Екзаменаційна робота
з алгебри та геометрії
студента першого курсу
групи ІПС-11
ФКНК КНУ ім. Т. Шевченка
Вербицького Артема Віталійовича

Білет № 8

Дата складання іспиту: 07.06.2023

1. Поняття прямої суми підпросторів

Нехай V - векторний простір над полем F

Означення 1. Векторний простір V називається прямою сумою своїх підпросторів $L_1, L_2, \dots, L_k$, якщо $\forall$ вектор $x \in V$ можна розкласти в суму $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$, де $x_i \in L_i$, $i = \overline{1,k}$ і цей розклад єдиний.

Позначення. $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$

Означення 2. Векторний простір V називається прямою сумою своїх підпросторів $L_1, L_2, \dots, L_k$, якщо виконані дві умови:

1) $V = L_1 + L_2 + \dots + L_k$;

2) $\forall i = \overline{1,k}$: $L_i \cap (L_1 + \dots + L_{i-1} + L_{i+1} + \dots + L_k) = \{\Theta\}$

Зауваження. У випадку $k = 2$ друга умова має вигляд $L_1 \cap L_2 = \{\Theta\}$.

Теорема. Два значення прямої суми еквівалентні.

2. Визначник Грама та його властивості

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_m$ – система векторів в евклідовому просторі V.

Матриця $G(a_1, a_2, \dots, a_m) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_m) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_m, a_1) & (a_m, a_2) & \dots & (a_m, a_m) \end{pmatrix}$

називається матрицею Грама системи векторів $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Визначник матриці Грама називається визначником Грама системи векторів $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ і позначається

$$g(a_1, a_2, \dots, a_m) = \det G(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

Припустимо в просторі V зафіксовано деякий ортонормований базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, A – матриця, рядками якої є координати векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ в цьому базисі

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{- - - -} \\ \text{———} \end{pmatrix} \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_m \end{array} \end{array}$$

Тоді $G(a_1, a_2, \dots, a_m) = A \cdot A^T$.

Теорема (про визначник Грама)

Нехай система векторів $b_1, b_2, \dots, b_m$ одержана ортогоналізацією системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$. Тоді $g(a_1, a_2, \dots, a_m) = g(b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Наслідок 1. Для $\forall$ системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_m$ в евклідовому просторі V: $g(a_1, a_2, \dots, a_m) \geq 0$.

При чому $g(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0 \Leftrightarrow$ вектори $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ лінійно залежні.

Наслідок 2. (нерівність Адамара)

Нехай $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратна матриця з дійсними елементами

Тоді $(\det A)^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2$.

3. $a_1 = (2, -1, 4, 2)$, $a_2 = (3, 0, 6, 1)$, $a_3 = (-1, 2, -2, -3)$, $a_4 = (1, 1, 2, -1)$

$L = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$, $L = \{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}_4 \}$

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

α_3, α_4 – вільні

ФСР:

α_1	α_2	α_3	α_4
1	-4	0	-3
2	0	-1	0

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

//

4. $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\lambda\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\lambda\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\lambda\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\lambda\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda^3 - 1 + \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}(\lambda+1)(2\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{3+i\sqrt{7}}{4}$, $\lambda_3 = \frac{3-i\sqrt{7}}{4}$.

$\underline{\lambda_1 = -1}$

$$A + E = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \\ 0 & \frac{2+\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2}-1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} & \frac{-\sqrt{2}+2}{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2}-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3-2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
$2\sqrt{2}-3$	$1-\sqrt{2}$	1

$a_1 = (2\sqrt{2}-3,\ 1-\sqrt{2},\ 1)$, $|a_1| = \sqrt{21-14\sqrt{2}}$

$$e_1 = \frac{a_1}{|a_1|} = \frac{1}{7}\left(\sqrt{7}-\sqrt{14},\ -\sqrt{7},\ \sqrt{7}+\sqrt{14}\right)$$

$\underline{\lambda_2 = \frac{3+i\sqrt{7}}{4}}$

$$A - \frac{3+i\sqrt{7}}{4}E = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}-3-i\sqrt{7}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{7}}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-2\sqrt{2}-3-i\sqrt{7}}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}-2}{12} & \frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}-2}{12} \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}-2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}-2}{12} & \frac{-\sqrt{2}+2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}+2}{12} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-2\sqrt{2}-3-i\sqrt{7}}{4} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}-2}{12} & \frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}-2}{12} \\ 0 & 1 & \frac{-3\sqrt{2}-i\sqrt{14}-4}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-\sqrt{2}+2i\sqrt{7}+i\sqrt{14}-2}{4} \\ 0 & 1 & \frac{-3\sqrt{2}-i\sqrt{14}-4}{4} \end{pmatrix}$$

ФСР:

x_1	x_2	x_3
$\frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{7}-i\sqrt{14}+2}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}+i\sqrt{14}+4}{4}$	1

$$a=\left(\frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{7}-i\sqrt{14}+2}{4},\ \frac{3\sqrt{2}+i\sqrt{14}+4}{4},\ 1\right)=\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4},\ \frac{3\sqrt{2}+4}{4},\ 1\right)+$$

$$+\,i\left(\frac{-2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{4},\ \frac{\sqrt{14}}{4},\ 0\right)=a_2+i a_3$$

$$a_2=\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4},\ \frac{3\sqrt{2}+4}{4},\ 1\right),\quad a_3=\left(\frac{-2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{4},\ \frac{\sqrt{14}}{4},\ 0\right)$$

$$e_2=\frac{a_2}{|a_2|}=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}},\ \frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}},\ \frac{4}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}}\right)$$

$$e_3=\frac{a_3}{|a_3|}=\left(\frac{-2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}},\ \frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}},\ 0\right)$$

$$Q=(e_1|e_2|e_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{7} & \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & \frac{-2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}}\\ -\frac{\sqrt{7}}{7} & \frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & \frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}}\\ \frac{\sqrt{7}+\sqrt{14}}{7} & \frac{4}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & 0\end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}=Q^T,\quad B=Q^{-1}AQ$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{7} & \frac{-\sqrt{7}}{7} & \frac{\sqrt{7}+\sqrt{14}}{7}\\ \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & \frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & \frac{4}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}}\\ \frac{-2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & \frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{7} & \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & \frac{-2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}}\\ -\frac{\sqrt{7}}{7} & \frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & \frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}}\\ \frac{\sqrt{7}+\sqrt{14}}{7} & \frac{4}{2\sqrt{14+7\sqrt{2}}} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{7}}{4}\\ 0 & -\frac{\sqrt{7}}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$