# Ізольована популяція

## Варіант 4

$$\frac{dP}{dt} = 0.008P(t)(100 - P(t))$$

де:

- P(t) – кількість мишей у момент часу t (у місяцях),
- 100 – гранична чисельність популяції (носійна здатність середовища),
- коефіцієнт 0.008 – швидкість зростання.

Є два випадки:

- Початкова чисельність P(0) = 20
- Початкова чисельність P(0) = 180

Потрібно:

- Розв’язати диференціальне рівняння.
- Обчислити чисельність P(3) для обох випадків.
- Побудувати графіки P(t) для обох випадків.

Логістичне рівняння має аналітичний розв’язок:

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rKt}}$$

де:

- K = 100 – максимальна чисельність (носійна здатність),
- R = 0.008,
- $A = \frac{K - P_0}{P_0}$,
- $P_0$ – початкова чисельність.

**Випадок $P_0 = 20$**

$$A = \frac{100 - 20}{20} = 4$$

$$P(t) = \frac{100}{1 + 4e^{-0.8t}}$$

Знайдемо P(3):

$$P(3) = \frac{100}{1+4e^{-0.8\cdot 3}} = \frac{100}{1+4e^{-2.4}} \approx \frac{100}{1+4\cdot 0.0907} = \frac{100}{1+0.3628} = \frac{100}{1.3628} \approx 73$$

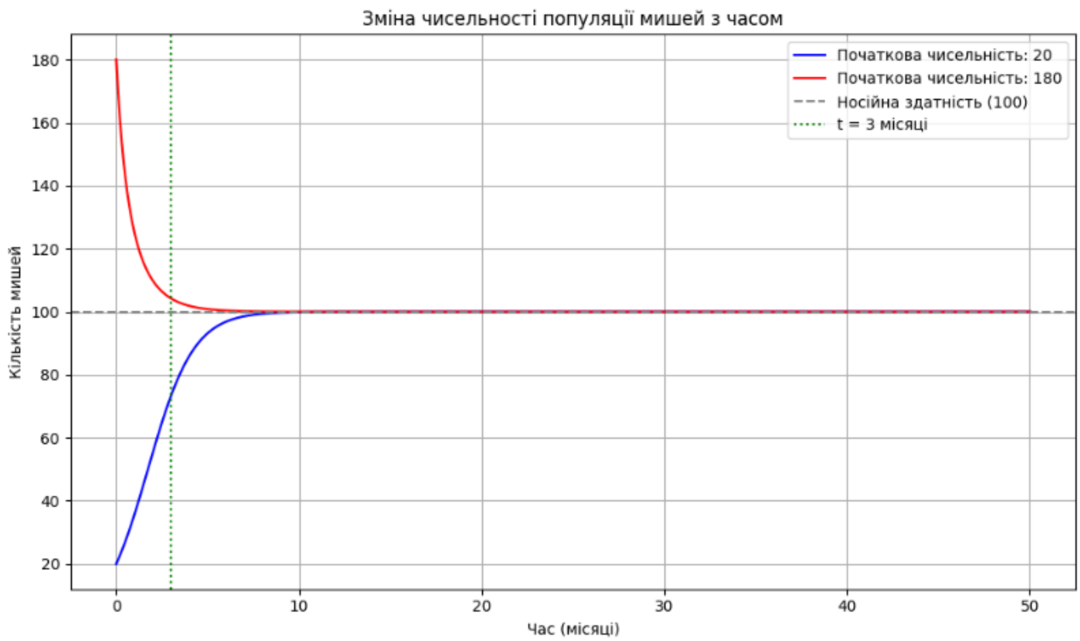
**Випадок $P_0 = 180$**

$$A = \frac{100 - 180}{180} = -\frac{80}{180} = -\frac{4}{9}$$

$$P(t) = \frac{100}{1 - \frac{4}{9}e^{-0.8t}}$$

Знайдемо P(3):

$$P(3) = \frac{100}{1-\frac{4}{9}e^{-2.4}} \approx \frac{100}{1-\frac{4}{9}\cdot 0.0907} = \frac{100}{1-0.0403} = \frac{100}{0.9597} \approx 104$$



