Варіант 6

1. Корені рівняння $x^2 - 2\operatorname{tg}2 \cdot x + e = 0$ необхідно обчислити з трьома правильними цифрами. Скільки правильних значущих цифр треба взяти для $\operatorname{tg}2$ і e?

2. Знайти апріорну оцінку кількості кроків при знаходженні найменшого кореня нелінійного рівняння

$$x^2 \lg x - 1 = 0$$

методом дихотомії з точністю $\varepsilon = 0,01$. Намалювати геометричну інтерпретацію методу.

3. Зробити дві ітерації методом Якобі для знаходження розв'язку

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Перевірити умову припинення, $\varepsilon = 0.01$. Перевірити достатню умову збіжності.

4. Побудувати інтерполяційний многочлен у формі Лагранжа та наближено обчислити значення функції $y = \sin(\pi x)$ при $x = 1/3$ та оцінити похибку. Для побудови використати три вузли $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/2$.

5. Наближено обчислити інтеграл $\int\limits_{-3}^{1} \frac{dx}{-2+x}$ методом трапецій з точністю $0,1$ використовуючи оцінку залишкових членів.

Варіант 6

1. $x^2 - 2\,tg\,2 \cdot x + e = 0$

Нехай $a = 1$, $b = -2\,tg\,2$, $c = e$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial c} \cdot \Delta c\right)^2}$, де

$\frac{\partial x}{\partial b} = -\frac{1}{2}$; $\frac{\partial x}{\partial c} = -\frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$; $b^2 - 4ac > 0$

$\delta\, tg\, 2 = \frac{\Delta b}{2}$, $\Delta e = \Delta c$

$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right)^2} < 0,5 \cdot 10^{-3}$

$tg\, 2 \approx 2,185$, $e \approx 2,718 \Rightarrow b = -4,37$, $c = 2,718$

$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(-4,37)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2,718} = \sqrt{8,228} \approx 2,866$

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{3{,}868}\right)^2} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$$

Вважаємо, що внесок похибок рівний $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta b = \Delta c \approx 0{,}7 \cdot 10^{-3}$

Отже,

$\Delta(\operatorname{tg} 2) \approx 0{,}35 \cdot 10^{-3}$

$\Delta(e) \approx 0{,}4 \cdot 10^{-3}$

Тобто, $\operatorname{tg} 2$ та e потрібно обчислити з 4 числами після коми:

$\operatorname{tg} 2 = 2{,}1850$

$e = 2{,}7180$

2. $x^2 \lg x - 1 = 0$, $\varepsilon = 0{,}01$

$x > 0$ ($\lg x$ визначений лише для $x > 0$)

Нехай $a = 0{,}1$, $b = 2$, тоді:

$f(0{,}1) = (0{,}1)^2 \lg(0{,}1) - 1 = -1{,}02 \Rightarrow$

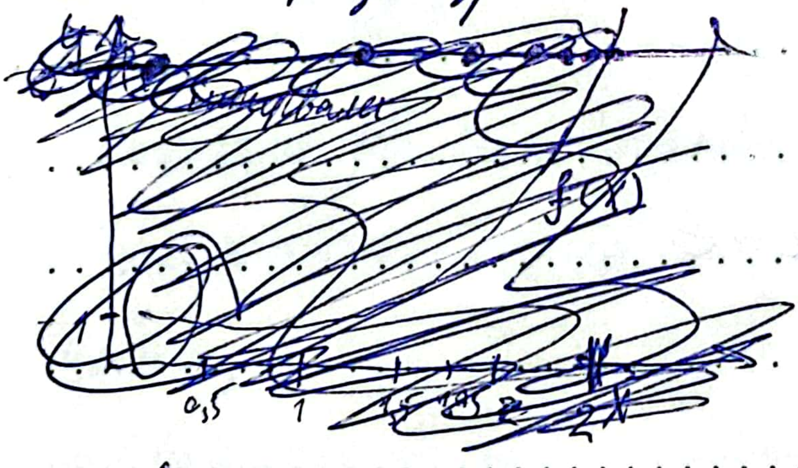
$f(2) = 2^2 \lg(2) - 1 \approx 0{,}204$

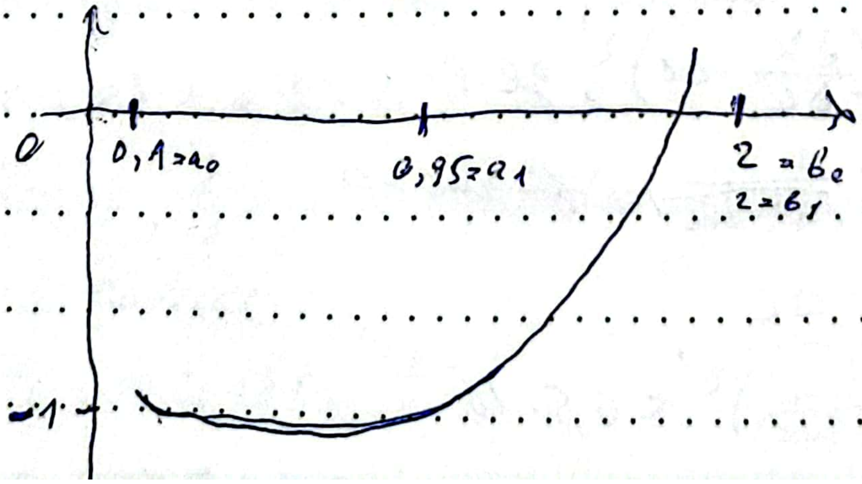
$\Rightarrow f(a) f(b) < 0 \Rightarrow$ корінь знаходиться в інтервалі $[0{,}1; 2]$

$$n \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) = \log_2\left(\frac{2-0{,}1}{0{,}01}\right) = \log_2(190)$$

$$\log_2 190 \approx \frac{\ln 190}{\ln 2} = \frac{5{,}247}{0{,}693} \approx 7{,}57$$

$n = 8$ ітерацій





3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\varepsilon = 0,01$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} |2| \geq |-1| + |0| \\ |-3| \geq |1| + |1| \\ |3| \geq |0| + |1| \end{array}$ $\Rightarrow$ метод Якобі збігається

$x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - 4)$ $x_1^{k+1} = \frac{1}{2}(x_2^k - 4)$

$x_2 = \frac{1}{3}(x_1 + x_3 + 2)$ $x_2^{k+1} = \frac{1}{3}(x_1^k + x_3^k + 2)$

$x_3 = \frac{1}{3}x_2$ $x_3^{k+1} = \frac{1}{3}x_2^k$

Крок 1

$x^0 = (0; 0; 0)^T$

$x_1^1 = 1/2(0 - 4) = -2$

$x_2^1 = 1/3(0 + 0 + 2) = 0,67$

$x_3^1 = 1/3 \cdot 0 = 0$

$\|x^1 - x^0\| = \|(-2; 0,67; 0)^T - (0; 0; 0)^T\|_\infty = 2 > \varepsilon$

Крок 2

$x_1^2 = 1/2(0,67 - 4) = -1,665$

$x_2^2 = 1/3(-2 + 0 + 2) = 0$

$x_3^2 = 1/3 \cdot 0,67 = 0,22$

$\|x^2 - x^1\| = \|(-1,665; 0; 0,22)^T - (-2; 0,65; 0)^T\| = 0,67 > \varepsilon$

4. $y = \sin(\pi x)$, $x = \frac{1}{3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$

Оскільки у нас 3 вузли, то степінь поліному буде не вище 2; $n = 2$. Знайдемо значення ф-ції у вузлах:

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	0
1	1/6	1/2
2	1/2	1

$$L_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} +$$

$$+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = 0 \cdot \frac{(x-1/6)(x-1/2)}{(0-1/6)(0-1/2)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-0)(x-1/6)}{(1/6-0)(1/6-1/2)} + 1 \cdot \frac{(x-0)(x-1/6)}{(1/2-0)(1/2-1/6)} = -3x^2 + \frac{7}{2}x$$

$$L_2\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \frac{1}{3}^2 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \approx 0,833$$

Отже, $f(x) \approx -3x^2 + \frac{7}{2}x$; $f\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,833$ //

5. $\int\limits_{-3}^{1} \frac{dx}{-2+x}$, $\varepsilon = 0,1$

$h \le \sqrt{\frac{12\varepsilon}{M_2(b-a)}}$

$M_2 = \max\limits_{x\in[-3;1]} \left|\frac{2}{(-2+x)^3}\right| = 2$; $h \le \frac{12\cdot 0,1}{2(1+3)} = 0,15$

Отже, покладемо крок $h = 0,15$ і складемо табл. значень:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x_k	−3	−2,85	−2,7	−2,55	−2,4	−2,25	−2,1	−1,95	−1,8	−1,65	−1,5	−1,35	−1,2	−1,05	−0,9	−0,75	−0,6
$f(x_k)$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4,85}$	$-\frac{1}{4,7}$	$-\frac{1}{4,55}$													

k	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
x_k	−0,45	−0,3	−0,15	0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9	1
$f(x_k)$											

(для зручності краще було покласти $h = 0,1$) !!!

$I \approx 0,15\cdot\left(-\frac{1}{10} - \frac{1}{4,85} - \frac{1}{4,7} - \frac{1}{4,55} - \frac{1}{4,4} - \ldots - \frac{1}{1,6} - \frac{1}{1,75} - \frac{1}{1,9} - \frac{1}{2}\right) \approx$

$\approx -1,659$