Заняття №9

Випадкові вектори.

Нехай випадкові величини $\xi_i, i = 1, 2, ..., n$ задані на одному тому ж імовірнісному просторі. Тоді випадковим вектором будемо називати $\xi' = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Функція

$$F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n) = P(\xi_1 \le x_1, \xi_2 \le x_2, ..., \xi_n \le x_n),\ x_i \in R,\ i = 1, 2, ..., n$$

називається функцією розподілу випадкового вектора ξ або **сумісною** функцією розподілу випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

Сумісна функція розподілу має наступні властивості:

1. $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ i = \overline{1, n}.$
2. $\lim\limits_{x_i \to \infty} F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{\xi_1, ..., \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, ..., \xi_n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n).$
3. Якщо оператор T означає перестановку координат вектора $x' = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то $F_{T\xi}(Tx) = F_\xi(x).$
4. Функція $F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n)$ є неперервною справа і не спадною відносно кожного аргументу.

Будемо говорити, що функція розподілу $F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n)$ випадкового вектора $\xi' = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ є **абсолютно неперервного типу**, якщо вона може бути подана у вигляді

$$F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, y_2, ..., y_n) dy_1 dy_2 ... dy_n.$$

Функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається **щільністю** функції розподілу $F_\xi(x_1, x_2, ..., x_n)$. Зазначимо, що функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є щільністю деякої функції розподілу тоді і лише тоді, коли виконуються наступні умови:

1) $f(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0,\ \forall x_i \in R,\ i = 1, 2, ..., n.$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2, ..., y_n) dy_1 dy_2 ... dy_n = 1.$

Для будь якої борелівської множини $A \in R^n$ справедлива формула

$$P(\xi \in A) = \int\int_A \dots \int f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n.$$

Якщо щільність $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є неперервною в точці $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right)$, то

$$f(x_0) = \left.\frac{\partial^n F_\xi(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}\right|_{x = x_0}.$$

Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ називаються незалежними, якщо

$$F_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i),\ \forall x_i \in R,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Розглянемо дві випадкові величини з сумісною функцією розподілу $F(x, y) = P\left(\xi \le x, \eta \le y\right)$. Функції $F_\xi(x) = P(\xi \le x) = F(x, \infty)$ та $F_\eta(y) = P(\eta \le y) = F(\infty, y)$ називають маргінальними функціями розподілу.

Теорема 1. Нехай функція розподілу $F(x, y)$ має щільність $f(x, y)$. Тоді:

а) функції розподілу випадкових величин ξ та η теж мають щільності:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx,$$

б) випадкові величини ξ та η незалежні тоді і лише тоді, коли

$$f(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y).$$

Функція $F(x|y) = P(\xi \le x|\eta = y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \dfrac{f(z, y)}{f_\eta(y)} dz,\ f_\eta(y) > 0; \\ 0,\ f_\eta(y) = 0, \end{cases}$

називається умовною функцією розподілу для ξ при умові $\eta = y$, а функція

$$f(x|y) = \begin{cases} \dfrac{f(x, y)}{f_\eta(y)},\ f_\eta(y) > 0; \\ 0,\ f_\eta(y) = 0, \end{cases}$$

називається умовною щільністю для ξ при умові $\eta = y$.

Теорема 2. Нехай випадкові величини ξ та η будуть незалежними і $F_\xi(x)$ та $F_\eta(y)$ позначають їх функції розподілу. Тоді

$$F_{\xi+\eta}(x) = P(\xi + \eta \le x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x - y) dF_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\eta(x - y) dF_\xi(y), \quad (1)$$

$$F_{\xi\eta}(x) = P(\xi\eta \le x) = \int_{0}^{\infty} F_\xi(xy^{-1}) dF_\eta(y) + \int_{-\infty}^{0} (1 - F_\xi(xy^{-1} - 0)) dF_\eta(y) \quad (2)$$

або

$$F_{\xi\eta}(x)=\int\limits_{0}^{\infty}F_{\eta}(xy^{-1})dF_{\xi}(y)+\int\limits_{-\infty}^{0}(1-F_{\eta}(xy^{-1}-0))dF_{\xi}(y).$$

Якщо додатково $P(\eta=0)=0$, то

$$F_{\xi/\eta}(x)=P(\xi/\eta\le x)=\int\limits_{0}^{\infty}F_{\xi}(xy)dF_{\eta}(y)+\int\limits_{-\infty}^{0}(1-F_{\xi}(xy-0))dF_{\eta}(y). \quad (3)$$

Функція розподілу яка визначається інтегралом (першим або другим) у формулі (1) називається **згорткою** функцій розподілу $F_{\xi}(x)$ та $F_{\eta}(y)$.

