

**Бондарець Дарина (К-29)**  
**Екзаменаційний білет № 1**

2. Довести, що  $\neg A, \neg B, \neg C \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$ .

3. Дослідити формулу:

$$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \neg(\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)).$$

(1) В3 Дослідити формулу:  
 $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \neg (\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x))$

Формально заперечення формули (1)  
 (2)  $\neg (\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \rightarrow \neg (\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)))$

Зведемо формулу (2) до попередньої нормальній формі

$$\begin{aligned} & \neg (\neg \forall x (\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \vee \neg (\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x))) = \\ & = \neg (\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x \exists z (\neg P(x) \vee \neg Q(z))) = \\ & = \forall x (\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \exists x \forall z (P(x) \wedge Q(z)) = \\ & = \forall x \exists y \forall z ((\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge P(x) \wedge Q(z)) \end{aligned}$$

Зведемо до стандартної форми шляхом елімінації кванторів існування:

$$\forall x \forall z ((\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \wedge P(f(x)) \wedge Q(z))$$

Множина дис'юнктив логічної формули:  
 $S = \{ \neg P(x) \vee \neg Q(x), P(f(x)), Q(z) \}$

Ербранівський універсум:  
 $E = \{ a, f(a), f(f(a)), \dots \}$

Виведення пустого дис'юнкта:

1.  $\neg P(f(a)) \vee \neg Q(f(a))$
2.  $P(f(a))$

3.  $\neg Q(f(a))$  § 1,2

4.  $Q(f(a))$

5.  $\square$  § 3,4

Отже, формула (2) суперечлива  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  формула (1) - тавтологія.

№2 Довести, що

$\neg A, \neg B, \neg C \rightarrow (A \wedge B) \rightarrow C$

1.  $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A \rightarrow \neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$  IV. 1

2.  $\vdash (A \wedge B) \rightarrow A$  II. 1

3.  $\vdash \neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$  М.Р. (1,2)

4.  $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$  Т.Р. (теорема геджкінса)

5.  $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B))$  I. 1

6.  $\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B)$  М.Р. (4,5)

7.  $(\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$  IV. 1

8.  $(A \wedge B) \rightarrow C$  М.Р. (6,7)

Отже,  $\neg A, \neg B, \neg C \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$