

1.1. ПРО ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

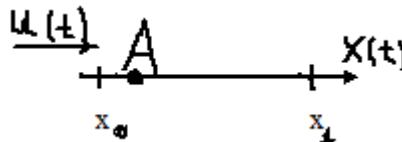
Для ілюстрації постановок задач теорії керування наведемо найбільш прості та наочні приклади.

Приклад 1.

Нехай матеріальна точка A масою m рухається уздовж прямої.

На неї діє сила \mathbf{u} .

Положення точки A характеризується координатою: $x = x(t)$.



Нехай також виконуються умови:

$$x(t_0) = x_0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} = 0, \quad (1.7)$$

$$|u| \leq \bar{u}, \quad (\bar{u} > 0). \quad (1.8)$$

Ставиться задача: визначити силу $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(t)$, під дією якої точка A рухається так, що із заданого початкового стану (1.7) переміщується в інший заданий стан на момент $t = t_1$:

$$x(t_1) = x_1, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} = 0 \quad (1.9)$$

за мінімально можливий час

$$T_{\min} = \min_u (t_1 - t_0) = \min_u \int_{t_0}^{t_1} dt.$$

Для розв'язання задачі треба записати рівняння руху точки A .

Згідно з другим законом Ньютона це рівняння можна подати у вигляді:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = u \quad (1.10)$$

Точку A , рух якої змінюється за рахунок зовнішньої сили u , розглядаємо як приклад керованої системи.

Величину u називають керуючим впливом, функцією керування або просто керуванням.

Поставлена задача у теорії керування називається *задачею швидкодії*.

При розв'язуванні таких задач використовують поняття *фазових координат* та *фазового простору*.

У даному прикладі фазовими координатами є дві змінні - $x_1(t)$, $x_2(t)$, пов'язані зі змінною $x(t)$ рівностями:

$$x_1 = x(t), x_2 = \frac{dx}{dt};$$

фазовим простором є координатна площа.

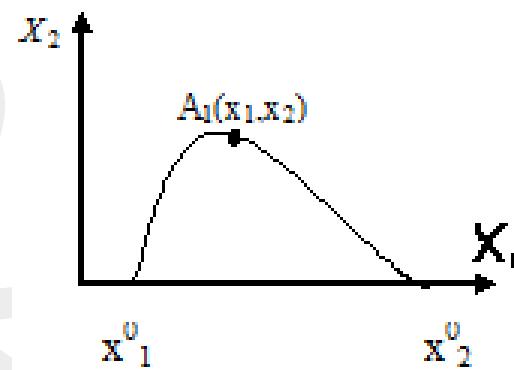
Тоді рівняння (1.10) можна записати у вигляді двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ m \frac{dx_2}{dt} &= u\end{aligned}\tag{1.11}$$

а граничні умови (1.7), (1.9) у вигляді:

$$\begin{aligned}x_1(t_0) &= x_1^0 = x^0 & x_1(t_1) &= x_1^1 = x^1 \\ x_2(t_0) &= 0 & x_2(t_1) &= 0\end{aligned}\tag{1.12}$$

Точку A_1 з координатами $(x_1(t), x_2(t))$ на площині $X_1 0 X_2$ називають фазовою точкою системи. Площину (див. рис.) називають **фазовою площею**, або, взагалі кажучи, - **фазовим простором**, елементами якого є вектори фазових координат.



Приклад 2. Наведемо одну із задач оптимального розподілу ресурсів у динамічних системах на прикладі моделі бою двох сторін.

Динаміку бою можна описати такою системою рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -bx_2 + u(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -ax_1 + v(t)\end{aligned},$$

де $x_1(t)$ – кількість бойових одиниць із боку A , що залишились боєздатними на момент часу $t \in [t_0, t_1]$,

$x_2(t)$ – кількість бойових одиниць, що залишились боєздатними на момент часу t для сторони B ;

$u(t)$, $v(t)$ – темпи надходження бойових одиниць із резерву для сторін A та B відповідно на момент часу t ;

a, b – середні ефективності швидкості стрільби бойових одиниць сторін A та B відповідно;

$T = t_1 - t_0$ – заданий час бою.

Нехай відомі:

$$x_1(t_0) = x_1^0$$

$$x_2(t_0) = x_2^0$$

а також величина $v(t)$.

Задача оптимального керування боєм:

знайти керування $u^0(t)$ за обмежень: $0 \leq u(t) \leq \bar{u}$, $\int_{t_0}^{t_1} u(t) dt \leq \bar{\bar{u}}$, щоб досягався екстремум вибраного функціонала якості $Q(u(t))$.

Тут $\bar{u}, \bar{\bar{u}}$ – задані величини.

Критерієм найкращого керування може бути вибрана певна мета бою, наприклад:

$Q = x_2(t_1) \rightarrow \min_u$ – на кінець бою сторона B має менше бойових одиниць;

$Q = x_1(t_1) \rightarrow \max_u$ – мета сторони A : максимальне збереження своїх бойових одиниць на кінець бою.

Можна ввести й інші критерії оптимальності.

Приклад 3.

Система з випадковими збуреннями:

$$\frac{dx_1}{dt} = u \quad (1.16)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \xi(t) \quad (1.17)$$

Тут $\xi(t)$ – випадковий процес,

$$|u(t)| \leq k = \text{const}, t \in [t_0, t_1].$$

Мета керованої системи (1.16) – відтворити рух некерованої системи (1.17).

Оскільки $x_2(t)$ – випадковий процес, то критерій оптимальності записується через математичне сподівання:

$$Q = M\{Q_1\} = M\left\{\int_{t_0}^{t_1} [(x_1 - x_2)]^2 + u^2 \right\} \rightarrow \min_u \quad (1.18)$$

1.2. СТРУКТУРНІ СХЕМИ ОПИСУ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Систему керування в загальному випадку можна зобразити у вигляді структурної схеми:

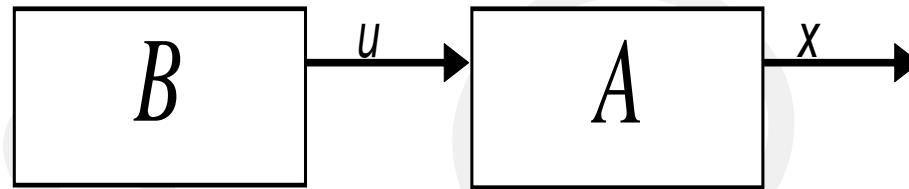


Рис. 1.2.

Тут:

A – об'єкт керування;

B – пристрій керування (або керуючий пристрій),

$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ – вектор фазових координат або фазовий стан системи,

T – знак транспонування;

$x(t) \in X$, X – фазовий простір,

$u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ – векторна функція керування.

Вектор $x(t)$ називають *вихідним сигналом*.

Вектор $u(t)$ називають *вхідним сигналом* (входом до об'єкта **A**).

Будемо вважати, що фазовий стан $x(t)$ об'єкта керування A в довільний момент часу $t > t_0$ визначається повністю й однозначно за його відомим початковим станом $x(t_0)$ та керуванням $u(t)$ при $t > t_0$.

Пару векторних функцій $(u(t), x(t))$ називають *процесом керування*.

Для різних систем керування внутрішні характеристики об'єкта керування описуються відповідними залежностями різної природи – алгебраїчними, диференціальними, інтегральними та ін.

Правила (закон) перетворення вхідних сигналів у вихідні називають рівнянням об'єкта.

Широко розповсюджені неперервні системи керування, об'єкти яких описуються звичайними диференціальними рівняннями (див. приклади 1.1 – 1.3). Такі системи називають **системами із зосередженими параметрами**. Системи керування, об'єкти яких описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних, називаються **системами з розподіленими параметрами**.

Критеріями оптимальності керування (критеріями якості об'єкта керування) є функції або *функціонали на екстремум*.

Зміст оптимальності в різних задачах може бути різним:

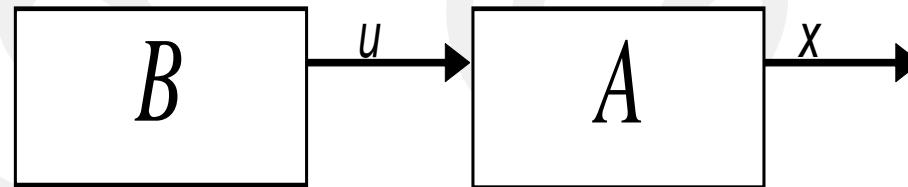
- приведення системи до заданого стану за найкоротший проміжок часу, тобто найшвидше;
- мінімізація енергетичних витрат на керування;
- мінімізація відхилення фазового стану системи від заданої траєкторії тощо.

Процес керування, що забезпечує екстремум (мінімум або максимум) функціонала якості об'єкта керування, називається оптимальним процесом керування.

Розглянемо тепер, які функції виконує пристрій керування B .

Розглянемо два суттєво різних типи систем керування.

1) *Системи програмного керування* або незамкнені системи (*системи без оберненого зв'язку*).



У таких системах об'єкти керування A мають точно визначені наперед рівняння, що описують їх функціонування. Ці об'єкти керування позбавлені впливу випадкових збурень. Критерій якості для них є детермінованою величиною. Усі канали зв'язку, як пристрію керування так і об'єкта керування, захищені від будь-яких випадкових зовнішніх впливів та збурень.

Оптимальне керування $u^0(t)$ можна обчислити наперед для всіх t ще до початку функціонування системи. Керуючий пристрій B має забезпечити тільки подачу розрахованого наперед керування $u^0(t)$ на вход об'єкта керування A .

Утім, системи програмного керування мають обмежене застосування на практиці. Як правило, система керування має додаткові лінії зв'язку, за якими надходить інформація про стан об'єкта A на вход керуючого пристрію B .

2) Системи керування з оберненим зв'язком (замкнені системи керування).

