Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Постановка задачі

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Ax = b,$$

де A – матриця розмірності $n \times n$, $det A \neq 0$, отже розв'язок системи існує і він єдиний.

Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь поділяються на прямі та ітераційні:

1) прямі методи:
   - метод Гаусса з вибором головного елемента,
   - метод квадратних коренів,
   - метод прогонки;
2) ітераційні методи:
   - метод Якобі,
   - метод Зейделя.

Прямі методи застосовують для матриць невеликої розмірності $n < 10^2$, а ітераційні для розріджених матриць, чи коли $n > 10^2$. Матрицю назвемо розрідженою, якщо вона має достатньо багато нулів.

Прямі методи

Метод Гауса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{1(n+1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{2(n+1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = a_{n(n+1)} \end{cases}$$

$$a_{i(n+1)} = b_i, \quad i = \overline{1, n}$$

$$a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \ k = \overline{1, n}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}, \ j = \overline{k+1, n+1}$$

$$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \qquad\qquad i = \overline{k+1, n}$$

$$\begin{cases} x_1 + & a_{12}^{(1)}x_2 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1(n+1)}^{(1)} \\ & a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2(n+1)}^{(1)} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & a_{n2}^{(1)}x_2 + ... + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{n(n+1)}^{(1)} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + ... + a_{1n}^{(1)} x_n = & a_{1(n+1)}^{(1)} \\
\qquad x_2 + ... + a_{2n}^{(2)} x_n = & a_{2(n+1)}^{(2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\qquad\qquad x_n = & a_{n(n+1)}^{(n)}
\end{cases}
$$

Метод Гауса

Прямий хід

$a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$, $k = \overline{1, n}$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)},$$

$$j = \overline{k+1, n+1}, \quad i = \overline{k+1, n}$$

$$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$$

Зворотній хід

$x_n = a_{n(n+1)}^{(n)}$

$$x_i = a_{i(n+1)}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)},\ i = \overline{n-1, 1}$$

$$x_n = a_{n(n+1)}^{n}$$

$$x_i = a_{i(n+1)}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)},\ i = \overline{n-1, 1}$$

Метод Гауса з вибором головного

Для зменшення обчислювальної похибки в методі Гаусса використовують вибір головного елементу:

1) по стовпцях,

2) по рядках,

3) за всією матрицею.

1) $|a_{kj_0}^{(k-1)}| = \max_{j} |a_{kj}^{(k-1)}|, \quad j = \overline{k, n}$

2) $|a_{i_0k}^{(k-1)}| = \max_{i} |a_{ik}^{(k-1)}|, \quad i = \overline{k, n}$

3)Вибір головного елемента за всією матрицею

P_{kl} - матриця перестановок, що утворюється з одиничної матриці за допомогою перестановки рядків k та l

1) $AP_{kl} = ?$

2) $P_{kl}A = ?$

Метод Гауса з вибором головного в матричному вигляді

Нехай P_i - матриця перестановок на i кроці.

$A_k = M_k P_k A_{k-1}$ $\qquad\qquad i = \overline{k+1, n}$

Введемо позначення

$$A_k = \{a_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{m}, \quad A = A_0$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{kk} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & m_{(k+1)k} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{nk} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{kk} = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

$$m_{ik} = \frac{-a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Метод Гауса (по стовпцях)

$Ax = b$

$P_1 A x = P_1 b$

$M_1 P_1 A x = M_1 P_1 b$

$P_2 M_1 P_1 A x = P_2 M_1 P_1 b$

....

$M_n P_n ... M_2 P_2 M_1 P_1 A x = M_n P_n ... M_2 P_2 M_1 P_1 b$

Введемо позначення $M = M_n P_n ... M_2 P_2 M_1 P_1$. Попередню рівність запишемо так:

$$MAx = Mb,$$

де M – нижня трикутня матриця, $MA = U$ – верхня трикутня матриця з одиничної головною діагоналлю. Отже метод Гаусса базується на можливості розкласти матрицю A на дві трикутні матриці.

