Практикум з математичного аналізу

для студентів спеціальності “Інженерія програмного забезпечення”
факультету комп’ютерних наук та кібернетики

Семестр 2

Ляшко С. І., Аджубей Л. Т., Затула Д. В.

Зміст

Передмова

Курс математичного аналізу є основою фундаментальної математичної підготовки для випускників природничих спеціальностей у класичних університетах.

Даний практикум з математичного аналізу призначений студентам спеціальності 121 "Інженерія програмного забезпечення" факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він відповідає програмі курсу, яка складається з 58 годин лекцій та 56 годин практичних занять. Практикум складається з двох частин, кожна з яких містить 14 практичних занять і відповідає матеріалу одного семестру.

Основною метою, яку переслідували автори, є забезпечення навчальним матеріалом практичних занять в рамках стислого курсу математичного аналізу. В посібнику кожна тема містить всі необхідні означення і твердження, що дозволяє розв'язувати запропоновані задачі без додаткової літератури. В якості основного теоретичного матеріалу і практичних завдань використані підручники і збірник задач з математичного аналізу авторів І. І. Ляшко, С. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук, І. М. Александрович, О. І. Молодцов, Д. А. Номіровський, Б. В. Рубльов та інші [?, 1, 3, 4].

Тематичний план практичних занять. Семестр 2

Первісна та інтеграл Ньютона-Лейбніца
15. Первісна. Елементарні методи інтегрування.
16. Інтегрування раціональних функцій.
17. Інтегрування ірраціональних функцій методом раціоналізації.
18. Інтегрування тригонометричних функцій та їх раціональних комбінацій.
Інтеграл Рімана
19. Означення інтеграла Рімана та його зв'язок з інтегралом Ньютона-Лейбніца.
20. Основні теореми інтегрального числення.
21. Застосування інтеграла Рімана.
Функції багатьох змінних
22. Простір m-вимірних функцій, їх границя та неперервність.
23. Похідна і диференціал функції багатьох змінних. Похідні та диференціали вищих порядків.
24. Екстремуми функцій багатьох змінних.
Числові та функціональні ряди. Невласні інтеграли
25. Ряди з невід'ємними членами. Ряди з членами довільного знаку.
26. Функціональні послідовності і ряди. Степеневі ряди.
27. Ряди Фур'є.
28. Невласні інтеграли.

Розділ 5. Первісна та інтеграл Ньютона-Лейбніца

Тема 11. Первісна. Елементарні методи інтегрування

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Функція $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***первісною функції*** $f(x)$, якщо $D_f = D_F$ і $\forall x \in D_f$ виконується: $F'(x) = f(x)$. Оскільки $\dfrac{dF}{dx} = f(x)$, $dF = f(x)\,dx$, то $F(x) = \int f(x)\,dx$ називається ***невизначеним інтегралом***.

Теорема (про структуру первісної). Нехай $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — первісна для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тоді $\forall x \in D_f = D_F$: $F'(x) = f(x)$. Для того, щоб довільна функція $\Phi(x)$ була первісною для $f(x) \Leftrightarrow \Phi(x) - F(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Сукупність всіх первісних функцій для $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і $\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \,|\, x \in D_f, C \in \mathbb{R}\}$, де $F'(x) = f(x)$. Як правило, позначення множини опускають і пишуть $F(x) + C$.

Інтеграл Ньютона–Лейбніца

Інтеграл Ньютона–Лейбніца, який запроваджується до розгляду, заміняє собою невизначений інтеграл, який традиційно вивчають лише з точки зору правил та техніки його обчислення, не займаючись застосуваннями [1, с. 196].

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***інтегровною в сенсі Ньютона–Лейбніца*** на множині $X \subset D_f$, якщо $\forall x \in X$ вона має первісну, тобто

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \overset{def}{\Leftrightarrow} \{F(a) = 0 \wedge \forall x \in X : F'(x) = f(x)\}.$$

Функція $F(x)$ називається ***інтегралом Ньютона–Лейбніца*** з фіксованою нижньою межею a і змінною верхньою x. Її значення $F(b)$ в точці $b \in X$ називається ***визначеним інтегралом Ньютона–Лейбніца*** і позначається $\int_a^b f(t)\,dt$, де t — змінна інтегрування, від вибору якої величина інтегралу не залежить. Якщо f інтегровна в сенсі Ньютона–Лейбніца на множині X і множина точок її розриву — не більш ніж зліченна, то $F(x)$ — це первісна у широкому розумінні.

Теорема (формула Ньютона–Лейбніца). Якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ інтегровна в сенсі Ньютона–Лейбніца на D_f і F — її первісна, то $\forall a \in D_f$ і $\forall b \in D_f$ існує $\int_a^b f(x)\,dx$, однозначно визначений, і має місце рівність:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \overset{def}{=} F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Властивості інтеграла Ньютона–Лейбніца [1, с. 177–179]. Нехай функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ інтегровні в сенсі Ньютона–Лейбніца, $D_f = D_g$ та $a, b, c \in D_f$.

1. *Антисиметричність*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2. *Адитивність*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. *Диференційовність*: $\forall x \in D_f$

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x); \quad \left(\int_x^a f(t)\,dt\right)' = -f(x).$$

4. *Лінійність*: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ функція $(\lambda f + \mu g)(x)$ також інтегровна в сенсі Ньютона–Лейбніца і

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Таблиця основних інтегралів

1) $\int 0\,dx = C$;

2) $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$;

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0, a \neq 1$;

5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$;

8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

9) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$;

10) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$.

11) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C$;

12) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + C$.

13) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$;

14) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

15) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0$;

16) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Методи обчислення інтеграла Ньютона–Лейбніца

Теорема (метод заміни змінної). Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при цьому $\exists \varphi'(x)\,\forall x \in X,\ X = D_{f\circ\varphi}$. Якщо $f(\tau)$, де $\tau = \varphi(x)$, — інтегровна за Ньютоном-Лейбніцем функція на множині X, то функція $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ також інтегровна та $\forall a, b \in X$ має місце формула заміни змінної в інтегралі:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\tau)\,d\tau, \quad \tau=\varphi(x).$$

Зауваження. Якщо в інтегралі чисельник є похідною від знаменника, то

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f'(t)\,dt}{f(t)} = \ln|f(t)|\Big|_{x_0}^{x} = \ln|f(x)| \quad \forall x : f(x)\neq 0.$$

Теорема (метод інтегрування частинами). Нехай $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ і $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D_u = D_v$, $\exists u'(x), v'(x)$ для довільного $x\in D_u$, і нехай існує первісна для функції $u'(x)\cdot v(x)$. Тоді існує первісна для $u(x)\cdot v'(x)$ і має місце формула інтегрування частинами:

$$d(u\cdot v) = u\,dv + v\,du, \quad u\,dv = d(u\cdot v) - v\,du \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b u\,dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du \;\Rightarrow\; \int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \;\; \forall (a,b)\in D_u.$$

Первісна у широкому розумінні

Функція $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ називається ***первісною у широкому розумінні*** для функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на множині $X\subset D_F$, якщо F неперервна та існує $F'(x)=f(x)$ для всіх точок множини X, можливо, за виключенням не більш ніж зліченної її підмножини.

Практичне заняття 15

Приклад 1. *Обчислимо невизначений інтеграл* $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+4x^2-8x}{3x^3}\,dx.$

⌜

В результаті почленного ділення чисельника на знаменник отримуємо суму степеневих функцій:

$$\int \frac{x^4-2x^3+4x^2-8x}{3x^3}\,dx = \int\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{4}{3x} - \frac{8}{3x^2}\right)dx.$$

Далі скористаємося лінійністю інтеграла і таблицею основних інтегралів:

$$\int\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{4}{3x} - \frac{8}{3x^2}\right)dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\cdot x + \frac{4}{3}\cdot\ln|x| - \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) + C =$$

$$= \frac{x^2}{6} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\ln|x| + \frac{8}{3x} + C, \quad x\neq 0.$$

⌟

Приклад 2. *Обчислимо невизначений інтеграл* $\displaystyle\int \frac{e^{x+1}}{2^{x-1}}\,dx.$

⌜

Перетворимо підінтегральну функцію до зручного вигляду та скористаємося табличним інтегралом $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$:

$$\int \frac{e^{x+1}}{2^{x-1}}\,dx = 2e\int\frac{e^x}{2^x}\,dx = 2e\int\left(\frac{e}{2}\right)^x dx = 2e\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^x\left(\ln\frac{e}{2}\right)^{-1} + C.$$

⌟

Приклад 3. *Обчислимо невизначений інтеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

⌜

Зведемо інтеграл до табличного: $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$. Для цього зробимо лінійну заміну змінної: $x + \frac{\pi}{6} = t,\ \ dx = dt$. Тоді $\forall x \notin \left\{ \frac{\pi}{3} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\int \frac{dx}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$$

⌟

Приклад 4. *Обчислимо невизначений інтеграл* $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2}$.

⌜

Зведемо інтеграл до табличного: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$. Для цього винесемо сталу a з-під знаку інтеграла:

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}x^2\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{b}{a}x\right)^2}.$$

Тепер зробимо лінійну заміну змінної: $t = \dfrac{b}{a}x,\ \ dx = \dfrac{a}{b}\,dt$. Тоді:

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{b}{a}x\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{a}{b}\,dt = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}x + C.$$

⌟

Приклад 5. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^7}{\sqrt{1-t^{16}}}\,dt.$

⌜

Функцію $f(t) = \dfrac{t^7}{\sqrt{1-t^{16}}}$ можна представити у вигляді $f(t) = g(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, де $\varphi(t) = t^8$. Тому зробимо раціональну підстановку $y = \varphi(t)$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{t^7}{\sqrt{1-t^{16}}}\,dt = \left| t = \sqrt[8]{y},\ dt = \frac{1}{8\sqrt[8]{y^7}}\,dy \right| = \int_{x_0^8}^{x^8} \frac{\sqrt[8]{y^7}}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{dy}{8\sqrt[8]{y^7}} =$$

$$= \frac{1}{8}\arcsin y\,\Big|_{x_0^8}^{x^8} = \frac{1}{8}\arcsin x^8, \quad |x| \leqslant 1.$$

⌟

Приклад 6. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\operatorname{tg} t} + \operatorname{ctg} t}{\cos^2 t}\,dt.$

⌜

Оскільки підінтегральна функція залежить лише від функції $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$ та її похідної $\varphi'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, то зробимо раціональну заміну змінної:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\operatorname{tg} t} + \operatorname{ctg} t}{\cos^2 t}\,dt = \left| y = \operatorname{tg} t,\ dy = \frac{dt}{\cos^2 t} \right| = \int_{\operatorname{tg} x_0}^{\operatorname{tg} x} \left(e^y + \frac{1}{y}\right)\,dy =$$

$$= \left(e^y + \ln|y|\right)\Big|_{\operatorname{tg} x_0}^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x} + \ln|\operatorname{tg} x|, \quad x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

⌟

Обчисліть невизначені інтеграли, використовуючи таблицю основних інтегралів:

15.1 $\int \frac{x^5 + 2x^3 - 4x^2 - x + 11}{x^2}\, dx;$ **15.2** $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\, dx;$

15.3 $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\, dx;$ **15.4** $\int 2\cos^2 \frac{x}{2}\, dx;$

15.5 $\int (\cos 2x \sin x - \sin 2x \cos x)\, dx;$ **15.6** $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx;$

15.7 $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x\, dx;$ **15.8** $\int \frac{3^{x+1} + e^{3x} - e^{x-1}}{e^x}\, dx.$

Обчисліть невизначені інтеграли, використовуючи лінійну заміну змінної:

15.9 $\int \frac{dx}{(2x-3)^5};$ **15.10** $\int \sqrt[3]{(5-8x)^4}\, dx;$

15.11 $\int e^{-3x+1}\, dx;$ **15.12** $\int \sin(2x-3)\, dx;$

15.13 $\int \frac{dx}{2x^2+9};$ **15.14** $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца, використовуючи раціональну заміну змінної:

15.15 $\int_{x_0}^{x} \frac{t^3}{t^2-4}\, dt;$ **15.16** $\int_{x_0}^{x} \frac{t}{\sqrt{b^2t^2+a^2}}\, dt;$

15.17 $\int_{x_0}^{x} t^4 \sin(t^5+3)\, dt;$ **15.18** $\int_{x_0}^{x} t\sqrt{b^2t^2+a^2}\, dt;$

15.19 $\int_{x_0}^{x} \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}}\, dt;$ **15.20** $\int_{x_0}^{x} e^{\sin t} \cos t\, dt;$

15.21 $\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t \ln t};$ **15.22** $\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t \ln t \ln \ln t}.$

Тема 12. Інтегрування раціональних функцій

Раціональна функція однієї змінної (або ж ***дробово-раціональна функція***) — це алгебраїчний вираз, що є відношенням двох многочленів, коефіцієнти яких належать множині дійсних чисел, тобто має вигляд:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0},$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_m$, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — сталі, m та n — невід'ємні цілі числа.

Якщо $m \geqslant n$, то дріб неправильний. Кожен неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлена $W(x)$ (ціла частина) та правильного дробу $\left(\frac{R}{Q}\right)$: $\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$. З класу правильних дробів виділяють 4 типи основних *елементарних дробів*: $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^n}$, $\frac{Mx+N}{x^2+2px+q}$ та $\frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^n}$, де $a, p, q, M, N \in \mathbb{R}$, а $n > 1$ — ціле число. При цьому $x^2 + 2px + q$ не має дійсних коренів у випадку, якщо дискримінант $D < 0 \;\Leftrightarrow\; p^2 - q < 0 \;\Leftrightarrow\; q - p^2 > 0$.

