1466. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda)(2-\lambda) + 4(2-\lambda) =$$

$$= -\lambda(8 - 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2) + 8 - 4\lambda = -8\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 8 - 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$$

$\lambda = \lambda_1 = 2$ кр. 1

$\lambda_2 = 2$ кр. 2

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \cancel{-4} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР

x_1	x_2	x_3
1	2	0

$c_1(1,2,0) + c_2(0,0,1)$, c_1 и $c_2 \neq 0$ одновременно

1468. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} = A$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-6-\lambda)(8-\lambda) + 39 + 24 + 3(-6-\lambda) -$$

$$- 6(8-\lambda) + 52(1-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 46\lambda - 48 + 33 - 18 - \lambda - 48 + 6\lambda + 52 - 52\lambda$$

$$= \cancel{-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 103\lambda - 105} \quad -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$$

$\lambda = 1$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \qquad x_3 - б. з.$$

ФРС

x_1	x_2	x_3
3	1	1

$c(3,1,1)$, $c \neq 0$

1469. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} = A$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 4 \\ 4 & 1-\lambda & 8 \\ 6 & -\lambda & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 4 & 1-\lambda & 7+\lambda \\ 6 & -\lambda & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ -2 & 1 & \lambda \\ 6 & -\lambda & 7 \end{vmatrix} =$$

$= 7 - \lambda + 6\lambda + 6\lambda - 18 + \lambda^2(1-\lambda) + 14 =$

$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 11\lambda + 3$

$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = -1$

$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -16 & 8 \\ \cancel{0} & \cancel{-16} & \cancel{8} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $x_3 - \text{б.н.}$

$C_1(1, 2, 2), \ C_1 \neq 0$

$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ \cancel{4} & \cancel{-6} & \cancel{8} \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $x_3 - \text{б.н.}$

ФРС

x_1	x_2	x_3
1	2	1

$C_2(1, 2, 1), \ C_2 \neq 0$

1471. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 1 & -4-\lambda & 5-\lambda \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 1 & -4-\lambda & 5-\lambda \\ -5 & 4+\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \\ -5 & 4+\lambda & 0 \end{vmatrix} = 75 - 25\lambda - 32 - 8\lambda - \lambda^3 - 5\lambda^2 - 16\lambda + 80 =$

$= -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 49\lambda + 123 \qquad \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2+3i, \ \lambda_3 = 2-3i$

$A-\lambda_1 E = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 7 & -5 & 9 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 10 & -20 \\ 1 & -5 & 9 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $r_{\dots}$

ФРС

x_1	x_2	x_3
1	2	1

$c_1(1,2,1)$, $c_1 \neq 0$.

$A-\lambda_2 E \begin{pmatrix} 2-3i & -5 & 7 \\ 1 & -6-3i & 9 \\ -4 & 0 & 3-3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-3i & -5 & 2 \\ 1 & -6-3i & 3-3i \\ -4 & 0 & 3-3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4-3i & -5 & 2 \\ 4-3i & -6-3i & 3-3i \\ 1-3i & 2 & 3-3i \end{pmatrix}$

$c_2(3-3i, 5-3i, 4)$, $c_2 \neq 0$

$c_3(3+3i, 5+3i, 4)$, $c_2 \neq 0$

1472. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= \lambda^2 (1-\lambda)^2$

$\lambda_1 = 0.$

$\lambda_2 = 1$

$A-\lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$c_{11}(0,1,0,0) + c_{12}(0,0,1,0)$, c_{11} i $c_{12} \neq 0$ одновремо

$A-\lambda_2 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ x_4 - б. п.

ФРС

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	1

$c_2(0,0,0,1)$, $c_2 \neq 0$

1475. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\cdot\lambda\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-\lambda)\cdot\lambda\cdot(-\lambda)\cdot(1-\lambda) = (1-\lambda)^2\cdot\lambda^2$$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 0$

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ФРС

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	1	0
0	0	0	1

$c_{11}(1,0,1,0) + c_{12}(0,0,0,1)$, c_{11} і $c_{12} \neq 0$ одночасно

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ФРС

x_1	x_2	x_3	x_3
0	1	0	0
0	0	1	0

$c_{21}(0,1,0,0) + c_{22}(0,0,1,0)$, c_{21} і $c_{22} \neq 0$ одночасно

1478. Нехай дане лінійне перетворення $\varphi(x)$; λ_1, λ_2 – різні власні числа $\varphi(x)$. Нехай v_1 і v_2 – відповідні власні вектори, тобто $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1$, $\varphi(v_2) = \lambda_2 v_2$. Припустимо, що $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$. Застосуємо φ

$\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \varphi v_1 + \beta v_2 = \alpha \lambda_1 v_1 + \beta \lambda_2 v_2 = 0$

Так як λ_1 і λ_2 різні, то v_1 і v_2 лін. незалежні. Отже, власні вектори, які належать різним власним числам лін. незалежні.