Заняття №8

Випадкові величини. Функція розподілу.

Нехай (Ω, U, P) – довільний ймовірносний простір. Числову функцію $\xi = \xi(\omega)$ від елементарної події $\omega \in \Omega$ будемо називати випадковою величиною, якщо для довільного числа x

$$\{\xi \le x\} = \{\omega : \xi(\omega) \le x\} \in U .$$

Функцію $F(x) = F_\xi(x) = P\{\xi \le x\}$, визначену при усіх $x \in R$, будемо називати функцією розподілу випадкової величини ξ.

Лема 1. Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ задовольняє властивостям:

a) для $x_1 < x_2$ $\quad P\{x_1 < \xi \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$;

b) $P\{\xi < x\} = F(x-0)$.

Наслідок 1. Якщо $F(x)$ функція розподілу випадкової величини ξ, то

1) $P\{\xi = x\} = F(x) - F(x-0)$;
2) $P\{x_1 \le \xi \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1 - 0)$;
3) $P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2 - 0) - F(x_1)$;
4) $P\{x_1 \le \xi < x_2\} = F(x_2 - 0) - F(x_1 - 0)$.

Характеристичні властивості функції розподілу містить наступна теорема.

Теорема 1. Функція розподілу $F(x)$ має наступні властивості:

1) *F(x)* – неспадна;
2) *F(x)* – неперервна справа;
3) $F(+\infty)=1$;
4) $F(-\infty)=0$.

Типи функцій розподілу.

1) Дискретний тип функції розподілу.

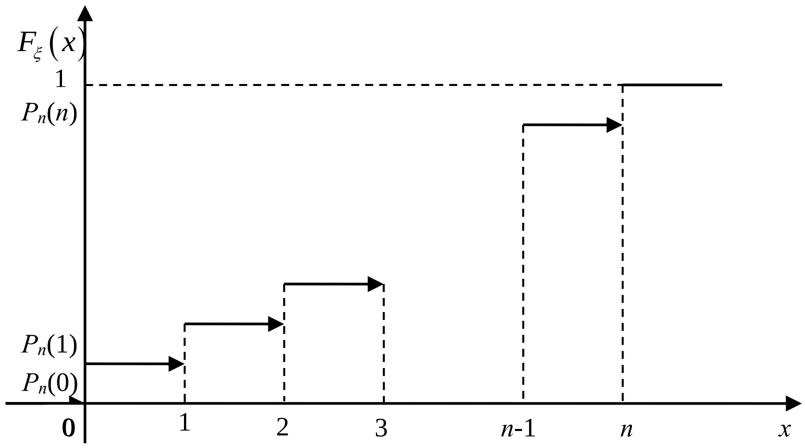
Цей тип функції розподілу відповідає дискретним випадковим величинам.

Приклад 1. Розглянемо біноміальний розподіл

$$P\{\xi = m\} = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m \in \{0,1,\dots,n\} = N_n .$$

Функцію розподілу ξ можна подати у вигляді

$$F_\xi(x) = \sum_{\substack{m \in N_n \cap \\ \cap(-\infty, x]}} P_n(m) = \sum_{\substack{m \in N_n \cap \\ \cap(-\infty, x]}} C_n^m p^m q^{n-m} .$$



2) Абсолютно неперервний тип функції розподілу.

Розподіл випадкової величини ξ будемо називати абсолютно неперервним, якщо існує вимірна функція $f_\xi(u)$, яка називається щільністю, така, що $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du$.

Щільність задовольняє наступним властивостям:

а) $\forall x \in R \quad f_\xi(x) \geq 0$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$.

3) Сингулярний тип функції розподілу.

Якщо функція розподілу випадкової величини ξ неперервна, але не має щільності, то розподіл ξ називається сингулярним.

Числові характеристики випадкових величин абсолютно неперервного типу.

1) $M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdF_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx;$

2) $Mg(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f_\xi(x)dx;$

3) $D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2 = M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2;$

4) $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta;$

5) $r_{\xi,\eta} = \dfrac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}.$

Приклад 2. Задано функцію:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, x\in[0;5],\\ 0, x\notin[0;5].\end{cases}$$

Перевірити чи буде ця функція щільністю розподілу. Якщо так, тоді знайти функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію відповідної випадкової величини.

