Варіант 20

1. Знайти відносні похибки аргументів, які дають змогу обчислити з точністю 4% значення функції $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_2^2}{x_1 x_3}$, де $x_1^* = 1,23$, $x_2^* = 1,07$, $x_3^* = 2,31$. Використати принцип рівних абсолютних похибок аргументів.

2. Знайти апріорну оцінку кількості кроків при знаходженні найбільшого кореня нелінійного рівняння

$$x^2 \lg x - 1 = 0$$

методом релаксації з точністю $\varepsilon = 0,001$. Записати формулу ітераційного процесу для заданого рівняння.

3. Обчислити число обумовленості для матриці

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ -x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 20 \end{cases}$$

4. Визначити степінь інтерполяційного многочлена для функції, заданої таблично $x_0 = 0$; $y_0 = 5,2$; $x_1 = 1$; $y_1 = 8$; $x_2 = 2$; $y_2 = 10,4$; $x_3 = 3$; $y_3 = 12,4$; $x_4 = 4$; $y_4 = 14$; $x_5 = 5$; $y_5 = 15,2$.

5. За допомогою рядів Тейлора показати, що для вузлів x_0, x_1, x_2:

$$\left| f'(x_2) - \frac{f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)}{2h} \right| \leqslant \frac{h^2 f'''(\xi)}{3}$$

Варіант 20

1. $\delta(f) = 0{,}04$, $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2^2}{x_1 x_3}$, де $x_1^* = 1{,}23$, $x_2^* = 1{,}07$, $x_3^* = 2{,}31$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{x_2^2}{x_1^2 x_3} \approx -0{,}33$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{x_1 x_3} \approx 0{,}75$, $\frac{\partial f}{\partial x_3} = -\frac{x_2^2}{x_1 x_3^2} \approx -0{,}17$

$f(x_1^*; x_2^*; x_3^*) \approx 0{,}4$

$\Delta(f^*) = 0{,}04 \cdot 0{,}4 = 0{,}016$

$\Delta(f^*) = |-0{,}33 \cdot \Delta x_1| + |0{,}75 \cdot \Delta x_2| + |-0{,}17 \cdot \Delta x_3|$

$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta(f^*) = \delta \cdot (0{,}33 + 0{,}75 + 0{,}17) = \delta \cdot 1{,}25$

$\delta = \frac{0{,}016}{1{,}25} = 0{,}0128$

$\delta(x_1^*) = \frac{0{,}0128}{1{,}23} \approx 0{,}010$

$\delta(x_2^*) = \frac{0{,}0128}{1{,}07} \approx 0{,}012$

$\delta(x_3^*) = \frac{0{,}0128}{2{,}31} \approx 0{,}006$

2. $x^2 \lg x - 1 = 0$; $\varepsilon = 0.001$

~~Р-~~ рів. містить єдиний дійсний корінь.

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= 1^2 \lg 1 - 1 = -1 \\ f(2) &= 2^2 \lg 2 - 1 \approx 0,2 \end{aligned}\right\} x^* \in [1;2]$$

$f(x) = x^2 \lg x - 1$; $f'(x) = 2x \lg x + \dfrac{x}{\ln 10}$

$m_1 = \min\limits_{x \in [1;2]} \left| 2x \lg x + \dfrac{x}{\ln 10} \right| \approx 0,43$

$M_1 = \max\limits_{x \in [1;2]} \left| 2x \lg x + \dfrac{x}{\ln 10} \right| \approx 2,07$

$\tau_0 = \dfrac{2}{M_1 + m_1} = \dfrac{2}{2,07 + 0,43} \approx 0,8$

Оскільки $f'(x) > 0$, то ітераційний процес має вигляд:

$x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n)$

$q_0 = \dfrac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} = \dfrac{2,07 - 0,43}{2,07 + 0,43} \approx 0,656$

$$\left.\begin{aligned} &x^* \in [1;2] \\ &x_0 = 1,5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |x_0 - x^*| = |1,5 - x^*| \leq 1,5$$

$n_\varepsilon \geq \left[\dfrac{\ln(|x_0 - x^*| / \varepsilon)}{\ln(1/q_0)} \right] + 1 = \left[\dfrac{\ln(1,5 / 0,001)}{\ln(1/0,656)} \right] + 1 = 18$ //

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ -x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 20 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -8 & 4 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$\text{Det } A = -81 \neq 0$ – невироджена

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{88}{81} & -\frac{5}{81} & \frac{4}{27} \\ -\frac{5}{81} & -\frac{8}{18} & \frac{1}{27} \\ \frac{4}{27} & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$\|A\|_\infty = \max\{-1; -5; 12\} = 12$

$\|A^{-1}\|_\infty = \max\{\frac{95}{81}; -\frac{38}{81}; \frac{24}{81}\} = \frac{95}{81}$

$\text{Cond}(A) = 12 \cdot \frac{95}{81} = \frac{380}{27} \approx 14{,}075$

4. $x_0=0$; $y_0=5,2$; $x_1=1$; $y_1=8$; $x_2=2$; $y_2=10,4$; $x_3=3$;
$y_3=12,4$; $x_4=4$; $y_4=14$; $x_5=5$; $y_5=15,2$

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	5,2	8	10,4	12,4	14	15,2

x	f(x)	р.р. I п.	р.р. II п.	р.р. III п.
0	$\boxed{5,2}$			
1	8	$\boxed{2,8}$		
2	10,4	2,4	$\boxed{-0,2}$	
3	12,4	2	-0,2	$\boxed{0}$
4	14	1,6	-0,2	0
5	15,2	1,2	-0,2	0

Отже, степінь дорівнює 2, $n=2$ //

5. $\left| f'(x_2) - \frac{f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)}{2h} \right| \le \frac{h^2 f'''(\xi)}{3}$

$= f'(x_2) - \frac{1}{2h}\Big(f_2 - 2h f_2' + \frac{(2h)^2}{2} f_2'' - \frac{(2h)^3}{6} f'''(\xi) -$

$- 4\big(f_2 - h f_2' + \frac{h^2}{2} f_2'' - \frac{h^3}{6} f'''(\xi)\big) +$

$+ 3 f_2 \Big)$

$= f'(x_2) + \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$ //