1 $\neg A, B, \neg C \vdash A \wedge B \to C$

2 $\neg A, \neg B, C \vdash (A \to B) \to C$

3 $\neg A, B, C, D \vdash A \vee (B \to (C \to D))$

4 $\neg P, \neg Q > P \to Q$

5 $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \to (B \to (C \to D))$

6 $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

7 $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \vee (B \to (C \to D)$

8 $\neg A, \neg B, \neg C \vdash (A \wedge B) \to C$

9 $A, B, C \vdash (A \wedge B) \to C$

10 $A, \neg B, \neg C \vdash (A \wedge B) \to C$

11 $\neg A, B, C \vdash (A \to B) \to C$

12 $\neg A, B, \neg C \vdash (A \wedge B) \to C \quad \models 1$

13 $A, B, C \vdash (A \to B) \to C$

14 $A, B, C \vdash (A \to B) \to C \quad \models 13$

1-

1

15 $\neg A, \neg B, \neg C \vdash \neg((A \to B) \to C)$

16 $\neg A, B, C \vdash (A \to B) \to C \quad \models 11$

17 $A, B, \neg C > \neg((A \to B) \to C$

18 $\neg A, B, C, D \vdash A \to (B \to (C \to D)) \quad \models 3$

19 $A, B, \neg C, \neg D > A \wedge (B \to (C \to D)$

20 $\neg A, B, \neg C, \neg D > A \vee (B \to (C \to D))$

21 $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \vee (B \to (C \to D))$

22 $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \vee (B \to (C \to D)) \quad \models 21$

23 $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \to (B \to (C \to D))$

24 $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \to (B \to (C \to D))$

25 $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \to (B \to (C \to D)) \quad \models 24$

26 $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \to (B \wedge (C \to D)$

27 $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D > A \to A \to (B \to (C \to D)$

28 $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash (A \to B \wedge (C \to D)$

29 $\neg A, \neg B, \neg C, D > \neg(A \wedge (B \to (C \to D)$

30 $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash \neg(A \wedge (B \to (C \to D) \quad \models 2$

31 $A, B, C, \neg D \vdash \neg(A \to (B \to (C \to D)))$

32 $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \vee (B \to (C \to D))$

33 $p \to q \Leftrightarrow q \to \neg p$

1

1) $\vdash A \wedge B \rightarrow A$ (II.1)

2) $\vdash (A \wedge B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg A \wedge B)$ (IV.1)

3) $\vdash \neg A \rightarrow \neg A \wedge B$ (MP 1,2)

4) $\neg A \vdash \neg A \wedge B$ (ТД)

5) $\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B))$ (I.1)

6) $\neg A \vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B))$

7) $\neg A \vdash \neg C \rightarrow \neg(A \wedge B)$ (MP 4,6)

8) $\vdash (\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$ (IV.1)

9) $\neg A \vdash (\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$

10) $\neg A \vdash A \wedge B \rightarrow C$ (MP 7,9)

11 $\neg A, B, \neg C \vdash A \wedge B \rightarrow C$

2

Розглянемо формули

$\neg B, C, A \to B$.

Із цих формул можна вивести формулу C. Дійсно:

1. $\vdash a \to (b \to a)$ (аксіома I.1)
2. $\vdash C \to (\neg B \to C)$ (ПП у 1)
3. $\neg B, C, A \to B \vdash C \to (\neg B \to C)$ (за означ.)
4. $\neg B, C, A \to B \vdash C$ (за означенням)
5. $\neg B, C, A \to B \vdash \neg B \to C$ (MP 3,4)
6. $\neg B, C, A \to B \vdash \neg B$ (за означ.)
7. $\neg B, C, A \to B \vdash C$ (MP 5, 6)
8. $\neg B, C \vdash (A \to B) \to C$ (теор. про дедукцію)
9. $\boxed{\neg A, \neg B, C \vdash (A \to B) \to C}$

3

② $\neg A, B, C, D \vdash A \vee (B \to (C \to D))$ (0)

1. $D \to (C \to D)$ I.1
2. $C \to D$ MP(0, 1)
3. B
4. $(C \to D) \to (B \to (C \to D))$ I.1
5. $B \to (C \to D)$ MP(2, 4)
6. $\neg A$
7. $B \to (C \to D) \to A \vee (B \to (C \to D))$ III.2
   Також за лемою для $\forall P, Q$ $\neg P, Q \vdash (P \vee Q)$
8. $A \vee (B \to (C \to D))$

Отримали виведення формули (8) із аксіом.

