Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Кафедра інтелектуальних програмних систем

Алгоритми та складність

Лабораторна робота №1

«Алгоритм Штрассена для множення матриць»

Варіант № 3

Виконав студент 2-го курсу

Групи ІПС21

Вербицький Артем Віталійович

Київ – 2023

**Завдання:**

Реалізація алгоритму Штрассена для множення матриць. Програма повинна проходити юніт тести і видавати час роботи.

Тип представлення матриці: Матриці в стилі С (T\*\*)

Тип даних: Комплекснозначні матриці

**Теорія**

Алгоритм Штрассена призначений для швидкого множення матриць, є узагальненням методу множення Карацуби на матриці. Цей алгоритм дозволяє швидше за стандартний спосіб множити матриці.

Множення Карацуби — метод швидкого множення, який дозволяє перемножувати два n-значних числа зі складністю обчислень

Стандартний метод множення матриць — за означенням, якщо для матриці розміру та матриці розміру , то є матрицею розміру з елементами .

Квадратна матриця — це матриця з однаковою кількістю рядків і стовпців. (-матриця — це квадратна матриця порядку :

A =

Числа називаються елементами матриці. Положення кожного елемента в матриці визначається номерами рядка і стовпчика, в яких знаходиться цей елемент.

Блочна матриця — матриця, що уявно поділена на однакові прямокутні частини (блоки), які самі розглядаються як матриці.

**Алгоритм**

Нехай A, B — дві квадратні матриці над кільцем R. Ми можемо обчислити матрицю C, як:

Якщо матриці A, B не типу заповнюємо відсутні рядки і стовпці нулями. При цьому ми отримуємо зручні для рекурсивного множення розміри, але втрачаємо ефективність за рахунок додаткових непотрібних множень.

Розділимо матриці A, B і C на рівні за розміром блочні матриці

де

тоді

При такій конструкції ми не зменшили кількість операцій множення. Нам, як і раніше, потрібно 8 множень для обчислення матриці, як і в звичайному методі.

Зараз важлива частина. Визначаємо нові матриці

)

тільки за допомогою 7 множень (один для кожного ) замість 8. Тепер ми можемо висловити при умові , ось так:

Ми повторюємо рекурсивний процес ділення n раз доти, поки розмір матриць не стане досить малим, далі використовують звичайний метод множення матриць.

