Екзаменаційна робота
з математичного аналізу
студента першого курсу
групи ІПС-11
ФКНК КНУ ім. Т. Шевченка
Вербицького Артема Віталійовича

Білет №3

1. $h(x) = sh\,2x$, $x_0 = 0$

Застосуємо розклад в многочлен Маклорена

$$sh\,2x = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \frac{1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}-\left(1-2x+2x^2-\frac{4x^3}{3}\right)+o(x^3)}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{1}+2x+\cancel{2x^2}+\frac{4x^3}{3}-\cancel{1}+2x-\cancel{2x^2}+\frac{4x^3}{3}+o(x^3)}{2} =$$

$$= 2x+\frac{4x^3}{3}+o(x^3)$$

2. $$\int \frac{e^{tg\,t}+ctg\,t}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{e^{tg\,t}+\frac{\cos t}{\sin t}}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int \frac{\frac{\sin t\cdot e^{tg\,t}+\cos t}{\sin t}}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{\sin t\cdot e^{tg\,t}+\cos t}{\sin t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int \frac{\sin t\cdot e^{tg\,t}}{\sin t\cos^2 t}+\frac{\cos t}{\sin t\cos^2 t}\,dt = \int \frac{e^{tg\,t}}{\cos^2 t}+\frac{1}{\sin t\cos t}\,dt =$$

$$= \int \frac{e^{tg\,t}}{\cos^2 t}\,dt + \int \frac{1}{\sin t\cos t}\,dt =$$

$$= e^{tg\,t}+\frac{1}{2}\ln(|\cos 2t-1|)-\ln(\cos t)+C,\ C\in\mathbb{R}$$

Scanned with CamScanner

3. $x^3+y^3=u^3+3xu,\ u=u(x,y),\ (x,y)\in D.$

$3x^2dx+3y^2dy=3u^2du+3du$

$du=\dfrac{3x^2dx+3y^2dy}{3u^2+3}=\dfrac{x^2dx+y^2dy}{u^2+1}$

$u'_x=\dfrac{x^2}{u^2+1},\quad u'_y=\dfrac{y^2}{u^2+1}$

$u''_{xx}=\dfrac{2x}{u^2+1},\quad u''_{yy}=\dfrac{2y}{u^2+1}$

$d^2u=\dfrac{(2x\,dx^2+2y\,dy^2)(u^2+1)-(x^2dx+y^2dy)\,2u\,du}{(u^2+1)^2}.$

4. $u(x,y)=xy+\dfrac{1}{2(x+y)}$

$\begin{cases} f'_x=y-\dfrac{2}{(2x+2y)^2}=0 \\ f'_y=x-\dfrac{2}{(2x+2y)^2}=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$

$P_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ – стаціонарна точка

$\cancel{4x^2y+8}$

$d^2f=f''_{xx}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{yy}dy^2=$

$=\dfrac{8}{(2x+2y)^3}dx^2-\dfrac{96}{(2x+2y)^4}dxdy+\dfrac{8}{(2x+2y)^3}dy^2$

$a_{11}=a_{22}=1>0,\ a_{12}=-3,\ a_{11}a_{22}-a_{12}^2=1-9=-8<0$

$\Rightarrow$ за критерієм Сільвестра у точці $P_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

екстремума немає.

Scanned with CamScanner

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^5 \frac{(3n+2)^n}{(5n+3)^n}$

Використаємо узагальнену радикальну ознаку Коші

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n^5(3n+2)^n}{(5n+3)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5n+3} \cdot \overset{=1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}\to 0}{5+\frac{3}{n}\to 0} = \frac{3}{5} < 1 \Rightarrow \text{ряд збіжний}$$