Розвинення правильних дробів на прості

Вигляд розвинення правильних дробів на прості залежить від розвинення многочлена $Q_n(x)$ на множники. Кожен многочлен n-го степеня з дійсними коефіцієнтами і коефіцієнтом 1 при x^n можна однозначно представити у вигляді співмножників виду $x - a$ та $x^2 + px + q$. Якщо маємо співмножники, що співпадають, то:

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{n_k} \times \\ \times (x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_rx+q_r)^{m_r},$$

де $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ — корені многочлена $Q_n(x)$; n_i, $i = \overline{1,k}$ — кратності коренів a_i; $p_j, q_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,r}$ — коефіцієнти тричленів; m_j, $j = \overline{1,r}$ — кратності квадратичних тричленів. При цьому $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i + 2\sum\limits_{j=1}^{r} m_j = n$.

Будь-який правильний раціональний дріб єдиним способом розкладається на скінченне число елементарних дробів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{A_{n_1}}{x-a_1} + \frac{B_1}{(x-a_2)^{n_2}} + \frac{B_2}{(x-a_2)^{n_2-1}} + \\ + \ldots + \frac{B_{n_2}}{x-a_2} + \ldots + \frac{K_1}{(x-a_k)^{n_k}} + \frac{K_2}{(x-a_k)^{n_k-1}} + \ldots + \frac{K_{n_k}}{x-a_k} + \ldots + \\ + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r-1}} + \ldots + \frac{M_rx+N_r}{x^2+p_rx+q_r}. \tag{1}$$

Для того, щоб визначити невідомі коефіцієнти, множимо обидві частини на $Q(x)$. Із рівності многочленів у лівій і правій частинах (1) випливає рівність коефіцієнтів при однакових степенях x. Прирівнюємо їх і отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод знаходження коефіцієнтів розвинення правильного раціонального дробу у суму простих дробів називається ***методом невизначених коефіцієнтів***.

Практичне заняття 16

Приклад 1. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{A\,dt}{t-a}$, *де* $a, A \in \mathbb{R}$.

⌜

Зведемо інтеграл до табличного лінійною заміною $y = t - a$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{A\,dt}{t-a} = \int_{x_0-a}^{x-a} \frac{A\,dy}{y} = A \ln|y| \Big|_{x_0-a}^{x-a} = A\ln|x-a|, \quad x \neq a.$$

⌟

Приклад 2. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{A\,dt}{(t-a)^n}$, *де* $a, A \in \mathbb{R}$ *та* $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

⌜

Зведемо інтеграл до табличного лінійною заміною $y = t - a \neq 0$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{A\,dt}{(t-a)^n} = \int_{x_0-a}^{x-a} \frac{A\,dy}{y^n} = A\int_{x_0-a}^{x-a} y^{-n}\,dy = A\cdot \frac{y^{1-n}}{1-n}\Big|_{x_0-a}^{x-a} = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}.$$

⌟

Приклад 3. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(Mt+N)\,dt}{t^2+2pt+q}$, *де* $M, N, p, q \in \mathbb{R}$.

⌜

Позначимо $b^2 = q - p^2 > 0$ та зробимо лінійну заміну змінної $y = t + p$:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x} \frac{(Mt+N)\,dt}{t^2+2pt+q} = \int_{x_0}^{x} \frac{(Mt+N)\,dt}{(t+p)^2+q-p^2} = \left| \begin{array}{c} t = y-p \\ dy = dt \end{array} \right| = \\
&= \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{(My - Mp + N)\,dy}{y^2+b^2} = M\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{y\,dy}{y^2+b^2} + \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{(N-Mp)\,dy}{y^2+b^2} = \\
&= \frac{M}{2}\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy^2}{y^2+b^2} + (N-Mp)\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{y^2+b^2} = \\
&= \frac{M}{2}\ln\left(y^2+b^2\right)\Big|_{x_0+p}^{x+p} + (N-Mp)\cdot\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{y}{b}\Big|_{x_0+p}^{x+p} = \\
&= \frac{M}{2}\ln\left|(x+p)^2+q-p^2\right| + \frac{N-Mp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C.
\end{aligned}$$

⌟

Приклад 4. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(Mt+N)\,dt}{((t+p)^2+b^2)^n}$, *де* $M, N, p, b \in \mathbb{R}$ *та* $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

⌜

Позначимо $b^2 = q - p^2 > 0$ та зробимо лінійну заміну змінної $y = t + p$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(Mt+N)\,dt}{((t+p)^2+b^2)^n} = \left| \begin{array}{c} t = y-p \\ dy = dt \end{array} \right| = \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{(M(y-p)+N)\,dy}{(y^2+b^2)^n} =$$
$$= \frac{M}{2}\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{2y\,dy}{(y^2+b^2)^n} + (N-Mp)\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2+b^2)^n}.$$

Тоді:

$$\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{2y\,dy}{(y^2+b^2)^n} = \int_{x_0+p}^{x+p} \frac{d(y^2+b^2)}{(y^2+b^2)^n} = \frac{(y^2+b^2)^{1-n}}{1-n}\Bigg|_{x_0+p}^{x+p} = \frac{((x+p)^2+b^2)^{1-n}}{1-n}.$$

Позначимо другий інтеграл як $I_n = \displaystyle\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2+b^2)^n}$ та запишемо для нього рекурентну формулу, використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$I_n = \left| \begin{array}{cc} u = \dfrac{1}{(y^2+b^2)^n}, & du = \dfrac{-2ny}{(y^2+b^2)^{n+1}}\,dy \\ dv = dy, & v = y \end{array} \right| =$$
$$= \frac{y}{(y^2+b^2)^n}\Bigg|_{x_0+p}^{x+p} + 2n\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{y^2\,dy}{(y^2+b^2)^{n+1}} =$$
$$= \frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + 2n\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{y^2+b^2-b^2}{(y^2+b^2)^{n+1}}\,dy =$$
$$= \frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + 2n\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2+b^2)^n} - 2nb^2\int_{x_0+p}^{x+p} \frac{dy}{(y^2+b^2)^{n+1}} =$$
$$= \frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + 2nI_n - 2nb^2 I_{n+1}.$$

Тобто

$$2nb^2 I_{n+1} = \frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + (2n-1)I_n;$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2nb^2}\left(\frac{x+p}{((x+p)^2+b^2)^n} + (2n-1)I_n\right), \quad I_1 = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{b}.$$

⌟

Приклад 5. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{2t^3-6t^2-11}{(1-t)^2(4+t^2)}\,dt.$

⌜

Оскільки підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, то розкладемо її на прості дроби відповідно до формули (1):

$$\frac{2t^3-6t^2-11}{(1-t)^2(4+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+4};$$

$$2t^3-6t^2-11 = A(1-t)(t^2+4) + B(t^2+4) + (Ct+D)(1-t)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях t, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти A, B, C та D:

$$
\begin{array}{l}
t^3: \\
t^2: \\
t^1: \\
t^0:
\end{array}
\begin{cases}
2 = -A + C \\
-6 = A + B - 2C + D \\
0 = -4A + C - 2D \\
-11 = 4A + 4B + D
\end{cases}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{cases}
A = 0 \\
B = -3 \\
C = 2 \\
D = 1
\end{cases}
$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{2t^3 - 6t^2 - 11}{(1-t)^2(4+t^2)}\,dt = &-3\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{(1-t)^2} + \int_{x_0}^{x} \frac{2t+1}{t^2+4}\,dt = \\
&= 3\int_{x_0}^{x} \frac{d(1-t)}{(1-t)^2} + \int_{x_0}^{x} \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2+4} = \\
&= \left(-\frac{3}{1-t} + \ln\left(t^2+4\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = \\
&= \frac{3}{x-1} + \ln\left(x^2+4\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}, \quad x \neq 1.
\end{aligned}
$$

⌟

Приклад 6. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\int_{x_0}^{x} \ln t\,dt$.

⌜

Застосуємо формулу інтегрування частинами для того, щоб отримати інтеграл від похідної функції $f(t) = \ln t$:

$$
\int_{x_0}^{x} \ln t\,dt = \left|\begin{array}{ll} u = \ln t, & du = \dfrac{1}{t}\,dt \\ dv = dt, & v = t \end{array}\right| = t\ln t\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} dt = x(\ln x - 1), \quad x > 0.
$$

⌟

Приклад 7. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\int_{x_0}^{x} e^{at}\cos bt\,dt$.

⌜

Двічі скористаємося формулою інтегрування частинами:

$$
\begin{aligned}
I = \int_{x_0}^{x} e^{at}\cos bt\,dt = &\left|\begin{array}{ll} u = \cos bt, & du = -b\sin bt\,dt \\ dv = e^{at}\,dt, & v = \dfrac{1}{a}e^{at} \end{array}\right| = \\
&= \frac{1}{a}e^{at}\cos bt\Big|_{x_0}^{x} + \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x} e^{at}\sin bt\,dt = \\
&= \left|\begin{array}{ll} u = \sin bt, & du = b\cos bt\,dt \\ dv = e^{at}\,dt, & v = \dfrac{1}{a}e^{at} \end{array}\right| = \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{at}\sin bt\Big|_{x_0}^{x} - \frac{b^2}{a^2}\int_{x_0}^{x} e^{at}\cos bt\,dt.
\end{aligned}
$$

Тобто отримали рівність, з якої можна виразити значення інтеграла:

$$
I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}I;
$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx).$$

$\lrcorner$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца шляхом розкладу правильних дробів на прості:

16.1 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{4t}{2t+1}\,dt$;

16.2 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt$;

16.3 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{3t^4}{t^2+t-2}\,dt$;

16.4 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^4+1}{t^3-t^2+t-1}\,dt$;

16.5 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^4-1}$;

16.6 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^3-6t^2+9t+7}{(t-2)^3(t-5)}\,dt$;

16.7 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^4-7t^3-8t^2-23t-11}{(t^2+4t+5)(t-3)^2(t+2)}\,dt$;

16.8 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{4t^4-t^3+7t^2+2}{(t-1)(t^2+1)^2}\,dt$.

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца за допомогою формули інтегрування частинами:

16.9 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t\cos t\,dt$;

16.10 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} te^{-t}\,dt$;

16.11 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^t\sin t\,dt$;

16.12 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \operatorname{arctg}\sqrt{t}\,dt$;

16.13 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \arccos t\,dt$;

16.14 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} (\arcsin t)^2 dt$;

16.15 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t\operatorname{tg}^2 t\,dt$;

16.16 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} 3t^2\ln(1+t)\,dt$;

16.17 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sin\ln t\,dt$;

16.18 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t\operatorname{arctg} t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$.

Тема 13. Інтегрування ірраціональних функцій методом раціоналізації

Ірраціональна функція — це елементарна функція, побудована зі степеневих функцій з раціональними показниками, яка не зводиться до раціональної або дробово-раціональної функції. Основним методом інтегрування ірраціональних функцій є пошук підстановок, які дають змогу позбутися від ірраціональностей у підінтегральній функції та звести задачу до інтегрування раціональної або дробово-раціональної функції. Такі підстановки називаються ***раціоналізуючими***.

Раціональна функція $R(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ — це довільна функція, яка отримана в результаті скінченного числа арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення та ділення) над змінними $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і довільними числами.

Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_n$ та $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — деякі цілі числа, $n \in \mathbb{N}$, а r — спільне кратне чисел $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

1. $\displaystyle\int_{x_0}^{x} R\left(t; t^{\frac{k_1}{l_1}}; \ldots; t^{\frac{k_n}{l_n}}\right) dt$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції за допомогою підстановки $t = y^r,\ dt = ry^{r-1}dy$.

2. $\displaystyle\int_{x_0}^{x} R\left(t; \left(\frac{at+b}{ct+s}\right)^{\frac{k_1}{l_1}}; \ldots; \left(\frac{at+b}{ct+s}\right)^{\frac{k_n}{l_n}}\right) dt$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції підстановкою $y^r = \dfrac{at+b}{ct+s},\ dt = d\left(\dfrac{sy^r - b}{a - cy^r}\right)$.

Інтеграли, що містять квадратний тричлен

1. Для інтеграла вигляду $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{P_m(t)}{\sqrt{at^2+bt+c}}\, dt$, де $P_m(t)$ — многочлен степеня $m \geqslant 1$, має місце рівність:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P_m(t)}{\sqrt{at^2+bt+c}}\, dt = Q_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{at^2+bt+c}},$$

де $Q_{m-1}(x)$ — многочлен $(m-1)$-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, λ — стала, що також є невизначеним коефіцієнтом. Диференціюючи це рівняння, маємо, що

$$P_m(x) = Q'_{m-1}(x) \cdot (ax^2+bx+c) + Q_{m-1}(x) \cdot \frac{2ax+b}{2} + \lambda.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему лінійних рівнянь, з якої знаходяться всі невідомі коефіцієнти.

2. $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{(t-d)^n \cdot \sqrt{at^2+bt+c}}$, де $n \in \mathbb{N}$ та $d \notin [x_0, x]$, зводиться до інтеграла вигляду $\operatorname{sgn}(d-x) \displaystyle\int \frac{y^{n-1}\, dy}{\sqrt{a^*y^2+b^*y+c^*}}$ заміною $t - d = \dfrac{1}{y}$.

3. Інтеграл $\int_{x_0}^{x} R\big(t; \sqrt{at^2+bt+c}\big)\,dt$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції при застосуванні однієї з ***підстановок Ейлера***.

Перша підстановка Ейлера $\sqrt{at^2+bt+c} = y - \sqrt{a}t$ застосовується у випадку, якщо $a > 0$. У такому разі $t = \dfrac{y^2-c}{2\sqrt{a}y+b}$ та

$$\sqrt{at^2+bt+c} = y - \sqrt{a}\cdot\frac{y^2-c}{2\sqrt{a}y+b} = \frac{\sqrt{a}y^2+by+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}y+b}.$$

Після інтегрування отриманого дробу повертаємось до змінної t підстановкою $y = \sqrt{at^2+bt+c} + \sqrt{a}t$.

