(2) $A, B, \neg C \vdash \neg((A \wedge B) \to C)$

За лемою:

$A, B \vdash (A \wedge B)$

$A \wedge B, \neg C \vdash \neg((A \wedge B) \to C)$,

що і треба було довести

(3) $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow(\forall x P(x)\rightarrow\forall x\, Q(x))$

Розглянемо обернене твердження та зводимо до попередньої нормальної форми:

$$\neg(\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow(\forall x\, P(x)\rightarrow\forall x\, Q(x)))$$

$$\neg(\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\rightarrow(\neg\forall x P(x)\vee\forall x\, Q(x)))$$

$$\neg(\neg\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\vee(\neg\forall x P(x)\vee\forall x\, Q(x)))$$

$$\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\wedge\neg(\neg\forall x P(x)\vee\forall x\, Q(x))$$

$$\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\wedge(\forall x\, P(x)\wedge\neg\forall x\,(Q(x))$$

$$\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\wedge(\forall x\, P(x)\wedge\exists x(\neg Q(x)))$$

$$\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\wedge\forall x\exists z(P(x)\wedge\neg Q(z))$$

$$\forall x\forall y\exists z((\neg P(x)\vee Q(x))\wedge P(y)\wedge\neg Q(z))$$

Зводимо до стандартної форми шляхом елімінації квантора існування

$$z=F(x,y)$$

$$\forall x\forall y\exists z((\neg P(x)\vee Q(x))\wedge P(y)\wedge\neg Q(f(x,y)))$$

Множина диз'юнктів:

$S = \{\neg P(x) \vee Q(x), P(y), \neg Q(f(x,y))\}$

Ербанівський універсум множини диз'юнктів:

$E = \{a, f(a,a), f(a, f(a,a)), \dots\}$

Виведення порожнього диз'юнкта:

1. $\neg P(x) \vee Q(x)$
2. $P(y)$
3. $\neg Q(f(x,y))$

підстановка $f(a,a)$ замість x та y:

4. $\neg P(f(a,a)) \vee Q(f(a,a))$
5. $P(f(a,a)$
6. $\neg Q(f(a,a)$
7. $Q(f(a,a)$ (з 4. і 5.)
8. $\square$ (з 6. і 7.)

Отримали суперечність, тому початкова формула –