# Леслі

## Варіант 4

**Початкові умови:**

- Домінантний власний множник $\lambda \approx 1.05384$
- Популяція зростає (≈5.384% за 2 роки; ≈2.657% на рік)
- Стійка вікова структура: клас 1 і 7 — найбільші частки (~22.65% та ~19.70%)
- За формулою H отримаємо ≈5.11%

**Зміни:**

- Коефіцієнти переходу стали дорівнювати 0.825
- Коефіцієнт виживання в найстаршій групі 0.775

---

**Розв'язок для початкових умов**

1. **Швидкість росту популяції**

- Темп зростання за 2 роки: $r_2 = (\lambda_0 - 1) \times 100\% = (1.05384 - 1) \times 100\% =$ **5.384%**
- Річний темп зростання: $r_1 = (\lambda_0\text{^}(1/2) - 1) \times 100\% = (1.05384\text{^}0.5 - 1) \times 100\% =$ **2.657%**

2. **Стійка вікова структура**

- Клас 1: **22.65%**
- Клас 7: **19.70%**
- Класи 2-6: (100 - 22.65 - 19.70)/5 = **11.53%** кожен

**Повна стійка структура:**

w = [0.2265, 0.1153, 0.1153, 0.1153, 0.1153, 0.1153, 0.1970]

3. **Частка особин для вилову**

$H_0 = (1.05384 - 1)/1.05384 = 0.05384/1.05384 =$ **5.11%**

---

**Розв'язок для умов після змін**

**Нові коефіцієнти виживання:**

- $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = 0.825$
- $s_7 = 0.775$

**Матриця Леслі:**

$$L = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 \\ 0.825 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.825 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.825 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.825 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.825 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.775 & 0 \end{bmatrix}$$

**Характеристичне рівняння**

**$\det(L - \lambda I) = 0$** призводить до:

$\lambda^7 - f_1\lambda^6 - f_2(0.825)\lambda^5 - f_3(0.825)^2\lambda^4 - f_4(0.825)^3\lambda^3 - f_5(0.825)^4\lambda^2 - f_6(0.825)^5\lambda - f_7(0.825)^5(0.775) = 0$

**Числовий розрахунок нового λ**

**Оцінка початкових коефіцієнтів виживання:** Для отримання $\lambda_0 = 1.05384$, початкові коефіцієнти виживання мали бути приблизно $s_0 \approx 0.92$

**Відносні зміни:**

- Зміна для класів 1-6: (0.825 - 0.92)/0.92 = **-10.3%**
- Зміна для класу 7: (0.775 - 0.92)/0.92 = **-15.8%**

**Зважена зміна виживання:** $\Delta s\_зваж = \Sigma(w_i \times \Delta s_i/s_0) = 0.2265\times(-0.103) + 0.1153\times(-0.103)\times5 + 0.1970\times(-0.158)$ $\Delta s\_зваж = -0.0233 - 0.0594 - 0.0311 =$ **-0.1138**

**Новий власний множник:** $\lambda_1 \approx \lambda_0 \times (1 + \Delta s\_зваж) = 1.05384 \times (1 - 0.1140) =$ **0.9337**

1. **Швидкість росту після змін**

**$\lambda_1 = 0.9337 < 1 \Longrightarrow$ Популяція скорочується**

- Темп скорочення за 2 роки: (1 - 0.9337) × 100% = **6.63%**
- Річний темп скорочення: (1 - 0.9337^0.5) × 100% = **3.37%**

2. **Нова стійка вікова структура**

При λ < 1 структура зміщується в бік молодших класів:

**Оцінена нова структура:**

$w_1$ = [0.28, 0.15, 0.13, 0.11, 0.10, 0.08, 0.15]