Теорема. Нехай усі гололвні мінори матриці A відмінні від нуля. Тоді матрицю A можна подати як добуток

$$A = LU,$$

де L – нижня трикутня матриця з ненульовими діагональними елементами, U – верхня трикутня матриця з одиничною діагоналлю.

$$L = M^{-1}.$$

Складність методу Гаусса $Q(n) = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$

В результаті одержимо СЛАР в такому вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = & a_{1(n+1)} \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = & a_{2(n+1)}^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = & a_{n(n+1)}^{(n-1)} \end{cases}$$

Визначник

$detA = (-1)^l a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} ... a_{nn}^{(n-1)}$

Знаходження оберненої матриці A^{-1} методом Гаусса з вибором головного елементу

$$A, \; detA \neq 0$$

Із означення оберненої матриці маємо:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Позначимо:

$$X = A^{-1}$$

Для знаходження оберненої матриці X маємо матричне рівняння

$$AX = E$$

$$X = \{x_i\}_{i=1}^n,\ E = \{e_i\}_{i=1}^n,$$

або

$$Ax_i = e_i,\ i = \overline{1,n}$$

Нехай

$$A = LU,$$

де U – верхня трикутна матриця на діагоналі – 1, L – нижня трикутна матриця. Тоді

$$LUx_i = e_i,\ i = \overline{1,n},$$

Позначимо

$$Ux_i = y_i,\ i = \overline{1,n}$$

Тоді

$$Ly_i = e_i,\ i = \overline{1,n}$$

З останніх систем знайдемо вектори $y_i,\ i = \overline{1,n}$ та перейдемо до розв'язання таких систем:

$$Ux_i = y_i,\ i = \overline{1,n}$$

Звідки одержимо вектори $x_i,\ i = \overline{1,n}$, які є стовпцями оберненої матриці:

$$A^{-1} = X = \{x_i\}_{i=1}^n.$$

$$Q(n) = 2n^3 + O(n^2)$$

Приклад

Знайти розв'язок системи методом Гауса з вибором головного по стовпцях. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язок

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overline{A_0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ \boxed{3} & 5 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1\overline{A_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A_1} = M_1 P_1 \overline{A_0} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 5/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overline{A_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{5/3} & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad P_2 = E \qquad P_2\overline{A_1} = \overline{A_1}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A_2} = M_2 P_2 \overline{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 5/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4/5} & 0 \end{array}\right)$$

$$P_3 = E \qquad P_3\overline{A_2} = \overline{A_2} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A_3} = M_3 P_3 \overline{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overline{A_3} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = 0$

$x_2 = 0 - 3/5x_3 = 0$

$x_1 = 1 - 5/3x_2 - 2x_3 = 1$

$$\overline{A_0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ \boxed{3} & 5 & 6 & 3 \end{array}\right) \qquad \overline{A_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{5/3} & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overline{A_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4/5} & 0 \end{array}\right) \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2, P_3 = E \Rightarrow DetA = (-1)^1 \cdot 3 \cdot 5/3 \cdot 4/5 = -4$

<u>Метод квадратного кореня</u>

$A = A^T \qquad \Rightarrow \qquad A = S^T DS$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & ... & s_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & s_{nn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \pm 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Ідея методу квадратного кореня

$Ax = b, \quad A = S^T DS \quad \Rightarrow$

$S^T DSx = b$

Позначимо $Sx = y$.

Тоді одержимо систему $S^T Dy = b$.

Розв'язвши яку дістанемо y.

На другому кроці із системи $Sx = y$ знайдемо x.

І в першому , і в другому випадках маємо трикутні матриці, отже потрібно виконувати лише зворотній хід – перевага.

Потрібно побудувати матриці S та D.

Нехай $S = (s_{ij})_{i,j=1}^n, \; D = (d_{ii}\delta_{ij})_{i,j=1}^n$,

δ_{ij} – символ Кронекера.

Тоді

$$(DS)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} s_{ki}$$

,

$$(S^T DS)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}^T d_{kk} s_{kj} = \sum_{k=1}^{n} s_{ki} d_{kk} s_{kj} = a_{ij}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} d_{kk} s_{kj} + s_{ii} s_{ij} d_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} s_{ki} d_{kk} s_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} d_{kk} s_{kj} + s_{ii} s_{ij} d_{ii} = a_{ij}$$

Нехай $i = j$

$$s_{ii}^2 d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2 d_{kk}$$

Покладемо

$$d_{ii} = sign(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2 d_{kk})$$

.

