Екзаменаційний білет №26

Скирда Яна, К-29

19.06.20

2. Довести, що $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash$

$\vdash A \vee (B \to (C \to D))$

1. $\vdash \neg C \to (\neg D \to \neg C)$ (I.1)
2. $\neg C \vdash \neg D \to \neg C$ (MP 1, $\neg C$)
3. $\vdash (\neg D \to \neg C) \to (\neg\neg C \to \neg\neg D)$ (IV.1)
4. $\neg C \vdash \neg\neg C \to \neg\neg D$ (MP 2,3)
5. $\vdash C \to \neg\neg C$ (IV.2)
6. $\neg C \vdash C \to \neg\neg D$ (силогізм 4,5)
7. $\vdash \neg\neg D \to D$ (IV.3)
8. $\neg C \vdash C \to D$ (силогізм 6,7)
9. $\vdash (C \to D) \to (B \to (C \to D))$ (I.1)
10. $\neg C \vdash B \to (C \to D)$ (MP 8,9)
11. $\vdash B \to (C \to D)) \to A \vee (B \to (C \to D))$ (III.2)
12. $\neg C \vdash A \vee (B \to (C \to D))$ (MP 10,11)
13. $\neg A, \neg B, \neg C, \neg D \vdash A \vee (B \to (C \to D))$ (конкретизація)

3. Дослідити формулу

$$\forall x (P(x) \to \forall y (P(y) \to ((Q(x) \to \neg Q(x)) \vee$$
$$\vee \forall z P(z))))$$

Візьмемо заперечення

$$\neg \forall x (P(x) \to \forall y (P(y) \to ((Q(x) \to \neg Q(x)) \vee$$
$$\vee \forall z P(z)))) = \quad \text{(розписуємо } \neg \forall x\text{)}$$
$$= \exists x \neg (P(x) \to \forall y (P(y) \to ((Q(x) \to \neg Q(x)) \vee$$
$$\vee \forall z P(z)))) = \quad \text{(розписуємо імплікації)}$$
$$= \exists x \neg (\neg P(x) \vee \forall y (\neg P(y) \vee ((\neg Q(x) \vee \neg Q(x)) \vee$$
$$\vee \forall z P(z)))) = \quad \text{(розпишемо за де Моргана)}$$
$$= \exists x (\neg\neg P(x) \wedge \neg \forall y (\neg P(y) \vee ((\neg Q(x) \vee \neg Q(x)) \vee$$
$$\vee \forall z P(z)))) = \quad \text{(розпишемо } \neg \forall y\text{)}$$
$$= \exists x (\neg\neg P(x) \wedge \exists y \neg (\neg P(y) \vee ((\neg Q(x) \vee \neg Q(x)) \vee$$
$$\vee \forall z P(z)))) = \quad \text{(розпишемо за де Моргана)}$$
$$= \exists x (\neg\neg P(x) \wedge \exists y (\neg\neg P(y) \wedge \neg ((\neg Q(x) \vee \neg Q(x)) \vee$$
$$\vee \forall z P(z)))) = \quad \text{(розпишемо за де Моргана)}$$
$$= \exists x (\neg\neg P(x) \wedge \exists y (\neg\neg P(y) \wedge (\neg (\neg Q(x) \vee \neg Q(x)) \wedge$$
$$\wedge \neg \forall z P(z)))) = \quad \text{(розпишемо за де Моргана)}$$
$$= \exists x (\neg\neg P(x) \wedge \exists y (\neg\neg P(y) \wedge ((\neg\neg Q(x) \wedge \neg\neg Q(x)) \wedge$$
$$\wedge \neg \forall z P(z)))) = \quad \text{(розпишемо } \neg \forall z\text{)}$$

$= \exists x(\neg\neg P(x) \wedge \exists y(\neg\neg P(y) \wedge ((\neg\neg Q(x) \wedge \neg\neg Q(x)) \wedge$

$\wedge \exists z \neg P(z)))) =$ (знімаємо подвійне заперечення)

$= \exists x(P(x) \wedge \exists y(P(y) \wedge ((Q(x) \wedge Q(x)) \wedge$

$\wedge \exists z \neg P(z)))) =$ (виносимо квантори)

$= \exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x) \wedge Q(x) \wedge \neg P(z))$

Отримали нормальну форму.

Зведемо до стандартної нормальної форми, шляхом елімінації кванторів існування: $x = c_1$, $y = c_2$, $z = c_3$ (константи)

$P(c_1) \wedge P(c_2) \wedge Q(c_1) \wedge Q(c_1) \wedge \neg P(c_3)$

отримали стандартну нормальну форму

Запишемо множину диз'юнктів

$S = \{P(c_1), P(c_2), Q(c_1), \neg P(c_3)\}$

Ербранівський універсум

$E = \{c_1, c_2, c_3\}$

Намагаємося вивести порожній диз'юнкт методом резолюції

1. $P(c_1)$
2. $\neg P(c_1)$
3. $\square$

Отримали порожній диз'юнкт для заперечення формули. Отже, початкова формула є тавтологія