Екзаменаційна робота

з управління динамічними системами

студента групи ІПС-21

Вербицького Артема Віталійовича

18 грудня 2023

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Бакалаври
Спеціальність: *Інженерія програмного забезпечення* Семестр: *третій*
Навчальний предмет: Управління динамічними системами

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 39

1. Однорідні лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними. (з прикладом, без задачі Коші).
2. Особливі точки на площині. Сідло, дикритичний вузол, вироджений вузол
3. Приклад 1 (Модуль 1 Д.р.)

Розв'язати рівняння

$$(xy^4 - x)dx + (xy + y)dy = 0$$

4. Приклад 2 (Модуль 1 Д.р.)

Знайти розв'язок лінійної неоднорідної системи

$$\begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 3e^t \end{cases}$$

5. Приклад 3 (Модуль 2 ТК)

Яким умовам повинні задовольняти сталі ***a, b, c,*** щоб динамічна система була керованою, якщо

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) + u(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = bx_2(t) + cx_1(t)$$

6. Приклад 4 (Модуль 2 ТК)

Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування з вільним правим кінцем траєкторії

$$J = \int_0^1 (4u_1^2(t) + u_2^{\,2}(t) + \cos^2(x_1(t)))dt + \sin^2(x_2(1)) \quad \to \quad \min$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + u_1, \\ x_2' = 6x_2 - x_1 - 3x_1x_2 + u_2 \end{cases} \quad x_1(0) = 4,\ x_2(0) = -2$$

Заверджено на засіданні кафедри моделювання складних систем,
протокол №5 від 15.11.2023року
Завідувач кафедри, доц. Д.І.Черній
Екзаменатор, доц. А.В. Шатирко

1. Рівняння з частинними похідними першого порядку має вигляд

$$\Phi\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \qquad (1)$$

<u>Визначення</u>. Розв'язком рівняння (1) називається функція

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad (2)$$

яка визначена і неперервна разом з частинними похідними в деякій області змінних $x_1, \dots, x_n$ і перетворює в цій області рівняння (1) в тотожність. При цьому $x_1, \dots, x_n$ і значення $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ лежать в області визначення функції $\Phi\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

Якщо в рівнянні (1) функція $\Phi\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ залежить лінійно від частинних похідних шуканої функції, то воно називається <u>лінійним</u>

$$X_1(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, \dots, x_n, u). \qquad (3)$$

Розглянемо однорідне рівняння, тобто випадок, коли $R(x_1, \dots, x_n, u) \equiv 0$, а функції $X_i(x_1, \dots, x_n, u)$, $i = 1, 2, \dots, n$ не залежать від u

$$X_1(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \qquad (4)$$

Рівняння (4) має тривіальний розв'язок $u = C$ $(C = const)$ (5)

Доведемо, що рівняння (4) має безліч розв'язків, відмінних від тривіальних.

Для цього, разом з (4), будемо розглядати систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі (систему рівнянь характеристик)

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,\dots,x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,\dots,x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,\dots,x_n)}. \qquad (6)$$

Наведемо дві теореми, які встановлюють зв'язок між рівнянням (4) та системою (6). Припустимо, що коефіцієнти $X_i(x_1,\dots,x_n)$, $i=\overline{1,n}$ рівняння (4) неперервні разом з частинними похідними по $x_1,\dots,x_n$ в деякому околі точки $x_1^0,\dots,x_n^0$ і в цій точці вони одночасно не перетворюються в нуль (тобто точка $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ не є особливою точкою системи). Наприклад, припустимо, що

$$X_n(x_1^0,\dots,x_n^0) \neq 0 \qquad (8)$$

<u>Теорема 1.</u> Довільний інтеграл системи рівнянь характеристик (6) є нетривіальним розв'язком рівняння (4).

<u>Теорема 2.</u> Довільний нетривіальний розв'язок рівняння (4) є інтегралом системи (6).

<u>Приклад.</u> Знайти розв'язки лінійного однорідного рівняння з частинними похідними

$$x\frac{\partial U}{\partial x} - 2y\frac{\partial U}{\partial y} - z\frac{\partial U}{\partial z} = 0. \qquad (13)$$

<u>Розв'язок.</u> Запишемо для рівняння (13) систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{-z}. \qquad (14)$$

Для системи звичайних диференціальних рівнянь маємо інтеграли

$$\psi_1 = xz, \text{ (прирівнявши перше й третє)}$$
$$\psi_2 = x\sqrt{y}, \text{ (прирівнявши перше й друге)} \qquad (15)$$

Тому

$$U_1 = xz,\ U_2 = x\sqrt{y} \qquad (16)$$

є розв'язками рівняння (13).

