ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

(для студентів факультету комп'ютерних наук
та кібернетики, ОП «Системний аналіз»)

Київ — 2022

УДК 519.6
ББК 22.19я73

Автори

Голубєва К.М., Кашпур О.Ф., Клюшин Д.А.

Рецензенти

Доктор фіз.-мат. наук, професор Номіровський Д. А.

Доктор фіз.-мат. наук, професор Семенов В. В

Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 4 від 17 листопада 2021 року)

Чисельні методи (для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики, ОП «Системний аналіз»): навчальний посібник / Голубєва К.М., Кашпур О.Ф., Клюшин Д.А. – Київ: 2022. – 145 с.

ISBN

У навчальному посібнику «Чисельні методи» розглядаються питання теорії похибок, наближеного розв'язання нелінійних рівнянь та їх систем, проблеми на власні значення, знаходження розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь, інтерполяції, чисельного інтегрування, чисельного диференціювання, наближене розв'язання задачі Коші. Зміст посібника відповідає навчальній програмі бакалаврів факультету комп'ютерних наук та кібернетики, які навчаються за освітньою програмою «Системний аналіз».

1. Елементи теорії похибок

Основні означення

Величина, яка характеризує точність результату, називається ***похибкою***. Основні типи похибок:

1) неусувні похибки – пов'язані із неточностями вхідних даних (похибки приладів, наявність констант, невідповідність математичної моделі, тощо);

2) похибки методу – з'являються при застосуванні наближених методів замість точних;

3) похибки обчислень – виникають внаслідок заокруглень при виконанні математичних операцій в ЕОМ, також під час введення та виведення даних в ЕОМ;

4) повна похибка – сума всіх похибок, які виникають при розв'язанні конкретної задачі.

Якщо похибка, яка була зроблена на перших кроках обчислень, на подальших кроках не збільшується або залишається того самого порядку, то обчислювальний процес називається ***стійким*** по відношенню до початкової похибки; якщо ця похибка зростає на кожному подальшому кроці, то процес обчислень називається ***нестійким***.

Зауваження. Для запобігання зростання обчислювальної похибки обчислення проводять починаючи з найменших по модулю значень.

Приклад. На гіпотетичній «десятковій» ЕОМ з мантисою довжиною 4 знаходять суму чисел від найменшого до найбільшого та в зворотному напрямку від найбільшого до найменшого:

$$S = 0,2764 + 0,3944 + 1,475 + 26,46 + 1364.$$

В якому випадку обчислювальна похибка буде меншою?

Розв'язок. Знайдемо суму $\tilde{S}$ від найменшого до найбільшого:

$\tilde{S}_1 = 0,2764 + 0,3944 = 0,6708 \approx 0,671;$

$\tilde{S}_2 = 0,671 + 1,475 = 2,146 \approx 2,15;$

$\tilde{S}_3 = 2,15 + 26,46 = 28,61 \approx 29;$

$\tilde{S}_4 = 29 + 1364 = 1393;$

$\tilde{S} \approx 1393.$

Знайдемо суму $\overline{S}$ від найбільшого до найменшого:

$\overline{S}_1 = 1364 + 26,46 \approx 1364 + 26 = 1390;$

$\overline{S}_2 = 1390 + 1,475 \approx 1390 + 1 = 1391;$

$\overline{S}_3 = 1391 + 0,3944 \approx 1391 + 0 = 1391;$

$\overline{S}_4 = 1391 + 0,2764 \approx 1391 + 0 = 1391;$

$\overline{S} \approx 1391.$

Знайдемо точне значення суми (будемо вважати, що мантиса не обмежена 4 розрядами):

$S = 0,2764+0,3944+1,475+26,46+1364 = 1392,6058 \approx 1393.$

Отже, похибка менша при додаванні від найменших чисел до найбільших.

Нехай x – точне значення деякої величини, x^* – її відоме наближене значення.

Абсолютною похибкою числа x^* називається величина $\Delta(x^*)$, що задовольняє умові

$$\Delta(x^*) \geqslant |x - x^*|. \tag{1}$$

В цьому випадку число x можна подати у вигляді

$$x = x^* \pm \Delta(x^*). \tag{2}$$

Відносною похибкою числа x^* називається величина $\delta(x^*)$, що задовольняє умові

$$\delta(x^*) \geqslant \left| \frac{x - x^*}{x^*} \right|. \tag{3}$$

Відносну похибку часто виражають у відсотках.

Зауваження. Відносна похибка краще характеризує точність результату.

Значущими цифрами числа називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва.

Значуща цифра називається ***правильною***, якщо абсолютна похибка числа не перевищує половини одиниці розряду, що відповідає цій цифрі, в протилежному випадку її називають ***сумнівною***.

Приклад. Визначити, яка рівність точніша $2/21 = 0,095$ або $\sqrt{22} = 4,69$.

Розв'язок. Враховуючи, що $2/21 \approx 0,095238$, $\sqrt{22} \approx 4,690416$, введемо позначення $x_1 = 0,095238$, $x_1^* = 0,095$, $x_2 = 4,690416$, $x_2^* = 4,69$. Для того щоб визначити, яка рівність точніша, порівняємо відносні похибки чисел:

$$\delta(x_1^*) = \left|\frac{0,095238 - 0,095}{0,095}\right| \cdot 100\% \approx 0,25\%;$$

$$\delta(x_2^*) = \left|\frac{4,690416 - 4,69}{4,69}\right| \cdot 100\% \approx 0,009\%.$$

Отже, рівність $\sqrt{22} = 4,69$ точніша.

Приклад. Визначити значущі цифри числа 0,001230.

Розв'язок. Значущими будуть всі цифри, починаючи з одиниці: 1, 2, 3, 0.

Приклад. Визначити значущі цифри числа 123000.

Розв'язок. Значущими будуть всі цифри, починаючи з одиниці: 1, 2, 3, 0, 0, 0.

Приклад. Записати число 123000, якщо в ньому а) три, б) дві значущі цифри.

Розв'язок. Якщо в цілій частині числа є не значущі цифри, то число заокруглюють до останньої значущої та записують за допомогою порядку: а) 123×10^3, б) 12×10^4.

Приклад. Визначити правильні цифри числа 0,001230, якщо його абсолютна похибка 10^{-4}.

Розв'язок. Позначимо $x^* = 0,001230$, $\Delta(x^*) = 10^{-4}$. Будемо перевіряти значущі цифри за означенням:

«1»: $10^{-4} \leqslant 0,5 \times 10^{-3} \Rightarrow$ цифра «1» – правильна;

«2»: $10^{-4} > 0,5 \times 10^{-4} \Rightarrow$ цифра «2» – сумнівна.

Всі подальші цифри 0будуть сумнівними (які стоять праворуч від сумнівної цифри). Отже, цифра «1» – правильна.

Приклад. Якою буде похибка, якщо число π наблизити числом 3,14?

Розв'язок. Знайдемо абсолютну і відносну похибки, для цього візьмемо число π з більшою кількістю значень: $\pi \approx 3,14159$.

$$\Delta(\pi^*) = |3,14 - 3,14159| = 0,00159,$$

$$\delta(\pi^*) = \frac{0,00159}{3,14} \cdot 100\% = 0,05\%.$$

Отже, абсолютна похибка дорівнює $1,59 \times 10^{-3}$, відносна – $0,05\%$.

Пряма задача теорії похибок

В деякій області $G \in \mathbb{R}^n$ розглядають неперервно диференційовану функцію $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Необхідно обчислити значення функції в точці $(x_1, x_2, ..., x_n) \in G$, але відомі лише наближені значення $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in G$. Обчислимо наближене значення $y^* = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ та оцінимо його похибку.

Оцінку ***абсолютної похибки функції*** обчислюють за формулою:

$$\Delta(y^*) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta(x_i^*), \tag{4}$$

тоді ***відносну похибку функції*** можна знайти:

$$\delta(y^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|y^*|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta(x_i^*) \Big/ \left| f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \right|. \tag{5}$$

Приклад. Для заданої функції $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 z}{y^3}$ оцінити похибку обчислення, якщо $x = 0,15 \pm 0,005$, $y = 2,13 \pm 0,01$, $z = 1,14 \pm 0,007$.

Розв'язок. Оскільки необхідно знайти похибку функції, значить задача пряма, скористаємось формулою (4), будемо враховувати, що відповідно до представлення (2) нам відомі абсолютні похибки аргументів та їх наближені значення.

$$\Delta(f^*) \leqslant \left|\frac{2x^*z^*}{(y^*)^3}\right| \Delta(x^*) + \left|-\frac{3(x^*)^2z^*}{(y^*)^4}\right| \Delta(y^*) + \left|\frac{(x^*)^2}{(y^*)^3}\right| \Delta(z^*) =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,15 \cdot 1,14}{2,13^3} \cdot 0,005 + \frac{3 \cdot 0,15^2 \cdot 1,14}{2,13^4} \cdot 0,01 + \frac{0,15^2}{2,13^3} \cdot 0,007 \approx$$

$\approx 0,00023063 \approx 2,3 \times 10^{-4}$.

Знайдемо відносну похибку функції за формулою (5), для цього спочатку знайдемо наближене значення функції:

$$f(x^*, y^*, z^*) = \frac{(x^*)^2z^*}{(y^*)^3} = \frac{0,15^2 \cdot 1,14}{2,13^3} \approx 0,00265429,$$

$$\delta(f^*) = \frac{0,00023063}{0,00265429} \cdot 100\% \approx 8,7\%.$$

Отже, $\Delta(f^*) \approx 2,3 \times 10^{-4}$, а $\delta(f^*) \approx 8,7\%$.

Приклад. Похибка логарифма. Розглянемо функцію $y = f(x) = \ln x$ та знайдемо її абсолютну похибку:

$$\Delta(y^*) \leqslant \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta(x^*) = \left|\frac{1}{x^*}\right| \cdot \Delta(x^*) = \delta(x^*); \tag{6}$$

відносна похибка логарифма:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{\delta(x^*)}{|\ln x^*|}.$$

Приклад. Похибка степеня. Розглянемо функцію піднесення в степінь $y = f(x) = x^m$ та знайдемо її абсолютну похибку:

$$\Delta(y^*) \leqslant \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta(x^*) = \left|m \cdot (x^*)^{m-1}\right| \cdot \Delta(x^*);$$

відносна похибка степеня:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{\left|m \cdot (x^*)^{m-1}\right| \cdot \Delta(x^*)}{\left|(x^*)^m\right|} = m \cdot \delta(x^*). \tag{7}$$

Приклад. Похибка кореня. Розглянемо функцію $y = f(x) = \sqrt[m]{x}$, абсолютна похибка кореня:

$$\Delta(y^*) \leqslant \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta(x^*) = \left|\frac{1}{m \cdot \sqrt[m]{(x^*)^{m-1}}}\right| \cdot \Delta(x^*);$$

відносна похибка кореня:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{\Delta(x^*)}{|m \cdot \sqrt[m]{(x^*)^{m-1}}|} \div |\sqrt[m]{x^*}| = \frac{\delta(x^*)}{m}. \tag{8}$$

Похибки арифметичних операцій

За допомогою формул (4) та (5) визначимо похибки результатів основних математичних операцій. Будемо розглядати найпростіші випадки, покладемо, $x_1 > x_2 > 0$; $m \in \mathbb{N}$.

Похибка суми. Розглянемо $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, абсолютна похибка суми:

$$\Delta(y^*) \leqslant \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*); \tag{9}$$

відносна похибка суми:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{\Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*)}{|x_1^* + x_2^*|} = \frac{\Delta(x_1^*) \cdot |x_1^*|}{|x_1^* + x_2^*| \cdot |x_1^*|} + \frac{\Delta(x_2^*) \cdot |x_2^*|}{|x_1^* + x_2^*| \cdot |x_2^*|} =$$

$$= \left|\frac{x_1^*}{x_1^* + x_2^*}\right| \delta(x_1^*) + \left|\frac{x_2^*}{x_1^* + x_2^*}\right| \delta(x_2^*).$$

Похибка різниці. Розглянемо $y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, абсолютна похибка різниці:

$$\Delta(y^*) \leqslant \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*); \tag{10}$$

відносна похибка різниці:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{\Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*)}{|x_1^* - x_2^*|} = \frac{\Delta(x_1^*) \cdot |x_1^*|}{|x_1^* - x_2^*| \cdot |x_1^*|} + \frac{\Delta(x_2^*) \cdot |x_2^*|}{|x_1^* - x_2^*| \cdot |x_2^*|} =$$

$$= \left|\frac{x_1^*}{x_1^* - x_2^*}\right| \delta(x_1^*) + \left|\frac{x_2^*}{x_1^* - x_2^*}\right| \delta(x_2^*).$$

Похибка добутку. Розглянемо $y = f(x_1, x_2) = x_1 \times x_2$, абсолютна похибка добутку:

$$\Delta(y^*) \leqslant |x_2^*| \cdot \Delta(x_1^*) + |x_1^*| \cdot \Delta(x_2^*);$$

відносна похибка добутку:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{|x_2^*| \cdot \Delta(x_1^*) + |x_1^*| \cdot \Delta(x_2^*)}{|x_1^* \cdot x_2^*|} = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*). \tag{11}$$

Похибка частки. Розглянемо $y = f(x_1, x_2) = x_1 \div x_2$, абсолютна похибка частки:

$$\Delta(y^*) \leqslant \left|\frac{1}{x_2^*}\right| \Delta(x_1^*) + \left|\frac{-x_1^*}{(x_2^*)^2}\right| \Delta(x_2^*) = \frac{|x_2^*| \cdot \Delta(x_1^*) + |x_1^*| \cdot \Delta(x_2^*)}{(x_2^*)^2};$$

відносна похибка частки:

$$\delta(y^*) \leqslant \frac{|x_2^*|\Delta(x_1^*) + |x_1^*|\Delta(x_2^*)}{(x_2^*)^2} \div \left|\frac{x_1^*}{x_2^*}\right| = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*). \quad (12)$$

Зауваження. При розв'язанні задач можуть використовуватися формули похибок математичних операцій (9) - (8), решта формул на практиці не використовується.

Обернена задача теорії похибок

Обернена задача теорії похибок формулюється таким чином: з якою точністю потрібно задати значення відомих аргументів x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, щоб похибка значення функції $f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ не перевищувала заданої величини ε?

Функція однієї змінної. Для функції однієї змінної вигляду $y = f(x)$ абсолютну похибку можна обчислити за формулою

$$\Delta(x^*) = \frac{\Delta(y^*)}{|f'(x^*)|} \leqslant \frac{\varepsilon}{|f'(x^*)|}. \quad (13)$$

Функція багатьох змінних. Для функції декількох змінних $y = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ для розв'язання оберненої задачі існує такі підходи.

1) Принцип рівних впливів. В основі цього підходу лежить припущення про рівність доданків $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta(x_i^*)$, $i = \overline{1, n}$ між собою. Тоді абсолютні похибки аргументів можна визначити за формулою:

$$\Delta(x_i^*) = \frac{\Delta(y^*)}{n\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|}, \quad \text{де } i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

*2) **Рівні абсолютні похибки.*** Якщо вважати абсолютні похибки аргументів рівними, то їх можна знайти таким чином:

$$\Delta(x_1^*) = \Delta(x_2^*) = ... = \Delta(x_n^*) = \frac{\Delta(y^*)}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| + ... + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|}. \qquad (15)$$

Приклад. Знайти абсолютні та відносні похибки аргументів, які дають змогу обчислити з 4 правильними значущими цифрами значення функції $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2^2}{x_3}$, де $x_1^* = 2,10415$, $x_2^* = 1,93521$, $x_3^* = 0,84542$.

Розв'язок. Оскільки задається точність функції, а необхідно знайти точність аргументів, то це обернена задача. В задачі три аргументи – функція багатьох змінних, припустимо, що діє принцип рівних впливів і скористаємось формулою (14).

Функція задається 4 правильними цифрами, знайдемо її наближене значення, щоб знайти кількість правильних цифр в числі після коми.

$$f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \frac{x_1^* + (x_2^*)^2}{x_3^*} = \frac{2,10415 + 1,93521^2}{0,84542} \approx 6,9187.$$

В числі три правильні цифри після коми, тому за означенням $\Delta(f^*) \leqslant 0,5 \times 10^{-3}$.

$$\Delta(x_1^*) = \frac{\Delta(f^*)}{3\left|\frac{1}{x_3^*}\right|} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot \frac{1}{0,84542}} \approx 1,409 \times 10^{-4};$$

$$\delta(x_1^*) = \frac{\Delta(x_1^*)}{|x_1^*|} \cdot 100\% = \frac{1,409 \cdot 10^{-4}}{2,10415} \cdot 100\% \approx 0,0067\%;$$

$$\Delta(x_2^*) = \frac{\Delta(f^*)}{3\left|\frac{2x_2^*}{x_3^*}\right|} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot \frac{2 \cdot 1,93521}{0,84542}} \approx 3,641 \times 10^{-5};$$

$$\delta(x_2^*) = \frac{\Delta(x_2^*)}{|x_2^*|} \cdot 100\% = \frac{3,641 \cdot 10^{-5}}{1,93521} \cdot 100\% \approx 0,0019\%;$$

$$\Delta(x_3^*) = \frac{\Delta(f^*)}{3\left|-\dfrac{x_1 + x_2^2}{(x_3^*)^2}\right|} = \frac{0,5\cdot 10^{-3}}{3\cdot\dfrac{2,10415+1,93521^2}{0,84542^2}} \approx 2,037\cdot 10^{-5};$$

$$\delta(x_3^*) = \frac{\Delta(x_3^*)}{|x_3^*|}\cdot 100\% = \frac{2,037\cdot 10^{-5}}{0,84542}\cdot 100\% \approx 0,0024\%.$$

Приклад. Якою кількістю правильних значущих цифр необхідно задати аргументи, щоб обчислити з 3 правильними значущими цифрами значення функції $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{y} + 3z$, де $x^* = 2,37208$, $y^* = 4,02301$, $z^* = 1,56172$?

Розв'язок. Оскільки задається точність функції, а необхідно знайти точність аргументів, то це обернена задача. В задачі три аргументи – функція багатьох змінних. Оскільки значення аргументів одного порядку, скористаємось формулою (15), її точності буде достатньо для визначення правильних цифр.

Функція задається 3 правильними цифрами, знайдемо її наближене значення, щоб знайти кількість правильних цифр в числі після коми.

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{y} + 3z = \frac{2,37208^2}{4.02301} + 3\cdot 1.56172 \approx 6.084.$$

В числі дві правильні цифри після коми, тому за означенням $\Delta(f^*) \leqslant 0,5\times 10^{-2}$.

$$\Delta(x^*) = \Delta(y^*) = \Delta(z^*) = \frac{\Delta(f^*)}{\left|\dfrac{2x^*}{y^*}\right| + \left|-\dfrac{(x^*)^2}{(y^*)^2}\right| + 3} =$$

$$= \frac{0,5\cdot 10^{-2}}{\dfrac{2\cdot 2,37208}{4,02301} + \dfrac{2,37208^2}{4,02301^2} + 3} \approx 0,11\times 10^{-2};$$

Визначимо правильні цифри аргументів:
$0,11\times 10^{-2} \leqslant 0,5\times 10^{-2} \Rightarrow$ дві цифри після коми правильні.

Отже, аргументи необхідно задати 3 правильними значущими цифрами (2 правильними цифрами після коми).

Розв'язання задач

Процес розв'язання задач з теорії похибки умовно можна поділити на етапи:
I) побудова математичної моделі (перехід від опису постановки задачі до математичних символів);
II) визначення типу задачі (пряма чи обернена)

– *якщо задача пряма:*

1) за можливістю використовуються найпростіші формули похибок основних математичних операцій (9)–(12);

2) якщо в задачі функція містить різні типи операцій, то найчастіше використання формул (9)–(12) є недоцільним, отже використовують формули (4)-(5);

– *якщо задача обернена*, то необхідно визначити кількість змінних:

1) якщо змінна одна, то використовується формула (13);

2) якщо змінних дві і більше, то необхідно обрати підхід до розв'язання задачі (принцип рівних впливів або рівність абсолютних похибок):

а) за можливістю використовуються найпростіші формули похибок основних математичних операцій (9)-(8);

б) якщо формули (9)-(8) використати неможливо, то застосовують формули (14) або (15) в залежності від обраного принципу;

III) формулювання результатів відповідно до початкової постановки задачі.

Приклад. Сторона квадрата дорівнює 2 м. З якою точністю потрібно її виміряти, щоб похибка обчислення площі квадрата не перевищує 1 см^2?
Розв'язок. Введемо позначення: a – сторона квадрата, S – його площа, $S = a^2$, $a = 2$ м $= 200$ см, $\Delta(S^*) = 1$ см^2. Оскільки задається точність функції, а необхідно знайти точність аргументів, то задача обернена. Оскільки аргумент один, то

використаємо формулу (13).

$$\Delta(a^*) = \frac{\Delta(S^*)}{|2 \cdot a^*|} = \frac{1}{2 \cdot 200} = 2,5 \times 10^{-3};$$

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|} \cdot 100\% = \frac{2,5 \cdot 10^{-3}}{200} \cdot 100\% = 0,00125\%$$

Отже, абсолютна похибка дорівнює $2,5 \times 10^{-3}$, а відносна – $0,00125\%$.

Приклад. Висота і радіус основи циліндра виміряно з точністю $0,5\%$. Чому дорівнює відносна похибка в разі обчислення об'єму циліндра, якщо $\pi^* = 3,14$?

Розв'язок. Введемо позначення: h – висота циліндра, r – радіус основи, V – його площа, $V = \pi h r^2$, $\delta(h^*) = \delta(r^*) = 0,5\%$. Оскільки задається точність аргументів, а необхідно знайти точність функції, то задача пряма. Оскільки необхідно знайти лише відносну похибку, а в функції операція множення, то зручно використати формулу (11), для цього знайдемо відносну похибку числа π:

$$\delta(\pi^*) = \left|\frac{\pi - \pi^*}{\pi^*}\right| = \frac{3,14159 - 3,14}{3,14} \cdot 100\% = 0,05\%;$$

$$\delta(V^*) = \delta(\pi^*) + \delta(h^*) + 2\delta(r^*) = 0,05 + 0,05 + 2 \cdot 0,05 = 1,55\%.$$

Отже, відносна похибка об'єму – $1,55\%$.

Приклад. Нехай числа задані 10 правильними значущими цифрами: $\sqrt{2,01} \approx 1,417744688$ та $\sqrt{2} \approx 1,414213562$. Скільки правильних значущих цифр має число $\sqrt{2,01} - \sqrt{2}$?

Розв'язок. Для зручності введемо позначення $x_1 = \sqrt{2,01}$, $x_1^* = 1,417744688$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_2^* = 1,414213562$, $x = \sqrt{2,01} - \sqrt{2}$. Оскільки задаються значення аргументів, а необхідно оцінити функцію, то задача пряма.

Для визначення правильних цифр в числі x^* за означенням необхідно мати його абсолютну похибку та саме число:

$$x^* = x_1^* - x_2^* = 1,417744688 - 1,414213562 = 0,003531126.$$

Знайдемо абсолютні похибки x_1^* та x_2^* з умови, що вони задаються 10 правильними цифрами:

$$\Delta(x_1^*) \leqslant 0,5 \times 10^{-9}; \quad \Delta(x_2^*) \leqslant 0,5 \times 10^{-9},$$

тоді використавши абсолютні похибки аргументів за формулою (10) знайдемо абсолютну формулу функції:

$$\Delta(x^*) \leqslant \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*) = 10^{-9}.$$

Визначимо правильні цифри числа $x^* = 0,003531126$:
«6»: $10^{-9} > 0,5 \times 10^{-9} \Rightarrow$ цифра «6» – сумнівна;
«2»: $10^{-9} \leqslant 0,5 \times 10^{-8} \Rightarrow$ цифра «2» – правильна.

Всі подальші цифри також будуть правильними (які стоять ліворуч від правильної цифри).

Отже, цифра «3»,«5»,«3»,«1»,«1»,«2» – правильні.

Приклад. З якою кількістю правильних цифр потрібно взяти вільний член квадратного рівняння $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$, щоб отримати корені рівняння з 4 правильними значущими цифрами?

Розв'язок. Введемо позначення: $z = \lg 2 \approx 0,301029996$ – вільний член квадратного рівняння, $x = 1 + \sqrt{1 - \lg 2} \approx 1,836$ – один з коренів рівняння, який будемо розглядати (для іншого розв'язок будується аналогічно). Оскільки задається точність кореня (функції x), а необхідно оцінити точність $\lg 2$ (аргумента z), то задача обернена з одною змінною. Тому застосуємо формулу (13), для якої за означенням правильної цифри знайдемо абсолютну похибку функції: $\Delta(x^*) \leqslant 0,5 \times 10^{-3}$ (корінь задається 4 правильними цифрами, 3 з них після коми).

$$\Delta(z^*) = \Delta(x^*) \div \frac{1}{2\sqrt{1 - z^*}} = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - 0,3} \approx 0,8 \times 10^{-3}.$$

Абсолютну похибку знайшли з низькою точністю, оскільки в задачі вона потрібна для знаходження правильних цифр числа $\lg 2 \approx 0,301029996$:
«1»: $0,8 \times 10^{-3} > 0,5 \times 10^{-3} \Rightarrow$ цифра «1» – сумнівна;
«0»: $0,8 \times 10^{-3} \leqslant 0,5 \times 10^{-2} \Rightarrow$ цифра «0» – правильна і всі значущі зліва.

Отже, для обчислення першого кореня з 4 значущими цифрами, необхідно взяти $\lg 2$ з 2 правильними цифрами після коми.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Нехай $x^* = 17,124$, $\Delta(x^*) = 0,04$. Скільки правильних значущих цифр має число x^*?

2. Нехай $x^* = 3,153276$, $\Delta(x^*) = 0,6 \times 10^{-3}$. Скільки правильних значущих цифр має число x^*?

3. Нехай $x^* = 0,027045$, $\Delta(x^*) = 0,008$. Скільки правильних значущих цифр має число x^*?

4. Нехай $x^* = 0,368125$, $\Delta(x^*) = 0,021$. Скільки правильних значущих цифр має число x^*?

5. Знайти абсолютну та відносну похибки після заокруглення до трьох значущих цифр числа -0,1725.

6. Знайти абсолютну та відносну похибки після заокруглення до двох значущих цифр числа 1,2485.

7. Знайти абсолютну та відносну похибки після заокруглення до чотирьох значущих цифр числа 73,568.

8. Знайти абсолютну та відносну похибки після заокруглення до чотирьох значущих цифр числа 2031,51.

9. Визначити правильні значущі цифри числа 37,153, якщо його відносна похибка 10%.

10. Визначити правильні значущі цифри в числі 2,9372, якщо його відносна похибка 0,1%.

11. Визначити правильні значущі цифри в числі 28710, якщо його відносна похибка 1%.

12. Визначити правильні значущі цифри в числі 826,3, якщо його відносна похибка 0,05%.

13. З якою кількістю правильних значущих цифр необхідно взяти число e (основа натурального логарифму), щоб похибка не перевищувала $0,05\%$?

14. З якою кількістю правильних значущих цифр необхідно взяти універсальну газову сталу R, щоб похибка не перевищувала $0,1\%$?

15. Якою буде похибка, якщо число g (прискорення вільного падіння) наблизити числом 9,81?

16. Якою буде похибка, якщо швидкість світла c наблизити числом 3×10^8?

17. Визначити, яка рівність точніша: $6/7 = 0,857$ або $\sqrt{4,8} = 2,19$.

18. Визначити, яка рівність точніша: $17/19 = 0,895$ або $\sqrt{52} = 7,21$.

19. Визначити, яка рівність точніша: $49/13 = 3,77$ або $\sqrt{14} = 3,74$.

20. Визначити, яка рівність точніша: $2/9 = 0,22$ або $\sqrt{0,05} = 0,22$.

21. Знайти похибки при наближеному обчисленні функції $f(x,y,z) = \dfrac{x+y^2}{z}$, якщо $x = 3,15$, $y = 0,831$, $z = 1,123$ і всі значущі цифри вхідних даних є правильними.

22. Знайти похибки при наближеному обчисленні функції $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x}+y}{z^2}$, якщо $x = 4 \pm 0,1$, $y = 3 \pm 0,05$, $z = 1 \pm 0,08$.

23. Знайти похибки при наближеному обчисленні функції $f(x,y) = \ln x + y^2$, якщо $x = 0,925$, $y = 1,123$ і відомо, що аргументи мають дві правильні цифри.

24. Знайти похибки при наближеному обчисленні функції $f(x,y,z) = \ln \dfrac{xy}{z}$, якщо $x = 2,34 \pm 0,02$, $y = 1,25 \pm 0,02$, $z = 3,05 \pm 0,02$.

25. При знаходженні найменшого кореня квадратного рівняння $x^2 - 140x + 1 = 0$ можна використати одну з формул: $x = 70 - \sqrt{4899}$ або $x = \dfrac{1}{70+\sqrt{4899}}$. Яка з формул дає більш точний результат і на скільки, якщо при обчисленні використовувати 4 значущі цифри після коми?

26. З якою кількістю правильних значущих цифр потрібно взяти $\sqrt{3,02}$ та $\sqrt{3}$, щоб обчислити $\sqrt{3,02} - \sqrt{3}$ з трьома правильними значущими цифрами?

27. У п'ятизначних логарифмічних таблицях наведено значення логарифмів із точністю до $\varepsilon = 0,5 \times 10^{-6}$. Оцінити можливу похибку в разі визначення числа за його логарифмом, якщо саме число лежить у межах між 300 та 400.

