Тищенко

Варіант 47 №1

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

множення матриць асоціативне

Існує ~~нейтральний~~ одиниця (нейтральний елемент)

Якщо $x=1$, $y=0$: $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Для кожного елемента існує обернений, оскільки матриці за умовою не вироджені

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 & x_1 y_2 + y_1 x_2 \\ -y_1 x_2 - x_1 y_2 & -y_1 y_2 + x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_3 & y_3 \\ -y_3 & x_3 \end{bmatrix}$$ ← замкнена відносно групової операції

Отже, буде групою

Заув. Якщо y — фіксоване, то остання не виконується

№2

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = A^2 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ответ, порядок элемента = 8

№3

$n = 105$

$\langle a \rangle$ $k = 15$

$$g^{15} = e$$

$$\frac{105}{15} = 7$$

Вибираємо взаємно прості з 15 числа, тобто $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$

Тобто елементи порядку 15:

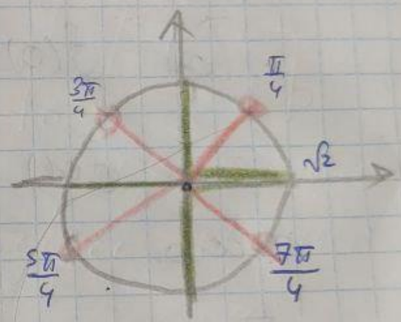
1▷ $a^7, a^{14}, a^{28}, a^{49}, a^{56}, a^{77}, a^{91}, a^{98}$

№4

$f(x)\ x^4 + 4$

$x^4 = -4$

Формула Муавра



$$z_k = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)$$

$k = 0, 1, 2, 3$

Отримуємо:

$$x^4+4 = (x+(i+1))(x-(i+1))\cdot(x+(1-i))(x-(1-i))$$

— розклад на множники в полі $\mathbb{C}$

$k=0: \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$

$k=1: \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1+i$

$k=2: \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=-1-i$

$k=3: \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)=1-i$

№5

Нехай $f(0)$ – деяке непарне число.

Запишемо многочлен як

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Тоді $f(0) = a_0$, тобто a_0 – непарне.

Нехай $f(1)$ – деяке непарне число.

Тоді, підставивши 1 в многочлен, маємо:

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \text{ – непарне.}$$

Враховуючи, що $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ – непарне і a_0 – непарне, робимо висновок, що $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1$ є парним

Нехай x_0 – цілий корінь многочлена.

За теоремою про раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами x_0 має вигляд $\frac{q}{p}$, де q – дільник a_0. Вважаючи, що a_0 – непарне, його дільники теж непарні.

Тому x_0 – непарне.

Звідси отримуємо наступне:

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0$$

Нехай $a_i x_0^i$
- $\nearrow$ a_i – парне, тоді $a_i x_0^i$ – парне
- $\searrow$ a_i – непарне, тоді $a_i x_0^i$ – непарне

$\uparrow$ непарне, бо x_0 – непарне

Тобто множники x^i не змінюють парності виразу.

АЛЕ $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ – непарне, тому $\neq 0$. Отже, x_0 – не корінь.

Тому цих коренів не існує.

№ 6

$n=6$, $p=2$ | Знайдемо кількість незвідних многочленів.

$$N_6 = \frac{1}{6} \sum_{d \mid 6} \mu\left(\frac{6}{d}\right) 2^d =$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ + & - & - & + \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{6}(2+64-4-8) = \frac{54}{6} = 9$$

$$I(q,n,x) = \prod_m \Phi_m(x)$$

$$2^6 - 1 = 63 \;\vdots$$

3	7	9	21	63
✗	✗	✓	✓	✓
$2^2 \equiv 1$	$2^3 \equiv 1$			

$$2^6 \equiv 1$$

Отже, маємо

$$I = \Phi_9 \Phi_{21} \Phi_{63}$$

$\Phi_9 = x^6 + x^3 + 1$ — незвідний

$\Phi_{21} = x^{12} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$

$\Phi_{63} = x^{36} + x^{33} + x^{27} + x^{24} + x^{18} + x^{12} + x^9 + x^3 + 1$

можна розбити на 2

можна розбити на 6

$1 + 2 + 6 = 9$ — кількість, як і передбачалось.

Φ_9 — єдиний (не) незвідний круговий многочлен

Підставимо замість x значення $x+1$

$(x+1)^6 + (x+1)^3 + 1 =$

$x^6 + x^4 + x^2 + 1 + x^3 + x^2 + x + 1 + 1 =$ ~~отримуємо~~

$= x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$ —

Отримуємо новий незвідний многочлен.