Контрольна робота з алгебри та геометрії
студента 1 курсу ФІМК група ІПЗ-11
Вербицького Артема

Варіант 2

1. • Горизонтальним рангом деякої матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є ранг системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$, де a_i утворений i-им рядком матриці.

• Вертикальним рангом матриці A є ранг системи векторів, утворених зі стовпчиків матриці A.

• Рангом матриці по мінору називають найвищий порядок мінорів матриці (мінором порядку r матриці A називають визначник, побудований на перетині будь-яких r рядків і r стовпчиків матриці A), які не дорівнюють нулю, якщо матриця ненульова, і дорівнюють, якщо нульова.

• Ранг ненульової матриці за мінором дорівнює порядку її базисного мінору (мінор називається базисним, якщо він $\neq 0$, а всі його оточуючі $= 0$, або їх не існує).

• Для довільної матриці A її горизонтальний, вертикальний ранги, а також ранг по мінору рівні, і дорівнюють

Scanned with CamScanner

рангу матриці $r(A)$.

Властивості:

- Нехай маємо деяку систему лінійних рівнянь, якій відповідає основна матриця A і розширена $\overline{A}$. Ця система сумісна $\Leftrightarrow$ коли ранг A = рангу $\overline{A}$. Якщо ця система сумісна, то вона матиме єдиний розв'язок $\Leftrightarrow$ коли $r(A)$ = числу змінних. Буде невизначеною $\Leftrightarrow$ коли $r(A)$ < числа змінних.
- Ранг матриці не зміниться, якщо над її рядками (стовпчиками) виконати елементарні перетворення.
- Ранг транспонованої матриці дорівнює рангу вихідної.
- Якщо до матриці дописати або викреслити нульовий рядок (стовпчик), то її ранг не зміниться.

2. $$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ y & y & y & \dots & 0 \end{vmatrix}_n = D_n;$$

Віднімемо від кожного (крім I) рядка попередній.

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y & -x & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix}_n = -xD_{n-1} + (-1)^{n+1}x \begin{vmatrix} y & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y & -x & \dots & 0 \\ 0 & 0 & y & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$= -xD_{n-1} + (-1)^{n+1}x\,y^{n-1}$$

$$D_n = -x\left(-xD_{n-2} + (-1)^n x y^{n-2}\right) + (-1)^{n+1} x y^{n-1} =$$

$$= (-1)^2 x^2 D_{n-2} + (-1)^{n+1} x^2 y^{n-2} + (-1)^{n+1} x y^{n-1} =$$

$$= (-1)^2 x^2 \left(-x D_{n-3} + (-1)^{n-1} x y^{n-3}\right) + (-1)^{n+1} x^2 y^{n-2} + (-1)^{n+1} x y^{n-1} =$$

$$= (-1)^{n-2} x^{n-2} D_2 + (-1)^{n+1}\left(\ldots + x^3 y^{n-3} + x^2 y^{n-2} + x y^{n-1}\right) =$$

$$= (-1)^{n-1} x^{n-1} \underbrace{D_1}_{=0} + (-1)^{n+1} x^{n-1} y + (-1)^{n+1}\left(\ldots + x^2 y^{n-2} + x y^{n-1}\right) =$$

$$= (-1)^{n+1}\left(x^{n-1} y + x^{n-2} y^2 + \ldots + x^2 y^{n-2} + x y^{n-1}\right) =$$

$$= (-1)^{n+1} xy \underbrace{\left(x^{n-2} + x^{n-3} y + \ldots + x y^{n-3} + y^{n-2}\right)}_{\text{Геом. прогрессия}} \boxed{=}$$

$$b_1 = x^{n-2} \quad q = x^{-1} y \quad b_{n-1} = y^{n-2}$$

$$S_{n-1} = \frac{b_{n-1} q - b_1}{q-1} = \frac{y^{n-2} x^{-1} y - x^{n-2}}{x^{-1} y - 1} = \frac{x^{-1}(y^{n-1} - x^{n-1})}{x^{-1}(y - x)} = \frac{x^{n-1} - y^{n-1}}{x - y};$$

$$\boxed{=} (-1)^{n-1} xy S_{n-1} = (-1) = (-1)^{n-1} xy \frac{x^{n-1} - y^{n-1}}{x - y}$$

$$D_n = (-1)^{n-1} xy \frac{x^{n-1} - y^{n-1}}{x - y}$$

3.
$$\begin{aligned}
7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2 &= 0\\
2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 6 &= 0\\
5x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 &= 0\\
2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0
\end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 4 & 2\\ 2 & -2 & 1 & 1\\ 5 & 6 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1)\\ \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 1\\ 5 & 6 & 3 & 2\\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1)\\ \cdot 3 \end{matrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot 5 = -5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 & 2\\ 6 & -2 & 1 & 1\\ 3 & 6 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1)\\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 0\\ 6 & -5 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot(-2) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 0\\ 6 & -5 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1\\ 6 & -5 & 0\\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1\\ 1 & -5 & 0\\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -10 + 15 - 3 = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -III \\ -IV \\ = \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} -2IV = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \,//$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2IV \\ -IV \\ -2IV \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -45 + 18 + 10 = -17 \,//$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 6 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \,//$$

$-2III \; -3III$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{2}{5}; \quad x_2 = -\frac{6}{5}; \quad x_3 = \frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}; \quad x_4 = 1 \,//$$

4.
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -I-IV \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -IV \\ \\ \\ -III \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ +II \\ -2I \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 14 & 10 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) -III \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 7 & 0 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -6IV \\ -4IV \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -59 & -41 & 0 & 7 & 12 & -30 \\ 0 & 0 & -36 & -25 & -1 & 5 & 9 & -21 \\ 0 & 1 & 10 & 7 & 0 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right) -2III \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 7 & 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 9 & 2 & -3 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -36 & -25 & -1 & 5 & 9 & -21 \end{array}\right) +3III \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 7 & 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 9 & 2 & -3 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 & -4 & -9 & 15 \end{array}\right) -4IV \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 7 & 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -18 & 13 & 30 & -48 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 & -4 & -9 & 15 \end{array}\right) -3III \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & -5 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 10 & 7 & 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -18 & 13 & 30 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 59 & -43 & -99 & 159 \end{array}\right) \begin{matrix} -5IV \\ +7IV \\ +IV \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -7 & 0 & -294 & 215 & 495 & -796 \\ 0 & 1 & 10 & 0 & 413 & -302 & 208 & 1118 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 41 & -30 & -69 & 111 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -59 & 43 & 99 & -159 \end{array}\right) \begin{matrix} +7III \\ -10III \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 & 5 & 12 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 41 & -30 & -69 & 111 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -59 & 43 & 99 & -159 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix} \,//$$