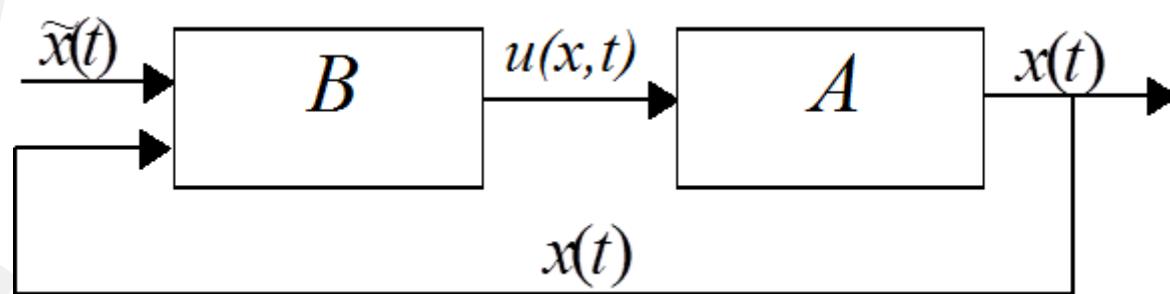


Рис. 1.3.

Тут $\tilde{x}(t)$ – заданий (програмний) вплив, що визначає роботу пристрою **B**. Для програмних систем цей сигнал можна вважати частиною внутрішньої структури пристрою **B**.

Обернений зв'язок необхідний, оскільки динамічні характеристики систем можуть бути відомі лише наближено і, крім того, на систему можуть впливати зовнішні збурення, як правило, випадкового характеру.

Контур оберненого зв'язку дозволяє керуючому пристрою враховувати відхилення й робити відповідну корекцію руху.

Системи з випадковими збуреннями, що діють на об'єкт керування, можна зобразити у вигляді структурної схеми:

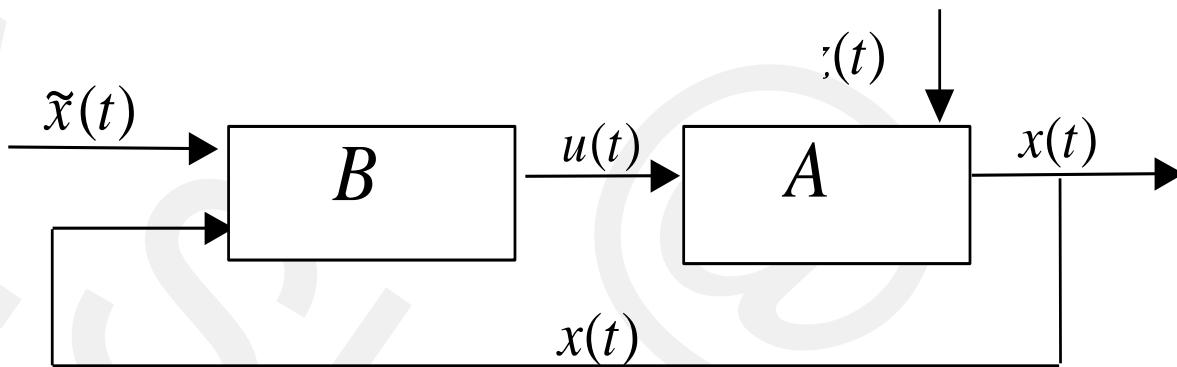


Рис. 1.4.

Тут $z(t)$ – вектор випадкових збурень.

Критерій оптимальності для таких систем: знайти мінімум (максимум) функціонала

$$Q = M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} G(\tilde{x}(t), x(t), u(t), z(t), t) dt \right\}$$

де $M\{\cdot\}$ – математичне сподівання.

Параметри керування реальних систем не можуть приймати довільні значення, тобто завжди $u(t) \in \Omega(U)$.

Множину $\Omega(U)$ називають *областю допустимих керувань* (або областю керування), де U – простір змінних u_1, \dots, u_r .

Множина $\Omega(U)$ задається, як правило, системою рівностей або нерівностей.

Аналогічно $x(t) \in \Omega(X)$, де $\Omega(X)$ – *область можливих станів* системи, де X – простір змінних x_1, \dots, x_n .

У загальному випадку можуть бути обмеження й на функціонали від вектор-функцій $u(t)$, $x(t)$, $z(t)$:

$$L_\mu[x(t), u(t), z(t)] \in \Omega_\mu(L), \mu = \overline{1, m},$$

де $\Omega_\mu(L)$ – допустима область зміни функціонала.

Зауваження 1.1. У теорії керування вважають, що керування є кусково-неперервними або вимірними функціями.

Термінологія, наведена вище, справедлива не тільки для неперервних систем, а й для дискретно-неперервних та дискретних систем керування.

Класифікація систем керування можлива також і за іншими ознаками:

1) Системи з повною інформацією про об'єкт керування.

Такі системи – математична абстракція. Це тому, що в керуючий пристрій B введена повна апріорна інформація: рівняння об'єкта, усі обмеження, інформація про критерій оптимальності, про сигнал $x(t)$, збурення $z(t)$, про стан $x(t)$ у кожний момент часу t , що в реальних системах зробити майже неможливо.

Утім, ця абстракція часто з достатньою точністю відповідає реальним системам керування, коли неповнотою інформації можна знехтувати.

2) Системи з неповною інформацією про об'єкт керування й пасивним її накопиченням у процесі керування.

Нехай неповнота інформації – це неповнота заданого сигналу $x(t)$: тобто на вхід надходить сигнал $y(t) : y(t) \neq \tilde{x}(t)$. Процес накопичення інформації про $x(t)$ не залежить від алгоритму (стратегії) керуючого пристрою B . Накопичення інформації полягає у спостереженні й побудові прогнозу про сигнал $x(t)$. Сам процес спостереження не залежить від того, яке рішення прийме пристрій B про характер $x(t)$. Інформацію, отриману в результаті спостережень, можна тільки використати, але її не можна збільшити.

3) Системи з неповною інформацією про об'єкт керування, але з активним накопиченням її в процесі керування (системи дуального керування).

Пристрій B подає на A деяку послідовність керувань $\{u_i(t)\}$, (тут i – індекс послідовності) і по оберненому зв'язку отримує реакції $\{y_i(t)\}$, які аналізуються керуючим пристроєм B . Пристрій B робить висновки про характеристики об'єкта керування, зокрема, про сигнал $x(t)$. Мета цих дій об'єкта B – сприяти більш точному вивченю характеристик об'єкта керування A для більш ефективного керування цим об'єктом, тобто для генерації необхідних керувань. Системи з неповною інформацією виникають через те, що на систему впливають випадкові, непередбачені збурення.

1.3. МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

Для математичної постановки задачі оптимального керування розглянемо фазові координати системи як функції часу $x = x(t)$ на деякому проміжку $t_0 \leq t \leq t_1$.

У початковий момент t_0 потрібно задати початкову умову $x(t_0) = x_0$, а також керування як функції часу $u = u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Тоді фазові координати $x = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ визначатимуться як розв'язок задачі Коші:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), u(t), t), \quad t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

де

$f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \dots, f^n(x(t), u(t), t))^T$ – відома вектор-функція,

Функція $f(x(t), u(t), t)$ описує внутрішні характеристики об'єкта керування та враховує зовнішні впливи на об'єкт.

Визначення 1.1.

Неперервна функція $x = x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, що задовольняє рівність

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

називається *розв'язком* даної задачі Коші або траекторією, що відповідає початковій умові $x(t_0) = x_0$ та керуванню $u = u(\cdot)$ і позначається через $x = x(\cdot, u, x_0)$ або $x = x(t, u, x_0)$.

Початкова точка траекторії $x(t_0, u, x_0)$ називається *лівим кінцем траекторії*,

t_0 – *початковим моментом часу*,

$x(t_1, u, x_0)$ називається *правим кінцем траекторії*,

t_1 – *кінцевим моментом часу*.

Перейдемо до постановки задачі оптимального керування в загальному випадку.

Нехай

$$x(t) = x(t, u(\cdot), x_0) \in G(t), t_0 \leq t \leq t_1 \quad (1.19)$$

$$t_0 \in \Theta_0, t_1 \in \Theta_1 \quad (1.20)$$

де $G(t)$ – деяка задана множина з $E^n : G(t) \subset E^n$, а Θ_0, Θ_1 – задані множини на числовій осі $R = \{t : -\infty < t < +\infty\}$.

Не виключено, що $\Theta_0 = R$, $\Theta_1 = R$.

Обмеження вигляду (1.19) часто називають **фазовими обмеженнями**.

Функції керування $u = u(t)$ мають задовольняти певні вимоги неперервності та гладкості, оскільки при надто розривних функціях $u(t)$ поставлена задача та керування $u(t)$ можуть не мати сенсу. У більшості прикладних задач керування $u(t)$ вибираються у вигляді кусково-неперервних функцій (див. зауваження 1.1.).

Є класи задач керування, в яких від функцій $u(t)$, крім неперервності, вимагається існування їх кусково-неперервних похідних. Такі керування називають **кусково-гладкими**.

Керування $u(t)$, узагалі кажучи, задовольняють певні обмеження, які запишемо у вигляді

$$u(t) \in V(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

де $V(t)$ – задана множина: $V(t) \subseteq E^r$ при кожному $t \in [t_0, t_1]$.

Обмеження (1.20) потрібні, бо початковий та кінцевий моменти часу можуть залежати від керування (напр., у задачах швидкодії) і не завжди можуть бути задані наперед. Тоді вказують обмеження типу (1.20).

Розглянемо умови на кінцях траєкторії $x(t)$.

З обмеження (1.19) випливає при $t = t_0$ і $t = t_1$: $x(t_0) \in G(t_0)$, $x(t_1) \in G(t_1)$ відповідно.

Утім, бувають ситуації, наприклад, при $G(t) = E^n$, $t_0 \leq t \leq t_1$, коли обмеження на кінцях зручніше виділяти й розглядати окремо.

Будемо вважати, що в E^n при кожному $t_0 \in \Theta_0$ задана множина $S_0(t_0)$ і при кожному $t_1 \in \Theta_1$ задана множина $S_1(t_1)$.