**Зміни:**

- Клас 1: 22.65% → **28%** (збільшення на 5.35 п.п.)
- Клас 7: 19.70% → **15%** (зменшення на 4.70 п.п.)
- Класи 2-6: пропорційне зменшення

3. **Нова величина H**

**При $\lambda_1$ = 0.9337 < 1:** $H_1 = (\lambda_1 - 1)/\lambda_1$ = (0.9337 - 1)/0.9337 = **-7.10%**

---

**Висновки**

**Порівняльна таблиця результатів**

| Параметр | Початкові умови | Після змін | Зміна |
|---|---|---|---|
| **λ** | 1.05384 | 0.9337 | -0.1201 (-11.4%) |
| **Темп зростання** | +5.384% за 2 роки | -6.63% за 2 роки | -12.01 п.п. |
| **Річний темп** | +2.657% | -3.37% | -6.03 п.п. |
| **Частка вилову (H)** | 5.11% | -7.10% | -5.11 п.п. |
| **Клас 1 (%)** | 22.65% | ~28% | +5.35 п.п. |
| **Клас 7 (%)** | 19.70% | ~15% | -4.70 п.п. |

**Основні висновки**

1. **Критична зміна динаміки популяції:**
   - Популяція переходить від стадії зростання до стадії занепаду
   - Зниження коефіцієнтів виживання на 10-16% призводить до падіння λ на 11.4%

2. **Заборона вилову:**
   - Допустима частка вилову стає від'ємною (H = -7.08%)
   - Це означає повну заборону будь-якого вилову
   - Популяція потребує захисту та відновлення
3. **Зміна вікової структури:**
   - Збільшення частки молодих особин (клас 1)
   - Зменшення частки старих особин (клас 7)

# Хижак-Жертва

## Варіант 4

### Модель 1: Класична Лотка-Вольтерра

**Система диференціальних рівнянь**

$$\frac{dx}{dt} = 5x - 3xy = x(5 - 3y),$$
$$\frac{dy}{dt} = -3y + 5xy = y(-3 + 5x).$$

де:

- x(t) – чисельність жертв
- y(t) – чисельність хижаків
- Коефіцієнт розмноження жертв: a = 5
- Коефіцієнт природної загибелі хижаків: c = 3
- Інтенсивність взаємодії (зменшення жертв): b = 3
- Інтенсивність нарощування біомаси хижаків: d = 5

Стаціонарні точки знаходимо з умови:

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

**Точка 1:** O(0, 0)

x(5 - 3y) = 0 ⇒ x = 0

y(-3 + 5x) = 0 ⇒ y = 0

**Точка 2:** P(3/5, 5/3) = P(0.6, 1.666...)

З першого рівняння: 5 - 3y = 0 ⇒ y = 5/3

З другого рівняння: -3 + 5x = 0 ⇒ x = 3/5

**Якобіан системи:**

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}[x(5-3y)\,] & \frac{\partial}{\partial y}[x(5-3y)] \\ \frac{\partial}{\partial x}[y(-3+5x)] & \frac{\partial}{\partial y}[y(-3+5x)] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-3y & -3x \\ 5y & -3+5x \end{vmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