хуйня4

№2

Довести, що $\neg P, \neg Q > P \to Q$

1. $\neg P \to (P \to Q)$ [$\neg a \to (a \to b)$]

2. $\neg P$ [припущення]

3. $P \to a$ [MP 2,1]

5

2. $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \to (B \to (C \to D))$

1) $D \to (C \to D)$ (1.1)
2) $C \to D$ (MP 1, D)
3) $(C \to D) \to (B \to (C \to D))$ (1.1)
4) $B \to (C \to D)$ ($MP_{2,3}$)
5) $(B \to (C \to D)) \to (A \to (B \to (C \to D)))$ (1.1)
6) $A \to (B \to (C \to D))$ ($MP_{4,5}$)

Отже, $D \vdash A \to (B \to (C \to D))$, а тому:

$$\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \to (B \to (C \to D)).$$

6

2. Довести, що $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$.

При доведенні скористаюсь аксіомою IV.1.

$$(a \to b) \to (\neg b \to \neg a) \qquad \text{(IV.1)}$$

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$$

Потрібно прийти до знаку еквівалентності

- $p \to q \Rightarrow \neg q \to \neg p$

1) $\vdash p \to q \to \neg q \to \neg p$ (за IV.1)

- $\neg q \to \neg p \Rightarrow p \to q$

1) $\vdash \neg q \to \neg p \to \neg\neg p \to \neg\neg q$ (за IV.1)
2) $\vdash \neg\neg p \to \neg\neg q$ (за MP)
3) $\vdash \neg\neg q \to q$ (IV.3)
4) $\vdash \neg\neg p \to q$ (MP 2,3)
5) $\vdash p \to \neg\neg p$ (IV.2)
6) $\vdash p \to q$ (MP 5,4)

7

2) $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \vee (B \to (C \to D))$

Розпишемо знак $\vee$ через імплікацію

I спосіб:

1. $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash \neg A \to (B \to (C \to D))$

Будемо використовувати теорему про дедукцію.

2. $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash B \to (C \to D)$
3. $\neg A, \neg B, \neg C, D, B \vdash C \to D$
4. $\neg A, \neg B, \neg C, D, B, C \vdash D$

Доведено.

II спосіб (без теор дедукції)

$\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash \neg A \to (B \to (C \to D))$

1. $D \to (C \to D)$ (Аксіома I)
2. $D \to (B \to D)$ (Аксіома I.)
3. D (умова)
4. $B \to D$ (modulus ponens (2, 3))
5. $B \to (C \to D)$ (транзитивність (4, 1))
6. $(B \to (C \to D)) \to (\neg A \to (B \to (C \to D))$ (Аксіома
7. $\neg A \to (B \to (C \to D))$ (modulus ponens (6, 5))

8

№2) Довести, що

$\neg A, \neg B, \neg C \vdash (A \wedge B) \to C$

1. $\vdash ((A \wedge B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \wedge B))$ — IV. 1
2. $\vdash (A \wedge B) \to A$ — II. 1
3. $\vdash \neg A \to \neg(A \wedge B)$ — M.P (1,2)
4. $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$ — Т.Р. (теорема дедукції)
5. $\neg(A \wedge B) \to (\neg C \to \neg(A \wedge B))$ — I.1
6. $\neg C \to \neg(A \wedge B)$ — M.P. (4,5)
7. $(\neg C \to \neg(A \wedge B)) \to ((A \wedge B) \to C)$ — IV. 1
8. $(A \wedge B) \to C$ — M.P. (6,7)

Отже, $\neg A, \neg B, \neg C \vdash (A \wedge B) \to C$

хуйня 9

2. Довести, що $A, B, C \vdash (A \wedge B) \to C$

$\vdash C \to ((A \wedge B) \to C)$ (I.1) За лемою:

$\vdash (A \wedge B) \to C$ (M. P.) $A, B \vdash (A \wedge B)$

Отже $A, B, C \vdash (A \wedge B) \to C$

10

2. Довести: $A, \neg B, \neg C \vdash (A \wedge B) \to C$

1) $\vdash A \wedge B \to B$ (II. 2)

