Екзаменаційна робота
Теорія алгоритмів та математична лолгіка

Куценко Євгеній, К-28

19 червня 2020

Білет №9

2 Довести, що $\neg A, \neg B, C \vdash (A \to B) \to C$

1. $\neg A \vdash \neg A$
2. $\neg A, \neg B \vdash \neg A$
3. $\neg A, \neg B \vdash (\neg B \to \neg A)$ (за теоремою дедукції)
4. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (підстановка у IV.1 з використанням правила силогізму для IV.2 та IV.3)
5. $(\neg B \to \neg A) \vdash (A \to B)$ (за теоремою дедукції)
6. $\neg A, \neg B \vdash (A \to B)$ (з 3 та 5 використовуючи теорему дедукції та правило силогізму)
7. $\neg A, \neg B, C \vdash (A \to B)$
8. $\neg A, \neg B, C \vdash C$ (оскільки $\Gamma \vdash C$, якщо $C \in \Gamma$)
9. $\neg A, \neg B, C \vdash (A \to B) \to C$ (оскільки якщо $\vdash R$, то $\vdash (b \to R)$)

3 Дослідити формулу: $\forall x(A(x) \vee B(x)) \to (\forall x A(x) \vee \exists x B(x))$

Розглядаємо обернене твердження:

$\neg(\forall x(A(x) \vee B(x)) \to (\forall x A(x) \vee \exists x B(x)))$

Зводимо до попередньої нормальної форми:

$\neg(\neg\forall x(A(x) \vee B(x)) \vee (\forall x A(x) \vee \exists x B(x)))$

$\forall x(A(x) \vee B(x)) \wedge \neg(\forall x A(x) \vee \exists x B(x))$

$\forall x(A(x) \vee B(x)) \wedge (\neg\forall x A(x) \wedge \neg\exists x B(x))$

$\forall x(A(x) \vee B(x)) \wedge (\exists x(\neg A(x)) \wedge \forall x(\neg B(x)))$

$\forall x(A(x) \vee B(x)) \wedge \exists x \forall z(\neg A(x) \wedge \neg B(z))$

$\forall x \exists y \forall z((A(x) \vee B(x)) \wedge \neg A(y) \wedge \neg B(z))$

Зводимо до стандартної форми шляхом елімінації квантора існування:

$y = f(x)$

$\forall x \forall z((A(x) \vee B(x)) \wedge \neg A(f(x)) \wedge \neg B(z))$

Множина диз'юнктів: $S = \{A(x) \vee B(x), \neg A(f(x)), \neg B(z)\}$

Ербранівський універсум множини диз'юнктів: $E = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), ...\}$

Виведення порожнього диз'юнкта:

1. $A(x) \vee B(x)$
2. $\neg A(f(x))$
3. $\neg B(z)$
4. $A(f(a)) \vee B(f(a))$ (підстановка $f(a)$ замість x у 1)
5. $\neg A(f(a))$ (підстановка a замість x у 2)
6. $\neg B(f(a))$ (підстановка $f(a)$ замість z у 3)
7. $B(f(a))$ (з 4 і 5)
8. $\square$ (з 6 і 7)

Отже обернене твердження є суперечливим, тому початкова формула є тавтологією