Макуренко Наталія К-29

Білет №15

② Довести, що

$A, B, \neg C, \neg D \vdash A \wedge (B \to (C \to D))$

1. $\neg C \to (\neg D \to \neg C)$ (I.1)
2. $\neg D \to \neg C$ (MP) $\neg C, 1$
3. $(\neg D \to \neg C) \to (C \to D)$ (IV.1)
4. $C \to D$ (MP)
5. $(C \to D) \to (B \to (C \to D))$ (I.1)
6. $B \to (C \to D)$ (MP) 2,5
7. $(\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg A \to (B \to (C \to D))) \to (\neg\neg A \to A \wedge (B \to (C \to D)))$ (II.3)
8. $\neg\neg A \to A$ (IV3)
9. $(\neg\neg A \to B \to (C \to D)) \to (\neg\neg A \to A \wedge (B \to (C \to D)))$ (MP 7,8)
10. $A \to \neg\neg A$ (IV 2)
11. $\neg\neg A$ (MP 10, A)
12. $B \to (C \to D) \to (\neg\neg A \to (B \to (C D)))$ (I 1)
13. $\neg\neg A \to (B \to (C \to D))$ (MP 6,12)
14. $\neg\neg A \to A \wedge (B \to (C \to D))$ (MP 9, 13)
15. $A \wedge (B \to (C \to D))$ (MP 14, 11)

③ Довести формулу

$$(\forall x(P(x) \to R(x)) \wedge \forall x(P(x) \to Q(x))) \to (\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \wedge R(x)))$$

Розглянемо заперечення

$$\neg(\text{— и —})$$

Трансформуємо імплікацію:

$$\neg(\neg(\forall x(\neg P(x) \vee R(x)) \wedge \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))) \vee (\neg \exists x P(x)) \quad (\vee)$$

$$(\vee) \quad \exists x(Q(x) \wedge R(x)))$$

$$(\forall x(\neg P(x) \vee R(x)) \wedge \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))) \wedge (\exists x P(x)) \quad (\wedge)$$

$$(\wedge) \quad \neg \exists x(Q(x) \wedge R(x)))$$

Використовуємо правила зведення до ПНФ

$$\forall x((\neg P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x))) \wedge (\exists x P(x)) \quad (\wedge)$$

$$(\wedge) \quad \forall x(\neg Q(x) \vee \neg R(x)))$$

$$\forall x((\neg P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x))) \wedge (\exists y P(y)) \quad (\wedge)$$

$$(\wedge) \quad \forall z(\neg Q(z) \vee \neg R(z)))$$

$$\forall x \exists y \forall z((\neg P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y)) \quad (\wedge)$$

$$(\wedge) \quad (\neg Q(z) \vee \neg R(z)))$$

$y \mapsto f(x)$

$$\forall x \forall z((\neg P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(f(x)) \wedge \neg Q(z)) \quad (\vee)$$

$$(\vee) \quad \neg R(z)))$$

Розглянемо множину диз'юнктів.

$$S = \{\neg P(x) \vee R(x),\ \neg P(x) \vee Q(x),\ P(f(x)),\ \neg Q(z) \vee \neg R(z)\}$$

$E = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$ - ербранів універсум

Виведемо порожній дизюнкт

$S' = \{ \neg P(f(a)) \vee R(f(a)),\ \neg P(f(a)) \vee Q(f(a)),\ P(f(a)),$
$\neg Q(f(a)) \vee \neg R(f(a)) \}$

1. $\neg P(f(a)) \vee R(f(a)),\ P(f(a)) \Rightarrow R(f(a))$
2. $R(f(a)),\ \neg Q(f(a)) \vee \neg R(f(a)) \Rightarrow \neg Q(f(a))$
3. $\neg Q(f(a)),\ \neg P(f(a)) \vee Q(f(a)) \Rightarrow \neg P(f(a))$
4. $\neg P(f(a)),\ P(f(a)) \Rightarrow \square$

Початкова формула є тавтологією.