28. Відомо, що гіперболічний синус та гіперболічний косинус числа 3 можна записати: $\operatorname{ch} 3 = \dfrac{e^3 + e^{-3}}{2} \approx 10{,}067$, $\operatorname{sh} 3 = \dfrac{e^3 - e^{-3}}{2} \approx 10{,}018$, де всі цифри правильні. Оцінити похибки при визначенні e^{-3} через гіперболічні синус та косинус: $e^{-3} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} 3 + \operatorname{sh} 3}$.

29. Знайти абсолютну похибку визначення кута 60° за п'ятизначними таблицями синусів (в таблицях наведені синуси з 5 правильними значущими цифрами).

30. З якою точністю необхідно обчислити $\sin \dfrac{\pi}{8}$, щоб відносна похибка обчислення коренів рівняння $x^2 - 2x + \sin \dfrac{\pi}{8} = 0$ не перевищувала 10^{-3}?

31. Корені рівняння $x^2 - 2 \operatorname{tg} 2 \cdot x + e = 0$ необхідно обчислити з трьома правильними цифрами. Скільки правильних значущих цифр треба взяти для $\operatorname{tg} 2$ і e?

32. Яка відносна похибка обчислення площі сектора кола радіусом $R = 21{,}53 \pm 0{,}005$ см, кута $\alpha = 137^\circ(25 \pm 1)'$, якщо число π взято з чотирма правильними знаками? Обчислити цю площу.

33. Катет прямокутного трикутника дорівнює $a = 21{,}12 \pm 0{,}01$ см, а його гіпотенуза $c = 37{,}51 \pm 0{,}01$ см. Обчислити синус кута, протилежного до катета a та оцінити похибки результату.

34. Чому дорівнює відносна похибка в разі обчислення об'єму правильної чотирикутної піраміди, якщо висота піраміди виміряна з точністю $0{,}5\%$, а сторона основи дорівнює 25 см $\pm$ 1 см?

35. З якою відносною похибкою необхідно виміряти сторони паралелограма, який лежить в основі піраміди, та висоту піраміди, щоб похибка обчислення об'єму піраміди не перевищувала 5%, якщо похибка значення синуса кута між сторонами паралелограма не перевищує $0{,}5\%$?

2. Ітераційні методи розв'язання нелінійних рівнянь

Постановка задачі

Нехай $f(x) \in C[a, b]$. Розглянемо задачу наближеного знаходження коренів нелінійного рівняння

$$f(x) = 0$$

з точністю ε за допомогою ітераційних методів.

Загальні етапи знаходження наближених коренів нелінійного рівняння:

1) дослідження кількості коренів,

2) відокремлення коренів,

3) наближене обчислення кореня.

Для розв'язання задач 1) та 2) найчастіше використовують графічний метод чи побудову таблиць значень функції $f(x)$ та використовують такі твердження:

1. Якщо на кінцях деякого відрізку $[a, b]$ неперервна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків $f(a)f(b) < 0$, то на цьому відрізку рівняння має хоча б один корінь. Якщо при цьому $f(x)$ має неперервну першу похідну, що не змінює знак,то корінь єдиний.

2. Нехай $f(x)$ - аналітична функція на $[a, b]$. Якщо $f(a)f(b) < 0$, то між a та b непарна кількість коренів. Якщо ж $f(a)f(b) > 0$ то між a та b чи немає коренів, чи їх парна кількість (враховуючи кратність).

Будемо позначати x^* – точне значення кореня, $x^* \in [a; b]$, x_k – наближене значення кореня на k-й ітерації, x_0 – початкове наближення ітераційного процесу.

Якщо $|x_n - x^*| \leqslant \alpha |x_{n-1} - x^*|^p$, де $0 < \alpha < 1$, то p – ***порядок швидкості збіжності*** ітераційного методу.

Апріорна та ***апостеріорна*** оцінка кількості кроків ітераційного процесу – кількість кроків, яку необхідно виконати для наближеного знаходження кореня рівняння із точністю ε. Апріорна оцінка є теоретичною, її можна обчислити до початку ітераційного процесу, апостеріорна оцінка – практична – її можна знайти після припинення ітераційного процесу. Якщо умова припинення виконалася для x_n, то апостеріорна оцінка кількості ітерацій дорівнює n. Апріорна оцінка може співпадати з апостеріорною або бути більшою за неї.

Метод ділення навпіл (дихотомія)

Метод можна використовувати, якщо $f(x) \in C_{[a;b]}$ та $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Покладемо $a_0 = a$, $b_0 = b$, тоді початкове наближення $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, а ітераційний процес:

$$a_n = \begin{cases} x_{n-1}, \text{ якщо } \operatorname{sgn} f(a_{n-1}) = \operatorname{sgn} f(x_{n-1}), \\ a_{n-1}, \text{ якщо } \operatorname{sgn} f(a_{n-1}) \neq \operatorname{sgn} f(x_{n-1}); \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} x_{n-1}, \text{ якщо } \operatorname{sgn} f(b_{n-1}) = \operatorname{sgn} f(x_{n-1}), \\ b_{n-1}, \text{ якщо } \operatorname{sgn} f(b_{n-1}) \neq \operatorname{sgn} f(x_{n-1}); \end{cases}$$

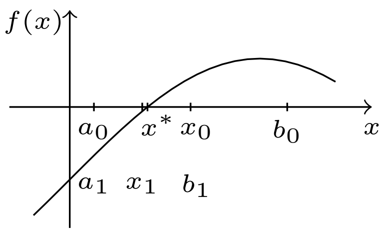
$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$

Швидкість збіжності ітераційного процесу методу дихотомії є лінійною: $|x_n - x^*| \leqslant \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$, звідси можна вивести апріорну оцінку кількості кроків:

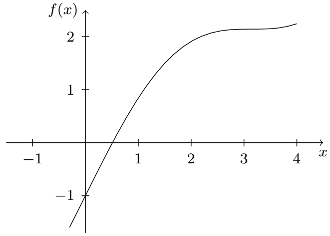
$$n \geqslant \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right].$$

Геометрична інтерпретація:



Приклад. Знайти розв'язок рівняння $x + \sin x - 1 = 0$ методом дихотомії з точністю $\varepsilon = 0,1$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінки кількості кроків.

Розв'язок. Перший етап. Рівняння має єдиний дійсний корінь.



Другий етап. Відокремлення коренів: знайдемо проміжок, який містить єдиний корінь.

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0 + \sin 0 - 1 = -1 \\ f(\frac{\pi}{2}) &= \frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad f(0)\cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0 \Rightarrow x^* \in [0;\frac{\pi}{2}].$$

Третій етап. Для того щоб почати ітераційний процес методом дихотомії, знайдемо початкове наближення. Покладемо $a_0 = a = 0$; $b_0 = b = \dfrac{\pi}{2}$, тоді $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = \dfrac{0 + \pi/2}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Ітерація 1.

Звузимо проміжок вдвічі. Для цього розглянемо проміжки $[0;\pi/4]$ та $[\pi/4;\pi/2]$, будемо працювати із проміжком, на якому відбувається зміна знаків, оскільки саме він буде містити шуканий корінь.

$f(0) = -1$; $f(\dfrac{\pi}{2}) \approx 1,5708$; $f(\dfrac{\pi}{4}) \approx 0,4925$; $f(0)\cdot f(\dfrac{\pi}{4}) < 0 \quad \Rightarrow$ $a_1 = a_0 = 0$; $b_1 = x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = \dfrac{\pi}{8}$.

Будемо розглядати проміжок $[0;\pi/4]$, але спочатку перевіримо умову припинення ітераційного процесу:

$|x_1 - x_0| = |\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\pi}{4}| \approx 0,4 > \varepsilon$.

Умова не виконується, тому необхідно знов звузити проміжок вдвічі.

Ітерація 2.

$f(0) = -1$; $f(\dfrac{\pi}{4}) \approx 0,4925$; $f(\dfrac{\pi}{8}) \approx -0,2246$; $f(\dfrac{\pi}{4}) \cdot f(\dfrac{\pi}{8}) < 0 \Rightarrow$

$a_2 = x_1 = \dfrac{\pi}{8}$; $b_2 = b_1 = \dfrac{\pi}{4}$; $x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = \dfrac{\pi/8 + \pi/4}{2} = \dfrac{3\pi}{16}$.

$|x_2 - x_1| = |\dfrac{3\pi}{16} - \dfrac{\pi}{8}| \approx 0,2 > \varepsilon$.

Ітерація 3.

$f(\dfrac{\pi}{8}) = -0,2246$; $f(\dfrac{\pi}{4}) \approx 0,4925$; $f(\dfrac{3\pi}{16}) \approx 0,1446$;

$f(\dfrac{\pi}{8}) \cdot f(\dfrac{3\pi}{16}) < 0 \Rightarrow a_3 = a_2 = \dfrac{\pi}{8}$; $b_3 = x_2 = \dfrac{3\pi}{16}$;

$x_3 = \dfrac{a_3 + b_3}{2} = \dfrac{\pi/8 + 3\pi/16}{2} = \dfrac{5\pi}{32}$.

$|x_3 - x_2| = |\dfrac{5\pi}{32} - \dfrac{3\pi}{16}| \approx 0,1 \leqslant \varepsilon$.

Умова припинення виконалась, отже, знайшли корінь рівняння з точністю $0,1$: $x^* \approx x_3 \approx 5\pi/32 \approx 0,4909$.

Оскільки корінь знайдено на третій ітерації, то апостеріорна оцінка кількості кроків дорівнює 3.

Для знаходження апріорної оцінки кількості кроків скористаємося формулою:

$$n \geqslant \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right] = \left[\log_2 \frac{\pi/2 - 0}{0,1}\right] = [3,9734] = 3.$$

Метод простої ітерації

Метод простої ітерації грунтується на зведенні нелінійного рівняння до вигляду

$$x = \varphi(x),$$

де $\varphi(x) = x + \Psi(x) f(x)$, $\Psi(x)$ – знакостала неперервна функція.

Початкове наближення обирається довільне з проміжку: $x_0 \in [a; b]$, ітераційний процес має вигляд:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \tag{16}$$

Достатня умова збіжності. Нехай для $\forall x_0 : x_0 \in S$, де $S = \{x : |x - x_0| \leqslant \delta\}$, $\varphi(x)$ задовольняє умовам:

1) $\max\limits_{x \in S} |\varphi'(x)| \leqslant q < 1$;

2) $|\varphi(x_0) - x_0| \leqslant (1 - q)\delta$;

тоді ітераційний процес (16) збігається $\exists x^* : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$, при чому швидкість збіжності лінійна:

$$|x_n - x^*| \leqslant \frac{q^n}{1 - q} |\varphi(x_0) - x_0|. \qquad (17)$$

Зауваження. Замість умови 1) $\max\limits_{x \in S} |\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ можна використати умову Ліпшиця: $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant q|x - y|$, $x, y \in S$.

З формули швидкості збіжності (17) можна вивести апріорну оцінку кількості кроків:

$$n \geqslant \left[\frac{\ln \dfrac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1 - q)\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right] + 1.$$

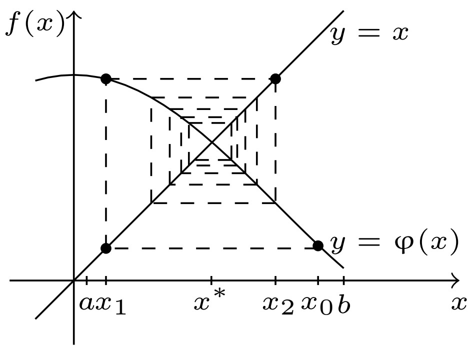
Умова припинення залежить від q:

$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \dfrac{1 - q}{q} \varepsilon$, якщо $q < \dfrac{1}{2}$;

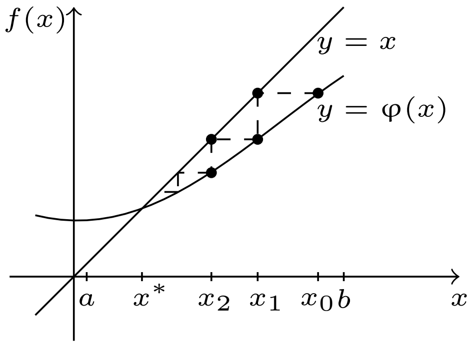
$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$, в інших випадках.

Геометрична інтерпретація:

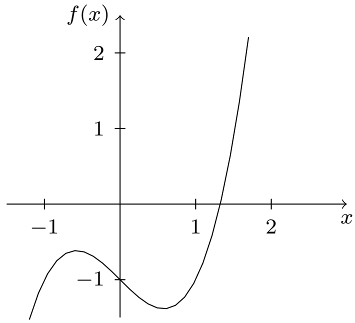
$-1 < \varphi'(x) < 0$



$0 < \varphi'(x) < 1$



Приклад. Знайти розв'язок рівняння $x^3 - x - 1 = 0$ методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 0,1$ Знайти апріорну та апостеріорну оцінки кількості кроків.
Розв'язок. Перший етап. Рівняння має єдиний дійсний корінь:



Другий етап. Відокремлення коренів: знайдемо проміжок, який містить єдиний корінь.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 \\ f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5 \end{array}\right\} \quad f(1)\cdot f(2) < 0 \Rightarrow x^* \in [1;2].$$

Третій етап. Переходимо до побудови ітераційного процесу. Зведемо нелінійне рівняння до вигляду $x = \varphi(x)$:

$$x^3 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = x^3 - 1.$$

Оберемо початкове наближення: $x_0 = 1,5$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in [1;2] \\ |x-1,5| \leqslant \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \delta = 0,5.$$

Перевіримо достатні умови збіжності:

1) $\max\limits_{x\in[a;b]} |\varphi'(x)| = \max\limits_{x\in[1;2]} |3x^2| > 1 \Rightarrow$ не виконуються

Для обраної функції $\varphi(x)$ достатні умови збіжності не виконуються, оберемо нову функцію $\varphi(x)$:

$$x^3 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{x} + 1} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}.$$

Перевіримо достатні умови збіжності для нової функції $\varphi(x)$:

1) $\max\limits_{x\in[a;b]} |\varphi'(x)| = \max\limits_{x\in[1;2]} \left|-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3+x^4}}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,354 < 1;$

2) $|\sqrt{\varphi(x_0) - x_0}| = \left|\sqrt{\dfrac{1}{1,5} + 1} - 1,5\right| = |-0,209|;$

$$(1-q)\delta = (1 - \frac{1}{2\sqrt{2}})0,5 = 0,323.$$

Оскільки $q < 1$ та $0,209 < 0,323$, значить є збіжність. Переходимо до ітераційного процесу.

Ітерація 1.

$x_0 = 1,5;$

$x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt{\dfrac{1}{x_0} + 1} = \sqrt{\dfrac{1}{1,5} + 1} \approx 1,291.$

Перевіримо умову припинення. Оскільки $q < 1/2$, то використаємо умову: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \dfrac{1-q}{q}\varepsilon.$

$\dfrac{1-q}{q}\varepsilon = \left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot 0,1 \div \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,183;$

$|x_1 - x_0| = |1,291 - 1,5| \approx 0,209 > 0,183$, умова не виконалася.

Ітерація 2.

$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt{\dfrac{1}{x_1} + 1} = \sqrt{\dfrac{1}{1,291} + 1} \approx 1,332;$

$|x_2 - x_1| = |1,332 - 1,291| \approx 0,041 < 0,183;$

Умова припинення виконалась, отже, знайшли корінь рівняння з точністю $0,1$: $x^* \approx x_2 \approx 1,332$.

Оскільки корінь знайдено на другій ітерації, то апостеріорна оцінка кількості кроків дорівнює 2.

Для знаходження апріорної оцінки кількості кроків скористаємося формулою:

$$n \geqslant \left[\frac{\ln \dfrac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right] + 1 = \left[\frac{\ln \dfrac{|1,291 - 1,5|}{(1-0,354)0,1}}{\ln(1/0,353)} \right] + 1 =$$

$= [1,128] + 1 = 2.$

Метод релаксації

Якщо в методі простої ітерації $\Psi(x) \equiv \tau \equiv const$, то отримаємо метод релаксації.

Початкове наближення обирається довільне з проміжку: $x_0 \in [a; b]$, ітераційний процес:

$$x_{n+1} = x_n \pm \tau f(x_n), \tag{18}$$

де «+», якщо $f'(x) < 0$; «−», якщо $f'(x) > 0$.

Достатня умова збіжності. Якщо в ітераційному процесі (18) параметр $\tau \in (0; 2/M_1)$, де $0 < m_1 < |f'(x)| < M_1$, $M_1 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$, $m_1 = \min\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$, то ітераційний процес (18) збігається, при цьому швидкість збіжності лінійна.

Оптимальний параметр. Якщо обрати $\tau_o = 2/(M_1 + m_1)$, то кількість ітерацій буде мінімальною, швидкість збіжності залишається лінійною: $|x_n - x^*| \leqslant q_0^n |x_0 - x^*|$, де $q_o = \dfrac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}$.

Для оптимального параметру τ_o апріорна оцінка кількості кроків:

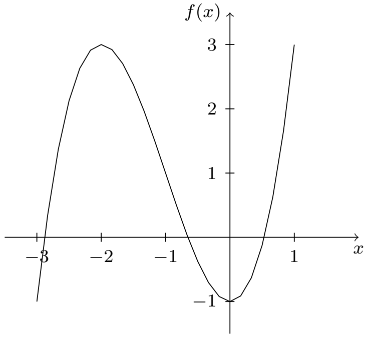
$$n_o \geqslant \left[\frac{\ln(|x_0 - x^*|/\varepsilon)}{\ln(1/q_o)} \right] + 1.$$

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$.

Приклад. Знайти найменший за модулем від'ємний корінь рівняння $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ методом релаксації з точністю $\varepsilon =$

$0,1$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінки кількості кроків.

Перший етап. Рівняння має три дійсних кореня:



Другий етап. Відокремлення коренів: знайдемо проміжок, який містить найменший за модулем від'ємний корінь рівняння.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^3+3(-1)^2-1=1 \\ f(0)=0^3+3\cdot 0^2-1=-1 \end{array}\right\} \quad x^*\in[-1;0].$$

Третій етап. Переходимо до побудови ітераційного процесу методу релаксації, для чого знайдемо m_1, M_1.

$f(x) = x^3+3x^2-1$; $f'(x) = 3x^2+6x$; $m_1 = \min\limits_{x\in[-1;0]}|3x^2+6x| = 0$ – не задовольняє умові $0 < m_1 < |f'(x)| < M_1$, тому повернемося до другого етапу і звузимо проміжок.

Другий етап.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^3+3(-1)^2-1=1 \\ f(-0,5)=(-0,5)^3+3(-0,5)^2-1\approx -0,1 \end{array}\right\} x^*\in[-1;-0,5].$$

Третій етап.

$m_1 = \min\limits_{x\in[-1;-0,5]}|3x^2+6x| = 2,25$; $M_1 = \max\limits_{x\in[-1;-0,5]}|3x^2+6x| = 3$;

$$\tau_o = \frac{2}{M_1+m_1} = \frac{2}{3+2,25} \approx 0,381.$$

Оскільки $f'(x) < 0$, то в ітераційному процесі беремо знак «+»: $x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n)$.

Оберемо початкове наближення: $x_0 = -0,5$.

Ітерація 1.

$x_1 = x_0 + \tau f(x_0) = -0,5 + 0,381\left((-0,5)^3 + 3(-0,5)^2 - 1\right) \approx$
$\approx -0,643.$

Перевіримо умову припинення:

$|x_1 - x_0| \approx |-0,643 + 0,5| = 0,143 > \varepsilon$. Не виконується.

Ітерація 2.

$x_2 = x_1 + \tau f(x_1) = -0,643 + 0,381\Big((-0,643)^3 + 3(-0,643)^2-$
$-1\Big) \approx -0,653.$

$|x_2 - x_1| \approx |-0,653 + 0,643| = 0,01 \leqslant \varepsilon.$

Знайшли корінь на другій ітерації: $x^* \approx x_2 \approx -0,653$, отже апостеріорна оцінка кількості кроків дорівнює 2.

Знайдемо апріорну оцінку кількості кроків:

$q_o = \dfrac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} = \dfrac{3 - 2,25}{3 + 2,25} \approx 0,143;$

$\left.\begin{array}{l} x^* \in [-1; -0,5] \\ x_0 = -0,5 \end{array}\right\} \Rightarrow |x_0 - x^*| = |-0,5 - x^*| \leqslant 0,5;$

$n_o \geqslant \left[\dfrac{\ln(|x_0 - x^*|/\varepsilon)}{\ln(1/q_o)}\right] + 1 = \left[\dfrac{\ln(0,5/0,1)}{\ln(1/0,143)}\right] + 1 = [0,828] + 1 = 1.$

Метод дотичних (Ньютона)

Ітераційний процес методу має вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{19}$$

Достатня умова збіжності. Якщо функція $f(x) \in C_S^2$, де $S = \{x : |x - x^*| \leqslant \delta\}$; $f(a)f(b) < 0$; $f''(x)$ – знакостала на S; $f'(x) \neq 0$, $x \in S$; $x_0 \in S$ та якщо виконуються умови:

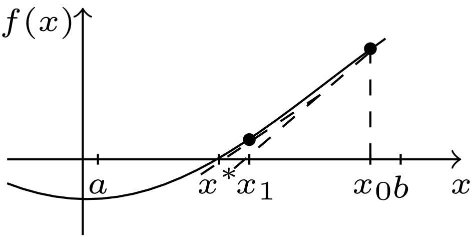
$$1) f(x_0)f''(x_0) > 0, \qquad 2) q = \frac{M_2|x_0 - x^*|}{2m_1} < 1,$$

де $M_2 = \max\limits_{x \in S}|f''(x)|$, $m_1 = \min\limits_{x \in S}|f'(x)|$, то ітераційний процес (19) збігається $\exists x^* : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$, при чому швидкість збіжності квадратична: $|x_n - x^*| \leqslant q^{2^n - 1}|x_0 - x^*|$.

Апріорна оцінка кількості кроків:

$$n \geqslant \left[\log_2 \left(\frac{\ln(|x_0 - x^*|/\varepsilon)}{\ln(1/q)} + 1 \right) \right] + 1.$$

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$.
Геометрична інтерпретація:

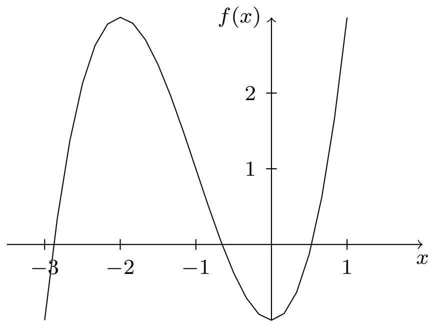


Приклад. Знайти найменший додатній корінь рівняння

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0,1$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінки кількості кроків.

Розв'язок. Перший етап. Рівняння має три дійсних кореня:



Другий етап. Відокремлення коренів: знайдемо проміжок, який містить найменший додатній корінь рівняння.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 1 = -1 \\ f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 = 3 \end{array} \right\} \quad f(0)f(1) < 0 \Rightarrow \quad x^* \in [0;1].$$

Третій етап. Переходимо до побудови ітераційного процесу, але спочатку перевіримо достатні умови збіжності:

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $f''(x) = 6x + 6 > 0$ на $[0;1]$; $f'(0) = 0$ – не задовольняє достатній умові збіжності, тому повернемося до другого етапу і звузимо проміжок.

Другий етап.

$$\left.\begin{array}{l} f(0,5) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 = -0,125 \\ f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 = 3 \end{array}\right\} \quad x^* \in [0,5;1].$$

Третій етап. Достатні умови збіжності:

$f''(x) = 6x + 6 > 0$ на $[0,5;1]$; $f'(x) \neq 0$ на $[0,5;1]$.

Виберемо початкове наближення:

$$\left.\begin{array}{l} f(0,5) = 0,5^3 + 3 \cdot 0,5^2 - 1 = -0,125 \\ f''(0,5) = 6 \cdot 0,5 + 6 = 9 \end{array}\right\} \quad f(0,5)f''(0,5) < 0$$

$\Rightarrow$ не виконується, тому $x_0 \neq 0,5$;

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 = 3 \\ f''(1) = 6 \cdot 1 + 6 = 12 \end{array}\right\} \quad f(1)f''(1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1.$$

Початкове наближення знайдено, продовжимо перевірку достатньої умови збіжності:

$m_1 = \min\limits_{x \in [0,5;1]} |3x^2 + 6x| = 3,75$; $M_2 = \max\limits_{x \in [0,5;1]} |6x + 6| = 12$;

$$\left.\begin{array}{l} x^* \in [0,5;1] \\ x_0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |x_0 - x^*| = |1 - x^*| \leqslant 0,5.$$

$$q = \frac{M_2|x_0 - x^*|}{2m_1} \leqslant \frac{12 \cdot 0,5}{2 \cdot 3,75} \approx 0,8 < 1$$

Достатні умови збіжності виконуються. Переходимо до ітераційного процесу.

Ітерація 1.

$x_0 = 1$;

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1}{3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1} \approx 0,667;$$

Перевіримо умову припинення:

$|x_1 - x_0| = |0,667 - 1| \approx 0,3 \geqslant \varepsilon$. Не виконується.

Ітерація 2.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,667 - \frac{0,667^3 + 3 \cdot 0,667^2 - 1}{3 \cdot 0,667^2 + 6 \cdot 0,667} \approx 0,548;$$

$|x_2 - x_1| = |0,548 - 0,667| \approx 0,1 \leqslant \varepsilon$.

Умова припинення виконалася, знайшли корінь на другій ітерації, тому $x^* \approx x_2 \approx 0,548$, а апостеріорна оцінка кількості кроків дорівнює 2.

Знайдемо апріорну оцінку кількості кроків:

$$n \geqslant \left[\log_2\left(\frac{\ln\frac{|x_0 - x^*|}{\varepsilon}}{\ln(1/q)} + 1\right)\right] + 1 \geqslant \left[\log_2\left(\frac{\ln(0,5/0,1)}{\ln(1/0,8)} + 1\right)\right]$$

$+1 = [3,038] + 1 = 4.$

Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес методу має вигляд:

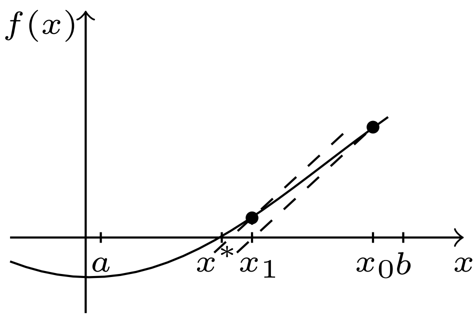
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}. \tag{20}$$

Порядок швидкості збіжності модифікованого методу ньютона є лінійним.

Достатня умова збіжності. Якщо функція $f(x) \in C^2_{[a;b]}$; $f'(x), f''(x)$ – знакосталі на $[a;b]$; $f'(x) \neq 0$ на $[a;b]$, то ітераційний процес (20) збігається $\exists x^* : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$.

Геометрична інтерпретація:



Метод січних

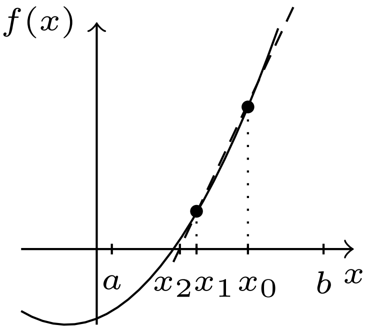
Метод січних є ще однією модифікацією методу Ньютона. Ітераційний процес методу є ***двокроковим***, оскільки для знаходження наближеного значення на x_{n+1} ітерації необхідно використати відомі два попередні значення x_n та x_{n-1}:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Обираються два початкових значення $x_0, x_1 \in [a; b]$. Швидкість збіжності ітераційного процесу методу січних є лінійною.

Умова припинення ітераційного процесу: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$.

Геометрична інтерпретація:



Задачі для самостійного розв'язання

1. Зробити дві ітерації методом дихотомії для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $e^x - 2(x-1)^2 = 0$. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

2. Зробити дві ітерації для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння $e^{-x} + x^2 - 2 = 0$ методом простої ітерації, $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію розбіжного процесу простої ітерації (сходами).

3. Знайти апріорну оцінку кількості кроків при знаходженні найбільшого кореня нелінійного рівняння $x^2 \lg x - 1 = 0$

методом релаксації з точністю $\varepsilon = 0,001$. Записати формулу ітераційного процесу для заданого рівняння.

4. За яку кількість кроків можна знайти найбільший корінь нелінійного рівняння $x^3 + 6x^2 + 9x + 2 = 0$ методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0,001$? Намалювати геометричну інтерпретацію збіжності метода.

5. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого від'ємного кореня нелінійного рівняння $x^3 - 4x^2 - 4x + 13 = 0$ модифікованим методом Ньютона, $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію збіжності метода.

6. За яку кількість кроків можна знайти найменший корінь нелінійного рівняння $\operatorname{sh} x - 12thx - 0.311 = 0$ методом дихотомії з точністю $\varepsilon = 0,001$.

7. Знайти апріорну оцінку кількості кроків при знаходженні найбільшого кореня нелінійного рівняння $x^3 - x - 1 = 0$ методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію розбіжного процесу простої ітерації (спіраллю).

8. Зробити дві ітерації для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння $3x^2 - \cos^2(\pi x) = 0$ методом релаксації. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

9. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $x^2 + 4\sin(x) = 0$ методом Ньютона. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

10. Зробити дві ітерації для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння $x^3 + 4x - 6 = 0$ модифікованим методом Ньютона. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

11. Зробити дві ітерації для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння $(x-1)^3 + 0.5e^x = 0$ методом дихотомії, $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію збіжності метода.

12. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $x^2 + \sin x - 12x - 0,25 = 0$ методом простої ітерації. Намалювати геометричну інтерпретацію збіжного процесу простої ітерації (сходами). Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

13. За яку кількість кроків можна знайти найменший корінь нелінійного рівняння $x^3 - 3x^2 - 17x + 22 = 0$ методом релаксації з точністю $\varepsilon = 0,001$. Записати формулу ітераційного процесу для заданого рівняння.

14. Знайти апріорну оцінку кількості кроків при знаходженні найменшого кореня рівняння $x^2 + 5\sin x - 1 = 0$ методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0,001$.

15. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $3x - \cos x - 1 = 0$ модифікованим методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0,001$. Записати умову припинення ітераційного процесу.

16. За яку кількість кроків можна знайти найбільший корінь нелінійного рівняння $x^3 - 3x^2 - 17x + 22 = 0$ методом дихотомії з точністю $\varepsilon = 0,001$.

17. Знайти апріорну оцінку кількості кроків при знаходженні найменшого кореня рівняння $x^2 + 4\sin(x) = 0$ методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію розбіжного процесу простої ітерації (спіраллю).

18. Зробити дві ітерації для знаходження найменшого кореня нелінійного рівняння $x^2+4\sin(x) = 0$ методом релаксації. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

19. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $3x^2 - \cos^2(\pi x) = 0$ методом Ньютона. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

20. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $(x-1)^3 + 0.5e^x = 0$ модифікованим методом Ньютона. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,001$.

21. Зробити дві ітерації для знаходження найбільшого кореня нелінійного рівняння $x^3 + 4x - 6 = 0$ методом дихотомії, $\varepsilon = 0,001$. Намалювати геометричну інтерпретацію збіжності метода.

3. Прямі і ітераційні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Постановка задачі

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$Ax = b,$$

де A – матриця розмірності $n \times n$, $detA \neq 0$, отже розв'язок системи існує і він єдиний.

Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь поділяються на прямі та ітераційні:

1) прямі методи:
   - метод Гаусса з вибором головного елемента,
   - метод квадратних коренів,
   - метод прогонки;

2) ітераційні методи:
   - метод Якобі,
   - метод Зейделя.

Прямі методи застосовують для матриць невеликої розмірності $n < 10^2$, а ітераційні для розріджених матриць, чи коли $n > 10^2$. Матрицю назвемо розрідженою, якщо вона має достатньо багато нулів.

Метод Гаусса з вибором головного елемента

Для зменшення обчислювальної похибки в методі Гаусса використовують вибір головного елементу:

1) по стовпцях,
2) по рядках,
3) за всією матрицею.

Розглянемо алгоритм на прикладі методу Гаусса з вибором головного елементу по стовпцях.

Покладемо $A_0 = A$. Ведучим елементом обирається максимальний по модулю елемент стовпця, що розглядається: $a_{lk} = \max\limits_i |a_{ik}^{(k-1)}|$, $i = \overline{k, n}$. Для того щоб ведучий елемент зайняв відповідне місце, переставляються рядки k та l в матриці A_{k-1} за допомогою матриці перестановок:

$$\tilde{A}_k = P_k A_{k-1},$$

де P_k – це матриця перестановок, отримана з одиничної матриці перестановкою k та l рядків:

$$P_k = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ l \\ \\ k \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Прямий хід Гаусса в матричній формі:

$$A_k = M_k \tilde{A}_k,$$

де M_k – матриця розмірності $n \times n$:

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{kk} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & m_{(k+1)k} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{nk} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

$$m_{kk} = \frac{1}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}, \quad m_{ik} = \frac{-\tilde{a}_{ik}^{(k)}}{\tilde{a}_{kk}^{(k)}}, \quad i = \overline{k+1, n}.$$

За допомогою прямого ходу методу Гаусса в матричній формі:

$$M_n P_n ... M_2 P_2 M_1 P_1 A x = M_n P_n ... M_2 P_2 M_1 P_1 b,$$

зводимо систему до вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + ... + a_{1n}^{(1)} x_n = & a_{1(n+1)}^{(1)}; \\ x_2 + ... + a_{2n}^{(2)} x_n = & a_{2(n+1)}^{(2)}; \\ .... & \\ x_n = & a_{n(n+1)}^{(n)}. \end{cases}$$

Розв'язок знаходимо за допомогою зворотнього ходу Гаусса:
$x_n = a^n_{n(n+1)}, \quad x_i = a^{(i)}_{i(n+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a^{(i)}_{ij}, \quad i = \overline{n-1, 1}.$

Складність методу Гаусса: $Q(n) = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

Зауваження. Методом Гаусса з вибором головного можна знайти визначник:

$$detA = (-1)^p\ \tilde{a}^{(1)}_{11}\ \tilde{a}^{(2)}_{22}\ ...\ a^{(n)}_{nn} = (-1)^p\ a^{(0)}_{11}\ a^{(1)}_{22}\ ...\ a^{(n-1)}_{nn},$$

де p – кількість перестановок.

Зауваження. При реалізації методу Гаусса з вибором головного по рядках:

$$a_{kl} = \max_j |a^{(k-1)}_{kj}|, \quad j = \overline{k, n}; \qquad \tilde{A}_k = A_{k-1}P_k,$$

також при перестановці стовпців необхідно перенумеровувати змінні.

Зауваження. При реалізації методу Гаусса з вибором головного за всією матрицею переставляються рядочки і стовпчики.

Приклад. Знайти розв'язок системи методом Гауса з вибором головного по стовпцях. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язок. Перейдемо до розширеної матриці, в якості ведучого елементу оберемо максимальний по модулю у стовпці:

$$\overline{A_0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ \boxed{3} & 5 & 6 & 3 \end{array}\right); \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A}_1 = P_1\overline{A_0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right); \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\overline{A_1} = M_1\tilde{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{5/3} & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right); \qquad P_2 = E; \qquad \tilde{A}_2 = P_2\overline{A_1} = \overline{A_1};$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \overline{A_2} = M_2\tilde{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4/5} & 0 \end{array}\right)$$

$P_3 = E;$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix};$$

$\tilde{A}_3 = P_3\overline{A_2} = \overline{A_2};$

$$\overline{A_3} = M_3\tilde{A}_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right); \quad \begin{array}{l} x_3 = 0; \\ x_2 = 0 - 3/5x_3 = 0; \\ x_1 = 1 - 5/3x_2 - 2x_3 = 1. \end{array}$$

Система розв'язана, переходимо до знаходження визначника, тому визначимо кількість фактичних перестановок. Оскільки

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad P_2 = E; \qquad P_3 = E,$$

то кількість перестановок $p = 1$.

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 2 \\ 0 & 5/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}; \tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 2 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{pmatrix};$$

$DetA = (-1)^p\ \tilde{a}_{11}^{(1)}\ \tilde{a}_{22}^{(2)}\ \tilde{a}_{33}^{(3)} = (-1)^1 \cdot 3 \cdot 5/3 \cdot 4/5 = -4.$

Отже, розв'язок системи: $(1;0;0)^T$, $DetA = -4$.

Метод квадратного кореня

Метод квадратного кореня Використовується, якщо матриця A — симетрична, т.т. $A = A^T$. Матрицю A подамо у вигляді $A = S^T DS$, де

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & ... & s_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & s_{nn} \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \pm 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \pm 1 \end{pmatrix};$$

$$d_{ii} = \operatorname{sgn}\left|a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi}^2 d_{pp}\right|; \; s_{ii} = \sqrt{\left|a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi}^2 d_{pp}\right|}, \; i = \overline{1,n};$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{p=1}^{i-1} s_{pi} d_{pp} s_{pj}}{d_{ii} s_{ii}}, \qquad i = \overline{2, n-1}, \qquad j = \overline{i+1, n}.$$

Подальше рішення зводиться до розв'язання двох систем лінійних алгебраїчних рівнянь з трикутними матрицями, з першої системи знаходять y:

$$S^T D y = b,$$

а з другої – x:

$$Sx = y.$$

Складність методу квадратного кореня: $Q(n) = \frac{1}{3} n^3 + O(n^2)$.

Зауваження. Методом квадратних коренів можна знайти визначник:

$$det A = \prod_{k=1}^{n} d_{kk} s_{kk}^2.$$

Приклад. Знайти розв'язок системи методом квадратних коренів. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язок. Перейдемо до матричної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A = A^T$, можна використовувати метод квадратних коренів. Знайдемо матриці S та D:

$d_{11} = \operatorname{sgn}(a_{11}) = \operatorname{sgn}(1) = 1;$

$s_{11} = \sqrt{|a_{11}|} = \sqrt{|1|} = 1;$

$s_{12} = \dfrac{a_{12}}{d_{11} s_{11}} = \dfrac{2}{1 \cdot 1} = 2;$

$s_{13} = \dfrac{a_{13}}{d_{11} s_{11}} = \dfrac{3}{1 \cdot 1} = 3;$

$d_{22} = \operatorname{sgn}(a_{22} - s_{12}^2 d_{11}) = \operatorname{sgn}(5 - 2^2 \cdot 1) = \operatorname{sgn} 1 = 1;$

$s_{22} = \sqrt{|a_{22} - s_{12}^2 d_{11}|} = \sqrt{|1|} = 1;$

$s_{23} = \dfrac{a_{23} - s_{12} d_{11} s_{13}}{d_{22} s_{22}} = \dfrac{5 - 2 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 1} = -1;$

$d_{33} = \operatorname{sgn}(a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}) = -1;$

$s_{33} = \sqrt{|a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}|} = \sqrt{|-4|} = 2.$

Всі елементи знайдені, заповнюємо матриці D та S:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Переходимо до розв'язання систем:

$$S^T D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$S^T D y = b;$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1; \\ y_2 = 2 - 2 \cdot 1 = 0; \\ y_3 = -\dfrac{1}{2}(3 - 3 \cdot 1 + 0) = 0. \end{array}$$

$Sx = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_3 = 0; \\ x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1. \end{array}$$

Розв'язок системи знайдено, знайдемо визначник:

$$DetA = \prod_{i=1}^{3} d_{ii} s_{ii}^2 = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1^2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 = -4.$$

Отже, розв'язок системи: $(1; 0; 0)^T$, $DetA = -4$.

Метод прогонки

Метод прогонки використовується, якщо матриця системи лінійних алгебраїчних рівнянь A є тридіагональною. Цей метод є частковим випадком методу Гаусса.

Нехай маємо систему вигляду:

$$\begin{cases} -c_0y_0 + b_0y_1 = -f_0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_iy_{i-1} - c_iy_i + b_iy_{i+1} = -f_i, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_ny_{n-1} - c_ny_n = -f_n; \end{cases}$$

Достатня умова стійкості. Нехай коефіцієнти $a_0, b_0 = 0$; $c_0, c_n \neq 0$; $a_i, b_i, c_i \neq 0$; $i = \overline{1, n-1}$. Якщо виконуються умови:

1) $|c_i| \geqslant |a_i| + |b_i|, \quad i = \overline{0, n}$;

2) $\exists\ i : |c_i| > |a_i| + |b_i|$,

то метод є стійким: $|\alpha_i| \leqslant 1$; $|z_i| > 1$, $i = \overline{1, n}$.

Прямий хід метода Гаусса в методі прогонки відповідає знаходженню прогонкових коефіцієнтів:

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}; \qquad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}; \qquad \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{z_i}; \qquad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{z_i};$$

$$z_i = c_i - \alpha_i a_i; \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

Зворотній ход:

$$y_n = \frac{f_n + a_n\beta_n}{z_n}; \qquad y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = \overline{n-1, 0}.$$

Складність методу прогонки: $Q(n) = 8n - 2$.

Зауваження. Методом прогонки можна знайти визначник:

$$DetA = -c_0 \cdot (-z_1) \cdot ... \cdot (-z_n).$$

Приклад. Знайти розв'язок системи методом прогонки. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Перейдемо до матричної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця A – тридіагональна, можна використовувати метод прогонки. Перевіримо достатні умови стійкості:

$$\left.\begin{array}{l} |1| \geqslant |1| \\ |3| \geqslant |1| + |2| \\ |2| > |1| \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{метод стійкий.}$$

Знайдемо прогонкові коефіцієнти:

$\alpha_1 = \dfrac{b_0}{c_0} = \dfrac{1}{-1} = -1;$

$\beta_1 = \dfrac{f_0}{c_0} = \dfrac{-1}{-1} = 1;$

$z_1 = c_1 - \alpha_1 a_1 = -3 - (-1) \cdot 1 = -2;$

$\alpha_2 = \dfrac{b_1}{z_1} = \dfrac{2}{-2} = -1;$

$\beta_2 = \dfrac{f_1 + a_1\beta_1}{z_1} = \dfrac{-1 + 1 \cdot 1}{-2} = 0;$

$z_2 = c_2 - \alpha_2 a_2 = -2 - (-1) \cdot 1 = -1;$

$y_2 = \dfrac{f_2 + a_2\beta_2}{z_2} = \dfrac{-1 + 1 \cdot 0}{-1} = 1;$

$y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2 = -1 \cdot 1 + 0 = -1;$

$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 = -1 \cdot (-1) + 1 = 2.$

Розв'язок системи знайдемо, знайдемо визначник:
$DetA = -c_0 \cdot (-z_1) \cdot (-z_2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$

Отже, розв'язок системи: $(2; -1; 1)^T$, $DetA = 2$.

Метод Якобі

Метод Якобі є ітераційним методом для розв'язання СЛАР $Ax = b$, т.т. розв'язок знаходимо із заданою точністю ε. Початкове наближення x^0 обираємо довільним чином. Ітераційний процес має вигляд:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}. \tag{21}$$

Достатня умова збіжності. Якщо $\forall i : i = \overline{1,n}$ виконується нерівність:

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

то ітераційний процес методу Якобі (21) збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Умова припинення методу: $||x^n - x^{n-1}|| \leqslant \varepsilon$.

Зауваження. В якості норми зазвичай обирають неперервну (кубічну) норму вектору: $||x||_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.

Необхідні і достатні умови збіжності. Для $\forall x^0$ ітераційний процес методу Якобі (21) збігається тоді і тільки тоді, коли $|\lambda| < 1$, де λ – це корені нелінійного рівняння:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Зауваження. При розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь перевіряють достатні умови збіжності. Якщо в задачі необхідно щось довести, знайти область збіжності, то використовують необхідні і достатні умови збіжності.

Приклад. Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Якобі з точністю $0,5$.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ -x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 = 1,75; \\ x_1 + 0,5x_2 + 3x_3 = 2,5. \end{cases}$$

Розв'язок. Перейдемо в системі лінійних алгебраїчних рівнянь до матричної форми:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 & 1,75 \\ 1 & 0,5 & 3 & 2,5 \end{array}\right).$$

Перш ніж розпочинати ітераційний процес, перевіримо достатню умову збіжності:

$$\left.\begin{array}{l} |3| \leqslant |-1| + |1| \\ |2| \leqslant |-1| + |0,5| \\ |3| \leqslant |1| + |0,5| \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{метод Якобі збігається}$$

Побудуємо ітераційний процес:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{3}(x_2^k - x_3^k + 1);$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{2}(x_1^k - 0,5x_3^k + 1,75);$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{3}(-x_1^k - 0,5x_2^k + 2,5).$$

Оберемо довільне початкове наближення: $x^0 = (0;0;0)^T$.

Ітерація 1.

$x_1^1 = 1/3 \cdot (0 - 0 + 1) = 0,33;$
$x_2^1 = 1/2 \cdot (0 - 0,5 \cdot 0 + 1,75) = 0,88;$
$x_3^1 = 1/3 \cdot (-0 - 0,5 \cdot 0 + 2,5) = 0,83.$

Перевіримо умову припинення:
$||x^1 - x^0|| = ||(0,33;0,88;0,83)^T - (0;0;0)^T||_\infty = 0,88 > \varepsilon.$

Ітерація 2.

$x_1^2 = 1/3 \cdot (0,88 - 0,83 + 1) = 0,35;$
$x_2^2 = 1/2 \cdot (0,33 - 0,5 \cdot 0,83 + 1,75) = 0,83;$
$x_3^2 = 1/3 \cdot (-0,33 - 0,5 \cdot 0,88 + 2,5) = 0,58.$

Перевіримо умову припинення:
$||x^2 - x^1|| = ||(0,02;-0,05;-0,25)^T||_\infty = 0,25 \leqslant \varepsilon.$

Розв'язок системи з точністю 0.5: $(0,35;0,83;0,58)^T$.

Приклад. Знайти область збіжності методу Якобі для системи лінійних алгебраїчних рівнянь із матрицею

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Застосуємо критерій збіжності методу Якобі:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \beta & 0 \\ \beta & \lambda\alpha & \beta \\ 0 & \beta & \lambda\alpha \end{vmatrix} = \lambda\alpha(\lambda^2\alpha^2 - \beta^2) - \beta(\beta\lambda\alpha - 0) = 0;$$

$\lambda^3\alpha^3 - \lambda\alpha\beta^2 - \lambda\alpha\beta^2 = \lambda\alpha(\lambda^2\alpha^2 - 2\beta^2) = 0;$

$\lambda\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2\alpha^2 - 2\beta^2 = 0; \quad \lambda = \dfrac{\sqrt{2}\beta}{\alpha}$; $|\lambda| < 1 \quad \Rightarrow$ $\left|\dfrac{\sqrt{2}\beta}{\alpha}\right| < 1; \quad \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Отже, область збіжності методу Якобі: $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Метод Зейделя

Метод Зейделя є ітераційним методом для розв'язання СЛАР $Ax = b$, т.т. розв'язок знаходимо із заданою точністю ε. Початкове наближення x^0 обираємо довільним чином. Ітераційний процес має вигляд:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}. \tag{22}$$

Достатня умова збіжності 1. Якщо $\forall i : i = \overline{1, n}$ виконується нерівність

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

то ітераційний процес методу Зейделя (22) збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Достатня умова збіжності 2. Якщо $A = A^T > 0$, то ітераційний процес методу Зейделя (22) збігається, при чому швидкість збіжності лінійна.

Умова припинення: $||x^n - x^{n-1}|| \leqslant \varepsilon$.

Необхідні і достатні умови збіжності. Для $\forall x^0$ ітераційний процес методу Зейделя (22) збігається тоді і тільки тоді, коли $|\lambda| < 1$, де λ – це корені нелінійного рівняння:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & ... & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад. Знайти розв'язок системи методом Зейделя з точністю $0,5$.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ -x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 = 1,75; \\ x_1 + 0,5x_2 + 3x_3 = 2,5. \end{cases}$$

Розв'язок. Перейдемо в системі лінійних алгебраїчних рівнянь до матричної форми:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 & 1,75 \\ 1 & 0,5 & 3 & 2,5 \end{array}\right).$$

Перевіримо достатню умову збіжності, наприклад, другу:

$A = A^T$ – перша частина виконується;

$$\left.\begin{array}{l} Det(3) = 3 > 0; \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0; \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 3 \end{vmatrix} = 11,25 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A > 0 \quad \Rightarrow$$

$A = A^T > 0$, тому метод Зейделя збігається. Побудуємо ітераційний процес:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{3}(x_2^k - x_3^k + 1);$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{2}(x_1^{k+1} - 0,5x_3^k + 1,75);$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{3}(-x_1^{k+1} - 0,5x_2^{k+1} + 2,5).$$

Оберемо початкове наближення: $x^0 = (0;0;0)^T$.

Ітерація 1.

$x_1^1 = 1/3 \cdot (0 - 0 + 1) = 0,33;$

$x_2^1 = 1/2 \cdot (0,33 - 0,5 \cdot 0 + 1,75) = 1,04;$

$x_3^1 = 1/3 \cdot (-0,33 - 0,5 \cdot 1,04 + 2,5) = 0,55.$

Перевіримо умову припинення:

$||x^1 - x^0|| = ||(0,33; 1,04; 0,55)^T - (0; 0; 0)^T||_\infty = 1,04 > \varepsilon.$

Ітерація 2.

$x_1^2 = 1/3 \cdot (1,04 - 0,55 + 1) = 0,50;$

$x_2^2 = 1/2 \cdot (0,50 - 0,5 \cdot 0,55 + 1,75) = 0,99;$

$x_3^2 = 1/3 \cdot (-0,50 - 0,5 \cdot 0,99 + 2,5) = 0,50.$

Перевіримо умову припинення:

$||x^2 - x^1|| = ||(0,02; -0,05; -0,25)^T||_\infty = 0,17 \leqslant \varepsilon.$

Отже, розв'язок системи з точністю $0,5$: $(0,50; 0,99; 0,50)^T$.

Приклад. Знайти область збіжності методу Зейделя для системи лінійних алгебраїчних рівнянь із матрицею

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Застосуємо критерій збіжності методу Зейделя:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \beta & 0 \\ \lambda\beta & \lambda\alpha & \beta \\ 0 & \lambda\beta & \lambda\alpha \end{vmatrix} = \lambda\alpha(\lambda^2\alpha^2 - \lambda\beta^2) - \beta(\lambda^2\beta\alpha - 0) = 0;$$

$$\lambda^3\alpha^3 - \lambda^2\alpha\beta^2 - \lambda^2\alpha\beta^2 = \lambda^2\alpha(\lambda\alpha^2 - 2\beta^2) = 0;$$

$$\lambda^2\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\alpha^2 - 2\beta^2 = 0; \quad \lambda = \frac{2\beta^2}{\alpha^2};$$

$$|\lambda| < 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2\beta^2}{\alpha^2}\right| < 1; \quad \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, область збіжності методу Зейделя: $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Метод простої ітерації

Ітераційний процес має вигляд:

$$x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - f). \tag{23}$$

Достатня умова збіжності. Якщо покласти $\tau \leqslant \dfrac{2}{L}$, де $l \leqslant |\lambda_i(A)| \leqslant L$, $i = \overline{1,n}$, $\lambda(A)$ – власні значення A, то ітераційний процес (23) збігається, при чому швидкість збіжності є лінійною.

Зауваження. Якщо в ітераційному процесі (23) покласти

$$\tau_o = \frac{2}{L+l},$$

то кількість ітерацій буде мінімальною.

Зауваження. Щоб уникнути знаходження власних значень при обчисленні τ, можна використовувати нерівність:

$$||A||_\infty \geqslant \max_i |\lambda(A)|, \quad i = \overline{1,n}, \qquad ||A||_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

Необхідні і достатні умови збіжності. Для $\forall x^0$ ітераційний процес методу простої ітерації (23) збігається тоді і тільки тоді, коли $|\lambda| < 1$, де λ – це корені нелінійного рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад. Знайти розв'язок системи методом простої ітерації з точністю $0,5$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ -x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 = 1,75; \\ x_1 + 0,5x_2 + 3x_3 = 2,5. \end{cases}$$

Розв'язок. Перейдемо до матричної форми:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 & 1,75 \\ 1 & 0,5 & 3 & 2,5 \end{array}\right)$$

Побудуємо ітераційний процес:

$x_1^{k+1} = x_1^k - \tau(3x_1^k - x_2^k + x_3^k - 1);$

$x_2^{k+1} = x_2^k - \tau(-x_1^k + 2x_2^k + 0,5x_3^k - 1,75);$

$x_3^{k+1} = x_3^k - \tau(x_1^k + 0,5x_2^k + 3x_3^k - 2,5)$.

Оберемо τ: $\tau \leqslant \dfrac{2}{L}$, де $L \geqslant |\lambda_i(A)|$, $||A||_\infty \geqslant \max\limits_i |\lambda(A)|$, $i = \overline{1,3}$;

$||A||_\infty = \max\limits_i \left(\sum\limits_{j=1}^{3} |a_{ij}| \right) = 5$, тому $\tau \leqslant \dfrac{2}{||A||_\infty} = \dfrac{2}{5} = 0,4$.

Оберемо початкове наближення: $x^0 = (0; 0; 0)^T$.

Ітерація 1.

$x_1^1 = 0 - 0,4(3 \cdot 0 - 0 + 0 - 1) = 0,4$;

$x_2^1 = 0 - 0,4(-0 + 2 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 - 1,75) = 0,7$;

$x_3^1 = 0 - 0,4(0 + 0,5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2,5) = 1$.

Перевіримо умову припинення:

$||x^1 - x^0||_\infty = ||(0,4; 0,7; 1)^T||_\infty = 1 > \varepsilon$.

Ітерація 2.

$x_1^2 = 0,4 - 0,4(3 \cdot 0,4 - 0,7 + 1 - 1) = 0,2$;

$x_2^2 = 0,7 - 0,4(-0,4 + 2 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 1 - 1,75) = 0,8$;

$x_3^2 = 1 - 0,4(0,4 + 0,5 \cdot 0,7 + 3 \cdot 1 - 2,5) = 0,5$.

Перевіримо умову припинення:

$||x^1 - x^0||_\infty = ||(-0,2; 0,1; -0,5)^T||_\infty = 0,5 \leqslant \varepsilon$.

Розв'язок системи з точністю 0,5: $(0,2; 0,8; 0,5)^T$.

Число обумовленості

Число обумовленості є мірою невизначеності системи лінійних алгебраїних рівнянь та показує в скількі разів збільшиться похибка вихідних даних. Число обумовленості визначається за формулою:

$$Cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||.$$

Властивості числа обумовленості:

1) $Cond(A) \geqslant 1$;

2) $Cond(AB) \leqslant Cond(A)Cond(B)$;

3) $Cond(A) \geqslant \dfrac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$;

4) $A^T = A^{-1} \Rightarrow Cond(A) = 1$.

Теорема. *Нехай A - невироджена $n \times n$ матриця, $\overline{A} = A + \Delta A$, при цьому $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тоді якщо x та $\overline{x} = x + \Delta x$ є розв язками систем $Ax = b$ та $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$, $\overline{b} = b + \Delta b$, то має мічце оцінка*

$$\delta(x) = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{cond(A)}{1 - cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Зауваження. При обчисленні числа обумовленості можна використовувати одну із норм матриці:

$$||A||_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right); \qquad ||A||_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

Приклад. Знайти число обумовленості матриці A

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. $DetA = 1 \cdot 0,98 - 0,99 \cdot 0,98 = 10^{-4} \neq 0$, тому А – невироджена, можна знайти число обумовленості.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9802 & -9900 \\ -9900 & 10000 \end{pmatrix}$;

$||A||_\infty = \max\{1,99; 1,97\} = 1,99$;

$||A^{-1}||_\infty = \max\{19702; 19900\} = 19900$;

$Cond(A) = 1,99 \cdot 19900 = 39601$.

Отже, число обумовленості дорівнює 39601.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти розв'язок системи методом Гаусса з вибором головного по стовпцях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2; \\ 3x_1 + 13x_2 + x_3 = -12; \\ x_1 + x_2 + 11x_3 = 10. \end{cases}$$

2. Знайти визначник методом квадратних коренів

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2; \\ x_1 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

3. Знайти розв'язок системи методом прогонки

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = -6; \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = -8; \\ x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

4. Знайти визначник методом Гаусса з вибором головного по рядках

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2; \\ x_1 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

5. Знайти розв'язок системи методом квадратних коренів

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2; \\ 3x_1 + x_2 = 9. \end{cases}$$

6. Знайти визначник методом прогонки

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = -4; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -5; \\ x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

7. Знайти розв'язок системи методом Гаусса з вибором головного за всією матрицею

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

8. Зробити дві ітерації методом Якобі. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,01$.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -4; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2; \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

9. Зробити дві ітерації методом Зейделя. Записати умову припинення, $\varepsilon = 0,01$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -4; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2; \\ x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

10. Знайти область збіжності методу Зейделя для системи $Ax = b$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Знайти область збіжності методу Якобі для системи $Ax = b$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Знайти число обумовленості матриці

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. Знайти число обумовленості матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Наближені методи розв'язання систем нелінійних рівнянь

Постановка задачі

Розв'яжемо систему нелінійних рівнянь:

$$\overline{F}(\overline{x}) = \overline{0},$$

де $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $\overline{F} = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$.

Розглянемо основні наближені методи розв'язання систем нелінійних рівнянь:
1) метод простої ітерації;
2) метод Ньютона;
3) модифікований метод Ньютона.

Метод простої ітерації

Метод грунтується на зведенні системи нелінійних рівнянь до вигляду $\overline{x} = \overline{\Phi}(\overline{x})$, де $\overline{\Phi}(\overline{x}) = \overline{x} - C^{-1}\overline{F}(\overline{x})$, де C – невироджена матриця. Початкове наближення обирається довільне. Ітераційний процес має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{\Phi}(\overline{x}^k). \tag{24}$$

Достатня умова збіжності. Нехай відображення $\overline{\Phi}(\overline{x})$ визначено і неперервно диференційоване в деякій області G і є стискаючим з коефіцієнтом q; $\overline{x}^0 \in G$; $||\overline{\Phi}'(\overline{x}^0)|| \leqslant q$, $0 < q < 1$, де

$$\Phi'(\overline{x}) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_2} & ... & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} & ... & \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_n} \\ .... & .... & ... & .... \\ \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_2} & ... & \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} -$$

матриця Якобі, тоді ітераційний процес (24) збігається, при

чому швидкість збіжності лінійна:
$$||\overline{x}^k - \overline{x}^*|| \leqslant \frac{q^k}{1-q}||\overline{x}^1 - \overline{x}^0||.$$

Умова припинення: $||\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k|| \leqslant \varepsilon$.