**Складність алгоритму**

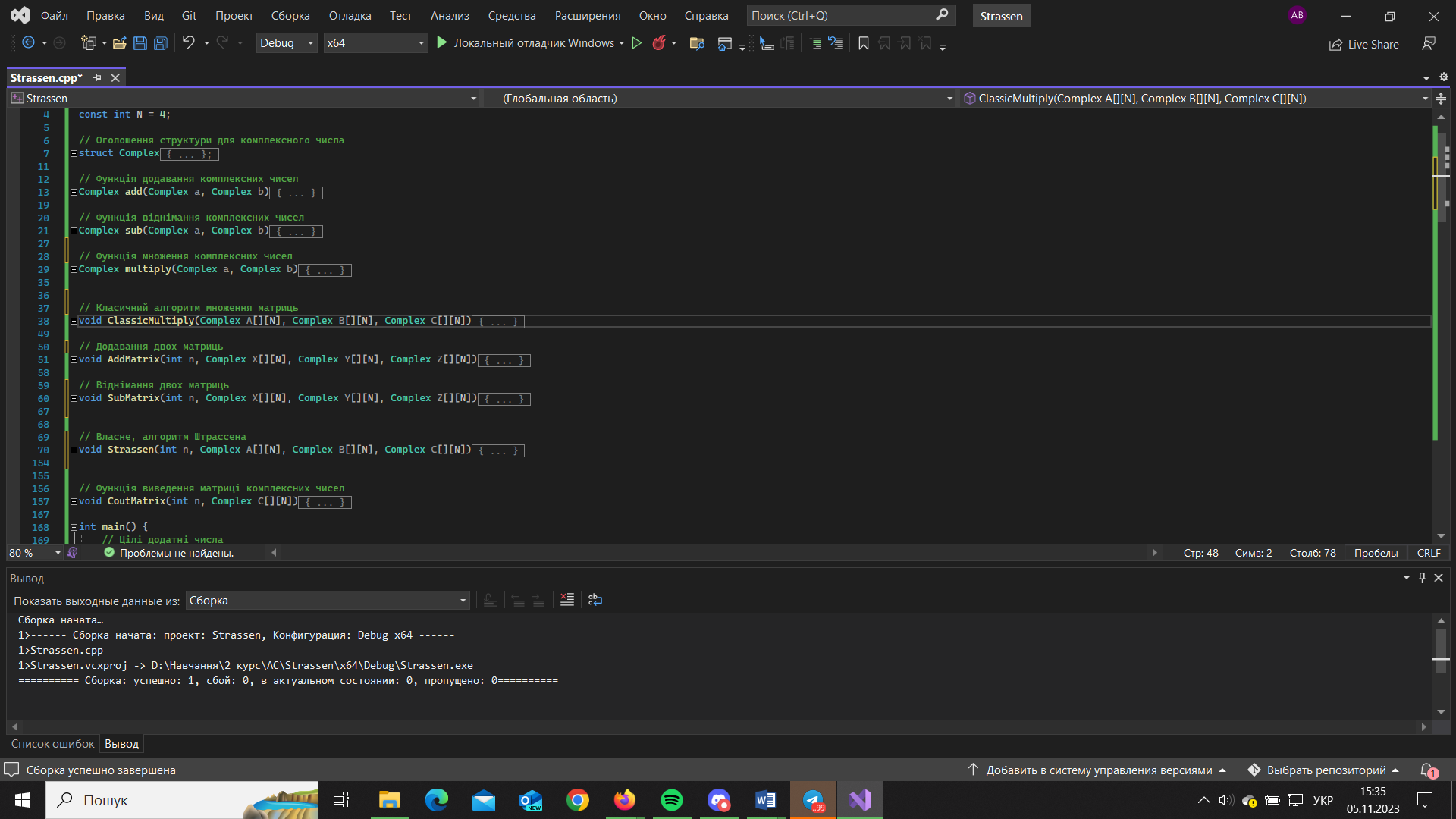
На відміну від традиційного алгоритму множення матриць (за формулою ), який виконується за час , алгоритм Штрассена множить матриці за час , що дає виграш на великих щільних матрицях починаючи, приблизно, з матриць розміру 64 × 64.

Число додавань і множень, необхідних в алгоритмі Штрассена може бути розрахована наступним чином: нехай число операцій для матриці. Тоді, за рекурсивним застосуванням алгоритму Штрассена, ми бачимо, що , з деякою постійною L, яка залежить від кількості доповнень, виконаних в кожному застосуванні алгоритму. Отже , тобто асимптотична складність для множення матриць розміру використовуючи алгоритм Штрассена є

Зменшення кількості арифметичних операцій призводить до частково зменшеної числової стабільності, і алгоритм також вимагає значно більше пам'яті, порівняно з наївним алгоритмом. Обидві початкові матриці, розміри яких повинні бути розширені до наступного ступеня двійки, в результаті чого зберігається до чотирьох разів більше елементів, та сім допоміжних матриць, кожна з яких містить в собі чверть елементів.

