Теорія алгоритмів 19.06.20

та математична логіка

Екзаменаційний білет №4

Губернатора Олега К-28

3. Дослідити формулу:

$\forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$

Розглядаємо від супротивного, тобто оберненого твердження

$\neg (\forall x (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x)))$

Зводимо до попередньої нормальної форми:

$\neg (\forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \to (\neg \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)))$

$\neg (\neg \forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \vee (\neg \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)))$

$\forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg (\neg \exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$

$\forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\exists x P(x) \wedge \neg \exists x Q(x))$

$\forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \exists x P(x) \wedge \forall x (\neg Q(x))$

$\forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \exists x \forall z (P(x) \wedge \neg Q(z))$

$\forall x \exists y \forall z ((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(z))$

Зводимо до стандартної форми шляхом елімінації квантора існування:

$y = f(x)$

$\forall x \forall z ((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(f(x)) \wedge \neg Q(z))$

Множина диз'юнктів:

$S = \{\neg P(x) \vee Q(x), P(f(x)), \neg Q(z)\}$

Ербранівський універсум множини диз'юнктів:

$E = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots\}$

Виведення порожнього диз'юнкта:

1. $\neg P(x) \vee Q(x)$
2. $P(f(x))$
3. $\neg Q(z)$
4. $\neg P(f(a)) \vee Q(f(a))$ (підстановка $f(a)$ замість x у 1)
5. $P(f(a))$ (підстановка a замість x у 2)
6. $\neg Q(f(a))$ (підстановка $f(a)$ замість z у 3)
7. $Q(f(a))$ (з 4 та 5)
8. $\square$ (з 6 і 7)

Отже обернене твердження є суперечливим, тому початкова формула є тавтологією

2. Довести, що $A, \neg B, \neg C \vdash (A \wedge B) \to C$

1. $\neg (A \wedge B)$ (за лемою $P, \neg Q \vdash \neg (P \wedge Q)$)

2. $(A \wedge B) \to C$ (за лемою $\neg P, Q \vdash (P \to Q)$)