

2. Доведем, что $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$.

При доказании используется аксиома IV.1.

$$(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a) \quad (\text{IV.1})$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Потому что придется допустить эквивалентности:

- $p \rightarrow q \Rightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

- 1) $\vdash p \rightarrow q \rightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ (за IV.1)

- $\neg q \rightarrow \neg p \Rightarrow p \rightarrow q$

- 1) $\vdash \neg q \rightarrow \neg p \rightarrow \neg \neg p \rightarrow \neg \neg q$ (за IV.1)

- 2) $\vdash \neg \neg p \rightarrow \neg \neg q$ (за MP)

- 3) $\vdash \neg \neg q \rightarrow q$ (IV.3)

- 4) $\vdash \neg \neg p \rightarrow q$ (MP 2,3)

- 5) $\vdash p \rightarrow \neg \neg p$ (IV.2)

- 6) $\vdash p \rightarrow q$ (MP 5,4)

3. Перевірити на єдиничність

$$\{ \forall x ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow \exists y (R(x,y) \wedge G(y))),$$

$$\forall x (S(x) \rightarrow \neg Q(x)),$$

$$\exists x (S(x) \wedge P(x) \wedge \forall x (R(x,y) \rightarrow S(y))) \}$$

$$\bullet \neg \forall x ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists y (R(x,y) \wedge G(y)))$$

$$\forall x \neg ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists y (R(x,y) \wedge G(y)))$$

$$\forall x \exists y \neg ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (R(x,y) \wedge G(y)))$$

Елімінація квантора існування:

$$y = f(x); \quad \forall x \neg ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (R(x, f(x)) \wedge G(f(x)))) \Rightarrow$$

$$\bullet \forall x (S(x) \rightarrow \neg Q(x)) \quad \Rightarrow \forall x (\neg (P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \neg (R(x, f(x)) \wedge G(f(x))))$$

$$\bullet \exists x (S(x) \wedge P(x) \wedge \forall x (R(x,y) \rightarrow S(y)))$$

$$\exists x (S(x) \wedge P(x) \wedge \forall x (R(x,y) \rightarrow S(y)))$$

$$\exists x \forall z (S(x) \wedge P(x) \wedge (R(x,y) \rightarrow S(y)))$$

$$x = f(z): \quad \forall z (S(f(z)) \wedge P(f(z)) \wedge (R(z,y) \rightarrow S(y)))$$

Множина диз'юнктив:

$$\{ \neg (P(x) \wedge \neg Q(x)), \neg (R(x, f(x)) \wedge G(f(x))), \neg S(x) \vee \neg Q(x), \\ S(f(z)), P(f(z)), \neg R(z,y) \vee S(y) \}$$

$$\text{Ербранівська універсаль: } E = \{a, f(a), f(f(a)) \dots\}$$

$$1. \neg (P(x) \wedge \neg Q(x)) = \neg P(x) \vee Q(x)$$

$$2. \neg (R(x, f(x)) \wedge G(f(x))) = \neg R(x, f(x)) \vee \neg G(f(x))$$

$$3. \neg S(x) \vee \neg Q(x)$$

$$4. S(f(z))$$

$$5. P(f(z))$$

$$6. \neg R(z,y) \vee S(y)$$

$$7. \neg P(f(a,a)) \vee Q(f(a,a))$$

$$8. P(f(a,a))$$

$$9. S(f(a,a)) \vee \neg Q(f(a,a))$$

$$10. S(f(a,a))$$

11. \square

Є єдиність.