Теорія алгоритмів та мат. логіка 19.06

Екзаменаційний білет №9

Краснопір Тимур

К-29

③ Дослідити формулу:

$$\forall x(A(x)\vee B(x))\to(\forall x A(x)\vee\exists x B(x)) \quad (1)$$

1) Заперечення формули (1):

$$\neg\big(\forall x(A(x)\vee B(x))\to(\forall x A(x)\vee\exists x B(x))\big) \quad (2)$$

2) Знайдемо ПНФ формули (2) з матрицею в КНФ.

$$\neg\big(\forall x(A(x)\vee B(x))\to(\forall x A(x)\vee\exists x B(x))\big)=$$

$$=\neg\big(\neg\forall x(A(x)\vee B(x))\vee(\forall x A(x)\vee\exists x B(x))\big)=$$

$$=\forall x(A(x)\vee B(x))\wedge\neg(\forall x A(x)\vee\exists x B(x))=$$

$$=\forall x(A(x)\vee B(x))\wedge(\neg\forall x A(x)\wedge\neg\exists x B(x))=$$

$$=\forall x(A(x)\vee B(x))\wedge(\exists x\neg A(x)\wedge\forall x\neg B(x))=$$

$$= \forall x \left(A(x) \vee B(x)\right) \wedge \left(\exists y \neg A(y) \wedge \overset{\forall}{\cancel{\exists}} z \neg B(z)\right) =$$

$$= \forall x \left(A(x) \vee B(x)\right) \wedge \exists y \forall z \left(\neg A(y) \wedge \neg B(z)\right) =$$

(3) $= \forall x \exists y \forall z \left(\left(A(x) \vee B(x)\right) \wedge \neg A(y) \wedge \neg B(z)\right) =$

3) Знайдемо сколемівську стандартну форму формули (2). Для цього елімінуємо квантор існування у формулі (3).

$$(3) \sim \forall x \forall z \left(\left(A(x) \vee B(x)\right) \wedge \neg A(f(x)) \wedge \neg B(z)\right)$$

4) Множина диз'юнктів

$$S = \left\{ A(x) \overset{\mathrm{I}}{\vee} B(x), \neg A(\overset{\mathrm{II}}{f}(x)), \neg \overset{\mathrm{III}}{B}(z) \right\}$$

5) Ербранівський універсум

$$H_\infty = \left\{ a, f(a), f(f(a)), \ldots \right\}$$

б) Виведення пустого диз'юнкта.

1. $A(f(a)) \vee B(f(a))$ (підставляємо $f(a)$ замість x у $\underline{\mathrm{I}}$)

2. $\neg A(f(a))$ (підставляємо a замість x у $\underline{\mathrm{II}}$)

3. $B(f(a))$ (резольвента 1, 2)

4. $\neg B(f(a))$ (підставляємо $f(a)$ замість z у $\underline{\mathrm{III}}$)

5. $\square$ (резольвента 3, 4)

Отже, S – суперечлива, а тому формула (1) истинна (тавтологія).

Відповідь: формула (1) истинна (тавтологія).

② Довести, що

$\neg A, \neg B, C \vdash (A \to B) \to C.$

Розглянемо формули

$\neg B, C, A \to B.$

Із цих формул можна вивести формулу C. Дійсно:

1. $\vdash a \to (b \to a)$ (аксіома $\underline{I}.1$)
2. $\vdash C \to (\neg B \to C)$ (ПП у 1)
3. $\neg B, C, A \to B \vdash C \to (\neg B \to C)$ (за означ.)
4. $\neg B, C, A \to B \vdash C$ (за означенням)
5. $\neg B, C, A \to B \vdash \neg B \to C$ (MP 3,4)
6. $\neg B, C, A \to B \vdash \neg B$ (за означ.)
7. $\neg B, C, A \to B \vdash C$ (MP 5,6)
8. $\neg B, C \vdash (A \to B) \to C$ (теор. про дедукцію)
9. $\boxed{\neg A, \neg B, C \vdash (A \to B) \to C}$