Приклад. Знайти розв'язок системи методом простої ітерації з точністю $\varepsilon < 0,2$.
$$\begin{cases} 2x - \sin\dfrac{x-y}{2} = 0; \\ 2y - \cos\dfrac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$
Розв'язок. Зведемо систему до вигляду $\overline{x} = \overline{\Phi}(\overline{x})$:
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}; \\ y = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}; \end{cases}$$
Оберемо початкове наближення: $x^0 = y^0 = 0$. Перевіримо збіжність в околі $(0;0)^T$:
$$A = \Phi'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x-y}{2} & -\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x-y}{2} \\ -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x+y}{2} & -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x-y}{2} \end{pmatrix};$$
$$A_0 = A(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$||A_0||_1 = \frac{1}{4} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{є збіжність.}$$

Ітерація 1.
$$x^1 = \frac{1}{2}\sin\frac{x^0 - y^0}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{0-0}{2} = 0;$$
$$y^1 = \frac{1}{2}\cos\frac{x^0 + y^0}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{0+0}{2} = 0,5.$$
Перевіримо умову припинення:
$$||(0;0,5)^T - (0;0)^T||_\infty = ||(0;0,5)^T||_\infty = 0,5 > \varepsilon.$$

Ітерація 2:

$$x^2 = \frac{1}{2}\sin\frac{x^1 - y^1}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{0 - 0,5}{2} \approx -0,12;$$

$$y^2 = \frac{1}{2}\cos\frac{x^1 + y^1}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{0 + 0,5}{2} \approx 0,48.$$

Перевіримо умову припинення:

$||(-0,12; 0,48)^T - (0; 0,5)^T|| = ||(-0,12; -0,02)^T||_\infty = 0,12 < \varepsilon$

Отже, розв'язок системи з точністю $0,2$: $(-0,12; 0,48)^T$.

Метод релаксації

Якщо в методі простої ітерації $C \equiv \tau \equiv const$, то отримаємо метод релаксації. Ітераційний процес має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \tau\overline{F}(\overline{x}^k).$$

Достатня умова збіжності. Якщо $\tau < \dfrac{2}{\max\limits_{\overline{x}} ||F'(\overline{x})||}$, де $F'(\overline{x})$ – матриця Якобі, то ітераційний процес методу релаксації збігається.

Умова припинення: $||\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k|| \leqslant \varepsilon$.

Метод Ньютона

Розв'язання системи нелінійних рівнянь методом Ньютона зводиться до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Алгоритм методу Ньютона. Обираємо початкове наближення $\overline{x}^0$. На кожній ітерації обчислюється матриця Якобі:

$$A_k = \overline{F'}(\overline{x_k}); \qquad \overline{F'}(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ітераційний процес має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \overline{z}^k,$$

де z_k знаходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A_k \overline{z}^k = \overline{F}(\overline{x}^k).$$

Умова припинення: $||\overline{z}^k|| \leqslant \varepsilon$.

Для того, щоб метод Ньютона збігався, потрібно щоб виконувались умови таких теорем.

Теорема 1. *(про збіжність методу Ньютона)*

Нехай $\delta_a = \{\overline{x} : \|\overline{x} - \overline{x}^*\| < a\}$ та при деяких $a,\ a_1,\ a_2$: $0 < a$, $0 \leqslant a_1, a_2 < \infty$ виконуються умови:

1) $\|(\overline{F}'(\overline{x}))^{-1}\| \leqslant a_1,\ x \in \delta_a$,

2) $\|\overline{F}(\overline{x}_1) - \overline{F}(\overline{x}_2) - \overline{F}'(\overline{x}_2)(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)\| \leqslant a_2\|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\|^2$, при чому $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \delta_a$.

3) $\overline{x}^0 \in \delta_b,\ b = \min(a, c^{-1}),\ c = a_1 a_2$.

Тоді ітераційний процес методу Ньютона для системи нелінійних рівнянь збігається та має місце оцінка точності:

$$\|\overline{x}^n - \overline{x}^*\| \leqslant c^{-1}(c\|\overline{x}^0 - \overline{x}^*\|)^{2^n}.$$

Теорема 2. *(про збіжність методу Ньютона)*

Якщо в області $G \subset R^n$ фунції $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^2(G)$, $|\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}| \leqslant L$, в точці $\overline{x}^0 \in G$ матриця $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{i,j=1}^{n}$ – невироджена, $\|\left(\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{i,j=1}^{n}\right)^{-1}\| \leqslant M$, $|f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)| \leqslant \delta$ та виконується умова

$$h = M^2 L \delta n^2 \leqslant 1/2,$$

тоді система заданих нелінійних рівнянь має розв'язок в області $\|\overline{x} - \overline{x}^0\|_1 \leqslant \dfrac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h}\delta$ та має місце оцінка:

$$\|\overline{x}^n - \overline{x}^*\|_1 \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n - 1}\delta.$$

Приклад. Знайти розв'язок системи методом Ньютона з точністю $0,2$.

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x-y}{2} = 0; \\ y - \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Покладемо початкове наближення $x^0 = (0;0)^T$. Умови теореми 2 виконуються. Знайдемо матрицю Якобі:

$$A_k = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x^k - y^k}{2} & \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x^k-y^k}{2} \\ \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x^k+y^k}{2} & 1 + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x^k+y^k}{2} \end{pmatrix};$$

Ітерація 1.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\overline{F^0} = \begin{pmatrix} f_1(x^0, y^0) \\ f_2(x^0, y^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 - 0,5\sin\dfrac{x^0-y^0}{2} \\ y^0 - 0,5\cos\dfrac{x^0+y^0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix};$$

Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $A_0\overline{z}^0 = \overline{F^0}$:

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуємо отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$z_2^0 = -0,5; \quad z_1^0 = -0,25z_2^0/0,75 = -0,25(-0,5)/0,75 = 0,17;$

$\overline{x}^1 = \overline{x}^0 - \overline{z}^0 = (0;0)^T - (0,17;-0,5)^T = (-0,17;0,5)^T.$

Перевіримо умову припинення:
$||\overline{z}^0||_\infty = ||(0,17;-0,5)^T||_\infty = 0,5 > \varepsilon.$

Умова не виконалась, переходимо до другої ітерації.

Ітерація 2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,04 & 1,04 \end{pmatrix};$$

$$\overline{F}^1 = \begin{pmatrix} -0,17 - 0,5\sin\dfrac{-0,17-0,5}{2} \\ 0,5 - 0,5\cos\dfrac{-0,17+0,5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,003 \\ 0,007 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0,76 & 0,24 \\ 0,04 & 1,04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,003 \\ 0,007 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \overline{z}^1 = \begin{pmatrix} -0,006 \\ 0,007 \end{pmatrix};$$

$$\overline{x}^2 = \overline{x}^1 - \overline{z}^1 = \begin{pmatrix} -0,17 \\ 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,006 \\ 0,007 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,16 \\ 0,49 \end{pmatrix};$$

Перевіримо умову припинення:
$||\overline{z}^1||_\infty = 0,007 \leqslant \varepsilon.$

Отже, розв'язок системи з точністю $0,2$: $(-0,16; 0,49)^T$.

Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес модифікованого методу Ньютона має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - A_0^{-1}\overline{F}(\overline{x}^k).$$

Обирається початкове наближення x^0, для якого обчислюється матриця Якобі: $A_0 = \overline{F'}(\overline{x_0})$.
Умова припинення методу: $||\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k|| \leqslant \varepsilon$.

Приклад. Знайти розв'язок системи модифікованим методом Ньютона з точністю $0,2$.

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x-y}{2} = 0; \\ y - \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Покладемо початкове наближення $\overline{x}^0 = (0;0)^T$. Умови теореми 2 виконуються. Знайдемо матрицю Якобі:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x^k - y^k}{2} & \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x^k - y^k}{2} \\ \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x^k + y^k}{2} & 1 + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x^k + y^k}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{0-0}{2} & \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{0-0}{2} \\ \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{0+0}{2} & 1 + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{0+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1,33 & -0,33 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ітерація 1.

$$\overline{F}^0 = \begin{pmatrix} x^0 - 0,5\sin\dfrac{x^0 - y^0}{2} \\ y^0 - 0,5\cos\dfrac{x^0 + y^0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \end{pmatrix};$$

$\overline{x}^1 = \overline{x}^0 - A_0^{-1}\overline{F}(\overline{x}^0) = (-0,17; 0,5)^T;$

Перевіримо умову припинення:

$||\overline{x}^1 - \overline{x}^0|| = ||(-0,17; 0,5)^T - (0; 0)^T||_\infty = 0,5 > \varepsilon.$

Ітерація 2.

$$\overline{F}^1 = \begin{pmatrix} -0,003 \\ 0,007 \end{pmatrix};$$

$\overline{x}^2 = \overline{x}^1 - A_0^{-1}\overline{F}(\overline{x}^1) = (-0,17; 0,49)^T;$

$||\overline{x}^2 - \overline{x}^1|| = ||(-0,17; 0,49)^T - (-0,17; 0,5)^T||_\infty = 0,01 \leqslant \varepsilon.$

Отже, розв'язок системи з точністю $0,2$: $(-0,17; 0,49)^T$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Проробити дві ітерації методом простої ітерації для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sin(x - 0,6) - y = 1,6; \\ 3x - \cos y = 0,9. \end{cases}$$

За початкове наближення обрати точку $x_0 = 1,25,\ y_0 = 0$.

2. Проробити дві ітерації методом Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sin(2x - y) - 1,2x = 0,4; \\ 0,8x^2 + 1,5y^2 = 1. \end{cases}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0,01$.

3. Проробити дві ітерації модифікованим методом Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,1) = x^2; \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0,01$.

4. Проробити дві ітерації методу простої ітерації для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sin(x - y) - xy = -1; \\ x^2 - y^2 = 0,75. \end{cases}$$

Перевірити умову збіжності.

5. Проробити дві ітерації методом Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sin x + 2y = 1,6; \\ \cos(y - 1) - x = 1. \end{cases}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0,01$.

6. Проробити дві ітерації модифікованим методом Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} xy - y^2 = 1; \\ x^2 y + y = 5. \end{cases}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0,01$.

7. Проробити дві ітерації методу простої ітерації для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 6y + 20 \lg x = -16; \\ 2x + y - 10 \lg y = 4. \end{cases}$$

Перевірити умову збіжності.

8. Проробити дві ітерації методом Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 + 1,5y^2 + z^2 - 5 = 0; \\ 6xyz - x + 5y + 3z = 0; \\ 5xz - yz - 1 = 0. \end{cases}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0,01$.

5. Наближені методи розв'язання задач на власні значення

Постановка задачі

Нехай A – квадратна матриця розмірності $n \times n$. Потрібно знайти ті значення λ при яких задача

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}$$

має ненульовий розв'язок, $\overline{x} \neq \overline{0}$. Позначимо λ_i, $i = \overline{1,n}$ – власні значення матриці A, а $\overline{x}^i$ – власні вектори, які відповідають власним значенням λ_i.

Розглянемо основні наближені методи знаходження власних значень. Для розв'язання **часткової проблеми** власних значень, т.т. коли необхідно знайти максимальне та/або мінімальне власне значення чи власне значення, що знаходиться в околі деякого числа λ_0, використовують:
1) степеневий метод,
2) метод скалярних добутків.

Для розв'язання **повної проблеми** власних значень, т.т. коли необхідно знайти всі власні значення та відповідні власні вектори, використовують: метод обертань (Якобі).

Метод скалярних добутків

Метод інколи називають степеневим методом із скалярними добутками. Нехай $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$. Будемо шукати максимальне власне значення λ_1.

Початкове наближення $\overline{x}^0$ обираємо довільним, але з означення власного вектору $\overline{x}^0 \neq \overline{0}$. Ітераційний процес методу має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = A\overline{x}^k; \qquad \lambda_1^{k+1} = \frac{(\overline{x}^{k+1}, \overline{x}^k)}{(\overline{x}^k, \overline{x}^k)}.$$

Умова припинення: $|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k| \leqslant \varepsilon$.

Зауваження. Для уникнення зростання компонент вектору $\overline{x}^k$ на кожній ітерації, використовують нормування. Після знаходження $\overline{x}^k$, він нормується:

$$\overline{e}^k = \left(\frac{x_1^k}{||\overline{x}^k||}; ...; \frac{x_n^k}{||\overline{x}^k||}\right).$$

Далі працюють вже з нормованим вектором:

$$\overline{x}^{k+1} = A\overline{e}^k.$$

Приклад. Знайти максимальне власне значення методом скалярних добутків з точністю $\varepsilon = 0,2$ для матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язок. Оскільки $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ та $|a_{ij}| > 1$, будемо використовувати нормування для уникнення зростання компонент вектору $\overline{x}^k$. Оберемо довільне ненульове початкове наближення: $\overline{x}^0 = (1; 1; 1)^T$.

Ітерація 1.

$$\overline{x}^1 = A\overline{x}^0 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_1^1 = \frac{(\overline{x}^1, \overline{x}^0)}{(\overline{x}^0, \overline{x}^0)} = \frac{\left((8; 6; 6)^T, (1; 1; 1)^T\right)}{((1; 1; 1)^T, (1; 1; 1)^T)} \approx 6,66.$$

Нормуємо:

$$||\overline{x}^1||_2 = \sqrt{8^2 + 6^2 + 6^2} \approx 11,66;$$

$$\overline{e}^1 = \frac{\overline{x}^1}{||\overline{x}^1||_2} = (\frac{8}{11,66}; \frac{6}{11,66}; \frac{6}{11,66})^T = (0,69; 0,51; 0,51)^T.$$

Ітерація 2.

$$\overline{x}^2 = A\overline{e}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,69 \\ 0,51 \\ 0,51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,98 \\ 3,24 \\ 3,42 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_1^2 = \frac{(\overline{x}^2, \overline{e}^1)}{(\overline{e}^1, \overline{e}^1)} \approx \frac{6,83}{0,996} \approx 6,86.$$

Перевіримо умову припинення:

$$|\lambda_1^2 - \lambda_1^1| = |6,86 - 6,66| = 0,2 \leqslant \varepsilon.$$

Отже, максимальне власне значення з точністю 0,2: $\lambda_{max}(A) \approx 6,86$.

Степеневий метод

Нехай $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$. Будемо також шукати максимальне власне значення λ_1. Початкове наближення $\overline{x}^0$ обираємо довільним, але $\overline{x}^0 \neq \overline{0}$.

Ітераційний процес має вигляд:

$$\overline{x}^{k+1} = A\overline{x}^k; \qquad \lambda_1^{k+1} = \frac{x_m^{k+1}}{x_m^k}, \quad \forall m : 1 \leqslant m \leqslant n.$$

Умова припинення: $|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k| \leqslant \varepsilon$.

Зауваження. Якщо $A = A^T > 0$, то можна знайти мінімальне власне значення:

$$\lambda_{min}(A) = \lambda_{max}(A) - \lambda_{max}(B),$$

де $B = \lambda_{max}(A)E - A$, а E – одинична матриця.

Зауваження. Якщо скористатися властивістю норм: $\lambda_{max}(A) \leqslant ||A||_\infty$, то можна уникнути знаходження $\lambda_{max}(A)$:

$$\lambda_{min}(A) = ||A||_\infty - \lambda_{max}(B),$$

де $B = ||A||_\infty E - A$.

Приклад. Знайти мінімальне власне значення степеневим методом з точністю $\varepsilon = 0,5$ для матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок. Перевіримо умову $A = A^T > 0$:

$A = A^T$ – виконується;

$Det(2) > 0,$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

оскільки всі головні мінори додатні, то $A > 0$ – виконується.

В задачі необхідно знайти лише мінімальне власне значення, тому замість знаходження $\lambda_{max}(A)$ скористаємося його оцінкою зверху: $||A||_\infty = 4$.

Будуємо матрицю B:

$$B = ||A||_\infty E - A = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо $\lambda_{max}(B)$ степеневим методом із нормуванням. Оберемо початкове наближення: $\overline{x}^0 = (1; 1; 1)^T$.

Ітерація 1.

$$\overline{x}^1 = B\overline{x}^0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Компонента m обирається довільна, покладемо $m = 1$, тоді

$$\lambda_1^1 = \frac{x_1^1}{x_1^0} = \frac{3}{1} = 3.$$

Нормуємо:

$$||\overline{x}^1||_2 = \sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2} \approx 5,83;$$

$$\overline{e}^1 = \frac{\overline{x}^1}{||\overline{x^1}||_2} = (\frac{3}{5,83}; \frac{4}{5,83}; \frac{3}{5,83})^T = (0,51; 0,69; 0,51)^T.$$

Ітерація 2.

$$\overline{x}^2 = B\overline{e}^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{0,51} \\ 0,69 \\ 0,51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1,71} \\ 2,4 \\ 1,71 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_1^2 = \frac{x_1^2}{e_1^1} = \frac{1,71}{0,51} = 3,35.$$

Перевіримо умову припинення знаходження $\lambda_{max}(B)$:
$|\lambda_1^2 - \lambda_1^1| = |3,35 - 3| = 0,35 \leqslant \varepsilon$.
Умова припинення виконалася, тому $\lambda_{max}(B) = 3,35$, тоді $\lambda_{min}(A) = ||A||_\infty - \lambda_{max}(B) = 4 - 3,35 = 0,65$.

Отже, мінімальне власне значення з точністю $0,5$: $\lambda_{min}(A) = 0,65$.

Метод обертань (Якобі)

Метод Якобі використовують, якщо матриця A є симетричною, тобто $A = A^T$. Тоді за допомогою ортогональних перетворень матриця A зводиться до діагонального вигляду, елементи діагоналі якої будуть відповідати наближеним власним значенням вихідної матриці. Покладемо $A_0 = A$. Ітераційний процес має вигляд:

$$A_{k+1} = U_k A_k U_k^T,$$

де U_k – матриця обертань:

$$U_k = \begin{array}{c@{}c} \begin{pmatrix} & & i_k & & j_k & & \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \cos\varphi_k & \dots & \sin\varphi_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\sin\varphi_k & \dots & \cos\varphi_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i_k \\ \\ j_k \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

φ_k – кут обертань:

$$\varphi_k = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a^k_{i_k j_k}}{a^k_{i_k i_k} - a^k_{j_k j_k}},$$

i_k та j_k – номери рядочка та стовпчика в матриці A_k:

$$a^k_{i_k j_k} = \max_{i \neq j} |a^k_{ij}|, \qquad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{2+1,n}.$$

Умова припинення:

$$t(A_{k+1}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}^2 \leqslant \varepsilon.$$

Після виконання цієї умови діагональні елементи матриці A_{k+1} є наближеними власними значеннями з точністю ε:

$$\lambda_i \approx a_{ii}^{k+1}, \qquad i = \overline{1,n},$$

при чому швидкість збіжності:

$$t(A_{k+1}) \leqslant q t(A_k); \quad q = 1 - \frac{2}{n(n-1)}.$$

Власним векторам λ_i, $i = \overline{1,n}$, відповідають власні вектори $(u_{1i}, ..., u_{ii}, ..., u_{ni})^T$, які є стовпцями матриці U:

$$U = \prod_{k=1}^{n} U_k = \begin{pmatrix} u_{11} & ... & u_{1i} & ... & u_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ u_{i1} & ... & u_{ii} & ... & u_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ u_{n1} & ... & u_{ni} & ... & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Можна використовувати ітераційний процес вигляду: $A_{k+1} = U_k^T A_k U_k$, але тоді матриця обертань буде:

$$U_k = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \cos\varphi_k & ... & -\sin\varphi_k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \sin\varphi_k & ... & \cos\varphi_k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти наближено всі власні значення та відповідні власні вектори матриці A з точністю $\varepsilon = 0,1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок. Для розв'язання повної проблеми власних значень використовується метод обертань (Якобі). Оскільки $A = A^T$, то метод можна застосовувати.

$$A_0 = A = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

Ітерація 1.

Знайдемо рядок та стовпчик з максимальним по модулю недіагональним елементом:

$a^0_{i_0 j_0} = |a_{12}| = |-1| \quad \Rightarrow \quad i_0 = 1,\ j_0 = 2.$

Знайдемо кут: $\varphi_0 = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{2a^0_{12}}{a^0_{11} - a^0_{22}} = \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg}(-\infty) = -\dfrac{\pi}{4}.$

Побудуємо матрицю обертань:

$$U_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_1 = U_0^T A_0 U_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо умову припинення:

$$t(A_1) = 2(0^2 + (\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + 0^2 + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2 + 0^2 + (-1)^2) = 4 \geqslant \varepsilon.$$

Оскільки умова припинення не виконалася, то знаходимо максимальне значення в матриці A_1.

Ітерація 2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad i_1 = 3,\ j_1 = 4;$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a_{34}^1}{a_{33}^1 - a_{44}^1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{4};$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ 0 & 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_2 = U_1^T A_1 U_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 3 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t(A_2) = 2(0^2 + (0,5)^2 + (0,5)^2 + (-0,5)^2 + (-0,5)^2 + 0^2) = 2 \geqslant \varepsilon.$$

Ітерація 3.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \boxed{0,5} & 0,5 \\ 0 & 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 3 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad i_2 = 1,\ j_2 = 3,\ \varphi_2 = \frac{\pi}{4};$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = U_2^T A_2 U_2 = \begin{pmatrix} 3,5 & -0,35 & 0 & 0,35 \\ -0,35 & 1 & -0,35 & -0,5 \\ 0 & -0,35 & 2,5 & -0,35 \\ 0,35 & -0,5 & -0,35 & 1 \end{pmatrix};$$

$$t(A_3) = 2(0^2 + 0,5^2 + 0,5^2 + (-0,5)^2 + (-0,5)^2 + 0^2) = 1,48 \geqslant \varepsilon.$$

Ітерація 4.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3,5 & -0,35 & 0 & 0,35 \\ -0,35 & 1 & -0,35 & \boxed{-0,5} \\ 0 & -0,35 & 2,5 & -0,35 \\ 0,35 & -0,5 & -0,35 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$i_3 = 2, \quad j_3 = 4, \quad \varphi_3 = -\frac{\pi}{4};$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_4 = U_3^T A_3 U_3 = \begin{pmatrix} 3,5 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix};$$

$$t(A_4) = 2((-0,5)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-0,5)^2) = 1 \geqslant \varepsilon.$$

Ітерація 5.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3,5 & \boxed{-0,5} & 0 & 0 \\ -0,5 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$i_4 = 1,\ j_4 = 2,\ \varphi_4 = -0,23;$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,23 & 0 & 0 \\ -0,23 & 0,97 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_5 = U_4^T A_4 U_4 = \begin{pmatrix} 3,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & \boxed{-0,5} \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix};$$

$$t(A_5) = 2(0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-0,5)^2) = 0,25 \geqslant \varepsilon.$$

Ітерація 6.

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & \boxed{-0,5} \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$i_5 = 3,\ j_5 = 4,\ \varphi_5 = -0,23;$

$$U_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,97 & 0,23 \\ 0 & 0 & -0,23 & 0,97 \end{pmatrix};$$

$$A_6 = U_5^T A_5 U_5 = \begin{pmatrix} 3,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,38 \end{pmatrix};$$

$t(A_6) = 0 \leqslant \varepsilon.$

Отже, власні значення матриці A: 3,6; 1,37; 2,6; 0,38. Знайдемо власні вектори:

$$U = U_0 U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 = \begin{pmatrix} 0,37 & 0,6 & -0,6 & 0,37 \\ -0,6 & 0,37 & 0,37 & 0,6 \\ 0,6 & -0,37 & 0,37 & 0,6 \\ -0,37 & -0,6 & -0,6 & 0,37 \end{pmatrix}$$

Отже, власному значенню 3,6 відповідає власний вектор $(0,37; -0,6; 0,6; -0,37)^T$; 1,37 – $(0,6; 0,37; -0,37; -0,6)^T$; 2,6 – $(-0,6; 0,37; 0,37; -0,6)^T$; 0,38 – $(0,37; 0,6; 0,6; 0,37)^T$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Проробити три ітерації степеневого методу із формулою скалярних добутків для знаходження максимального власного значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

із точністю $\varepsilon = 10^{-2}$. Записати умову закінчення ітераційного процесу.

2. Проробити три ітерації степеневого методу для знаходження максимального власного значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

із точністю $\varepsilon = 10^{-2}$. Записати умову закінчення ітераційного процесу.

3. Проробити три ітерації степеневого методу для знаходження мінімального власного значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

із точністю $\varepsilon = 10^{-3}$. Записати умову закінчення ітераційного процесу.

4. Проробити три ітерації степеневого методу із формулою скалярних добутків для знаходження мінімального власного значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

із точністю $\varepsilon = 10^{-3}$. Записати умову закінчення ітераційного процесу.

5. Проробити дві ітерації методу Якобі (обертання) для знаходження всіх власних значень матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

із точністю $\varepsilon = 10^{-2}$. Записати умову закінчення ітераційного процесу.

6. Проробити дві ітерації методу Якобі (обертання) для знаходження всіх власних значень матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

із точністю $\varepsilon = 10^{-2}$. Записати умову закінчення ітераційного процесу.

7. Проробити дві ітерації методу Якобі для знаходження всіх власних значень матриці із точністю $\varepsilon = 10^{-2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу.

8. Проробити три ітерації степеневим методом із формулою скалярних добутків для знаходження максимального і мінімального власного значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

із точністю $\varepsilon = 10^{-2}$. Записати умову закінчення ітераційного процесу.

9. Проробити три ітерації степеневим методом для знаходження максимального і мінімального власного значення із точністю $\varepsilon = 10^{-2}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Записати умову закінчення ітераційного процесу.

10. Проробити три ітерації степеневим методом для знаходження максимального і мінімального власного значення із точністю $\varepsilon = 10^{-2}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Інтерполяція

Постановка задачі

Нехай функція $f(x) \in C[a, b]$. Задача інтерполяції полягає у відшуканні невідомих значень функції $f(x)$ за її відомими значеннями $f(x_k)$ в точках $x_k \in [a; b]$, $k = \overline{0, n}$, які називають ***вузлами інтерполяції***. На підставі теореми Вейерштраса розв'язок шукаємо у вигляді полінома $P_n(x)$, що відповідає ***інтерполяційним умовам***:

$$f(x_k) = P_n(x_k), \quad k = \overline{0, n}.$$

Тоді для знаходження наближеного значення функції в довільній точці $\tilde{x}$:

$$f(\tilde{x}) \approx P_n(\tilde{x}).$$

Через $(n+1)$ вузол інтерполяції можна побудувати єдиний поліном не вище n-го степеня. Інтерполяційний поліном можна побудувати у вигляді:

1) поліному Лагранжа;
2) поліному Ньютона.

Інтерполяційний поліном Лагранжа

Формула для побудови поліному у формі Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)} f(x_k),$$

для зручності її можна переписати в іншому вигляді:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \tag{25}$$

де $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$.

Приклад. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа для функції $f(x) = 3^x$, $x \in [-1; 1]$. Використати три вузли. Знайти наближене значення функції в точці 0,5.

Розв'язок. Оскільки необхідно використати 3 вузли, то степінь інтерполяційного поліному буде не вище 2: $n = 2$. Вимоги на вибір вузлів інтерполяції немає, тому візьмемо довільні вузли, наприклад, рівновіддалені з кроком h:

$h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-(-1)}{2} = 1.$

Знайдемо значення функції у вузлах інтерполяції:

k	x_k	$f(x_k)$
0	-1	$1/3$
1	0	1
2	1	3

Застосуємо формулу поліному Лагранжа:

$$L_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} +$$
$$+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{3}\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} +$$
$$+ 1\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + 3\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1.$$

Знайдемо наближене значення в точці 0,5:

$L_2(0,5) = \dfrac{2}{3}(0,5)^2 + \dfrac{4}{3}0,5 + 1 = \dfrac{11}{6} \approx 1,833.$

Отже, $f(x) \approx \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + 1$; $f(0,5) \approx 1,833$.

Інтерполяційний поліном Ньютона

Розділеною різницею першого порядку називається величина:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i};$$

другого порядку:

$$f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_i, x_{i+1}) - f(x_{i-1}, x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}};$$

(k+1) порядку:

$$f(x_i, ..., x_{i+k+1}) = \frac{f(x_{i+1}, ..., x_{i+k+1}) - f(x_i, ..., x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i}.$$

Таблиця розділених ріниць має вигляд:

$$\begin{array}{cccccc}
x_0 & f(x_0) & f(x_0;x_1) & f(x_0;x_1;x_2) & \cdots & f(x_0;x_1;\ldots;x_n) \\
x_1 & f(x_1) & f(x_1;x_2) & f(x_1;x_2;x_3) & \cdots & \\
x_2 & f(x_2) & f(x_2;x_3) & f(x_1;x_2;x_3) & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & f(x_{n-1};x_n) & & & \\
x_n & f(x_n) & & & &
\end{array}$$

На підставі цієї таблиці, використовучи перший її рядок, можемо записати ***інтерполянт Ньютона вперед***:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ ... + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1}),$$

чи скориставшись останнім рядком, дістанемо ***інтерполяційну формулу Ньютона назад***:

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}; x_n)(x - x_n) + \cdots$$
$$\cdots + f(x_0; x_1; \ldots; x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1).$$

Обирають ту чи іншу формули Ньютона, в залежності від того, де знаходиться точка x (в якій потрібно обчислити значення функції). Якщо ближче до точки x_0, то інтерполяційну формулу Ньютона вперед. Якщо ближче до x_n, то інтерполяційну формулу Ньютона назад.

Для практичного застосування найчастише використовують інтерполяційні поліноми Ньютона, оскільки для його обчислення можна застосовувати схему Горнера.

За точністю зручно слідкувати таким чином: якщо доданки $f(x_o; x_1; \ldots; x_k)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$ в інтерполяційній формулі спадають достатньо швидко, то можна очікувати на гарну точність.