Якщо випадкові величини ξ та η незалежні, і одна з них (наприклад ξ) має щільність $f_{\xi}(x)$, то випадкові величини $\xi+\eta$, $\xi\eta$ та ξ/η теж мають щільності, які визначаються формулами

$$f_{\xi+\eta}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{\xi}(x-y)dF_{\eta}(y). \quad (4)$$

$$f_{\xi\eta}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|^{-1}f_{\xi}(xy^{-1})dF_{\eta}(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|^{-1}f_{\eta}(xy^{-1})dF_{\xi}(y). \quad (5)$$

Якщо $P(\eta=0)=0$, то

$$f_{\xi/\eta}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|\,f_{\xi}(xy)dF_{\eta}(y). \quad (6)$$

Формули для коваріації та коефіцієнта кореляції залишаються тими ж, що і в дискретному випадку:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)=M\xi\eta-M\xi M\eta,$$

$$r_{\xi,\eta}=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}},$$

тільки тепер $M\xi\eta$ розраховується за формулою

$$M\xi\eta=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xy\,dF_{\xi,\eta}(x,y),$$ або, якщо існує щільність $f_{\xi,\eta}(x,y)$, за формулою

$$M\xi\eta=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xyf_{\xi,\eta}(x,y)dxdy.$$

Властивості коваріації та коефіцієнта кореляції наведені для випадку дискретних випадкових величин, зберігаються і в загальному випадку.

Задача 1. Щільність розподілу випадкового вектора (ξ,η) дорівнює

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}24x^2y(1-x),\ 0<x<1,\ 0<y<1,\\ 0,\ else.\end{cases}$$

Довести, що випадкові величини ξ та η незалежні.

$$f_\xi(x)=\int_0^1 24x^2y(1-x)dy=24x^2(1-x)\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1=$$

$$=\begin{cases}12x^2(1-x),\ 0<x<1;\\ \qquad 0,\ else.\end{cases}$$

$$f_\eta(y)=\int_0^1 24x^2y(1-x)dx=24y\int_0^1(x^2-x^3)dx=$$

$$=24y\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1=8y-6y=\begin{cases}2y,\ 0<y<1;\\ \quad 0,\ else.\end{cases}$$

Бачимо, що $f_{\xi,\eta}(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y).$ Отже випадкові величини ξ та η незалежні.

Задача 2. Випадкові величини ξ та η незалежні. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-1;1]$, а η рівномірно розподілена на відрізку $[1;3]$. Знайти розподіл випадкової величини $\xi-\eta$.

Перший спосіб.

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},\ x\in[-1;1],\\ 0,\ x\notin[-1;1].\end{cases}\qquad f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{2},\ y\in[1;3],\\ 0,\ y\notin[1;3].\end{cases}$$

$$f_{\xi-\eta}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(z+y)f_\eta(y)dy=\int_1^3 f_\xi(z+y)f_\eta(y)dy=\begin{vmatrix}z+y=u\\ dy=du\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1+z}^{3+z}f_\xi(u)du=\begin{cases}0,\ z\in(-\infty;-4]\cup(0;\infty),\\ \frac{z+4}{4},\ z\in(-4;-2],\\ -\frac{z}{4},\ z\in(-2;0].\end{cases}$$

Потрібно знайти перетин відрізків $[-1;1]$ та $[1+z;3+z]$.

1) $3+z\le-1,\Rightarrow z\le-4,\ f_{\xi-\eta}(z)=0;$

2) $1+z>1,\Rightarrow z>0,\ f_{\xi-\eta}(z)=0;$

3)

$$\begin{cases} 3+z>1,\ z>-2; \\ 1+z<1,\ z\le 0; \end{cases} \Rightarrow z\in(-2;0];$$

$$f_{\xi-\eta}(z)=\frac{1}{4}\int_{1+z}^{1}du=-\frac{z}{4};$$

4)

$$\begin{cases} 1+z<-1,\ z\le -2; \\ 3+z>-1,\ z>-4; \end{cases} \Rightarrow z\in(-4;-2];$$

$$f_{\xi-\eta}(z)=\frac{1}{4}\int_{-1}^{3+z}du=\frac{z+4}{4}.$$

Другий спосіб.