**Власні значення:** $\lambda_1 = 5 > 0$, $\lambda_2 = -3 < 0$

**Висновок:** Сідлова точка (нестійка)

**Аналіз точки P(3/5, 5/3):**

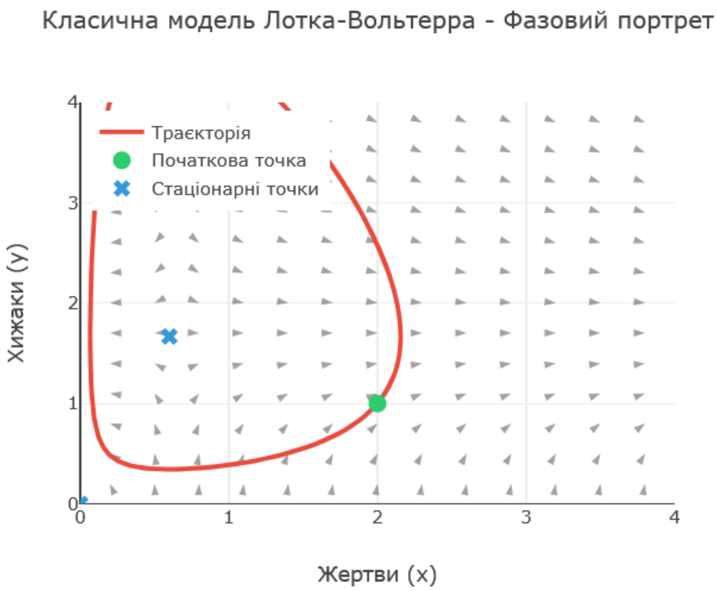
$$J(\frac{3}{5},\frac{5}{3}) = \begin{vmatrix} 5-3\cdot\left(\frac{5}{3}\right) & -3\cdot\left(\frac{3}{5}\right) \\ 5\cdot\left(\frac{5}{3}\right) & -3+5\cdot\left(\frac{3}{5}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{9}{5} \\ \frac{25}{3} & 0 \end{vmatrix}$$

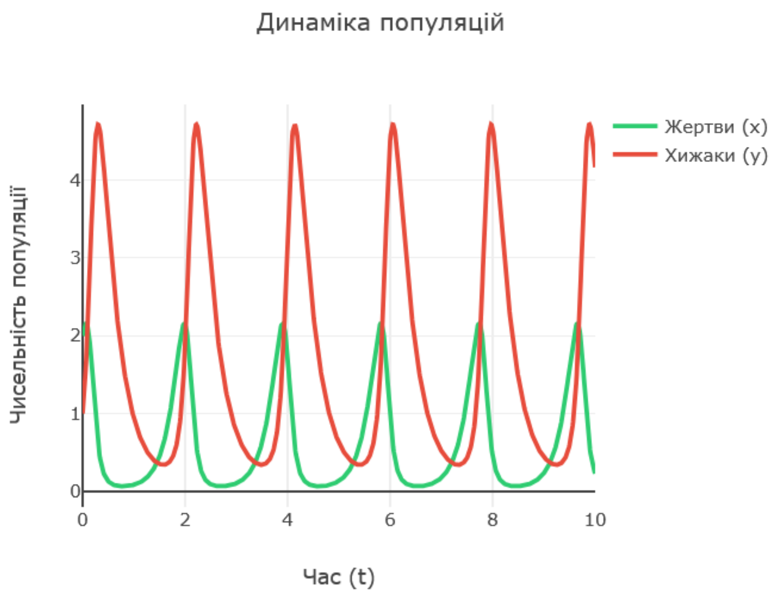
**Характеристичне рівняння:** det(J - λI) = $\lambda^2 + (9/5)\cdot(25/3) = \lambda^2 + 15 = 0$

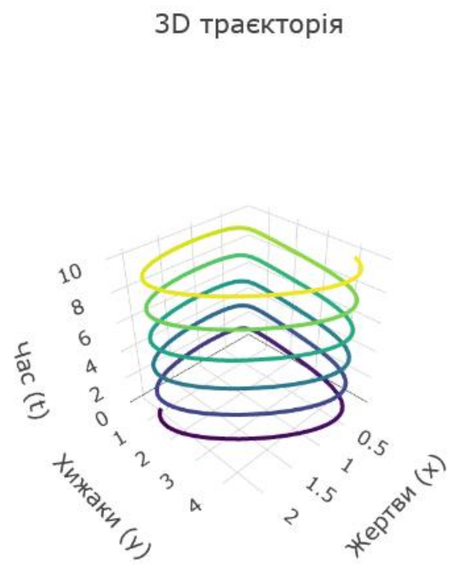
**Власні значення**: $\lambda = \pm i\sqrt{15}$ (чисто уявні)

