1436. $\mathbb{R}^3$, e_1, e_2, e_3 – стандартний базис

φ – проектування на $\langle e_1\rangle$ паралельно $\langle e_2, e_3\rangle$

$\mathbb{R}^3 = \langle e_1\rangle \oplus \langle e_2, e_3\rangle$

$\forall x \in \mathbb{R}^3$ однозначно $x = y + z$, де $y \in \langle e_1\rangle$, $z \in \langle e_2, e_3\rangle$

y – пр. x на $\langle e_1\rangle \parallel \langle e_2, e_3\rangle$

$\varphi(x) = y$

$\forall x_1 \in \mathbb{R}^3, x_2 \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \exists! \, y_1, y_2 \in \langle e_1\rangle, \exists! \, z_1, z_2 \in \langle e_2, e_3\rangle$

$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = y_2 + z_2$

$\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2) = \varphi(\alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2)) =$

$= \varphi(\underbrace{(\alpha y_1 + \beta y_2)}_{\in \langle e_1\rangle} + \underbrace{(\alpha z_1 + \beta z_2)}_{\in \langle e_2, e_3\rangle}) = \alpha y_1 + \beta y_2 =$

$= \alpha\varphi(x_1) + \beta\varphi(x_2) \Rightarrow \varphi$ – лінійне

$\varphi(e_1) = e_1 = (1, 0, 0)$

$\varphi(e_2) = \varphi(e_3) = (0, 0, 0)$

$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\varphi(e_1) \mid \varphi(e_2) \mid \varphi(e_3))$ //

1443. $\varphi(x) = (2\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{x}_1 + \bar{x}_3, \bar{x}_3^2)$

$\exists x = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}_3$, $\exists \alpha = 2$

$\varphi(\alpha x) = \varphi(0, 0, 2) = (0, 2, 4)$

$\alpha\varphi(x) = 2 \cdot (0, 1, 1) = (0, 2, 2)$

$\Rightarrow \varphi$ не є лінійним //

1444. $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_3,\ x_2)$

Доведемо, що φ – лінійне

$\forall x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_3 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$\varphi(\alpha x + \beta y) = \varphi(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) =$

$= (\alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3,\ \alpha x_3 + \beta y_3,\ \alpha x_2 + \beta y_2) =$

$= (\alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3,\ \alpha x_3,\ \alpha x_2) + (\beta y_1 - \beta y_2 + \beta y_3,\ \beta y_3,\ \beta y_2) =$

$= \alpha(x_1 - x_2 + x_3,\ x_3,\ x_2) + \beta(y_1 - y_2 + y_3,\ y_3,\ y_2) = \underline{\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)}$

$\Rightarrow \varphi$ – лінійне перетворення $\mathbb{R}_3$

$\varphi(e_1) = \varphi(1,0,0) = (1,0,0)$

$\varphi(e_2) = \varphi(0,1,0) = (-1,0,1)$

$\varphi(e_3) = \varphi(0,0,1) = (1,1,0)$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1445. $a_1 = (2,3,5)$ $\quad b_1 = (1,1,1)$ $\quad$ задані в б. $\{e_1, e_2, e_3\} = e$

$a_2 = (0,1,2)$ $\quad b_2 = (1,1,-1)$

$a_3 = (1,0,0)$ $\quad b_3 = (2,1,2)$

$(a_1 | a_2 | a_3 | E) \overset{\text{е.п.р.}}{\sim} (E | A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ rank $A = 3 \Rightarrow a_1, a_2, a_3$ – лін. нез., отже утворюють базис в $\mathbb{R}_3$

Тому за лемою $\exists!\ \varphi$ – лін. перетв. $\mathbb{R}_3$: $\varphi(a_i) = b_i$, $i = \overline{1,3}$

A – матр. переходу $e \to a$

A^{-1} – м. п. $a \to e$ $\qquad A^{-1} = (e_1 | e_2 | e_3)_a$

$e_1 =$ [illegible] a_3 $\qquad \varphi(e_1) = \varphi(a_1 - 2a_2 - a_3) = \varphi(a_1) - 2\varphi(a_2) - \varphi(a_3) =$ ~~[illegible]~~ $= (1,1,2)$

$e_2 = 2a_1 - 5a_2 - 4a_3$ $\qquad (1,1,1) + (-2,-2,2) + (-2,-1,-2)$

$e_3 = -a_1 + 3a_2 + 2a_3$ $\qquad =$ ~~$(1,1,1) - (2,2,-2) - (2,1,2) = (1,1,1)$~~

Scanned with CamScanner

$\varphi(e_2) = 2b_1 - 5b_2 - 4b_3 = (2,2,2)+(-5,-5,5)+(-8,-4,-8) = (-11,-7,-1)_\varphi$

$\varphi(e_3) = -b_1 + 3b_2 + 2b_3 = (-1,-1,-1)+(3,3,-3)+(4,2,4) = (6,4,0)_\varphi$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} //$$

1449. б) $M_2(F)$ - мн. кв. матр. 2 пор. 2 ел. з F

$\varphi: M_2(F) \to M_2(F)$

$\forall A \in M_2(F): \varphi(A) = A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Дов. φ - лін. перетв. $M_2(F)$, знайти матр. A_φ перетв. φ в базисі $e = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

$\Gamma \ \forall A, B \in M_2(F), \alpha, \beta \in F;$

$\varphi(\alpha A + \beta B) = (\alpha A + \beta B)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta B\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha\varphi(A) + \beta\varphi(B)$

$\Rightarrow \varphi$ - лінійне

$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ae_1 + 0e_2 + be_3 + 0e_4 = (a, 0, b, 0)$

$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = 0e_1 + ae_2 + 0e_3 + be_4 = (0, a, 0, b)$

$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = ce_1 + 0e_2 + de_3 + 0e_4 = (c, 0, d, 0)$

$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = 0e_1 + ce_2 + 0e_3 + de_4 = (0, c, 0, d)$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix} //$$

1451. Якщо A є матрицею лін. перетворення у базисі $\{e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_j, \ldots, e_n\}$, то нова матриця лін. перетворення A' у базисі $\{e_1, e_2, \ldots, e_j, \ldots, e_i, \ldots, e_n\}$ матиме вигляд:

$A' = PAP'$, де P - матриця перестановки векторів e_i та e_j.

Матриця P – це одинична матриця, а з поміняними місцями i-им та j-им стовпцями.

Отже, у матриці A' поміняються i-ті та j-ті рядки та стовпці.