Екзамен з дисципліни "Теорія алгоритмів та математична логіка", білет №21

Цубін Софія К-28

June 2020

1 Довести, що $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \to (B \to (C \to D))$

Застосуємо таку лему: $\neg P, Q \vdash (P \to Q)$.
Тоді:
$\neg C, D \vdash (C \to D)$
$\neg B, (C \to D) \vdash (B \to (C \to D))$
$\neg A, (B \to (C \to D)) \vdash (A \to (B \to (C \to D)))$

2 Дослідити формулу

Дано:
$\forall x(F(x) \to G(x)) \to (\forall x F(x) \to \forall x G(x))$
Перевіримо обернене твердження:
$\neg(\forall x(F(x) \to G(x)) \to (\forall x F(x) \to \forall x G(x)))$
Попередня нормальна форма:
$\neg(\forall x(\neg F(x) \lor G(x)) \to (\neg\forall x F(x) \lor \forall x G(x)))$
$\neg(\neg\forall x(\neg F(x) \lor G(x)) \lor (\neg\forall x F(x) \lor \forall x G(x)))$
$\forall x(\neg F(x) \lor G(x)) \land \neg(\neg\forall x F(x) \lor \forall x G(x))$
$\forall x(\neg F(x) \lor G(x)) \land (\forall x F(x) \land \neg\forall x G(x))$
$\forall x(\neg F(x) \lor G(x)) \land (\forall x F(x) \land \exists x(\neg G(x)))$
$\forall x(\neg F(x) \lor G(x)) \land \forall x \exists z(F(x) \land \neg G(z))$
$\forall x \forall y \exists z((\neg F(x) \lor G(x)) \land F(y) \land \neg G(z))$
Стандартна форма (елімінували квантори існування):
$z = f(x, y)$
$\forall x \forall y \exists z((\neg F(x) \lor G(x)) \land F(y) \land \neg G(f(x, y)))$
Тоді множина диз'юнктів:
$S = \{\neg F(x) \lor G(x), F(y), \neg G(f(x, y))\}$
Запишемо ербранівський універсум множини диз'юнктів:
$E = \{a, f(a, a), f(a, f(a, a)), f(f(a, a), a), f(f(a, a), f(a, a)), ...\}$

1. $\neg F(x) \lor G(x)$
2. $F(y)$
3. $\neg G(f(x, y))$
4. $\neg F(f(a, a)) \lor G(f(a, a))$ (підставили $f(a, a)$ замість x та замість y у 1)
5. $F(f(a, a))$ (підставили $f(a, a)$ замість y у 2)
6. $\neg G(f(a, a))$ (підставили a замість x та замість y у 3)
7. $G(f(a, a))$ (випливає з 4 та 5)
8. $\square$ (випливає з 6 і 7)

Оскільки обернене твердження є суперечливим, початкова формула буде тавтологією.