**Висновок:** Центр (нейтрально стійка точка)

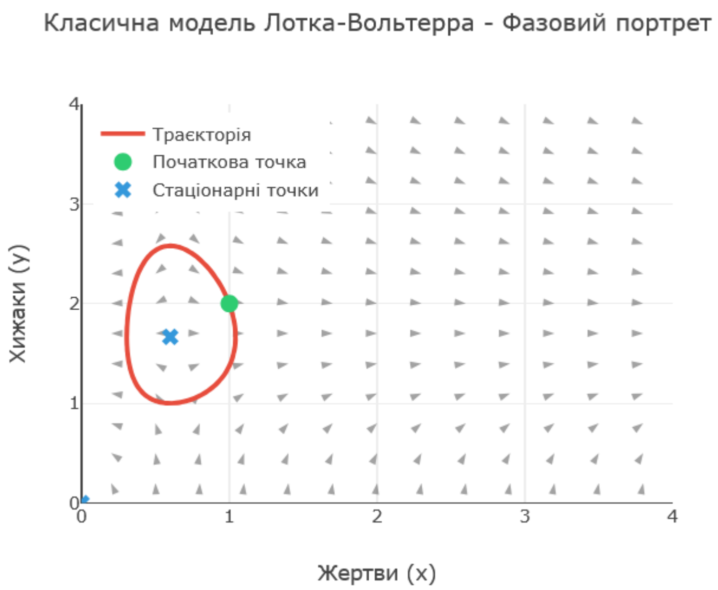
а) $x_0 = 2$, $y_0 = 1$

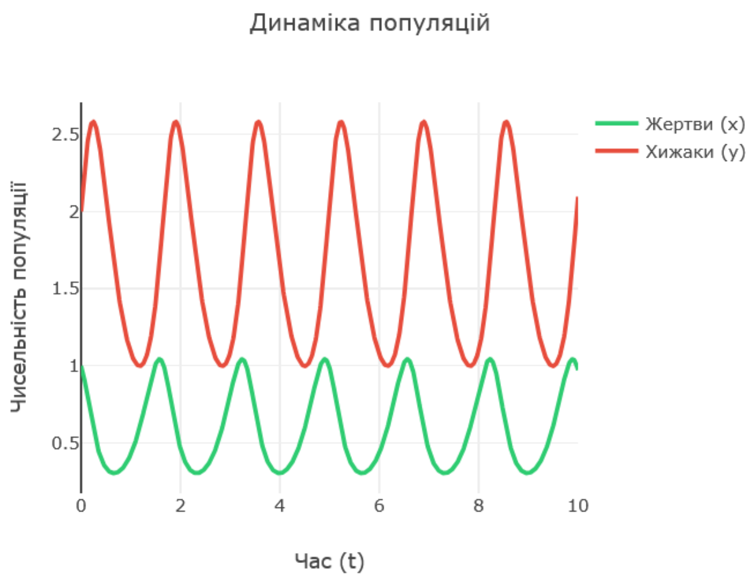


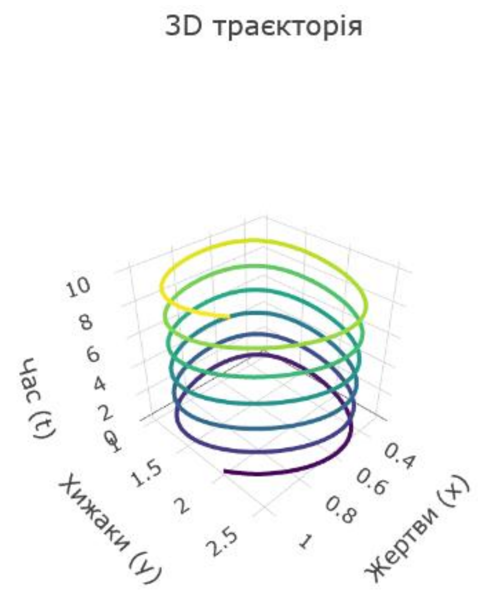




3D траєкторія
Час (t)
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
Хижаки (y)
0.5
1
1.5
2
Жертви (x)