Умови на кінцях траєкторії будемо тоді записувати у вигляді:

$$\begin{aligned}x(t_0) &\in S_0(t_0), t_0 \in \Theta_0 \\x(T) &\in S_1(T), T \in \Theta_1\end{aligned}\tag{1.21}$$

У задачах оптимального керування прийнята така **класифікація умов** (1.20), (1.21):

якщо множина Θ_0 складається з єдиної точки, то *початковий момент часу називають фіксованим*;

якщо Θ_1 складається з єдиної точки, то *кінцевий момент часу називають фіксованим*.

Якщо множина $S_0(t_0)$ (або $S_1(t_1)$) складається з однієї точки й не залежить від t_0 : (або відповідно $S_1(T) = \{x_1\}, T \in \Theta_1$), то кажуть, що:
лівий (або правий) кінець траєкторії закріплений.

Якщо $S_0(t_0) \equiv E^n, t_0 \in \Theta_0$, або $S_1(t_1) \equiv E^n, t_1 \in \Theta_1$,
то *лівий (або правий) кінець траєкторії називають вільним.*

В інших випадках
лівий (або правий) кінець траєкторії називають рухомим (може рухатись по заданій кривій).

Нехай рух фазової точки $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ описується системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.25)$$

де функція $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ визначена при $\mathbf{x} \in G(t)$, $\mathbf{u} \in V(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Визначення 1.2. Набір $(t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{x}(\cdot))$ називається допустимим набором, якщо

- керування $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\cdot) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ визначене її кусково-неперервне на $t_0 \leq t \leq t_1$ і задовольняє обмеження $\mathbf{u}(t) \in V(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$; $t_0 \in \Theta_0$, $t_1 \in \Theta_1$, $t_0 \leq t_1$;
- $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\cdot) = \mathbf{x}(\cdot, \mathbf{u}(t), \mathbf{x}_0)$ – траєкторія задачі Коші:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.26)$$

яка визначена на відрізку $[t_0, t_1]$ і задовольняє фазове обмеження (1.19),

$$a \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in S_0(t_0), \quad \mathbf{x}(t_1) \in S_1(t_1).$$

Будемо вважати, що множина допустимих наборів $(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot))$ непорожня.

Нехай на множині допустимих наборів задана функція (або цільова функція, функціонал)

$$J(x_0, u(\cdot), x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t) dt + g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1), \quad (1.27)$$

де

$f^0(x(t), u(t), t)$, $g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1)$ – задані функції при $x \in G(t)$, $u \in V(t)$,

$$\sup \Theta_0 < \inf \Theta_1, \quad S_0(t_0) \subseteq G(t_0), \quad t_0 \in \Theta_0, \quad S_1(t_1) \subseteq G(t_1), \quad t_1 \in \Theta_1.$$

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб мінімізувати або максимізувати функціонал (1.27) на множині допустимих наборів вигляду $(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot))$.

Зауваження 1.2. Обмежимося розглядом задач на мінімум, оскільки задача на максимум функціонала J завжди може бути зведена до еквівалентної задачі на мінімум функціонала $(-J)$.

Позначимо $J_* = \inf(t_0, t_1, x_0, u(\cdot), x(\cdot))$, де нижня грань береться за всіма допустимими наборами.

Визначення 1.3. Допустимий набір $(t_{0^*}, t_{1^*}, x_{0^*}, u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ називається **розв'язком задачі оптимального керування**,

$u_*(\cdot)$ – оптимальним керуванням,

$x_*(\cdot)$ – оптимальною траєкторією системи,

якщо

$$J(t_{0^*}, t_{1^*}, x_{0^*}, u_*(\cdot), x_*(\cdot)) = J_*.$$

Тоді задачу оптимального керування можна записати у вигляді:

$$J(x_0, u(\cdot), x(\cdot), t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t) dt + g_0(x_0, x(t_1), t_0, t_1) \rightarrow \inf \quad (1.28)$$

$$x' = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (1.29)$$

$$x \in G(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (1.30)$$

$$x(t_0) = x_0 \in S_0(t_0), \quad x(t_1) \in S_1(t_1), \quad t_0 \in \Theta_0, \quad t_1 \in \Theta_1 \quad (1.31)$$

$$u \in V(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (1.32)$$

Вважаємо тут керування $u = u(\cdot)$ кусково-неперервним на $[t_0, t_1]$ (якщо не сказане інше).

На практиці зустрічаються задачі оптимального керування більш загального вигляду, ніж задача (1.28) – (1.32).

У теорії керування розглядаються також задачі, що враховують

- запізнення інформації,*
 - задачі з параметрами,*
 - з дискретним часом,*
 - з більшим загальним виглядом цільової функції,*
 - задачі для інтегро-диференціальних рівнянь,*
 - для рівнянь із частинними похідними,*
 - для стохастичних рівнянь,*
- тощо.*

2.1. ПОСТАНОВКА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ КЕРОВАНОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Розглянемо систему керування, що описується лінійними диференціальними рівняннями

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (2.1)$$

де $x(t)$ – n -мірний, $u(t)$ – m -мірний вектор-стовпці, $A(t)$, $B(t)$ – відомі матриці відповідних розмірностей, елементи яких залежать від часу t .

Такі системи називаються *нестаціонарними системами керування*.

Визначення 2.1. Система (2.1) називається *цілком керованою*, якщо для двох довільних точок x^0, x^1 із фазового простору X і двох довільних значень t_0, t_1 аргументу t існує така функція керування $u(t), t \in [t_0, t_1]$, при якій розв'язок системи рівнянь (2.1) задовольняє умови $x(t_0) = x^0, x(t_1) = x^1$.

Позначимо: $X(t, \xi)$ – фундаментальна матриця для однорідних рівнянь, що відповідають рівнянням (2.1), нормована в точці ξ .

Введемо матрицю

$$W(t, \xi) = X(t, \xi)B(\xi).$$

Матрицю $W(t, \xi)$ називають *матрицею імпульсних перехідних функцій*.

Вважаємо $W(t, \xi) = \begin{pmatrix} w_1(t, \xi) \\ \vdots \\ w_n(t, \xi) \end{pmatrix}$, де $w_i(t, \xi)$ – вектор-рядок:

$$w_i(t, \xi) = (w_{i1}(t, \xi), \dots, w_{in}(t, \xi)), i = \overline{1, n} \quad (2.2)$$

Теорема 2.1. Для того, щоб система (2.1) була цілком керованою, необхідно й досить, щоб вектор-функції $w_1(t, \xi), \dots, w_n(t, \xi)$ були лінійно-незалежними на довільному проміжку $[t_0, t_1]$.

Зауважимо, що умови, наведені в теоремі 2.1, практично важко використовувати, бо матриця $W(t, \xi)$ наперед не задається і її треба кожного разу обчислювати для різних значень t і ξ . Тому бажано знайти умови цілком керованості, що виражаються через матриці $A(t)$, $B(t)$.

Розглянемо це питання для систем керування, в яких A, B – матриці зі сталими елементами. Такі системи будемо називати лінійними *стаціонарними системами*:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t). \quad (2.3)$$

Теорема 2.2. Для цілком керованості стаціонарної системи (2.3) n -го порядку необхідно й досить, щоб

$$\text{rang } S_n = \text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n. \quad (2.4)$$

Наслідок 2.1. Якщо в системі (2.3) вектор керування $u(t)$ одномірний, а $B = b$ – стовпчик, то необхідна й достатня умова цілком керованості має вигляд:

$$\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0. \quad (2.5)$$

Співвідношення (2.4) і (2.5) називаються *критеріями цілком керованості Калмана* для лінійних стаціонарних систем.

Визначення 2.2. (*Цілком керованість на заданому проміжку*). Нестаціонарна система (2.1) називається цілком керованою на заданому проміжку $[t_0, t_1]$, якщо для 2-х довільних значень $x^0, x^1 \in X$ фазового простору можна вказати таку функцію керування $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, що розв'язок цієї системи задовільняє крайові умови: $x(t_0) = x^0, x(t_1) = x^1$.

Теорема 2.3. Якщо для деякого t із заданого проміжку $[t_0, t_1]$ виконується умова

$$\text{rang}[z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)] = n, \quad (2.6)$$

де $z_1(t) = B(t)$, $z_k(t) = A(t)z_{k-1}(t) - \frac{dz_{k-1}}{dt}$, $k = \overline{2, n}$,

то система (2.1) – цілком керована на заданому проміжку.

2.2. СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ У ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

У теорії керування розглядаються задачі про спостережуваність.

Зміст цих задач: встановити алгоритм визначення частини або всіх фазових координат системи за умови, що відома друга частина фазових координат або деякі функції від цих координат, а також відома математична модель системи керування у вигляді системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо задачу спостережуваності для лінійних систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \quad (2.8)$$

де $x(t)$ – n -мірний вектор стану системи, $A(t)$ – відома матриця $n \times n$.

Визначення 2.3. Задачу знаходження вектора $x(t)$ стану системи (2.8) або окремих його компонент за відомою на деякому проміжку $[t_0, t_1]$ функцією

$$y(t) = g^T(t)x(t), \quad (2.9)$$

де $g(t)$ – відома n -мірна вектор-функція, будемо називати *задачею спостережуваності лінійної системи* (2.8).

Функцію $y(t)$ називають *функцією (сигналом) виходу системи* (2.8).

Зауваження 2.1. (Узагальнення визначення 2.3):

знайти вектор $\mathbf{x}(t)$ або окремі його компоненти за відомою вектор-функцією виходу

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}^T(t)\mathbf{x}(t), \quad (2.10)$$

де $\mathbf{G}(t)$ – відома матриця $n \times m$.

Визначення 2.4. Якщо задача спостережуваності (2.8), (2.9) (або (2.8), (2.10)) має розв'язок, то система називається **цілком спостережуваною** або частково спостережуваною залежно від того, усі чи частину компонент вектора $\mathbf{x}(t)$ вдається встановити.

Визначення 2.5. Пара матриць $\mathbf{A}(t), \mathbf{G}(t)$ називається спостережуваною, якщо можна розв'язати задачу спостережуваності для системи (2.8) за вектором виходу (2.10).

Розглянемо найбільш прості розв'язки задач спостережуваності.