Вузли інтерполяції називаються ***рівновіддаленими***, якщо $x_i - x_{i-1} = h = const$, $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$.

Нехай $f(x_i) = y_i$. Величина $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ називається ***скінченою різницею першого порядку***.

Величина $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ називається ***скінченою різницею другого порядку***.

Величина $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ називається ***скінченою різницею k-го порядку***.

Таблиця скінчених різниць:

$$\begin{array}{lllllll}
y_0 & \Delta y_0 & \Delta^2 y_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta^n y_0 \\
y_1 & \Delta y_1 & \Delta^2 y_1 & \cdots & \cdots & \Delta^{n-1} y_1 & \\
y_2 & \Delta y_2 & \Delta^2 y_2 & \cdots & \Delta^{n-2} y_{n-2} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \Delta y_{n-1} & & & & & \\
y_n & & & & & &
\end{array}$$

Має місце рівність: $\Delta^k y_i = k! h^k f(x_i; \ldots; x_k)$.

Покладемо $x = x_0 + th$, $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Тоді ***інтерполяційні формули Ньютона для рівновіддалених вузлів*** набувають вигляду:

$$P_n(t) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \cdots (t-n+1),$$

$$P_n(t) = y_0 + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!} t(t+1) \cdots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t+1) \cdots (t+n-1).$$

Приклад. Побудувати інтерполяційний поліном Ньютона для функції $f(x) = 3^x$, $x \in [-1; 1]$. Використати три вузли.

Розв'язок. Оскільки необхідно використати 3 вузли, то степінь інтерполяційного поліному буде не вище 2: $n = 2$. Вимоги на вибір вузлів інтерполяції немає, тому візьмемо довільні вузли, наприклад, рівновіддалені з кроком h:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-1)}{2} = 1.$$

Знайдемо значення функції у вузлах і розділені різниці:

k	x_k	$f(x_k)$	р. р. I п.	р. р. II п.
0	-1	$\boxed{1/3}$		
			$\dfrac{1-1/3}{1-0}=\boxed{2/3}$	
1	0	1		$\dfrac{2-2/3}{1-(-1)}=\boxed{2/3}$
			$\dfrac{3-1}{0-(-1)}=2$	
2	1	3		

В таблиці виділені розділені різниці, які необхідні для застосування інтерполяційної формули Ньютона:

$$P_2(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)=$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(x+1)+\frac{2}{3}(x+1)x=\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+1.$$

Отже, $f(x)\approx\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+1.$

Зауваження. За $(n+1)$ вузлом можна побудувати інтерполяційний поліном не вище n-го степеня, тобто степінь може бути нижчим. Для визначення степеня інтерполяційного поліному зручно використовувати розділені різниці.

Приклад. Визначити степінь інтерполяційного многочлена для функції, заданої таблично:

x_i	-1	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	-4	-2	5	16	31	50

Розв'язок.

x	$f(x)$	р.р. I п.	р.р. II п.	р.р. III п.
-1	$\boxed{-4}$			
1	-2	$\boxed{1}$		
2	5	7	$\boxed{2}$	
3	16	11	2	$\boxed{0}$
4	31	15	2	0
5	50	19	2	0

Для знаходження степеня інтерполяційного поліному будувати сам поліном не потрібно, просто знайшли розділені різниці. Оскільки всі розділені різниці 3-го порядку є нулями, то степінь інтерполяційного поліному буде 2. Отже, $n = 2$.

Приклад. Знайти суму скінченного ряду за допомогою інтерполяції:

$$S(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1).$$

Розв'язок. Для розв'язання задачі використаємо формулу інтерполяційного поліному Ньютона. Запишемо вузли, значення функції та знайдемо розділені різниці перших членів ряду:

n	$S(n)$	р.р.I п.	р.р.II п.	р.р.III п.
1	$\boxed{1}$			
		$\boxed{3}$		
2	4		$\boxed{1}$	
		5		$\boxed{0}$
3	9		1	
		7		0
4	16		1	
		9		
5	25			

Оскільки розділені різниці 3-го порядку є нулями, то степінь інтерполяційного поліному буде 2: $n = 2$. В таблиці виділені розділені різниці, необхідні для застосування інтерполяційної формули Ньютона:
$P_2(n) = 1 + 3(n - 1) + 1(n - 1)(n - 2) = n^2$.

Отже, $S(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1) = n^2$.

Похибка інтерполяції

Для оцінки похибки інтерполяції можна використати оцінку залишкового члену у формі Лагранжа:

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|, \tag{26}$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a;b]} |f^{(n+1)}(x)|$, $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$, а також у формі Ньютона:

$$|f(x) - L_n(x)| = \omega(x) f(x, x_0, x_1, ..., x_n).$$

Для рівновіддалених вузлів оцінку для залишкового члену для інтерполяційної формули Ньютона вперед подамо у вигляді:

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n), \quad t = \frac{x - x_0}{h}$$

та для інтерполяційної формули назад:

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} t(t+1)(t+2)\cdots(t+n), \quad t = \frac{x - x_n}{h}$$

Зауваження. Існує зв'язок між розділеною різницею $(n+1)$ порядку та $(n+1)$ похідною:

$$f(x, x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Приклад. Оцінити похибку обчислення функції $f(x) = 3^x$ в точці 0,5, за допомогою інтерполяційного поліному, побудованому за вузлами -1; 0; 1.

Розв'язок. Оскільки 3 вузли, то $n = 2$. Знайдемо оцінку похибки:

$M_3 = \max\limits_{x \in [-1;1]} |(3^x)'''(x)| = 3 \ln^3 3 \approx 3,978;$

$|f(0,5) - P_2(0,5)| \leqslant \dfrac{M_3}{3!} |(0,5 - x_0)(0,5 - x_1)(0,5 - x_2)| =$

$= \dfrac{3,978}{6} |(0,5 + 1)(0,5 - 0)(0,5 - 1)| \approx 0,25.$

Отже, $|f(0,5) - P_2(0,5)| \leqslant 0,25.$

Приклад. З якою точністю ε можна обчислити $3^{0,5}$ за відомими значеннями 3^{-1}, 3^0, 3^1 ?

Розв'язок. За умовою не треба будувати поліном, лише визначити похибку, скористаємось формулою:

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|.$$

Відомі значення: 3^{-1}, 3^0, 3^1, значить функція має вигляд: $f(x) = 3^x$, вузли інтерполяції: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Оскіль-

ки 3 вузла, то $n = 2$. Застосовуємо формулу похибки:
$M_3 = \max\limits_{x\in[-1;1]} |3^x \ln^3 3| = 3\ln^3 3;$
$|3^{0,5} - L_2(0,5)| \leqslant \dfrac{M_3}{3!}|(0,5 - x_0)(0,5 - x_1)(0,5 - x_2)| =$
$= \dfrac{3\ln^3 3}{6}|(0,5+1)(0,5-0)(0,5-1)| \approx 0,2486.$

Отже, значення $3^{0,5}$ можна обчислити з точністю 0,2486.

Оптимальний вибір вузлів

Для зменшення похибки інтерполяції необхідно в якості вузлів взяти нулі поліному Чебишова 1 роду. Для їх визначення використовують рекурентні співідношення:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x$$

чи в явному вигляді

$$T_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2},\quad |x| \geqslant 1,$$

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x),\quad |x| \leqslant 1.$$

Позначимо $\overline{T_n}(x) = 2^{1-n}T_n(x),\ \ |x| \leqslant 1.$

Лема 1. Серед усіх поліномів $P_n(x)$ степеня n із старшим коефіцієнтом, що дорівнює 1 багаточлен $\overline{T_n}(x)$ найменш відхиляється від нуля на проміжку $[-1,1]$ та

$$||P_n(x)||_{C[-1,1]} \geqslant ||\overline{T_n}(x)||_{C[-1,1]} = 2^{1-n}$$

Лема 2. Система багаточленів Чебишова$T_n(x)$ є ортогональною на проміжку $[-1;1]$ з ваговою функцією $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(T_k(x), T_m(x))_{L_{2,\rho}[a,b]} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_k(x)T_m(x)dx =$$

$$= \begin{cases} = 0, \text{ якщо } k \neq m \\ \neq 0, \text{ якщо } k = m \end{cases}$$

Нулі полінома Чебишова $x \in [-1,1]$: $x_k = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ $k = \overline{0, n-1}$; екстремуми: $x_k = \cos\dfrac{\pi k}{n}$, $\quad k = \overline{0, n}$.

Поліноми Чебишова 1 роду на проміжку [a;b]

За допомогою заміни $x = \frac{1}{2}((b-a)z + (b+a))$ переведемо проміжок $[-1,1]$ в $[a,b]$. Тоді поліноми Чебишова запишуться таким чином:

$$T_n^{[a;b]}(x) = T_n^{[-1;1]}\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$$

Його нулі: $x_k = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$, $\quad k = \overline{0, n-1}$

Відповідно поліном із старшим коефіцієнтом 1 набуває вигляду:

$$\overline{T_n}^{[a;b]}(x) = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n} T_n^{[-1;1]}\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right),$$

а його відхілення від нуля подамо у вигляді:

$$||\overline{T_n}^{[a;b]}(x)||_{C[a,b]} = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n}.$$

Для побудови інтерполяційного поліному n-го степеня P_n необхідно в якості вузлів взяти $(n+1)$ корінь поліному Чебишова $(n+1)$-го степеня:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = \overline{0, n}.$$

При використанні цих вузлів похибка має вигляд:

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Приклад. Побудувати інтерполяційний поліном за 3 вузлами, які є нулям поліному Чебишова для функції $f(x) = 3^x$, $x \in [-1;1]$. Обчислити значення в 0,5. Оцінити похибку.

Розв'язок. Оскільки необхідно використати 3 вузли, то степінь інтерполяційного поліному буде не вище 2: $n = 2$. Знайдемо вузли, які є нулями поліному Чебишова:

$x_0 = \cos\frac{(2\cdot 0+1)\pi}{2\cdot(2+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866;$

$x_1 = \cos\frac{(2\cdot 1+1)\pi}{2\cdot(2+1)} = 0;$

$x_2 = \cos\frac{(2\cdot 2+1)\pi}{2\cdot(2+1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,866.$

Знайдемо значення функції у вузлах і розділені різниці:

k	x_k	$f(x_k)$	р.р.I п.	р.р.II п.
0	0.866	$\boxed{2.489}$		
			$\boxed{1.719}$	
1	0	1		$\boxed{0.583}$
			0.709	
2	-0.866	0.386		

В таблиці виділені розділені різниці, необхідні для застосування формули Ньютона за чебишовськими вузлами:
$P_2^{\text{ч}}(x) = 2,489 + 1.719(x-0,866) + 0,583(x-0,866)x \approx$
$\approx 0,583x^2 + 1,214x + 1.$
Знайдемо наближене значення в точці 0,5:
$P_2^{\text{ч}}(0,5) \approx 0,583\cdot 0,5^2 + 1,214\cdot 0,5 + 1 \approx 1,753.$
Оцінимо похибку знайденого значення:

$$|f(0,5) - P_2^{\text{ч}}(0,5)| \leqslant \frac{M_3}{3!}\frac{(1-(-1))^3}{2^{2\cdot 2+1}} \approx 0,166.$$

Отже, $P_2^{\text{ч}}(x) = 0,583x^2 + 1,214x + 1$; $P_2^{\text{ч}}(0,5) \approx 1,753$; $|f(0,5) - P_2^{\text{ч}}(0,5)| \leqslant 0,166.$

Приклад. Скільки чебишовських вузлів інтерполяції необхідно взяти, щоб похибка інтерполяції на проміжку $[0;1]$ для функції $f(x) = \ln(1+x)$ не перевищувала $\varepsilon = 10^{-4}$?
Розв'язок. За умовою не треба будувати поліном, лише визначити похибку. В нас чебишовські вузли, тому похибка:

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Знайдемо $(n+1)$ похідну:

$f(x) = \ln(1+x)$; $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $\quad f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$;

$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$; ...; $\quad f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$;

$M_{n+1} = \max\limits_{x\in[0;1]} |f^{(n+1)}(x)| = \dfrac{n!}{(1+0)^{n+1}}$.

Використаємо похибку для чебишовських вузлів:

$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \dfrac{n!}{(n+1)!} \dfrac{(1-0)^{n+1}}{2^{2n+1}} = \dfrac{1}{(n+1)2^{2n+1}}$.

Підберемо n, для якого похибка буде менша за задане ε, почнемо з $n = 4$:

$n = 4$: $\quad |f(x) - L_4(x)| \leqslant \dfrac{1}{5 \cdot 2^9} \approx 0,0004 > \varepsilon$ – не виконується;

$n = 5$: $\quad |f(x) - L_5(x)| \leqslant \dfrac{1}{6 \cdot 2^{11}} \approx 0,00008$ – виконується.

Оскільки $n = 5$, то необхідно взяти 6 вузлів.

Приклад. На проміжку $[0;1]$ побудувати многочлен Чебишова 4 степеня з 1 при старшому степені. Обчислити відхилення від нуля.

Розв'язок. Побудуємо многочлен Чебишова 4 степеня на проміжку $[-1;1]$:

$T_0(x) = 1$;

$T_1(x) = x$;

$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$;

$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x$;

$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3-3x) - (2x^2-1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

Скористаємося формулою побудови поліномів Чебишова з коефіцієнтом 1 при старшому степені:

$$\overline{T_4}^{[0;1]}(x) = (1-0)^4 \cdot 2^{1-2\cdot 4} T_4^{[-1;1]}\left(\frac{2x-(1+0)}{1-0}\right) = \frac{1}{2^7}\times$$

$$\times T_4^{[-1;1]}(2x-1) = \frac{1}{2^7}\Big(8(2x-1)^4 - 8(2x-1)^2 + 1\Big) = x^4 - 2x^3 +$$

$$+\frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{128}.$$

Знайдемо відхилення від нуля:

$||\overline{T_4}^{[0;1]}(x)|| = (1-0)^4 \cdot 2^{1-2\cdot 4} = \dfrac{1}{128}.$

Отже, шуканий многочлен: $x^4 - 2x^3 + \dfrac{5}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{128}$, його відхилення від нуля: $\dfrac{1}{128}$.

Інтерполяційний поліном Ерміта

Нехай функція $f(x) \in C^{\alpha}[a,b]$ задана своїми значеннями та значеннями своїх похідних до відповідного порядку в кожному вузлі $f^{(j)}(x_i),\ i = \overline{0,n},\ j = \overline{0, k_i - 1}$.

Потрібно побудувати $H_m(x)$, що відповідає інтерполяційним умовам:

$$H_m(x_i) = f(x_i),\ H'_m(x_i) = f'(x_i),\ H''_m(x_i) = f''(x_i),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$H_m^{(k_i-1)}(x_i) = f^{(k_i-1)}(x_i),\ i = \overline{0,n},$$

$x_i \neq x_j$, якщо $i \neq j$. Ці умови називають інтерполяціними умовами Ерміта. Числа k_i називають кратністю вузла x_i та $m = \sum\limits_{i=0}^{n} k_i - 1$. Інтерполяціний поліном $H_m(x)$ – єдиний та визначається за формулою:

$$H_m(x) = f(x_1) + f(x_1;x_1)(x-x_1) + f(x_1;x_1;x_1)(x-x_1)^2 + \cdots$$

$$+ \cdots + f(\underbrace{x_1;\ldots;x_1}_{k_1};x_2)(x-x_1)^{k_1} +$$

$$+ f(\underbrace{x_1;\ldots;x_1}_{k_1};x_2;x_2)(x-x_1)^{k_1}(x-x^2) + \cdots +$$

$$+ f(\underbrace{x_1;\cdots;x_1}_{k_1};\cdots;\underbrace{x_n;\cdots;x_n}_{k_n})(x-x_1)^{k_1}\cdots$$

$$\cdots(x-x_{n-1})^{k_{n-1}}(x-x_n)^{k_n-1}.$$

Для побудови інтерполянта Ерміта використовують таблицю розділених різниць:

$$
\begin{array}{ccccc}
f(x_i) & \text{р.р.I п.} & \text{р.р.II п.} & \text{...} & \text{р.р. } n \text{ п.} \\
f(x_1) & & & & \\
 & \dfrac{f'(x_1)}{1!} & & & \\
f(x_1) & & \dfrac{f''(x_1)}{2!} & & \\
 & \dfrac{f'(x_1)}{1!} & & \dots & \\
f(x_1) & & \dfrac{f''(x_1)}{2!} & & \\
 & \dfrac{f'(x_1)}{1!} & & \dots & \\
\dots & & \dots & & f(\underbrace{x_1;\dots;}_{k_1}\dots;\underbrace{x_n;\dots;x_n}_{k_n}) \\
 & \dots & & & \\
f(x_1) & & & & \\
 & f(x_1;x_2) & & & \\
f(x_2) & & & & \\
 & \dots & \dfrac{f''(x_n)}{2!} & & \\
\dots & & & & \\
 & \dfrac{f'(x_n)}{1!} & & & \\
f(x_n) & & & &
\end{array}
$$

Якщо $k_i \equiv 1\ \forall i$, то інтерполянт Ерміта співпадає з інтерполяційним поліномом Лагранжа: $H_m(x) = L_n(x)$.

Оцінка залишкового члену матиме вигляд:

$$|f(x) - H_m(x)| \leqslant \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}|(x-x_0)^{k_0}...(x-x_n)^{k_n}|.$$

Приклад. Побудувати многочлен, що інтерполює дані:
$x_0 = -1;\ f_0 = 0;\ f_0' = 2;$

$x_1 = 0;\ f_1 = 2;\ f_1' = 4;\ f_1'' = -4;$

$x_2 = 1;\ f_2 = -1;\ f_2' = -14.$

Розв'язок. Оскільки в постановці задачі крім значень вузлів є ще їх похідні, то необхідно будувати інтерполяційний поліном Ерміта H_m, де $m = 2+3+2-1 = 6$. Знайдемо розділені різниці кратних вузлів:

$$f(-1;-1) = \frac{f'(-1)}{1!} = 2; \quad f(0;0) = \frac{f'(0)}{1!} = 4;$$

$$f(1;1) = \frac{f'(1)}{1!} = -14; \quad f(0;0;0) = \frac{f''(0)}{2!} = -2.$$

Використаємо обчисленні значення в таблиці розділених різниць:

x	$f(x)$	I	II	III	IV	V	VI
-1	0						
-1	0	$\boxed{2}$					
0	2	2	0				
0	2	$\boxed{4}$	2	2			
0	2	$\boxed{4}$	$\boxed{-2}$	-4	-6		
1	-1	-3	-7	-5	-0,5	11/4	
1	-1	$\boxed{-14}$	-11	-4	1	3/4	-1

Інтерполяційний поліном у формі Ньютона має вигляд:

$$H_6(x) = 0 + 2(x+1) + 0(x+1)^2 + 2(x+1)^2x - 6(x+1)^2x^2 + \\ + \frac{11}{4}(x+1)^2x^3 - (x+1)^2x^3(x-1) = 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2.$$

Оцінка точності інтерполяційного процесу

Нехай $f(x) \in C^{(n+1)}$. Постає питання, про величину залишкового члену$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ інтерполяційної формули у точці $x \neq x_i,\ i = \overline{0,n}$. Не зменшуючи загальності, покладемо, що вузли інтерполяції розташовані рівномірно

$$x_i = x_0 + ih,\ h = const,\ i = \overline{0,n}.$$

Оцінка для залишкового члену має вигляд:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|,$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

Введемо нову змінну $t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Тоді $\omega_{n+1}(x)$ набуває вигляду:

$$\omega_{n+1}(x) = \omega_{n+1}(x_0 + th) = h^{n+1} t(t-1)\cdots(t-n).$$

Розглянемо функцію $\varphi(t) = t(t-1)\cdots(t-n)$,

$$\varphi(t+1) = (t+1)t(t-1)\cdots(t+1-n).$$

Мають місце такі властивості:

Функція $\varphi(t)$ є парною чи непарною відносно точки $t = \dfrac{n}{2}$ залежно від непарності чи парності n, це випливає із співвідношення

$$\varphi(t) = (-1)^{n+1}\varphi(n-t),$$

$$\varphi(t+1) = \frac{t+1}{t-n}\varphi(t).$$

Якщо розбити $[0, n]$ на частини

$$[0,1],\ [1,2],\ \ldots,\ [n-1,n],$$

то на кожному з цих відрізків значення $\varphi(t)$ знаходяться множенням відповідного значення на попередньому відрізку на $\dfrac{t+1}{t-n}$. Цей множник завжди від'ємний при $t \in (0,1)$, тому знаки $\varphi(t)$ завжди чергуються при переході від інтервалу до інтервалу.

$$\left|\frac{t+1}{t-n}\right| < 1,\ t \in [0, \frac{n-1}{2}].$$

Таким чином, екстремальні значення $\varphi(t)$ за абсолютною величиною спадатимуть до середини відрізка $[0, n]$ і потім в силу симетрії знову зростати. За межами відрізку $[0, n]$ функція $\varphi(t)$ швидко зростає за абсолюною величиною. Таким же чином поводить себе функція

$$\omega_{n+1}(x) = \omega_{n+1}(x_0 + th) = h^{n+1}\varphi(t).$$

Отже, можна дістати таких висновків:

1) При екстраполюванні слід чекати великої похибки.

2) При інтерполюванні для значень x, які лежать не близько до вузлів інтерполювання, точність буде більшою для середніх відрізків і меншою для крайніх.

3) Вигідно вибирати вузли так, щоб точка x попадала ближче до центру даної конфігурації вузлів, що забезпечить більшу точність.

Збіжність процесу інтерполяції

Введемо вузли інтерполяції:

$$x_0^0$$

$$x_0^1,\ x_1^1$$

$$x_0^2,\ x_1^2,\ x_2^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_0^n,\ x_1^n,\ \cdots\ x_n^n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Побудуємо інтерполяційні поліноми для функції $f(x) \in C[a, b]$, що задана у цих вузлах

$$x_0^0\ -\ L_0(x)$$

$$x_0^1,\ x_1^1\ -\ L_1(x)$$

$$x_0^2,\ x_1^2,\ x_2^2\ -\ L_2(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_0^n,\ x_1^n,\ \cdots\ x_n^n\ -\ L_n(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Інтерполяційний процес ***збігаєтьса в точці*** $x \in [a, b]$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 = .$$

Визначення. Інтерполяційний процес ***збігаєтьса рівномірно на відрізку*** $[a, b]$ для заданої послідовності вузлів, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |R_n(x)| = 0.$$

Властивість збіжності інтерполяційного процесу залежить від вузлів інтерполяції та від гладкості функції, що інтерполюємо.

Теорема Фабера. Для будь-якої послідовності вузлів інтерполяції знайдеться функція (яку інтерполюємо) для якої інтерполяційний процес рівномірно не збігається на заданому відрізку інтерполяції.

Теорема Марцинкевича. Якщо функція $f(x) \in C[a,b]$, то знайдеться така послідовність вузлів інтерполяції, для якої інтерполяційний процес збігається.

Застосування інтерполяції

За допомогою інтерполяції можна знаходити невідомі x^* за відомими значеннями y^*.

1) Пряма інтерполяція

Нехай функція $y = f(x) \in C[a,b]$, що задана таблично (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$, немонотонна. Для знаходження x^* застосовуємо такий алгоритм:

За заданою таблицею (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$ будуємо інтерполяційний поліном $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$ та розв'язують нелінійне рівняння

$$L_n(x) = y^*.$$

На підставі теореми про середнє:

$$f(x) - f(x^*) = f'(\xi)(x - x^*)$$

одержимо $x - x^* = \dfrac{f(x) - f(x^*)}{f'(\xi)}$. Отже, похибка інтерполяції має вигляд:

$$|x - x^*| \leqslant \frac{M_{n+1}|\omega(x^*)|}{m_1(n+1)!},$$

де $m_1 = \min\limits_x |f'(x)|; \quad M_{n+1} = \max\limits_x |f^{n+1}(x)|.$

2) Обернена інтерполяція

Нехай функція $y = f(x) \in C[a, b]$, що задана таблично (x_i, y_i), $i = \overline{0, n}$, монотонна. Для знаходження x^* застосовуємо такий алгоритм:

Будуємо за таблицею (x_i, y_i), $i = \overline{0, n}$ таку таблицю: (y_i, x_i), $i = \overline{0, n}$. На підставі останньої таблиці інтерполянт набуває вигляду:

$$L_n(y) = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\omega_{n+1}(y)}{(y - y_i)\omega'_{n+1}(y_i)},$$

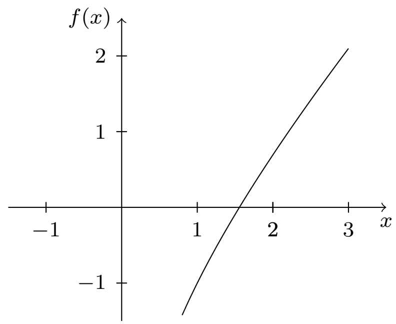
де $\omega_{n+1}(y) = (y - y_0)(y - y_1) \cdots (y - y_n)$ та $L(y^*) \approx x^*$. Залишковий член в цьому випадку утворюється із залишкового члена формули Ньютона, якщо в останньому поміняти місцями x та y, а похідну $f'(x)$ замінити на похідну від оберненої функції. Похибка інтерполяції має вигляд:

$$|x - x^*| \leqslant \frac{\widetilde{M}_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(y^*)|; \quad \widetilde{M}_{n+1} = \max_y \left| \frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}} x(y) \right|.$$

Зауваження. За допомогою інтерполяції можна знаходити корені нелінійних рівнянь, для цього знаходять x^* при $y^* = 0$.

Приклад. Розв'язати рівняння $\ln x + x - 2 = 0$, використавши інтерполяційний многочлен 2 степеня. Оцінити похибку.

Розв'язок. Для знаходження кореня спочатку досліджуємо рівняння на кількість коренів та відокремлюємо проміжок, який містить єдиний корінь.



$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(2) = 0.6931 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^* \in [1;2]$$

Для того щоб побудувати інтерполяційний поліном 2 степеня необхідно використати 3 вузла. Застосуємо пряму інтерполяцію, побудуємо інтерполяційний поліном Ньютона:

k	x_k	$f(x_k)$	р.р.I п.	р.р.II п.
0	1	$\boxed{-1}$		
			$\boxed{1,8109}$	
1	1.5	-0,0945		$\boxed{-0,2356}$
			1,5754	
2	2	0,6931		

$P_2(x) = -1 + 1,8109(x-1) - 0,2356(x-1)(x-1,5) =$
$= -0,2356x^2 + 2,3999x - 3,1643;$
Для розв'язання нелінійного рівняння $\ln x + x - 2 = 0$ замінимо праву частину знайденим наближенням (за умовою $y^* = 0$):
$-0,2356x^2 + 2,3999x - 3,1643 = 0;$
$x_1 = 8,63 \notin [1;2]; \quad x_2 = 1,5563.$
Корінь нелінійного рівняння $x^* \approx 1,5563$. Знайдемо оцінку похибки.
$f(x) = \ln x + x - 2;$
$m_1 = \min\limits_{x\in[1;2]} |f'(x)| = \min\limits_{x\in[1;2]} |\frac{1}{x} + 1| = \frac{3}{2};$
$M_3 = \max\limits_{x\in[1;2]} |f'''(x)| = \max\limits_{x\in[1;2]} |\frac{2}{x^3}| = 2;$

$$|x - 1,5563| \leqslant \frac{M_3|(1,5563 - x_0)(1,5563 - x_1)(1,5563 - x_2)|}{m_1 3!} =$$
$$= \frac{2\cdot 2}{3\cdot 6}\big|(1,5563 - 1)(1,5563 - 1.5)(1,5563 - 2)\big| \approx 0,0031.$$

Отже, корінь рівняння дорівнює 1,5563 з точністю 0,0031.

Розв'язок 2. Розв'яжемо задачу іншим способом. Оскільки $f(x)$ – монотонна, то можна застосувати обернену інтерполяцію, поміняємо місцями x та y. Отримаємо таку таблицю розділених різниць:

k	y_k	x_k	р.р. I п.	р.р. II п.
0	-1	$\boxed{1}$		
			$\boxed{0,5522}$	
1	-0,0945	1.5		$\boxed{0,0488}$
			0,6348	
2	0,6931	2		

$L_2(y) = 1 + 0,5522(y-1) + 0,0488(y-1)(y-1.5) = 0,0488y^2+$
$+0,6056y + 1,5568.$

Необхідно знайти x^*, для якого $y^* = 0$:

$L_2(0) = 0,0488 \cdot 0^2 + 0,6056 \cdot 0 + 1,5568 = 1,5568.$

Отже, корінь нелінійного рівняння $x^* \approx 1,5568$. Знайдемо оцінку похибки, для чого знайдемо $\widetilde{M}_3$ (максимум третьої похідної оберненої функції).

$$\widetilde{f}'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+1/x} = \frac{x}{x+1};$$

$$\widetilde{f}''(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}\times$$
$$\times\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x}{(1+x^3)};$$

$$\widetilde{f}'''(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right) = \frac{x}{x+1}\cdot\left(\frac{x}{(1+x^3)}\right)' = \frac{x-2x^2}{(1+x)^5} = g(x).$$

Для знаходження максимума знайдемо екстремуми:

$$g'(x) = \frac{1-8x+6x^2}{(1+x)^6} = 0; \quad x_1 = 1,1937;\ x_2 = 0,1396 \notin [1;2];$$

$$\left.\begin{array}{l} g(1,1937) = -0,0326 \\ g(1) = -0,03125 \\ g(2) = -0,0247 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \widetilde{M}_3 = 0,0326;$$

$$|x - 1,5568| \leqslant \frac{\widetilde{M}_3}{3!}|\omega(y^*)| = \frac{0,0326}{6}|(0+1)(0+0,0945)\times$$
$$\times(0-0,6931)| \approx 0,00036.$$

Отже, корінь рівняння дорівнює 1,5568 з точністю 0,00036.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Визначити степінь інтерполяційного многочлена для функції, заданої таблично $x_0 = 0$; $y_0 = 5,2$; $x_1 = 1$; $y_1 = 8$; $x_2 = 2$; $y_2 = 10,4$; $x_3 = 3$; $y_3 = 12,4$; $x_4 = 4$; $y_4 = 14$; $x_5 = 5$; $y_5 = 15,2$.