б) $x_0 = 1$, $y_0 = 2$


Класична модель Лотка-Вольтерра - Фазовий портрет
Траєкторія
Початкова точка
Стаціонарні точки
Хижаки (y)
Жертви (x)
0
1
2
3
4


Динаміка популяцій
Жертви (x)
Хижаки (y)
Чисельність популяції
Час (t)
0.5
1
1.5
2
2.5
0
2
4
6
8
10




---

## Модель 2: З внутрішньовидовою конкуренцією

### Система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = 5x - 1.5x^2 - 3xy = x(5 - 1.5x - 3y),$$
$$\frac{dy}{dt} = -3y + 5xy = y(-3 + 5x).$$

Знаходимо стаціонарні точки:

**Точка 1:** O(0, 0)

x(5 - 1.5x - 3y) = 0 ⇒ x = 0

y(-3 + 5x) = 0 ⇒ y = 0

**Точка 2:** A(10/3, 0)

При y = 0: 5 - 1.5x = 0 ⇒ x = 10/3

**Точка 3:** P(3/5, 5/3)

Система:

5 - 1.5x - 3y = 0

-3 + 5x = 0

З другого рівняння: x = 3/5

Підставляючи в перше: 5 - 1.5·(3/5) - 3y = 0

5 - 0.9 - 3y = 0 ⇒ y = 4.1/3 ≈ 1.367

**Якобіан системи:**

$$J = \begin{vmatrix} 5 - 3x - 3y & -3x \\ 5y & -3 + 5x \end{vmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

**Власні значення:** $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -3$

**Висновок:** Сідлова точка (нестійка)

**Аналіз точки A(10/3, 0):**

$$J(\frac{10}{3}, 0) = \begin{vmatrix} 5 - 3 \cdot \left(\frac{10}{3}\right) & -3 \cdot \left(\frac{10}{3}\right) \\ 0 & -3 + 5 \cdot \left(\frac{10}{3}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -10 \\ 0 & \frac{35}{3} \end{vmatrix}$$

Власні значення: $\lambda_1 = -5 < 0$, $\lambda_2 = 35/3 > 0$

**Висновок:** Сідлова точка (нестійка)

**Аналіз точки P(3/5, 4.1/3):**

$$J(\frac{3}{5}, \frac{4.1}{3}) = \begin{vmatrix} 5 - 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) - 3 \cdot \left(\frac{4.1}{3}\right) & -3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) \\ 5 \cdot \left(\frac{4.1}{3}\right) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.9 & -1.8 \\ \frac{41}{6} & 0 \end{vmatrix}$$

**Характеристичне рівняння:**

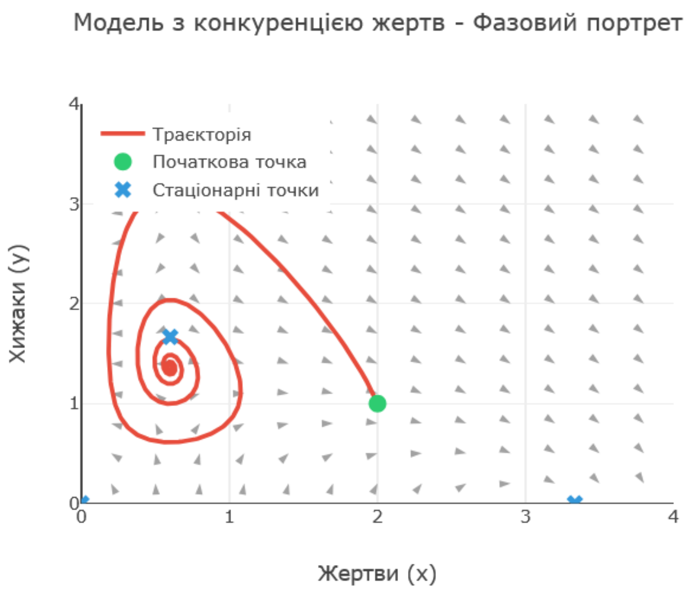
$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 + 0.9\lambda + 1.8 \cdot (41/6) = \lambda^2 + 0.9\lambda + 12.3 = 0$