Теорема 2.4. Нехай для кожного $t \in [t_0, t_1]$ існують і відомі $n - 1$ похідні від вектора виходу (2.10) системи (2.8). Тоді для існування розв'язку задачі спостережуваності для системи (2.8) у фіксованій точці t у вигляді лінійної комбінації значень $\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(n-1)}(t)$ досить, щоб

$$\text{rang } \tilde{\mathbf{S}}_n = n, \quad (2.11)$$

де

$$\tilde{\mathbf{S}}_n(t) = (\mathbf{G}_1(t), \mathbf{G}_2(t), \dots, \mathbf{G}_n(t)), \quad (2.12)$$

$$\mathbf{G}_1^T(t) = \mathbf{G}^T(t), \quad \mathbf{G}_{\nu+1}^T(t) = \mathbf{G}_\nu^T(t)\mathbf{A}(t) + \frac{d\mathbf{G}_\nu^T(t)}{dt}, \quad \nu = \overline{1, n-1}. \quad (2.13)$$

Зауваження 2.2. Коли $G_1(t) = g(t)$, то умова (2.11) має вигляд:

$$\det \tilde{S}_n(t) = \det(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \neq 0, \quad (2.15)$$

де

$$g_1^T(t) = g^T(t), \quad g_v^T(t) = g_{v-1}^T(t)A(t) + \frac{dg_{v-1}^T(t)}{dt}, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Тоді для фіксованого t маємо:

$$x(t) = \tilde{S}_n^{*-1}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Зауваження 2.3. Якщо система рівнянь (2.8) стаціонарна, тобто $A(t) = A = \text{const}$ і $G_1(t) = \text{const}$ ($\mathbf{g}(t) = \text{const}$), то тоді матриця $\tilde{\mathbf{S}}_n$, умови (2.11), (2.15) і формула (2.16) набудуть відповідно вигляду:

$$\tilde{\mathbf{S}}_n(t) = (\mathbf{G}, \mathbf{A}^T \mathbf{G}, \dots, \mathbf{A}^{T(n-1)} \mathbf{G}).$$

$$\text{rang } \tilde{\mathbf{S}}_n = \text{rang}(\mathbf{G}, \mathbf{A}^T \mathbf{G}, \dots, \mathbf{A}^{T(n-1)} \mathbf{G}) = n. \quad (2.17)$$

$$\det \tilde{\mathbf{S}}_n(t) = \det (\mathbf{g}, \mathbf{A}^T \mathbf{g}, \dots, \mathbf{A}^{T(n-1)} \mathbf{g}) \neq 0. \quad (2.18)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^T \\ \mathbf{g}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}'(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{n-1}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Відзначимо, що розв'язок задачі спостережуваності через вектор виходу та його похідні буває незручним на практиці, що пов'язано з необхідністю чисельно знаходити похідні заданої функції виходу $\mathbf{y}(t)$.

2.3. ЗВ'ЯЗОК МІЖ СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЮ ТА КЕРОВАНІСТЮ В СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

Нехай маємо умову цілком керованості:

$$\text{rang}(z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) = n, \quad (2.20)$$

де

$$z_1(t) = B(t), \quad z_k(t) = A(t)z_{k-1}(t) - \frac{dz_{k-1}(t)}{dt}, \quad k = \overline{2, n}$$

для лінійної системи керування

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t).$$

Запишемо також умову цілком спостережуваності для лінійної системи

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) \quad \text{з виходом} \quad y(t) = G^T(t)x(t); \\ \text{rang}(G_1(t), G_2(t), \dots, G_n(t)) &= n, \end{aligned} \quad (2.21)$$

де

$$G_1^T(t) = G^T(t), \quad G_{\nu+1}^T(t) = G_\nu^T(t)A(t) + \frac{dG_\nu^T(t)}{dt}, \quad \nu = \overline{1, n-1}.$$

Умови (2.20), (2.21) подібні між собою за формою. Утім, існує зв'язок між ними й за змістом.

Теорема 2.5. Якщо виконується умова цілком керованості системи

$$\frac{dx}{dt} = -A^T(t)x(t) + G(t)u(t) \quad (2.22)$$

то виконується умова (2.21) цілком спостережуваності системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) \quad \text{з виходом} \quad y(t) = G^T(t)x(t).$$

Систему (2.22) називають *спряженою* до системи керування (2.1).

Таким чином, дана теорема дозволяє зводити дослідження задач спостережуваності лінійних систем до дослідження задач керованості спряжених систем. Це дає можливість використовувати результати, що стосуються керованості, при розв'язуванні задач спостережуваності.

Розглянемо випадок, коли елементи матриць A, G не залежать від t і перенесемо результати з теорії керованості на задачу спостережуваності.

Теорема 2.6. Для того щоб існував розв'язок задачі спостережуваності системи

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{з вектором виходу (вимірів)} \quad y = G^T x$$

необхідно ѹ досить, щоб виконувалась умова:

$$\operatorname{rang} \tilde{S}_n = \operatorname{rang}(G, A^T G, \dots, A^{T^{n-1}} G) = n.$$

Зауваження 2.4. Найчастіше задачі спостережуваності виникають у системах керування, тому вони розв'язуються паралельно із задачею керування рухом системи.

Щодо лінійних систем, це означає, що задача спостережуваності виникає не для системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$$

а для системи керування $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$, де $u(t)$ – m -мірний вектор керування.

При цьому вектор виходу $y(t) = G^T(t)x(t)$ має розмірність m .

2.4. ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У багатьох випадках дослідникам невідомі як сама структура математичних моделей системи керування, так і параметри моделей. Це призводить до необхідності оцінки або самої структури й параметрів математичної моделі, або значень окремих параметрів при заданій наперед структурі моделі.

Розглянемо задачу знаходження невідомих параметрів математичної моделі, якщо її структура визначена у вигляді системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Задача знаходження (оцінки) невідомих параметрів математичної моделі об'єкта дослідження називається задачею ідентифікації.

Для ілюстрації підходів до розв'язання проблем такого типу розглянемо найпростішу задачу ідентифікації.

Нехай стан системи визначається вектором $x(t)$ із n -мірного евклідового простору і для деякого значення аргументу t у результаті вимірюваних отримані вектори

$$x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \dots, \frac{d^n x(t)}{dt^n}. \quad (2.26)$$

У цьому випадку задача ідентифікації полягає в необхідності знайти таку матрицю A розмірності $n \times n$, щоб виконувались умови:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= A \frac{dx}{dt}, \\ &\dots \\ \frac{d^n x}{dt^n} &= A \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Якщо для відомих вимірюваних (2.26) існує матриця A , яка задовольняє співвідношення (2.27), то задача ідентифікації системи має розв'язок.

Позначивши рядки матриці A через $a_1^T, a_2^T, \dots, a_n^T$, рівняння (2.27) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= a_j^T x, \\ \dots &\quad , \quad (j = 1, 2, \dots, n). \\ \frac{d^n x_j}{dt^n} &= a_j^T \frac{d^n x}{dt^n} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Розглядаючи співвідношення (2.28) при кожному значенні j як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно елементів рядка $a_j^T = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$, можна записати

$$\begin{bmatrix} x^T \\ \frac{dx^T}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}x^T}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} a_j = \begin{bmatrix} \frac{dx_j}{dt} \\ \frac{d^2 x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix}. \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.29)$$

Умова існування розв'язку системи (2.29) має вигляд:

$$\det\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right) \neq 0. \quad (2.30)$$

Якщо умова (2.30) виконується, то це означає, що параметри a_j математичної моделі у цьому випадку визначаються за формулами:

$$a_j = \begin{bmatrix} x^T \\ \frac{dx^T}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}x^T}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \frac{dx_j}{dt} \\ \frac{d^2x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^n x_j}{dt^n} \end{bmatrix}, \quad (j=1,2,\dots,n). \quad (2.31)$$

У результаті підстановки співвідношень (2.27) в умову (2.30) неважко отримати

$$\det(x, Ax, \dots A^{n-1}x) \neq 0. \quad (2.32)$$

Порівнявши (2.32) з умовою (2.5) цілком керованості системи (2.3), можна сформулювати **зв'язок між задачами ідентифікації та керованості**:

для існування розв'язку задачі ідентифікації у вигляді математичної моделі

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

за умови спостереження вектора стану $x(t)$ достатньо, щоб матриця A та вектор $x(t)$ задовольняли умову (2.5) цілком керованості системи (2.3),

де

$$b = x(t).$$

Подібну аналогію можна встановити також між умовами ідентифікації та цілком спостережуваності.

Оскільки матриця A наперед невідома, то на практиці умову ідентифікації перевіряють за допомогою умови (2.30).

3.1. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ ТА АНАЛІТИЧНЕ КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Нехай система керування описується рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u(t)) \quad (3.1)$$

де $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ – відповідно вектори стану та керувань, $F(t, x(t), u(t))$ – n -мірна вектор-функція, що описує рух системи.

Попередньо розглянемо систему (3.1), як диференціальних рівнянь, в більш компактному вигляді

$$\dot{y} = F(y, t). \quad (*)$$

Розв'язок системи рівнянь (*) має вигляд

$$y = \varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ – векторна функція, що складається з n – неперервно диференційованих функцій $\varphi^T(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$.

Будемо використовувати одну з норм Евклідового простору R^n

$$\|\varphi(t) - y(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i(t) - \varphi_i(t))^2}.$$

Визначення 3.1 Розв'язок $y = \varphi(t)$ системи (*) називається *стійким за Ляпуновим* (рівномірно за часом), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв'язку $y = y(t)$ системи (*) при $t > t_0$ буде виконуватись $\|\varphi(t) - y(t)\| < \varepsilon$, при $\|\varphi(t_0) - y(t_0)\| < \delta$ рис.3.1.

