МКР №4 з дискретної математики
група ІПС-11
Вербицький А. В.
Варіант 38

1. Кількість ребер у доповненні графу G, позначеному як ¬G, можна знайти за допомогою формули:
$|\neg E| = \frac{n(n-1)}{2} - k$, де $\frac{n(n-1)}{2}$ - кількість ребер повного графа K_n.

2. а) Ні, бо сума степенів 15 - непарна

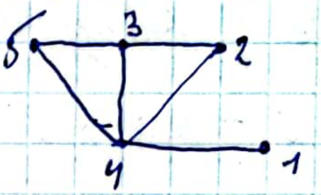
б) Існує 

в) Якщо граф без петель, то ні; бо якщо ∀ вершина суміжна з 4 іншими з шести, то дві вершини не можуть мати степінь 0.

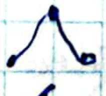
3. Побудуємо такі k різних ланцюгів, що мають першу та останню вершину непарного степеня, а всі інші парного. Такі вершини завжди існують і знаходяться в одній компоненті зв'язності. ~~[illegible]~~
Розглянемо підграф із невикористаних ребер: у ньому всі вершини мають парний степінь. Розіб'ємо його на компоненти зв'язності, побудуємо у кожній з них цикл Ейлера, після цього приєднаємо до одного з наших ланцюгів. Маємо k ланцюгів, що розбивають

множину ребер зв'язного графа.

4. Будемо доводити від супротивного. Припустимо, що цикл довжини 9 існує в K_5. Побудуємо його, послідовним додаванням ребер: при цьому степінь вершин збільшується на 2. Додавши 9 ребер, можна помітити, що степінь кожної вершини парний. Але у K_5 степінь кожної вершини дорівнює 10. Вилучимо одне ребро, щоб отримати 9 і отримуємо, що не у всіх вершинах отриманого графу парний степінь. Отримали суперечність.

5. 
Вершини 2 і 5 мають степінь 2, усі інші відповідно до номеру.

6. Наприклад, $k=3$, розглянемо C_3:  діаметр = 1

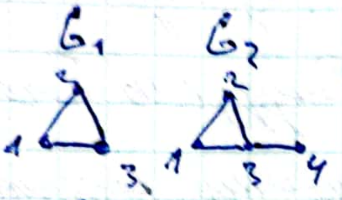
$\forall$ кістякове дерево C_3:  діаметр = 2

Такими графами будуть C_{2k+1}, для $\forall k \geq 1$.

7. Оскільки для ізоморфних графів існує взаємно-однозначна відповідність φ: $G=(V,E)$ на $G'=(V',E')$
$\varphi = \{(v,w),(\varphi(v),\varphi(w)) \mid (v,w)\in E, (\varphi(v),\varphi(w))\in E'\}$,
то $\forall$ ізоморфні графи мають однакову кількість вершин та ребер $\Rightarrow$ відстань між вершинами теж зберігається.

8. Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$ $V_1 = \{1, 2, 3\}$

$G_2 = (V_2, E_2)$ $V_2 = \{1, 2, 3, 4\}$



1 простий цикл

9. Графи ізоморфні $\Leftrightarrow$ коли ізоморфні їхні доповнення. Для графа з 10 вершинами і 43 ребрами доповнення матиме 10 вершин і $\frac{10(10-1)}{2} - 43 = 2$ ребра. Очевидно, таких неізоморфних доповнень буде 2.

10. Будемо доводити за допомогою матіндукції:

Базовий випадок $k = 1$

У матриці A елемент $a_{ij}^{(1)}$ дорівнює 1, якщо вершини v_i та v_j з'єднані ребром, та 0 – якщо ні.

