Варіант 1

1. Задано щільність розподілу випадкової величини ξ:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, \ x \in (0, \pi/2], \\ 0, \quad x \notin (0, \pi/2]. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

2. Задано показникову модель

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \ x \geq 0, \theta > 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$$

Показати, що оцінка $\widehat{\theta} = \dfrac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n}$ буде ефективною.

3. Нехай $\xi_1, ..., \xi_n$ - вибірка з генеральної сукупності з щільністю розподілу

$f(x,\theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{1}{\theta}|x|}, \quad x \in R$.

Побудувати оцінку параметра θ методом моментів і перевірити її на консистентність.

4. Випадкові величини ξ і η незалежні. Величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-2; 2]$, а η - на відрізку $[-4; 4]$. Знайти розподіл випадкової величини $2\xi + \eta$.

5. Нехай $(\xi_1, \eta_1), ..., (\xi_n, \eta_n)$ - незалежні спостереження випадкового вектора (ξ_0, η_0). Показати, що величина

$m = \dfrac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \overline{\xi})(\eta_k - \overline{\eta})$, де $\overline{\xi} = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $\overline{\eta} = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \eta_k$ буде незсунутою оцінкою $\mathrm{cov}(\xi_0, \eta_0) = \alpha$.

Варіант 2

1. . Випадкова величина ξ розподілена за показниковим законом з параметром λ. Яка з подій більш ймовірна: $\{\xi > M\xi\}$ чи $\{\xi < M\xi\}$.

2. Нехай $\xi_1,...,\xi_n$ - вибірка з генеральної сукупності з щільністю розподілу

$f(x,\theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{1}{\theta}|x|}, \quad x \in R$.

Побудувати оцінку параметра θ методом моментів і перевірити її на консистентність.

3. Нехай $\xi_1,...,\xi_n$ - вибірка з генеральної сукупності з щільністю розподілу

$$f(x,\theta) = \begin{cases} k(\theta) x e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, x \geq 0, \theta > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Знайти функцію $k(\theta)$ і за методом максимальної вірогідності знайти оцінку параметра θ. Перевірити чи буде знайдена оцінка консистентною.

4. Випадкові величини ξ і η незалежні. Величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[1;5]$, а η - на відрізку $[-5;-1]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\xi - \eta$.

5. Побудувати методом моментів оцінки параметрів a і b по результатам n незалежних спостережень випадкових величин $\xi_1,...,\xi_n$ кожна з яких має нормальний розподіл $N(0,1)$ або $N(a,1)$ з ймовірністю b і $1-b$ відповідно.

Варіант 3

1. Випадкова величина ξ розподілена за показниковим законом з параметром λ. При якому значенні λ ймовірність події $\{\xi \in [\alpha, \beta]\}$ буде максимальною?

2. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - вибірка з генеральної сукупності з щільністю розподілу

$$f(x,\theta) = \begin{cases} k(\theta) x e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, x \geq 0, \theta > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Знайти функцію $k(\theta)$ і за методом максимальної вірогідності знайти оцінку параметра θ. Перевірити чи буде знайдена оцінка консистентною.

3. За вибіркою з генеральної сукупності $\xi_1, \ldots, \xi_n$ представлена формула

$$k\sum_{j=1}^{n-1}\left(\xi_{j+1} - \xi_j\right)^2 .$$

Яким повинно бути k, щоб це була незміщена оцінка дисперсії?

4. Випадкові величини ξ і η незалежні. Величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-3; 3]$, а η - на відрізку $[-1; 1]$. Знайти розподіл випадкової величини $\xi + 3\eta$.

5. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - вибірка з генеральної сукупності з щільністю розподілу

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \exp\{-(x-\theta)\}, x \geq \theta \\ 0, x < \theta \end{cases}$$

Довести, що оцінка $\widehat{\theta} = \xi_{(1)} - \dfrac{1}{n}$ буде незміщеною.

Варіант 4

1. Задано щільність розподілу випадкової величини ξ:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, \ x \in (0, \pi/2], \\ 0, \quad x \notin (0, \pi/2]. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

2. За вибіркою з генеральної сукупності $\xi_1, \ldots, \xi_n$ представлена формула

$$k\sum_{j=1}^{n-1}\left(\xi_{j+1} - \xi_j\right)^2 .$$

Яким повинно бути k, щоб це була незміщена оцінка дисперсії?

3. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - вибірка з генеральної сукупності зі щільністю розподілу $f(x,\theta) = \dfrac{2x}{\theta^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{\theta^2}\right), x \ge 0, \theta > 0.$ Побудувати оцінку параметра θ методом моментів і перевірити її на консистентність.

4. Випадкові величини ξ і η незалежні. Величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[1;5]$, а η - на відрізку $[-5;-1]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\xi - \eta$.

5. Задано показникову модель

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \ x \ge 0, \theta > 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$$

Показати, що оцінка $\hat{\theta} = \dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$ буде ефективною.

Варіант 5

1. Знайти дисперсію випадкової величини ξ, заданої функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 1, x>2, \\ \dfrac{x+2}{4}, x\in(-2;2], \\ 0, x\le -2. \end{cases}$$

2. Нехай $(\xi_1,\eta_1),\dots,(\xi_n,\eta_n)$ - незалежні спостереження випадкового вектора (ξ_0,η_0). Показати, що величина

$m=\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\overline{\xi})(\eta_k-\overline{\eta})$, де $\overline{\xi}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, $\overline{\eta}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k$ буде незміщеною оцінкою $\operatorname{cov}(\xi_0,\eta_0)=\alpha$.

3. Нехай $\xi_1,\dots,\xi_n$ - вибірка з генеральної сукупності з щільністю розподілу

$$f(x,\theta)=\begin{cases} k(\theta)xe^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, x\ge 0, \theta>0 \\ 0, x<0 \end{cases}$$

Знайти функцію $k(\theta)$ і за методом максимальної вірогідності знайти оцінку параметра θ. Перевірити чи буде знайдена оцінка консистентною.

4. Випадкові величини ξ і η незалежні. Величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-1;1]$, а η - на відрізку $[-2;2]$. Знайти розподіл випадкової величини $2\xi-\eta$.

5. Задано показникову модель

$$f(x,\theta)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, x\ge 0, \theta>0 \\ 0, x<0 \end{cases}$$

Показати, що оцінка $\widehat{\theta}=\dfrac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n}$ буде ефективною.