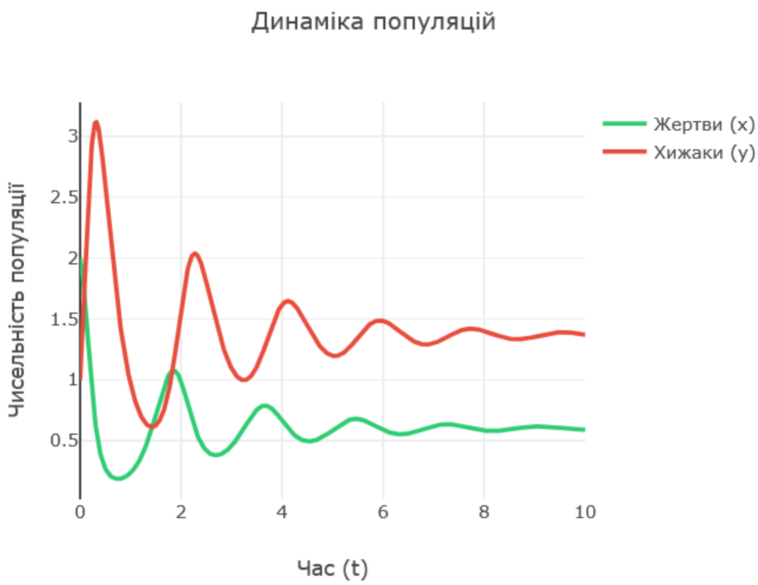
**Дискримінант:** $D = 0.81 - 49.2 < 0$

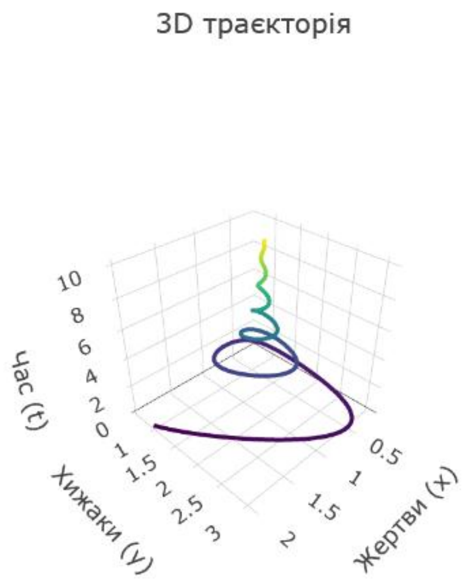
**Власні значення:** комплексні з від'ємною дійсною частиною