2. За допомогою інтерполяції знайти суму скінченого ряду чисел: $S(n) = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots + 2n$.

3. За допомогою інтерполяції знайти суму скінченого ряду чисел: $S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + n^2$.

4. Побудувати інтерполяційний многочлен у формі Лагранжа, наближено обчислити значення функції $y = \sin(\pi x)$ при $x = 1/3$ та оцінити похибку. Для побудови використати три вузла $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/2$.

5. Побудувати інтерполяційний многочлен у формі Лагранжа, наближено обчислити значення функції $y = \cos(\pi x)$ при $x = 1/3$ та оцінити похибку. Для побудови використати три вузла $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

6. За допомогою інтерполяції (Ньютона) обчислити $e^{0,15}$ та оцінити похибку, якщо

x	0	0,1	0,2
y	1	1,10517	1,22140

7. За допомогою інтерполяції (Лагранжа) обчислити $e^{0,15}$ та оцінити похибку, якщо

x	0	0,1	0,2
y	1	1,10517	1,22140

8. Яка точність обчислення значення $\ln 100,5$ за допомогою інтерполяції за відомими значення $\ln 100$, $\ln 101$, $\ln 102$, $\ln 103$, $\ln 104$.

9. Оцінити похибку інтерполяції функції $f(x) = \ln x$ на проміжку $[1; 2]$ многочленом 4го степеня, побудованим за вузлами Чебишова.

10. Оцінити похибку інтерполяції функції $f(x) = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi/3]$ многочленом 3-го степеня, побудованим за вузлами Чебишова.

11. Скільки чебишовських вузлів інтерполяції необхідно вибрати, щоб похибка інтерполяції для функції $f(x) = e^x$ на проміжку [-1; 0] не перевищувала $\varepsilon = 10^{-4}$.

12. Скільки чебишовських вузлів інтерполяції необхідно вибрати, щоб похибка інтерполяції для функції $f(x) = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ не перевищувала $\varepsilon = 10^{-4}$.

13. Побудувати інтерполяційний многочлен Ерміта, який задовольняє умовам: $x_0 = 0$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 1$, $x_1 = 1$, $f(1) = 0$, $x_2 = 2$, $f(2) = 1$, $f'(2) = 2$, $f''(2) = 1$, $x_3 = 3$, $f(3) = 5$.

14. Побудувати поліном, який інтерполює функцію, задану таблично: $x_0 = 0$; $y_0 = -1$; $y'_0 = 1$; $x_1 = 1$; $y_1 = 0$; $y'_1 = 2$; $y''_1 = 2$; $y'''_1 = -6$.

15. Функція задається таблично: $x_0 = 0$; $y_0 = 4$; $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; $x_2 = 3$; $y_2 = 3$. Знайти значення функції в точці $y = 2$.

16. За допомогою інтерполяції знайти наближений розв'язок нелінійного рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ – функція, задана таблично: $x_0 = 2$; $y_0 = 6$; $x_1 = 3$; $y_1 = 4$; $x_2 = 5$; $y_2 = 3$; $x_3 = 7$; $y_3 = -1$; $x_4 = 8$; $y_4 = -3$.

17. За допомогою інтерполяції знайти наближений розв'язок нелінійного рівняння $f(x) = 0$, де $f(x)$ – функція, задана таблично: $x_0 = -1$; $y_0 = 3/4$; $x_1 = 0$; $y_1 = -1/4$; $x_2 = 1$; $y_2 = 3/4$.

18. На проміжку [1; 2] побудувати многочлен Чебишова 3го степеня з коефіцієнтом 1 при старшому степені. Обчислити відхилення від 0.

19. На проміжку [-1; 0] побудувати многочлен Чебишова 3го степеня з коефіцієнтом 1 при старшому степені. Обчислити відхилення від 0.

20. На проміжку [-1; 2] побудувати многочлен Чебишова 2го степеня з коефіцієнтом 1 при старшому степені. Обчислити відхилення від 0.

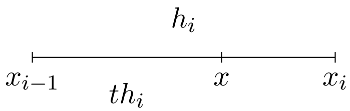
7. Сплайни

Кусково-лінійна інтерполяція

Якщо побудувати поліном першого степеня $L_1^i(x)$ на кожному проміжку $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1;n}$, то отримаємо кусково-лінійну інтерполяцію на $[x_0; x_n]$.
Розглянемо поліном першого степеня за вузлами x_{i-1} та x_i:

$$L_1^i(x) = \frac{f(x_{i-1})(x_i - x) + f(x_i)(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Оцінимо похибку інтерполяції, врахуємо, що:
$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1;n}, \quad M_2^i = \max\limits_{x \in [x_{i-1}; x_i]} |f''(x)|;$



$t \in [0; 1]$

$x - x_{i-1} = th_i;$
$x - x_i = x - (x_{i-1} + h_i) = x - x_{i-1} - h_i = th_i - h_i = h_i(t-1);$
$|f(x) - L_1^i(x)| \leqslant \dfrac{M_2^i}{2!} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| \leqslant \dfrac{M_2^i}{2} \big| th_i h_i (t-1) \big| =$
$= \dfrac{M_2^i}{2} \big| h_i^2 t(t-1) \big| = \dfrac{M_2^i}{2} \big| h_i^2 g(t) \big|.$
Для оцінки зверху знайдемо екстремуми $g(t) = t(t-1)$:
$g'(t) = 2t - 1 = 0; \quad t = \dfrac{1}{2}; \quad g(0) = 0; \quad g(1) = 0; \quad g(\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{4}.$
Врахуємо, що $h = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} h_i$, $M_2 = \max\limits_{x \in [x_0; x_n]} |f''(x)|$, тоді похибка кусково лінійної інтерполяції:
$|f(x) - L_1^i(x)| \leqslant \dfrac{M_2^i}{2!} \big| h_i^2 g(t) \big| \leqslant \dfrac{M_2}{2!} \big| h^2 (-\dfrac{1}{4}) \big| \leqslant \dfrac{M_2 h^2}{8}.$

Отже, для оцінки похибки при наближенні функції за допомогою кусково-лінійної інтерполяції використовують формулу:

$$|f(x) - L_1(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{8}.$$

Введемо систему функцій:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{i-1}; \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i; \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}; \\ 0, & x \geqslant x_{i+1}; \end{cases} \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ 0, & x \geqslant x_1, \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n \\ 0, & x \leqslant x_{n-1} \end{cases}$$

Тоді для кусково-лінійної інтерполяції зручно використовувати формулу:

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x).$$

Теорема. Для $f(x) \in C^2[a,b]$, що задана своїми значеннями $f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$ має місце оцінка:

$$\|f^{(k)}(x) - \Phi_1^{(k)}(x)\|_{C[a,b]} \leqslant 2M_2|h|^{2-k}, \quad k = 0, 1,$$

де $|h| = \max_{i=\overline{1,n}} h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Побудова таблиць

Постановка задачі: потрібно побудувати таблицю значень функції таким чином, щоб похибка при інтерполяції багаточленом степеня n не перевищувала величину ε. Зазвичай такі таблиці будуються, щоб вони дозволяли лінійну чи квадратичну інтерполяцію.

Розглянемо побудову таблиць для лінійної інтерполяції у випадку рівновідалених вузлів. Залишковий член має вигляд:

$$R_1(x) = f''(\xi)h^2\frac{t(t-1)}{2}, \quad x = x_0 + th, \quad |R_1(x)| < \varepsilon,$$

де $\max_{t\in[0,1]} |\dfrac{t(t-1)}{2}|$ досягається при $t = 1/2$ та дорівнює $1/8$.

Таким чином, для побудови таблиці значень функції для лінійної інтерполяції із точністю ε достатньо виконання умови:

$$\max|f''(\xi)|\frac{h^2}{8} \leqslant \varepsilon.$$

Одержимо для h таку оцінку:

$$0 < h \leqslant \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2 h^2}}, \quad M_2 = \max|f''(x)|.$$

Приклад. З яким кроком h потрібно розбити відрізок $[0;1]$, щоб кусково-лінійною інтерполяцією знайти наближене значення функції

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$$

для $x \in [0;1]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язок. За умовою необхідно знайти крок, для цього скористаємося похибкою кусково-лінійної інтерполяції:

$$|f(x) - L_1(x)| \leqslant \frac{M_2h^2}{8} \leqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad h \leqslant \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}}.$$

Для знаходження кроку не вистачає M_2:

$$f''(x) = (\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2})' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}(-2x) = \frac{-4x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2};$$

точки екстремуму:

$$(\frac{-4x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2})' = 0; \quad \frac{-4}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} + \frac{-4x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}(-2x) = 0;$$

$$\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}(-4+8x^2) = 0; \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \notin [0;1]; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$f''(0) = 0;\ f''(1) = \frac{-4}{\sqrt{\pi}}e^{-1} \approx -0,83;\ f''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{-4}{\sqrt{2e\pi}} \approx -0,97;$$

$M_2 = \dfrac{4}{\sqrt{2e\pi}}$.

Знайдемо крок:

$h \leqslant \sqrt{\dfrac{8\varepsilon}{M_2}} = \sqrt{\dfrac{8\cdot 10^{-4}\sqrt{2e\pi}}{4}} \approx 0,029.$

Для зручності покладемо крок $h = 0,025$, тоді
$n = (b-a)/h = (1-0)/0,025 = 40.$

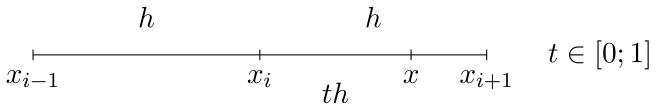
Отже, щоб досягнути заданої точності необхідно розбити відрізок з кроком 0,025 на 40 частин.

Кусково-квадратична інтерполяція

Покладемо сталий крок $h = x_i - x_{i-1}$, $\forall i$: $i = \overline{1,n}$. Якщо побудувати поліном 2-го степеня за вузлами x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, то отримаємо кусково-квадратичну інтерполяцію на $[x_0; x_n]$:

$$L_2^i(x) = f(x_{i-1})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h^2} - f(x_i)\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{h^2} + $$
$$+ f(x_{i+1})\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2h^2}.$$

Оцінимо похибку інтерполяції, врахуємо, що:



$x - x_i = th;\quad x - x_{i-1} = x - (x_i - h) = th + h = h(t+1);$
$x - x_{i+1} = x - (x_i + h) = th - h = h(t-1);$
$M_3^i = \max\limits_{x\in[x_{i-1};x_{i+1}]} |f'''(x)|;\quad M_3 = \max\limits_{x\in[x_0;x_n]} |f'''(x)|;$

$$|f(x) - L_2^i(x)| \leqslant \frac{M_3^i}{3!}|(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})| \quad \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M_3^i}{6}\big|h(t+1)thh(t-1)\big| = \frac{M_3^i}{6}\big|h^3(t^3-t)\big| = \frac{M_3^i}{6}\big|h^3 g(t)\big|.$$

Для оцінки зверху знайдемо екстремуми функції $g(t)$:

$g(t) = t^3 - t$; $g'(t) = 3t^2 - 1 = 0$; $\quad t_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \notin [0;1]$; $t_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

$$g(0) = 0; \quad g(1) = 0; \quad g(\frac{1}{\sqrt{3}}) = (\frac{1}{\sqrt{3}})^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}};$$

Похибка кусково-квадратичної інтерполяції:

$$|f(x) - L_2^i(x)| \leqslant \frac{M_3^i}{6}\left|h^3 g(t)\right| \leqslant \frac{M_3}{6}\left|h^3(-\frac{2}{3\sqrt{3}})\right| \leqslant \frac{M_3}{9\sqrt{3}}h^3;$$

$$|f(x) - L_2(x)| \leqslant \frac{M_3}{9\sqrt{3}}h^3.$$

Кусково-кубічна ермітова інтерполяція

Нехай на деякому проміжку $[a, b]$ задається сітка вузлів: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Функція $f(x)$ задана своїми значеннями $f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0, n}$. Функція $s(x)$ називається ***сплайном степеня*** m ***дефекту*** k якщо:

1) $s(x)$ – поліном степеня m для кожного $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$;
2) $s(x) \in C^{m-k}_{[a;b]}$;
3) $s(x_i) = f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0, n}$.

Нехай функція $f(x) \in C[a, b]$ задана своїми значеннями $f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ у вузлах $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ та значеннями своїх похідних $f'(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Припустимо постановка нашої задачі полягає у побудуві ермітова кубічного сплайну $\Phi_3(x)$, що відповідає інтерполяційним умовам:

$$\Phi_3(x_i) = f(x_i), \;\; \Phi_3'(x_i) = f'(x_i), \;\; i = \overline{0, n}.$$

Для розв'язання цієї задачі, представимо шуканий сплайн у вигляді:

$$\Phi_3(x) = \sum_{i=0}^{n} (y_i \varphi_i^0(x) + y_i' \varphi_i^1(x)).$$

З інтерполяційних умов випливає, що

$$\varphi_i^0(x_j) = \delta_{ij}, \;\; (\varphi_i^0)'(x_j) = 0, \;\; i, j = \overline{0, n},$$

$$\varphi_i^1(x_j) = 0, \;\; (\varphi_i^1)'(x_j) = \delta_{ij}, \;\; i, j = \overline{0, n}$$

Функції $\varphi_i^0(x)$, $\varphi_i^1(x)$ є поліномами 3-го степеня на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, на інших відрізках дорівнюють нулю.

Нехай $h_i = h$. Позначимо $s = \dfrac{x - x_i}{h}$. Тоді маємо, що

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \ \Rightarrow \ s \in [-1, 0],$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}] \ \Rightarrow \ s \in [0, 1].$$

Позначимо $\varphi_1^0(s) = \varphi_i^0(x), \ x \in [x_i, x_{i+1}], \ s \in [0, 1]$. Побудуємо цю функцію. $\varphi_1^0(s)$ відповідає таким інтерполяційним умовам з кратними вузлами:

$$\varphi_1^0(0) = 1, \quad \varphi_1^0(1) = 0, \quad (\varphi_1^0)'(0) = (\varphi_1^0)'(1) = 0.$$

Побудуємо таблицю розділених різниць

s	$\varphi(s)$	р.р.I п.	р.р.II п.	р.р.III п.
0	1			
		0	-1	
0	1			2
		-1	1	
1	0			
		0		
1	0			

Отже, $\varphi_1^0(s) = 1 + 0 \cdot s - 1 \cdot s^2 + 2s^2(s-1) = 2s^3 - 3s^2 + 1$.

Аналогічно до викладеного вище знаходимо:

2) $\varphi_2^0(s) = \varphi_i^0(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad s \in [-1, 0],$

$\varphi_2^0(s) = -2s^3 + 3s^2 + 1;$

3) $\varphi_1^1(s) = \varphi_i^1(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad s \in [0, 1],$

$\varphi_1^1(s) = s(s-1)^2;$

4) $\varphi_2^1(s) = \varphi_i^1(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad s \in [-1, 0],$

$\varphi_2^1(s) = s(s+1)^2.$

Отже,

$$\varphi_i^0(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{i-1}; \\ -2s^3 + 3s^2 + 1, & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i; \\ 2s^3 - 3s^2 + 1, & x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}; \\ 0, & x \geqslant x_{i+1}; \end{cases},$$

$$\varphi_i^1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_{i-1}; \\ s(s+1)^2, & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i; \\ s(s-1)^2, & x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}; \\ 0, & x \geqslant x_{i+1}; \end{cases},$$

де $s = \dfrac{x - x_i}{h}$. Якщо сітка нерівномірна, то в формулах замість h буде h_{i-1} та h_i.

Оцінимо $\|f(x) - \Phi_(x)\|_{C[a,b]}$. Нехай $f(x) \in C^4[a,b]$. Розглянемо $x \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$f(x) - \Phi_3(x) = \frac{f^{(4)}}{4!}(x - x_{i-1})^2(x - x_i)^2.$$

Максимум функції $(x - x_{i-1})^2(x - x_i)^2$ досягається в точці $\overline{x} = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Отже одержимо

$$|f(x) - \Phi_3(x)| \leqslant \frac{M_4}{4!}(\frac{h^2}{4})^2 = \frac{M_4 h^4}{384}.$$

Теорема. Якщо функція $f(x) \in C^4[a,b]$ задана в точках x_i, $i = \overline{0,n}$, своїми значеннями $y_i = f(x_i)$, $y_i' = f'(x_i)$, то для кусково-кубічної ермітової інтерполяції

$$\Phi_3(x) = \sum_{i=0}^{n} (y_i \varphi_i^0 + y_i' \varphi_i^1(x))$$

має місце оцінка

$$\|f(x) - \Phi_3(x)\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{M_4 h^4}{384}, \quad \|f'(x) - \Phi_3'(x)\|_{C[a,b]} \leqslant M M_4 h^3,$$

де M - стала, що не залежить від h.

Інтерполяційний природній кубічний сплайн

Інтерполяційним природнім кубічним сплайном називається поліном, для якого виконуються умови:

1) $s(x)$ – поліном степеня 3 для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$;

2) $s(x) \in C^2_{[a;b]}$;

3) $s(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$;

4) $s''(a) = s''(b) = 0$ – умова природності.

Зауваження. Для побудови інтерполяційного кубічного сплайну можна замість умови 4) використовувати інші умови, але тоді сплайн не буде природнім: $s''(a) = A$; $s''(b) = B$ або $s'(a) = A$; $s'(b) = B$, або умови періодичності: $s(a) = s(b)$, $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$.

Розглянемо формули для побудови інтерполяційного природного кубічного сплайну s_i на проміжку $[x_{i-1}, x_i]$:

$$s_i = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3,$$

де c_i знаходяться з тридіагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$h_i c_{i-1} + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right),$$

$$c_0 = c_n = 0;$$

решта коефіцієнтів знаходяться за формулами:

$$a_i = f_i; \qquad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}; \qquad d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}.$$

Приклад. Визначити, чи є кубічним сплайном функція:

$$s(x) = \begin{cases} 2 - 4x + x^3, & 0 < x \leqslant 1; \\ -1 - (x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3, & 1 < x \leqslant 2; \\ 2(x-2) - (x-2)^3, & 2 < x \leqslant 3; \\ 1 - (x-3) - 3(x-3)^2 + 3(x-3)^3, & 3 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

Якщо так, то визначити дефект та перевірити його природність.

Розв'язок. $s(x)$ – поліноми третього степеня, перевіримо умову неперервно-диференційованості, для цього складемо таблицю значень:

x_i	$s(x_i - 0)$	$s(x_i + 0)$
1	-1	-1
2	0	0
3	1	1

Знайдемо першу похідну і таблицю значень:

$$s'(x) = \begin{cases} -4 + 3x^2, & 0 < x \leqslant 1; \\ -1 + 6(x-1) - 3(x-1)^2, & 1 < x \leqslant 2; \\ 2 - 3(x-2)^2, & 2 < x \leqslant 3; \\ -1 - 6(x-3) + 9(x-3)^2, & 3 < x \leqslant 4; \end{cases}$$

x_i	$s'(x_i - 0)$	$s'(x_i - 0)$
1	-1	-1
2	2	2
3	-1	-1

Знайдемо другу похідну і таблицю значень:

$$s''(x) = \begin{cases} 6x, & 0 < x \leqslant 1; \\ 6 - 6(x-1), & 1 < x \leqslant 2; \\ -6(x-2), & 2 < x \leqslant 3; \\ -6 + 18(x-3), & 3 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

x_i	$s'(x_i - 0)$	$s'(x_i - 0)$
1	6	6
2	0	0
3	-6	-6

$s(x)$ – двічі неперервно-диференційована, $s(x) \in C^2_{[0;3]} \equiv C^{3-1}_{[0;3]}$, значить $k = 1$, дефект сплайна – 1.

Перевіримо умову природності: $s''(a) = s''(b) = 0$.

$s''(x) = 6x, \qquad 0 < x \leqslant 1\ ; \quad s''(0) = 0;$

$s''(x) = -6 + 18(x-3), \qquad 3 < x \leqslant 4; \quad s''(4) \neq 0.$

Отже, $s(x)$ – кубічний сплайн з дефектом 1, але умова природності не виконується.

Приклад. Побудувати кубічний природній сплайн за табличною функцією:

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0,5	2	1,5

Розв'язок. Знайдемо крок: $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, $i = \overline{1,2}$. Знайдемо коефіцієнти c:

$$h_i c_{i-1} + 2c_i(h_i + h_{i+1}) + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right);$$

$c_0 = c_3 = 0;$

$$\begin{cases} h_1c_0 + 2c_1(h_1+h_2) + h_2c_2 = 6(\dfrac{f_2-f_1}{h_2} - \dfrac{f_1-f_0}{h_1}); \\ h_2c_1 + 2c_2(h_2+h_3) + h_3c_3 = 6(\dfrac{f_3-f_2}{h_3} - \dfrac{f_2-f_1}{h_2}); \\ c_0 = c_3 = 0; \end{cases}$$

Підставимо відомі значення:

$$\begin{cases} 4c_1 + c_2 = 6(2-0,5-(0,5-0)) = 6; \\ c_1 + 4c_2 = 6(1,5-2-(2-0,5)) = -12; \end{cases}$$

$c_1 = 2,4; \qquad c_2 = -3,6.$

Знайдемо інші коефіцієнти:

$d_i = \dfrac{c_i - c_{i-1}}{h_i};$

$d_1 = c_1 - c_0 = 2,4 - 0 = 2,4;$

$d_2 = c_2 - c_1 = -3,6 - 2,4 = -6;$

$d_3 = c_3 - c_2 = 0 - (-3,6) = 3,6;$

$b_i = \dfrac{h_i}{2}c_i - \dfrac{h_i^2}{6}d_i + \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_i};$

$b_1 = \dfrac{c_1}{2} - \dfrac{d_1}{6} + f_1 - f_0 = \dfrac{2,4}{2} - \dfrac{2,4}{6} + 0,5 - 0 = 1,3\ ;$

$b_2 = \dfrac{c_2}{2} - \dfrac{d_2}{6} + f_2 - f_1 = \dfrac{-3,6}{2} - \dfrac{-6}{6} + 2 - 0,5 = 0,7;$

$b_3 = \dfrac{c_3}{3} - \dfrac{d_3}{6} + f_3 - f_2 = \dfrac{0}{2} - \dfrac{3,6}{6} + 1,5 - 2 = -1,1;$

$a_i = f_i; \qquad a_1 = 0.5; \qquad a_2 = 2; \qquad a_3 = 1,5.$

i	x_i	y_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0	0				
1	1	0,5	0,5	1,3	2,4	2,4
2	2	2	2	0,7	-3,6	-6
3	3	1,5	1,5	-1,1	0	3,6

За отриманими значеннями побудуємо сплайни:

$s_i = a_i + b_i(x - x_i) + \dfrac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \dfrac{d_i}{6}(x - x_i)^3;$

$s_1 = a_1 + b_1(x - x_1) + \dfrac{c_1}{2}(x - x_1)^2 + \dfrac{d_1}{6}(x - x_1)^3 = 0,5 + 1,3 \times$

$\times (x-1) + \dfrac{2,4}{2}(x-1)^2 + \dfrac{2,4}{6}(x-1)^3 = 0,1x + 0,4x^3;$

$$s_2 = a_2 + b_2(x - x_2) + \frac{c_2}{2}(x - x_2)^2 + \frac{d_2}{6}(x - x_2)^3 = 2 + 0,7\times$$
$$\times(x-2) + \frac{-3,6}{2}(x-2)^2 + \frac{-6}{6}(x-2)^3 = 1,4 - 4,1x + 4,2x^2 - x^3;$$
$$s_3 = a_3 + b_3(x - x_3) + \frac{c_3}{2}(x - x_3)^2 + \frac{d_3}{6}(x - x_3)^3 = 1,5 - 1,1\times$$
$$\times(x-3) + \frac{0}{2}(x-3)^2 + \frac{3,6}{6}(x-3)^3 = -11,4 + 15,1x - 5,4x^2 + 0,6x^3.$$

Отже, отримали сплайн:

$$s(x) = \begin{cases} 0,1x + 0,4x^3, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1,4 - 4,1x + 4,2x^2 - x^3, & 1 \leqslant x \leqslant 2; \\ -11,4 + 15,1x - 5,4x^2 + 0,6x^3, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. З яким кроком h потрібно розбити відрізок [100; 104], щоб кусковою інтерполяцією першого степеня знайти наближене значення функції $f(x) = \ln x$ з точністю $0,001$?

2. З яким кроком h потрібно розбити відрізок [-1; 1], щоб кусковою-квадратичною інтерполяцією знайти наближене значення функції $f(x) = 3^x$ з точністю $0,001$?

3. Визначити, чи є кубічним сплайном (якщо так, то якого дефекту) функція:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 4x + x^3, \quad x \in [0;1] \\ -1 - (x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3, \quad x \in [1;2] \\ 2(x-2) - (x-2)^3, \quad x \in [2;3]. \end{cases}$$

4. Побудувати кусково-лінійний інтерполяційний поліном для даних, поданих у таблиці. Обчислити значення в точці 0,5.

x_k	-3	0	2
$f(x_k)$	1	-3	2

5. Побудувати інтерполяційний кубічний природний сплайн для даних, поданих у таблиці. Обчислити значення в точці 0,5.

x_k	-2	1	2
$f(x_k)$	1	3	0

8. Чисельне інтегрування

Постановка задачі

Нехай $a \leqslant x_0 < x_1 < ... < x_n \leqslant b$. Задача чисельного інтегрування полягає в знаходженні наближеного значення інтеграла за допомогою **квадратурної формули**:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k), \tag{27}$$

де $f(x)$ – задана функція, а $\rho(x)$ – деякий ваговий множник, x_k, $k = \overline{0,n}$, – **вузли (абсциси)**, а числа c_k – **коефіцієнти** квадратурної формули.

Залишковим членом квадратурної формули будемо називати величину

$$R(f) = \int_a^b \rho(x)f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k).$$

Квадратурна формула має **порядок (степінь) точності p** по кроку h, якщо $R(f) = O(h^p)$, де $h = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} h_i$; $i = \overline{1,n}$; $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Якщо представити інтеграл у вигляді суми N інтегралів, то отримаємо **складену квадратурну формулу**:

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} c_k^{(i)} f(x_k^{(i)}).$$

Алгебраїчним степенем точності квадратурної формули називають найвищий степінь алгебраїчного полінома, для якого квадратурна формула є точною. Тобто, квадратурна формула має алгебраїчний степінь точності m, якщо

$$R(P_i) = 0 \qquad \forall P_i(x), \quad i = \overline{0,m},$$

та $\exists P_{m+1}(x): \quad R(P_{m+1}) \neq 0,$ де P_i – алгебраїчний многочлен степеня i.

Розглянемо квадратурні формули та способи їх побудови:

1) інтерполяційні квадратурні формули;
2) квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності.

Інтерполяційні квадратурні формули

Якщо в якості функції $f(x)$ розглядати інтерполяційний поліном $L_n(x)$:

$$f(x) = L_n(x) + r(x),$$

тоді наближений інтеграл шукається у вигляді:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) \left(L_n(x) + r(x)\right) dx = \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k) + R(f),$$

де з інтерполяційного поліному Лагранжа (25) коефіцієнт знаходиться за формулою:

$$c_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx, \tag{28}$$

а з формули (26) залишковий член квадратурної формули:

$$|R(f)| \leqslant \int_a^b \rho(x) \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)| dx, \tag{29}$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$, $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$.