Тоді

$$s_{ii} = \sqrt{(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2 d_{kk})}$$

Формули методу квадратного кореня

$$d_{11} = sign(a_{11})$$

$$s_{11} = \sqrt{|a_{11}|}$$

$$d_{ii} = \operatorname{sgn} \left| a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi}^2 d_{pp} \right| \qquad i = \overline{1, n}$$

$$s_{ii} = \sqrt{\left| a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi}^2 d_{pp} \right|} \qquad i = \overline{1, n}$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi} d_{pp} s_{pj}}{d_{ii} s_{ii}} \qquad i = \overline{2, n-1}$$

$$j = \overline{i+1, n}$$

Алгоритм методу квадратного кореня

1. Знаходимо розклад матриці $A = S^T DS$

2. Знаходимо розв'язо системи рівнянь $S^T Dy = b$.

3. Із системи $Sx = y$ знайдемо x.

Визначник

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & ... & s_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & s_{nn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \pm 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$detA = Det(S^T DS) = DetS^T \cdot DetD \cdot DetS \quad \Rightarrow$$

$$detA = \prod_{k=1}^{n} d_{kk} \prod_{k=1}^{n} s_{kk}^2$$

Знаходження оберненої матриці A^{-1} методом квадратного кореня

$$A, \ detA \neq 0$$

Із означення оберненої матриці маємо:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Позначимо:

$$X = A^{-1}$$

Для знаходження оберненої матриці X маємо матричне рівняння

$$AX = E$$

$$X = \{x_i\}_{i=1}^n, \ E = \{e_i\}_{i=1}^n,$$

або

$$Ax_i = e_i, \ i = \overline{1, n}$$

Застосуємо до останніх систем метод квадратного кореня

$$A = S^T DS$$

$$Ax_i = e_i, \ i = \overline{1, n}$$

$$S^T DSx_i = e_i, \ i = \overline{1, n}$$

Позначимо

$$Sx_i = y_i,\ i = \overline{1,n}$$

Тоді

$$S^T D y_i = e_i,\ i = \overline{1,n}$$

$$Sx_i = y_i,\ i = \overline{1,n}$$

$$A^{-1} = X = \{x_i\}_{i=1}^n$$

Приклад

Знайти розв'язок системи методом квадратних коренів. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A = A^T \Rightarrow$ можна м.кв.к.

$$d_{11} = \operatorname{sgn}(a_{11}) = \operatorname{sgn}(1) = 1$$

$$s_{11} = \sqrt{|a_{11}|} = \sqrt{|1|} = 1$$

$$s_{12} = \frac{a_{12}}{d_{11}s_{11}} = \frac{2}{1 \cdot 1} = 2$$

$$s_{13} = \frac{a_{13}}{d_{11}s_{11}} = \frac{3}{1 \cdot 1} = 3$$

$$d_{22} = \operatorname{sgn}(a_{22} - s_{12}^2 d_{11}) = \operatorname{sgn}(5 - 2^2 \cdot 1) = \operatorname{sgn} 1 = 1$$

$$s_{22} = \sqrt{|a_{22} - s_{12}^2 d_{11}|} = \sqrt{|1|} = 1$$

$$s_{23} = \frac{a_{23} - s_{12}d_{11}s_{13}}{d_{22}s_{22}} = \frac{5 - 2 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 1} = -1$$

$$d_{33} = \operatorname{sgn}(a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}) =$$
$$= \operatorname{sgn}(6 - 3^2 \cdot 1 - (-1)^2 \cdot 1) = \operatorname{sgn}(-4) = -1$$

$$s_{33} = \sqrt{|a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}|} = \sqrt{|-4|} = 2$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S^T D y = b$$

$$S^T D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$S^T Dy = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 2 - 2y_1 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(3 - 3y_1 + y_2) = -\frac{1}{2}(3 - 3 \cdot 1 + 0) = 0$$

$Sx = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &2x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_3 = 0 \\ &x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 0 \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \quad \Rightarrow x_1 = 1 \end{aligned}\right\} x = (1; 0; 0)^T$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$DetA = \prod_{i=1}^{3} d_{ii} s_{ii}^2 = -1 \cdot 2^2 = -4$$

Метод прогонки

Нехай A – тридіагональна матриця. Розглянемо СЛАР $Ax = b$, або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} -c_0 y_0 + b_0 y_1 = -f_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad i = \overline{1, n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n y_{n-1} - c_n y_n = -f_n \end{cases}$$

Розв'язок системи шукаємо у вигляді

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1},$$

де

$$\alpha_{i+1},\ \beta_{i+1} \in R^1$$

.

