Вербицький Артем ІПС-21 КР №2 Варіант 1

1. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in(0,\frac{\pi}{2}],\\ 0, & x\notin(0,\frac{\pi}{2}]\end{cases}$

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\,du=\begin{cases}\int\limits_0^x \cos x\,du, & x\in(0,\frac{\pi}{2}]\\ 0, & x\le 0\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}=\begin{cases}1, & x>\frac{\pi}{2}\\ x\cos x, & x\in(0;\frac{\pi}{2}]\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

2. $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0,\ \theta>0\\ 0, & x<0\end{cases}$, $\hat\theta=\frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n}$

1. $M\hat\theta = M\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{n}=\theta \Rightarrow$ перший наслідок з нерівності Крамера-Рао

2. $D\hat\theta = D\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D\xi_i=\frac{n\,[illegible]}{n^2}=\frac{[illegible]}{n}$

3. Шукаємо к-сть інформації по Фішеру

$L(x,\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}$

$\ln L(x,\theta)=-n\ln\theta-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\theta}$

$\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n\theta}{\theta^2}$

$I(\theta)=-M\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L(\xi,\theta)=M\,[illegible]=M\left(\frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{\theta^3}-\frac{n}{\theta^2}\right)=$

$=\frac{n}{[illegible]}$

4. $D\hat\theta=(I(\theta))^{-1}$, отже оцінка є ефективною.

3. $f(x,\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{1}{\theta}|x|}$, $x\in\mathbb{R}$

$\alpha_1=M\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2\theta}e^{-\frac{1}{\theta}|x|}dx=0\Rightarrow$ перший момент не є ф-єю від θ

$\alpha_2=M\xi^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2\theta}e^{-\frac{1}{\theta}|x|}dx=\frac{1}{6\theta^2}\Rightarrow \alpha_2=\alpha_2(\theta)$

$\frac{1}{6\theta^2}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\Rightarrow\hat\theta=\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}}$

1) ЗВЧ $\quad M\xi^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{2\theta}e^{-\frac{1}{\theta}|x|}dx=\frac{1}{6\theta^2}$, $n\to\infty$

2) Суперпозиція

$\hat\theta=\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2}}\xrightarrow{P}\frac{1}{\sqrt{6M\xi^2}}=\frac{1}{\sqrt{6\frac{1}{6\theta^2}}}=\theta$, $n\to\infty$

Отже, оцінка є конзистентною.

4. $\xi - [-2;2]$, $\eta - [-4;4]$, $2\xi + \eta$

$$f_{2\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x \in [-4;4] \\ 0, & x \notin [-4;4] \end{cases} \qquad f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & y \in [-4;4] \\ 0, & y \notin [-4;4] \end{cases}$$

$$f_{2\xi-\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{2\xi}(z+y) f_\eta(y)\,dy = \int_{-4}^{4} f_{2\xi}(z+y) f_\eta(y)\,dy = \left| \begin{matrix} z+y=u \\ dy=du \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-4+z}^{4+z} f_{2\xi}(u)\,du = \begin{cases} 0, & z \in (-\infty;-8] \cup (8;\infty) \\ \frac{8+z}{16}, & z \in (-8;0] \\ \frac{8-z}{16}, & z \in (0;8] \end{cases}$$

1) $4+z \le -4 \Rightarrow z \le -8$, $f_{2\xi-\eta}(z) = 0$;

2) $-4+z > 4 \Rightarrow z > 8$, $f_{2\xi-\eta}(z) = 0$;

3) $\begin{cases} 4+z > 4, & z > 0 \\ -4+z \le 4, & z \le 8 \end{cases} \Rightarrow z \in (0;8]$

$$f_{2\xi-\eta}(z) = \frac{1}{16}\int_{-4+z}^{4} du = \frac{8-z}{16};$$

4) $\begin{cases} 4+z < -4, & z \le 0 \\ 4+z > -4, & z > -8 \end{cases} \Rightarrow z \in (-8;0]$

$$f_{2\xi-\eta}(z) = \frac{1}{16}\int_{-4}^{4+z} du = \frac{8+z}{16}$$