

Гринченко 10.1.29

① Теорема про згукнуто.
Нехай A і B - формули, Γ - множина
формул. Якщо змис $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

$$(2) \neg A, B, \neg C \vdash A \wedge B \rightarrow C$$

$$1) \vdash A \wedge B \rightarrow A \quad (\text{I.1})$$

$$2) \vdash (A \wedge B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)) \quad (\text{IV.1})$$

$$3) \vdash \neg A \rightarrow \neg(A \wedge B) \quad (\text{MP } 1, 2)$$

$$4) \neg A \vdash \neg(A \wedge B) \quad (\text{PC } 3)$$

$$5) \vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B)) \quad (\text{I.1})$$

$$6) \neg A \vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B))$$

$$7) \neg A \vdash \neg C \rightarrow \neg(A \wedge B) \quad (\text{MP } 4, 6)$$

$$8) \vdash (\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \quad (\text{IV.1})$$

$$9) \neg A \vdash (\neg C \rightarrow \neg(A \wedge B)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C) \quad (\text{PC } 7, 8)$$

$$10) \neg A \vdash A \wedge B \rightarrow C \quad (\text{MP } 7, 9)$$

$$11) \neg A, B, \neg C \vdash A \wedge B \rightarrow C$$

$$(3) \quad \forall x (q \rightarrow P(x)) \rightarrow (q \rightarrow \forall x P(x))$$

Возьмем отрицание:

$$\neg (\forall x (q \rightarrow P(x)) \rightarrow (q \rightarrow \forall x P(x)))$$

Зведем к нормальной форме:

$$\neg \forall x (\neg (q \rightarrow P(x)) \rightarrow (q \rightarrow \forall x P(x)))$$

$$\exists x \neg (\neg \forall x (\neg q \vee P(x)) \vee (\neg q \vee \forall x P(x)))$$

$$\exists x \neg (\forall x (\neg q \vee P(x)) \wedge \neg (\neg q \vee \forall x P(x)))$$

$$\exists x (\forall x (\neg q \vee P(x)) \wedge q \wedge \neg \forall x P(x))$$

$$\exists x (\forall x (\neg q \vee P(x)) \wedge q \wedge \exists x \neg P(x))$$

$$\exists q \forall x (\neg q \vee P(x)) \wedge q \wedge \exists x \neg P(x)$$

$$\exists q \forall x \exists y ((\neg q \vee P(x)) \wedge q \wedge \neg P(y))$$

Елиминируем кванторы существования:

$$\forall x ((\neg a \vee P(x)) \wedge a \wedge \neg P(f(x)))$$

(q замін. на a, y замін. на f(x))

Множина диз'юнктив:

$$S = \{ \neg a \vee P(a), a, \neg P(f(a)) \}$$

Ендогенівський універсум:

$$E = \{ a, f(a), f(f(a)), \dots \}$$

Метод резолюцій:

$$1) \neg a \vee P(f(a))$$

$$2) a$$

$$3) \neg P(f(a))$$

$$4) \neg a \quad (\text{з } 1 \text{ і } 3)$$

$$5) \square \quad (\text{з } 2 \text{ і } 4)$$

Віперечення суперечливе, отже
формула є тавтологією.