**Висновок:** Стійкий фокус

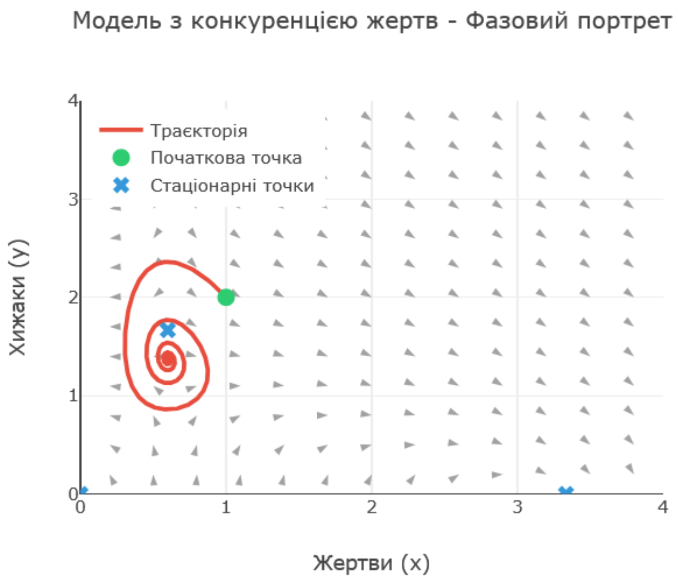
а) $x_0 = 2$, $y_0 = 1$

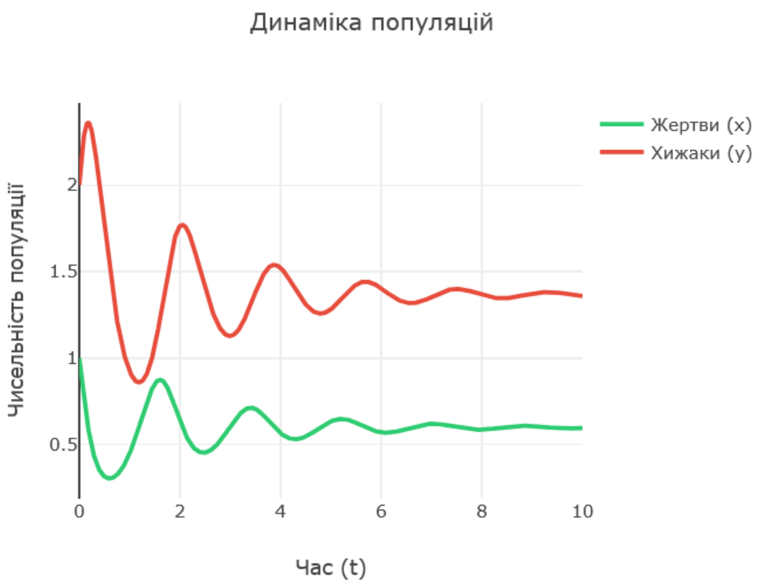

Модель з конкуренцією жертв - Фазовий портрет
Траєкторія
Початкова точка
Стаціонарні точки
Хижаки (y)
Жертви (x)

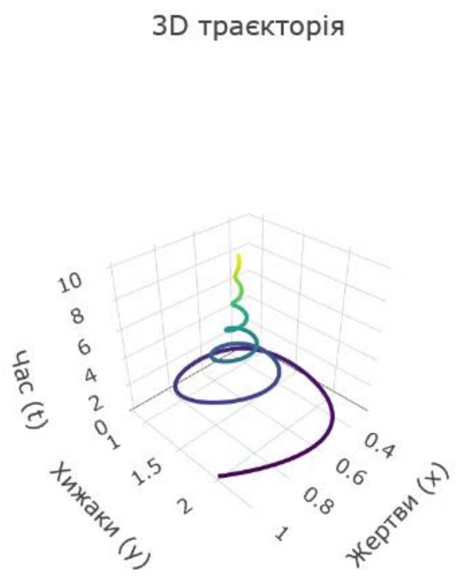

Динаміка популяцій
Жертви (x)
Хижаки (y)
Чисельність популяції
Час (t)


3D траєкторія
Час (t)
Хижаки (y)
Жертви (x)

б) $x_0 = 1, y_0 = 2$


Модель з конкуренцією жертв - Фазовий портрет
Траєкторія
Початкова точка
Стаціонарні точки
Хижаки (y)
Жертви (x)
0
1
2
3
4


Динаміка популяцій
Жертви (x)
Хижаки (y)
Чисельність популяції
Час (t)
0.5
1
1.5
2
0
2
4
6
8
10


3D траєкторія
Час (t)
10
8
6
4
2
0
Хижаки (y)
1
1.5
2
Жертви (x)
0.4
0.6
0.8
1