Друга підстановка Ейлера $\sqrt{at^2+bt+c} = ty + \sqrt{c}$ застосовується у випадку, якщо $c > 0$. У такому разі $t = \dfrac{2\sqrt{c}y-b}{a-y^2}$ та

$$\sqrt{at^2+bt+c} = y\cdot\frac{2\sqrt{c}y-b}{a-y^2} + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}y^2-by+a\sqrt{c}}{a-y^2}.$$

Третя підстановка Ейлера $\sqrt{at^2+bt+c} = y(t-t_1)$ застосовується у випадку, якщо квадратний тричлен at^2+bt+c має різні дійсні корені t_1, t_2 та коефіцієнт $a > 0$. Тоді

$$\sqrt{at^2+bt+c} = \sqrt{a(t-t_1)(t-t_2)} = \sqrt{a}\,|t-t_1|\sqrt{\frac{t-t_2}{t-t_1}} \;\Rightarrow\; y = \sqrt{\frac{a(t-t_2)}{t-t_1}}$$

і маємо інтеграл $\displaystyle\int_{x_0}^{x} R_1\left(t; \sqrt{\frac{a(t-t_2)}{t-t_1}}\right)dt.$

Зазначимо, що застосування підстановок Ейлера призводить до громіздких обчислень. Тому, як альтернативу, використовують інші способи інтегрування. Зокрема, у тричлені можна виділити повний квадрат:

$$at^2+bt+c = a\left(\left(t+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right).$$

Тоді інтеграл $\int_{x_0}^{x} R\big(t; \sqrt{at^2+bt+c}\big)\,dt$ за допомогою заміни $y = t + \dfrac{b}{2a}$ в залежності від знаків a та $(4ac-b^2)$ зводиться до інтеграла одного з видів:

4. $\int R\Big(y; \sqrt{q^2-y^2}\Big)\,dy$, що заміною $y = q\sin u$ зводиться до $\int R(\sin u, \cos u)\,du$.

5. $\int R\Big(y; \sqrt{y^2+q^2}\Big)\,dy$, що заміною $y = q\,\mathrm{tg}\,u$ зводиться до $\int R(\sin u, \cos u)\,du$.

6. $\int R\Big(y; \sqrt{y^2-q^2}\Big)\,dy$, що заміною $y = \dfrac{q}{\cos u}$ зводиться до $\int R(\sin u, \cos u)\,du$.

Інтегрування диференціальних біномів

Вираз $x^m(a+bx^n)^p$, де m, n, p — раціональні числа, називається ***диференціальним біномом***.

Теорема (Чебишева). Первісна функції $x^m(a+bx^n)^p$ виражається через елементарні функції тільки в наступних трьох випадках: 1) p — ціле число; 2) $\dfrac{m+1}{n}$ — ціле; 3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ — ціле.

Для зазначених випадків наведемо підстановки, які призводять до інтегрування раціональних функцій.

1. Нехай p — ціле число, $m=\dfrac{k}{l}$ та $n=\dfrac{r}{s}$, де k,l,r,s — цілі. Інтеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ заміною $x=y^\lambda$, $dx=\lambda y^{\lambda-1}\,dy$, де λ — найменше спільне кратне чисел l та s, зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції.

2. Нехай $\dfrac{m+1}{n}$ — ціле число, $p=\dfrac{\mu}{\lambda}$. Тоді інтеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ заміною $a+bx^n=y^\lambda$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції.

3. Нехай $\dfrac{m+1}{n}+p$ — ціле число, $p=\dfrac{\mu}{\lambda}$. Тоді інтеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ заміною $\dfrac{a+bx^n}{x^n}=y^\lambda$ зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції.

Практичне заняття 17

Приклад 1. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{t}+1}{t^2-\sqrt{t}}\,dt.$

⌜

Зведемо задачу до інтегрування дробово-раціональної функції за допомогою заміни $t=y^2$, $dt=2y\,dy$:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{t}+1}{t^2-\sqrt{t}}\,dt=\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}}\frac{y+1}{y^4-y}\cdot 2y\,dy=2\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}}\frac{y+1}{y^3-1}\,dy.$$

Оскільки отримали правильний дріб під знаком інтеграла, то можемо розкласти його на прості дроби:

$$\frac{y+1}{y^3-1}=\frac{y+1}{(y-1)(y^2+y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{By+C}{y^2+y+1};$$

$$y+1=A(y^2+y+1)+(By+C)(y-1).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях y, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти A,B та C:

$$\begin{array}{l} y^2: \\ y^1: \\ y^0: \end{array}\begin{cases} 0=A+B \\ 1=A-B+C \\ 1=A-C \end{cases}\Leftrightarrow\quad A=\frac{2}{3},\ B=-\frac{2}{3},\ C=-\frac{1}{3}.$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{t}+1}{t^2-\sqrt{t}}\,dt=2\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}}\frac{\frac{2}{3}\,dy}{y-1}-2\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}}\frac{\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}}{y^2+y+1}\,dy=$$

$$= \frac{4}{3}\ln|y-1|\Big|_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}} \frac{2y+1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dy =$$

$$= \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt{x}-1\right| - \frac{2}{3}\int_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt{x}-1\right| - \frac{2}{3}\ln\left|\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|\Bigg|_{\sqrt{x_0}}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt{x}-1\right| - \frac{2}{3}\ln\left|x+\sqrt{x}+1\right|, \quad x \neq 1.$$

⌟

Приклад 2. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,dt$.

⌜

Зведемо задачу до інтегрування дробово-раціональної функції за допомогою заміни $\frac{t-1}{t+1} = y^2 \;\Rightarrow\; t = \frac{y^2+1}{1-y^2}$, $dt = \frac{4y}{(y^2-1)^2}\,dy$. Оскільки $D_f = (-\infty,-1)\cup$ $\cup\,[1,+\infty)$, то позначимо $g(x) = -1$, якщо $x < -1$, та $g(x) = 1$, якщо $x > 1$. Тоді:

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,dt = \int_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} |y|\cdot\frac{4y}{(y^2-1)^2}\,dy = g(x)\cdot\int_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \frac{4y^2}{(y^2-1)^2}\,dy.$$

Розкладемо правильний дріб під знаком інтеграла на прості дроби:

$$\frac{4y^2}{(y^2-1)^2} = \frac{4y}{(y-1)^2(y+1)^2} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{(y-1)^2} + \frac{C}{y+1} + \frac{D}{(y+1)^2};$$

$$4y^2 = A(y-1)(y+1)^2 + B(y+1)^2 + C(y+1)(y-1)^2 + D(y-1)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях y, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти A, B, C та D:

$$\begin{array}{l} y^3: \\ y^2: \\ y^1: \\ y^0: \end{array}\begin{cases} 0 = A + C \\ 4 = A + B - C + D \\ 0 = -A + 2B - C - 2D \\ 0 = -A + B + C + D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \\ D = 1 \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,dt = g(x)\cdot\int_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\left(\frac{1}{y-1} + \frac{1}{(y-1)^2} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{(y+1)^2}\right)dy =$$

$$= g(x)\cdot\left(\ln|y-1| - \frac{1}{y-1} - \ln|y+1| - \frac{1}{y+1}\right)\Bigg|_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} =$$

$$= g(x)\cdot\left(\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{2y}{y^2-1}\right)\Bigg|_{\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\right| + (x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad x \in (-\infty,-1)\cup[1,+\infty).$$
⌟

Приклад 3. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{6t^3-t-1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt$.

⌜

Підінтегральна функція має вигляд $\dfrac{P_3(t)}{\sqrt{at^2+bt+c}}$, тобто можемо представити інтеграл у вигляді

$$\int_{x_0}^{x} \frac{6t^3-t-1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+2}}.$$

Після диференціювання даної рівності маємо:

$$6x^3-x-1 = (2Ax+B)\cdot(x^2+2x+2) + (Ax^2+Bx+C)\cdot(x+1) + \lambda.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях x, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти A, B, C та λ:

$$\begin{array}{l} x^3: \\ x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} 6 = 3A \\ 0 = 5A+2B \\ -1 = 4A+3B+C \\ -1 = 2B+C+\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -5 \\ C = 6 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x} \frac{6t^3-t-1}{\sqrt{t^2+2t+2}}\,dt = (2x^2-5x+6)\sqrt{x^2+2x+2} + 3\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+2}} =$$
$$= (2x^2-5x+6)\sqrt{x^2+2x+2} + 3\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2+1}} =$$
$$= (2x^2-5x+6)\sqrt{x^2+2x+2} + 3\ln\left|t-1+\sqrt{(t+1)^2+1}\right|\Big|_{x_0}^{x} =$$
$$= (2x^2-5x+6)\sqrt{x^2+2x+2} + 3\ln\left|x-1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|.$$
⌟

Приклад 4. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+t-1}}$.

⌜

Зведемо інтеграл до більш простого вигляду заміною $\dfrac{1}{t} = y$, $-\dfrac{1}{t^2}\,dt = dy$:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+t-1}} = -\int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}} \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}-1}} = -\operatorname{sgn} x \int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}} \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y-y^2}}.$$

Оскільки $1+y-y^2 = \dfrac{5}{4} - \left(\dfrac{1}{4}-y+y^2\right) = \dfrac{5}{4} - \left(\dfrac{1}{2}-y\right)^2$, то лінійною заміною змінної $z = \dfrac{1}{2} - y$ зведемо інтеграл до двох табличних:

$$\int_{\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{x}} \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y-y^2}} = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} \frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)dz}{\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} \frac{d\left(\frac{5}{4}-z^2\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} \frac{dz}{\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}\,\Bigg|_{\frac{1}{2}-\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2z}{\sqrt{5}}\Bigg|_{\frac{1}{2}-\frac{1}{x_0}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}}.$$

Отже,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+t-1}} = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\arcsin\frac{2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{x}\sqrt{x^2+x-1} - \frac{\operatorname{sgn} x}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}x}, \quad x \neq 0.$$

$\lrcorner$

Приклад 5. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t-\sqrt{t^2+2t+4}}$.

$\ulcorner$

Підінтегральна функція має вигляд $R\big(t;\sqrt{at^2+bt+c}\big)$, причому у даному випадку $a = 1 > 0$. Тож зручно буде застосувати першу підстановку Ейлера $\sqrt{t^2+2t+4} = y - t \;\Leftrightarrow\; t = \dfrac{y^2-4}{2(y+1)}$, в результаті чого отримаємо інтеграл від дробово-раціональної функції: $\sqrt{t^2+2t+4} = \dfrac{y^2+2y+4}{2(y+1)}$; $dt = \dfrac{y^2+2y+4}{2(y+1)^2}\,dy$;

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t-\sqrt{t^2+2t+4}} = \int_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \frac{1}{\frac{y^2-4}{2(y+1)} - \frac{y^2+2y+4}{2(y+1)}} \cdot \frac{y^2+2y+4}{2(y+1)^2}\,dy =$$

$$= -\int_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \frac{y^2+2y+4}{2(y+1)(y+4)}\,dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}} \left(1 - \frac{3y}{(y+1)(y+4)}\right)dy.$$

Оскільки отримали правильний дріб під знаком інтеграла, то можемо розкласти його на прості дроби:

$$\frac{3y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4} = \frac{(A+B)y+4A+B}{(y+1)(y+4)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях y, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти A та B:

$$\begin{matrix} y^1: \\ y^0: \end{matrix} \begin{cases} 3 = A + B \\ 0 = 4A + B \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 4 \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t-\sqrt{t^2+2t+4}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+2x+4}\right)+\frac{1}{2}\int_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}}\left(\frac{-1}{y+1}+\frac{4}{y+4}\right)dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+2x+4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\ln|y+1|+4\ln|y+4|\right)\Big|_{x_0+\sqrt{x_0^2+2x_0+4}}^{x+\sqrt{x^2+2x+4}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+2x+4}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right|\right)+$$

$$+2\ln\left|x+4+\sqrt{x^2+2x+4}\right|.$$

⌟

Приклад 6. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t}\,dt.$

⌜

Оскільки вираз під знаком інтеграла $\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t}\,dt=t^{-1}\left(1+t^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dt$ є диференціальним біномом, то застосуємо теорему Чебишева. Маємо, що $p=\dfrac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$, але $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-1+1}{\frac{1}{2}}=0\in\mathbb{Z}$, тому використаємо другу підстановку Чебишева: $y^3=1+t^{\frac{1}{2}}\ \Leftrightarrow\ t=(y^3-1)^2;\ dt=6y^2(y^3-1)\,dy$. Тоді:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t}\,dt=\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\frac{y}{(y^3-1)^2}\cdot 6y^2(y^3-1)\,dy=6\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\frac{y^3\,dy}{y^3-1}.$$

Після виділення із неправильного дробу під знаком інтеграла цілої частини маємо:

$$6\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\frac{(y^3-1+1)\,dy}{y^3-1}=6\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}dy+\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}\frac{6\,dy}{y^3-1}.$$

Отриманий правильний дріб у другому інтегралі розкладемо на прості дроби:

$$\frac{6}{y^3-1}=\frac{6}{(y-1)(y^2+y+1)}=$$

$$=\frac{A}{y-1}+\frac{By+C}{y^2+y+1}=\frac{(A+B)y^2+(A-B+C)y+A-C}{(y-1)(y^2+y+1)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при різних степенях y, отримаємо систему лінійних рівнянь, звідки знайдемо коефіцієнти A, B та C:

$$\begin{matrix} y^2: \\ y^1: \\ y^0: \end{matrix}\begin{cases} 0=A+B \\ 0=A-B+C \\ 6=A-C \end{cases}\Leftrightarrow\quad A=2,\ B=-2,\ C=-4.$$

Тоді

$$\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{6\,dy}{y^3-1} = \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{2\,dy}{y-1} - \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{(2y+4)\,dy}{y^2+y+1} =$$

$$= 2\ln|y-1|\Big|_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} - \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{2y+4}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dy.$$

Оскільки

$$\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{2y+4}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dy = \int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{d\left(\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + 3\int_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \left(\ln\left|\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{3\cdot 2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(y+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{1+\sqrt{x_0}}}^{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}},$$

то

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{t}\,dt \;=\; 6\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + 2\ln\left|\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1\right| - 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3}} -$$

$$-\;\ln\left|\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1\right|,\quad x\neq 0.$$

