БІЛЕТ № 8

1. Незалежні події A і B такі, що $P(\mathrm{A}) = 0.45,\ P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.18$. Знайти ймовірності $P(\mathrm{B})$, $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$, $P(\bar{\mathrm{A}} \cup \bar{\mathrm{B}})$.

2. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку [0,4]. Знайти математичне сподівання та дисперсію для η=3 ξ+9. Чому дорівнює коваріація та коефіцієнт кореляції між ξ та η?

3. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – вибірка із розподілу з щільністю $f(x;\alpha) = \begin{cases} 0, & якщо \quad x < 0, \\ \frac{1}{\alpha}\exp\{-\frac{1}{\alpha}x\}, & якщо \quad x \geq 0. \end{cases}$ Знайти кількість інформації за Фішером для вибірки. Розглядається оцінка $\hat{\alpha} = \bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ параметра α. Перевірити, чи досягається для даної оцінки рівність у нерівності Крамера-Рао.

№3

максимальної вірогідності.

5. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – вибірка із розподілу з щільністю

$$f(x;\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \frac{1}{\alpha}\exp\{-\frac{1}{\alpha}x\}, & \geq 0. \end{cases}$$

Знайти кількість інформації за Фішером для вибірки.

5.) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – вибірка з розп. зі щільністю

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$L(X, \alpha) = \prod_{k=1}^{n} f(\xi_k, \alpha) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\xi_k}{\alpha}}$$

$$\ln(L(X,\alpha)) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\xi_k}{\alpha}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\xi_k}{\alpha}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{1}{\alpha} + \ln e^{-\frac{\xi_k}{\alpha}}\right) = n \cdot \ln\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{\xi_k}{\alpha}\right) =$$

$$= -n\ln\alpha - \frac{1}{\alpha} \cdot \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

$$U = \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln L = -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

$$I(\alpha) = -M_\alpha \frac{\partial U}{\partial \alpha} = -M\left(\frac{n}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) =$$

$$= \frac{2\alpha n}{\alpha^3} - \frac{n}{\alpha^2} = \frac{2n - n}{\alpha^2} = \frac{n}{\alpha^2}$$

БІЛЕТ № 12

1. Нехай X і Y відповідно сума і різниця очок, що з’явилися при підкиданні двох гральних кубиків. Знати сумісний розподіл та довести, що дані величини залежні, але некорельовані.

2. Випадкова величина ξ має розподіл Коші: $f(x)=1/(\pi(1+x^2))$. Знайти а) $P\left\{|\xi|>1\right\}$, б) $M\left(|\xi|/\left(1+\xi^2\right)\right)$.

3. Нехай $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ – вибірка із розподілу Релея, тобто із щільністю

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{x}{\theta}\exp\{-\frac{x^2}{2\theta}\}, & \text{якщо } x>0,\\ 0, & \text{якщо } x\le 0.\end{cases}$$

Знайти кількість інформації за Фішером для вибірки. Для оцінки $\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ перевірити, чи досягається рівність в нерівності Крамера-Рао.

№2

що максимальний з цих збитків буде більше 3.

3. Випадкова величина ξ має розподіл Коші: $f(x) = 1/(\pi(1+x^2))$.

Знайти а) $P\{|\xi|>1\}$, б) $M|\xi|/(1+\xi^2)$.

3. $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

$P\{|\xi|>1\}$ – ? ; $\frac{M|\xi|}{1+\xi^2}$ – ?

а) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \frac{arctg\,t}{\pi}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{arctg\,x}{\pi} + \frac{1}{2} = P\{\xi \le x\}$

$P\{|\xi|>1\} = P\{\xi>1\} + P\{\xi<-1\} = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} =$

$= \frac{arctg\,x}{\pi}\Big|_{1}^{\infty} + \frac{arctg\,x}{\pi}\Big|_{-\infty}^{-1} =$

$= \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

б) $\frac{M|\xi|}{1+\xi^2}$

$M|\xi| = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{|\xi|}(x)\,dx =$

$f_{|\xi|}(x)\,dx = \left(\frac{2}{\pi}\cdot arctg\,x\right)' = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{2}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx =$

$= \left| \begin{matrix} 1+x^2=t \\ 2x\,dx=dt \\ x\,dx=\frac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{2t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi}\left(\ln|1+x^2|\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} =$

$= \frac{1}{\pi}\left(\lim_{x\to\infty}\ln|1+x^2| - \lim_{x\to-\infty}\ln|1+x^2|\right) =$

$= \frac{1}{\pi}\lim_{x\to\infty}\left(\ln|1+x^2| - \ln|1+x^2|\right) = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0.$

№3

незсунутою, консистентною оцінкою для θ?

5. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – вибірка із розподілу Релея, тобто із щільністю

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} \exp\{-\frac{x^2}{2\theta}\}, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \le 0. \end{cases}$$

Знайти оцінку для θ методом максимальної вірогідності.