2) $\vdash (A \wedge B \to B) \to (\neg B \to \neg (A \wedge B))$ (IV. 1)

3) $\vdash \neg B \to \neg (A \wedge B)$ (MP 1, 2)

4) $\neg B \vdash \neg (A \wedge B)$ (TD)

5) $\vdash \neg (A \wedge B) \to (\neg C \to \neg (A \wedge B))$ (I. 1)

6) $\neg B \vdash \neg (A \wedge B) \to (\neg C \to \neg (A \wedge B))$

7) $\neg B \vdash \neg C \to \neg (A \wedge B)$ (MP 4, 6)

8) $\vdash \neg C \to \neg (A \wedge B) \to ((A \wedge B) \to C)$ (IV. 1)

9) $\neg B \vdash (\neg C \to \neg (A \wedge B)) \to ((A \wedge B) \to C)$

10) $\neg B \vdash (A \wedge B) \to C$ (MP 7, 9)

11) $A, \neg B, \neg C \vdash (A \wedge B) \to C$

хуйня 11

2. $\neg A, B, C \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$

$C \Rightarrow ((A \to B) \to C)$ (за аксіомою I. 1)

$(A \to B) \Rightarrow C$ (за M.P.)

1=12

2) Доведсти, що $\neg A, B, \neg C \vdash (A \wedge B) \to C$

Розв'язання за лемами:

1) $\neg(A \wedge B)$ – за лемою $\neg P, Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

2) $(A \wedge B) \to C$ – за лемою $\neg P, Q \vdash (P \to Q)$

Розв'язання за аксіомами:

$A \wedge B \to A$ (II.1)

$(A \wedge B \to A) \to (\neg A \to \neg(A \wedge B))$ (IV.1)

$\neg A \to \neg(A \wedge B)$ (M.P)

$\neg(A \wedge B)$ (M.P)

$\neg(A \wedge B) \to (\neg C \to \neg(A \wedge B))$ (I.1)

$\neg C \to (A \wedge B)$ M.P

$(\neg C \to \neg(A \wedge B)) \to ((A \wedge B) \to C)$ (IV.1)

$(A \wedge B) \to C$ (M.P.)

Отже $\neg A, B, \neg C \vdash (A \wedge B) \to C$

хуйня13

Екзаменаційний білет №7

2. Довести, що $A, B, C \vdash (A \to B) \to C$

$\vdash_{I.1} B \to (A \to B) \vdash_{MP} A \to B$

$\vdash_{I.1} C \to ((A \to B) \to C) \vdash_{MP} (A \to B) \to C$

Отже, $A, B, C \vdash (A \to B) \to C$

13=14

2. Довести, що $A, B, C \vdash (A \to B) \to C$

$B \to (A \to B)$ I.1.

$A \to B$ M.P.

$C \to ((A \to B) \to C)$ I.1.

$(A \to B) \to C$ M.P.

15

2. Довести, що $\neg A, \neg B, \neg C \vdash \neg((A \to B) \to C)$.

Існує лема, яка каже, що для довільних формул P і Q

$$\neg P, \neg Q \vdash (P \to Q)$$

Тому, $\neg A, \neg B, \vdash (A \to B)$

$$A \to B, \neg C \to \neg((A \to B) \to C)$$

хуйня11=16

② $\neg A, B, C \vdash (A \to B) \to C$

$\vdash C \to ((A \to B) \to C)$ I.1, за ПП(правило підстановки)

$\vdash (A \to B) \to C$ MP(~~[illegible]~~ modus ponens)

17

2. Довести, що $A, B, \neg C \succ \neg((A \to B) \to C)$

Метод резолюцій

$\{A, B, \neg C\} \models \neg((A \to B) \to C) \to$

$\to \{A, B, \neg C, (A \to B) \to C\} \to$

$\to \{A, B, \neg C, \neg(A \to B) \vee C\} \to$

$\to \{A, B, \neg C, \neg(\neg A \vee B) \vee C\} \to$

$\to \{A, B, \neg C, (A \wedge B) \vee C\} \to$

$\to \{A, B, \neg C, A \vee C, B \vee C\} \to$

$\to \{A, B, \neg C, A \vee C, B\}$

Якщо $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$,

то $A \vee C = 1$, $B = 1$

Формула вірна

3=18

2. $\neg A, B, C, D \vdash A \to (B \to (C \to D))$

1. $D \to (C \to D)$ [аксіома $a \to (b \to a)$]
2. D – 4-те припущення
3. $C \to D$ – MP 2, 1
4. $(C \to D) \to (B \to (C \to D))$ [$a \to (b \to a)$]
5. $B \to (C \to D)$ [MP 3, 4]
6. $(B \to (C \to D)) \to (A \to (B \to (C \to D)))$ [$a \to (b \to a)$]
7. $A \to (B \to (C \to D))$ [MP 5, 6]

