Заняття №12

Методи точкового оцінювання невідомих параметрів розподілів

Метод моментів

Нехай задано вибірку з генеральної сукупності $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ з функцією розподілу $F_\xi(x,\theta)$, де $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_s)$ - вектор невідомих параметрів.

Припустимо, що у спостерігаємої випадкової величини ξ існують перші s моментів

$$\alpha_k = M\xi^k, \ k = 1, 2, ..., s.$$

При цьому ці моменти повинні бути функціями від θ, тобто

$$\alpha_k = \alpha_k(\theta), \ k = 1, 2, ..., s.$$

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ - реалізація нашої вибірки. Тоді значення оцінок параметрів $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, ..., \hat{\theta}_s$ за методом моментів знаходяться як розв'язок наступної системи рівнянь

$$\alpha_k(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \ k = 1, 2, ..., s.$$

Зауваження 1. Оцінки знайдені за методом моментів, як правило, консистентні, але часто неефективні.

Означення. Послідовність оцінок $\hat{\theta}_n$ називається консистентною (спроможною, слушною), якщо $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta, \ n \to \infty$.

(Або $\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| > \varepsilon\right) \to 0, \ n \to \infty$).

Приклад 1. Нехай задано вибірку з генеральної сукупності $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ з розподілом Пуассона

$$P(\xi = k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}, \ \theta > 0, \ k = 0, 1, ...$$

За методом моментів потрібно знайти оцінку параметра θ.

Розв'язання.

Оскільки у нас один невідомий параметр, то шукаємо тільки перший теоретичний момент розподілу Пуассона

$\alpha_1(\theta) = M\xi = \theta$ (див. відповідний матеріал з теорії ймовірностей).

Прирівнюємо цей момент до відповідного вибіркового і маємо шукану оцінку параметра

$$\alpha_1(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \ \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Задача 1. Нехай $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини з щільністю

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, x\in[-\theta,\theta]\\ 0, x\notin[-\theta,\theta]\end{cases}$$

За методом моментів потрібно знайти оцінку параметра θ.
Розв'язання.

$\alpha_1 = M\xi = \int\limits_{-\theta}^{\theta}\frac{x}{2\theta}dx = 0$. Бачимо, що перший момент не є функцією від θ.

Зауваження 2. У подібних випадках, ми будемо шукати наступний не нульовий момент і прирівнювати його до відповідного вибіркового.

$$\alpha_2 = M\xi^2 = \int\limits_{-\theta}^{\theta}\frac{x^2}{2\theta}dx = \frac{\theta^2}{3}, \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_2(\theta).$$

$$\frac{\theta^2}{3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2, \Rightarrow \hat{\theta} = \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\ .$$

Задача 2. Нехай задано вибірку з генеральної сукупності $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ з щільністю розподілу

$$f_\xi(x) = \frac{\beta^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-x\beta},\ x>0, \beta>0, m>0.$$

Знайти оцінки для невідомих параметрів m і β за методом моментів.
Згадаємо гамма-функцію та її властивості

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx;$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha); \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Для зручності введемо позначення

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n};\ \overline{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n};$$

$$M\xi=\int_0^\infty x\frac{\beta^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-x\beta}dx=\left|\begin{matrix}x\beta=t\\ \beta dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{\beta\Gamma(m)}\int_0^\infty t^m e^{-t}dt=\frac{\Gamma(m+1)}{\beta\Gamma(m)}=\frac{m}{\beta}.$$

Аналогічно знаходимо другий момент

$$M\xi^2=\int_0^\infty x^2\frac{\beta^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-x\beta}dx=\frac{\Gamma(m+2)}{\beta^2\Gamma(m)}=\frac{m(m+1)}{\beta^2}.$$

$$\begin{cases}\dfrac{m}{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n}=\overline{x}\\[2ex] \dfrac{m(m+1)}{\beta^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}{n}=\overline{\overline{x}}\end{cases}\Rightarrow\hat{\beta}=\frac{\overline{x}}{\overline{\overline{x}}-\overline{x}^2},\hat{m}=\frac{\overline{x}^2}{\overline{\overline{x}}-\overline{x}^2}.$$