⌟

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца:

17.1 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt[3]{t^2}-\sqrt{t}}\,dt;$

17.2 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t(\sqrt{t}+\sqrt[5]{t^2})};$

17.3 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^2}{\sqrt{t-1}}\,dt;$

17.4 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^2+\sqrt{t+1}}{\sqrt[3]{t+1}}\,dt;$

17.5 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t\sqrt[3]{2+t}}{t+\sqrt[3]{2+t}}\,dt;$

17.6 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\cdot\frac{dt}{t};$

17.7 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{3t^2-5t}{\sqrt{3-2t-t^2}}\,dt;$

17.8 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{3t^3}{\sqrt{t^2+4t+5}}\,dt;$

17.9 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+4t-4}};$

17.10 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t^2+t+1}};$

17.11 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{1+\sqrt{t^2+2t+2}};$

17.12 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+t+1}-t};$

17.13 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{1+\sqrt{1-2t-t^2}};$

17.14 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t^{-1}\left(1+t^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}dt;$

17.15 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t^5}{\sqrt{1-t^2}}\,dt;$

17.16 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{t}}}{2t}\,dt;$

17.17 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t^{11}\sqrt{1+t^4}};$

17.18 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{t^3}}}{t^2\cdot\sqrt[8]{t}}\,dt.$

Тема 14. Інтегрування тригонометричних функцій та їх раціональних комбінацій

Інтеграли вигляду $\int_{x_0}^{x} R(\sin t;\cos t)\,dt$, де у загальному випадку R — деяка раціональна функція, зводяться до інтегралів від дробово-раціональних функцій за допомогою ***універсальної тригонометричної підстановки*** $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}=y$. При цьому $t=2\operatorname{arctg}y,\ dt=\dfrac{2\,dy}{1+y^2}$;

$$\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = 2\cdot\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\cdot\cos^2\frac{t}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \frac{2y}{1+y^2};$$

$$\cos t = \cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2} = 2\cos^2\frac{t}{2}-1 = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

Зазначимо, що застосування підстановки $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}=y$ можливе лише при $t\in(-\pi+2\pi k,\pi+2\pi k)$, де k — довільне ціле число.

У деяких частинних випадках існують такі способи інтегрування $R(\sin t;\cos t)$.

1. Якщо $R(\sin t;\cos t)$ — непарна функція за змінною $\sin t$, тоді раціоналізація досягається заміною $y=\cos t$.

2. Якщо $R(\sin t;\cos t)$ — непарна функція за змінною $\cos t$, тоді раціоналізація досягається заміною $y=\sin t$.

3. Якщо $R(-\sin t;-\cos t)=R(\sin t;\cos t)$, то заміна $y=\operatorname{tg}t$ призведе до інтегрування дробово-раціональної функції, при цьому застосування підстановки можливе при $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)$, де $k\in\mathbb{Z}$. У такому разі: $\sin t=\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$, $\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ та $dt=\dfrac{dy}{1+y^2}$.

4. Інтеграл $\int_{x_0}^{x}\sin^n t\cos^m t\,dt$ у випадку раціональних m і n зводиться до інтегрування диференціального біному підстановкою $y=\sin^2 t,\ dy=2\sin t\cos t\,dt$:

$$\int_{x_0}^{x}\sin^n t\cos^m t\,dt = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\sin^{n-1}t\,(1-\sin^2 t)^{\frac{m-1}{2}}\cdot 2\sin t\cos t\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\sin^2 x_0}^{\sin^2 x} y^{\frac{n-1}{2}}(1-y)^{\frac{m-1}{2}}\,dy.$$

Якщо m,n — парні натуральні числа, то використовуємо формули пониження степеня: $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Наведемо деякі інтеграли, що не обчислюються за допомогою елементарних функцій: $\int_{x_0}^{x}e^{-t^2}dt$ — *інтеграл Пуассона*, $\int_{x_0}^{x}\sin t^2\,dt$ та $\int_{x_0}^{x}\cos t^2\,dt$ — *інтеграли Френеля*, $\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\ln t}$ — *інтегральний логарифм*, $\int_{x_0}^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt$ — *інтеграл Діріхле*.

Практичне заняття 18

Приклад 1. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\cos^5 t\,dt.$

⌜

Оскільки підінтегральна функція є непарною по змінній $\cos t$, тобто виконується умова $R(\sin t; -\cos t) = -R(\sin t; \cos t)$, то застосуємо підстановку $y = \sin t$:

$$\int_{x_0}^{x}\cos^5 t\,dt = \int_{x_0}^{x}\cos^4 t\,d(\sin t) = \int_{x_0}^{x}(1-\sin^2 t)^2\,d(\sin t) = \int_{\sin x_0}^{\sin x}(1-y^2)^2\,dy =$$

$$= \left(y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{\sin x_0}^{\sin x} = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5}.$$

⌟

Приклад 2. *Обчислимо інтеграл Ньютона–Лейбніца* $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{3\sin t + \cos t}.$

⌜

Оскільки підінтегральна функція не є непарною по змінним $\sin t$ та $\cos t$, а також не виконується умова $R(-\sin t; -\cos t) = R(\sin t; \cos t)$, то застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $y = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{3\sin t + \cos t} = \int_{\operatorname{tg}\frac{x_0}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\frac{1}{\frac{6y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2}}\cdot\frac{2\,dy}{1+y^2} = -2\int_{\operatorname{tg}\frac{x_0}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\frac{d(y-3)}{(y-3)^2 - 10} =$$

$$= -\,2\cdot\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{y-3-\sqrt{10}}{y-3+\sqrt{10}}\right|\Bigg|_{\operatorname{tg}\frac{x_0}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 - \sqrt{10}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 + \sqrt{10}}\right|.$$

⌟

Приклад 3. *Знайдемо рекурентну формулу для інтеграла Ньютона–Лейбніца* $I_n = \displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\cos^n t}$, *де* $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ *та* $[x_0, x]\bigcap\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\} = \varnothing.$

⌜

Скористаємося формулою інтегрування частинами:

$$I_n = \int_{x_0}^{x}\frac{dt}{\cos^n t} = \left|\begin{array}{cc} u = \dfrac{1}{(\cos t)^{n-2}}, & du = -\dfrac{n-2}{(\cos t)^{n-1}}\cdot(-\sin t)\,dt \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt, & v = \operatorname{tg} t \end{array}\right| =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} t}{\cos^{n-2} t}\Bigg|_{x_0}^{x} - (n-2)\int_{x_0}^{x}\operatorname{tg} t\cdot\frac{\sin t}{\cos^{n-1} t}\,dt =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{\cos^n t} - \frac{1}{\cos^{n-2} t}\right)dt =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\cdot\left(I_n - I_{n-2}\right).$$

Отримали рівність, з якої можна виразити значення інтеграла I_n через I_{n-2}:

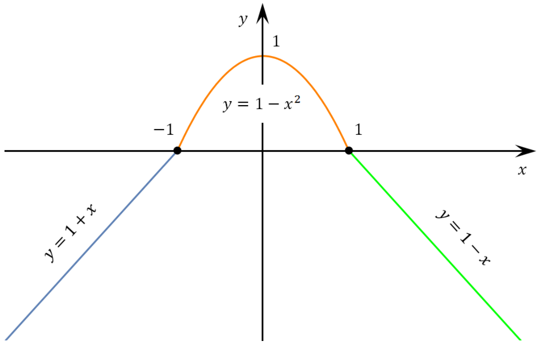
$$I_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \cdot I_{n-2}.$$

$\lrcorner$

Приклад 4. *Знайдемо первісну у широкому розумінні для функції*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leqslant 1; \\ 1 - |x|, & |x| > 1. \end{cases}$$

$\ulcorner$



Побудуємо графік функції $f(x)$. На проміжках $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ та $(1, +\infty)$ функція f має первісну F, причому

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + x + C_1, & x < -1; \\ x - \dfrac{x^3}{3} + C_2, & x \in (-1, 1); \\ -\dfrac{x^2}{2} + x + C_3, & x > 1. \end{cases}$$

Співвідношення між сталими C_1, C_2 та C_3 визначимо з умови неперервності первісної F на множині $D_f = \mathbb{R}$: $F(-1-0) = F(-1+0)$, $F(1-0) = F(1+0)$. Тому

$$\frac{1}{2} - 1 + C_1 = -1 + \frac{1}{3} + C_2, \quad 1 - \frac{1}{3} + C_2 = -\frac{1}{2} + 1 + C_3.$$

Отже, $C_1 = C_2 - \dfrac{1}{6}$ та $C_3 = C_2 + \dfrac{1}{6}$, звідки первісна функції f:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{1}{6} + C, & x < -1; \\ x - \dfrac{x^3}{3} + C, & x \in [-1, 1]; \\ -\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{6} + C, & x > 1. \end{cases}$$

$\lrcorner$

Обчисліть інтеграли Ньютона–Лейбніца:

18.1 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sin^3 t \cdot \sin 4t \, dt;$

18.2 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sin^2 t \cdot \cos^3 t \, dt;$

18.3 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t} \, dt;$

18.4 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sin^4 t \cdot \cos^2 t};$

18.5 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sin 2t};$

18.6 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\cos t};$

18.7 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{3 - 2\cos t};$

18.8 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{5 - 3\sin t};$

18.9 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{1 + 5\cos t};$

18.10 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{2\sin t - \cos t + 5};$

18.11 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{8\cos^2 t \sin t}{\sin t + \cos t}\, dt;$

18.12 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{2\sin t \cos t}{1 + \sin^4 t}\, dt.$

Знайдіть рекурентні формули для інтегралів Ньютона–Лейбніца:

18.13 $\displaystyle I_n = \int_{x_0}^{x} \cos^n t\, dt,\ n \in \mathbb{N};$

18.14 $\displaystyle J_n = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sin^n t},\ n \in \mathbb{N}.$

Знайдіть первісні у широкому розумінні для функцій:

18.15 $f(x) = \operatorname{sgn}\, x,\ \ x \in \mathbb{R};$

18.16 $f(x) = \operatorname{sgn}\big(x^2 + x - 2\big),\ x \in \mathbb{R};$

18.17 $f(x) = [3x],\ \ x \in \left(0, \dfrac{4}{3}\right);$

18.18 $f(x) = \{x\},\ \ x \in (-1, 2);$

18.19 $$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0; \\ x, & 0 < x \leqslant 1; \\ \sin \pi x, & x > 1. \end{cases}$$

18.20 $$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant \dfrac{\pi}{4}; \\ \cos x, & \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 3\sin 3x, & x \geqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Розділ 6. Інтеграл Рімана

Тема 15. Означення інтеграла Рімана та його зв'язок з інтегралом Ньютона–Лейбніца

Сукупність точок $P = P([a,b]) = \left\{x_k \mid k = \overline{0,n}\right\}$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, таких, що
$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b,$$
називається ***розбиттям*** відрізка $[a,b]$. Множина точок $\xi_P = \left\{\xi_k \mid k = \overline{0,n-1}\right\}$: $\forall k = \overline{0,n-1} \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ називається ***сукупністю проміжних точок***, що відповідає розбиттю P. Величина $\|P\| = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}} \Delta x_k$, де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, називається ***діаметром (нормою) розбиття*** P.

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. ***Інтегральною сумою Рімана*** для функції f по розбиттю $P = P([a,b])$ і набору проміжних точок ξ_P називається число
$$S_P(f,\xi_P) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Число $I \in \mathbb{R}$ називається ***інтегралом Рімана*** функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:
$$\forall \left(P = P([a,b]), \xi_P\right),\ \|P\| < \delta \ \Rightarrow\ |I - S_P(f,\xi_P)| < \varepsilon.$$

При цьому зазвичай число I записують таким чином: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\|P\|\to 0} S_P(f,\xi_P) = I$, яка не залежить ні від способу розбиття, ні від вибору сукупності проміжних точок, то f — ***інтегровна за Ріманом*** функція, а сама границя $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Множина функцій, інтегровних за Ріманом на відрізку $[a,b]$, позначається як $R([a,b])$.

Теорема (про інтегральні суми для інтеграла Ньютона–Лейбніца). Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровна в розумінні Ньютона–Лейбніца на $[a,b]$ і $\int_a^b f(x)\,dx$ — інтеграл Ньютона–Лейбніца. Тоді $\forall P = P([a,b])$ існує така ξ_P, що виконується рівність:
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot(x_{k+1} - x_k) = S_P(f,\xi_P)\,.$$

Теорема (про зв'язок інтегралів Рімана та Ньютона–Лейбніца). Якщо інтеграли Рімана та Ньютона–Лейбніца функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ існують одночасно, то вони рівні один одному.

Теорема (інтегровність неперервної функції). Якщо $f \in C([a,b])$, то f — інтегровна за Ріманом на відрізку $[a,b]$. Тобто $C([a,b]) \subset R([a,b])$.

Теорема (інтегровність функції зі скінченною множиною точок розриву). Якщо функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ обмежена на $[a,b]$ та $f \in C([a,b]\backslash A)$, де $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subset [a,b]$, то f — інтегровна за Ріманом на відрізку $[a,b]$.

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — обмежена на відрізку $[a,b]$ функція. Для кожного $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ визначимо числа $m_k = \inf\limits_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$ та $M_k = \sup\limits_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x)$. Тоді ***нижньою*** та ***верхньою інтегральними сумами Дарбу*** для функції f і розбиття $P = P([a,b])$ називаються, відповідно, числа

$$\underline{S_P}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \overline{S_P}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Числа $\underline{\int} f(x)\,dx = \sup\limits_P \underline{S_P}(f)$ та $\overline{\int} f(x)\,dx = \inf\limits_P \overline{S_P}(f)$ називаються, відповідно, ***нижнім*** та ***верхнім інтегралами Дарбу*** функції f на відрізку $[a,b]$.

Лема (зв'язок між інтегралами Дарбу). Для будь-якої обмеженої функції $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ виконується нерівність: $\underline{\int} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int} f(x)\,dx$.

Функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ називається ***інтегровною за Дарбу*** на $[a,b]$, якщо $\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx$. При цьому спільне значення верхнього та нижнього інтегралів називається ***інтегралом Дарбу***, який співпадає з інтегралом Рімана і позначається $\int_a^b f(x)\,dx$.

Теорема (критерій інтегровності функції). Для того, щоб обмежена функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ була інтегровною на $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P = P([a,b]) : \ 0 \leqslant \overline{S_P}(f) - \underline{S_P}(f) < \varepsilon.$$

Теорема (Дарбу). [9, с. 142] Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, а також задано розбиття $P = P([a,b])$ та набір проміжних точок ξ_P. Якщо $\exists \lim\limits_{\|P\| \to 0} S_P(f, \xi_P) = I$, то $f \in R([a,b])$ і при цьому $\int_a^b f(x)\,dx = I$.

Для формулювання критерію інтегровності за Ріманом (теорема Лебега) розглянемо деякі нові поняття.

Мірою сегмента $[a,b]$ (інтервалу (a,b), півінтервалу $[a,b)$ чи $(a,b]$) називають його довжину: $\mu([a,b]) = b - a$.

Множина $X \subset \mathbb{R}$ має ***лебегову*** (***жорданову***) ***міру нуль***, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує зліченне покриття $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ (скінченне покриття $(I_j)_{j=\overline{1,n}}$) інтервалами, сумарна довжина яких не перевищує ε, тобто $\forall m \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu(I_j) < \varepsilon$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \mu(I_j) < \varepsilon\right)$.

Властивості множин лебегової та жорданової міри нуль.

1. Якщо X має лебегову (жорданову) міру нуль, і $X_1 \subset X$, то й X_1 має лебегову (жорданову) міру нуль.

2. Якщо $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$ $\left(X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j\right)$ і кожна з множин X_j має лебегову (жорданову) міру нуль, то множина X також має лебегову (жорданову) міру нуль.

3. Будь-яка множина жорданової міри нуль є множиною лебегової міри нуль.

4. Будь-яка зліченна (скінченна) множина точок має лебегову (жорданову) міру нуль.

5. Існує більш ніж зліченна (більш ніж скінченна) множина, що має лебегову (жорданову) міру нуль.

Теорема (компакт лебегової міри нуль). Компакт $K \subset \mathbb{R}$ лебегової міри нуль є множиною жорданової міри нуль.

Теорема (Лебега). Нехай $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — обмежена функція і E — множина точок її розриву. Тоді $f \in R([a,b]) \Leftrightarrow \mu(E) = 0$.

Властивості інтегровних за Ріманом функцій [1, с. 250].

Нехай функції $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровні за Ріманом на відрізку $[a,b]$.

1. *Лінійність*: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ функція $(\lambda f + \mu g) \in R([a,b])$ та

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

2. *Інтегровність модуля*: $|f| \in R([a,b])$.

3. *Інтегровність добутку*: $f \cdot g \in R([a,b])$.

4. *Інтегровність звуження*: $\forall\, [a^*, b^*] \subset [a,b] \;\; f \in R([a^*, b^*])$.

5. *Адитивність по області інтегрування*: якщо $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$, $f \in R([a,c])$ та $f \in R([c,b])$, то $f \in R([a,b])$ і

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

6. *Інтеграл Рімана з нерівними функціями*: якщо $f(x) \leqslant g(x) \;\; \forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx.$$

Наслідок (інтеграл від невід'ємної функції). Якщо $f \in R([a,b])$ та $f(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$.

Наслідок (інтеграл Рімана від додатної функції). Якщо $f \in R([a,b])$, $f(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \in [a,b]$, та $\exists x_0 \in (a,b)$, що f неперервна в точці x_0 і $f(x_0) > 0$, то $\exists c > 0$: $\int_a^b f(x)\, dx \geqslant c$.

Наслідок (двобічна оцінка інтеграла). Якщо $f \in R([a,b])$ та $\forall x \in [a,b]$ виконується нерівність $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M(b-a)$.

Наслідок (модуль інтеграла). Якщо $f \in R([a,b])$, то

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Практичне заняття 19

Приклад 1. *Для функції $f(x) = 2 - x$, $x \in [a, b] = [-1, 3]$, побудуємо нижню та верхню інтегральні суми Дарбу із розбиттям сегмента $[a, b]$ на $4n$ рівних частин та обчислимо інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ як границю інтегральних сум.*

⌜

Відповідно до умови, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{4n} = \dfrac{1}{n}$ $\forall k = \overline{0, 4n-1}$. Тому маємо таке розбиття відрізка $[a, b]$: $x_0 = -1$, $x_1 = -1 + \dfrac{1}{n}$, $\ldots$, $x_{4n} = -1 + \dfrac{4n}{n} = 3$.

Оскільки функція $f(x) = 2 - x$ є монотонно спадною на відрізку $[a, b]$, то $\forall k = \overline{0, 4n-1}$:

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}) = 2 - x_{k+1} = 3 - \frac{k+1}{n};$$

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = 2 - x_k = 3 - \frac{k}{n}.$$

Обчислимо нижню та верхню інтегральні суми Дарбу:

$$\underline{S_{P_{4n}}}(f) = \sum_{k=0}^{4n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{4n-1} \left(3 - \frac{k+1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot 12n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{4n-1} (k+1) =$$
$$= 12 - \frac{4n(4n+1)}{2n^2} = 4 - \frac{2}{n};$$
$$\overline{S_{P_{4n}}}(f) = \sum_{k=0}^{4n-1} M_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{4n-1} \left(3 - \frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot 12n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{4n-1} k =$$
$$= 12 - \frac{(4n-1)4n}{2n^2} = 4 + \frac{2}{n}.$$

При цьому оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S_{P_{4n}}}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S_{P_{4n}}}(f) = 4$, то $\int_{-1}^{3} (2 - x)\,dx = 4$. ⌟

Приклад 2. *Обчислимо інтеграл Рімана $\int_0^2 a^x\,dx$, де $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0, 1\}$, як границю інтегральних сум.*

⌜

Функція $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, є неперервною і тому інтегровною за Ріманом на відрізку $[0, 2]$. Тому існує границя інтегральних сум, що за теоремою Дарбу співпадає з інтегралом Рімана:

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_P(f, \xi_P) = \int_0^2 a^x\,dx.$$

Для обчислення цієї границі розіб'ємо відрізок $[0, 2]$ на $2n$ рівних частин:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2n-1}{n}, 2\right\},\ n \geqslant 1,$$

та оберемо набір проміжних точок

$$\xi_{P_n} = \left\{ \xi_k = \frac{k}{n} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \;\middle|\; k = \overline{0, 2n-1} \right\}, \ n \geqslant 1.$$

Тоді $\Delta x_k = \dfrac{1}{n} \ \ \forall k = \overline{0, 2n-1}$ та

$$S_{P_n}(f, \xi_{P_n}) = \sum_{k=0}^{2n-1} a^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a^2 - 1}{a^{\frac{1}{n}-1}} \cdot \frac{1}{n} \to \frac{a^2-1}{\ln a} = \int_0^2 a^x \, dx, \ n \to \infty.$$

┘

Приклад 3. *Дослідимо інтегровність за Ріманом функції Діріхле на довільному відрізку* $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]; \\ 0, & x \in [a, b] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

┌

Множина точок розриву функції Діріхле — весь відрізок $[a, b]$, тобто її мірою є довжина відрізка $b - a$. Звідси за теоремою Лебега маємо, що функція $D \notin R([a, b])$ для довільних $-\infty < a < b < +\infty$.

Також цей факт можна довести за означенням інтеграла Рімана як границі інтегральних сум. Для цього покажемо, що не існує границі інтегральних сум функції Діріхле. Оберемо довільне розбиття відрізка $P = P([a, b]) = \left\{x_k \,|\, k = \overline{0, n}\right\}$. Для кожного проміжку розбиття $[x_k, x_{k+1}]$ існують точки $\xi_k \in \mathbb{Q} \cap [x_k, x_{k+1}]$ та $\theta_k \in [x_k, x_{k+1}] \backslash \mathbb{Q}$. Складемо дві інтегральні суми Рімана для функції Діріхле по розбиттю P і наборів проміжних точок $\xi_P = \left\{\xi_k \,|\, k = \overline{0, n-1}\right\}$ та $\theta_P = \left\{\theta_k \,|\, k = \overline{0, n-1}\right\}$:

$$S_P(f, \xi_P) = \sum_{k=0}^{n-1} D(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 = b - a;$$

$$S_P(f, \theta_P) = \sum_{k=0}^{n-1} D(\theta_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0.$$

Очевидно, що не існує границі інтегральних сум функції Діріхле на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

┘

Приклад 4. *Доведемо збіжність послідовності* $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3 + k^2 n}$, $n \geqslant 1$, *та виразимо значення границі цієї послідовності через визначений інтеграл.*

┌

Перетворимо вираз із a_n так, щоб він набув вигляду, схожого до інтегральної суми Рімана:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2 + k^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n^2}{n^3 + n^2 \cdot n} - \frac{0^2}{n^3 + 0^2 \cdot n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $x \in [0,1]$, значення якої присутні у сумі. Оскільки $f \in C([0,1])$, то $f \in R([0,1])$. Таким чином, $a_n - \dfrac{1}{2n}$ є інтегральною сумою Рімана для функції f по рівномірному розбиттю

$$P_n = P_n([0,1]) = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\},\ n \geqslant 1,$$

відрізка $[0,1]$ та набору проміжних точок

$$\xi_{P_n} = \left\{ \frac{k}{n} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \,\middle|\, k = \overline{0, n-1} \right\},\ n \geqslant 1.$$

Тобто $a_n = S_{P_n}(f, \xi_{P_n}) + \dfrac{1}{2n}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, то

$$a_n \to \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = (x - \operatorname{arctg} x)\,\Big|_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4},\ n \to \infty.$$

$\lrcorner$

Для заданої функції $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ побудуйте нижню та верхню інтегральні суми Дарбу із розбиттям сегмента $[a,b]$ на $mn, n \in \mathbb{N}$, рівних частин, якщо:

19.1 $f(x) = x^2,\ [a,b] = [-1,1],\ m = 2;$

19.2 $f(x) = x^3,\ [a,b] = [-2,3],\ m = 1;$

19.3 $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ [a,b] = [-2,1],\ m = 3;$

19.4 $f(x) = |x|,\ [a,b] = [-3,2],\ m = 5;$

19.5 $f(x) = [x],\ [a,b] = [-4,0],\ m = 4;$

19.6 $f(x) = \{x\},\ [a,b] = [1,3],\ m = 2;$

19.7 $f(x) = \max\{x, 1-x\},\ [a,b] = [-2,2],\ m = 8.$

Для заданої функції $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ оцініть різницю між верхньою та нижньою інтегральними сумами Дарбу для деякого розбиття $P = P([-1,1])$. Чи можливо за рахунок отриманої оцінки зробити висновок щодо інтегровності функції f за Ріманом на відрізку $[-1,1]$?

19.8 $f(x) = x;$

19.9 $f(x) = -|x|.$

Обчисліть інтеграли Рімана, розглядаючи їх як границі інтегральних сум Рімана:

19.10 $\displaystyle\int_0^3 \{x\}\,dx;$

19.11 $\displaystyle\int_{-3}^2 \operatorname{sgn} x\,dx;$

19.12 $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^1 [x]\,dx;$

19.13 $\displaystyle\int_{-1}^5 \big(1 + |x|\big)\,dx;$

19.14 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx;$

19.15 $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x^2}.$

Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ за допомогою інтегральних сум та інтеграла Рімана, де:

19.16 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{k}{n^2}$;

19.17 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{n+k}$;

19.18 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(4k-3)^3}{k^4}$;

19.19 $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

19.20 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sin\dfrac{k}{n^2} \cdot \operatorname{arcctg}\dfrac{k}{n^3}$;

19.21 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(1+\dfrac{k}{n}\right) \cdot \sin\dfrac{\pi k}{n^2}$;

19.22 $a_n = n\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n^2}} \cdot \sin\dfrac{k}{n^2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{k^2}{n^3}$;

19.23 $a_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{2^n-1} \left(1+\dfrac{k}{2^n}\right)\right)^{\frac{1}{2^n}}$;

19.24 $a_n = n\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right) \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{k^2}{n^3}$;

19.25 $a_n = n\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{n^4+k^4} \cdot \operatorname{arctg}\dfrac{k}{n} \cdot \sin\dfrac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$.

З'ясуйте, чи є функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ інтегровною за Ріманом на $[a,b]$, якщо:

19.26 $f(x) = [x] \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$, $[a,b] = \left[1, \dfrac{17}{2}\right]$;

19.27 $f(x) = \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$, $[a,b] = \left[\dfrac{1}{3}, 11\right]$;

19.28 $f(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{2}{x}\right] - 2\left[\dfrac{1}{x}\right], & x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $\quad [a,b] = [0,1]$.

Тема 16. Основні теореми інтегрального числення

Теорема (перша теорема про середнє). [1, с. 254] Якщо $\{f, g\} \subset R([a,b])$ та $\forall x \in [a,b]$ $g(x) \geqslant 0$ $(g(x) \leqslant 0)$, то існує таке $\mu \in \mathbb{R}$, що має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx, \tag{2}$$

де $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = m \leqslant \mu \leqslant M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Наслідок (для неперервної функції). Якщо в умовах першої теореми про середнє $f \in C([a,b])$, то існує $\xi \in [a,b]$ таке, що формула (2) набуває вигляду:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Наслідок (формула середнього значення). Якщо $f \in C([a,b])$, то існує $\xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

Теорема (заміна змінної в інтегралі Рімана). Якщо $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$; $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ є диференційовною на $[\alpha,\beta]$ і $\varphi' \in R([\alpha,\beta])$, $E_\varphi \subset D_f$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, тоді має місце рівність:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

Теорема (інтегрування частинами). Нехай $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ — диференційовні функції та $f'\cdot g \in R([a,b])$. Тоді $f\cdot g' \in R([a,b])$ і виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx,$$

Інтеграл Рімана як функція верхньої межі

Якщо $f \in R([a,b])$ та $x \in [a,b]$ — довільна точка, то за властивістю інтегровності звуження $f \in R([a,x])$. Таким чином, можемо визначити функцію $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, де

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b].$$

$\Phi(x)$ визначає інтеграл Рімана як *функцію верхньої межі інтегрування.*

Теорема (про неперервність $\Phi(x)$). Якщо $f \in R([a,b])$, то $\Phi \in C([a,b])$.