1. $f(x)\geq 0, \forall x\in R;$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{\infty} f(x)dx=\int_{0}^{5}\frac{1}{5}dx=\frac{x}{5}\Big|_0^5=1;$$

2. $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\begin{cases}1, x>5,\\ \int_0^x\frac{1}{5}du, x\in[0;5],\\ 0, x<0;\end{cases}=\begin{cases}1, x>5,\\ \frac{x}{5}, x\in[0;5],\\ 0, x<0;\end{cases}$$

3. $$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^5\frac{x}{5}dx=\frac{x^2}{10}\Big|_0^5=2{,}5;$$

4. $$M\xi^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^5\frac{x^2}{5}dx=\frac{x^3}{15}\Big|_0^5=\frac{25}{3};$$

$$D\xi=M\xi^2-\left(M\xi\right)^2=\frac{25}{3}-\frac{25}{4}=\frac{25}{12}.$$

Задача 1. Які з поданих нижче функцій є функціями розподілу:

А) $F(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}arctg(x);$

Б) $F(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+x}, x\geq 0,\\ 0, x<0.\end{cases}$

А) $$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\lim_{x\to-\infty}arctg(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\neq 0;$$

Б) Очевидно, що задана функція є неперервною, не спадною, оскільки для $x_1<x_2$ різниця

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{x_2}{x_2+1}-\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}>0.$$

Перевіримо дану функцію на існування границь на кінцях інтервалу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+1}=0;\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

Задача 2. Задано функцію

$$F_\xi(x)=\begin{cases}1,\ x\ge 4;\\ ax^2+bx, 1\le x<4;\\ 0,\ x<1.\end{cases}$$

Підібрати коефіцієнти a і b таким чином, щоб $F(x)$ була функцією розподілу деякої випадкової величини ξ. Знайти $P(2<\xi\le 3)$.

$$\begin{cases}a+b=0,\\ 16a+4b=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-b,\\ 16a-4a=1.\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{12}, b=-\frac{1}{12}.$$

$$F_\xi(x)=\begin{cases}1,\ x\ge 4;\\ \dfrac{x^2-x}{12}, 1\le x<4;\\ 0,\ x<1.\end{cases}$$

$$P(2<\xi\le 3)=F_\xi(3)-F_\xi(2)=\frac{9-3-4+2}{12}=\frac{1}{3}.$$

Задача 3. Задано функцію

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a^2}e^{-\frac{x}{a}},\ x\ge 0;\\ 0,\ x<0.\end{cases}$$

Показати, що для будь-якого *a>0* цю функцію можна розглядати як щільність розподілу деякої випадкової величини. Знайти математичне сподівання та дисперсію відповідної випадкової величини.

$$\int_0^\infty \frac{x}{a^2}e^{-\frac{x}{a}}dx=-\frac{x}{a}e^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^\infty+\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}}dx=-e^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^\infty=1;$$

$$M\xi=\int_0^\infty \frac{x^2}{a^2}e^{-\frac{x}{a}}dx=-\frac{x^2}{a}e^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^\infty+\frac{2}{a}\int_0^\infty xe^{-\frac{x}{a}}dx=2a;$$

$$M\xi^2=\int_0^\infty \frac{x^3}{a^2}e^{-\frac{x}{a}}dx=-\frac{x^3}{a}e^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^\infty+\frac{3}{a}\int_0^\infty x^2e^{-\frac{x}{a}}dx=3a\cdot 2a=6a^2;$$

$$D\xi=M\xi^2-\left(M\xi\right)^2=6a^2-4a^2=2a^2.$$

Задача 4. Випадкова величина ξ задана на проміжку $[a,4]$ щільністю $f_\xi(x)=Ax^2$. Потрібно знайти a і A, якщо відомо $M\xi=0$.

$$\begin{cases} \int_a^4 f_\xi(x)dx=1; \\ M\xi=\int_a^4 xf_\xi(x)dx=0. \end{cases}$$

$$\int_a^4 Ax^2dx=\frac{Ax^3}{3}\Big|_a^4=1,\Rightarrow A(4^3-a^3)=3;$$

$$\int_a^4 Ax^3dx=\frac{Ax^4}{4}\Big|_a^4=0,\Rightarrow A(4^4-a^4)=0,\Rightarrow a=-4;\ A=\frac{3}{128}.$$

Основні розподіли абсолютно неперервного типу.

1) Нормальний (або гауссівський) розподіл.

Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами $N\left(a,\sigma^2\right),\quad -\infty<a<\infty$, якщо вона має щільність

$$f_\xi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty,$$

або функцію розподілу

$$F_\xi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}dy,\quad -\infty<x<\infty.$$

Нормальний розподіл з параметрами $N(0,1)$ і щільністю $f_\xi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ називається стандартним.

2) Рівномірний розподіл.

Будемо говорити, що випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$, якщо її щільність має вигляд

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & при \quad a\le x\le b,\\ 0, \quad при \quad x<a \quad або \quad x>b.\end{cases}$$

Або функція розподілу має вигляд

$$F_\xi(x)=\begin{cases}1, x>b;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, x\in[a,b];\\ 0, x<a.\end{cases}$$

3) Показниковий розподіл.

