1327. $\mathbb{R}_n = L_1 \oplus L_2 \Leftrightarrow$ а) $\mathbb{R}_n \supseteq L_1$, $\mathbb{R}_n \supseteq L_2$

б) $\forall x \in \mathbb{R}_n$ однозначно $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$

а) Очевидно $\mathbb{R}_n \supseteq L_1$ та $\mathbb{R}_n \supseteq L_2$

б) Припустимо $\exists$ ще розклад $x = y_1 + y_2$, $y_1 \in L_1$, $y_2 \in L_2$

$\Rightarrow$ $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, або $\underbrace{x_1 - y_1}_{\in L_1} = \underbrace{y_2 - x_2}_{\in L_2} \in L_1 \cap L_2 = \{\Theta\}$

$\Rightarrow$ $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, тобто розклад однозначний

$\Leftarrow$ $\forall x \in L_1 \cap L_2$. Тоді $x \in L_1, L_2$, $L_1 + L_2 = L$

Тому $\underbrace{x}_{L} = \underbrace{x}_{L_1} + \underbrace{\Theta}_{L_2}$, $\underbrace{x}_{L} = \underbrace{\Theta}_{L_1} + \underbrace{x}_{L_2}$

Оскільки розклад однозначний, то $x = \Theta$

$\Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{\Theta\}$

1328. $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$,

1) Нехай $S = x_1 + \dots + x_n$ – сума його координат

Покладемо $y = x - \frac{S}{n}(1, \dots, 1)$.

Тоді сума координат вектора y дорівнює 0 та $y \in L_1$.

При цьому x дорівнює сумі вектора y і вектора з однаковими координатами, що належить L_2.

$\Rightarrow L_1 + L_2 = \mathbb{R}_n$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ x_1 = x_2 = \dots = x_n \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{\Theta\}$

$\Rightarrow L_1 \oplus L_2 = \mathbb{R}_n$

Одиничний вектор e_i представляється у вигляді суми:

$$\left(-\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

У першого вектора сума координат рівна нулю, і він буде проекцією e_i на L_1 паралельно L_1.

Другий вектор має однакові координати, і він є проекцією e_i на L_1 паралельно L_1.

1332. L - підпр. $\mathbb{R}_n$, $x_0 \in \mathbb{R}_n$

$P = L + x_0$ - многовид

1) $\theta \in L \Rightarrow \theta + x_0 = P$, тобто $x_0 \in P$

2) $\forall x \in P: P = L + x \Rightarrow P = L + L + x_0 \Rightarrow P = L + x_0$

1338. $a_0 = (3, 1, 2, 1, 3)$ $\quad b_0 = (2, 2, -1, -1, -1)$

$a_1 = (1, 0, 1, 1, 2)$ $\quad b = (2, 1, 0, 1, 1)$

$a_0 + a_1 t_1 = l_1$, $b_0 + b_1 t_2 = l_2$ - прямі

$l_1 \cap l_2$ - ?

Нехай $x \in l_1 \cap l_2 \Rightarrow x \in l_1, x \in l_2 \Rightarrow x = a_0 + a_1 t_1 = b_0 + b_1 t_2$

$a_1 t_1 - b_1 t_2 = b_0 - a_0$

$$(a_1 \mid -b_1 \mid b_0 - a_0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$t_1 = -3, t_2 = -1 \Rightarrow l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$, $l_1 \cap l_2 = \{x\}$

$x = a_0 - 3a_1 = b_0 - b_1 = (0, 1, -1, -2, -2)$