МКР №1 з дискретної математики
група 1ПС-11
Вербицький А. В.
Варіант № 8

1) d), g), i), l)

2) $A = \{\emptyset, \{a, c\}\}$

$\beta(A) = \{\emptyset; \{\emptyset\}; \{a, c\}; \{\emptyset, \{a, c\}\}\}$

3) $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 5, 7\}$

$A \cap B = \{2, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$B \setminus A = \{7\}$, $A \setminus B = \{1, 3\}$, $A \triangle B = \{1, 3, 7\}$

4) $A \subseteq C \Leftrightarrow \beta(A) \subseteq \beta(C)$

$\forall X \in A \xRightarrow{A \subseteq C} X \in A \wedge X \in C \Rightarrow X \subseteq \beta(A) \wedge X \subseteq \beta(C) \Rightarrow \beta(A) \subseteq \beta$

$\forall X \subseteq \beta(A) \xRightarrow{\beta(A) \subseteq \beta(C)} X \subseteq \beta(A) \wedge X \in \beta(C) \Rightarrow X \in A \wedge X \in C \Rightarrow A \subseteq C$

5) a) $A \cap (A \cup B) = A$

1) $\forall x \in A \cap (A \cup B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$

2) $\forall x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap (A \cup B)$

б) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cap B$

1) $\forall X \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ -

6) $\forall x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$

$\forall x \in A \vee B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$

$\forall x \in A \wedge B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\exists X = \{x, y\}, Y = \{y\} \Rightarrow X \setminus Y = \{x\}, X \cup Y = \{x, y\},$

$X \wedge Y = \{y\} \Rightarrow X \setminus Y \neq X \vee Y \neq X \wedge Y$

7) а) R_3, R_4, R_5 г) R_2, R_3 є) R_3

б) R_1 д) R_1, R_5

в) R_2 е) R_4

8) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

1) $\forall (x, y) \in (A \setminus B) \times C \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \notin B \times C \Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$

2) $\forall (x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \notin B \times C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B \wedge y \in C \Rightarrow (x, y) \in (A \setminus B) \times C$

9) $R_1 \subseteq R_2$, $R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q$

1) $\forall (x, y) \in R_1 \circ Q \Rightarrow (x; z) \in R_1 \wedge (z, y) \in Q$, $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, z) \in R_2 \wedge (z, y) \in Q \Rightarrow (x, y) \in R_2 \circ Q$

10) R_1, R_2 - симетричні, $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$

1) $\forall (x, y) \in R_1 \circ R_2 \Rightarrow (x, z) \in R_1 \wedge (z, y) \in R_2 \xRightarrow{\text{з симетричності } R_1 і R_2}$

$\Rightarrow (z, x) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2 \Rightarrow (y; x) \in R_2 \circ R_1 \xRightarrow{\text{з симетричності } R_2 \circ R_1}$

$\Rightarrow (x, y) \in R_2 \circ R_1$

2) $\forall (x, y) \in R_1 \circ R_2 \xRightarrow{R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1} (x, y) \in R_2 \circ R_1 \Rightarrow (y, x) \in R_1 \circ R_2$

$\Rightarrow R_1 \circ R_2$ - симетричне

Scanned with CamScanner

11) Нехай R^+ - транзитивне замикання R на M, R - транзитивне, $a_1 R a_2, a_2 R a_3, \dots, a_{k-1} R a_k \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 R a_k \xRightarrow{a_1 R^+ a_k} R = R^+$

12) $f \subseteq A \times B$, $g \subseteq B \times C$ - сюр'єкції, $f \circ g \subseteq A \times C$ - сюр'єкція?

$\forall (x,y) \in f \circ g \Rightarrow (x,z) \in f \wedge (z,y) \in g \xRightarrow{f \text{ і } g \text{ - сюр'єкції}}$

$\Rightarrow \exists x : (x,z) \in f$ і $\exists z : (z,y) \in g \Rightarrow \exists x : (x,y) \in f \circ g$

14) а) C_1, C_3, C_4

б) C_2, C_3, C_4

в)

г)

д) C_3, C_4

15) R - відн. екв., а) $(x,y) \in R$, б) $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, в) $[x]_R = [y]_R$

б) $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$: $\exists z \in [x], z \in [y] \Rightarrow xRz, yRz \Rightarrow$

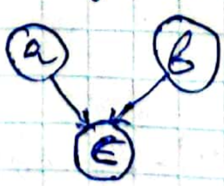
$\xRightarrow{R\text{-симетричне}} xRz, zRy \xrightarrow{R\text{-транзитивне}} xRy \Rightarrow$ а) $(x,y) \in R$

в) $[x]_R = [y]_R$: $v \in [x] \Rightarrow xRv, xRy \xRightarrow{R\text{-симетричне}} yRx, xRv \Rightarrow$

$\xRightarrow{R\text{-транзитивне}} yRv \Rightarrow v \in [y] \Rightarrow [x] = [y]$

16) $A = \{a, b, c, d\}$

Нехай на множині задане відношення ділиться націло. Тоді a ділить c і b ділить c.



17) Нехай задано відношення ділимості націло на множині $A = \{2, 4, 5, 6\}$. Таким чином 2-мінімальний, але найменшого нема.

18) R, Q - часткові порядки, $R \cap Q$ - частковий - ?

