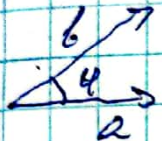
Контрольна робота з алгебри та геометрії
студента 1 курсу ФКНК групи ІПЗ-11
Вербицького Артема

Варіант 1

1. Нехай $\bar{a} \neq \bar{o}$, $\bar{b} \neq \bar{o}$, що виходять з однієї точки, $\varphi$ - кут між цими векторами




Означення. Скалярним добутком $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається число $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$.

Скалярний добуток можна виразити через проекції $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}|\, пр_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}|\, пр_{\bar{b}} \bar{a}$.

Для будь-якого $\bar{a}$: $(\bar{a}, \bar{o}) = 0$.

Для $\bar{a} \neq \bar{o}$, $\bar{b} \neq \bar{o}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $\cos\varphi = 0 \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = 0$, тобто якщо $\bar{a} \perp \bar{b}$, то їхній скалярний добуток дорівнює 0.

Властивості:

1. $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$ - комутативність
2. $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c})$ - асоціативність
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}: (\bar{a}, \alpha\bar{b}) = \alpha(\bar{a}, \bar{b})$
4. $(\bar{a}, \bar{a}) \geq 0$; $(\bar{a}, \bar{a}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{o}$

Нехай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задаються координатами в деякій ДПСК:

$\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$

Якщо $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - одиничні вектори на осях координат, то

$\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$

Знайдемо скалярний добуток $(\bar{a}, \bar{b})$, при цьому враховуємо, що $(\bar{i}, \bar{i}) = |\bar{i}|^2 = 1$; $(\bar{j}, \bar{j}) = |\bar{j}|^2 = 1$; $(\bar{k}, \bar{k}) = |\bar{k}|^2 = 1$;

$(\bar{i}, \bar{j}) = |\bar{i}||\bar{j}| \cos\frac{\pi}{2} = 0$; $(\bar{i}, \bar{k}) = 0$; $(\bar{j}, \bar{k}) = 0$.

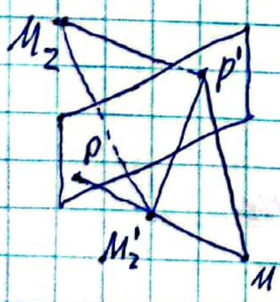
Тоді $(\bar{a}, \bar{b}) = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}, x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) =$
$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Таким чином, щоб скалярно перемножити 2 вектори, задані в координатній формі, треба додати добутки відповідних координат.

$(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2 \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$(\bar{a}, \bar{a}) = x^2 + y^2 + z^2$

2. $P \in Oxz$, $M_1(3; 2; -5)$, $M_2(8; -4; -13)$



$2 > 0$, $-4 < 0 \Rightarrow M_1$ і $M_2$ – по різні сторони від $Oxz$

$M_2'$ симетрична $M_2$ відносно $Oxz$, $M_2'(8; 4; -13)$

$\forall P' \in Oxz : M_2P' = M_2'P'$

<u>З трикутника $M_1P'M_2'$:</u> $\forall P' \in Oxz \setminus \{P\} : M_2'P' < M_1M_2' + M_1P'$

$M_1P' < M_1M_2' + M_2'P'$

$M_2'P' - M_1P' < M_1M_2'$

$M_1P' - M_2'P' < M_1M_2'$

$|M_2'P' - M_1P'| < M_1M_2'$

Для $P \in Oxz$, $P = Oxz \cap M_1M_2'$: $|M_2'P| - |M_1P| = M_1M_2'$

Отже, $P = Oxz \cap M_1M_2'$ - шукане, $\overline{M_1M_2'} = \{5; 2; -8\}$

$\begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = 2t + 2 \\ z = -8t - 5 \end{cases}$ $y = 0 \Rightarrow t = -1$ $\begin{matrix} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{matrix}$

$\boxed{P(-2; 0; 3)}$

3. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow a^2 = 18,\ b^2 = 8$, $M_1 \in$ еліпс

$2x - 3y + 25 = 0$

$2x - 3y + 25 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{25}{3} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

Як ми доводили в одній із задач, пряма дотична до еліпса при рівності:

$m^2 = a^2k^2 + b^2$

$m^2 = \frac{4}{9} \cdot 18 + 8 \Rightarrow m_{1,2} = \pm 4$

1) $y = \frac{2}{3}x + 4 \Rightarrow \boxed{2x - 3y + 12 = 0}$ - дотичні еліпса паралельні

2) $y = \frac{2}{3}x - 4 \Rightarrow \boxed{2x - 3y - 12 = 0}$ до даної прямої

Знаходимо точки дотику дотичних і еліпса:

1) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1 \mid \cdot 72$

$4x^2 + 9y^2 - 72 = 0$

$4x^2 + 9(\frac{2}{3}x + 4)^2 - 72 = 0$

$4x^2 + 4x^2 + 48x + 144 - 72 = 0$

$8x^2 + 48x + 72 = 0 \mid : 8$

$x^2 + 6x + 9 = 0$ $(x+3)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -3}$

Scanned with CamScanner

$y = \frac{2}{3}x + 4 = -2 + 4 = 2$ $\boxed{y_1 = 2}$

Друга точка симетрична – $\boxed{x_2 = 3}$ $\boxed{y_2 = -2}$

Відстань від цих точок до прямої $2x - 3y + 25 = 0$:

$d_1 = \frac{|-6-6+25|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow M_1$ найближча точка

$d_2 = \frac{|6+6+25|}{\sqrt{13}} = \frac{37}{\sqrt{13}}$

$\boxed{M_1(-3; 2)}$ $\boxed{d = \sqrt{13}}$

4. $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$

$\delta = 29 \cdot 36 - 12^2 > 0$ – еліптичного виду

$\begin{cases} 29x_0 - 12y_0 + 41 = 0 \mid \cdot 3 \\ -12x_0 + 36y_0 - 48 = 0 \end{cases} +$

$75x_0 + 75 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \tilde{x} - 1 \\ y = \tilde{y} + 1 \end{cases}$

$29(\tilde{x}-1)^2 - 24(\tilde{x}-1)(\tilde{y}+1) + 36(\tilde{y}+1)^2 + 82(\tilde{x}-1) - 96(\tilde{y}+1) - 91 = 0$

$\underline{29\tilde{x}^2 - 24\tilde{x}\tilde{y} + 36\tilde{y}^2 - 180 = 0}$

$-12\,tg^2\alpha - 7\,tg\,\alpha + 12 = 0$

$tg\,\alpha_1 = -\frac{3}{4}$, $tg\,\alpha_2 = \frac{4}{3}$ – обираю цей

$\sin\alpha = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$ $\cos\alpha = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$

$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' \\ \tilde{y} = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \end{cases}$

$$29\left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'\right)^2 - 24\left(\frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'\right)\left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'\right) + 36\left(\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'\right)^2 - 180 = 0$$

$$20x'^2 + 45y'^2 - 180 = 0;$$

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$ — еліпс