Метод максимальної вірогідності

Означення. Нехай для вибірки $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ задано функцію вірогідності $L(x,\theta),\ x\in R^n,\ \theta\in\Theta$. Тоді оцінкою максимальної вірогідності $\hat{\theta}_n$ називається така точка множини Θ, в якій функція вірогідності при заданому x приймає максимальне значення. Тобто

$$L(x,\hat{\theta}_n)=\sup_{\theta\in\Theta}L(x,\theta).$$

Зауваження. В багатьох випадках замість максимуму $L(x,\theta)$ шукається максимум $\ln L(x,\theta)$, причому ці максимуми досягаються в одних і тих же точках. Тобто

$$\ln L(x,\hat{\theta}_n)=\sup_{\theta\in\Theta}\ln L(x,\theta).$$

Приклад 2. Нехай задано вибірку з генеральної сукупності $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ з показниковим розподілом $f(x,\theta)=\theta e^{-x\theta},x\ge 0,\theta>0.$

За методом максимальної вірогідності потрібно знайти оцінку параметра θ.

Розв'язання.

Запишемо функцію вірогідності

$$L(x,\theta)=\prod_{i=1}^n\theta e^{-\theta x_i}=\theta^n e^{-\theta\sum\limits_{i=1}^n x_i}.$$

Логарифмуємо, $\ln L(x,\theta)=n\ln\theta-\theta\sum\limits_{i=1}^n x_i$.

Беремо похідну по θ і прирівнюємо її до 0.

$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x,\theta)=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$. Звідси маємо, що $\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$.

Перевіряємо, чи буде знайдений екстремум точкою максимуму функції вірогідності:

$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L(x,\theta)=-\frac{n}{\theta^2}<0,\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$ - точка максимуму функції вірогідності.

Задача 3. Нехай задано вибірку з генеральної сукупності $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ з щільністю розподілу такого виду

$$f(x,\theta)=\begin{cases}K(\theta)x^2e^{-\frac{x^3}{\theta^3}},\ x\ge 0, & \theta>0.\\ 0,\ x<0\end{cases}$$

Потрібно знайти функцію $K(\theta)$ та за методом максимальної вірогідності знайти оцінку параметра θ.

Функцію $K(\theta)$ шукаємо з властивостей щільності

$$K(\theta)\int_0^\infty x^2e^{-\frac{x^3}{\theta^3}}dx=-\frac{\theta^3}{3}K(\theta)e^{-\frac{x^3}{\theta^3}}\Bigg|_0^\infty=1,\Rightarrow K(\theta)=\frac{3}{\theta^3}.$$

$$L(x,\theta)=\prod_{k=1}^{n}\frac{3}{\theta^3}x_k^2e^{-\frac{x_k^3}{\theta^3}}=\frac{3^n}{\theta^{3n}}\left(\prod_{k=1}^{n}x_k^2\right)e^{-\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k^3}{\theta^3}}.$$

$$\ln L(x,\theta)=n\ln 3-3n\ln\theta+2\sum_{k=1}^{n}\ln x_k-\frac{1}{\theta^3}\sum_{k=1}^{n}x_k^3.$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x,\theta)=-\frac{3n}{\theta}+\frac{3}{\theta^4}\sum_{k=1}^{n}x_k^3=0,\Rightarrow\hat{\theta}=\sqrt[3]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^3}.$$

Перевірка оцінок на консистентність

Означення. Послідовність оцінок $\hat{\theta}_n$ називається консистентною (спроможною, слушною), якщо $\hat{\theta}_n\xrightarrow{p}\theta,\ n\to\infty$.

Означення. Послідовність ξ_n збігається за ймовірністю до випадкової величини ξ, якщо

$$\forall\varepsilon>0\quad\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\xi_n-\xi\right|>\varepsilon\right)=0.$$

Перевірка оцінок на консистентність, як правило, здійснюється у два кроки. На першому кроці застосовується закон великих чисел, а на другому – теорема про суперпозицію.

