Модульна робота (Вербицький А. В.)

Варіант 2

1. $f(x) = \log_a x$

За означенням, якщо f диференційовна в точці x_0, то:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a} //$$

2. $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Якщо функція неперервна в точці $y_0 \Rightarrow f^{-1}$ диференційовна в точці y_0. Якщо y_0 – гранична точка множини $E_f = D_{f^{-1}}$, то, згідно означення похідної:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow \operatorname{tg} y = x$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) =$$

$$= \cos^2\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 = \frac{1}{x^2+1} //$$

3. $f(x)=(1+\sin x)^{\cos x}$, $n=5$

Формулою Маклорена називають формулу Тейлора, що має вигляд $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$, якщо $x_0=0$.

$(1+\sin x)^{\cos x}=1+\cos x\sin x+\frac{\cos x(\cos x-1)}{2}\sin x+o(x^5)=$

$=1+\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)\left(1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}\right)+\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)}{2}\cdot\left(1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}\right)^2=$

$=1+x-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{13x^5}{60}+o(x^5)$

4. $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$

Точки в яких $f'(x)=0$ називаються стаціонарними.

Якщо при переході через стаціонарну або критичну (в якій похідна не існує) точку похідна функції змінює знак, то точка є екстремумом ($\max$ при $x<x_0: f'(x)>0$ та $x>x_0: f'(x)<0$, $\min$ при $x<x_0: f'(x)<0$ та $x>x_0: f'(x)>0$).

$f'(x)=1-\frac{2}{x^3}$

$x=\sqrt[3]{2}$ - критична точка

Розглянемо проміжки $(0,\sqrt[3]{2})$ та $(\sqrt[3]{2},+\infty)$

$f'(x)$	$-$	нема	$+$
x		$\sqrt[3]{2}$	

Тобто на $(0,\sqrt[3]{2})$ функція спадає, на $(\sqrt[3]{2},+\infty)$ - зростає

Точка $x=\sqrt[3]{2}$ - це локальний мінімум