$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

За аксіомою $\underline{IV}.1$ маємо, що $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

Отже, треба довести $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

1) $\neg q \to \neg p$ – гіпотеза

2) p – гіпотеза

3) $(\neg q \to \neg p) \to ((\neg q \to p) \to q)$ за лемою

4) $p \to (\neg q \to p)$ I.1

5) $(\neg q \to p) \to q$ MP(1,3)

6) $p \to q$ (лема, що $A \to B, B \to C \vdash A \to C$)

7) q MP(2,6)

~~Отже~~ 8) $\neg q \to \neg p, p \vdash q \overset{(TD)}{\Rightarrow} \neg q \to \neg p \vdash p \to q$

$\overset{(TD)}{\Rightarrow} \vdash (\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

Отже, доведено $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

(3) $\{ \forall x ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \to \exists y (R(x,y) \wedge G(y))),$ (1)

$\forall x (S(x) \to \neg Q(x)),$ ~~$\exists x (S(x) \wedge P(x) \wedge \forall x$~~ (2)

$\exists x (S(x) \wedge P(x) \wedge \forall x (R(x,y) \to S(y))) \}$ (=) (3)

(1) $\forall x ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \to \exists y (R(x,y) \wedge G(y))) =$

$= \forall x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists y (R(x,y) \wedge G(y))) =$

$= \forall x (\neg P(x) \vee Q(x) \vee \exists y (R(x,y) \wedge G(y))) =$

$= \forall x \exists y (\neg P(x) \vee Q(x) \vee (R(x,y) \wedge G(y)))$

(2) $\forall x (S(x) \to \neg Q(x)) = \forall x (\neg S(x) \vee \neg Q(x))$

(3) $\exists x (S(x) \wedge P(x) \wedge \forall x (R(x,y) \to S(y))) =$

$= \exists x (S(x) \wedge P(x) \wedge \forall x (\neg R(x,y) \vee S(y))) =$

$= \exists x \forall u (S(x) \wedge P(x) \wedge (\neg R(u,y) \vee S(y)))$

(=) $\forall x \exists y (\neg P(x) \vee Q(x) \vee (R(x,y) \wedge G(y))) \wedge \forall x (\neg S(x)$
$\vee \neg Q(x)) \wedge \exists x \forall u (S(x) \wedge P(x) \wedge (\neg R(u,y) \vee S(y))) =$
$= \forall x \exists y ((\neg P(x) \vee Q(x) \vee R(x,y)) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x) \vee G(y)) \wedge$
$\wedge \forall p (\neg S(p) \vee \neg Q(p)) \wedge \exists d \forall u (S(d) \wedge P(d) \wedge (\neg R(u,y) \vee$
$\vee S(y))) = \forall x \exists y \forall p \exists d \forall u ((\neg P(x) \vee Q(x) \vee R(x,y)) \wedge$
$\wedge (\neg P(x) \vee Q(x) \vee G(y)) \wedge (\neg S(p) \vee \neg Q(p)) \wedge$
$\wedge S(d) \wedge P(d) \wedge (\neg R(u,y) \vee S(y))$ (=)

$y \sim f(x), \quad d \sim g(x,p)$

$\equiv \forall x \forall p \forall u \, ((\neg P(x) \vee Q(x) \vee R(x, f(x))) \wedge (\neg P(x) \vee Q(x) \vee G(f(x))) \wedge (\neg S(p) \vee \neg Q(p)) \wedge S(g(x,p)) \wedge (\neg R(u, a) \vee S(a)))$

Маємо множину диз'юнктів:

$S = \{\neg P(x) \vee Q(x) \vee R(x, f(x)), \neg P(x) \vee Q(x) \vee G(f(x)), \neg S(p) \vee \neg Q(p), S(g(x,p)), P(g(x,p)), \neg R(u,a) \vee S(a)\}$

$E = \{a, f(a), g(a,a), f(f(a)), \dots\}$

1. $\neg P(g(a,a)) \vee Q(a) \vee R(a, f(a))$
2. $P(g(a,a))$
3. $Q(a) \vee R(a, f(a))$ (1, 2)
4. $\neg S(f(a)) \vee \neg Q(a)$
5. $R(a, f(a)) \vee \neg S(f(a))$ (3, 4)
6. $\neg R(a, f(a)) \vee S(f(a))$
7. $\square$ не існує

Отже S – несуперечлива й формула не є тавтологією