^3. **C.** 3^{10}. **D.** A_{10}^3.

Lời giải

Dễ thấy từ định nghĩa của tổ hợp ta thấy ngay: có C_{10}^3 cách chọn 3 học sinh từ 10 học sinh.

Câu 11: Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh thu được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Thời gian (phút)	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
Số học sinh	10	15	22	26	20	17

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

A. $32,2$. **B.** $32,1$. **C.** $33,1$. **D.** $33,2$.

Lời giải

Dễ thấy mẫu số liệu có 110 giá trị hay cỡ mẫu $n=110$.

Kí hiệu $x_1, x_2, x_3, ..., x_{110}$ là 110 giá trị đã được sắp theo thứ tự không giảm (tính từ trái qua phải) của mẫu số liệu.

Khi đó trung vị của mẫu số liệu không ghép nhóm ban đầu là $\frac{x_{55}+x_{56}}{2}$ sẽ thuộc nhóm $[30; 40)$.

Áp dụng công thức tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2}-(m_1+m_2+...m_{p-1})}{m_p}.(a_{p+1}-a_p)$$

với $a_p = 30, a_{p+1} = 40, n = 110, m_1 + m_2 + ...m_{p-1} = 10 + 15 + 22 = 47; m_p = 26$, ta có

$$M_e = a_p + \frac{\frac{n}{2}-(m_1+m_2+...m_{p-1})}{m_p}.(a_{p+1}-a_p) = \frac{430}{13} = 33,(076923) \approx 33,1.$$

Vậy trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là $M_e \approx 33,1$.

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB'}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD'}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Lời giải

Áp dụng quy tắc hình hộp trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ta có ngay $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

PHẦN II. Trắc nghiệm chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC, với $A(5;3;1)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AB}=(-4;5;-1), \overrightarrow{AC}=(0;-1;-1)$.

b) Biết điểm $D(a;b;c)$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, ta có $a+b+c=9$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-10.$

d) Gọi α là số đo A của tam giác ABC. Khi đó $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

a) SAI

$\overrightarrow{AB}=(-4;3;-1),\overrightarrow{AC}=(0;-1;1).$

b) ĐÚNG

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, khi đó $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{BC}(4;-6;2),\overrightarrow{AD}=(a-5;b-3;c-1).$ Suy ra $D(9;-3;3)$.

Vậy $a+b+c=9$.

c) SAI

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0-5-1=-6.$

Vậy **c)** sai.

d) SAI

Gọi α là số đo A của tam giác ABC.

Khi đó $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=-\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=x-\ln x$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Tập xác định của hàm số là: $D=(0;+\infty).$

b) Đạo hàm $f'(x)=1+\frac{1}{x}$.

c) Phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=1.$

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3};2\right]$ bằng $\frac{1}{3}+\ln 3.$

Lời giải

a) ĐÚNG

Tập xác định của hàm số là: $D=(0;+\infty).$

b) SAI

Đạo hàm $f'(x)=1-\frac{1}{x}$.

c) ĐÚNG

Ta có $f'(x)=0 \Rightarrow 1-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x=1.$

d) ĐÚNG

Ta có $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+\ln 3; f(1)=1; f(2)2-\ln 2$.

Suy ra $\underset{\left[\frac{1}{3};2\right]}{Max} f(x)=\frac{1}{3}+\ln 3=f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Câu 3: Một xưởng mộc dùng gỗ sồi để sản xuất 5 chiếc bàn mỗi ngày. Chi phí cho mỗi lần vận chuyển nguyên liệu là 5625 USD, chi phí để lưu trữ một đơn vị nguyên liệu là 10 USD mỗi ngày, trong đó một đơn vị là lượng nguyên liệu cần thiết để sản xuất một chiếc bàn, và lưu ý rằng trong mỗi ngày của chu kì sản xuất (thời gian giữa hai lần nhập nguyên liệu liên tiếp) thì lượng nguyên liệu lưu trữ trung bình mỗi ngày được tính bằng một nửa tổng lượng nguyên liệu tồn kho đầu kì và lượng nguyên liệu tồn kho cuối kì. Giả sử nguyên liệu được nhập về sau mỗi x ngày.

a) Một chu kì sản xuất, xưởng mộc phải nhập về $5x$ đơn vị nguyên liệu.

b) Chi phí để lưu trữ nguyên liệu trong x ngày của một chu kì sản xuất là $50x^2$ USD.

c) Hàm chi phí trung bình mỗi ngày trong một chu kì sản xuất là $c(x)=50x+\frac{5625}{x}$.

d) Để chi phí trung bình mỗi ngày của một chu kì sản xuất là ít nhất thì xưởng mộc nên nhập hàng mỗi 15 ngày và mỗi lần nhập về 75 đơn vị nguyên liệu.