При $k > 1$

Нехай $a_{ij}^{(k)}$ – елемент матриці A^k. Згідно з властивостями матричного множення $a_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-1} a_{il}^{k-1} \cdot a_{lj}$

$\Rightarrow a_{ij}^{k}$ дорівнює кількості шляхів довжиною $k-1$ між вершиною v_i та кожною вершиною

11. Оскільки доповнювальний граф має ребра, що відсутні у графі, то всі вершини в ньому мають степінь $n-1-k$, де k – степінь вершини у графі. Так як граф самодоповнюваний, то кількість вер-

шик зі степенем k має бути однакова, відповідно така ж кількість вершин буде зі степенем n-k-1.

12. $\sum \delta(v) = 2|E| \Rightarrow |E| = \frac{\sum \delta(v)}{2}$

Так як в кубічному графі всі вершини мають степінь 3, то формула має вигляд:

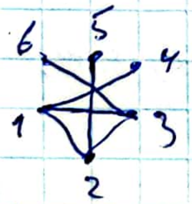
$|E| = \frac{3n}{2}$.

13. Кількість ребер дерева n-1, степінь вершин не більше s. Припустимо, що в дереві ≤k вершин степеня 1. Тоді інші n-k вершин мають степінь ≥2

Маємо нерівність

$k + 2(n-k) \le \cancel{2}(n-1)$

$k \ge n - 2\frac{s-1}{s-2} \Rightarrow k \le \frac{n(s-2)+2}{s-1}$

15. 

1, 2, 3 – центр

17. Кількість ребер в двочастковому $K_{m,n}$ можна обчислити формулою $|E| = m \cdot n$, адже кожна з n вершин першої частини пов'язана з m іншої.

19. Для планарного графа виконується:

$|E| \le 3|V| - 6 \qquad 15 = 3 \cdot 7 - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ граф існує

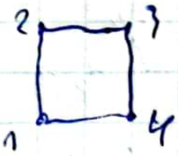
20. $\forall\, a_{ij}^{(2)}$ елемент A^2: $a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1} a_{ik} a_{ki} = \sum_{k=0} a_{ik}^2$, тому що $a_{ik} = a_{kj} \in \{0; 1\}$. Оскільки степінь i-ї вершини дорівнює сумі елементів i-го рядка матриці, то $a_{ij}^{(2)} = \delta(v_i)$

22. Припустимо, що такий граф $G = (V, E)$ існує. Тоді для $\forall$ планарного графа $|E| \le 3|V| - 6$. Оскільки G не має петель і кратних ребер, то $\Delta r \ge 3$ $\Rightarrow \sum \Delta r \ge 3$. Маємо 1 спільне ребро у гранях, тоді $\sum \Delta r \ge 3|P| - 1$ $\sum \Delta r \ge 14$ $\sum \Delta r = 2|E| \Rightarrow |E| = 7$

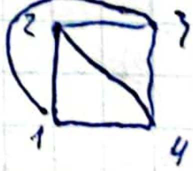
За формулою Ейлера: $|V| - |E| + |P| = 2 \Rightarrow |V| = 0$

Такого графа не існує.

23. У K_6 $\frac{6(6-1)}{2} = 15$ ребер. Для $\forall$ планарного графа $|E| \le 3|V| - 6$, тобто $|E| \le 12$. Отже, потрібно вилучити 3 ребра.

24. C_4 

Можна додати до 2 ребер: (2,4), (1,3)

Отримаємо K_4: 

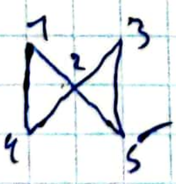
25. Припустимо, серед плоских графів з n вершинами найбільшу кількість граней має не тріангуляція. Тоді в такому графі є грань X,

обмежена не трикутником, а простим циклом який містить більше трьох вершин. За означенням грані плоского графа не належать графу одночасно. Тоді в грані можна провести ребро так, що дістанемо плоский граф, це суперечить тому, що граф мав найбільшу кількість граней. Отже, таким графом є лише тріангуляція.

28. За т. Ейлера найбільшу кількість граней має тріангуляція ⇒ вона має 6 граней

34. Такий граф існує лише 1: це K_2 

Для $\forall$ інших повних графів ця властивість не виконується.

39. а) 

б) K_4