

2. Доведемо, що $A, B, C \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$
 $\vdash_{I.1} B \rightarrow (A \rightarrow B) \vdash_{MP} A \rightarrow B$

$\vdash_{I.1} C \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \vdash_{MP} (A \rightarrow B) \rightarrow C$

Отже, $A, B, C \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow C$

3. Довести формулу

$$(q \rightarrow \forall x P(x)) \rightarrow \forall x (q \rightarrow P(x)) \quad (1)$$

Візьмемо супротивне:

$$\neg \forall q ((q \rightarrow \forall x P(x)) \rightarrow \forall x (q \rightarrow P(x)))$$

$$\exists q \neg (\neg \neg q \vee \forall x P(x)) \vee \forall x (\neg q \vee P(x))$$

$$\exists q \neg ((q \wedge \neg \forall x P(x)) \vee \forall x (\neg q \vee P(x)))$$

$$\exists q ((\neg q \vee \forall x P(x)) \wedge \neg \forall x (\neg q \vee P(x)))$$

$$\exists q (\forall x (\neg q \vee P(x)) \wedge \exists x (q \wedge \neg P(x)))$$

$$\exists q \forall x \exists y ((\neg q \vee P(x)) \wedge q \wedge \neg P(y))$$

Елімінація кванторів існування:

$$q \rightarrow a \quad y \rightarrow f(x)$$

$$\forall x ((\neg a \vee P(x)) \wedge a \wedge \neg P(f(x)))$$

Мк-на гуж'юкків

$$S = \{ \neg a \vee P(x), a, \neg P(f(x)) \}$$

Ербанівський універсум мк-ни гуж'юкків

$$E = \{ a, f(a), f(f(a)), \dots \}$$

Виведення пустою гуж'юккіта:

1. $\neg a \vee P(a)$

2. a

3. $\neg P(f(a))$

4. $\neg a$

5. \square

Отже, формула (1) тавтологічна