2. Розглянемо побудову фазового портрету системи лінійних диференціальних рівнянь на площині

$$\dot{x} = ax + by$$
$$\dot{y} = cx + dy$$

Дотримуючись загальної теорії диференціальних рівнянь, будуємо характеристичне рівняння

$$\det\{A - \lambda I\} = 0, \text{ тобто } \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Після розкриття характеристичного рівняння отримуємо

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Нехай визначник системи не дорівнює нулю, тобто

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Тоді характеристичне рівняння не має нульових коренів, тобто $\lambda_{1,2} \neq 0$.

Нехай корені характеристичного рівняння дійсні, різних знаків (наприклад, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$).

Завжди існує лінійне неособливе перетворення,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

яке приведить початкову систему до жорданової форми

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi,$$
$$\dot{\eta} = \lambda_2 \eta.$$

При чому вектори $S_1^T = (\alpha_1, \beta_1)$, $S_2^T = (\alpha_2, \beta_2)$ є власними векторами матриці A, які відповідають власним числам λ_1, λ_2.

Розв'язком перетвореної системи буде

$$\xi = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Для того, щоб побудувати фазовий портрет зробимо наступне. Поділимо одне рівняння на інше $\dfrac{d\xi}{d\eta} = \dfrac{\lambda_1 \xi}{\lambda_2 \eta}$.

Звідси, відокремлюючи змінні $\frac{d\xi}{\lambda_1 \xi} = \frac{d\eta}{\lambda_2 \eta}$.

Проінтегрувавши, отримаємо

$$\frac{1}{\lambda_1}\ln|\xi| = \frac{1}{\lambda_2}\ln|\eta| + \frac{1}{\lambda_2}\ln c.$$

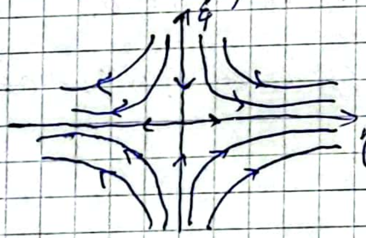
Звідси фазові траєкторії мають вигляд „узагальнених гіпербол"

$$\xi = c\eta^{\alpha},\ \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0.$$

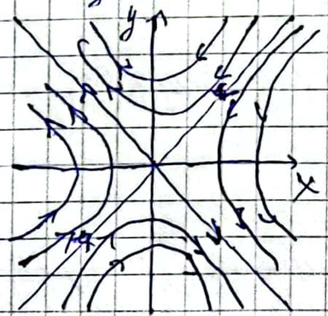
Рух по цим траєкторіям йде згідно залежностей

$$\xi = c_1 e^{\lambda_1 t},\ \eta = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

А оскільки $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$, то $\xi(t) \to 0,\ \eta(t) \to \pm\infty$



Після оберненого перетворення отримуємо фазовий портрет особливої точки, який називається сідлом.



Прямі l_1 і l_2 визначені власними векторами $S_1^T = (\alpha_1, \beta_1)$, $S_2^T = (\alpha_2, \beta_2)$, називаються стійкою і нестійкою сепаратрисами.

Нехай корені характеристичного рівняння кратні, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.
У цьому випадку перетворена система може мати два вигляди.
а) Якщо матриця Жордана має вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

то система розщеплюється на дві підсистеми

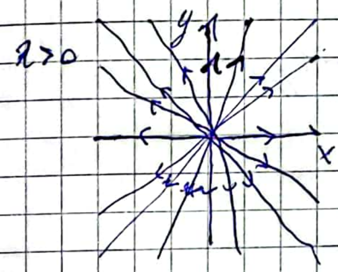
$$\dot{\xi} = \lambda\xi,\ \dot{\eta} = \lambda\eta$$

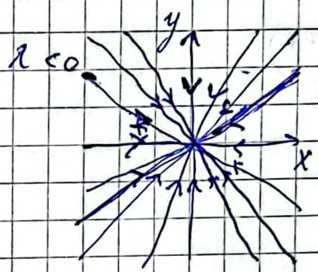
Загальний розв'язок перетвореної системи має вигляд

$$\xi = c_1 e^{\lambda t}, \; \eta = c_2 e^{\lambda t},$$

а траєкторії $\xi = c\eta$ являють собою сімейство прямих, які проходять через початок координат.

Зворотне перетворення не змінює фазовий портрет і в залежності від знаку λ можливе представлення у вигляді нестійкого дикритичного вузла ($\lambda > 0$) і стійкого дикритичного вузла ($\lambda < 0$).