Lời giải

a) Đúng.

Giả sử, mỗi chu kì x ngày xưởng mộc nhập về n chiếc bàn, mà mỗi ngày xưởng sản xuất 5 chiếc. Do đó ta có $\frac{n}{x}=5 \Rightarrow n=5x$.

b) Sai.

Vì lượng nguyên liệu lưu trữ trung bình mỗi ngày được tính bằng một nửa tổng lượng nguyên liệu tồn kho đầu kì và lượng nguyên liệu tồn kho cuối kì nên lượng nguyên liệu là $\frac{5x}{2}$.

Chi phí để lưu trữ nguyên liệu trong x ngày của một chu kì sản xuất là: $10.\dfrac{5x}{2}.x = 25x^2$ (USD)

c) Sai.

Chi phí cần bỏ ra cho mỗi chu kì sản xuất là $5625 + 25x^2$.

Khi đó hàm chi phí trung bình mỗi ngày trong một chu kì sản xuất là

$c(x) = \dfrac{5625 + 25x^2}{x} = 25x + \dfrac{5625}{x}$.

d) Đúng.

Ta có $c'(x) = 25 - \dfrac{5625}{x^2}$ $\left(x \in \mathbb{N}^*\right)$.

$c'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = 15$.

Bảng biến thiên:

x	0		15		$+\infty$
$c'(x)$		$-$	0	$+$	
$c(x)$	$+\infty$	$\searrow$	750	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy chi phí trung bình mỗi ngày của một chu kì sản xuất là ít nhất thì xưởng mộc nên nhập hàng mỗi 15 ngày và mỗi lần nhập về $5.15 = 75$ đơn vị nguyên liệu.

Câu 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông cân tại A, hình chiếu vuông góc H của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết $AA' = BC = 2a$.

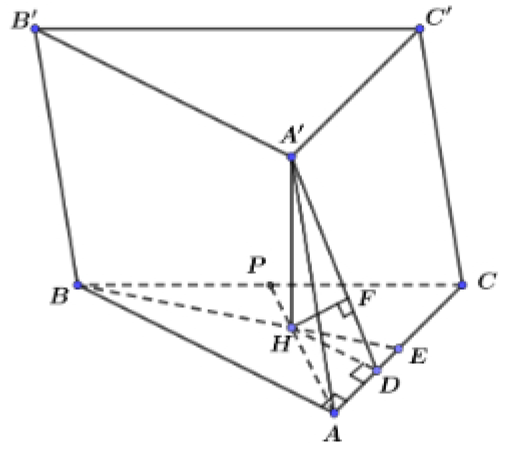
a) Độ dài đường cao hình lăng trụ bằng $\dfrac{4a\sqrt{2}}{3}$.

b) Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng $4a^3\sqrt{2}$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC gấp ba lần khoảng cách từ H đến $(ACC'A')$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC bằng $\dfrac{2a\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải



a) Đúng.

Kẻ $AH \cap BC = P$. Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AP \perp BC$.

ΔABC vuông cân tại A, AP là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên $AP = \frac{BC}{2} = a$.

Mà H là trọng tâm ΔABC nên $AH = \frac{2}{3}a$.

Xét tam giác AHA vuông tại H có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}a$.

b) Sai.

Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{AP.BC}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3}a = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$.

c) Đúng.

Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $BB' \,//\, (ACC'A')$

$\Rightarrow d(BB', AC) = d(B, (ACC'A'))$

Gọi $BH \cap AC = E$.

Kẻ $HD \perp AC$ tại H

Ta có $\frac{d(B,(ACC'A'))}{d(H,(ACC'A'))} = \frac{d(B,AC)}{d(H,AC)} = \frac{BA}{HD}$

Theo định lý Thales, ta có $HD \,//\, BA$ nên $\frac{BA}{HD} = \frac{BE}{HE} = 3$.

Do đó $\dfrac{d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)}{d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)}=3$ hay $\dfrac{d\left(BB',AC\right)}{d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)}=3$.

d) Sai.

