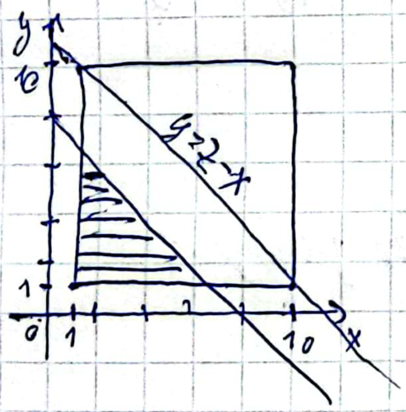
Білет №10

1. $F_{\xi+\eta}(z) = P(\xi+\eta \le z) = \iint\limits_{\xi+\eta\le z} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy =$

$= \iint\limits_{\xi+\eta\le z} f_\xi(x)\, f_\eta(y)\,dxdy =$

$$= \begin{cases} 1, & z > 20 \\ 0, & z < 2 \\ \frac{(z-2)^2}{162}, & z \in [2;11] \quad 1) \\ 1-\frac{(z-20)^2}{162}, & z \in [11;20) \quad 2) \end{cases}$$

1) $z \in [2; 11]$



$$\int_1^{z-1}\int_1^{z-x} \frac{1}{81}\,dydx = \int_1^{z-1}\left(\frac{1}{81}\,y\Big|_1^{z-x}\right)dx =$$

$$= \int_1^{z-1}\frac{1}{81}(z-x-1)\,dx =$$

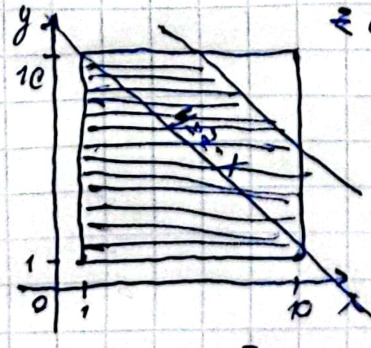
$$= \frac{1}{81}\left(\int_1^{z-1}(z-1)\,dx - \int_1^{z-1}x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{81}\left((z-1)x\Big|_1^{z-1} - \frac{x^2}{2}\Big|_1^{z-1}\right) = \frac{1}{81}\left((z-1)(z-2) - \frac{1}{2}\left((z-1)^2-1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{81}\left(z^2-3z+\frac{5-(z-1)^2}{2}\right) = \frac{2z^2-6z+5-z^2+2z-1}{162} =$$

$$= \frac{z^2-4z+4}{162} = \frac{(z-2)^2}{162}$$

2) $z \in [11;20]$



$$1 - \int_{z-10}^{10}\int_{z-x}^{10}\frac{1}{81}\,dydx = 1-\frac{1}{81}\int_{z-10}^{10}(10-z+x)\,dx =$$

$$= 1-\frac{1}{81}\left(\int_{z-10}^{10}(10-z)\,dx + \int_{z-10}^{10}x\,dx\right) =$$

$$= 1-\frac{1}{81}\left((10-z)(20-z) + \frac{1}{2}\left(100-(z-10)^2\right)\right) =$$

$$= 1-\frac{(z-20)^2}{162}$$

2. Число білих куль варіюється від 0 до 20, тобто ми маємо 21 припущення. Так як припущення рівноможливі, то ймовірність матиме вигляд

$$P(A) = \frac{\frac{C_1^1}{C_{20}^1} + \frac{C_2^1}{C_{20}^1} + \dots + \frac{C_{20}^1}{C_{20}^1}}{21} = \frac{\sum_{i=1}^{20} C_i^1}{21} = 0,5$$

3. $f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{3(\theta - x)^2}{\theta^3}, & x \in [0,\theta] \\ 0, & x \notin [0,\theta] \end{cases}$

$$\alpha_1 = M\xi = \int_0^\theta \frac{3x(\theta - x)^2}{\theta^3} = \frac{6x^2\theta^2 - 8x^3\theta + 3x^4}{4\theta^3}\Big|_0^\theta = \frac{\theta}{4} = \alpha_1 = \alpha_1(\theta)$$

$$\frac{\theta}{4} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$M\hat{\theta} = M\, 4\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = 4\theta \Rightarrow \text{оцінка зміщена}$$

1. Закон великих чисел

$$M\xi^2 = \int_0^\theta \frac{3x^2(\theta - x)^2}{\theta^3}\,dx = \cancel{\theta} - \frac{9\theta^2}{10}$$

2. Теорема про суперпозицію

$$\hat{\theta} = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \xrightarrow{P} 4M\xi^2 = -\frac{4\cdot 9\theta^2}{10},\ n \to \infty$$

Отже, оцінка не є консистентною.