② Довести, що

$A, B, \neg C, \neg D \vdash A \wedge (B \to (C \to D))$

1. $\neg C \to (\neg D \to \neg C)$ (I.1)
2. $\neg D \to \neg C$ (MP) $\neg C, 1$
3. $(\neg D \to \neg C \to (C \to D)$ (IV.1)
4. $C \to D$ (MP)
5. $(C \to D) \to (B \to (C \to D))$ (I.1)
6. $B \to (C \to D)$ (MP) 2,5
7. $(\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg A \to (B \to (C \to D)) \to (\neg\neg A \to A \wedge (B \to (C \to D)$ (II.3)
8. $\neg\neg A \to A$ (IV3)
9. $(\neg\neg A \to B \to (C \to D))) \to (\neg\neg A \to A \wedge (B \to (C \to D)))$ (MP 7,8)
10. $A \to \neg\neg A$ (IV2)
11. $\neg\neg A$ (MP 10, A)
12. $B \to (C \to D) \to (\neg\neg A \to (B \to (CD))$ (I 1)
13. $\neg\neg A \to (B \to (C \to D)$ (MP 6,12)
14. $\neg\neg A \to A \wedge (B \to (C \to D))$ (MP 9, 13)
15. $A \wedge (B \to (C \to D))$ (MP 14.11)

хуйня **20**

$\neg A, B, \neg C, \neg D > A \vee (B \to (C \to D))$

$\neg C, \neg D \quad \vdash C \to D$

$B, C \to D \quad \vdash B \to (C \to D)$

$\neg A, B \to (C \to D) \quad \vdash A \vee (B \to (C \to D))$

21

2\. Довести, що $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash$

$\vdash A \vee (B \to (C \to D))$

1. $\vdash \neg C \to (\neg D \to \neg C)$ (I.1)
2. $\neg C \vdash \neg D \to \neg C$ (MP 1, $\neg C$)
3. $\vdash (\neg D \to \neg C) \to (\neg\neg C \to \neg\neg D)$ (IV.1)
4. $\neg C \vdash \neg\neg C \to \neg\neg D$ (MP 2,3)
5. $\vdash C \to \neg\neg C$ (IV.2)
6. $\neg C \vdash C \to \neg\neg D$ (силогізм 4,5)
7. $\vdash \neg\neg D \to D$ (IV.3)
8. $\neg C \vdash C \to D$ (силогізм 6,7)
9. $\vdash (C \to D) \to (B \to (C \to D))$ (I.1)
10. $\neg C \vdash B \to (C \to D)$ (MP 8,9)
11. $\vdash (B \to (C \to D)) \to A \vee (B \to (C \to D))$ (III.2)
12. $\neg C \vdash A \vee (B \to (C \to D))$ (MP 10,11)
13. $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \vee (B \to (C \to D))$

(конкретизація)

21=22

I спосіб

$\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \to (B \to (C \to D))$

1. $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D, A \vdash B \to (C \to D)$ (ТД)
2. $\neg A$ (умова)
3. A (умова)
4. $(\neg D \to \neg A) \to ((\neg D \to A) \to D)$ (аксіома)
5. $\neg A \to (\neg D \to \neg A)$ (аксіома)
6. $A \to (\neg D \to A)$ (аксіома)
7. $\neg D \to \neg A$ (MP 2,5)
8. $\neg D \to A$ (MP 3,6)
9. $((\neg D \to A) \to D$ (MP 4,7)
10. D
11. $D \to (C \to D)$ (аксіома)
12. $D \to (B \to D)$ (аксіома)
13. $B \to D$ (MP 12,10)
14. $B \to (C \to D)$ (Транзит. 13, 11)
15. $(B \to (C \to D)) \to (\neg A \to (B \to (C \to D)))$ (аксіома