$$F_{\xi-\eta}(z)=P(\xi-\eta\le z)=\iint\limits_{x-y\le z} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{x-y\le z} f_{\xi}(x)f_{\eta}(y)dxdy=\begin{cases} 1,\ z>0, \\ 0,\ z\le -4, \\ 1-\dfrac{z^2}{8},\ z\in(-2;\ 0], \\ \dfrac{z^2+8z+16}{8},\ z\in(-4;\ -2]. \end{cases}$$

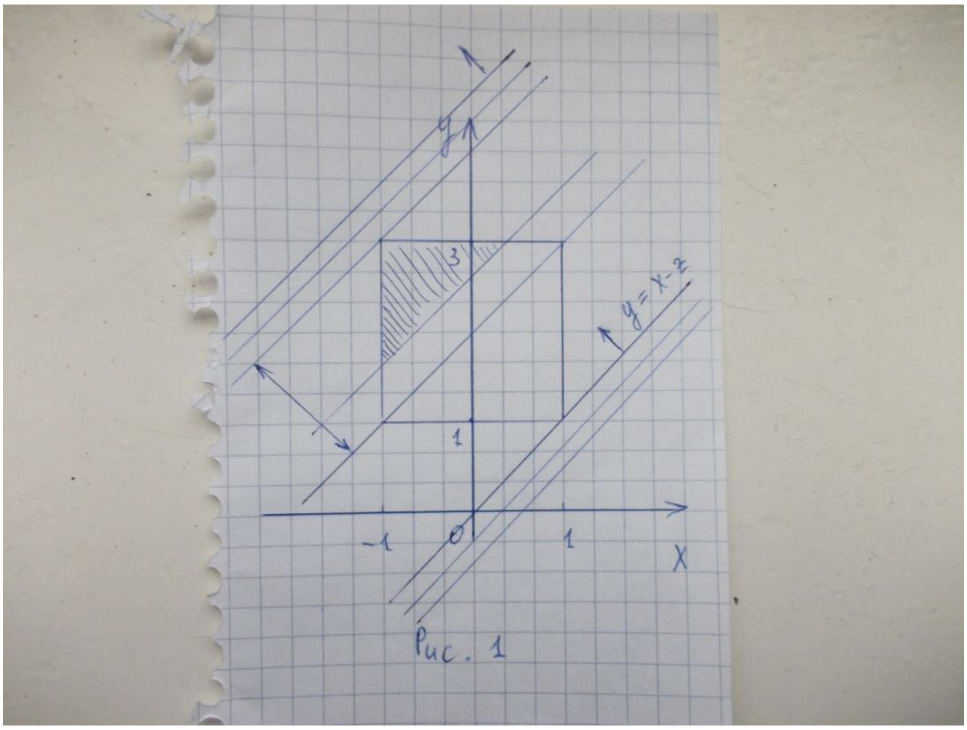

Рис. 1

$z \in (-4; -2]$,

$$F_{\xi-\eta}(z) = \int\limits_{x=-1}^{3+z} \left(\int\limits_{y=x-z}^{3} \frac{1}{4} dy \right) dx = \frac{z^2 + 8z + 16}{8};$$

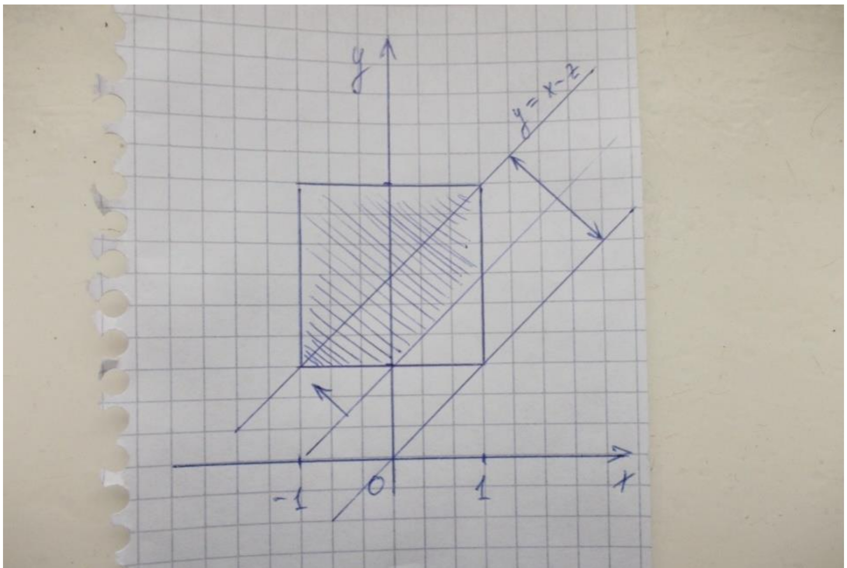

Рис. 2

$z \in (-2; 0]$,

$$F_{\xi-\eta}(z) = 1 - \int\limits_{x=1+z}^{1} \left(\int\limits_{y=1}^{x-z} \frac{1}{4} dy \right) dx = 1 - \frac{z^2}{8}.$$