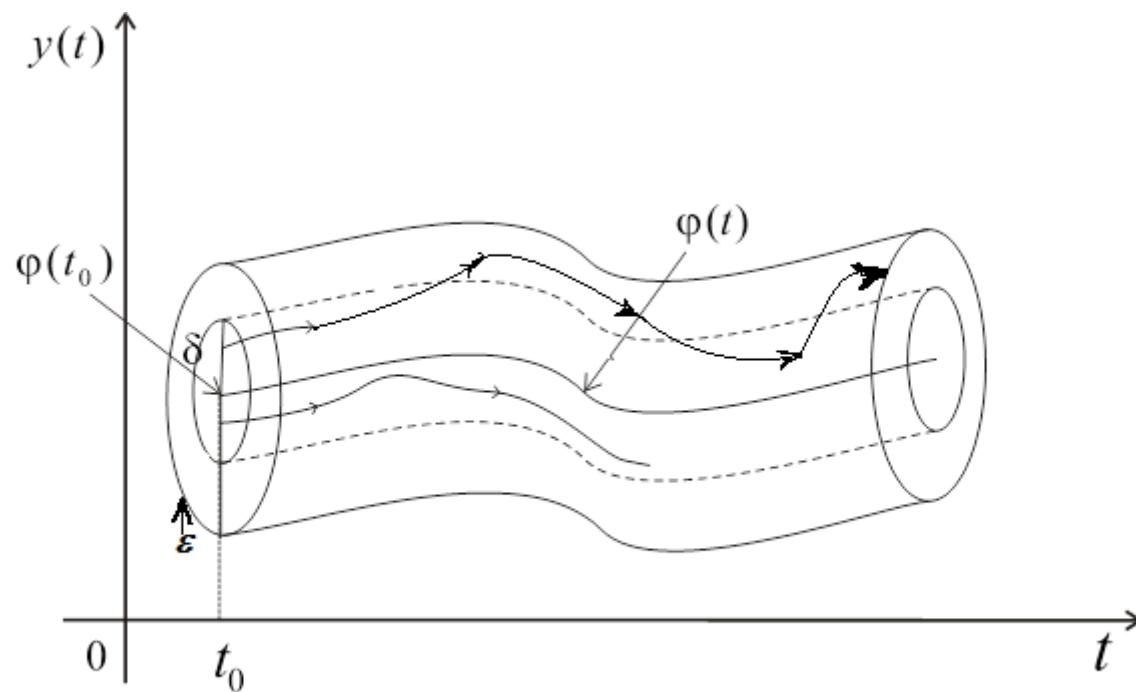


Рис.3.1.

Визначення 3.2 Розв'язок $y = \varphi(t)$ системи (*) називається *асимптотично стійким* (рівномірно за часом), якщо він стійкий за Ляпуновим (Визн. 3.1) і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - y(t)\| = 0.$$

Область $\Delta(t_0) = \left\{ y(t_0) : \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t) - y(t)\| = 0 \right\}$ називається *областю притягання* рис.3.2.

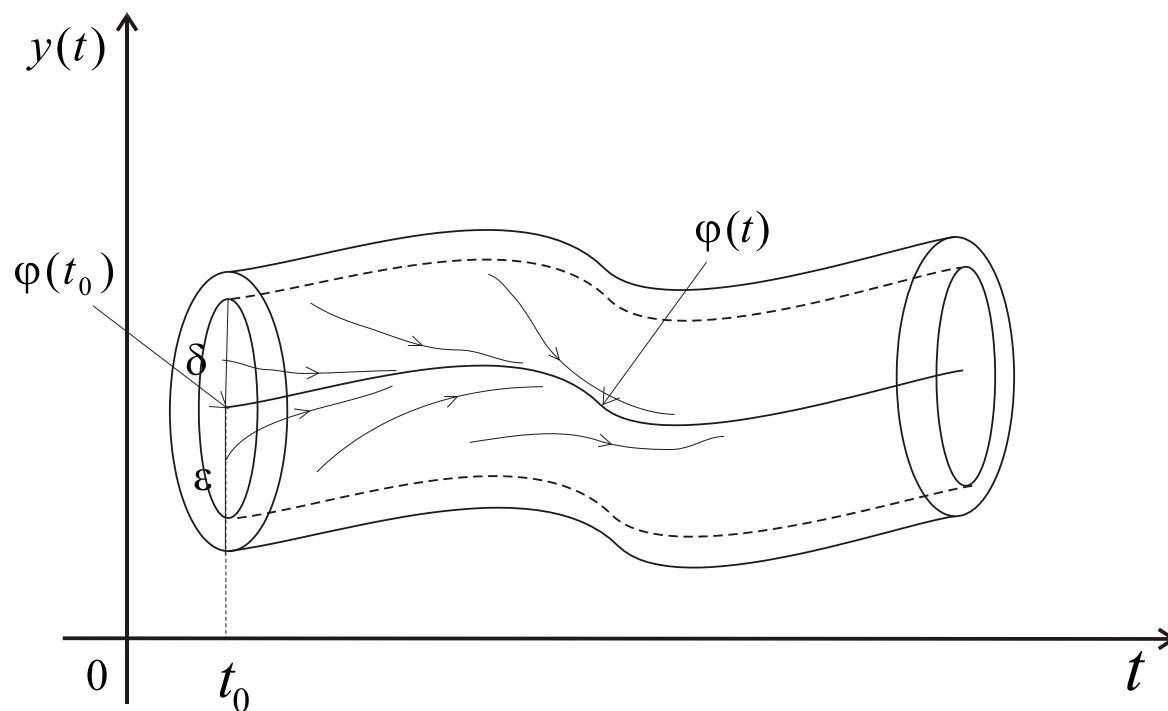


Рис.3.2.

Визначення 3.3 Розв'язок $y = \varphi(t)$ системи (*) називається **нестійким**, якщо для скільки завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує хоча б один розв'язок $\bar{y}(t)$ такий, що при деякому $T > t_0$ буде виконуватись $\|\varphi(T) - y(T)\| > \varepsilon$, хоча $\|\varphi(t_0) - y(t_0)\| < \delta$, де $\delta > 0$ як завгодно мала величина рис.3.3.

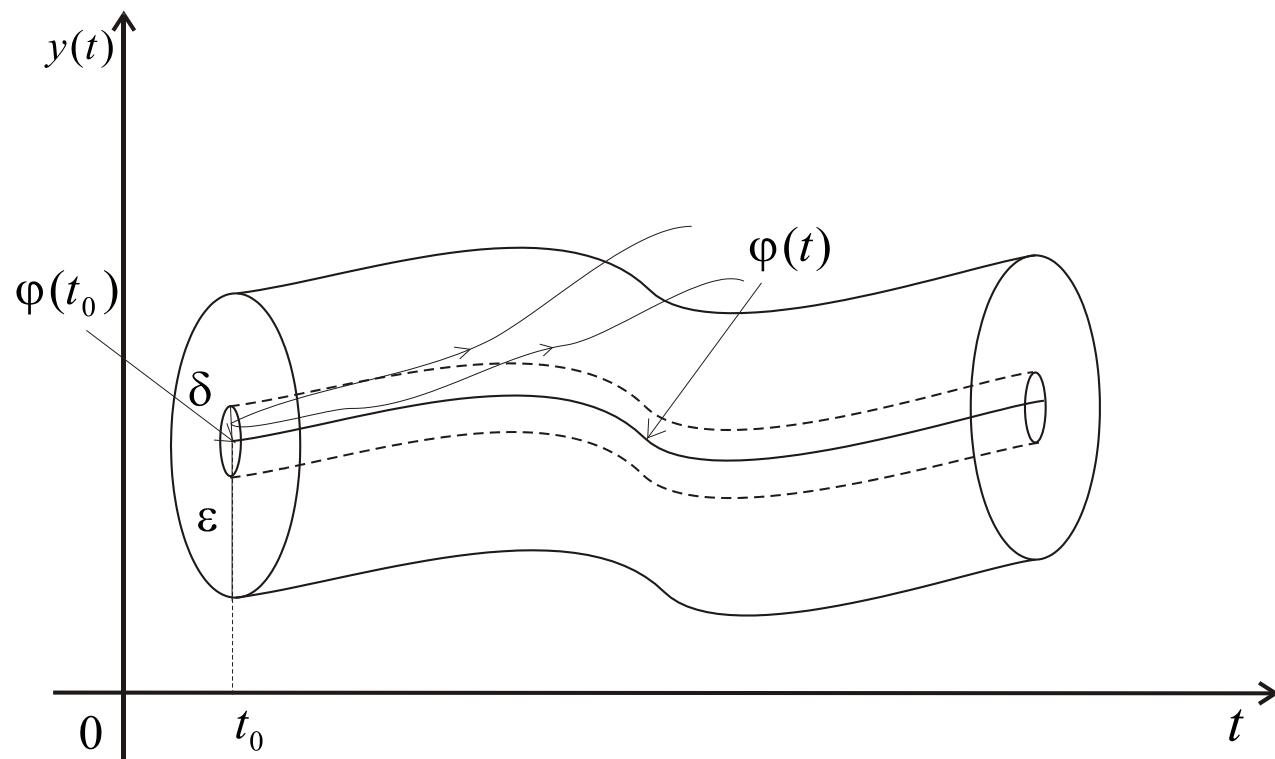


Рис.3.3.

Для постановки задач дослідження стійкості та конструювання регуляторів потрібно задати певний бажаний рух системи (3.1).

Будемо вважати, що траєкторія $x(t)$ на інтервалі $[t_0, \infty)$ змінюється згідно із заданим програмним режимом:

$$x(t) = x_{np}(t), \quad t \in [t_0, \infty). \quad (3.2)$$

Нехай у момент часу $t^{(0)}$ система задовольняє умову $x(t^{(0)}) = x_{np}(t^{(0)})$.

Тоді *задачу програмного керування можна сформулювати* так:

знайти програмне керування $u_{np}(t)$, при якому розв'язок системи (3.1) забезпечує умову (3.2).

Задача дослідження стійкості програмного руху $x_{np}(t^{(0)})$ полягає у визначенні властивостей розв'язку системи (3.1) під дією програмного керування $u(t) = u_{np}(t)$ для $t > t^{(0)}$, якщо в початковий момент часу $t^{(0)}$ вектор стану системи отримує деяке збурення $\Delta x(t^{(0)})$:

$$x(t^{(0)}) = x_{np}(t^{(0)}) + \Delta x(t^{(0)}). \quad (3.3)$$

Визначення 3.4. Програмний рух $x_{np}(t)$ системи (3.1) називається *стійким за Ляпуновим*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що, якщо для початкових умов системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), u_{np}(t)) \quad (3.4)$$

виконується нерівність

$$\|\Delta x(t^{(0)})\| = \|x(t^{(0)}) - x_{np}(t^{(0)})\| \leq \delta,$$

то при $t > t^{(0)}$ для розв'язку системи (3.4) справедлива оцінка

$$\|\Delta x(t)\| \leq \varepsilon,$$

де $\Delta x(t) = x(t) - x_{np}(t)$.

