

## 1. T1

1. З'ясувати, чи буде групою множина невідірджених дійсних матриць вигляду  $\begin{pmatrix} x & y \\ ay & x \end{pmatrix}$ , де число  $a$  – фіксоване, відносно множення.
2. З'ясувати, чи буде групою множина невідірджених дійсних матриць вигляду  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , де  $x \in \mathbb{R}$ , відносно множення.
3. З'ясувати, чи буде групою множина невідірджених дійсних матриць вигляду  $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ , де  $x \in \mathbb{R}$ , відносно множення.
4. З'ясувати, чи буде групою множина підстановок  $\{(1)(2)(3)(4); (12)(34); (13)(24); (14)(23)\}$  відносно операції суперпозиції.
5. З'ясувати, чи буде групою множина всіх комплексних коренів усіх степенів з одиниці відносно операції множення.
6. З'ясувати, чи буде групою множина всіх відображень множини  $M = \{1, 2, \dots, n\}$  у себе відносно суперпозиції відображень.
7. З'ясувати, чи буде кільцем відносно звичайних операцій додавання та множення множина раціональних чисел, у нескоротному записі яких знаменники є дільниками фіксованого натурального числа  $n$ .
8. З'ясувати, чи буде кільцем відносно звичайних операцій додавання та множення множина дійсних чисел вигляду  $x + y\sqrt{3}$ , де  $x, y \in \mathbb{Q}$
9. З'ясувати, чи буде кільцем відносно звичайних операцій додавання та множення множина дійсних чисел вигляду  $x + y\sqrt[3]{3}$ , де  $x, y \in \mathbb{Q}$
10. З'ясувати, чи буде кільцем відносно звичайних операцій додавання та множення множина дійсних чисел вигляду  $x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9}$ , де  $x, y, z \in \mathbb{Q}$
11. З'ясувати, чи буде кільцем відносно звичайних операцій додавання та множення множина комплексних матриць вигляду  $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$
12. З'ясувати, чи буде кільцем відносно звичайних операцій додавання та множення множина раціональних чисел, у нескоротному записі яких знаменники є степенями фіксованого простого числа  $p$ .

## 2. T2

1. Скласти таблицю Келі групи  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
2. Скласти таблицю Келі групи  $Z_9^*$ , де  $Z_n^*$  – мультиплікативна група оборотних класів лишків за модулем числа  $n$
3. Скласти таблицю Келі групи  $D_3$ , де  $D_n$  – група симетрій правильного  $n$ -кутника
4. Знайти порядок елемента групи  $g = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in T_2(Z_5^*)$  де  $T_2(Z_5)$  – множина невідірджених верхніх трикутних матриць порядку 2 з коефіцієнтами з поля  $Z_5$
5. Знайти порядок елемента групи  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$
6. Знайти порядок елемента групи  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 4 & 6 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_8$

7. Знайти порядок елемента групи  $g = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(C)$ , де  $GL_n(P)$  – повна лінійна група степеня  $n$  – група за множенням усіх невідроджених матриць порядку  $n$  з коефіцієнтами з поля  $P$
8. Знайти порядок елемента групи  $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(Z)$ , де  $GL_n(Z)$  – група за множенням усіх невідроджених цілочисельних матриць порядку  $n$ , обернені до яких також є цілочисельними
9. Знайти порядок елемента групи  $g = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \in C^*$ , де  $C^*$  – мультиплікативна група поля комплексних чисел.
10. Знайти порядок елемента групи  $g = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \in C^*$ , де  $C^*$  – мультиплікативна група поля комплексних чисел.
11. Знайти порядок групи поворотів правильного тетраедра

