Екзаменаційний білет №17

Малютенко Юрій К-29

3. Дослідити формулу

$$\left(\forall x(P(x) \to R(x)) \wedge \forall x(P(x) \to Q(x))\right) \to \left(\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \wedge R(x))\right)$$

Підемо від супротивного та розглянемо заперечення формули:

$$\neg\,(\;-\|-\;) =$$

$$= \neg\left(\neg\left(\forall x(P(x) \to R(x)) \wedge \forall x(P(x) \to Q(x))\right) \vee \left(\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \wedge R(x))\right)\right) =$$

$$= \left(\forall x(P(x) \to R(x)) \wedge \forall x(P(x) \to Q(x))\right) \wedge \neg\left(\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \wedge R(x))\right) =$$

$$= \forall x\left((\neg P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x))\right) \wedge \left(\exists x P(x) \wedge \neg \exists x(Q(x) \wedge R(x))\right) =$$

$$= \forall x\left((\neg P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x))\right) \wedge \left(\exists x P(x) \wedge \forall x(\neg Q(x) \vee \neg R(x))\right) =$$

$$= \forall x\left((\neg P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee \neg R(x))\right) \wedge \exists y P(y) =$$

Зведемо до стандартної форми (елімінуємо квантор існування)

$$\ominus\; \forall x\left((\neg P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee \neg R(x))\right) \wedge P(f(x))$$

$$S = \{\neg P(x) \vee R(x),\; \neg P(x) \vee Q(x),\; \neg Q(x) \vee \neg R(x),\; P(f(x))\}$$

$$E = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$$

1) $\neg P(f(a)) \vee R(f(a))$
2) $P(f(a))$
3) $R(f(a))$ (1, 2)
4) $\neg Q(f(a)) \vee \neg R(f(a))$
5) $\neg Q(f(a))$ (3, 4)
6) $\neg P(f(a)) \vee Q(f(a))$
7) $\square$ (2, 5, 6)

Отже, початкова формула – тавтологія

2. Довести, що $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \vee (B \to (C \to D))$

1) $\neg C, \neg D \vdash C \to D$
2) $\neg B, C \to D \vdash B \to (C \to D)$
3) $\neg A, B \to (C \to D) \vdash A \vee (B \to (C \to D))$