ΔABC vuông cân tại A nên $AB=AC\Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2\Leftrightarrow 2AB^2=BC^2$

$AB=\sqrt{\dfrac{BC^2}{2}}=\sqrt{2}a$.

Ta có $\dfrac{BA}{HD}=3\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}a}{HD}=3\Rightarrow HD=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$.

Kẻ $HF\perp A'D$.

Ta có $\begin{cases}AC\perp HD\\AC\perp A'H\\A'H,HD\subset\left(A'HD\right)\end{cases}\Rightarrow AC\perp\left(A'HD\right)\Rightarrow AC\perp HF$.

Khi đó $\begin{cases}HF\perp A'D\\HF\perp AC\\A'D,AC\subset\left(ACC'A'\right)\end{cases}\Rightarrow HF\perp\left(ACC'A'\right)$. Do đó $d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)=HF$.

Xét tam giác $A'HD$ vuông tại H, đường cao HF có: $\dfrac{1}{A'H^2}+\dfrac{1}{HD^2}=\dfrac{1}{HF^2}\Rightarrow HF=\dfrac{4\sqrt{34}}{51}a$.

Từ đó ta có: $\dfrac{d\left(BB',AC\right)}{d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)}=3\Rightarrow\dfrac{d\left(BB',AC\right)}{\dfrac{4\sqrt{34}}{51}a}=3\Leftrightarrow d\left(BB',AC\right)=\dfrac{4\sqrt{34}}{17}a$.

PHẦN III. Trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 sao cho các đường thẳng A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 lần lượt vuông góc với các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC). Biết thể tích khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ bằng $\dfrac{a}{b}\sqrt{2}$ với a, b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b$.

Đáp án: 163.

Lời giải

Gọi O là trọng tâm của tứ diện đều $ABCD$.

Theo giả thiết, ta có $OA\perp(BCD)$ nên $OA//\overrightarrow{A_1B_1}$ $\Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1}=k_1\overrightarrow{OA}$.

Tương tư: $\overrightarrow{B_1C_1}=k_2\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{C_1D_1}=k_3\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{D_1A_1}=k_4\overrightarrow{OD}$.

Ta có $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow k_1\overrightarrow{OA}+k_2\overrightarrow{OB}+k_3\overrightarrow{OC}+k_4\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

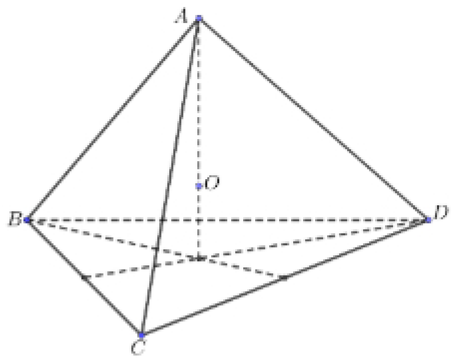
Vì O là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Hay $k_1\overrightarrow{OA}+k_1\overrightarrow{OB}+k_1\overrightarrow{OC}+k_1\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\Rightarrow (k_1-k_2)\overrightarrow{OB}+(k_1-k_3)\overrightarrow{OC}+(k_1-k_4)\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. (*)

Do các vecto $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OD}$ không đồng phẳng nên $(*)\Leftrightarrow k_1=k_2=k_3=k_4=k$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(1;1;1)$, $B(1;-1;-1)$, $C(-1;1;-1)$ và $D(-1;-1;1)$.



Khi đó: $AB=BC=CD=DA=AC=BD=2\sqrt{2}$.

Vì tứ diện $ABCD$ có cạnh bằng 1 nên 1 đơn vị trên trên trục bằng $2\sqrt{2}$ đơn vị độ dài.

Ta có :

(BCD): $x+y+z+1=0$

$(CDA): x-y-z+1=0$.

$(DAB): -x+y-z+1=0$.

$(ABC): -x-y+z+1=0$.

Gọi $A_1(x;y;z)$

Vì $\overrightarrow{A_1B_1}=k\overrightarrow{OA} \Rightarrow B_1(x+k;y+k;z+k)$.

Tương tự $C_1(x+2k;y;z)$ và $D_1(x+k;y+k;z-k)$.