### 3. Т4

1. У циклічній групі  $\langle a \rangle$  порядку  $n$  знайти всі елементи порядку  $k$ , якщо  $n = 140, k = 35$
2. У циклічній групі  $\langle a \rangle$  порядку  $n$  знайти всі елементи порядку  $k$ , якщо  $n = 105, k = 15$
3. У циклічній групі  $\langle a \rangle$  порядку  $n$  знайти всі елементи порядку  $k$ , якщо  $n = 200, k = 8$
4. Чи буде відображення  $f$  гомоморфізмом? Чи буде воно ізоморфізмом?  $f : R \rightarrow R^+, f(x) = 2^x$
5. Чи буде відображення  $f$  гомоморфізмом? Чи буде воно ізоморфізмом?  $f : R^+ \rightarrow R, f(x) = \log_2 x$
6. Чи буде відображення  $f$  гомоморфізмом? Чи буде воно ізоморфізмом?  $f : C^* \rightarrow R^*, f(z) = \frac{1}{|z|}$
7. Чи буде відображення  $f$  гомоморфізмом? Чи буде воно ізоморфізмом?  $f : C^* \rightarrow C^*, f(z) = \frac{z}{|z|}$
8. Чи буде відображення  $f$  гомоморфізмом? Чи буде воно ізоморфізмом?  $f : R \rightarrow Z, f(x) = [x]$
9. Чи буде відображення  $f$  гомоморфізмом? Чи буде воно ізоморфізмом?  $f : R^* \rightarrow R^*, f(x) = \frac{1}{x}$
10. З'ясувати, чи буде множина  $M$  відносно звичайних операцій додавання та множення полем. Знайти обернений елемент для елемента  $a$ .  $M = Z_{179}, a = 96$ .
11. З'ясувати, чи буде множина  $M$  відносно звичайних операцій додавання та множення полем. Знайти обернений елемент для елемента  $a$ .  $M = Z_{143}, a = 97$ .
12. З'ясувати, чи буде множина  $M$  відносно звичайних операцій додавання та множення полем. Знайти обернений елемент для елемента  $a$ .  $M = Z_{150}, a = 101$ .
13. Розв'язати рівняння  $x^2 + x\sqrt{3} - 7 + 3\sqrt{3} = 0$  у полі  $Q(\sqrt{3})$ .
14. Розв'язати рівняння  $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$  у полі  $Q(\sqrt{3})$ .
15. Розв'язати рівняння  $x^2 - (3 + 3\sqrt{2})x + 4 + 6\sqrt{2} = 0$  у полі  $Q(\sqrt{2})$ .
16. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$  в кільці  $Z_{18}$
17. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$  в кільці  $Z_{18}$
18. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} 9x + 2y = 8 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$  в полі  $Z_{13}$

19. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} 7x + 5y = 4 \\ 3x + 10y = 7 \end{cases}$  в полі  $Z_{13}$
20. Знайти обернену матрицю до матриці  $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  в полі  $Z_5$
21. Знайти обернену матрицю до матриці  $g = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$  в полі  $Z_{13}$

## 4. Extensions

1. Знайти елемент обернений до  $G[x] = x^4 + x + 1$  у розширенні поля  $Z_2$  за допомогою незвідного многочлена  $F[x] = x^5 + x^2 + 1$
2. Знайти елемент обернений до  $G[x] = x^2 + 2x + 1$  у розширенні поля  $Z_3$  за допомогою незвідного многочлена  $F[x] = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
3. Знайти елемент обернений до  $G[x] = x^2 + 2x + 1$  у розширенні поля  $Z_7$  за допомогою незвідного многочлена  $F[x] = x^3 + x^2 + x + 2$
4. Знайти частковий розклад добутку всіх незвідних многочленів степеня 6 у полі  $Z_2$  через кругові многочлени. Знайти всі незвідні кругові многочлени та многочлени які можна з них одержати.
5. Знайти частковий розклад добутку всіх незвідних многочленів степеня 4 у полі  $Z_3$  через кругові многочлени. Знайти всі незвідні кругові многочлени та многочлени які можна з них одержати.
6. Знайти частковий розклад добутку всіх незвідних многочленів степеня 3 у полі  $Z_5$  через кругові многочлени. Знайти всі незвідні кругові многочлени та многочлени які можна з них одержати.
7. Знайти частковий розклад добутку всіх незвідних многочленів степеня 2 у полі  $Z_7$  через кругові многочлени. Знайти всі незвідні кругові многочлени та многочлени які можна з них одержати.
8. Знайти круговий многочлен  $Q_{48}$
9. Знайти круговий многочлен  $Q_{81}$
10. Знайти круговий многочлен  $Q_{60}$
11. Знайти круговий многочлен  $Q_{35}$
12. Дано еліптичну криву  $y^2 = x^3 + 2x + 3$  у полі  $Z_{13}$ . Знайти дві різні точки на кривій такі що  $0 \leq y \leq 6$ . Обчислити їх суму
13. Дано еліптичну криву  $y^2 = x^3 + 7x + 8$  у полі  $Z_{11}$ . Знайти дві різні точки на кривій такі що  $0 \leq y \leq 5$ . Обчислити їх суму
14. Дано еліптичну криву  $y^2 = x^3 + x + 1$  у полі  $Z_{17}$ . Знайти точку  $A$  на кривій таку що  $y \neq 0$ . Обчислити  $A + A$