1) Закон великих чисел.

Нехай задано послідовність незалежних та однаково розподілених випадкових величин $\xi_1, \xi_{2,...}$, таких що $M\xi_k = a,\ k = 1, 2, \ldots$. Тоді

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{n} \xrightarrow{p} a,\ n \to \infty.$$

2) Теорема про суперпозицію.

Нехай випадкові величини $\eta_1(n), \eta_2(n), \ldots, \eta_r(n)$ збігаються за ймовірністю при $n \to \infty$ до деяких сталих $c_1, c_2, \ldots, c_r$ відповідно. Тоді для довільної функції $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, неперервної у точці ($c_1, c_2, \ldots, c_r$), буде мати місце збіжність

$$\varphi\big(\eta_1(n), \eta_2(n), \ldots, \eta_r(n)\big) \xrightarrow{p} \varphi\big(c_1, c_2, \ldots, c_r\big),\ n \to \infty.$$

Приклади.

1) Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини з щільністю

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta},\ x \in [-\theta, \theta] \\ 0,\ x \notin [-\theta, \theta] \end{cases}$$

Перевірити оцінку $\hat{\theta} = \sqrt{\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}$ на консистентність.

Розв'язання.

1. Застосовуємо закон великих чисел

$$M\xi^2 = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{x^2}{2\theta} dx = \frac{\theta^2}{3};$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}{n} \xrightarrow{p} M\xi^2 = \frac{\theta^2}{3},\ n \to \infty.$$

2. Застосовуємо теорему про суперпозицію

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} \xrightarrow{p} \sqrt{3M\xi^2} = \sqrt{\frac{3\theta^2}{3}} = \theta,\ n \to \infty.$$

Отже оцінка є консистентною.

2) Нехай задано вибірку з генеральної сукупності $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ з щільністю розподілу такого виду

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3}{\theta^3}x^2e^{-\frac{x^3}{\theta^3}},\ x\ge 0,\\ 0,\ x<0\end{cases}\quad \theta>0.$$

Потрібно з'ясувати чи буде консистентною оцінка $\hat{\theta}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^3}$.

Розв'язання.

1. Застосовуємо закон великих чисел.

Для цього нам потрібно знайти $M\xi^3$.

$$M\xi^3=\int_0^\infty \frac{3x^5}{\theta^3}e^{-\frac{x^3}{\theta^3}}dx=\left|\begin{array}{c}\dfrac{x^3}{\theta^3}=t\\ \dfrac{3x^2}{\theta^3}dx=dt\end{array}\right|=\theta^3\int_0^\infty te^{-t}dt=\theta^3\Gamma(2)=\theta^3.$$

Тоді

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^3}{n}\xrightarrow{p}M\xi^3=\theta^3,\ n\to\infty.$$

2. Застосовуємо теорему про суперпозицію

$$\hat{\theta}=\sqrt[3]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^3}\xrightarrow{p}\sqrt[3]{M\xi^3}=\sqrt[3]{\theta^3}=\theta,\ n\to\infty.$$

Отже оцінка є консистентною.

3) Нехай задано вибірку з генеральної сукупності $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ з щільністю розподілу

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta},\ x\in[0,\theta]\\ 0,\ x\notin[0,\theta]\end{cases}$$

