Варіант 48

1. З якою відносною похибкою необхідно виміряти сторони паралелограма, який лежить в основі піраміди, та висоту піраміди, щоб похибка обчислення об'єму піраміди не перевищувала 5%, якщо похибка значення сінуса кута між сторонами паралелограма не перевущує $0,5\%$?

2. За яку кількість кроків можна знайти найбільший корінь нелінійного рівняння

$$\operatorname{sh} x - 12 \operatorname{th} x - 0.311 = 0$$

методом релаксації з точністю $\varepsilon = 0,001$.

3. Зробити дві ітерації методом Якобі для знаходження розв'язку

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Перевірити умову припинення, $\varepsilon = 0.01$. Перевірити достатню умову збіжності.

4. За допомогою інтерполяції знайти суму скінченого ряду чисел:

$$S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + n^2$$

5. За допомогою рядів Тейлора показати, що для вузлів x_0, x_1, x_2:

$$\left| f''(x_2) - \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2} \right| \leqslant h f'''(\xi)$$

Варіант 48

1. $\delta(V) \leq 5\%$, $\delta(\sin\alpha) \leq 0,5\%$

Нехай V – об'єм піраміди, S – площа основи, $S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$, де a, b – сторони паралелограма, $\sin\alpha$ – синус кута між сторонами, h – висота піраміди

$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$

$\delta(V) = \delta(a) + \delta(b) + \delta(\sin\alpha) + \delta(h)$

$\delta(a) + \delta(b) + \delta(h) \leq 5\% - 0,5\% = 4,5\%$

За принципом рівномірного розподілу похибок:

$\delta(a) = \delta(b) = \delta(h) \leq \frac{4,5\%}{3} = 1,5\%$ //

2. $sh\,x - 12\,th\,x - 0{,}311 = 0$, $\varepsilon = 0{,}001$

Нехай $a = 3$, $b = 4$, тоді:

$$\left.\begin{aligned} f(3) &= sh\,3 - 12\,th\,3 - 0{,}311 \approx -2{,}23 \\ f(4) &= sh\,4 - 12\,th\,4 - 0{,}311 \approx 14{,}99 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^* \in [3;4]$$

$$f'(x) = ch\,x - 12 + \frac{12\,sh^2 x}{ch^2 x}$$

$$m_1 = \min_{x \in [3;4]} \left| ch\,x - 12 + \frac{12\,sh^2 x}{ch^2 x} \right| \approx 9{,}95$$

$$M_1 = \max_{x \in [3;4]} \left| ch\,x - 12 + \frac{12\,sh^2 x}{ch^2 x} \right| \approx 27{,}29$$

$$q_0 = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} = \frac{27{,}29 - 9{,}95}{27{,}29 + 9{,}95} \approx 0{,}466$$

$$\left.\begin{aligned} &x^* \in [3;4] \\ &x_0 = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |x_0 - x^*| = |4 - x^*| \leq 4$$

$$k_0 \geq \left[\frac{\ln(|x_0 - x^*| / \varepsilon)}{\ln(1/q_0)} \right] + 1 = \left[\frac{\ln(4/0{,}001)}{\ln(1/0{,}466)} \right] + 1 =$$

$$= [10{,}86222] + 1 = 11$$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\varepsilon = 0{,}01$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} |2| \geq |-1| + |0| \\ |-3| \geq |1| + |1| \\ |3| \geq |0| + |1| \end{array}$ $\Rightarrow$ метод Якобі збіжний

$x_1 = \frac{1}{2}(-4 + x_2)$ $x_1^{k+1} = \frac{1}{2}(-4 + x_2^k)$

$x_2 = \frac{1}{3}(x_1 + x_3 + 2)$ $x_2^{k+1} = \frac{1}{3}(x_1^k + x_3^k + 2)$

$x_3 = -\frac{1}{3}x_2$ $x_3^{k+1} = -\frac{1}{3}x_2^k$

Крок 1

$x^0 = (0; 0; 0)^T$

$x_1^1 = -2$

$x_2^1 = 0{,}67$

$x_3^1 = 0$

$\|x^1 - x^0\| = \|(-2; 0{,}67; 0)^T - (0; 0; 0)^T\|_\infty = 2 > \varepsilon$

Крок 2

$x_1^2 = -3$

$x_2^2 = 0$

$x_3^2 = 0{,}22$

$\|x^2 - x^1\| = \|(-3; 0; 0{,}22)^T - (-2; 0{,}67; 0)^T\|_\infty = 1 > \varepsilon$

4. $S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2$

n	S_n	р.р. I п.	р.р. II п.	р.р. III п.	р.р. IV п.
1	$\boxed{1}$				
2	5	$\boxed{4}$			
3	14	9	$\boxed{2,5}$		
4	30	16	3,5	$\boxed{0,33}$	
5	55	25	4,8	0,33	$\boxed{0}$

Отже, степінь інтерполяційного поліному $n = 3$

$P_3(n) = 1 + 4(n-1) + 2,5(n-1)(n-2) + 0,33(n-1)(n-2)(n-3) =$

$= 0,33n^3 + 0,52n^2 + 0,13n + 0,02$

$S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 0,33n^3 + 0,52n^2 + 0,13n + 0,02$ //

5. $\left| f''(x_2) - \dfrac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2} \right| \le h f'''(\xi)$

$= f''(x_2) - \dfrac{1}{h^2}\Big(\cancel{f_2} - \cancel{2h f_2'} + \dfrac{(2h)^2}{2} f_2'' - \dfrac{(2h)^3}{6} f_2'''(\xi) -$

$- 2\big(\cancel{f_2} - \cancel{h f_2'} + \dfrac{h^2}{2} f_2'' - \dfrac{h^3}{6} f_2'''(\xi)\big) +$

$+ \cancel{f_2} \Big) =$

$= f''(x_2) - 3 f''(x_2) + h f'''(\xi) = h f'''(\xi) - 2 f''(x_2)$ //