Теорія алгоритмів та математична логіка
К-29 Іоффе Андрія Артуровича
білет № 7

2. Довести, що $A, B, C \vdash (A \to B) \to C$

$B \to (A \to B)$ І.1.

$A \to B$ М.Р.

$C \to ((A \to B) \to C)$ І.1.

$(A \to B) \to C$ М.Р.

3. $(q \to \forall x P(x)) \to \forall x (q \to P(x))$ (1)

Покажемо, що формула (1) – тавтологія. Візьмемо заперечення формули (1) та покажемо, що вона суперечлива.

$\neg((q \to \forall x P(x)) \to \forall x (q \to P(x)))$ (2)

Зведемо формулу (2) до попередньої нормальної форми

$\neg((q \to \forall x P(x)) \to \forall x (q \to P(x))) =$

$= \neg(\neg(q \to \forall x P(x)) \vee \forall x (q \to P(x))) =$

$= (q \to \forall x P(x)) \wedge \neg \forall x (q \to P(x)) =$

$= \forall x (q \to P(x)) \wedge \exists y \neg(q \to P(y)) =$

$= \forall x (\neg q \vee P(x)) \wedge \exists y \neg(\neg q \vee P(y)) =$

$= \forall x (\neg q \vee P(x)) \wedge \exists y (q \wedge \neg P(y)) =$

$= \forall x \exists y ((\neg q \vee P(x)) \wedge q \wedge \neg P(y)$

Елімінація кванторів існування

$\forall x ((\neg a \vee P(x)) \wedge a \wedge \neg P(f(x)))$

Множина диз'юнктів логічної формули

$S = \{\neg a \vee P(x), a, \neg P(f(x))\}$

Ербранівський універсум множини диз'юнктів

$E = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$

Виведення пустого диз'юнкта

1. $\neg a \vee P(f(a))$
2. a
3. $\neg P(f(a))$
4. $\neg a$
5. $P(f(a))$
6. $\square$

Отже, формула (2) суперечлива $\Rightarrow$ формула (1) - тавтологія