Варіант 41

1. Знайти абсолютні та відносні похибки аргументів, які дають змогу обчислити з 1 правильною значущою цифрою значення функції $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 * x_3$, де $x_1^* = 2,14$, $x_2^* = 1,93$, $x_3^* = 0,82$. Використати принцип рівних абсолютних похибок аргументів.

2. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого від'ємного кореня нелінійного рівняння

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 13 = 0$$

модифікованим методом Ньютона, $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію збіжності метода.

3. Знайти обернену матрицю методом Гаусса з вибором головного по стовпцях у матричній формі

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$$

4. Оцінити похибку інтерполяції функції $f(x) = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ многочленом 3го степеня, побудованим за вузлами Чебишова.

5. Побудувати інтерполяційну квадратурну формулу за вузлами $x_0 = -3$; $x_1 = -2$; $x_2 = -1$ з ваговим множником $\rho = 1$.

Варіант 41

1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 \cdot x_3$, $x_1^* = 2{,}14$; $x_2^* = 1{,}93$; $x_3^* = 0{,}82$

$$\Delta f^* = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1^* + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2^* + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\right| \Delta x_3^*$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| = 1, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| = -x_3, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\right| = -x_2$$

$$\Delta f^* = \delta \cdot (|1| + |-x_3| + |-x_2|)$$

$$\Delta f^* \geq |f(x_1^*, x_2^*, x_3^*)|$$

$$f^* = 2{,}14 - 1{,}93 \cdot 0{,}82 = 0{,}5574$$

$$\Delta f^* = \delta \cdot (1 + 0{,}82 + 1{,}93) = \delta \cdot 3{,}75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta \geq \frac{0{,}5574}{3{,}75} \approx 0{,}1486$$

$$\delta(x_1) = \frac{0{,}1486}{2{,}14} \approx 0{,}0695 \ (6{,}95\%)$$

$$\delta(x_2) = \frac{0{,}1486}{1{,}93} \approx 0{,}0770 \ (7{,}70\%)$$

$$\delta(x_3) = \frac{0{,}1486}{0{,}82} \approx 0{,}1812 \ (18{,}12\%)$$

CamScanner

2. $x^3-4x^2-4x+13=0$, $\varepsilon=0{,}001$

Нехай $a=-2$, $b=-1$, тоді:

$f'(x)=3x^2-8x-4>0$ на $[-2;-1]$, $f'(x)\neq 0$ на $[-2;-1]$

$f''(x)=6x-8<0$ на $[-2;-1]$

Отже, достатні умови виконуються

Виберемо початкове наближення: $x_0=-2$

Ітерація 1

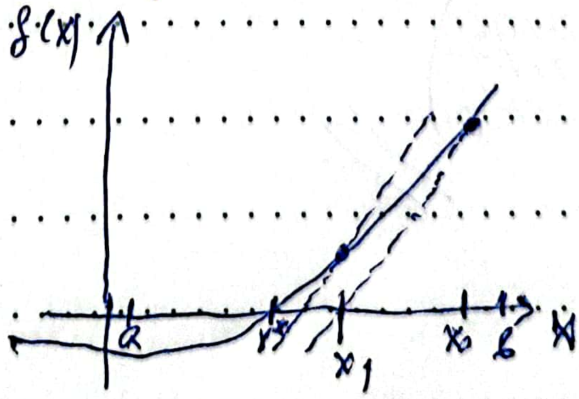
$$x_1=-2-\frac{f(-2)}{f'(-2)}=-2-\frac{(-2)^3-4(-2)^2-4(-2)+13}{3(-2)^2-8(-2)-4}=-1\frac{7}{8}$$

$|x_1-x_0|=|-1\frac{7}{8}+2|=0{,}125>\varepsilon$

Ітерація 2

$$x_2=-1\frac{7}{8}-\frac{(-1\frac{7}{8})^3-4(-1\frac{7}{8})^2-4(-1\frac{7}{8})+13}{24}\approx-1{,}869$$

$|x_2-x_1|=|-1{,}869+1{,}875|=0{,}006>\varepsilon$



3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

$$(\bar{A}_0|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{3} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_1 = P_1 \bar{A}_0 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = M_1 \tilde{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & \boxed{7/3} & 2/3 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & -4/3 & 10/3 & 1 & 0 & -1/3 \end{array}\right) \qquad P_2 = E;$$

$$\tilde{A}_2 = P_2 \bar{A}_1 = \bar{A}_1$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/7 & 0 \\ 0 & 4/7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}_2 = M_2 \tilde{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/7 & 0 & 3/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & \boxed{26/7} & 1 & 4/7 & -1/7 \end{array}\right)$$

$P_3 = E$

$$\tilde{A}_3 = P_3 \bar{A}_2 = \bar{A}_2 \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7/26 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_3 = M_3 \tilde{A}_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/7 & 0 & 3/13 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 7/26 & 2/13 & -1/26 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 3/26 & 8/91 & 7/26 \\ -1/13 & 25/91 & 2/13 \\ 7/26 & 4/13 & -1/26 \end{pmatrix}$$

4. $f(x) = \sin x$, $[0; 2\pi]$,

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \prod_{i=0}^{3} (x - x_i)$$

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right); \quad i = \overline{0, n}, \text{ де}$$

n – степінь інтерполяційного поліному

$n = 3$; $a = 0$; $b = 2\pi$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $\max\limits_{x \in [0; 2\pi]} |f^{(4)}(x)| = 1$

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \max_{x \in [0; 2\pi]} \left| \prod_{i=0}^{3} (x - x_i) \right|$$

$x_0 \approx 6{,}04$, $x_1 \approx 4{,}34$, $x_2 \approx 1{,}94$, $x_3 \approx 0{,}24$

$|R_3(x)| \leq 0{,}5073$ //

5. $x_0 = -3$; $x_1 = -2$; $x_2 = -1$; $\rho = 1$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx$$

$$I \approx c_0 f(-3) + c_1 f(-2) + c_2 f(-1)$$

$$c_0 = \int_{-3}^{-1} \frac{(x+2)(x+1)}{(-3+2)(-3+1)}\,dx = \frac{1}{3}$$

$$c_1 = \int_{-3}^{-1} \frac{(x+3)(x+1)}{(-2+3)(-2+1)}\,dx = \frac{4}{3}$$

$$c_2 = \int_{-3}^{-1} \frac{(x+3)(x+2)}{(-1+3)(-1+2)}\,dx = \frac{1}{3}$$

Donc,

$$I \approx \frac{1}{3} f(-3) + \frac{4}{3} f(-2) + \frac{1}{3} f(-1)$$