1382. $f_1 = (1, 2, 1)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} = [\varphi]_{f_1, f_2, f_3}$ $\quad B = [\varphi^*]_{f_1, f_2, f_3}$

$f_2 = (1, 1, 2)$

$f_3 = (1, 1, 0)$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ - м. п. $e \to f$

$C = [\varphi]_{e_1, e_2, e_3}$ $\quad A = T^{-1} \cancel{A} C T, \quad C = TAT^{-1}$

$C^T = [\varphi^*]_{e_1, e_2, e_3}$ $\quad B = T^{-1} C^T T$

$$T^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix} = [\varphi^*]_{f_1, f_2, f_3} \quad //$$

1548. $R_n = L_1 + L_2$

Для доведення $R_n = L_1^* + L_2^*$, спочатку покажемо, що L_1^* і L_2^* є підпросторами в R_n. Дійсно, нехай $\forall x, y \in L_1^*$, тоді для будь-якого $v \in L_1$ виконується $(x+y, v) = (x, v) + (y, v) = 0$, так як x та y ортогональні L_1. Аналогічно, якщо $\forall x \in L_1^*$, $\forall y \in L_2^*$, то для будь-якого $v = v_1 + v_2$, де $v_1 \in L_1$, $v_2 \in L_2$, виконується $(x+y, v) = (x, v_1) + (y, v_2) = 0$, так як x ортогональний L_1, а y ортогональний L_1. Отже, $L_1^* + L_2^*$ є прямою сумою L_1^* і L_1^*. Покажемо, що $L_1^* + L_2^* = R_n$.

Scanned with CamScanner

Нехай $\forall v \in R_n$. Оскільки $R_n = L_1 + L_2$, то існує $v_1 \in L_1$ і $v_2 \in L_2$: $v = v_1 + v_2$. Тоді $\forall x \in L_1^*$ виконується $(x, v) = (x, v_1) + (x, v_2) = 0 + 0 = 0$, так як x ортогональний L_1. Аналогічно виконується для $\forall y \in L_2^*$: $(y, v) = 0$, так як y ортогональний L_2. Отже, $v \in L_1^* + L_2^* \Rightarrow R_n = L_1^* + L_2^*$ □

Для доведення того, що φ^* є проекцією R_n на L_2^* паралельно L_1^*, необхідно показати, що

1) φ^* є лін. оператором на R_n
2) $(\varphi^*)^2 = \varphi^*$
3) $Im(\varphi^*) = L_2^*$
4) $Ker(\varphi^*) = L_1^*$

1) φ^* є спряженим з оператором φ на $R_n \Rightarrow \varphi^*$ також є оператором на R_n

2) $\forall v \in R_n : (\varphi \cdot \varphi)(v) = \varphi(\varphi \cdot v)$. Оскільки φ є оператором проектування R_n на L_1 паралельно L_2, то для $\forall v \in R_n$: $\varphi v \in L_1$ і $(v - \varphi v) \in L_2$. Тоді $\varphi^*(\varphi v) = v$, так як φ^* є спряженим з φ, а значить $(\varphi \cdot \varphi)(v) = \varphi(\varphi \cdot v) = v \Rightarrow \varphi \cdot \varphi = \varphi$.

3) Для $\forall v \in R_n$ виконується $\varphi^*(v) \in L_2^*$, оскільки φ^* є спряженим з φ, який проектує вектори на L_1 паралельно L_2.
$\forall v \in R_n : v = v_1 + v_2$, де $v_1 \in L_1$, $v_2 = L_2 \Rightarrow \forall y \in L_1^*$ виконується
$(y, \varphi^*(v)) = (\varphi(y), v) = (\varphi(y), v_1) + (\varphi(y), v_2) = (y, \varphi^*(v_2))$,

де ми використали ортогональність $\varphi(y)$ і v_1, а також, що $\varphi(y) \in L_1$. Звідси $\varphi^*(v)$ лежить в ортогональному доповненні L_1^*, яке ми позначили як L_2.

4) $\forall v \in R_n$: $\varphi^*(v) = 0 \Leftrightarrow v$ лежить в ортогональному доповненні $Ker(\varphi)$, яке ми позначили як L_1^*. Дійсно, якщо $\varphi^*(v)=0$, тоді для $\forall x \in L_1$ виконується $(x, \varphi(v)) = (\varphi(x), v) = 0$, так як $\varphi(x)$ лежить в L_1. Значить, v ортогональний L_1 і лежить в L_1^*. Обернено якщо v лежить в L_1^*, то для $\forall x \in L_1$ виконується $(x, v) = 0 \Rightarrow (\varphi(x), v) = 0$. Так як $\forall$ вектор з R_n можна представити у вигляді суми векторів з L_1 і L_2, звідси випливає, що $\varphi^*(v) = 0$.

Отже, φ^* є проекцією R_n на на L_2^* паралельно L_1^*. $\square$

1556. $f = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (x, y) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = U^{-1}A^T U \qquad (U \mid A^T) \sim (E \mid U^{-1}A^T)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\| \; U^{-1}A^T$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \; //$$

1558. $U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\| \; U^{-1}A^T$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix} \; //$$

Scanned with CamScanner