Ta có hệ $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x+k-(y+k)-(z+k)+1=0 \\ -(x+2k)+y-k+1=0 \\ -(x+k)-(y+k)+z-k+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{1}{3} \\ z=0 \\ k=\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Vậy $\overrightarrow{A_1B_1}=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$ và $\overrightarrow{C_1D_1}=\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Suy ra $V=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\left[\overrightarrow{B_1C_1},\overrightarrow{C_1D_1}\right]\right|=\dfrac{16}{81}$ (đơn vị thể tích trên trục).

Do đó $V=\dfrac{16}{81}\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^3=\dfrac{\sqrt{2}}{162}$ (đơn vị thể tích).

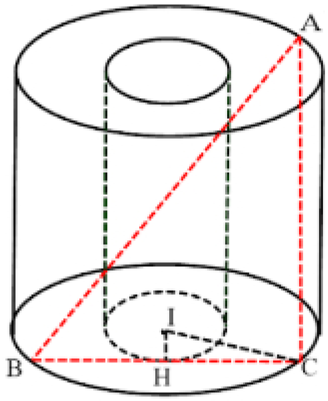
Vậy $a+b=163$.

Câu 2: Anh A mở một nhà hàng lẩu. Anh đã trang bị cho mỗi bàn ăn một nồi lẩu có dạng hai hình trụ đồng trụ. Bán kính đáy nồi (ngoài) $R=15$ cm, bán kính trụ giữa (trong) là $r=3,5$ cm, chiều cao long nồi là $h=10$ cm. Để khách hàng có trải nghiệm tốt nhất, anh A cần xác định chiều dài tối thiểu L của chiếc đũa sao cho dù đầu đũa có bị trượt vào vị trí nào trong nồi, phần đầu đũa thừa ra ngoài miệng nồi vẫn phải lớn hơn 5 cm. Tính L (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Đáp án: 35,8

Giả sử chiếc đũa bị tụt sâu nhất vào trong nồi, ta cần tìm độ lớn đoạn AB lớn nhất $\Leftrightarrow BC$ lớn nhất.



Khi đó: $BC_{\max} = 2HC = 2\sqrt{IC^2 - IH^2} = 2\sqrt{15^2 - 3,5^2} = \sqrt{851}$.

$\Rightarrow AB_{\max} = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{951}$.

Vậy chiều dài tối thiểu của chiếc đũa thỏa mãn yêu cầu đề bài là $L = \sqrt{951} + 5 \approx 35,8$ cm.

Câu 3: Mèo Táo có mở một cửa hàng sách và đang cần tuyển nhân viên trông coi cửa hàng. Để tuyển nhân viên đòi hỏi có khả năng tư duy và suy luận tốt; Táo đưa ra thử thách như sau: Bộ truyện tranh thám tử Kenichi gồm 44 tập đang được sắp xếp từ 1 tới 44 trên giá (giả sử đang tính từ trái qua phải và tất cả cuốn truyện được sắp xếp cùng chiều). Yêu cầu hãy thực hiện việc sắp xếp các tập truyện theo trình tự ngược lại từ 44 tới 1 theo quy tắc: đổi chỗ 2 tập truyện đang xếp liên tiếp sẽ bị tính 1 điểm; đổi chỗ 2 tập truyện mà ở giữa chúng có 3 tập khác thì không bị tính điểm. Bạn An muốn ứng tuyển vào nhân viên cửa hàng. Hỏi điểm số của An nhỏ nhất là bao nhiêu điểm để thực hiện được thử thách trên.

Lời giải

Đáp án: 22

Một tập truyện j ở " vị trí tốt" nếu nó ở vị trí thứ i thỏa mãn $(i+j)$ chia 4 dư 1

Ta có:

+ Cách đổi 0 điểm không làm thay đổi số tập ở "vị trí tốt"

+ Cách đổi 1 điểm thì làm tăng nhiều nhất 2 tập ở "vị trí tốt"

Ban đầu không có tập nào ở "vị trí tốt" để xếp được 44 tập ở "vị trí tốt"

Yêu cầu bài toán cần thực hiện ít nhất 22 cách đổi "1 điểm"

Ta thực hiện các bước đổi sau:

Bước 1 đến 21 đổi i với $i+1$ với $i \in \{2;4;6,\ldots,42\}$ (bị tính 21 điểm)

Sau 21 bước thì tất các tập ngoại trừ tập 1 và 44 đều ở "vị trí tốt"

Bước 22: đổi tập 1 và tập đang ở vị trí 5 (0 điểm)

Đổi tập 44 và tập đang ở vị trí 40 (0 điểm), sau đó cứ đổi theo quy luật từ vị trí 40 về vị trí 36, từ vị trí 36 về vị trí 32,.về vị trí 4.