**Мова реалізації алгоритму** С++

**Модулі програми:**



**Інтерфейс користувача**

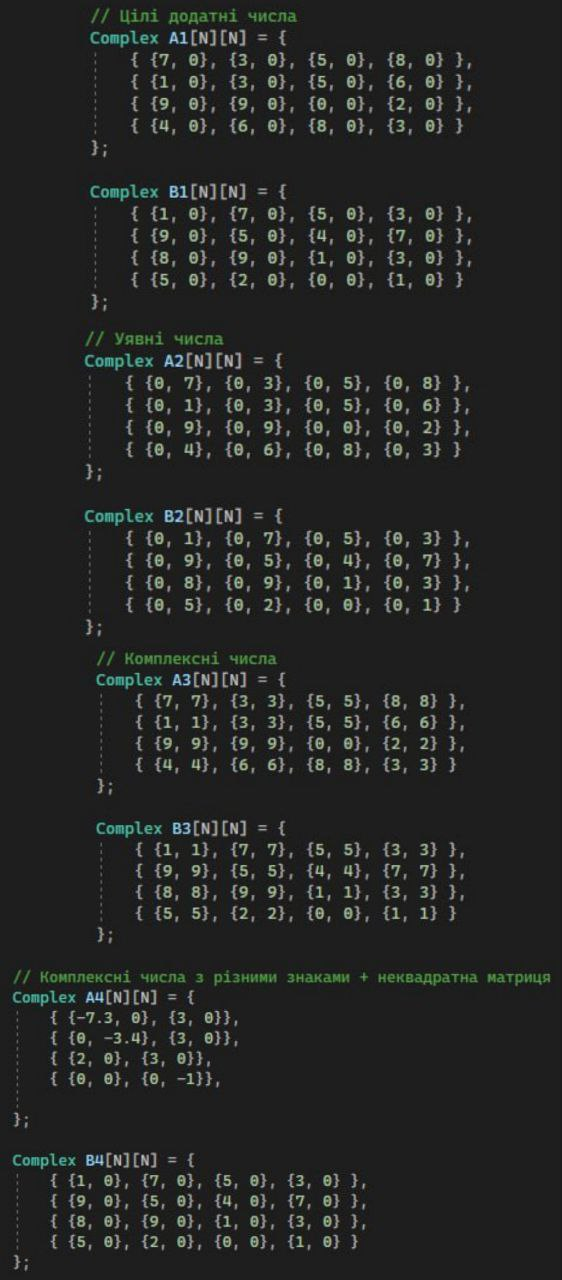
Введення даних здійснюється у програмному коді.

Вхідні дані:

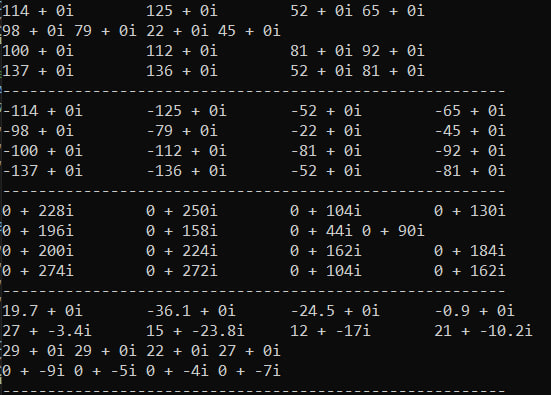
* розмір квадратної матриці, яку буде виведено у результаті
* матриці, добуток яких потрібно знайти

Виведення результату здійснюється у консоль.

**Тестові приклади**



Результат:



**Використання реалізації алгоритму в груповому проєкті**

* Полюхович Олександр — перевірка коректності алгоритму побудови оберненої матриці методом Гауса-Жордана. При множенні вихідної матриці на обернену результатом повинна бути одинична матриця.
* Котков Владислав — множення підматриць, утворених під час виконання LU-розкладання.

**Висновки**

Алгоритм Штрассена підходить для швидких обчислень великих матриць. Для матриць, розмір яких укладається в проміжки, використання алгоритму Штрассена дозволить прискорити процес множення. Звичайно, множити такі матриці доводиться нечасто, але прикладних задач, у яких необхідно знаходити добуток, наприклад, матриць 4000×4000, для яких ефективний даний алгоритм, немало.

**Використані літературні джерела**

* Дж. Макконнел. Основы современных алгоритмов [с. 133-134]
* А. В. Левитин. Алгоритмы: введение в разработку и анализ [c. 192-194]
* <https://en.wikipedia.org/wiki/Strassen-algorithm>