Теорема (основна теорема інтегрального числення). Якщо функція $f \in R([a,b])$, то функція $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, де $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, диференційовна в кожній точці $x \in [a,b]$, в якій функція f — неперервна і $\Phi'(x) = f(x)$.

Наслідок 1. Якщо $f \in C([a,b])$, то функція f має на сегменті $[a,b]$ первісну Φ, де $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Наслідок 2. Якщо $f \in R([a,b])$ і множина точок розриву функції f не більш ніж зліченна, то функція $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, де $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, є *первісною (у широкому розумінні)* функції f на сегменті $[a,b]$.

Теорема (основна формула інтегрального числення). Якщо функція $f \in R([a,b])$ і множина точок розриву функції f не більш ніж зліченна, а F — будь-яка первісна (у широкому розумінні) функції f на сегменті $[a,b]$, то виконується рівність (*формула Ньютона-Лейбніца*):

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \overset{def}{=} F(b) - F(a).$$

Теорема (друга теорема про середнє). [1, с. 257] Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ є монотонною функцією, $g \in R([a,b])$. Тоді $\exists \xi \in [a,b]$, для якого виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Якщо при цьому f — незростаюча на $[a,b]$ і $f(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in [a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx$. Якщо f — неспадна на $[a,b]$ і $f(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in [a,b]$, то $\exists \xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$.

Інтеграл Рімана як складна функція верхньої межі інтегрування

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$, $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $E_\varphi \subset [a,b]$, існує похідна функції $\varphi'(x)$ $\forall x \in [\alpha,\beta]\backslash X$ (за виключенням не більше, ніж зліченної множини точок $X \subset [\alpha,\beta]$). Розглянемо $\Phi(x) = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(y)\,dy$, де $\varphi(x_0) = t_0 \in [a,b]$. Можемо розглядати цей інтеграл як композицію $F \circ \varphi :\ F(t) = \int_{t_0}^t f(y)\,dy$, $t \in [a,b]$, $\Phi(x) = (F \circ \varphi)(x)$. За правилом знаходження похідної складної функції будемо мати $\Phi = F \circ \varphi$, $\Phi'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, тобто отримали, що $\dfrac{d}{dx}\Phi(x) = \dfrac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(y)\,dy = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

Якщо розглянути інтеграл Рімана як складну функцію нижньої межі інтегрування і об'єднати обидва випадки, то отримаємо:

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y)\,dy = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \tag{3}$$

Наближене обчислення інтеграла Рімана

Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in R([a,b])$. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n рівних проміжків: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$, де $a = x_0$, $b = x_n$.

1. Замінюючи площі криволінійних трапецій $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ на площі відповідних прямокутників шириною $\big(x_k - x_{k-1}\big)$ та висотою $f\big(y_k\big)$, $y_k = \dfrac{1}{2}\big(x_{k-1} + x_k\big)$, отримаємо ***формулу прямокутників*** для наближеного обчислення інтеграла Рімана від функції f по проміжку $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + R_n \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right),$$

де R_n — залишковий член, значення якого визначає похибку обчислення. Зокрема, якщо $f \in C^{(2)}([a,b])$, то $\exists \xi \in [a,b]$: $R_n = \dfrac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot f''(\xi)$. Тоді величина *абсолютної похибки* у формулі прямокутників оцінюється так:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \max_{x\in[a,b]} \bigl|f''(x)\bigr|.$$

2. Шляхом заміни $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ на площі відповідних трапецій, дістаємо ***формулу трапецій***:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n} \bigl(f(x_{k-1}) + f(x_k)\bigr) + R_n \approx \frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n} \bigl(f(x_{k-1}) + f(x_k)\bigr),$$

де R_n — залишковий член. За умови, що $f \in C^{(2)}([a,b])$, існує таке $\xi \in [a,b]$: $R_n = -\dfrac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot f''(\xi)$. Тоді справедливою є така оцінка *абсолютної похибки* у формулі трапецій:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{x\in[a,b]} \bigl|f''(x)\bigr|.$$

Практичне заняття 20

Приклад 1. *Оцінимо значення інтеграла* $I = \int\limits_0^1 \dfrac{x^5\,dx}{1+x}$ *за першою теоремою про середнє.*

⌜

Позначимо $f_1(x) = x^5$ та $f_2(x) = \dfrac{1}{1+x}$ для $x \in [0,1]$. Оскільки $\forall x \in [0,1]:$ $f_i(x) \geqslant 0$, $i = \overline{1,2}$, та $\{f_1, f_2\} \subset R([0,1])$ то, згідно із першою теоремою про середнє, можемо оцінити значення інтеграла I двома способами.

1) Оберемо $f_1(x) = x^5$ в якості функції f у першій теоремі про середнє. Тоді існує таке $\mu_1 \in \mathbb{R}$, що має місце рівність:

$$I = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx = \mu_1 \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \mu_1 \cdot \ln 2,$$

де $0 = \inf\limits_{x\in[0,1]} x^5 \leqslant \mu_1 \leqslant \sup\limits_{x\in[0,1]} x^5 = 1$. Тобто $I \in [0, \ln 2]$.

2) Тепер нехай f_2 буде в якості функції f у першій теоремі про середнє. Тоді $\exists\, \mu_2 \in \mathbb{R}$ таке, що:

$$I = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx = \mu_2 \int_0^1 x^5\,dx = \mu_2 \cdot \frac{1}{6},$$

де $\dfrac{1}{2} = \inf\limits_{x\in[0,1]} \dfrac{1}{1+x} \leqslant \mu_1 \leqslant \sup\limits_{x\in[0,1]} \dfrac{1}{1+x} = 1$. Тобто $I \in \left[\dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{6}\right]$. Порівнюючи дві оцінки, можемо зробити висновок, що оцінка значення інтеграла I другим способом — більш точна. ⌟

Приклад 2. *Оцінимо значення* $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x\,dx}{1+x^2}$ *за другою теоремою про середнє.*

⌜

Позначимо $f_1(x) = e^x$ та $f_2(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ для $x \in [0,1]$. Так як обидві функції є монотонними на відрізку $[0,1]$ та $\{f_1, f_2\} \subset R([0,1])$, то застосуємо другу теорему про середнє до оцінювання значення інтеграла I двома способами.

1) Оскільки f_1 зростає на $[0,1]$ та $f_1(x) \geqslant 0\ \ \forall x \in [0,1]$, то $\exists \xi_1 \in [0,1]$:

$$I = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx = f_1(1)\int_{\xi_1}^1 f_2(x)\,dx = e\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\xi_1\right).$$

Маємо, що $\operatorname{arctg}\xi_1 \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, звідки оцінка значення інтеграла: $0 \leqslant I \leqslant \dfrac{e\pi}{4}$.

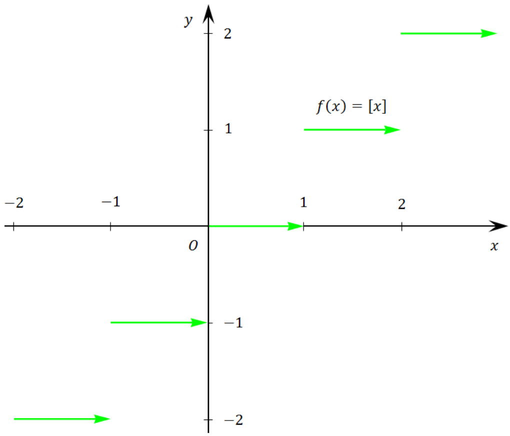
2) Оскільки f_2 — спадна функція на $[0,1]$ та $f_2(x) \geqslant 0\ \ \forall x \in [0,1]$, то $\exists \xi_2 \in [0,1]$:

$$I = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx = f_2(0)\int_0^{\xi_2} f_1(x)\,dx = 1\cdot\left(e^{\xi_2} - 1\right).$$

Маємо, що $e^{\xi_2} \in [1, e]$, звідки оцінка значення інтеграла: $0 \leqslant I \leqslant e - 1$. У підсумку, ця оцінка є більш точною. ⌟

Приклад 3. *Обчислимо* $\int\limits_0^3 [x]\,dx$.

⌜



На довільному проміжку $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, функція f має первісну F:

$$F_{(n,n+1)}(x) = nx + C_n = [x]\cdot x + C_n.$$

Визначимо співвідношення між сталими $\ldots, C_{-2}, C_{-1}, C_0, C_1, C_2, \ldots$ з умови неперервності первісної F на множині $D_f = \mathbb{R}$:

$$F(n-0) = F(n+0),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Тому

$$(n-1)\cdot n + C_{n-1} = n\cdot n + C_n \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad C_n = C_{n-1} - n.$$

Продовжуючи за індукцією, отримаємо $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$C_n = (C_{n-2} - (n-1)) - n = \cdots = C_0 - \sum_{i=1}^{n} i = C_0 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Оскільки $\forall x \in [n, n+1), n \in \mathbb{Z}$: $n = [x]$, то остаточно маємо, що при $C_0 = 0$:

$$F(x) = [x]\cdot x - \frac{n(n+1)}{2} = [x]\cdot x - \frac{[x]\big([x]+1\big)}{2}$$

є первісною для f, неперервною $\forall x \in D_F = D_f$ і при цьому $F'(x) = f(x) = [x]$

$\forall x \in D_f \backslash \mathbb{Z}$. Таким чином, за формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_0^3 [x]\,dx = F(x)\Big|_{x=0}^{x=3} = \left([x]\cdot x - \frac{[x]\big([x]+1\big)}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3} = 3.$$

Також цей результат можна отримати за допомогою властивості адитивності інтеграла Рімана: $f \in R\big([n, n+1]\big)\ \forall n \in \mathbb{Z}$, тому

$$\int_0^3 [x]\,dx = \int_0^1 [x]\,dx + \int_1^2 [x]\,dx + \int_2^3 [x]\,dx = 0 + 1 + 2 = 3.$$

┘

Приклад 4. *Для функції* $f = \int\limits_{xt}^{\sqrt{x^2+t^2}} \cos y^2\,dy$ *знайдемо похідні* $\dfrac{df}{dx}$, *вважаючи* t *фіксованим параметром, та* $\dfrac{df}{dt}$, *вважаючи* x *фіксованим параметром.*

┌

Розглянемо функцію f як складну функцію меж інтегрування і скористаємося формулою (3):

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{xt}^{\sqrt{x^2+t^2}} \cos y^2\,dy = \cos\left(x^2+t^2\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+t^2}} - t\cdot\cos\left(x^2t^2\right);$$
$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{xt}^{\sqrt{x^2+t^2}} \cos y^2\,dy = \cos\left(x^2+t^2\right)\cdot\frac{t}{\sqrt{x^2+t^2}} - x\cdot\cos\left(x^2t^2\right).$$

┘

Приклад 5. *Обчислимо наближене значення інтеграла* $I = \int\limits_3^5 \dfrac{dx}{\ln x}$ *за допомогою формул прямокутників/трапецій із точністю до* 0,01.

┌

Позначимо $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, $x > 1$. Первісна цієї функції визначається інтегральним логарифмом та не виражається у елементарних функціях. Для того, щоб застосувати формули наближеного обчислення інтеграла, визначимо необхідну кількість (n) відрізків розбиття проміжку інтегрування $[3, 5]$. При $x > 1$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x\ln^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2+\ln x}{x^2\ln^3 x}, \quad f'''(x) = -2\cdot\frac{\ln^2 x + 3\ln x + 3}{x^3\ln^4 x}.$$

Оскільки $f''(x)$ є неперервно–диференційовною функцією на множині $(1, +\infty)$ і при цьому $f'''(x) < 0\ \ \forall x > 1$, то $f''(x)$ монотонно спадає на $(1, +\infty)$. Таким чином, $f''(x) \leqslant f''(3)\ \ \forall x \in [3, 5]$. Відповідно до оцінки абсолютної похибки у формулі прямокутників, маємо:

$$|R_n| \leqslant \frac{(5-3)^3}{24n^2}\cdot\max_{x\in[3,5]}\left|f''(x)\right| < 0{,}01 \ \Leftrightarrow\ n^2 > \frac{100\cdot 2^3}{24}\cdot f''(3) \approx 8{,}66 \ \Leftarrow\ n \geqslant 3.$$

Тобто оптимальне значення $n = 3$ для формули прямокутників та $n = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow n^2 > 17{,}32$ для формули трапецій. Згідно із формулою прямокутників:

$$I = \int_3^5 \frac{dx}{\ln x} \approx \frac{5-3}{3}\cdot\left(f\left(\frac{10}{3}\right) + f(4) + f\left(\frac{14}{3}\right)\right) \approx 1{,}4674.$$

З іншого боку, за формулою трапецій отримуємо:

$$I \approx 0{,}2 \cdot \big(f(3) + 2\cdot f(3{,}4) + 2\cdot f(3{,}8) + 2\cdot f(4{,}2) + 2\cdot f(4{,}6) + f(5)\big) \approx 1{,}4736.$$

Справжнє значення $I \approx 1{,}471$ узгоджується із заданою точністю обчислення. $\lrcorner$

Доведіть рівності:

20.1 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$, якщо $f \in C\big([0,1]\big)$;

20.2 $\displaystyle\int_0^{a} x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} t f(t)\,dt$, якщо $a > 0$ та $f \in C\left(\left[0,a^2\right]\right)$;

20.3 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\,dt}{\sin t}$.