Задача 3. Щільність розподілу випадкового вектора (ξ, η) дорівнює

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} x + y, \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1, \\ 0, \ else. \end{cases}$$

Знайти розподіл суми $\xi + \eta$.

$$F_{\xi+\eta}(z) = P(\xi + \eta \le z) = \iint\limits_{x+y \le z} f_{\xi,\eta}(x, y) dxdy =$$

$$= \begin{cases} 1, \ z > 2, \\ 0, \ z \le 0, \\ \dfrac{z^3}{3}, \ z \in (0; 1], \\ \dfrac{-z^3 + 3z^2 - 1}{3}, \ z \in (1; 2]. \end{cases}$$

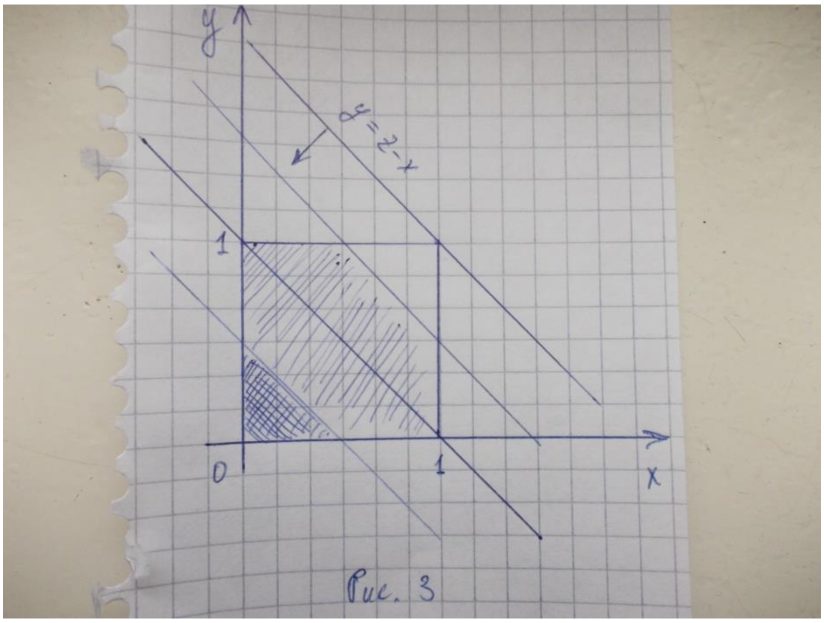

Рис. 3

$z \in (0;1]$,

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int\limits_{x=0}^{z}\left(\int\limits_{y=0}^{z-x}(x+y)dy\right)dx = \frac{z^3}{3};$$

$z \in (1;2]$,

$$F_{\xi+\eta}(z) = 1 - \int\limits_{x=z-1}^{1}\left(\int\limits_{y=z-x}^{1}(x+y)dy\right)dx = \frac{-z^3+3z^2-1}{3}.$$

Задача 4. Щільність розподілу випадкового вектора (ξ,η) дорівнює

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, \; x>0, \; y>0, \\ 0, \; else. \end{cases}$$

Знайти розподіл добутку $\xi \cdot \eta$.

$$F_{\xi\eta}(z) = P(\xi\eta \le z) = \iint\limits_{xy\le z} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \iint\limits_{xy\le z} xe^{-x(1+y)}dxdy =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{\infty}\int\limits_{y=0}^{z/x} xe^{-x(1+y)}dydx = \begin{cases} 1-e^{-z}, \; z \ge 0, \\ 0, \; z<0. \end{cases}$$

$$\int_{y=0}^{z/x} xe^{-x(1+y)}dy = -e^{-x(1+y)}\Big|_0^{z/x} = e^{-x} - e^{-x-z};$$

$$\int_0^{\infty}\left(e^{-x} - e^{-x-z}\right)dx = -e^{-x} + e^{-x-z}\Big|_0^{\infty} = 1 - e^{-z},\ z \geq 0.$$

Домашня робота.

1) Випадкові величини ξ та η незалежні. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку [-4; -1], а η рівномірно розподілена на відрізку [1; 4]. Знайти розподіл випадкової величини $\xi + \eta$.