Sau đó đổi tập 44 ở vị trí 4 đổi với tập 1 ở vị trí 5 (1 điểm)

Lúc này các tập đã ở "vị trí tốt" và ở các vị trí 1, 5,.,41 chỉ có các tập 4, 8,.44 ta có thể thực hiện các bước đổi 0 điểm để các tập này sắp xếp theo thứ tự giảm dần.

Vậy số điểm nhỏ nhất An thực hiện được là 22 điểm.

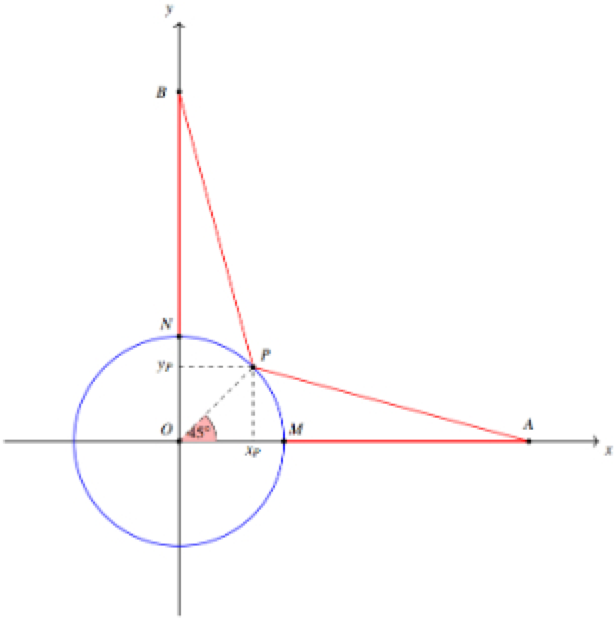
Câu 4: Mặt cầu tâm I bán kính $R>0$ là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách I một khoảng bằng R. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên hệ trục là centimet, một tổ kiến có bề mặt là một mặt cầu tâm là gốc tọa độ và bán kính $R=6\text{cm}$, ở điểm $A(20;0;0)$ có 10 miếng mồi và ở điểm $B(0;20;0)$ có 3 miếng mồi. Một con kiến trên bề mặt tổ, mỗi lần đi đến A hoặc B tha đúng một miếng mồi về tổ. Hỏi tổng quãng đường ngắn nhất con kiến đó đi là bao nhiêu centimet để con kiến tha hết 13 miếng mồi về tổ (kết quả làm tròn hàng đơn vị)?

Lời giải

Đáp án: 369.

Dễ thấy, $A(20;0;0)$ và $B(0;20;0)$ đều thuộc mặt phẳng (Oxy) nên đường đi ngắn nhất từ một điểm trên mặt cầu đến A (hoặc B) nằm trong mặt phẳng (Oxy).

Đưa bài toán về hệ tọa độ Oxy với đường tròn tâm O, bán kính 6cm và $A(20;0)$; $B(0;20)$.



Để tổng quãng đường ngắn nhất, con kiến phải xuất phát và trở về mặt tổ tại điểm trên mặt cầu gần A và B nhất, lần lượt là các điểm $M(6;0)$ và $N(0;6)$.

Giả sử, con kiến sẽ lần lượt lấy các miếng mồi ở A rồi đến các miếng mồi ở B. Tuy nhiên, khi lấy miếng mồi thứ 10 ở A, con kiến sẽ về một điểm khác trên mặt tổ thay vì quay về M rồi đi theo đường cung tròn $\overset{\frown}{MN}$ để đến N.

Tổng quãng đường sẽ ngắn nhất khi con kiến mang miếng mồi thứ 10 về tổ tại điểm chính giữa cung tròn $\overset{\frown}{MN}$ là P, và từ đây đến B để lần lượt lấy 3 miếng mồi còn lại:

+ Tổng quãng đường để lấy 10 miếng mồi ở A: $T_1 = MA \times 9 \times 2 + MA + PA$.

+ Tổng quãng đường để lấy 3 miếng mồi ở B: $T_2 = PB + NB + NB \times 2 \times 2$.

Do đó: $T_{\min} = T_1 + T_2 = 19MA + 5NB + PA + PB$.