Обчисліть інтеграли Рімана:

20.4 $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left|x^2 - 1\right|\,dx$;

20.5 $\displaystyle\int_0^{2} |1 - x|\,dx$;

20.6 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$;

20.7 $\displaystyle\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx$;

20.8 $\displaystyle\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$;

20.9 $\displaystyle\int_0^{4} [x^2]\,dx$;

20.10 $\displaystyle\int_{-2\pi}^{8\pi} [\cos x]\,dx$;

20.11 $\displaystyle\int_2^{\pi-1} \{x^2 - 1\}\,dx$;

20.12 $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{x + x^3}$;

20.13 $\displaystyle\int_1^{2} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

Зробіть вказані заміни змінних у інтегралах (якщо це можливо):

20.14 $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{x^2 + 1}\,dx, \quad x = \frac{1}{\cos t}$;

20.15 $\displaystyle\int_0^{3} x\sqrt[3]{1 - x^2}\,dx, \quad x = \sin t$;

20.16 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{12 - 5\cos x}, \quad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

20.17 $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx, \ f \in R\big([0,\pi]\big), \quad t = \sin x$;

20.18 $\displaystyle\int_4^{7} (x^2 - 6x + 13)\,dx, \quad t = x^2 - 6x + 13$.

Чи справедливе формальне застосування формули Ньютона–Лейбніца у інтегралах:

20.19 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$;

20.20 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x\,(2 + \operatorname{tg}^2 x)}$;

20.21 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx$;

20.22 $\displaystyle\int_{-2}^{3} \operatorname{sgn}\, x\,dx$?

Знайдіть на області визначення похідні $\dfrac{df}{dx}$, вважаючи t фіксованим параметром, та $\dfrac{df}{dt}$, вважаючи x фіксованим параметром, якщо:

20.23 $f = \displaystyle\int\limits_{t^2\sin\sqrt{t}}^{x^2 t} \frac{e^y}{y}\,dy$;

20.24 $f = \displaystyle\int\limits_{\sin(t+x)}^{\cos(t^2+x^2)} y^2 \cos\sqrt{y}\,dy$.

Знайдіть границі:

20.25 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,dt$;

20.26 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} \operatorname{arctg} t^2\,dt}{\int\limits_{x^3}^{x^5} \operatorname{arctg} t\,dt}$;

20.27 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}\,dt}$;

20.28 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t^2}{t}\,dt}{\int\limits_{x^2}^{x^4} \sin t^{\frac{3}{2}}\,dt}$.

З'ясуйте, значення якого з двох інтегралів більше:

20.29 $\displaystyle\int_1^2 \ln^2 x\,dx$ чи $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx$?

20.30 $\displaystyle\int_0^1 2^{x^2}\,dx$ чи $\displaystyle\int_0^1 2^{x^3}\,dx$?

20.31 $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$ чи $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} x\sin x\,dx$?

20.32 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\,dx$ чи $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$?

20.33 $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ чи $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$?

Оцініть значення інтегралів за допомогою теорем про середнє:

20.34 $\displaystyle\int_0^2 e^{x^2-x}\,dx$;

20.35 $\displaystyle\int_0^{100} \frac{e^{-x}\,dx}{x+100}$;

20.36 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,dx$;

20.37 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{19}\,dx}{\sqrt[3]{1+x^6}}$;

20.38 $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \sin x^2\,dx$;

20.39 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\cos x\,dx}{1+x^2}$;

20.40 $\displaystyle\int_{10}^{20} \frac{x^2\,dx}{x^4+x+1}$;

20.41 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} (x-1)\operatorname{arctg} x\,dx$.

Обчисліть наближені значення інтегралів за допомогою формул прямокутників/трапецій із точністю до 0,01:

20.42 $\displaystyle\int_2^3 \frac{e^x}{x+1}\,dx$;

20.43 $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+x^4}\,dx$.

Тема 17. Застосування інтеграла Рімана

Площа плоскої фігури в декартових прямокутних координатах. Нехай $f(x)$ — неперервна невід'ємна на $[a,b]$ функція. *Площа* S множини $\Phi = \{(x,y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ (криволінійної трапеції) дорівнює

$$S \stackrel{def}{=} S\big([a,b]\big) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Якщо $f(x) \leqslant 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$ і за абсолютною величиною він дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції $-S = \int_a^b f(x)\,dx$.

Площа, обмежена кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$, ординатами $x = a$, $x = b$ за умови $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx. \tag{5}$$

Випадок параметричної функції. Нехай функція $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$. При цьому функції $x(t), y(t)$ неперервно–диференційовні та $x^2(t) + y^2(t) \neq 0$ $\forall t \in [\alpha,\beta]$, а також крива є замкненою: $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$. Тоді:

$$S(\Phi) = \int_\alpha^\beta x(t)\cdot y'(t)\,dt. \tag{6}$$

Площа плоскої фігури в полярних координатах. *Криволінійним сектором* називається плоска фігура, що обмежена неперервною кривою і променями, які виходять з полюса O і утворюють з полярною віссю кути φ_1 та φ_2: $\Phi = \big\{(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, 0 \leqslant \rho \leqslant f(\varphi),\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\big\}$. Тоді:

$$S \stackrel{def}{=} S\big([\varphi_1,\varphi_2]\big) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\,d\varphi. \tag{7}$$

Довжина дуги кривої. Нехай $f \in C^{(1)}\big([a,b]\big)$ та крива задана рівнянням $L = f(x)$ у прямокутних координатах. *Довжина дуги AB кривої L*, що міститься між вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$, визначається формулою

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx. \tag{8}$$

Якщо крива γ задана у полярних координатах: $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, де $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, то її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \big(\rho'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi. \tag{9}$$

Якщо крива γ задана параметрично, тобто $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, і при цьому $\{\varphi,\psi\} \subset C^{(1)}\big([t_1,t_2]\big)$, то її довжина визначається за формулою:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\cdot\varphi'(t)\,dt. \tag{10}$$

Обчислення об'ємів. Якщо тіло T має об'єм і $S = S(x)$, $x \in [a, b]$, де $S \in C([a, b])$ — площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі абсцис у точці x, то величина цього об'єму обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x)\, dx. \tag{11}$$

Якщо криволінійна трапеція $\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, де $f \in C([a, b])$, обертається навколо вісі Ox, то *об'єм* утвореного *тіла обертання* обчислюється за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{12}$$

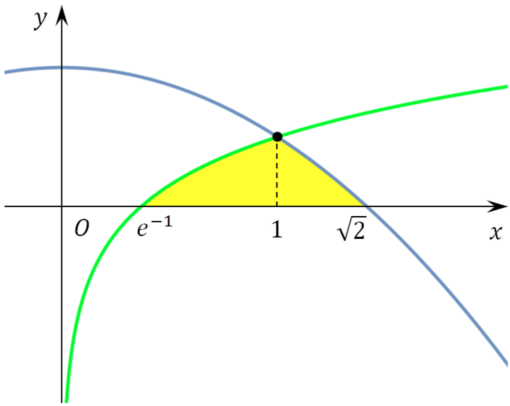
Також за умови, що f є однозначною функцією, об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції Φ навколо вісі Oy, обчислюється за формулою:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx. \tag{13}$$

Практичне заняття 21

Приклад 1. *Обчислимо площу фігури, обмеженої кривими $y = 2 - x^2$, $y = 0$ та $y = \ln x + 1$ у прямокутній декартовій системі координат.*

⌜



Позначимо функції $f_1(x) = 2 - x^2$ та $f_2(x) = \ln x + 1$. Оскільки f_2 монотонно зростає на $D_{f_2} = (0, +\infty)$ і при цьому f_1 — монотонно спадна на тій же множині, то існує єдина точка перетину заданих кривих, абсциса якої дорівнює $x_0 = 1$.

Також можна визначити абсциси точок перетину кривих із віссю Ox:

$$2 - x^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2};$$

$$\ln x + 1 = 0 \iff x = e^{-1}.$$

Використовуючи формулу (4) та властивість лінійності інтеграла Рімана, маємо:

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \big(\ln x + 1\big)\, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \big(2 - x^2\big)\, dx = x \ln x \,\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{e} + \frac{5 + 4\sqrt{2}}{3}.$$

⌟

Приклад 2. *Обчислимо площу фігури, обмеженої петлею лемніскати Бернуллі: $\big(x^2 + y^2\big)^2 = a^2\big(x^2 - y^2\big)$, де $a > 0$.*

⌜

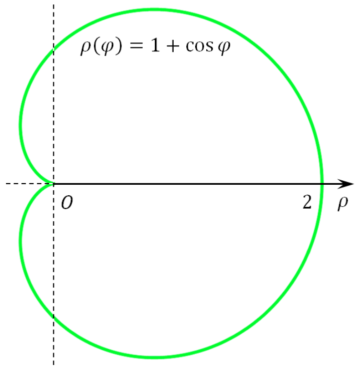
Перейдемо до полярної системи координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тоді рівняння лемніскати можна переписати таким чином: $\rho^4 = a^2\rho^2\cos 2\varphi$. Враховуючи невід'ємність полярного радіуса, маємо таке рівняння кривої: $\rho = |a|\sqrt{\cos 2\varphi}$, де кут $\varphi \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left[\frac{3\pi}{4} + \pi n, \frac{5\pi}{4} + \pi n\right] \bigcap \mathbb{R}^+$. Тоді, згідно із формулою (7), маємо:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \rho^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d(2\varphi) = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}. \lrcorner$$

Приклад 3. *Обчислимо довжину дуги кардіоїди:* $\rho = 1 + \cos\varphi$.

$\ulcorner$

Оскільки $\forall\varphi \geqslant 0\colon \rho(\varphi) \geqslant 0$, а також за рахунок симетричності графіка кардіоїди відносно полярної вісі, досить обрати довільний проміжок $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 + \pi$ та застосувати формулу (9) для обчислення довжини дуги цієї кривої:



$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi =$$

$$= 8\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\Big(\frac{\varphi}{2}\Big) = 8\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8.$$

$\lrcorner$

Приклад 4. *Обчислимо довжину дуги однієї арки циклоїди:* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, *де* $a > 0$.

$\ulcorner$

Зафіксуємо деяке початкове значення параметра t_1. Враховуючи періодичність функції $\cos t$, маємо, що $y(t_1 + 2\pi n) = y(t_1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому одна арка циклоїди відповідає зміні параметра t на величину 2π. Нехай $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. При цьому маємо: $x(t_1) = y(t_1) = y(t_2) = 0$, $x(t_2) = 2a\pi$. Для обчислення довжини дуги застосуємо формулу (10):

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{(a(1-\cos t))'}{(a(t-\sin t))'}\right)^2} \cdot \big(a(t - \sin t)\big)'\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}} \cdot a(1-\cos t)\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, d\Big(\frac{t}{2}\Big) = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

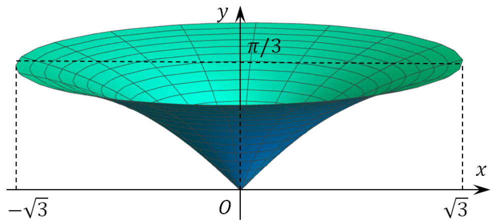
$\lrcorner$

Приклад 5. *Знайдемо об'єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо вісі* Oy*, що обмежена лініями* $y = \operatorname{arctg} x$, $y = 0$ *та* $y = \frac{\pi}{3}$.

$\ulcorner$

Крива $y = \operatorname{arctg} x$ і пряма $y = \frac{\pi}{3}$ перетинаються у одній точці із абсцисою $x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Застосуємо формулу (13):

$$V_y = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot\operatorname{arctg} x\,dx =$$



$$= \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \operatorname{arctg} x\,dx, & v = \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2\pi x}{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} - 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - 2\pi\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Обчисліть площі фігур, обмежених кривими у прямокутній декартовій СК:

21.1 $y = x^2,\ y = x^4$;

21.2 $x^2 + y^2 = 4x,\ y = x$;

21.3 $y = \dfrac{1}{1+x^2},\ y = \dfrac{x^2}{2}$;

21.4 $y = \dfrac{16}{x^2},\ y = 17 - x^2,\ x > 0$;

21.5 $xy = 20,\ x^2 + y^2 = 41,\ x \geqslant 0$;

21.6 $y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 8$;

21.7 $y = \sin^3 x,\ y = \cos^3 x,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$;

21.8 $y = 2^x,\ y = 2,\ x = 0$.

Обчисліть площі фігур, обмежених кривими у полярній СК:

21.9 $\rho = a\sin 3\varphi,\ a > 0,\ \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$;

21.10 $\rho = \sin^2\dfrac{\varphi}{2},\ \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

21.11 $\rho = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0$;

21.12 $\rho = 2\cos\varphi,\ \rho \geqslant 1$.

Обчисліть площі фігур, обмежених петлями кривих, що задані параметрично або неявно (параметр $a > 0$):

21.13 $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3$;

21.14 $x = \cos^3 t,\ y = \sin t$;

21.15 $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy$;

21.16 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

Знайдіть довжини дуг кривих або петель кривих (параметр $a > 0$):

21.17 $y = \ln x,\ x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$;

21.18 $\rho = a\sin\varphi$;

21.19 $\rho = \dfrac{a}{1+\cos\varphi},\ \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

21.20 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

21.21 $x = \sqrt{3}t^2,\ y = t - t^3$;

21.22 $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ t \in [0, \ln\pi]$.

Знайдіть об'єми тіл, обмежених поверхнями:

21.23 $x^2 + y^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2$;

21.24 $2z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9},\ z^2 = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$;

21.25 $x + y + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями

21.26 $y = 2x - x^2,\ y = 0$, навколо: а) вісі Ox; б) вісі Oy;

21.27 $xy = 4,\ x = 1$ та $y = 0$, навколо вісі Ox;

21.28 $y = e^x,\ x = 0,\ x = 2$ та $y = 0$, навколо: а) вісі Ox; б) вісі Oy.