Приклад. Побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу з $\rho(x) = 1$ за вузлами $a; (3a + b)/4; (a + 3b)/4; b$.
Розв'язок. Позначимо $x_0 = a$, $x_1 = (3a + b)/4$, $x_2 = (a + 3b)/4$, $x_3 = b$. Для зручності обчислень перейдемо до проміжку $[-1; 1]$, скористаємося заміною:

$$t = \frac{2x - (a+b)}{b-a}, \quad dx = \frac{b-a}{2} dt, \quad t \in [-1; 1], \quad x \in [a; b].$$

Маємо $t_0 = -1, \quad t_1 = -1/2, \quad t_2 = 1/2, \quad t_3 = 1,$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f(t) dt.$$

Інтеграл шукаємо у вигляді:
$I \approx c_0 f(a) + c_1 f\left(\dfrac{3a+b}{4}\right) + c_2 f\left(\dfrac{a+3b}{4}\right) + c_3 f(b),$
невідомі коефіцієнти знайдемо з формули (28):

$$c_0 = \frac{b-a}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(x+1/2)(x-1/2)(x-1)}{(-1+1/2)(-1-1/2)(-1-1)}dx = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{9};$$

$$c_1 = \frac{b-a}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(x+1)(x-1/2)(x-1)}{(-1/2+1)(-1/2-1/2)(-1/2-1)}dx = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{8}{9};$$

$$c_2 = \frac{b-a}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(x+1)(x+1/2)(x-1)}{(1/2+1)(1/2+1/2)(1/2-1)}dx = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{8}{9};$$

$$c_3 = \frac{b-a}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(x+1)(x+1/2)(x-1/2)}{(1+1)(1+1/2)(1-1/2)}dx = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{9}.$$

Отже, $I \approx \dfrac{b-a}{18}\left(f(a) + 8f\left(\dfrac{3a+b}{4}\right) + 8f\left(\dfrac{a+3b}{4}\right) + f(b)\right).$

Приклад. Визначити оцінку залишкового члена квадратурної формули інтерполяційного типу, побудованої за вузлами a, $(3a+b)/4$, $(a+3b)/4$, b з ваговим множником $\rho(x) = 1$.
Розв'язок. Скористаємось оцінкою залишкового члена (29):

$$|R(f)| \leqslant \int\limits_{a}^{b}\frac{M_4}{4!}\left|(x-a)(x-\frac{3a+b}{4})(x-\frac{a+3b}{4})(x-b)\right|dx =$$

$$= \frac{b-a}{2}\cdot\frac{M_4}{4!}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4\left|(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-1)\right|dx =$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)^5\frac{M_4}{24}\int\limits_{-1}^{1}\left|(x^2-1)(x^2-\frac{1}{4})\right|dx = \frac{(b-a)^5 M_4}{32\cdot 24}\cdot\frac{1}{15} =$$

$$= \frac{M_4(b-a)^5}{11520}.$$

Отже, $|R(f)| \leqslant \dfrac{M_4(b-a)^5}{11520}.$

Приклад. Визначити алгебраїчний степінь точності квадратурної формули

$$I \approx \frac{b-a}{18}\left(f(a) + 8f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 8f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b)\right).$$

Розв'язок. Квадратурні формули інтерполяційного типу мають алгебраїчний степінь точності принаймні n, в нашому випадку за 4 вузлами можна побудувати інтерполяційний поліном принаймні 3 степеня. Покажемо, що алгебраїчний степінь точності дорівнює принаймні три і перевіримо, чи не є він більшим.

$m = 0; \quad f(x) = P_0 = 1;$

$$\left. \begin{aligned} &I \approx \frac{b-a}{18}(1+8+8+1) = b-a \\ &I = \int_a^b dx = b-a \end{aligned} \right\} \Rightarrow R(P_0) = 0;$$

$m = 1; \quad f(x) = P_1 = x;$

$$\left. \begin{aligned} &I \approx \frac{b-a}{18}\left(a + 8\frac{3a+b}{4} + 8\frac{a+3b}{4} + b\right) = \frac{b^2-a^2}{2} \\ &I = \int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(P_1) = 0;$$

$m = 2; \quad f(x) = P_2 = x^2;$

$$\left. \begin{aligned} &I \approx \frac{b-a}{18}\left(a^2 + 8\left(\frac{3a+b}{4}\right)^2 + 8\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2 + b^2\right) = \\ &= \frac{b^3-a^3}{3} \\ &I = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(P_2) = 0;$$

$m = 3; \quad f(x) = P_3 = x^3;$

$$\left.\begin{aligned}
&I \approx \frac{b-a}{18}\left(a^3 + 8\left(\frac{3a+b}{4}\right)^3 + 8\left(\frac{a+3b}{4}\right)^3 + b^3\right) = \\
&= \frac{b^4-a^4}{4} \\
&I = \int\limits_a^b x^3 dx = \frac{b^4-a^4}{4}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow R(P_3) = 0;$$

$$m = 4; \quad f(x) = P_4 = x^4;$$

$$\left.\begin{aligned}
&I \approx \frac{b-a}{18}\left(a^4 + 8\left(\frac{3a+b}{4}\right)^4 + 8\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 + b^4\right) = \\
&\qquad = \frac{1}{96}\left(19b^5 + ab^4 + 2a^3b^2 - 2a^2b^3 - a^4b - 19a^5\right) \\
&I = \int\limits_a^b x^4 dx = \frac{b^5-a^5}{5}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow R(P_4) \neq 0.$$

Отже, алгебраїчний степінь точності дорівнює трьом.

Формули Ньютона-Котеса

Якщо у формулі (27) вузли $x_k,\ k = \overline{0,n}$, вибрати рівновіддаленими, то отримаємо квадратурну **формулу Ньютона-Котеса**. Оберемо крок $h = (b-a)/n$ та покладемо $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{1, n-1}$, $\rho(x) = 1$.

Зауваження. Оскільки складена формула отримується додаванням інтегралів, а при цьому абсолютні похибки додаються, то степінь точності формули Ньютона-Котеса на одному проміжку на порядок вищий, ніж у її складеного аналогу.

Зауваження. Алгебраїчний степінь точності формули Ньютона-Котеса на одиницю менший порядку точності відповідної складеної формули.

Зупинимося на деяких часткових випадках формули Ньютона-Котеса.

Формула лівих прямокутників на $[a;b]$ має вигляд:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a).$$

Залишковий член квадратурної формули лівих прямокутників має вигляд:

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2}, \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Порядок точності формули лівих прямокутників дорівнює 2.

Складена формула лівих прямокутників має вигляд:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})),$$

тоді її залишковий член:

$$|R(f)| \leqslant \frac{nM_1h^2}{2} = \frac{M_1(b-a)h}{2}.$$

Порядок точності складеної квадратурної формули лівих прямокутників дорівнює 1.

Алгебраїчний степінь точності формули лівих прямокутників дорівнює 0.

Формула правих прямокутників будується аналогічно формулі лівих прямокутників:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(b), \qquad |R(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2}.$$

Складена формула з оцінкою залишкового члена:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)),$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)h}{2}.$$

Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули правих прямокутників, так саме як і лівих, дорівнює 0, порядок точності складеної формули – 1, а формули по одному проміжку – 2.

Формула середніх прямокутників з оцінкою залишкових членів має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right), \qquad |R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24}.$$

Складена формула з оцінкою залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\Big(f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_{\frac{3}{2}}) + ... + f(x_{n-\frac{1}{2}})\Big), \tag{30}$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)h^2}{24}. \tag{31}$$

Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули дорівнює 1. Порядок точності складеної формули середніх прямокутників – 2, а на одному проміжку – 3.

Приклад. Наближено обчислити інтеграл за допомогою формули середніх прямокутників з $n = 4$:

$$I = \int_{-1}^{3} \frac{dx}{2+x}.$$

Розв'язок. Для $n = 4$ складемо таблицю значень.
$h = (b-a)/n = (3+1)/4 = 1$.

k	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
x_k	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x_k)$	1	2/3	1/2	2/5	1/3	2/7	1/4	2/9	1/5

За формулою (30)

$$I \approx 1 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} +\right) \approx 1,5746.$$

Отже, $I \approx 1,5746$.

Формула трапецій з оцінкою залишкових членів має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a), \qquad |R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12}.$$

Тоді складена формула з оцінкою залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+...+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right), \quad (32)$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)h^2}{12}. \quad (33)$$

Алгебраїчний степінь та порядок точності співпадає з формулою середніх прямокутників.

Приклад. Обчислити інтеграл за допомогою формули трапецій з точністю $\varepsilon = 0,25$, використавши оцінку залишкових членів

$$I = \int_{-1}^{3} \frac{dx}{2+x}.$$

Розв'язок. З формули (33):

$$h \leqslant \sqrt{\frac{12\varepsilon}{M_2(b-a)}},$$

знайдемо значення M_2 та отримаємо оцінку для кроку:

$$M_2 = \max_{x\in[-1;3]}\left|\frac{2}{(2+x)^3}\right| = 2; \qquad h \leqslant \sqrt{\frac{12\cdot 0,25}{2(3+1)}} \approx 0,6124.$$

Для зручності обчислень покладемо $h = 0,5$ і складемо таблицю значень:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x_k)$	1	2/3	1/2	2/5	1/3	2/7	1/4	2/9	1/5

За формулою (32)

$$I \approx 0,5\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{1}{10}\right) \approx 1,629.$$

Формула Сімпсона ще має назву формули парабол:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right),$$

оцінка залишкового члена

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{2880}.$$

Складена формула Сімпсона з оцінкою залишкового члена має вигляд:

$$I \approx \frac{h}{6}\left(f(x_0)+4\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)\right), \qquad (34)$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)h^4}{2880}.$$

Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули дорівнює 3. Порядок точності складеної формули – 4, а по одному проміжку – 5.

Зауваження. Інколи, при застосуванні складеної квадратурної формули Сімпсона, для зручності використовують цілу нумерацію вузлів:

$$I \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})+f(x_n)\right), \quad (35)$$

Похибка при цьому має вигляд

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)h^4}{180}.$$

Правило Рунге

Величина похибки чисельного інтегрування залежить від кроку h та від гладкості підінтегральної функції $f(x)$. Наприклад, величина M_i, яка є складовою оцінки залишкових членів, може сильно змінюватись від точки до точки та невідома заздалегідь. Якщо величина похибки велика, то її можна зменшити за рахунок зменшення кроку, але для цього необхідно вміти оцінювати похибку апостеріорно, наприклад, методом Рунге.

Нехай I_h та $I_{h/2}$ – інтеграли, обчислені з кроком h та $h/2$ відповідно, за допомогою складеної квадратурної формули, яка має порядок точності p, тоді апостеріорна оцінка похибки інтеграла $I_{h/2}$ має вигляд:

$$|I - I_{\frac{h}{2}}| \approx \frac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p - 1}. \tag{36}$$

Приклад. Обчислити інтеграл за формулою Сімпсона, використавши правило Рунге з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$

$$I = \int\limits_1^3 \ln x dx.$$

Розв'язок. Покладем $n = 2$, тоді $h = (b-a)/n = (3-1)/2 = 1$. Скористаємось формулою (35):

$I_h \approx \dfrac{1}{3}\Big(\ln 1 + 4\ln 2 + \ln 3\Big) \approx 1,29040.$

Обчислимо з двічі меншим кроком $0,5$:

$I_{\frac{h}{2}} \approx \dfrac{0,5}{3}\Big(\ln 1 + 4(\ln 1,5 + \ln 2,5) + 2\ln 2 + \ln 3\Big) \approx 1,29532.$

За формулою (36) обчислимо точність останнього знайденого інтеграла, врахуємо, що порядок точності складеної квадратурної формули Сімпсона дорівнює 4:

$|I - I_{\frac{h}{2}}| \leqslant \dfrac{|1,29040 - 1,29532|}{2^4 - 1} \approx 0,00033 > \varepsilon,$

тому обчислимо з кроком $0,25$:

$I_{\frac{h}{4}} \approx \dfrac{0,25}{3}\Big(\ln 1+4(\ln 1,25+\ln 1,75+\ln 2,25+\ln 2,75)+2(\ln 1,5+$

$+\ln 2 + \ln 2,5) + \ln 3\Big) \approx 1,29580.$

$|I - I_{\frac{h}{4}}| \leqslant \dfrac{|1,29532 - 1,29580|}{2^4 - 1} \approx 0,000032 \leqslant \varepsilon.$

Отже, $I \approx 1,2958$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу з $\rho(x) = 1$ за вузлами $a; (2a+b)/3; (a+2b)/3; b$. Визначити алгебраїчний степінь точності та оцінку залишкового члена отриманої формули.

2. Побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу на проміжку $[0;1]$ з ваговим множником $\rho(x) = \sqrt{x}$ за вузлами 0 та 1. Визначити оцінку залишкового члена отриманої формули.

3. Визначити алгебраїчний степінь точності квадратурної формули $I \approx \dfrac{\pi}{3}\Big(f(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) + f(0) + f(\dfrac{\sqrt{3}}{2})\Big)$, визначеної на проміжку $[-1;1]$ з ваговим множником $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Знайти наближене значення числа π з трьома правильними значущими цифрами за його інтегральним представленням $\pi = \int\limits_0^1 \dfrac{4}{1+x^2}dx$ за допомогою квадратурних формули середніх прямокутників. Яку кількість значень підінтегральної функції необхідно використати?

5. При $n = 10$ за формулою трапецій наближено обчислити значення сталої Каталана $G = \int\limits_0^1 \dfrac{\arctan x}{x}dx$.

6. Наближено обчислити повний еліптичний інтеграл другого роду $E\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 x dx}$ з точністю 0,05 за формулою середніх прямокутників.

7. На скільки частин необхідно розбити відрізок $[0;1]$, щоб обчислити значення функції Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ при $x = 1$ з похибкою $\varepsilon \leqslant 10^{-6}$ за формулою Сімпсона ?

8. Скільки значень підінтегральної функції необхідно знати, щоб наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_1^2 \dfrac{\ln x}{x}dx$ за формулою трапецій з точністю $\varepsilon = 0,01$.

9. Чисельне диференціювання

Постановка задачі

Нехай $f(t) \in C^n[a,b]$. Постановка задачі: за заданими значеннями функції $f(t)$ в точках $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$ та за заданими x, k знайти $f^{(k)}(x)$, $k \geqslant 1$ та оцінити похибку.

Одна із ідей побудови формул така: якщо функція $\varphi(x)$ наближує функцію $f(x)$ в певному розумінні (це може бути інтерполяційний поліном, сплайн), то при диференціюванні покладають $f^{(k)}(x) \approx \varphi^{(k)}(x)$ у заданій точці x. Формули чисельного диференціювання шукають у вигляді:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j f(x_j),$$

де $x_j \in [a;b]$, $j = \overline{0,n}$.

Для побудови формул наближеного диференціювання можна використовувати різні підходи:
1) застосування інтерполяції;
2) метод невизначених коефіцієнтів.
3) Побудова формул за допомогою розвинення заданої функції в ряди Тейлора.

Для визначення точності формул чисельного диференціювання можна використати:
1) інтерполяцію;
2) ряди Тейлора.

Застосування інтерполяції

Найпростіші формули можна дістати за допомогою інтерполяційних формул. Якщо

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}(x)$$

інтерполяційний поліном Лагранжа для функції $f(x)$, де $l_{i,n}(x) = \dfrac{\omega_{n+1}}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$ – фундаментальний многочлен Лагранжа, то з рівності

$$f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x),$$

для визначення невідомих $c_i, i = \overline{0,n}$ у формулі чисельного диференціювання дістанемо, що $c_i = l_{i,n}^{(k)}(x)$.

Зауважимо, що задача чисельного диференціювання не є коректною в $C[a,b]$, оскільки немає неперервної залежності норми похідної від норми функції. Проілюструємо це на прикладі.

Нехай $f(x) \in C^1[a,b]$ та $\tilde{f}(x) \in C^1[a,b]$ пов'язані між собою співвідношенням

$$\tilde{f}(x) = f(x) + n^{-1} sin(n^2(x-a)),$$

тоді

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |\frac{1}{n} sin(n^2(x-a))| \leqslant \frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty,$$

але

$$\|f'(x) - \tilde{f}'(x)\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |ncos(n^2(x-a))| \leqslant n \to \infty,\ n \to \infty.$$

Похибка формул чисельного диференціювання

Нехай $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, де

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0;x_1) + \cdots +$$

$$+(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})f(x_0;x_1;\ldots;x_n),$$

$$R_n(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)f(x;x_0;x_1;\ldots;x_n),$$

$$f^k(x) = P_n^k(x) + R_n^k(x).$$

Похідна від $R_n(x)$ за допомогою формули Лейбніца зображується так:

$$R_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{(i)}(x;x_0;\ldots;x_n)\omega_{n+1}^{(k-i)}(x),$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

Нехай функція $g(x) \in C^k[a,b]$. Тоді

$$g(x;x+\varepsilon,\ldots,x+q\varepsilon) = \frac{g^{(q)}(x_\varepsilon)}{q!},$$

де $x \leqslant x_\varepsilon \leqslant x + q\varepsilon$. Одержимо

$$g^{(q)} = q! \lim_{\varepsilon \to 0} g(x; x+\varepsilon, \ldots, x+q\varepsilon).$$

Отже за означенням розділеної різниці за кратними вузлами:

$$(f(x; x_0, \ldots; x_n))^{(q)} = q! \lim_{\varepsilon \to 0} f(x; x+\varepsilon, \ldots, x+q\varepsilon; x_0; \ldots; x_n) =$$

$$= q! f(\underbrace{x; \ldots; x}_{q+1}; x_0; \ldots; x_n);$$

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!i!} i! f(x; \ldots; x; x_0; \ldots; x_n) \omega_{n+1}^{(k-i)}(x).$$

Виражаючи розділену різницю за допомогою похідної дістанемо

$$|R^{(k)}(x)| = |f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!(n+i+1)!} \max_{\xi \in [y_1, y_2]} |f^{(n+i+1)}(\xi)| |\omega_{n+1}^{(k-i)}(x)|,$$

де $y_1 = \min(x, x_0, \ldots, x_n)$, $y_2 = \max(x, x_0, \ldots, x_n)$.

Точки підвищеної точності

Розглянемо розміщення вузлів, при якому $x_i - x_{i-1} = O(h)$, $i = \overline{1, n}$. Сітка вузлів згущається, якщо $h \to 0$. При фіксованому n величина $\omega_{n+1}^{(j)}(x)$ є сумою добутків, у кожному з яких $n+1-j$ множників порядку $O(h)$ кожен, а тому $\omega_{n+1}^{(j)}(x) = O(h^{n+1-j})$. Отже, дістанемо, що

$$R_n^{(k)}(x) = f(x; x_0; \ldots; x_n) \omega_{n+1}^{(k)}(x) + O(h^{n+2-k}) = O(h^{n+1-k}).$$

Якщо точка x така, що $\omega_{n+1}^{(k)}(x) = 0$, то порядок точності формули чисельного диференціювання збільшується на одиницю. Тому точки, в яких $\omega_{n+1}^{(k)}(x) = 0$, називають точками підвищеної точності.

Запишемо найпростіші формули чисельного диференціювання, що знайдені за допомогою інтерполяціного полінома

Ньютона:
$f'(x) \approx f(x_0;x_1) = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$,

$f''(x) \quad \approx \quad 2f(x_0;x_1;x_2) \quad = \quad 2\dfrac{f(x_1;x_2)-f(x_0;x_1)}{x_2-x_0} \quad =$
$= \dfrac{2}{x_2-x_0}\Big(\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\Big)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f^{(k)}(x) \approx k!f(x_0;x_1;\ldots;x_k) = k!\sum_{i=0}^{k} f(x_i)\prod_{j=0 j\neq i}^{k}(x_i-x_j)^{-1}$.

Неважко помітити, що мінімальна кількість вузлів, необхідна для обчислення k похідної, є $k+1$. Оскільки залишковий член $R_n^{(k)}(x)$ – це многочлен виду $\sum\prod(x-x_i)$ степеня $n+k-1$ відносно x, то кількість точок підвищення точності дорівнює $n+k-1$. В одночленній формулі для k похідної точка підвищеної точності визначається із умови

$$\sum_{i=0}^{k}(x-x_i) = 0,$$

звідки

$$x_i^{(1,k)} = \frac{x_0+\cdots+x_k}{k+1}.$$

У цій точці на рівномірній сітці з кроком h або на нерівномірній сітці такій, що $x_i - x_{i-1} = O(h)$ одночленна формула має похібку порядку $O(h^2)$ замість $O(h)$.

Якщо $p = n+1-k > 2$, то знайти точки підвищеної точності складно, за винятком окремого випадку, про який йдеться у теоремі.

Теорема. Нехай $p = n+1-k$ – парне, а вузли в формулі чисельного диференціювання обрано так, що вони розміщені симетрично відносно точки x. Тоді x є однією із точок підвищеної точності.

Приклад. Побудувати формулу чисельного диференціювання для першої похідної в середній точці за трьома рівновіддаленими вузлами. Оцінити точність. Визначити точки підвищеної точності для цієї формули.

Розв'язок. Позначимо точки x_0, x_1, x_2; оскільки крок сталий, то $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$. Необхідно знайти $f'(x_1)$.
Для побудови використаємо інтерполяцію: $f'(x_1) \approx P_2'(x_1)$. За 3 вузлами можна побудувати поліном максимум 2 степеня. Побудуємо інтерполяційний поліном у формі Ньютона, знайдемо розділені різниці:
$f(x_0, x_1) = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{f_1 - f_0}{h}$;
$f(x_0, x_1, x_2) = \dfrac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \left(\dfrac{f_2 - f_1}{h} - \dfrac{f_1 - f_0}{h}\right) \div$
$\div 2h = \dfrac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}$;
$P_2(x) = f_0 + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) =$
$= f_0 + \dfrac{f_1 - f_0}{h}(x - x_0) + \dfrac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)$;
$P_2'(x) = \dfrac{f_1 - f_0}{h} + \dfrac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}\,((x - x_1) + (x - x_0))$;
$P_2'(x_1) = \dfrac{f_1 - f_0}{h} + \dfrac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}\,((x_1 - x_1) + (x_1 - x_0)) =$
$= \dfrac{f_1 - f_0}{h} + \dfrac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h} = \dfrac{f_2 - f_0}{2h}$.

Знайдемо точність побудованої формули. Для цього знайдемо похідну від похибки інтерполяції:
$|f'(x) - L_2'(x)| = |f(x_0, x_1, x_2, x)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|' \leqslant$
$\leqslant \dfrac{M_4}{4!}|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| + \dfrac{M_3}{3!}|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|' =$
$= \dfrac{M_4}{4!}|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| + \dfrac{M_3}{3!}|(x - x_1)(x - x_2) +$
$+ (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)| = r_1 + r_2$.
r_1 має точність $O(h^3)$, а r_2 – $O(h^2)$, загальна точність – $O(h^2)$.
Для оцінки похибки в x_1 використаємо більший доданок r_2:
$|f'(x_1) - L_2'(x_1)| \leqslant \dfrac{M_3}{3!}|(x_1 - x_1)(x_1 - x_2) + (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) +$
$+ (x_1 - x_0)(x_1 - x_1)| = \dfrac{M_3}{3!}|0 + h(-h) + 0| = \dfrac{M_3}{6}h^2$.

Точки підвищеної точності це точки, в яких похибка буде менша за знайдену, це можливо лише коли другий доданок похибки дорівнює нулю (тоді похибка буде $O(h^3)$):
$\dfrac{M_3}{3!}|(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_1)|=0.$
Для зручності скористаємося заміною:
$x-x_1=sh;$
$x-x_0=x-(x_1-h)=sh+h=h(s+1);$
$x-x_2=x-(x_1+h)=sh-h=h(s-1);$
Зробимо заміни в r_2:
$\dfrac{M_3}{3!}|shh(s-1)+h(s+1)h(s-1)+h(s+1)sh|=\dfrac{M_3}{6}h^2|3s^2-1|=0;$
$s=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}};\quad x-x_1=sh;\quad \overline{x}=x_1\pm\dfrac{h}{\sqrt{3}}.$

Отже, $f'(x_1)=\dfrac{f_2-f_0}{2h}\pm\dfrac{M_3}{6}h^2;\ \overline{x}=x_1\pm\dfrac{h}{\sqrt{3}}.$

Побудова формул чисельного диференціювання за допомогою розвинення в ряди Тейлора

Проілюструємо даний метод на конкретному прикладі.

Приклад. Нехай функція $f(x)\in C^5[a,b]$ задана своїми значеннями в точках x_{i-1}, x_{i+1}, т. т. задано $f(x_{i-1})=f_{i-1}$, $f(x_{i+1})=f_{i+1}$. Побудувати формулу чисельного диференціювання для знаходження $f'(x_i)=f_i$ та знайти порядок апроксимації.

Розв'язок. Для побудови формули чисельного диференціювання розкладемо задані значення функції в околі точки, в якій потрібно знайти похідну. Нехай $x_{i+1}-x_i=x_i-x_{i+1}=h=cost$. Маємо

$$f(x_{i+1})=f_i+hf_i'+\frac{h^2}{2!}f_i''+\frac{h^3}{3!}f_i^{(3)}+\frac{h^4}{4!}f_i^{(4)}+O(h^5);$$

$$f(x_{i-1})=f_i-hf_)'+\frac{h^2}{2!}f_i''-\frac{h^3}{3!}f_i^{(3)}+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}i)+O(h^5).$$

Складаємо лінійну комбінацію останніх виразів таким чином, щоб одержати $f'(x_i)$ за допомогою заданих значень. Маємо

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2hf'(x_i) + 2\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + O(h^5);$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_i) + O(h^4).$$

Отже $f'(x_i) \approx \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$. Порядок апроксимації $p = 2$.

Приклад. Знайти оцінку точності за допомогою формули Тейлора для формули чисельного диференціювання, побудованої за вузлами x_0, x_1, x_2:

$$f'(x_1) \approx \frac{f_2 - f_0}{2h}.$$

Розв'язок. Для знаходження похибки віднімемо наближене значення від точного, але спочатку розкладемо в ряди Тейлора значення f_0 та f_2 в околі x_1:

$$f(x) = f_1 + \frac{(x - x_1)}{1!}f_1' + \frac{(x - x_1)^2}{2!}f_1'' + \frac{(x - x_1)^3}{3!}f'''(\xi);$$

$$f(x_0) = f_1 + (x_0 - x_1)f_1' + \frac{(x_0 - x_1)^2}{2}f_1'' + \frac{(x_0 - x_1)^3}{6}f'''(\xi_1) =$$

$$= f_1 - hf_1' + \frac{h^2}{2}f_1'' - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in [x_0; x_1];$$

$$f(x_2) = f_1 + (x_2 - x_1)f_1' + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2}f_1'' + \frac{(x_2 - x_1)^3}{6}f'''(\xi_2) = f_1 +$$

$$+ hf_1' + \frac{h^2}{2}f_1'' + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in [x_1; x_2];$$

$$f'(x_1) - \frac{f_2 - f_0}{2h} = f_1' - \frac{1}{2h}\Big(f_1 + hf_1' + \frac{h^2}{2}f_1'' + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2) - \big(f_1 -$$

$$- hf_1' + \frac{h^2}{2}f_1'' - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1)\big)\Big) = -\frac{h^2}{6}\Big(\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}\Big) =$$

$$= -\frac{h^2}{6}f'''(\xi), \quad \xi \in (x_0; x_2).$$

Позначимо $M_3 = \max\limits_{x \in [x_0; x_2]} |f'''(x)| \leqslant f'''(\xi), \quad \xi \in (x_0; x_2)$.

Отже, $\left| f'(x_1) - \dfrac{f_2 - f_0}{2h} \right| \leqslant \dfrac{M_3}{6}h^2.$

Метод невизначених коефіцієнтів

Найчастіше цей метод застосовують в багатовимірних випадках, коли інтерполяційний поліном не завжди можна записати.

Функція $f(x)$ задана своїми значеннями $f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$. Похідну $f^{(k)}(x)$ шукаємо у вигляді

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i),$$

де c_i – невідомі сталі і вони обираються таким чином, щоб побудована формула була точною для багаточлена максимально високого степеня.

Нехай

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_i x^j.$$

Будемо вимагати, щоб формула чисельного диференціювання була точною для даного багаточлена. Отже,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j (x^j)^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} c_i \left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j \right).$$

Для того, щоб рівність виконувалась для будь-якого багаточлена степеня m, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти в правій та лівій частині при a_j були рівними. Оскільки

$$(x^j)^{(k)} = j(j-1)\cdots(j-k-1)x^{j-k},$$

то одержимо систему лінійних рівнянь відносно невідомих c_i

$$j(j-1)\cdots(j-k-1)x^{j-k} = \sum_{i=0}^{m} c_i x_i^j$$

x – точка, в якій обчислюємо k похідну. Якщо $m = n$, то число рівнянь дорівнює числу невідомих, визначник системи – визначник Вандермонда, тому він не дорівнює нулю. Таким чином, завжди можна побудувати формулу чисельного диференціювання з $n + 1$ вузлом, що є точною для багаточлена степеня n.

Відмітимо, що при симетричному відносно x розташуванні вузлів, k парному, n – непарному та k непарному, n – парному формула чисельного диференціювання буде точною для поліномів на одиницю більшого степеня.

Приклад Нехай функція $f(x)$ задана своїми значеннями $f(-h),\ f(0),\ f(h)$. Побудувати формулу чисельного диференціювання для обчислення $f'(0)$, що є точною для багаточленів другого степеня.

Розв'язок. Формулу чисельного диференціювання шукаємо у вигляді

$$f'(0) \approx c_1 f(-h) + c_2 f(0) + c_3 f(h)$$

Складемо систему рівнянь. Нехай $f(x) = 1$ – поліномі нульового степеня. Підставимо дану функцію у шукану формулу. Одержимо

$$0 = c_1 + c_2 + c_3.$$

Нехай $f(x) = x$ - поліномі першого степеня. Підставимо дану функцію у шукану формулу. Одержимо

$$1 = c_1(-h) + c_2 \cdot 0 + c_3(h).$$

Нехай $f(x) = x^2$ – поліномі другого степеня. Підставимо дану функцію у шукану формулу. Одержимо

$$0 = c_1(-h)^2 + c_2 \cdot 0^2 + c_3(h)^{\cdot}$$

Маємо систему:

$$0 = c_1 + c_2 + c_3,$$

$$1 = c_1(-h) + c_2 \cdot 0 + c_3(h),$$

$$0 = c_1(-h)^2 + c_2 \cdot 0^2 + c_3(h)^{\cdot}$$

Розв'язавши її, дістанемо

$$c_1 = -\frac{1}{2h},\ c_2 = 0,\ c_3 = \frac{1}{2h}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти у шукану формулу та отримаємо

$$f'(0) \approx \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$$

Приклад. Нехай функція $f(x)$ задана своїми значеннями $f(-h)$, $f(0)$, $f(h)$. Побудувати формулу для обчислення $f''(0)$, що є точною для багаточленів другого степеня.
Розв'язок. Формулу чисельного диференціювання шукаємо у вигляді

$$f''(0) \approx c_1 f(-h) + c_2 f(0) + c_3 f(h)$$

Складемо систему рівнянь. Нехай $f(x) = 1$ - поліномі нульового степеня. Підставимо дану функцію у шукану формулу. Одержимо

$$0 = c_1 + c_2 + c_3.$$

Нехай $f(x) = x$ - поліномі першого степеня. Підставимо дану функцію у шукану формулу. Одержимо

$$0 = c_1(-h) + c_2 \cdot 0 + c_3(h).$$

Нехай $f(x) = x^2$ - поліномі другого степеня. Підставимо дану функцію у шукану формулу. Одержимо

$$2 = c_1(-h)^2 + c_2 \cdot 0^2 + c_3(h)^{\cdot}$$

Маємо систему:

$$0 = c_1 + c_2 + c_3,$$

$$0 = c_1(-h) + c_2 \cdot 0 + c_3(h),$$

$$2 = c_1(-h)^2 + c_2 \cdot 0^2 + c_3(h)^{\cdot}$$

Розв'язавши її, дістанемо

$$c_1 = \frac{1}{h^2},\ c_2 = -\frac{2}{h^2},\ c_3 = \frac{1}{h^2}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти у шукану формулу та отримаємо

$$f''(0) \approx \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}$$

Приклад. За допомогою методу невизначених коефіцієнтів побудувати формулу чисельного диференціювання для першої похідної в середній точці за трьома вузлами 0, h, $2h$.
Розв'язок. Позначимо $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$, тоді формулу шукаємо у вигляді: $f'(h) = c_0 f(0) + c_1 f(h) + c_2 f(2h)$.