Визначення 3.5. Програмний рух системи (3.4) називається *асимптотично стійким*, якщо до умов стійкості додається гранична умова:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta x(t)\| = 0.$$

Під дією початкових збурень траєкторія збуреного руху буде мати вигляд

$$x(t) = x_{np}(t) + \Delta x(t).$$

Запишемо рівняння для $\Delta x(t)$ згідно із системою (3.4):

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = F(t, x_{np}(t) + \Delta x(t), u_{np}(t)) - F(t, x_{np}(t), u_{np}(t)) = \Phi(t, \Delta x(t), u_{np}(t)). \quad (3.5)$$

Очевидно, що стійкість за Ляпуновим програмного руху системи (3.4) означає стійкість збурення $\Delta x(t) \equiv 0$ за Ляпуновим для системи (3.5).

Надалі будемо досліджувати на стійкість незбурений рух $\Delta x(t) \equiv 0$.

Зазвичай, програмний рух системи (3.4) і відповідний незбурений рух системи (3.5) є нестійкими.

Тому будемо розглядати задачу забезпечення стійкості цих систем шляхом введення додаткового керування $\Delta u(t, \Delta x(t))$, яке разом із програмним керуванням становить закон керування системою:

$$u(t) = u_{np}(t) + \Delta u(t, \Delta x(t)) \quad (3.6)$$

Тоді задача аналітичного конструювання регулятора системи (3.1) полягає у виборі такої залежності $\Delta u(t, \Delta x(t))$, за якої розв'язок $\Delta x(t) \equiv 0$ системи рівнянь

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = X(t, \Delta x(t), \Delta u(t, \Delta x(t))), \quad (3.7)$$

де $X(t, \Delta x(t), \Delta u(t, \Delta x(t))) = \Phi(t, \Delta x(t), u_{np}(t) + \Delta u(t, \Delta x(t)))$,
був би стійким (асимптотично стійким) за Ляпуновим.

Якщо задати наперед структуру залежності $\Delta u(t, \Delta x(t))$ з точністю до значень деяких параметрів, то задача аналітичного конструювання регулятора зводиться до вибору значень цих параметрів системи (3.7) згідно з умовами стійкості за Ляпуновим розв'язку $\Delta x(t) \equiv 0$.

Часто таку задачу називають *задачею стабілізації*.

3.2. Особливі точки лінійних стаціонарних систем на площині

Розглянемо побудову фазового портрету системи лінійних диференціальних рівнянь на площині

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy.\end{aligned}$$

Дотримуючись загальної теорії диференціальних рівнянь, будуємо характеристичне рівняння

$$\det\{A - \lambda I\} = 0,$$

тобто

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Після розкриття характеристичного рівняння, отримуємо

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

В залежності від вільного члена, розглянемо два випадки.

I. Нехай визначник системи не дорівнює нулю, тобто

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Тоді характеристичне рівняння не має нульових коренів, тобто

$$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0.$$

1) Нехай корені λ_1, λ_2 - дійсні, різні, одного знаку.

a) Нехай, наприклад, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

Завжди існує лінійне неособливе перетворення,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

(розтяг з поворотом), яке приводить початкову систему до жорданової форми

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \lambda_1 \xi, \\ \dot{\eta} &= \lambda_2 \eta. \end{aligned}$$

Причому вектори

$$s_1^T = (\alpha_1, \beta_1), \quad s_2^T = (\alpha_2, \beta_2)$$

є власними векторами матриці A , з відповідним власним числом λ_1, λ_2 .

Розв'язком перетвореної системи буде

$$\xi = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Для того, щоб побудувати фазовий портрет зробимо наступне.

Поділимо одне рівняння на інше

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\xi}{\eta}.$$

Звідси, відокремлюючи змінні,

$$\frac{d\xi}{\lambda_1 \xi} = \frac{d\eta}{\lambda_2 \eta}.$$

Проінтегрувавши, отримаємо

$$\frac{1}{\lambda_1} \ln |\xi| = \frac{1}{\lambda_2} \ln |\eta| + \frac{1}{\lambda_2} \ln c.$$

Звідси фазові траєкторії мають вигляд «узагальнених парабол» (Рис. 2.1)

$$\xi = c \eta^\alpha, \quad \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$$

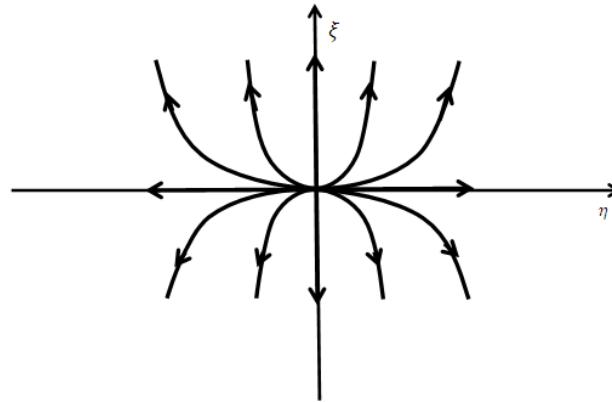


Рис. 2.1.

А після зворотного перетворення (також розтягнення і повороту) отримаємо портрет особливої точки, який називається **вузлом**.

Оскільки $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то

$$x(t) \rightarrow \pm\infty, \quad y(t) \rightarrow \pm\infty,$$

і положення рівноваги називається **нестійким вузлом** (Рис.2.2.)

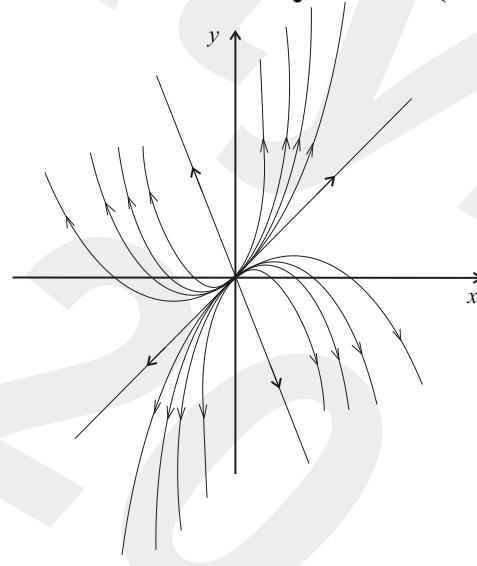


Рис. 2.2.

б) Якщо $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, то заміною $t \rightarrow -t$ переходимо до попереднього пункту. Тому якісна картина зберігається, але рух по траєкторіям направлено у протилежному напрямку.

Особлива точка називається **стійким вузлом** (Рис.2.3).

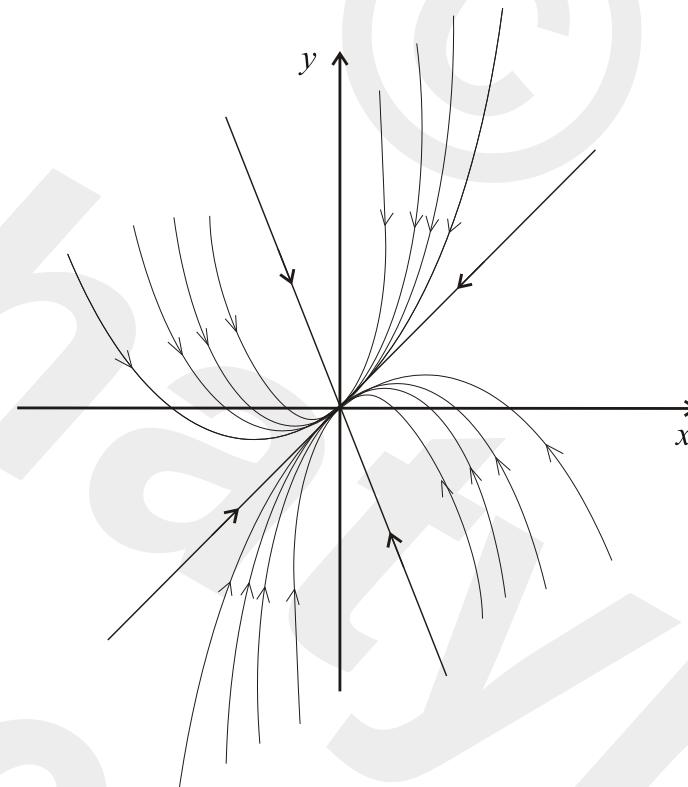


Рис. 2.3.

2) Нехай корені характеристичного рівняння дійсні, різних знаків (наприклад, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$). Повторюючи перетворення, наведені в попередньому пункті, отримаємо, що фазові траєкторії мають вигляд «узагальнених гіпербол»

$$\xi = c \eta^\alpha, \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$$

Рух по цим траєкторіям йде згідно залежностей

$$\xi = c_1 e^{\lambda_1 t}, \eta = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

А оскільки $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, то $\xi(t) \rightarrow 0, \eta(t) \rightarrow \pm\infty$ (Рис. 2.4).

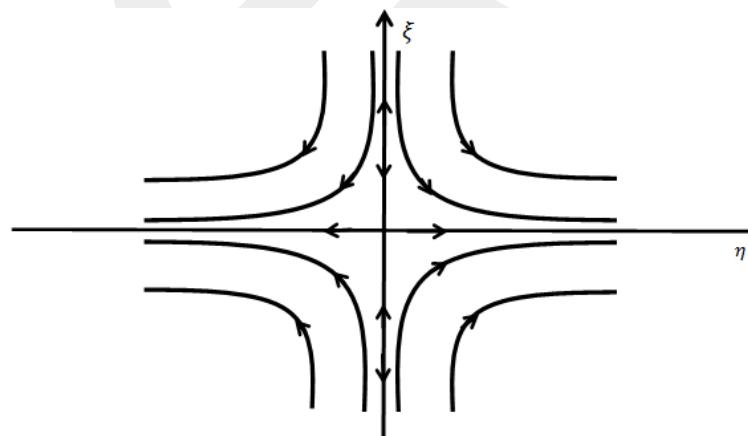


Рис. 2.4.