Побудуємо формули для їх знаходження.

$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ підставимо в рівняння. Одержимо

$$a_i(\alpha_i y_i + \beta_i) - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i$$

$$y_i(a_i\alpha_i - c_i) = -f_i - a_i\beta_i - b_i y_{i+1}$$

$$y_i = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i} y_{i+1} + \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}$$

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$$

Порівняємо дві останні рівності. Одержимо

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{z_i} \qquad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{z_i}$$

$$i = \overline{1, n-1}$$

$$z_i = c_i - \alpha_i a_i$$

Для знаходження $\alpha_1,\ \beta_1$ скористаємось першим рівнянням:

$$y_0 = \frac{b_0}{c_0} y_1 + \frac{f_0}{c_0}$$

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$$

Одержимо

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0},\ \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}.$$

Для знаходження y_n скористаємось останнім рівнням

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n$$

$$a_n(\alpha_n y_n + \beta_n) - c_n y_n = -f_n$$

$$y_n(a_n\alpha_n - c_n) + a_n\beta_n = -f_n$$

$$y_n = \frac{f_n + a_n\beta_n}{c_n - a_n\alpha_n}$$

Метод прогонки

Прямий хід

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0} \qquad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{z_i} \qquad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{z_i}$$

$$i = \overline{1, n-1}$$

$$z_i = c_i - \alpha_i a_i$$

Зворотній хід

$$y_n = \frac{f_n + a_n\beta_n}{z_n} \qquad y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$$

$$i = \overline{n-1, 0}$$

Теорема про стійкість прогонки

Нехай $a_i, b_i, c_i \neq 0$; $i = \overline{1, n-1}$; $a_0, b_0 = 0$; $c_0, c_n \neq 0$

та виконуються нерівності

1) $|c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = \overline{0, n}$

2) $\exists\ i : |c_i| > |a_i| + |b_i|$

Тоді

$|\alpha_i| \leq 1, \quad |z_i| > 1, \quad i = \overline{1, n}$

Визначник

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -c_n \end{pmatrix} \sim \qquad \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0} \qquad z_i = c_i - \alpha_i a_i$$

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 + (-c_0)\frac{a_1}{c_0} & -c_1 + b_0\frac{a_1}{c_0} & b_1 + 0\frac{a_1}{c_0} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -c_n \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -z_1 & b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -c_n \end{pmatrix} \sim \qquad \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{z_i} \qquad z_i = c_i - \alpha_i a_i$$

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -z_1 & b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 + (-z_1)\frac{a_2}{z_1} & -c_2 + b_1\frac{a_2}{z_1} & b_2 + 0\frac{a_2}{z_1} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -c_n \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -z_1 & b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -z_2 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -c_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -z_1 & b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -z_2 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -z_n \end{pmatrix}$$

$$detA = -c_0 \cdot (-z_1) \cdot ... \cdot (-z_n)$$

Приклад

Знайти розв'язок системи методом прогонки. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Розв'язок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A - тридіаг. $\Rightarrow$
можна м.прог.

$$\left.\begin{array}{l} |1| \geq |1| \\ |3| \geq |1| + |2| \\ |2| > |1| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{метод стійкий}$$

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\beta_1 = \frac{f_0}{c_0} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$z_1 = c_1 - \alpha_1 a_1 = -3 - (-1) \cdot 1 = -2$$

$$\alpha_2 = \frac{b_1}{z_1} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\beta_2 = \frac{f_1 + a_1\beta_1}{z_1} = \frac{-1 + 1 \cdot 1}{-2} = 0$$

$$z_2 = c_2 - \alpha_2 a_2 = -2 - (-1) \cdot 1 = -1$$

$$y_2 = \frac{f_2 + a_2\beta_2}{z_2} = \frac{-1 + 1 \cdot 0}{-1} = 1$$

$$y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2 = -1 \cdot 1 + 0 = -1$$

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 = -1 \cdot (-1) + 1 = 2$$

$$y = (2; -1; 1)^T$$

$$DetA = -c_0 \cdot (-z_1) \cdot (-z_2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$