Контрольна робота з чисельних методів
студента групи ПС-31
Вербицького Ярослава Віталійовича

Варіант №: 115

1. $\sin\frac{\pi}{8}$, $x^2-2x+\sin\frac{\pi}{8}=0$, $\delta(x^*)<10^{-3}$, $\delta(\sin\frac{\pi}{8})-?$

$$\delta(\sin\frac{\pi}{8}) = \frac{\Delta(\sin\frac{\pi}{8})}{\sin\frac{\pi}{8}^*} \qquad x^* = 1+\sqrt{1-\sin\frac{\pi}{8}}$$

$$\Delta(x^*) = \frac{\Delta(f^*)}{|f'(x^*)|} \leq \frac{\varepsilon}{|f'(x^*)|} \qquad \Delta(x^*) = \left|\frac{-1}{2\sqrt{1-\sin\frac{\pi}{8}}}\right|\cdot\Delta(\sin\frac{\pi}{8}) = \frac{\Delta(\sin\frac{\pi}{8})}{2\sqrt{1-\sin\frac{\pi}{8}}}$$

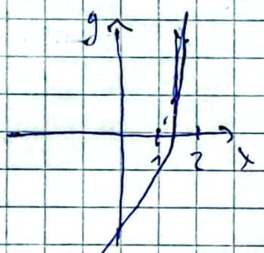
$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{x^*} = \frac{\frac{\Delta(\sin\frac{\pi}{8})}{2\sqrt{1-\sin\frac{\pi}{8}}}}{1+\sqrt{1-\sin\frac{\pi}{8}}} \leq 1e^{-3} \Rightarrow \Delta(\sin\frac{\pi}{8}) \leq 10^{-3}\cdot 2\sqrt{1-\sin\frac{\pi}{8}}\left(1+\sqrt{1-\sin\frac{\pi}{8}}\right)$$

$\sin\frac{\pi}{8} \approx 0,3827$

$\Delta(\sin\frac{\pi}{8}) \leq 0,0028$

2. $x^3+4x-6=0$, $\varepsilon = 0,001$

Перший етап. Рівняння має один дійсний корінь



Другий етап. $f(1)f(2)<0 \Rightarrow x^* \in [1;2]$

Третій етап. Перевіримо достатні умови збіжності:

$f(x) = x^3+4x-6$; $f'(x) = 3x^2+4>0$; $f''(x) = 6x>0$; $f'(x) \neq 0$ на $[1;2]$

Виберемо початкове наближення:

$$\left.\begin{aligned} f(1,5) &= 1,5^3+4\cdot 1,5-6 = 3,375 \\ f''(1,5) &= 6\cdot 1,5 = 9 \end{aligned}\right\} f(1,5)\,f''(1,5)>0 \Rightarrow x_0 = 1,5$$

~~[illegible]~~

Переходимо до ітераційного процесу:

Ітерація 1

$x_0 = 1,5$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1,5 - \frac{1,5^3+4\cdot 1,5-6}{3\cdot 1,5^2+4} \approx 1,186$$

$|x_1-x_0| = |1,186-1,5| \approx 0,3 \geq \varepsilon$. Не виконується

Ітерація 2

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,186 - \frac{1,186^3+4\cdot 1,186-6}{3\cdot 1,186^2+4} \approx 1,136$$

$|x_2 - x_1| = |1,136 - 1,186| = 0,05 \geq \varepsilon$. Не виконується //

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Візьмемо початкове наближення:

$\bar{x}_0 = (1, 1, 1)^T$

$\bar{x}^{k+1} = A \bar{x}^k \qquad \lambda_1^{k+1} = \dfrac{x_m^{k+1}}{x_m^k}, \forall m: 1 \leq m \leq n$

Умова припинення: $|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k| < \varepsilon = 10^{-3}$

$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \boxed{2} \end{pmatrix}$

$\lambda_1^1 = \frac{2}{1} = 2$

$\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \boxed{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ \boxed{11} \end{pmatrix}$

$\lambda_1^2 = \frac{11}{2} = 5,5$

$|\lambda_1^2 - \lambda_1^1| = 4,5 > \varepsilon$

$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ \boxed{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 66 \\ \boxed{37} \end{pmatrix}$

$\lambda_1^3 \approx 3,36$

$|\lambda_1^3 - \lambda_1^2| \approx 2 > \varepsilon$

Таким чином продовжуємо ітерації, допоки $|\lambda_1^{n+1} - \lambda_1^n|$ не стане менше за 10^{-3} //

4. $[-1; 0]$, T_3

Многочлен Чебишова 3-го степеня має вигляд:

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

Знайдемо критичні точки:

$T_3'(x) = 12x^2 - 3$

$12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$, але для нашого відрізку $x = -\frac{1}{2}$

$T_3(-1) = 4(-1)^3 - 3(-1) = -4 + 3 = -1$

$T_3(-\frac{1}{2}) = 4(-\frac{1}{2})^3 - 3(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

$T_3(0) = 4(0)^3 - 3(0) = 0$

$\max(|T_3(-1)|, |T_3(-\frac{1}{2})|, |T_3(0)|) = \max(1, 1, 0) = 1$

Многочлен Чебишова 3-го степеня на відрізку $[-1; 0]$ має макс. відхилення від 0 рівне 1. //

5. $\int_1^5 \frac{dx}{2+x}$, $\varepsilon = 0{,}005$

$f(x) = \frac{1}{2+x}$; $f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(2+x)^3}$; $f'''(x) = -\frac{6}{(2+x)^4}$;

$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(2+x)^5}$

Максимум $f^{(4)}(x)$ на проміжку $[1;5]$ досягається при $x=1$

$f^{(4)}(1) = \frac{24}{(2+1)^5} = \frac{24}{243} \approx 0{,}0988$

Похибка для методу Сімпсона обчислюється:

$$\varepsilon \leq \frac{(b-a)}{180} h^4 \max_{x\in[1,5]} |f^{(4)}(x)|$$

$$\varepsilon \leq \frac{4}{180} h^4 \cdot 0{,}0988$$

Нехай $h = \frac{4}{n}$

$$\frac{4}{180} \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^4 \cdot 0{,}0988 \leq 0{,}005$$

$$\frac{4 \cdot 256 \cdot 0{,}0988}{180 n^4} \leq 0{,}005$$

$$n^4 \geq \frac{101{,}1712}{0{,}9} \approx 112{,}41$$

$$n \geq \sqrt[4]{112{,}41} \approx 3{,}14$$

Отже, мінімальне $n = 4$ (кратне 2)

$n = 4$, $h = \frac{4}{4} = 1$

$x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$

$f(x_0) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$; $f(x_1) = \frac{1}{4}$; $f(x_2) = \frac{1}{5}$; $f(x_3) = \frac{1}{6}$; $f(x_4) = \frac{1}{7}$

$$I \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

$$I \approx \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{5} + 4\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right] = 0{,}8476$$

$$\varepsilon \leq \frac{4}{180} \cdot 1^4 \cdot 0{,}0988 = \frac{0{,}3952}{180} \approx 0{,}0022$$

$\varepsilon \approx 0{,}0022 \leq 0{,}005$

$I \approx 0{,}8476$, $\varepsilon \leq 0{,}0022$ //