II спосіб

$\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \to (B \to (C \to D))$

$A \to (B \to (C \to D)) = A \to (B \to (\neg C \vee D)) =$

$= A \to (\neg B \vee (\neg C \vee D)) = A \to ((\neg B \vee \neg C) \vee (\neg B \vee D)) =$

$= \neg A \vee ((\neg B \vee \neg C) \vee (\neg B \vee D)) =$

$= (\neg A \vee (\neg B \vee \neg C)) \vee (\neg A \vee (\neg B \vee D)) =$

$= (\neg A \vee \neg B) \vee (\neg A \vee \neg C) \vee (\neg A \vee D)$

$\overline{(\neg A \vee \neg B) \vee (\neg A \vee \neg C) \vee (\neg A \vee D)} =$

$= (\overline{\neg A \vee \neg B}) \wedge (\overline{\neg A \vee \neg C}) \wedge (\overline{\neg A \vee D}) =$

$= \overline{\neg A} \wedge \overline{\neg B} \wedge \overline{\neg A} \wedge \overline{\neg C} \wedge \overline{\neg A} \wedge \overline{D} =$

$= A \wedge B \wedge C \wedge \neg D$

$S = \{\neg A, \neg B, \neg C, \neg D, A, B, C\}$

1. $\neg A$
2. A
3. $\square$

Вірно.

2. Довести, що $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \to (B \to (C \to D))$

1. $\neg C \to (\neg D \to \neg C)$ I.1
2. $\neg D \to \neg C$ MP
3. $(\neg D \to \neg C) \to (C \to D)$ IV.1.
4. $(C \to D) \to (B \to (C \to D))$ I.1.
5. $B \to (C \to D)$ MP
6. $(B \to (C \to D)) \to (A \to (B \to (C \to D)))$ I.1.
7. $A \to (B \to (C \to D))$ MP

24

№2. $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \to (B \to (C \to D))$ Пилипенко.К
Білет №2

1. $D \to (C \to D)$ (ПП I.1)
2. $C \to D$ (MP)
3. $(C \to D) \to (B \to (C \to D))$ (1.1)
4. $B \to (C \to D)$ (MP)
5. $(B \to (C \to D)) \to (A \to (B \to (C \to D)))$ (1.1)
6. $A \to (B \to (C \to D))$ (MP)

25=24

Довести, що $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \to (B \to (C \to D))$

$\neg C, D \vdash (C \to D)$ (за лемою лек.2, с.33)

$\vdash (C \to D) \to (B \to (C \to D))$ (I.1, ПП)

$\vdash B \to (C \to D)$ (MP)

$\vdash (B \to (C \to D)) \to (A \to (B \to (C \to D)))$ (I.1, ПП)

$\vdash A \to (B \to (C \to D))$ (MP)

хуйня 26

(2) $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \to (B \wedge (C \to D))$

1) $\neg C, D \vdash C \to D$

2) $\neg B, C \to D \vdash \neg (B \wedge (C \to D))$

3) $\neg A, \neg (B \wedge (C \to D)) \vdash \underline{A \to (B \wedge (C \to D))}$

2. Довести, що $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D, \vdash A \to (B \to (C \to D))$

1. $\vdash_{I1} \neg C \to (\neg D \to \neg C) \vdash_{MP} \neg D \to \neg C$

2. $\vdash_{IV1} (\neg D \to \neg C) \to (C \to D) \vdash_{MP} C \to D$

3. $\vdash_{I1} (C \to D) \to (B \to (C \to D) \vdash_{MP} B \to (C \to D)$

4. $\vdash (B \to ((C \to D)) \to (A \to (B \to (C \to D)) \vdash_{MP} A \to (B \to (C \to$

$\neg C \vdash A \to (B \to (C \to D))$, отже:

$\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \to (B \to (C \to D))$

2. $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash (A \to B \wedge (C \to D))$

$D \to (C \to D)$ (I.1)

$C \to D$ (M.P)

$(C \to D) \to A \to (C \to D)$ (I.1)

$A \to ((C \to D)$ (M.P)

$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ (I.1.)

$\neg B \to \neg A$ (M.P)

$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (IV.1)

$A \to B$ (M.P)

$(A \to B) \to ((A \to (C \to D)) \to (A \to B \wedge (C \to D))$ (II.3

$(A \to (C \to D) \to (A \to (B \wedge (C \to D))$ (M.P)

$A \to (B \wedge (C \to D))$ (M.P)

що і треба було довести.