Рефлексивність: $\forall (x,y) \in R \cap Q \Rightarrow (x,y) \in R \wedge (x,y) \in Q \Rightarrow$

R, Q - рефлексивні

$\Rightarrow (x,x) \in R \wedge (x,y) \in Q \Rightarrow (x,x) \in R \cap Q$

Антисиметрія: $\forall (x,y) \in R \cap Q \wedge (y,x) \in R \cap Q \Rightarrow$ R, Q - антисим.

$\Rightarrow ((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R) \wedge ((x,y) \in Q \wedge (y,x) \in Q) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y$

Транзитивність: $\forall (x,z) \wedge (z,y) \in R \cap Q \Rightarrow$

$\Rightarrow ((x,z) \in R \wedge (z,y) \in R) \wedge ((x,z) \in Q \wedge (z,y) \in Q) \Rightarrow$ R, Q - транз.

$\Rightarrow (x,y) \in R \wedge (x,y) \in Q \Rightarrow (x,y) \in R \cap Q$

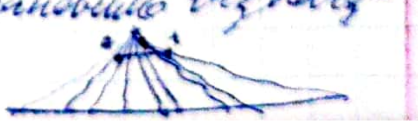
Отже, $R \cap Q$ також відношення часткового порядку.

19) N^2, N - натуральні числа

Відношення $\leq$: $(a,b) \leq (c,d)$, $a \leq c$, $b \leq d$

20) $I = \mathbb{R} \setminus Q$ - континуум, $\mathbb{R}$ - континуум, Q - зліченна множина (з будь-якого континууму можна вилучити зліченну множину).

21) Нехай відрізку $[0,1]$ належать числа: $a_0, a_1, \ldots, a_k$, причому дійсні числа $b_0, b_1, \ldots, b_k$. Встановимо відповідність $(a_0,b_0), (a_1,b_1), \ldots, (a_k,b_k)$ - бієкція



22) Нехай $a_1, a_2, \dots, a_k$ і $b_1, b_2 \dots b_k \in \mathbb{R}$, числа $a_1, a_2, \dots, a_k$ належать $[0;1]$, а $0, b_1, b_2, \dots, b_k, 1 \in (0,1)$.
Встановимо відповідність: $(0, a_1), (b_1, a_2) \dots (1\ a_k)$.

23) Доведемо $f(A) \neq \beta(A)$ від протилежного
Припустимо, що $f(A)=\beta(A)$, тоді $f(A) = A \times \beta(A) = \beta(A)$, але $A \times \beta(A) \neq \beta(A)$, тому $f(A) \neq \beta(A)$
Доведемо $|f(A)| < |\beta(A)|$ і з теореми Кантора маємо, що $|A| < |\beta(A)|$, крім того $|f(A)| \leq |A| \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(A)| < |\beta(A)|$.

24) Нехай $\exists f: [0;1] \to \mathbb{R}$ - це біекція з $[0;1]$ на $\mathbb{R}^{[0;1]}$
Розглянемо $g(x) = (f(x))(x)+1$, $x \in [0;1] \Rightarrow f \in \mathbb{R}^{[0;1]}$
тоді $\exists x_0 \in [0;1]: g = f(x_0) \Rightarrow g(x_0) = f(x_0)(x_0)+1$
Оскільки потужність всіх функцій дійсного аргументу з однією точкою розриву більша за континуум, тоді й потужність всіх функцій більша.

25. а) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

б) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

в) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$

г) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$

д) $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

е) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$

26. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $|A| = n$, $|\beta(A)| = 2^{|A|}$???

27. $N\{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$, $Z\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$

Взаємооднозначна відповідність – бієкція

$R = \{(1;0), (2;1), (3;-1), (4;2), (5;-2), \ldots\}$

28) Нехай A, B, C, D... – континуальні

$A \cup B \Leftrightarrow (0,1) \cup (1,2) \Leftrightarrow$ за лемою про об'єднання $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0,1) \cup \{1\} \cup (1,2) \Leftrightarrow (0;2) \Leftrightarrow (0;1) \Rightarrow A \cup B$ - континуальні

$A \cup B \cup C \Leftrightarrow (0;1) \cup (1;2) \Leftrightarrow (0;1) \cup \{1\} \cup (1;2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0;2) \Leftrightarrow (1;2)$ і так далі для $A \cup B \cup C \cup D \cup ...$

де к-сть об'єднань злічена.

29) Якщо $A = B$, тоді $A \sim B$

Нехай $A = B = (0;1)$, тоді $|\beta(A)| = |\mathbb{R}| \wedge |\beta(B)| = |\mathbb{R}| \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta(A) = \beta(B) \Rightarrow A \sim B$

б) Ні, тому що

Нехай $A = (0,1)$, $B = (1,2)$, тоді $|\beta(A)| = |\mathbb{R}| \wedge$

$\wedge |\beta(B)| = |\mathbb{R}| \Rightarrow A \sim B$, але $(0,1) \neq (1,2) \Rightarrow A \neq B$

30) Нехай A і B - злічені; $A = \{a_1, a_2, a_3 ...\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3 ...\}$

Тоді $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) ...\}$. Таким чином, множина пар злічена, очевидно, що $A \times B$ - злічена.

51) $\forall (x, x) \in R \Rightarrow (x, x) \in R \circ R \Rightarrow R \circ R = R$