Випадкова величина ξ має показниковий (експоненціальний) розподіл з параметром $\lambda>0$, якщо її щільність має вигляд

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x\ge 0,\\ 0, & при \quad x<0.\end{cases}$$

Або функція розподілу має вигляд

$$F_\xi(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, x\ge 0;\\ 0, \quad x<0.\end{cases}$$

Функції від випадкових величин

Нехай $g(x)$ – вимірне відображення $R\to R$, тобто для будь-якого $B\in$B$_R$, $g^{-1}(B)\in$B$_R$. Такі функції називаються борелівськими. До множини борелівських функцій належать у частковому випадку неперервні і кусково-неперервні функції.

Теорема 2. Якщо ξ – випадкова величина, а *g(x)* – борелівська функція, то $\eta=g(\xi)$ - випадкова величина.

Приклад 3. Нехай $g(x)=x^2, \quad F_\xi(x)$ – функція розподілу випадкової величини ξ з неперервною щільністю $p_\xi(x)$. Тоді $\eta=g(\xi)=\xi^2$. При $x\ge 0$ маємо

$$F_\eta(x)=P\{\eta\le x\}=P\{\xi^2\le x\}=P\{-\sqrt{x}\le\xi\le\sqrt{x}\}=F_\xi(\sqrt{x})-F_\xi(-\sqrt{x}).$$

Операція диференціювання дає

$$p_\eta(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(p_\xi(\sqrt{x})+p_\xi(-\sqrt{x})\right).$$

Задача 5. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$. Знайти розподіл випадкової величини $\eta=\dfrac{\xi-a}{b-a}$.

$$F_\xi(x)=\begin{cases}1,\ x>b;\\ \dfrac{x-a}{b-a},\ x\in[a,b];\\ 0,\ x<a.\end{cases}$$

$$F_\eta(y)=P(\eta\le y)=P\left(\frac{\xi-a}{b-a}\le y\right)=P\big(\xi\le y(b-a)+a\big)=F_\xi(y(b-a)+a).$$

Розглянемо випадки

1. $y(b-a)+a>b,\Rightarrow y>1;$
2. $y(b-a)+a<a,\Rightarrow y<0;$
3. $y\in[0;1]$

$$F_\xi(y(b-a)+a)=\frac{y(b-a)+a-a}{b-a}=y.$$

Таким чином

$$F_\eta(y)=\begin{cases}1,\ y>1;\\ y,\ y\in[0;1];\\ 0,\ y<0.\end{cases}$$

Задача 6. Нехай випадкова величина ξ має неперервну і строго монотонну функцію розподілу $F_\xi(x)$. Довести, що випадкова величина $\eta=F_\xi(\xi)$ має рівномірний розподіл на відрізку $[0;1]$.

$$F_\eta(x)=P(\eta\le x)=P\big(F_\xi(\xi)\le x\big)=P\big(\xi\le F_\xi^{-1}(x)\big)=$$

$$=F_\xi\big(F_\xi^{-1}(x)\big)=x,\ x\in[0,1];$$

$$F_\eta(x)=\begin{cases}1,\ x>1;\\ x,\ x\in[0;1];\\ 0,\ x<0.\end{cases}$$

Задача 7. Випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом $N\left(m,\sigma^2\right)$. Треба знайти розподіл випадкової величини $\eta=a+b\xi$ та встановити при яких a і b випадкова величина η буде мати стандартний нормальний розподіл $N\left(0,1\right)$.

$$F_\eta(x)=P(\eta\le x)=P(a+b\xi\le x)=P\left(\xi\le\frac{x-a}{b}\right)=F_\xi\left(\frac{x-a}{b}\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{b}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}dy=\left|\begin{array}{l} y=\dfrac{t-a}{b} \\ t=by+a \\ dy=\dfrac{dt}{b}\end{array}\right|=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma b}e^{-\frac{(t-(a+mb))^2}{2b^2\sigma^2}}dt;$$

Випадкова величина η має нормальний розподіл $N(a+mb,b^2\sigma^2).$

$$\begin{cases} a+mb=0, \\ b^2\sigma^2=1, \end{cases}\Rightarrow b=\frac{1}{\sigma},\ a=-\frac{m}{\sigma}.$$

Тоді $\eta=\dfrac{\xi-m}{\sigma}=\dfrac{\xi-M\xi}{\sqrt{D\xi}}$ буде мати стандартний нормальний розподіл $N(0,1).$

Завдання для самостійної роботи.

1) Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює

$$f_\xi(x)=ae^{-\lambda|x|},\ a>0,\ \lambda>0.$$

Знайти коефіцієнт a, функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію ξ. Побудувати графіки $f_\xi(x)$ та $F_\xi(x)$.

2) Для випадкової величини ξ, розподіленої за показниковим розподілом з параметром $\lambda>0$, знайти математичне сподівання та дисперсією.

3) Випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом $N\left(m,\sigma^2\right)$. Довести, що $M\xi=m$, а $D\xi=\sigma^2$.

(Інтеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$ вважаємо відомим).