№2. Довести, що $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash \neg(A \wedge (B \to (C \to D)))$

1) $\neg A \to \neg A \vee \neg(B \to (C \to D))$ $[a \to a \vee B]$

2) $\neg A \vee \neg(B \to (C \to D)) \sim \neg(A \wedge (B \to (C \to D)))$ $[\neg a \vee \neg b \sim \neg(a \wedge b)]$

3) $(\neg A \vee \neg(B \to (C \to D)) \sim \neg(A \wedge (B \to (C \to D)))) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\neg A \vee \neg(B \to (C \to D)) \to (A \wedge (B \to (C \to D))))$ $[a \sim b \to (a \to b)]$

4. $\neg A \vee \neg(B \to (C \to D)) \to \neg(A \wedge (B \to (C \to D)))$ [MP 2, 3]

5. $\neg(A \wedge (B \to (C \to D)))$ [MP 1, 4]

29=30

N2

$\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash \neg(A \wedge (B \to (C \to D)))$.

$\vdash_{I.1} \neg C \to (\neg D \to \neg C) \vdash_{MP} \neg D \to \neg C$

$\vdash_{IV.1} (\neg D \to \neg C) \to (C \to D) \vdash_{MP} C \to D$

$\vdash_{I.1} (C \to D) \to (B \to (C \to D)) \vdash_{MP} B \to (C \to D)$

$\vdash_{IV.1} ((A \wedge (B \to (C \to D))) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \wedge (B \to (C \to D))))$

$\vdash_{III.1} (A \wedge (B \to (C \to D))) \to A$,

отже, за правилом висновку

$\vdash (\neg A \to \neg(A \wedge (B \to (C \to D))))$, тому

$\neg A \vdash \neg(A \wedge (B \to (C \to D)))$.

полухуй **31**

2) Довести, що $A, B, C, \neg D \vdash \neg(A \to (B \ldots$

Використаємо леми з 2 лекції:

1) $C, \neg D \vdash \neg(C \to D)$ - додаємо $\neg(C \to D)$ до початкової множини ф-л

2) $B, \neg(C \to D) \vdash \neg(B \to (C \to D))$ - додаємо $\neg(B \to (C \to D))$ до поч. множини

3) $A, \neg(B \to (C \to D)) \vdash \neg(A \to (B \to (C \to D)))$

Отже, $A, B, C, \neg D \vdash \neg(A \to (B \to (C \to D)))$, що і треба було показати.

32

$\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \vee (B \rightarrow (C \rightarrow D))$

Gruid I.

$\vdash_{I.1} \neg C \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg C)$

$\vdash_{M.P.} \neg D \rightarrow \neg C$

$\vdash_{IV.1} (\neg D \rightarrow \neg C) \rightarrow (\neg\neg C \rightarrow \neg\neg D)$

$\vdash_{MP} \neg\neg C \rightarrow \neg\neg D$

$\vdash_{IV.3} \neg\neg C \rightarrow C$

$\vdash_{IV.3} \neg\neg D \rightarrow D$

$\vdash_{I.1} (C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow D))$

$\vdash_{MP} B \rightarrow (C \rightarrow D)$

$\vdash_{III} (B \rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow A \vee (B \rightarrow (C \rightarrow D))$

$\vdash_{MP} A \vee (B \rightarrow (C \rightarrow D))$

$\neg C \vdash A \vee (B \rightarrow (C \rightarrow D))$

$\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \vee (B \rightarrow (C \rightarrow D))$

33

$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

За аксіомою IV.1 маємо, що $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

Отже, треба довести $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

1) $\neg q \to \neg p$ – гіпотеза

2) p – гіпотеза

3) $(\neg q \to \neg p) \to ((\neg q \to p) \to q)$ за лемою

4) $p \to (\neg q \to p)$ I.1

5) $(\neg q \to p) \to q$ MP(1,3)

6) $p \to q$ (лема, що $A \to B, B \to C \vdash A \to C$)

7) q MP(2,6)

~~Отже~~ 8) $\neg q \to \neg p, p \vdash q \overset{(TD)}{\Rightarrow} \neg q \to \neg p \vdash p \to q$

$\overset{(TD)}{\Rightarrow} \vdash (\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

Отже, доведено $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$