З іншого боку знайдемо $f'(h) \approx P_2'(h)$, де $P_2(x)$ – інтерполяційний поліном, побудований за вузлами $0; h; 2h$:
$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$; $P_2'(x) = a_1 + 2a_2 x$; $P_2'(h) = a_1 + 2a_2 h$.
Прирівняємо $f'(h)$ до $P_2'(h)$:
$c_0 f(0) + c_1 f(h) + c_2 f(2h) = a_1 + 2a_2 h$.
Врахуємо також, що $f(x) \approx P_2(x)$, тому
$f(0) \approx P_2(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = a_0$;
$f(h) \approx P_2(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2$;
$f(2h) \approx P_2(2h) = a_0 + a_1 2h + a_2 (2h)^2$;
$c_0 a_0 + c_1(a_0 + a_1 h + a_2 h^2) + c_2(a_0 + a_1 2h + a_2 (2h)^2) = a_1 + 2a_2 h$.
Збираємо коефіцієнти при a_0, a_1, a_2:
a_0: $\quad c_0 + c_1 + c_2 = 0$;
a_1: $\quad c_1 h + c_2 2h = 1$;
a_2: $\quad c_1 h^2 + c_2 (2h)^2 = 2h$.
Розв'язавши систему нелінійних рівнянь, знаходимо:
$c_0 = -1/2h, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1/2h$.
$$f'(h) = -\frac{1}{2h} f(0) + 0 \cdot f(h) + \frac{1}{2h} f(2h) = \frac{f(2h) - f(0)}{2h}.$$

Отже, $f'(h) = \dfrac{f(2h) - f(0)}{2h}$.

Апостеріорні оцінки похибки. Метод Рунге-Ромберга

Загальна ідея методу: нехай маємо деяку наближену формулу $\zeta(x, h)$ для обчислення величини $z(x)$ за її значеннями на рівномірній сітці з кроком h. Залишковий член цієї формули визначається за формулою:
$$z(x) - \zeta(x, h) = \psi(x) h^p + O(h^{p+1}),$$
де $\psi(x) h^p$ – головний член похибки.

Наприклад, $z(x) = f'(x)$, $f(x)$ задана своїми значеннями функція.

Нехай $f(x) \in C^5[a, b]$,
$$\zeta(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f_{\overset{0}{x}}(x),$$

тоді

$$z(x) - \zeta(x,h) = f'(x) - f_{\overset{0}{x}}(x) =$$

$$= f'(x) - \left(\frac{f(x) + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2!}f''(x) + \dfrac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \dfrac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)}{2h} - \right.$$

$$\left. - \frac{f(x) - hf'(x) + \dfrac{h^2}{2!}f''(x) - \dfrac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \dfrac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)}{2h} \right) +$$

$$+O(h^4) = -\frac{h^2}{6}f^{(3)}(x) - \frac{h^4}{60}f^{(5)}(\xi), \quad \xi \in [x-h, x+h].$$

Тут $p = 2$, $\psi(x) = -\dfrac{1}{6}f^{(3)}(x)$. Якщо скористатись тією ж самою наближеною формулою для обчислення $z(x)$, але використовуючи сітку з кроком rh, дістанемо

$$z(x) - \zeta(x,h) = \psi(x)(rh)^p + O((rh)^{p+1}).$$

Віднявши дві похибки одержимо:

$$\zeta(x,h) - \zeta(x,rh) = \psi(x)h^p(r^p - 1) + O(h^{p+1}),$$

$$\psi(x)h^p = \frac{\zeta(x,h) - \zeta(x,rh)}{r^p - 1} + O(h^{p+1}).$$

Отже розрахунок на другій сітці дає змогу оцінити похибки на першій сітці з точністю до членів вищого порядку. Із формули

$$z(x) - \zeta(x,h) = \psi(x)h^p + O(h^{p+1}),$$

отримаємо

$$z(x) = \zeta(x,h) + \psi(x)h^p + O(h^{p+1}).$$

Підставимо знайдене значення $\psi(x)h^p$ і одержимо формулу

$$z(x) = \zeta(x,h) + \frac{\zeta(x,h) - \zeta(x,rh)}{r^p - 1} + O(h^{p+1}),$$

за якою дає результат можна одержати з вищим порядком точності. Таке уточнення називають уточненням за Річардсоном.

Приклад. Нехай функція $y(x) = \lg x$ задана таблицею

x_i	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000
$y = \lg x_i$	0.000	0.301	0.478	0.602	0.699

Обчислити $y'(3.000)$.

Розв'язок. Нехай $h = 1$. Скориставшись формулою для центральної розділеної різниці $\dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f_{\overset{0}{x}}(x)$ дістанемо

$$y'(3.000) = \frac{y(4.000) - y(2.000)}{2 \cdot 1} \approx 0.151.$$

Збільшемо крок вдвічі ($r = 2$), одержимо

$$y'(3.000) = \frac{y(5.000) - y(1.000)}{2 \cdot 2} \approx 0.175.$$

Використовуючи уточнення Річардсона при $p = 2$

$$y'(3.000) \approx 0.143,$$

що на 2 відсотка відрізняється від шуканого значення $y'(3.000) = 0.145$.

Вибір оптимального кроку чисельного диференціювання

Загальна похибка обчислення похідної може розглядатися як сума похибки методу та похибки обчислень. Оскільки із зменшенням кроку h похибка методу зменшується, а похибка обчислень збільшується, то існує оптимальний крок обчислень, при чому для кожної формули чисельного диференціювання він свій.

Приклад. Вибрати крок чотирьохзначної таблиці для функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [0; 1]$, щоб формула

$$f'(x_1) \approx \frac{f_2 - f_0}{2h}$$

давала найменшу похибку. Оцінити цю похибку.

Розв'язок. Оскільки в умові зазначено використання чотирьохзначної таблиці, то похибки значень $\Delta \leqslant 10^{-4}$. Тобто крім

похибки методу (використання формул чисельного диференціювання) необхідно врахувати неусувну похибку (неточні вхідні дані, які будемо позначати $\tilde{f}$). Похибка методу:
$$\left|f'(x_1) - \frac{f_2 - f_0}{2h}\right| \leqslant \frac{M_3}{6}h^2,$$
враховуємо неусувні похибки вхідних даних:
$$\left|f_1' - \frac{\tilde{f}_2 - \tilde{f}_0}{2h}\right| = \left|f_1' - \frac{(f_2 + \Delta_2) - (f_0 + \Delta_0)}{2h}\right| \leqslant \left|f_1' - \frac{f_2 - f_0}{2h}\right| +$$
$$+ \left|\frac{\Delta_2 - \Delta_0}{2h}\right| \leqslant \frac{M_3}{6}h^2 + \frac{2\Delta}{2h} = \varphi(h).$$
Для визначення кроку h, при якому похибка буде найменшою, знайдемо екстремуми $\varphi(h)$:
$$\varphi'(h) = 2h\frac{M_3}{6} - \frac{\Delta}{h^2} = 0; \qquad h^3 = \frac{3\Delta}{M_3}; \qquad h_o = \Big(\frac{3\Delta}{M_3}\Big)^{1/3}.$$
Знайдемо оптимальний крок для $f(x) = \operatorname{arctg} x$:
$$f'''(x) = -\frac{2(1 - 3x^2)}{(1 + x^2)^3};$$
$$M_3 = \max_{x \in [0;1]} |f'''(x)| = \left| -\frac{2(1 - 3 \cdot 0^2)}{(1 + 0^2)^3}\right| = 2;$$
$$h_o = \Big(\frac{3\Delta}{M_3}\Big)^{1/3} = \Big(\frac{3 \cdot 10^{-4}}{2}\Big)^{1/3} = 0,053.$$
Оцінимо похибку диференціювання, якщо буде використовуватися оптимальний крок:
$$\varphi(h_o) = \frac{M_3}{6}h_o^2 + \frac{\Delta}{h_o} = \frac{M_3}{6}\Big(\frac{3\Delta}{M_3}\Big)^{\frac{2}{3}} + \Delta\Big(\frac{M_3}{3\Delta}\Big)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\Big(\frac{\Delta^2 M_3}{3}\Big)^{\frac{1}{3}};$$
$$\varphi(h_o) = \frac{3}{2}\Big(\frac{\Delta^2 M_3}{3}\Big)^{1/3} = \frac{3}{2}\Big(\frac{(10^{-4})^2 2}{3}\Big)^{1/3} = 0,0028.$$

Отже, $h_o = 0,053$, при цьому похибка буде 0,0028.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Побудувати формулу чисельного диференціювання для першої похідної в лівій точці за трьома рівновіддаленими точками. Оцінити точність. Визначити точки підвищеної точності для цієї формули.

2. Побудувати формулу чисельного диференціювання для першої похідної в правій точці за двома рівновіддаленими точками. Оцінити точність. Визначити точки підвищеної точності для цієї формули.

3. Знайти $f'(2h)$ методом невизначених коефіцієнтів для функції, що задана такими значеннями $f(0)$, $f(h)$, $f(2h)$.

4. Знайти $f''(0)$ методом невизначених коефіцієнтів для функції, що задана такими значеннями $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$.

5. Знайти $f'(h)$ методом невизначених коефіцієнтів для функції, що задана такими значеннями $f(0)$, $f(h)$.

6. Знайти оцінку точності за допомогою формули Тейлора для формули чисельного диференціювання $f'(x_2)$, побудованої за вузлами x_0, x_1, x_2.

7. Знайти оцінку точності за допомогою формули Тейлора для формули чисельного диференціювання $f''(x_0)$, побудованої за вузлами x_0, x_1, x_2.

8. Знайти оцінку точності за допомогою формули Тейлора для формули чисельного диференціювання $f'(x_0)$, побудованої за вузлами x_0, x_1.

9. Вибрати крок чотирьохзначної таблиці ($\delta = 10^{-4}$) для функції $f(x) = \ln x$, $x \in [1; 10]$, щоб формула чисельного диференціювання $f''(x_2) \approx \dfrac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2}$ давала найменшу похибку. Оцінити цю похибку.

10. Вибрати крок чотирьохзначної таблиці ($\delta = 10^{-4}$) для функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [0; 1]$, щоб формула чисельного диференціювання $f'(x_0) \approx \dfrac{f_1 - f_0}{h}$ давала найменшу похибку. Оцінити цю похибку.

11. Функція Бесселя задана таблицею

x_i	0.96	0.98	1.00	1.02	1.04
y_i	0.782536	0.773933	0.765198	0.756332	0.747339

Знайти $y'(1)$, якщо відомо, що різницями вище третього порядку можна знехтувати.

10. Наближені методи розв'язання задачі Коші

Постановка задачі

Розглянемо постановку задачі Коші на прикладі звичайного диференційного рівняння першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = f(x,u); \\ u(x_0) = u_0. \end{cases}$$

Розглянемо основні наближені методи розв'язання задачі Коші:

1) чисельні:
   – метод Ейлера,
   – модифікований метод Ейлера,
   – метод Ейлера-Коші,
   – методи Рунге-Кутта.
2) аналітичні:
   – метод послідовного диференціювання,
   – метод послідовних наближень (Пікара);

Нехай h – сталий крок: $x_n = nh$, $n = 0, 1, ...$, тоді для чисельних методів **глобальною похибкою** методу називають

$$z_n = u(x_n) - y_n,$$

де $u(x)$ – точний розв'язок, а $y(x)$ – наближений.

Локальною похибкою чисельного методу називають величину

$$R(h) = u(x_{n+1}) - y_{n+1},$$

за умовою, що $u(x_n) = y_n$.

Порядком точності методу називають число $p > 0$ при $h \to 0$, для якого

$$|u(x_n) - y_n| = O(h^p) \quad \text{або} \quad R(h) = O(h^{p+1}).$$

Нев'язка (похибка апроксимації) $\Psi(h)$ – це похибка при підстановці точного розв'язку в різницеве рівняння.

Метод Ейлера

Для задачі Коші із звичайним диференційним рівнянням першого порядку

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0; \end{cases}$$

можна використати чисельний метод Ейлера:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),$$

який має порядок глобальної похибки та нев'язки – 1, а порядок локальної похибки – 2.

Приклад. Знайти локальну та глобальну похибки методу Ейлера.

Розв'язок. Для знаходження локальної похибки скористаємося її означенням.

$R(h) = u(x_{n+1}) - y_{n+1} = u(x_n + h) - (y_n + hf(x_n, y_n)) = u(x_n) +$
$+ u'(x_n)(x_n + h - x_n) + O(h^2) - u(x_n) - hf(x_n, u(x_n)) = O(h^2).$

Оскільки $R(h) = O(h^2) = O(h^{p+1})$, то $p = 1$, тому глобальна похибка $|u(x_n) - y_n| = O(h^p) = O(h)$.

Отже, локальна похибка методу Ейлера дорівнює $O(h^2)$, а глобальна – $O(h)$.

Приклад. Знайти нев'язку методу Ейлера.

Розв'язок. Для знаходження нев'язки запишемо різницеве рівняння методу Ейлера:

$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n).$

Підставивши в нього точний розв'язок $u(x)$ знайдемо нев'язку:

$\Psi(h) = \dfrac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - f(x_n, u(x_n)) = \dfrac{1}{h}\Big(u(x_n + h) - u(x_n)\Big) -$
$- f\Big(x_n, u(x_n)\Big) = \dfrac{1}{h}\Big(u(x_n) + u'(x_n)h + O(h^2) - u(x_n)\Big) -$
$- f\Big(x_n, u(x_n)\Big) = u'(x_n) - f\Big(x_n, u(x_n)\Big) + O(h) = O(h).$

Отже, нев'язка методу Ейлера – $O(h)$.

Модифікований метод Ейлера

Модифікований метод Ейлера також застосовується для знаходження наближеного чисельного розв'язку звичайного диференційного рівняння першого порядку:

$$x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h}{2}; \qquad y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n);$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+\frac{1}{2}}; y_{n+\frac{1}{2}}).$$

Метод є чисельним, має порядок точності $p = 2$, глобальну похибку та нев'язку $O(h^2)$, локальну похибку – $O(h^3)$.

Приклад. Розв'язати задачу Коші модифікованим методом Ейлера:

$$\begin{cases} y''' = xy + y'y''; \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = 1; \\ y''(1) = 0. \end{cases}$$

Знайти розв'язок $y(x)$ на проміжку $[1; 5]$ з кроком 2.

Розв'язок. Необхідно знайти розв'язок диференційного рівняння третього порядку, зведемо його до системи диференційних рівнянь, щоб можна було застосувати модифікований метод Ейлера.

Зробимо заміну: $\quad u^1 = y; \quad u^2 = y'; \quad u^3 = y''.$

Врахуємо $x_0 = 1$, тому $u_0 = 2$; $u_0' = 2$; $u_0'' = 2$.

$$\begin{cases} y''' = xy + y'y''; \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = 1; \\ y''(1) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} (u^3)' = xu^1 + u^2u^3; \\ u_0^1 = 2; \\ u_0^2 = 1; \\ u_0^3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки задається крок $h = 2$, а $x_0 = 1$, тому $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, необхідно знайти u_1^1, u_2^1.

Для знаходження u_1^1, спочатку знайдемо значення в точці $x_{0.5} = x_0 + h/2 = 1 + 2/2 = 2$:

$u_{0.5}^1 = u_0^1 + (h/2)u_0^2 = 2 + (2/2) \cdot 1 = 3;$

$u_{0.5}^2 = u_0^2 + (h/2)u_0^3 = 1 + (2/2) \cdot 0 = 1;$

$u^3_{0.5} = u^3_0 + (h/2)(x_0 u^1_0 + u^2_0 u^3_0) = 0 + (2/2)(1 \cdot 2 + 1 \cdot 0) = 2;$
$u^1_1 = u^1_0 + h(u^2_{0.5}) = 2 + 2 \cdot 1 = 4.$
Знайдемо u^1_2:
$u^2_1 = u^2_0 + h(u^3_{0.5}) = 1 + 2 \cdot 2 = 5;$
$u^3_1 = u^3_0 + h(x_0 u^1_0 + u^2_0 u^3_0) = 0 + 2(1 \cdot 2 + 1 \cdot 0) = 4;$
$u^2_{1.5} = u^2_1 + \frac{h}{2} u^3_1 = 5 + \frac{2}{2} \cdot 4 = 9;$
$u^1_2 = u^1_1 + h(u^2_{1.5}) = 4 + 2 \cdot 9 = 22.$
Вертаємося до початкових позначень задачі: $u^1_1 = y(3) = 4$, $u^1_2 = y(5) = 22$.

Отже, $y(3) = 4$, $y(5) = 22$.

Метод Ейлера-Коші

Ще одна модифікація методу Ейлера є методом типу "предиктор-коректор":

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n);$$

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n; y_n) + f(x_{n+1}; \tilde{y}_{n+1})}{2}.$$

Метод також є чисельним, має порядок точності $p = 2$, глобальну похибку та нев'язку $O(h^2)$, локальну похибку – $O(h^3)$.

Методи Рунге-Кутта

Методи Рунге-Кутта є m-стадійними (етапними), їх загальний вигляд:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{m} p_i k_i(h)$$

$k_i(h) = hf(\xi_i; \eta_i); \qquad i = \overline{1, m}; \qquad \xi_i = x_n + \alpha_i h; \qquad \alpha_1 = 0;$
$\eta_i = y_n + \beta_{i_1} k_1 + \beta_{i_2} k_2 + ... + \beta_{i_{i-1}} k_{i-1}.$

Для $m = \overline{1, 4}$, якщо крок сталий, то порядок глобальної похибки методу m, а локальної – $(m+1)$. Для $m > 4$ кількість коефіцієнтів із глобальною похибкою не співпадає.

1-етапний метод Рунге-Кутта

Якщо $m = 1$, то метод співпадає із методом Ейлера:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n; y_n).$$

2-етапні методи Рунге-Кутта

В залежності від коефіцієнтів α, β, p двоетапні методи Рунге-Кутта можуть приймати різний вигляд, наприклад:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2;$$

$$k_1 = hf(x_n; y_n); \qquad k_2 = hf(x_n + h; y_n + k_1);$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2;$$

$$k_1 = hf(x_n; y_n); \qquad k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2});$$

3-етапні методи Рунге-Кутта

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3); \qquad k_1 = hf(x_n; y_n);$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2}); \qquad k_3 = hf(x_n + h; y_n - k_1 + 2k_2);$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3); \qquad k_1 = hf(x_n; y_n);$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{3}; y_n + \frac{k_1}{3}); \qquad k_3 = hf(x_n + \frac{2h}{3}; y_n + \frac{2k_2}{3}).$$

4-етапні методи Рунге-Кутта

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$

$$k_1 = hf(x_n; y_n); \qquad k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_1}{2});$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_2}{2}); \qquad k_4 = hf(x_n + h; y_n + k_3);$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4);$$

$$k_1 = hf(x_n; y_n); \qquad k_2 = hf(x_n + \frac{h}{4}; y_n + \frac{k_1}{4});$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}; y_n + \frac{k_2}{2}); \qquad k_4 = hf(x_n + h; y_n + k_1 - 2k_2 + 2k_3).$$

Приклад. За допомогою методу Рунге Кутта 4 порядку точності знайти значення в точці $y(0,1)$, крок $h = 0,1$

$$\begin{cases} y' = x + y; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Четвертий порядок точності мають 4-етапні методи Рунге Кутта.

За умовою $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $h = 0,1$; $y(0,1) = y_1$.

$k_1 = hf(x_0; y_0) = h(x_0 + y_0) = 0.1(0 + 1) = 0,1;$

$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1}{2}) = h(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{k_1}{2}) = 0,1(0 + \frac{0,1}{2} +$
$+1 + \frac{0.1}{2}) = 0,11;$

$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2}{2}) = h(x_0 + \frac{h}{2} + y_0 + \frac{k_2}{2}) = 0,1(0 + \frac{0,1}{2} +$
$+1 + \frac{0,11}{2}) = 0,1105;$

$k_4 = hf(x_0 + h; y_0 + k_3) = h(x_0 + h + y_0 + k_3) = 0,1(0 + 0,1+$
$+1 + 0,1105) = 0,12105;$

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{1}{6}(0,1 + 2 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,1105+$
$+0,12105) = 1,11034.$

Отже, $y(0,1) \approx 1,11034$.

Метод послідовного диференціювання

Для знаходження наближеного розв'язку в аналітичному вигляді використовують метод послідовного диференціювання. Його можна використовувати для диференційних рівнянь довільного порядку.

Розглянемо задачу Коші із звичайним диференційним рівнянням n-го порядку:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}); \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ ...., \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

наближений аналітичний розв'язок шукають у вигляді розкладу у ряд Тейлора:

$$y(x) = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{y_0^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k.$$

Приклад. Знайти перші чотири члени розкладу в степеневий ряд розв'язку рівняння

$$\begin{cases} y'' + 0,1(y')^2 + (1 + 0,1x)y = 0; \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Розв'язок. Застосуємо метод послідовного диференціювання, розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$y(x) = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''_0}{3!}(x - x_0)^3.$$

За умовою $y(0) = 1$ і $y'(0) = 2$, тому $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 2$;

$$y(x) = 1 + 2x + \frac{y''_0}{2!}x^2 + \frac{y'''_0}{3!}x^3.$$

Знайдемо y''_0, врахуємо, що $y''_0 = y''(x_0) = y''(0)$. Оскільки за умовою $y'' + 0,1(y')^2 + (1 + 0,1x)y = 0$, то

$$y'' = -0,1(y')^2 - (1 + 0,1x)y$$

$$y''_0 = -0,1(y'_0)^2 - (1+0,1x_0)y_0 = -0,1\cdot 2^2 - (1+0,1\cdot 0)\cdot 1 = -1,4;$$

Знайдемо y'''_0:

$$y''' = (-0,1(y')^2 - (1+0,1x)y)' = -0,1\cdot 2y'y'' - y' - 0,1y - 0,1xy';$$

$$y'''_0 = -0,1 \cdot 2y'_0y''_0 - y'_0 - 0,1y_0 - 0,1x_0y'_0 = -0,1 \cdot 2 \cdot 2(-1,4) - 2 - 0,1 \cdot 1 - 0.1 \cdot 0 \cdot 2 = -1,54.$$

Підставляємо знайдені значення в ряд Тейлора:

$y(x) = 1 + 2x + \frac{y_0''}{2!}x^2 + \frac{y_0'''}{3!}x^3 = 1 + 2x - \frac{1,4}{2}x^2 - \frac{1,54}{6}x^3 =$
$= 1 + 2x - 0,7x^2 - 0,25x^3.$

Отже, наближений розв'язок: $y(x) = 1+2x-0,7x^2-0,25x^3$.

Метод послідовних наближень (Пікара)

Для задачі Коші із звичайним диференційним рівнянням першого порядку

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(x_0) = y_0; \end{cases}$$

шукається наближений аналітичний розв'язок у вигляді послідовних наближень, для цього проінтегруємо ліву і праву частину рівняння на проміжку $[x_0; x]$, оскільки $x \geqslant x_0$:

$$y_k(x) = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_{k-1})dx;$$

тоді $y_1 = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$; $y_2 = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx$ і так далі.

Приклад. Знайти два послідовні наближення розв'язку системи рівнянь:

$$\begin{cases} y' = xy + yz; \\ z' = xy - z; \\ y(0) = 1; \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. При розв'язанні системи необхідно знаходити послідовні розв'язки спочатку $y(x)$, потім $z(x)$. Позначимо $f_1(x, y, z) = xy + yz$, $f_2(x, y, z) = xy - z$, за умовою $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$.

$y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0)dx = 1 + \int\limits_{0}^{x}(xy_0 + y_0z_0)dx = 1 + \int\limits_{0}^{x} xdx =$
$= 1 + \frac{x^2}{2};$

$$z_1(x) = z_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_2(x, y_0, z_0)dx = 0 + \int\limits_{0}^{x} (xy_0 - z_0)dx = \int\limits_{0}^{x} xdx = \frac{x^2}{2};$$

$$y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, y_1, z_1)dx = 1 + \int\limits_{0}^{x} (xy_1 + y_1 z_1)dx = 1+$$

$$+ \int\limits_{0}^{x} \left(x(1 + \frac{x^2}{2}) + (1 + \frac{x^2}{2})\frac{x^2}{2} \right) dx = 1 + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2};$$

$$z_2(x) = z_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f_2(x, y_1, z_1)dx = 0 + \int\limits_{0}^{x} (xy_1 - z_1)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{x} \left(x(1 + \frac{x^2}{2}) - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}.$$

Отже, $y(x) \approx 1 + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$; $z(x) \approx \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти наближене значення функції в точці y(2) методом Ейлера, $h = 1$

$$\begin{cases} y''' + xy'' - yx^2 - 1 = 0; \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = 3; \\ y''(1) = -1. \end{cases}$$

2. Знайти наближене значення y(2) модифікованим методом Ейлера, $h = 1$

$$\begin{cases} y'' + xy' - 2y - 1 = 0; \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = 3. \end{cases}$$

3. Знайти наближене значення $y(\pi)$ методом Ейлера Коші, $h = \pi$

$$\begin{cases} y'' + y' \cos x - yx - 1 = 0; \\ y(0) = -1; \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

4. Знайти наближене значення $y(1)$ методом Рунге Кутта

2 порядку точності, $h = 1$

$$\begin{cases} y'' - 3y' - yx = 2; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

5. Знайти наближене значення y(2) методом Рунге Кутта 3 порядку точності, $h = 1$

$$\begin{cases} y'' - 5xy - y'x = 0; \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = -2. \end{cases}$$

6. Знайти наближене значення y(0) методом Рунге Кутта 4 порядку точності, $h = 1$

$$\begin{cases} y' - 2xy - 1 = 0; \\ y(-1) = 2; \\ y'(-1) = -2. \end{cases}$$

7. Записати перших 5 членів розкладу в ряд розв'язку за допомогою методу послідовного диференціювання

$$\begin{cases} y''' + xy'' - y^2x^2 - 1 = 0 \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = 3; \\ y''(1) = -1. \end{cases}$$

8. Знайти перші два наближення розв'язку методом Пікара

$$\begin{cases} y'' + xy' - 2y - 1 = 0; \\ y(1) = 2; \\ y'(1) = -3. \end{cases}$$

Список використаної літератури

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 600 с.

2. Буслов В.А., Яковлев С.Л. Численные методы. 1. Исследование функций. — Санкт-Петербург: С-Петерб. гос. ун-т, 2001. — 59 с.

3. Вержбицкий В.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 248 с.

4. Волков Е.А. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 248 с.

5. Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень. — К.: Вища школа, 1995. — 367 с.

6. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. — 664 с.

7. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. Учебное пособие. — М.: Высшая школа, 2000. — 190 с.

8. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.

9. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2008. — 480 с.

10. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1972. — 368с.

11. Методические указания и учебные задания к практикуму по численному интегрированию и методам решения задачи Коши для студентов третьего курса факультета кибернетики / специальность 0647 – прикладная математика / Макаров В.Л., Войцеховский С.А., Гаврилюк И.П. и др. — Киев: КГУ, 1984. — 69 с.

12. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций. — Киев: Наукова думка, 1987. — 288 с.

13. Самарский А.А. Введение в численные методы. — М.: Наука, 1987. — 272 с.

14. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам: учебное пособие. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 208 с.

15. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.

16. Сборник задач по методам вычислений / Азаров А.И., Басик В.А., Кремень Ю.А. и др. — Минск: Изд-во БГУ, 1983. — 287 с.

17. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. — М.: Физматлит, 2003. — 304 с.

18. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. — М.: Физматлит, 2004. — 400 с.

19. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980. — 280 с.

20. Практикум з методів обчислень. Методичні вказівки та навчальні завдання до практичних і лдабораторних робіт/ Москальков М. М., Риженко А. І., Войцеховський С. О., Кузьмін А. В., Кашпур О. Ф., Лужних В. М., Вергунова І. М. — Київ, МАУП, 2006 р. — 79 с.

21. Чисельні методи інтегрування (для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики, ОП "Інформатика") / Голубєва К.М., Денисов С.В., Кашпур О.Ф., Клюшин Д.А., Риженко А.І. — Київ: «Видавництво Людмила», 2019. — 55 с.

ЗМІСТ