Ta có: $\begin{cases} x_P = 6 \times \cos 45^\circ = 3\sqrt{2} \\ y_P = 6 \times \sin 45^\circ = 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow PA = PB = \sqrt{\left(20 - 3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2} - 0\right)^2} = 2\sqrt{109 - 30\sqrt{2}}$ và $MA = NB = \sqrt{(20-6)^2} = 14$.

Vậy $T_{\min} = 19\times14 + 5\times14 + 2\sqrt{109 - 30\sqrt{2}} + 2\sqrt{109 - 30\sqrt{2}} \approx 369\text{cm}$.

Câu 5: Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{2x^3+3x^2-3x-2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

Lời giải

Đáp án: 2

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2-4 \ge 0 \\ 2x^3+3x^2-3x-2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le -2 \end{array}\right. \\ x \ne -2 \\ x \ne -\dfrac{1}{2} \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le -2 \end{array}\right. \\ x \ne -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x < -2 \end{array}\right.$.

Tập xác định $D = (-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$.

Vì $\lim\limits_{x\to -2^-} y = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^3\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{(x+2)(2x+1)(x-1)} = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng.

Vì $\lim\limits_{x\to +\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(x.\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}+1}{2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}} \right) = +\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang khi $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to -\infty} \frac{-4x^3}{\left(2x^3+3x^2-3x-2\right)\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\dfrac{-4}{x}}{\left(2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)\left(-\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}-1\right)} = 0$$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận.

Câu 6: Một trang trại dự định dành 100 ha đất để trồng ba loại cây: Cao su, Cây phê và Hồ tiêu. Lợi nhuận hàng năm ước tính của Cao su là 40 triệu đồng/ha, Cà phê là 60 triệu đồng/ha và Hồ tiêu là 80 triệu đồng/ha. Do các yếu tố về quy hoạch và tài nguyên nước, diện tích trồng các loại cây phải tuân thủ các điều kiện sau:

Tổng diện tích trồng Cà phê và Hồ tiêu không được vượt quá diện tích trồng Cao su.
Diện tích trồng Hồ tiêu không được vượt quá 20 ha.
Diện tích trồng Cà phê không được vượt quá 3 lần diện tích trồng Hồ tiêu.
Hỏi tổng lợi nhuận thu được hàng năm của trang trại đó lớn nhất là bao nhiêu tỷ đồng?

Lời giải

Đáp án: 5,4.

Gọi x, y (đơn vị: ha) lần lượt là diện tích đất trồng cây Cao su và cây Cà phê thì diện tích đất trồng cây Hồ tiêu là $100-x-y$. Điều kiện $x, y \geq 0$.

Tổng diện tích trồng Cà phê và Hồ tiêu không được vượt quá diện tích trồng Cao su nên

$$y+(100-x-y) \leq x \Leftrightarrow x \geq 50.$$

Diện tích trồng Hồ tiêu không được vượt quá 20 ha nên

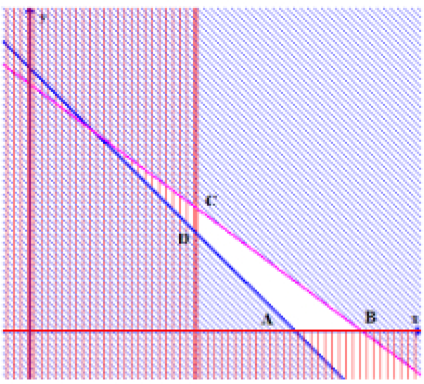
$$100-x-y \leq 20 \Leftrightarrow x+y \geq 80.$$

Diện tích trồng Cà phê không được vượt quá 3 lần diện tích trồng Hồ tiêu nên

$$y \leq 3(100-x-y) \Leftrightarrow 3x+4y \leq 300.$$

Tổng lợi nhuận $L(x;y)=40x+60y+80(100-x-y)=-40x-20y+8000$ (triệu đồng).

Ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 50 \\ x+y \geq 80 \\ 3x+4y \leq 300 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$.



Miền nghiệm của bất phương trình là miền tứ giác $ABCD$ với

$$A(80;0), B(100;0), C(50;37,5), D(50;30).$$

Vì $L(A)=4800, L(B)=4000, L(C)=5250, L(D)=5400$ nên $L(x;y)$ có giá trị lớn nhất là

5400 khi $x=50, y=30$.

Vậy tổng lợi nhuận thu được hàng năm của trang trại đó lớn nhất là 5,4 tỷ đồng.

HẾT