5. $$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} \exp\{-\frac{x^2}{2\theta}\}, & x > 0 \\ 0, & \text{в інш. вип.} \end{cases}$$

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\theta} \cdot e^{-\frac{\xi_i^2}{2\theta}}$$

$$\ln L(x, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\xi_i}{\theta} e^{-\frac{\xi_i^2}{2\theta}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln \xi_i - \ln\theta - \frac{\xi_i^2}{2\theta}$$

$$U = \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{\theta} + \frac{\xi_i^2}{2\theta^2}\right) = 0$$

$$-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{k=1}^{n} \xi_i^2 = 0$$

$$-n\theta + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \xi_i^2 = 0$$

$$\theta = \frac{\overline{\xi^2}}{2}$$

БІЛЕТ № 14

1. Нехай X – максимальне значення, що з’явилося при підкиданні двох гральних кубиків. Знайти для нього розподіл, математичне сподівання та дисперсію.

2. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з рівномірним на [a,b] розподілом. Знайти оцінки параметрів a і b методом моментів.

3. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – вибірка із логарифмічно нормального розподілу із щільністю

$$f(x;\mu)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\,x}\exp\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & якщо \quad x>0,\\ 0, & якщо \quad x\le 0,\end{cases}$$

$\sigma_0 > 0$ -відоме. Чи є $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\xi_i$ ефективною оцінкою параметра μ ? Дослідити дану оцінку на незміщеність.

№2

4. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ – вибірка з рівномірним на [a,b] розподілом. Знайти оцінки параметрів a і b методом моментів.

4. $\xi_1, \dots, \xi_n$ – вибірка з рівномірним на $[a, b]$ розподілом

$$\mu_1 = \frac{a+b}{2}; \quad \mu_2 = D\xi_i + M(\xi_i)^2 = \frac{(a-b)^2}{12} + \mu_1^2$$

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \mu_1 \\ \frac{(a-b)^2}{12} = \sigma_n^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2\mu_1 - b \\ \frac{2b - 2\mu}{2\sqrt{3}} = \sigma_n \Rightarrow b = \sqrt{3}\sigma_n + \mu_n \end{cases}$$

$$a = -\sqrt{3}\sigma_n + \mu_n$$

$$b = \sqrt{3\left(\frac{\sum \xi_i^2}{n} - \frac{(\sum \xi_i)^2}{n^2}\right)} + \frac{\sum_{n=1}^{n} \xi_n}{n}; \quad a = -\sqrt{3\left(\frac{\sum \xi_i^2}{n} - \frac{(\sum \xi_i)^2}{n^2}\right)} + \frac{\sum_{n=1}^{n} \xi_i}{n}.$$

№3

5. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – вибірка із логарифмічно нормального розподілу із щільністю

$$f(x;\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}x}\exp\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & \textit{якщо} \quad x>0, \\ 0, & \textit{якщо} \quad x \le 0, \end{cases}$$

$\sigma_0 > 0$ -відоме. Чи є $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \xi_i$ ефективною та незсунутою оцінкою параметра μ ?

№5 $f(x,\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sigma_0^2 x}\cdot \exp\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

$\hat{\Theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\xi_i$

$L(x,\mu) = \prod_{k=1}^{n} f(\xi_k,\mu) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\,\xi_k}\cdot e^{-\frac{(\ln\xi_k-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}$

$\ln L = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}\,\xi_k} e^{-\frac{(\ln\xi_k-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\right) - \ln(\xi_k) - \frac{(\ln\xi_k-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right)$

$U = \frac{\partial}{\partial\mu}\ln L = \sum_{k=1}^{n}\left(0 - 0 + \frac{1}{2\sigma_0^2}\cdot 2(\ln\xi_k-\mu)\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\xi_k-\mu}{\sigma_0^2} =$

$= \frac{1}{\sigma_0^2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\xi_k - n\mu\right) = \frac{1}{\sigma_0^2}(n\cdot\hat{\Theta} - n\mu) = \frac{n}{\sigma_0^2}(\hat{\Theta}-\mu)$

Оцінка є ефективною

БІЛЕТ № 22

1. У результаті перевірки 500 контейнерів зі скляними виробами було добуто такі дані про кількість пошкоджених виробів:

I	n_i	I	n_i
0	199	5	3
1	169	6	1
2	87	7	1
3	31	8 і більше	0
4	9		
		Разом	500

(i – число пошкоджених виробів, n_i– к-ть контейнерів з i пошкодженими виробами). Чи можна вважати, що к-ть пошкоджених виробів, яка припадає на контейнер, підпорядковується закону Пуассона з довірчою йм. 0,95.

2. Нехай ξ та η – незалежні випадкові величини рівномірно розподілені на [0,2]. Знайти функцію розподілу та щільність для $\eta+\xi$.

3. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з щільністю $f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\{-\frac{x}{\theta}\}$, якщо $x>0$. Чи буде $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ ефективною, незсунутою і конзистентною оцінкою параметра θ?

2. Нехай ξ та η – незалежні випадкові величини рівномірно розподілені на [0,2]. Знайти функцію розподілу для величин а) $\max\{\eta,\xi\}$; б) математичне сподівання для неї.

№2

$P(\eta > 2) = 0$

2.) ξ, η – н. в. в. рівном. розп. на $[0,2]$

а) знайти функц. розп. $\max\{\eta, \xi\}$

$$f_{\max\{\eta,\xi\}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases} \qquad \left(\frac{1}{b-a}\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$$

$$M\max\{\eta,\xi\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^2 = 1$$