Після оберненого перетворення отримуємо фазовий портрет особливої точки, який називається **сідлом** (Рис. 2.5).

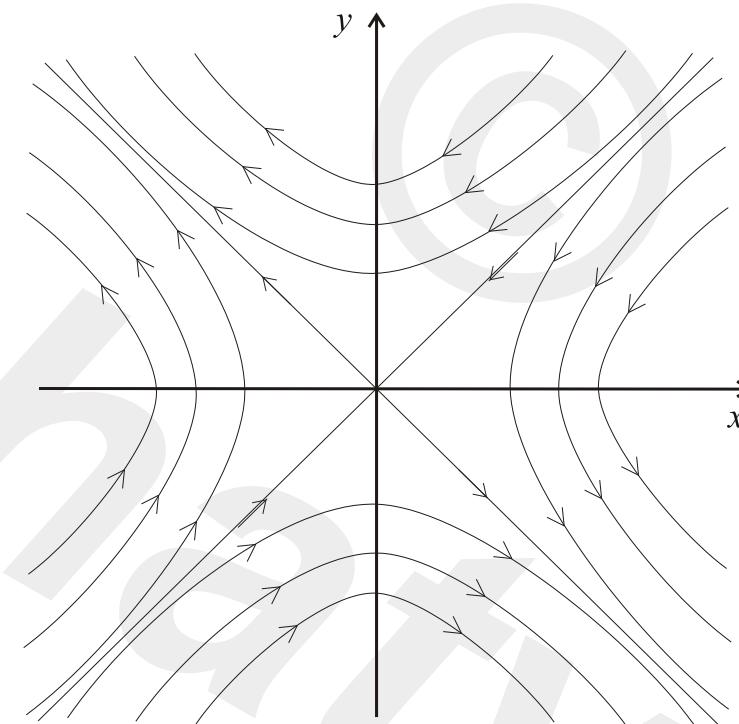


Рис. 2.5.

Прямі l_1 : і l_2 : визначені власними векторами $s_1^T = (\alpha_1, \beta_1)$, $s_2^T = (\alpha_2, \beta_2)$, називаються стійкою і нестійкою **сепаратрисами сідла**.

3) Нехай корені характеристичного рівняння комплексні, тобто $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$. Після перетворення система буде мати вигляд

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= p\xi + q\eta, \\ \dot{\eta} &= -q\xi + p\eta.\end{aligned}$$

Введемо полярні координати

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta.$$

Після підстановки в перетворені рівняння, отримуємо

$$\begin{aligned}\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} &= pr \cos \theta + qr \sin \theta, \\ \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} &= -qr \cos \theta + pr \sin \theta.\end{aligned}$$

Помноживши перше рівняння на $\cos \theta$, а друге на $\sin \theta$ і склавши, отримаємо

$$\begin{aligned}\dot{r}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &= \\ = r(p \cos \theta + q \sin \theta) \cos \theta + r(-q \cos \theta + p \sin \theta) \sin \theta &= \\ = r(p \cos^2 \theta + q \sin \theta \cos \theta - q \cos \theta \sin \theta + p \sin^2 \theta) &= rp.\end{aligned}$$

Або

$$\dot{r} = pr.$$

Далі, помноживши перше рівняння на $-\sin\theta$, а друге на $\cos\theta$ і склавши, тримаємо

$$\begin{aligned} r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\dot{\theta} &= \\ = -r(p\cos\theta + q\sin\theta)\sin\theta + r(-q\cos\theta + p\sin\theta)\cos\theta &= \\ = r(-p\cos\theta\sin\theta - q\sin^2\theta - q\cos^2\theta + p\sin\theta\cos\theta) &= -qr. \end{aligned}$$

Або

$$\dot{\theta} = -q.$$

Таким чином в полярній системі координат отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{r} = pr,$$

$$\dot{\theta} = -q.$$

Вона має загальний розв'язок вигляду

$$r = r_0 e^{pt},$$

$$\theta = \theta_0 - qt, t \geq t_0.$$

Фазовий портрет перетвореної системи має вигляд спіралей.

а) Якщо $p > 0$, то $r(t) \rightarrow +\infty$ і спіралі розкручуються (Рис. 2.6).

Після проведення зворотнього перетворення отримуємо «деформовані» спіралі.

Оскільки спіралі також розкручуються, то положення рівноваги називається **нестійким фокусом**.

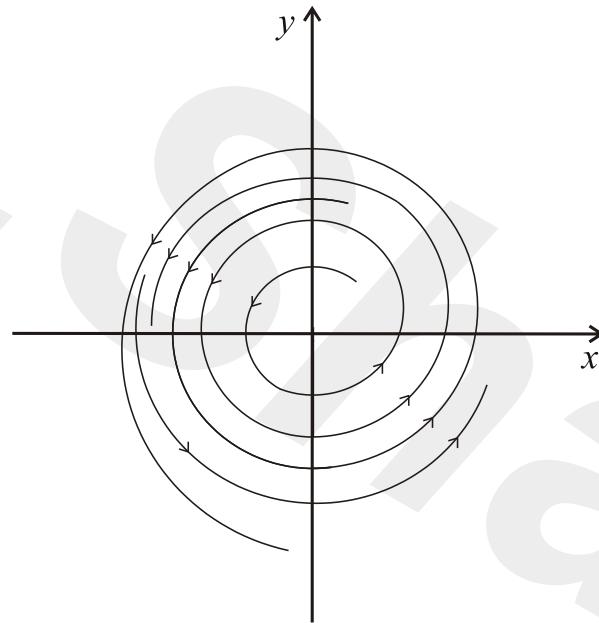


Рис. 2.6.

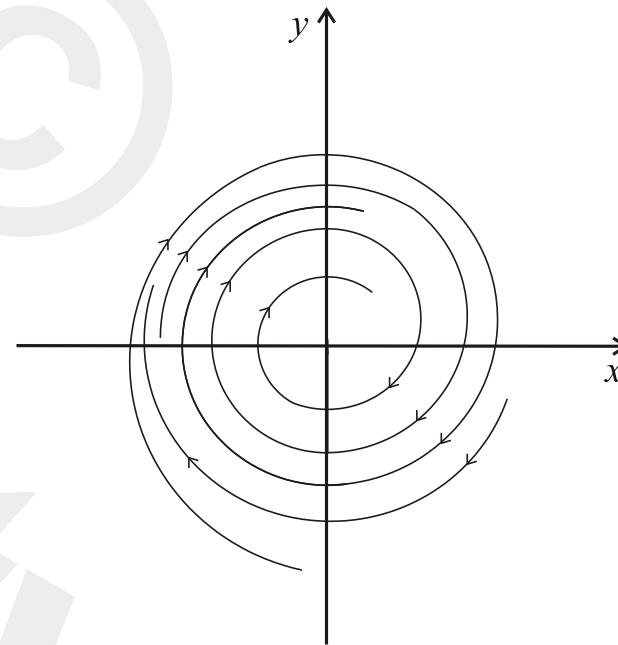


Рис. 2.7.

б) Якщо $p < 0$, то $r(t) \rightarrow 0$ і спіралі скручуються (Рис. 2.7).

Після проведення зворотнього перетворення отримуємо «деформовані» спіралі з тим самим напрямком руху.

Положення рівноваги називається **стійким фокусом**.

Розтяг спіралей та напрямок обертання визначається вектором швидкості, що обчислюється в «зручній» точці.

4) Нехай корені характеристичного рівняння сuto уявні, тобто $\lambda_1 = +iq$, $\lambda_2 = -iq$. Виконавши перетворення, наведенні в попередньому пункті, отримуємо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0, \\ \dot{\theta} &= -q.\end{aligned}$$

Її розв'язками будуть

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0 - qt, \quad t \geq t_0.$$

Таким чином траекторії перетвореної системи мають вигляд кіл.

Після проведення зворотного перетворення отримуємо сімейство «еліпсів».

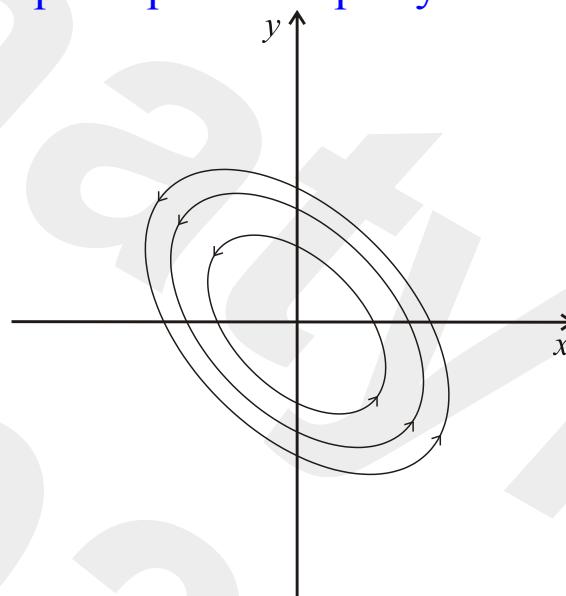


Рис.2.8

Положення рівноваги називається – **центр** (Рис.2.8).

Розтяг еліпсів та напрямок обертання визначається вектором швидкості, що обчислюється в «зручній» точці.

5) Нехай корені характеристичного рівняння кратні, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

В цьому випадку перетворена система може мати два вигляди.

а) Якщо матриця Жордана має вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

то система розщеплюється на дві підсистеми

$$\dot{\xi} = \lambda \xi, \quad \dot{\eta} = \lambda \eta.$$

Загальний розв'язок перетвореної системи має вигляд

$$\xi = c_1 e^{\lambda t}, \quad \eta = c_2 e^{\lambda t},$$

а траєкторії $\xi = c \eta$ являють собою сімейство прямих, які проходять через початок координат.