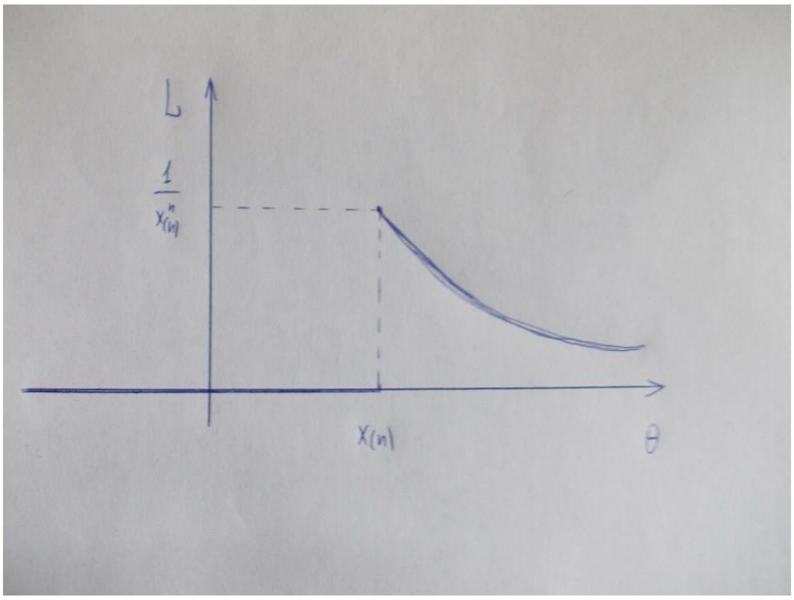
Потрібно знайти методом максимальної вірогідності оцінку параметра θ і з'ясувати чи буде вона незміщеною та консистентною.

Розв'язання.

$$L(x,\theta)=\prod_{k=1}^{n}f(x_k,\theta)=\frac{1}{\theta^n}\prod_{k=1}^{n}I(\theta-x_k),$$

де $I(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ 1,\ x\ge 0\end{cases}$ - функція Хевісайда.

Максимум функції вірогідності будемо шукати графічно.



З графіка видно, при $\theta = x_{(n)}$ функція вірогідності досягає свого максимуму. Таким чином, $\hat{\theta} = x_{(n)} = \max\limits_{1\le i\le n} x_i$ - реалізація оцінки максимальної вірогідності.

Тепер шукаємо функцію розподілу оцінки

$$F_{\hat{\theta}}(x) = P(\hat{\theta} \le x) = P(\max_{1\le i\le n} \xi_i \le x) = P(\xi_1 \le x, \xi_2 \le x, ..., \xi_n \le x) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} P(\xi_k \le x) = \left(F_{\xi}(x)\right)^n = \frac{x^n}{\theta^n}, x \in [0, \theta].$$

Тоді щільність функції розподілу оцінки $\hat{\theta}$ буде

$$f_{\hat{\theta}}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, x \in [0, \theta].$$

Тепер можемо знайти математичне сподівання оцінки $\hat{\theta}$

$$M\hat{\theta} = \int_0^{\theta} \frac{nx^n}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+1}\theta.$$

Бачимо, що оцінка є зміщеною, але при цьому буде асимптотично незміщеною.
Перевірку на консистентність будемо виконувати за означенням

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| > \varepsilon\right) \to 0, n \to \infty.$$

Нам зручніше це означення записати у такому вигляді

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \le \varepsilon\right) \to 1, n \to \infty.$$

Застосуємо останнє визначення консистентності для нашої задачі

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| \le \varepsilon\right) = P\left(\theta - \varepsilon \le \hat{\theta}_n \le \theta + \varepsilon\right) =$$

$$= F_{\hat{\theta}}(\theta + \varepsilon) - F_{\hat{\theta}}(\theta - \varepsilon) = 1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \to 1, n \to \infty.$$

Отже оцінка є консистентною.

Завдання для самостійної роботи

1) Нехай задано вибірку з генеральної сукупності $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ з щільністю розподілу

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \theta\left(1-\theta|x|\right), \ |x| \le \dfrac{1}{\theta}; \\ 0, \ |x| > \dfrac{1}{\theta}. \end{cases}$$

За методом моментів потрібно знайти оцінку параметра θ. Перевірити, чи буде знайдена оцінка консистентною?

2) Нехай задано вибірку з генеральної сукупності $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ з нормальним розподілом $N\left(\theta, 2\theta\right)$. Знайдіть оцінку параметра θ за методом максимальної вірогідності та перевірте знайдену оцінку на консистентність.

$$\left(f(x,\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{4\theta}}, \theta > 0, \ x \in R \right).$$