Відповіді та вказівки

15.1 $\frac{1}{4}x^4+x^2-4x-\ln|x|-\frac{11}{x}+C,\ x\neq 0$; **15.2** $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C$; **15.3** $\ln|x|+ +2\operatorname{arctg} x+C,\ x\neq 0$; **15.4** $x+\sin x+C$; **15.5** $\cos x+C$; **15.6** $\operatorname{tg} x-x+C$; **15.7** $\frac{1}{4}\operatorname{ch} 2x+C$; **15.8** $3\cdot\left(\frac{3}{e}\right)^x\cdot\left(\ln\frac{3}{e}\right)^{-1}+\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{x}{e}+C$; **15.9** $-\frac{1}{8(2x-3)^4}+C$, $x\neq\frac{3}{2}$; **15.10** $\frac{3}{56}\sqrt[3]{(5-8x)^7}+C$; **15.11** $-\frac{1}{3}e^{-3x+1}+C$; **15.12** $-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$; **15.13** $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}x+C$; **15.14** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C,\ |x|\leqslant\frac{2}{3}$; **15.15** $\frac{1}{2}x^2+2\ln|x^2-4|$, $x\neq\pm 2$; **15.16** $\frac{1}{b^2}\sqrt{b^2x^2+a^2}$; **15.17** $-\frac{1}{5}\cos(x^5+3)$; **15.18** $\frac{1}{3b^2}(b^2x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}$; **15.19** $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}},\ x\neq 0$; **15.20** $e^{\sin x}$; **15.21** $\ln|\ln x|,\ x>0$; **15.22** $\ln|\ln\ln x|,\ x>e$.

16.1 $2x-\ln|2x+1|,\ x\neq-\frac{1}{2}$; **16.2** $x-2\operatorname{arctg} x$; **16.3** $x^3-\frac{3}{2}x^2+9x+\ln|x-1|- -16\ln|x+2|,\ x\notin\{-2,1\}$; **16.4** $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg} x,\ x\neq 1$; **16.5** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|- -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x,\ x\neq\pm 1$; **16.6** $\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|,\ x\notin\{2,5\}$; **16.7** $\frac{2}{x-3}+3\ln|x+2|- -3\operatorname{arctg}(x+2)-\ln(x^2+4x+5),\ x\notin\{-2,3\}$; **16.8** $3\ln|x-1|+\ln\sqrt{x^2+1}+ +\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arctg} x\right),\ x\neq 1$; **16.9** $x\sin x+\cos x$; **16.10** $-e^{-x}(x+1)$; **16.11** $\frac{1}{2}e^x\cdot \cdot(\sin x-\cos x)$; **16.12** $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x},\ x\geqslant 0$; **16.13** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$, $|x|\leqslant 1$; **16.14** $x\cdot(\arcsin x)^2+2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x,\ |x|\leqslant 1$; **16.15** $x\operatorname{tg} x-\frac{x^2}{2}+ +\ln|\cos x|,\ x\notin\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; **16.16** $(x^3+1)\cdot\ln(1+x)-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x,\ x>-1$; **16.17** $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x),\ x>0$; **16.18** $\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{arctg} x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

17.1 $\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}+2\sqrt[6]{x^3}+3\sqrt[6]{x^2}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|,\ x\notin\{0,1\}$; **17.2** $\ln\frac{|x|}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+ +\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}},\ x\neq 0$; **17.3** $\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+\frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}$, $x\neq 1$; **17.4** $6\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot\left(\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{x+1}{5}+\frac{\sqrt{x+1}}{7}+\frac{1}{4}\right),\ x\neq-1$; **17.5** $\frac{3}{4}y^4-\frac{3}{2}y^2- -\frac{3}{4}\ln|y-1|+\frac{15}{8}\ln(y^2+y+2)-\frac{27}{8\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2y+1}{\sqrt{7}}$, де $y=\sqrt[3]{2+x},\ x\neq-1$; **17.6** $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ x\in(-1,0)\cup(0,1]$; **17.7** $-\frac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2}+ +14\arcsin\frac{x+1}{2},\ x\in(-3,1)$; **17.8** $-15\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+(x^2-5x+20)\cdot \cdot\sqrt{x^2+4x+5}$; **17.9** $\frac{\operatorname{sgn}\,x}{2}\cdot\arcsin\frac{x-2}{x\sqrt{2}},\ x\in\mathbb{R}\backslash[-2-2\sqrt{2},-2+2\sqrt{2}]$; **17.10** $\frac{\operatorname{sgn}\,(x-1)}{\sqrt{3}}\cdot \cdot\left(\ln(2\sqrt{3}|x-1|)-\ln|\sqrt{3}(x+1)\cdot\operatorname{sgn}(x-1)+\sqrt{x^2+x-1}|\right),\ x\neq 1$; **17.11** $\ln\left|x+1+ +\sqrt{x^2+2x+2}\right|+\frac{1}{x+1}\cdot(1-\sqrt{x^2+2x+2})$; **17.12** $-4\ln|y|+3\ln|2y-1|+\frac{3}{2y-1}$, де $y=\sqrt{x^2+x+1}-x,\ x\neq-1$; **17.13** $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|-2\operatorname{arctg} y$, де $y=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$; **17.14** $3\cdot\left(\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right),\ x\notin\{-1,0\}$; **17.15** $-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}- -\frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5},\ x\neq\pm 1$; **17.16** $3y+\ln\frac{|y-1|}{\sqrt{y^2+y+1}}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}$, де $y=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$, $x\neq 0$; **17.17** $-\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}},\ x\neq 0$; **17.18** $-\frac{8}{9}\sqrt{(1+x^{-3/4})^3}$, $x\neq 0$.

18.1 $\frac{4}{5}\sin^5 x-\frac{8}{7}\sin^7 x$; **18.2** $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x$; **18.3** $-(\cos x)^{-1}+\frac{1}{3}(\cos x)^{-3}$, $x\notin\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; **18.4** $\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x,\ x\notin\left\{\frac{\pi k}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; **18.5** $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|$,

$x \notin \left\{\frac{\pi k}{2} \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$; **18.6** $\frac12 \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$, $x\notin\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \,\middle|\, k\in\mathbb Z\right\}$; **18.7** $\frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\left(\sqrt5\operatorname{tg}\frac x2\right)$, $x\notin\{\pi+2\pi k\mid k\in\mathbb Z\}$; **18.8** $\frac12\operatorname{arctg}\left(\frac54\operatorname{tg}\frac x2-\frac34\right)$, $x\notin\{\pi+2\pi k\mid k\in\mathbb Z\}$;
18.9 $\frac{1}{2\sqrt6}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac x2+\sqrt6}{2\operatorname{tg}\frac x2-\sqrt6}\right|$, $x\notin\{\pi+2\pi k \mid k\in\mathbb Z\}\bigcup\left\{2\cdot\left(\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt6}{2}+\pi k\right)\,\middle|\, k\in\mathbb Z\right\}$;
18.10 $\frac1{\sqrt5}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac x2+1}{\sqrt5}\right)$, $x\notin\{\pi+2\pi k\mid k\in\mathbb Z\}$; **18.11** $-2\ln|\operatorname{tg}x+1|-\ln\cos^2x-$ $-2\cos^2x+\sin2x$, $x\notin\left\{-\frac\pi4+\pi k\,\middle|\,k\in\mathbb Z\right\}\bigcup\left\{\frac\pi2+\pi k\,\middle|\,k\in\mathbb Z\right\}$; **18.12** $\operatorname{arctg}\left(\sin^2 x\right)$;
18.13 $I_1=\sin x$, $I_2=\frac x2+\frac14\sin2x$ та $\forall n\geqslant 3$: $I_n=\frac1n\cos^{n-1}x\cdot\sin x+\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$;
18.14 $J_1=\ln\left|\operatorname{tg}\frac x2\right|$, $J_2=-\operatorname{ctg}x$ та $\forall n\geqslant 3$: $J_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\cdot J_{n-2}$;
18.15 $|x|+C$; **18.16** $x+4+C$ при $x<-2$, $-x+C$ при $x\in[-2,1]$ та $x-2+C$ при $x>1$; **18.17** $\frac13+C$ при $x\in\left(0,\frac13\right)$, $x+C$ при $x\in\left[\frac13,\frac23\right)$, $2x-\frac23+C$ при $x\in\left[\frac23,1\right)$ та $3x-\frac53+C$ при $x\in\left[1,\frac43\right)$; **18.18** $\frac{x^2}{2}+x+C$ при $x\in(-1,0)$, $\frac{x^2}{2}+C$ при $x\in[0,1)$ та $\frac{x^2}2-x+1+C$ при $x\in[1,2)$; **18.19** e^x+C при $x\leqslant0$, $\frac{x^2}2+1+C$ при $0<x\leqslant1$ та $-\frac1\pi\cos\pi x+\frac32-\frac1\pi+C$ при $x>1$; **18.20** $-\cos x+C$ при $x\leqslant\frac\pi4$, $\sin x-\sqrt2+C$ при $x\in\left(\frac\pi4,\frac\pi2\right)$ та $-\cos3x+1-\sqrt2+C$ при $x\geqslant\frac\pi2$.

19.1 ; **19.2** $\underline{S_{P_n}}(f)=16\frac14-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$, $\overline{S_{P_n}}(f)=16\frac14+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$; **19.3** ; **19.4** ; **19.5** ; **19.6** ; **19.7** ; **19.8** ; **19.9** ; **19.10** $\frac32$; **19.11** -1; **19.12** -2; **19.13** 19; **19.14** 2; **19.15** $\frac34$; **19.16** $\frac12$; **19.17** $\ln 3$; **19.18** ; **19.19** $\frac1e$; **19.20** ; **19.21** $\frac56\pi$; **19.22** ; **19.23** ; **19.24** ; **19.25** ; **19.26** – **19.28** так.

20.4 4; **20.5** 1; **20.6** $\frac{2(e-1)}{e}$; **20.7** $200\sqrt2$; **20.8** $200\sqrt2$; **20.9** $5-\sqrt2-\sqrt3$; **20.10** -5π; **20.11** $9-3\pi-\pi^2+\frac{\pi^3}{3}$; **20.12** $\frac12\ln\frac85$; **20.13** $e-\sqrt e$; **20.14** – **20.16** заміну зробити неможливо; **20.17** $\int_0^1\big(f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)\big)\,dt$; **20.18** $\int_5^{20}\frac{t\,dt}{2\sqrt{t-4}}$; **20.19** – **20.21** ні; **20.22** так, 1; **20.23** ; **20.24** ; **20.25** 1; **20.26** $-\frac23$; **20.27** 0; **20.28** ∞; **20.29** другого; **20.30** першого; **20.31** першого; **20.32** другого; **20.33** першого; **20.34** $\left[\frac{2}{\sqrt[4]e},2e^2\right]$ за 1-ою теор. про середнє; **20.35** $\left[\frac{1-e^{-100}}{200},\frac1{100}\right]$ за 2-ою теор. про середнє; **20.36** ; **20.37** ; **20.38** ; **20.39** $\left[\frac\pi2\cdot\cos1,\frac\pi2\right]$ за 1-ою теор. про середнє; **20.40** ; **20.41** $\left[\frac{\pi(3-2\sqrt3)}{6},\frac{\pi(2-\sqrt3)}{3}\right]$ за 2-ою теор. про середнє; **20.42** $I\approx3{,}5618$ за формулою прямокутників при $n=4$, $I\approx 3{,}5723$ за формулою трапецій ($n=6$); **20.43** $I\approx2{,}5576$ за формулою прямокутників при $n=4$, $I\approx2{,}5723$ за формулою трапецій ($n=5$).

21.1 $\frac4{15}$; **21.2** $\pi-2$; **21.3** $\frac\pi2-\frac13$; **21.4** 18; **21.5** $\frac{41}2\arcsin\frac9{41}+20\ln\frac45$; **21.6** $\frac43+2\pi$; **21.7** $\frac{5\sqrt2-2}3$; **21.8** $2-\frac1{\ln2}$; **21.9** $\frac{\pi a^2}{12}$; **21.10** $\frac{3\pi-8}{32}$; **21.11** $\frac{3\pi a^2}2$; **21.12** $\frac\pi3+\frac{\sqrt3}2$; **21.13** $\frac8{15}$; **21.14** $\frac{3\pi}4$; **21.15** a^2; **21.16** $\pi a^2\sqrt2$; **21.17** $1+\frac12\ln\frac32$; **21.18** $\sqrt2(\pi-1)$; **21.19** $2a$; **21.20** $6a$; **21.21** 4; **21.22** πa; **21.23** $\frac{16}3a^3$; **21.24** ??; **21.25** $\frac4{15}$; **21.26** а) $\frac{16\pi}{15}$, б) $\frac{8\pi}3$; **21.27** 12π; **21.28** а) $\frac\pi2(e^4-1)$, б) $4\pi e^2$.

Рекомендовані джерела

[1] Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. *Математичний аналіз. Частина 1.* — К: Вища школа, 1992. — 495 с.

[2] Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. *Математичний аналіз. Частина 2.* — К: Вища школа, 1993. — 375 с.

[3] Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г. и др. *Справочное пособие по математическому анализу. Часть 1. Введение в анализ, производная, интеграл.* — К.: Вища школа, 1978. — 696 с.

[4] Ляшко С. И., Боярчук А. К. и др. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — Москва–Санкт-Петербург–Киев: Диалектика, 2001. — 432 с.

[5] Дороговцев А. Я. *Математический анализ. Краткий курс в современном изложении.* — К.: Факт, 2004. — 560 с.

[6] Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа. Том 1.* — М.: Наука, 1968. — 440 с.

[7] Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа. Том 2.* — М.: Наука, 1968. — 464 с.

[8] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — М.: Наука, 1977. — 528 с.

[9] Денисьєвський М. О., Курченко О. О., Нагорний В. Н., Нестеренко О. Н., Петрова Т. О., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Частина I. Функції однієї змінної.* — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2005. — 257 с.

[10] Денисьєвський М. О., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних.* — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2012. — 276 с.