Варіант 13

1. Якою кількістю правильних значущих цифр необхідно задати аргументи, щоб обчислити з 2 правильними значущими цифрами значення функції $f(x, y, z) = x * y - z$, де $x^* = 2,38$, $y^* = 4.02$, $z^* = 1.61$? Використати принцип рівних абсолютних похибок аргументів.

2. Зробити дві ітерації для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння

$$(x-1)^3 + 0.5e^x = 0$$

методом дихотомії, $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію збіжності метода.

3. Знайти визначник системи методом Гаусса з вибором головного по рядках у матричній формі

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

4. На проміжку [-2; 1] побудувати многочлен Чебишова 3го степеня з коефіцієнтом 1 при старшому степені. Обчислити відхилення від 0.

5. Визначити алгебраїчну степінь точності квадратурної формули

$$\frac{1}{3}f(-3) + \frac{4}{3}f(-2) + \frac{1}{3}f(-1),$$

якщо вона побудована з ваговим множником $\rho = 1$.

Варіант 13

1. $f(x, y, z) = xy - z$, де $x^* = 2{,}38$, $y^* = 4{,}02$, $z^* = 1{,}61$

$f(x^*, y^*, z^*) = 2{,}38 \cdot 4{,}02 - 1{,}61 = 7{,}9576$

$\Delta(f^*) \leq 0{,}5 \cdot 10^{-1}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \overset{4{,}02}{\overset{\parallel}{y}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \overset{2{,}38}{\overset{\parallel}{x}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$

$\Delta(f^*) = |4{,}02 \cdot \Delta x| + |2{,}38 \cdot \Delta y| + |1 \cdot \Delta z|$

$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta(f^*) = \delta \cdot (4{,}02 + 2{,}38 + 1) = \delta \cdot 7{,}4$

$\delta \cdot 7{,}4 < 0{,}5 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \delta < \frac{0{,}5 \cdot 10^{-1}}{7{,}4} \approx 0{,}00676$

Отже, кожен аргумент потрібно задати з 3 правильними значущими цифрами.

2. $(x-1)^3+0,5e^x=0$, $\varepsilon=0,001$

Нехай $a=0$, $b=1$, тоді:

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=(0-1)^3+0,5e^0=-0,5\\ f(1)&=(1-1)^3+0,5e^1=0,5e \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow f(0)\cdot f(1)<0 \Rightarrow x^*\in[0,1]$

$a_0=a=0$, $b_0=b=1$, $x_0=\frac{a_0+b_0}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$

Ітерація 1

$f(0)=-0,5$, $f(1)=0,5e$, $f(\frac{1}{2})\approx 0,699$; $f(0)\cdot f(\frac{1}{2})<0 \Rightarrow$

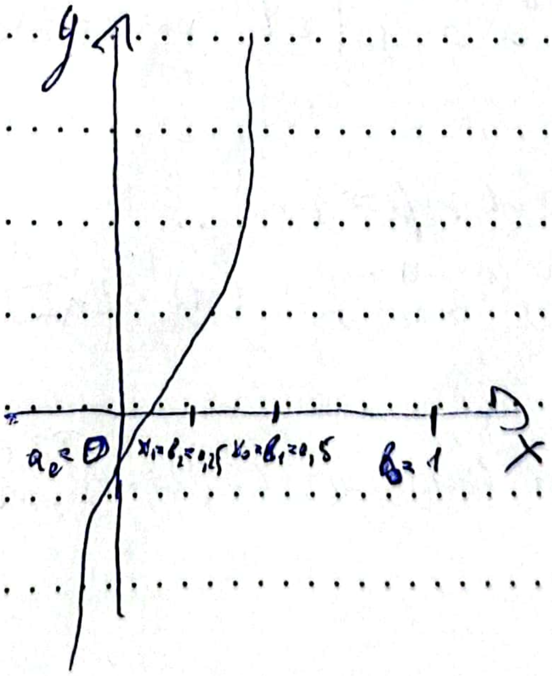
$\Rightarrow a_1=a_0=0$; $b_1=x_0=\frac{1}{2}$; $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{1}{4}$

$|x_1-x_0|=|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}|=0,25>\varepsilon$

Ітерація 2

$f(0)=-0,5$, $f(\frac{1}{2})\approx 0,699$, $f(\frac{1}{4})\approx 0,22$; $f(0)\cdot f(\frac{1}{4})<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_2=a_1=0$, $b_2=x_1=\frac{1}{4}$; $x_2=\frac{a_2+b_2}{2}=\frac{1}{8}$ //



3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

$$\overline{A}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \boxed{2} & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_1 = P_1 \overline{A}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A}_1 = M_1 \tilde{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} P_2 = E \\ \tilde{A}_2 = P_2 \overline{A}_1 = \overline{A}_1 \end{array}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = M_2 \tilde{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 \end{array}\right)$$

$P_3 = E$

$\tilde{A}_3 = P_3 \overline{A}_2 = A_2$ $\qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\overline{A}_3 = M_3 \tilde{A}_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x_3 = 2 \\ x_2 = 0 + x_3 = 2 \\ x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 - 1 - 1 = -1 \end{array}$$

К-сть перестановок: $p = 1$

$\mathrm{Det}\, A = (-1)^p \tilde{a}_{11}^{(1)} \tilde{a}_{22}^{(2)} \tilde{a}_{33}^{(3)} = (-1)^1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) = -1$

Отже, розв'язок системи: $(2; 2; -1)^T$, $\mathrm{Det}\, A = -1$ //

4. $x \in [-2;1]$, $t \in [-1;1]$, $T_3(t) = 4t^3 - 3t$

$$\overline{T}_3^{[-2;1]}(x) = (1+2)^3 \cdot 2^{1-2\cdot 3}\, T_3^{[-1;1]}\left(\frac{2x-(1-2)}{1+2}\right) =$$

$$= 27 \cdot \frac{1}{2^5}\left(4\left(\frac{2x+1}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2x+1}{3}\right)\right) =$$

$$= x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{16}x - \frac{23}{32}$$

$$\|\overline{T}_3^{[-2;1]}(x)\| = (1+2)^3 \cdot 2^{1-2\cdot 3} = \frac{27}{32} \,//$$