19.06.2020

Екзаменаційна робота
з Теорії Алгоритмів та Математичної Логіки
Бдиснюк [illegible]-[illegible], К-28

Білет №2

2. Довести $A, B, C \vdash (A \wedge B) \to C$

- За лемою $P, Q \vdash P \wedge Q$ отримаємо $A, B \vdash (A \wedge B)$, додамо виведену ф-лу до посилок
- За лемою $P, Q \vdash P \to Q$ отримаємо $(A \wedge B), C \vdash (A \wedge B) \to C$
- Отже, $A, B, C \vdash (A \wedge B) \to C$

Доведення леми: $P, Q \vdash P \wedge Q$

1. За правилом $\dfrac{A, B}{A \wedge B}$

Доведення леми: $P, Q \vdash P \to Q$

1. $\vdash Q \to (P \to Q)$ (I.1, Правило Підстановки)
2. $Q, Q \to (P \to Q) \vdash P \to Q$ (MP)

③ Дослідим ф-лу:

$$\forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{(\forall x P(x) \land \exists x Q(x))}$$

• Позбудемося імплікації:

$$\overline{\forall x(\overline{P(x)} \lor \overline{Q(x)})} \lor \overline{(\forall x P(x) \land \exists x Q(x))}$$

$$\overline{\forall x(\overline{P(x)} \lor \overline{Q(x)})} \lor (\overline{\forall x P(x)} \lor \overline{\exists x Q(x)})$$

$$\exists x\, \overline{(\overline{P(x)} \lor \overline{Q(x)})} \lor \exists x \overline{P(x)} \lor \forall x \overline{Q(x)}$$

$$\exists x(P(x) \land Q(x)) \lor \exists x \overline{P(x)} \lor \forall x \overline{Q(x)}$$

Зведення до пренексної нормальної форми

$$\exists x \exists y \forall z ((P(x) \lor \overline{P(y)} \lor \overline{Q(z)}) \land (Q(x) \lor \overline{P(y)} \lor \overline{Q(z)}))$$

Зводимо до сколемівської форми шляхом елімінації квантора існування:

$x = c_1 \quad y = c_2$

$$\forall z((P(c_1) \lor \overline{P(c_2)} \lor \overline{Q(z)}) \land (Q(c_1) \lor \overline{P(c_2)} \lor \overline{Q(z)}))$$

$$S = \{ P(c_1) \lor \overline{P(c_2)} \lor \overline{Q(z)},\ Q(c_1) \lor \overline{P(c_2)} \lor \overline{Q(z)} \}$$

Ербранівський універсум $E = \{c_1, c_2\}$

виведення порожнього диз'юнкта неможливе, розв'яжемо від оберненого:

$$\overline{\forall x(P(x) \to \overline{Q(x)})} \to \overline{(\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x))}$$

- Позбудемось імплікації:

$$\overline{\forall x(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)})} \vee \overline{(\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x))}$$

- Правило Де Моргана:

$$\forall x(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}) \wedge (\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x))$$

$$\forall x(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}) \wedge \forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$$

$$\forall x \forall z \exists y ((\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}) \wedge P(z) \wedge Q(y))$$

- Зводимо до стандартної форми шляхом елімінації квантора існування:

$$y = f(x, z)$$

$$\forall x \forall z ((\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}) \wedge P(z) \wedge Q(f(x,z)))$$

- Множина диз'юнктів: $S = \{ \overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}, P(z), Q(f(x,z)) \}$
- Ербранівський універсум $E = \{a, f(a,a), f(f(a,a),a), f(a,f(a,a)) \dots\}$
- Виведення порожнього диз'юнкта:

1. $\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}$
2. $P(z)$
3. $Q(f(x,z))$
4. $\overline{P(f(a,a))} \vee \overline{Q(f(a,a))}$
5. $P(f(a,a))$
6. $Q(f(a,a))$
7. $\overline{Q(f(a,a))}$ (3 4 та 5)
8. $\square$ з (6; 7)

Обернене твердження справедливе, отже ф-ла є тавтологічно

1. Означення: ф-ла F знаходиться в кон'юнктивній нормальній формі (КНФ), якщо

$$F = F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \qquad n \geq 1,$$ де

кожна F_i – диз'юнкція літер.

літера – атом або заперечення атома

Означення: ф-ла F знаходиться в диз'юнктивній нормальній формі, якщо

$$F = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n, \quad n \geq 1,$$ де F_i – кон'юнкція літер.

Означення: G є логічним наслідком $F_1, F_2 \ldots F_n \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ для всякої інтерпретації I, де $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$ істинна, G також істинна.

(F_i, G – формули)