б) Якщо матриця Жордана має вигляд

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

то перетворена система має вигляд

$$\dot{\xi} = \lambda \xi + \eta, \; \dot{\eta} = \lambda \eta$$

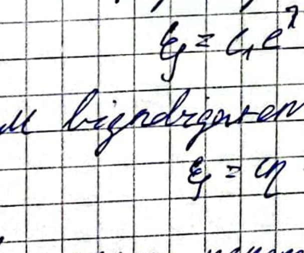
Її загальний розв'язок має вигляд

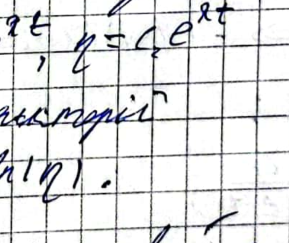
$$\xi = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \; \eta = c_2 e^{\lambda t}$$

Розв'язкам відповідають траєкторії

$$\xi = c\eta + \frac{1}{\lambda} \ln|\eta|.$$

Після зворотнього перетворення фазовий портрет має вигляд





Особлива точка називається нестійким виродженим вузлом ($\lambda > 0$) і стійким виродженим вузлом ($\lambda < \theta$).

3. $(xy^4 - x)\,dx + (xy + y)\,dy = 0;$

$(x+1)y\,dy = x(1-y^4)\,dx;$

$-\frac{y\,dy}{y^4-1} = \frac{x\,dx}{x+1};$ $\Leftarrow \begin{cases} x+1 \to x=-1 \\ y-1 \to y=1 \\ y+1 \to y=-1 \end{cases}$

$\int -\frac{y}{y^4-1}\,dy = \int \frac{x}{x+1}\,dx;$

$-\frac{\ln\left(\frac{y^2-1}{y^2+1}\right)}{4} = -\ln(x+1) + x + C;$

$\frac{\sqrt[4]{y^2+1}}{\sqrt[4]{y^2-1}} = \frac{e^{x+C}}{x+1};$

$y^2 = \frac{C(e^{4x}y^2 - e^{4x})}{(x+1)^4} - 1;$ $x=-1,\ y=1,\ y=-1$ //

4. $\begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 3e^t \end{cases}$

$y = -\frac{x'}{4} + \frac{x}{2};$

$y' = \frac{x'}{2} - \frac{x''}{4};$

$\frac{x'}{2} - \frac{x''}{4} = -3\left(-\frac{x'}{4} + \frac{x}{2}\right) + x + 3e^t;$

$2x' - x'' = -12\left(-\frac{x'}{4} + \frac{x}{2}\right) + 4x + 12e^t;$

$-x'' - x' + 2x = 12e^t;$

$-\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow -(\lambda-1)(\lambda+2) = 0;$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2;$

$x_{одн.} = C_1e^t + \frac{C_2}{e^{2t}};$

$x_0' = (At + A)e^t$

$x_0'' = (At + 2A)e^t$

$-3Ae^t = 12e^t \Rightarrow A = -4$

$x_0 = -4te^t$

$x = x_{одн.} + x_0 = -4te^t + C_1e^t + \frac{C_2}{e^{2t}}$

$y = \frac{C_2}{e^{2t}} - \frac{(4t + C_1 - 4)e^t}{4}$

$\begin{cases} x = -4te^t + C_1e^t + C_2e^{-2t} \\ y = C_2e^{-2t} - \frac{(4t + C_1 - 4)e^t}{4} \end{cases}$ //

5. $\dot{x}_1(t) = ax_1(t) + u(t),$

$\dot{x}_2(t) = bx_2(t) + cx_1(t)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(b, Ab) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & c \end{vmatrix} = c - a \neq 0$$

Отже, система цілком керована при $\forall b$ та $a \neq c$ //

6. $J = \int_0^1 (4u_1^2(t) + u_2^2(t) + \cos^2(x_1(t)))\,dt + \sin^2(x_2(1)) \to \min$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + u_1, \\ x_2' = 6x_2 - x_1 - 3x_1x_2 + u_2 \end{cases} \quad x_1(0) = 4, \; x_2(0) = -2$$

1) $H(x, u, t, \psi, \psi_0) = \psi_0\,(4u_1^2(t) + u_2^2(t) + \cos^2(x_1(t))) + \psi_1 u_1(t) + \psi_2 u_2(t)$

2) Покладемо $\psi_0 = -1$

$H(x, u, t, \psi, \psi_0) = -(4u_1^2(t) + u_2^2(t) + \cos^2(x_1(t))) + \psi_1 u_1(t) + \psi_2 u_2(t)$

З необхідної умови екстремуму маємо

$H'_{u_1} = -8u_1(t) + \psi_1(t) = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{\psi_1(t)}{8}$

$H'_{u_2} = -2u_2(t) + \psi_2(t) = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{\psi_2(t)}{2}$

3) $$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -H'_{x_1} = -\psi \sin(2x_1(t)) = \sin(2x_1(t)) \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -H'_{x_2} = 0 \end{cases}$$

4) $x_1' = x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + \frac{\psi_1(t)}{8}$ $\quad x_1(0) = 4$

$x_2' = 6x_2 - x_1 - 3x_1x_2 + \frac{\psi_2(t)}{2},$ $\quad x_2(0) = -2$

$\psi_1' = \sin(2x_1(t))$ $\quad \psi_1(1) = 0$

$\psi_2' = 0$ $\quad \psi_2(1) + \sin(2x_2(1)) = 0$