Екзаменаційна робота
з предмету математична логіка та
теорія алгоритмів
студента групи К-28 ФКНК
Логачова Михайла.
Варіант 10

2

Довести $\neg A, \neg B, \neg C \vdash \neg((A \to B) \to C)$

За лемою 12: $\neg P, \neg Q \vdash (P \to Q)$

$\neg A, \neg B \to (A \to B)$

Тобто можна додати $(A \to B)$ до мн-ни формул

За лемою 10:

$P, \neg Q \vdash \neg(P \to Q)$

Підставляємо:

$\neg A, \neg B, \neg C, (A \to B) \vdash \neg((A \to B) \to C)$

т.як $(A \to B)$ вивідна з $\neg A$ і $\neg B$,
можна її прибрати

$\neg A, \neg B, \neg C \vdash \neg((A \to B) \to C)$

Додатково: доведення леми

12: $\neg P, \neg Q \vdash (P \to Q)$

З аксіоми 1.1 $\vdash \neg P \to (\neg Q \to \neg P)$

за дедукц. $\neg P, \neg Q \vdash \neg Q \to \neg P$

З аксіоми 4.1

$\vdash (\neg Q \to \neg P) \to (\neg\neg P \to \neg\neg Q)$

З аксіоми 4.3

$\vdash (\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$

$\neg P, \neg Q, \neg Q \to \neg P \vdash P \to Q$

$\neg Q \to \neg P$ вивідна з $\{\neg P, \neg Q\}$

$\neg P, \neg Q \vdash P \to Q$ $\boxtimes$

3. $(\exists x A(x) \to \forall x B(x)) \to \forall x (A(x) \to B(x))$

Зведемо до попередньої нормальної форми
Припустимо, що формула – тавтологія.
Тоді будемо доводити суперечність її
заперечення.

$$\neg((\neg \exists x (A(x)) \vee \forall x B(x)) \to \forall x (\neg A(x) \vee B(x)))$$

$$\neg((\exists x A(x) \wedge \exists x \neg B(x)) \vee \forall x (\neg A(x) \vee B(x)))$$

$$= (\forall x \neg A(x) \vee \forall x B(x)) \wedge \exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$$

заміна $x \to y$ заміна $x \to z$

$$\forall x \forall y \exists z ((\neg A(x) \vee B(y)) \wedge A(z) \wedge \neg B(z))$$

Отримана нормальна форма

$z \to f(x, y)$

$$\forall x \forall y ((\neg A(x) \vee B(y)) \wedge A(f(x,y)) \wedge \neg B(f(x,y)))$$

Отримана стандартна форма

Мн-на диз'юнктів: $S = \{\neg A(x) \vee B(y), A(f(x,y)), \neg B(f(x,y))\}$

Ербранівський універсум множини диз'юнктів:

$$E = \{a, f(a,a), f(f(a,a),a), \ldots\}$$

Виведення порожнього диз'юнкта

1. $\neg A(f(a,a)) \vee B(f(a,a))$
2. $A(f(a,a))$
3. $B(f(a,a))$
4. $\neg B(f(a,a))$
5. $\square$

Отримали пустий диз'юнкт (суперечність)
Отже, формула є тавтологією, припущення вірне.