Зворотне перетворення не змінює фазовий портрет і в залежності від знаку λ можливе представлення у вигляді **нестійкого дикритичного вузла** (якщо $\lambda > 0$, Рис. 2.9.) і **стійкого дикритичного вузла** (якщо $\lambda < 0$, Рис. 2.10).

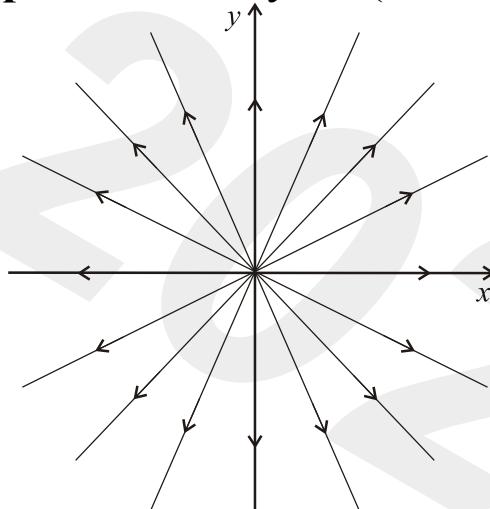


Рис. 2.9.

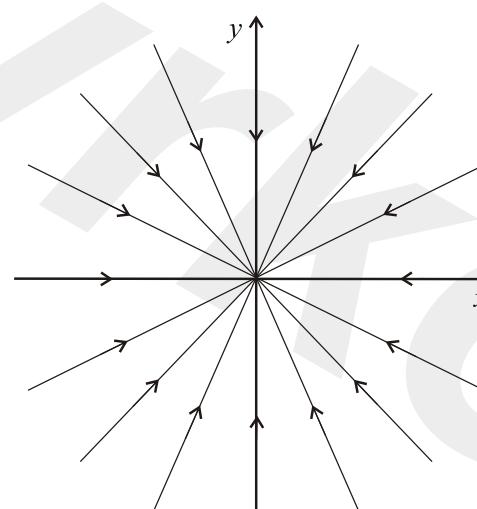


Рис. 2.10.

б) Якщо матриця Жордана має вигляд

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

то перетворена система має вигляд

$$\dot{\xi} = \lambda \xi + \eta, \quad \dot{\eta} = \lambda \eta.$$

Її загальний розв'язок має вигляд

$$\xi = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}, \quad \eta = c_2 e^{\lambda t}.$$

Розв'язкам відповідають траєкторії

$$\xi = c \eta + \frac{1}{\lambda} \ln |\eta|.$$

Після зворотнього перетворення фазовий портрет має вигляд

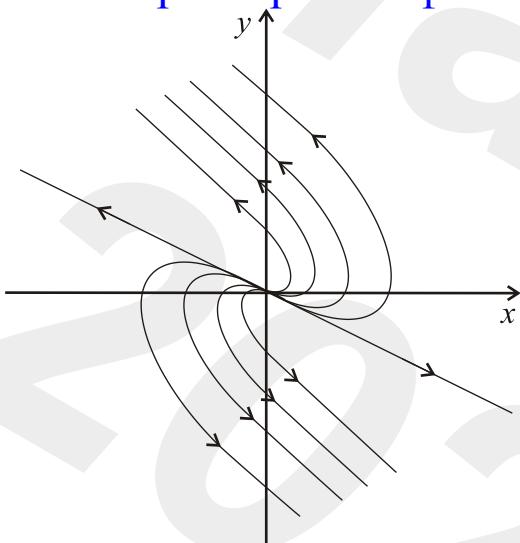


Рис. 2.11.

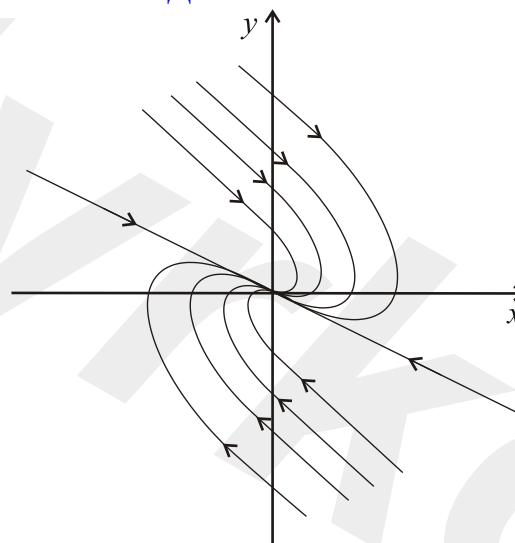


Рис. 2.12.

Особлива точка називається, відповідно, **нестійким виродженим вузлом** (якщо $\lambda > 0$, Рис. 2.11) і **стійким виродженим вузлом** (якщо $\lambda < 0$, Рис. 2.12).

II. Розглянемо другий випадок, при якому визначник системи дорівнює нулю, тобто

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0.$$

В цьому випадку характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda = 0$$

має, хоча б, один нульовий корінь.

1) Нехай $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = a + d \neq 0$.

Перетворена система має вигляд

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= 0, \\ \dot{\eta} &= (a+d)\eta.\end{aligned}$$

Її загальним розв'язком буде

$$\xi = c_1, \quad \eta = c_2 e^{(a+d)t}.$$

Фазові траєкторії являють собою сімейство паралельних прямих ($\xi = c_1$), які перетинаються одною особливою прямою ($\eta = 0$).

а) Причому, якщо $a+d < 0$, то на сімействі прямих $\xi = c_1$ при $c_2 > 0$ рух направлено вправо, а при $c_2 < 0$ - вліво. Особлива пряма $\eta = 0$ є нестійкою особливою прямою (Рис. 2.13).

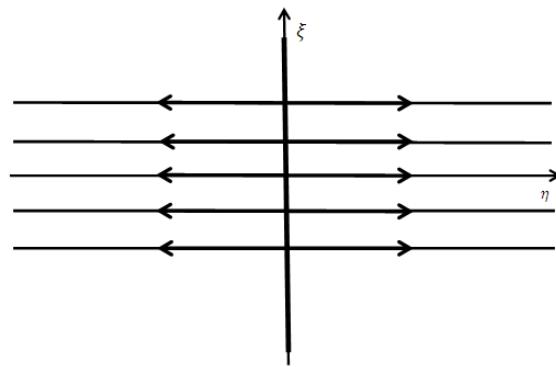


Рис. 2.13.

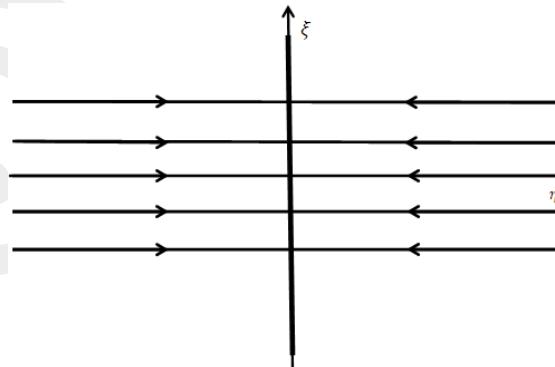


Рис. 2.14

б) Якщо ж $a+d > 0$, то на сімействі прямих $\xi = c_1$ при $c_2 > 0$ рух направлено вліво, а при $c_2 < 0$ - вправо. Особлива пряма $\eta = 0$ є стійкою особливою правою (Рис. 2.14).

Після проведення зворотного перетворення якісна картина не змінюється та траєкторії мають вигляд (Рис. 2.15, Рис. 2.16).

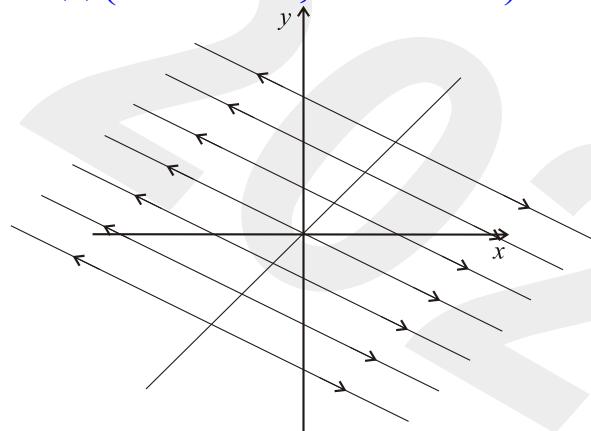


Рис. 2.15.

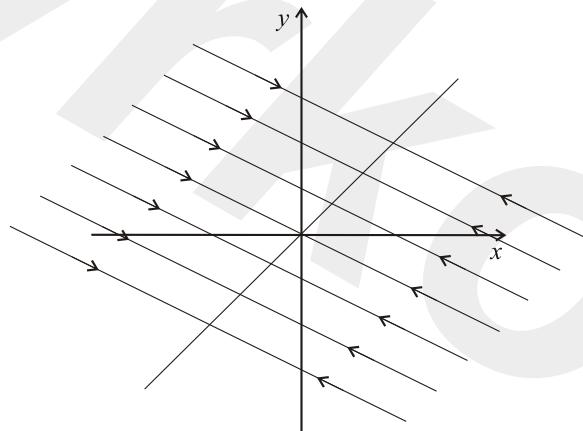


Рис. 2.16.

2) Нарешті, нехай $a+d=0$, тобто $\lambda_1=0$ і $\lambda_2=0$.

В цьому випадку (повністю нульова система не розглядається) перетворена система має вигляд

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \eta, \\ \dot{\eta} &= 0.\end{aligned}$$

Її загальний розв'язок має вигляд

$$\xi = c_1 + c_2 t, \quad \eta = c_2.$$

При $c_2 = 0$ отримуємо $\xi = c_1$, $\eta = 0$, тобто крива (пряма) $\eta = 0$ є особливою. Оскільки при $c_2 > 0$ буде $\xi \rightarrow +\infty$, а при $c_2 < 0$ буде $\xi \rightarrow 0$, то рух справа буде направлено вгору, а зліва – вниз (Рис. 2.17).

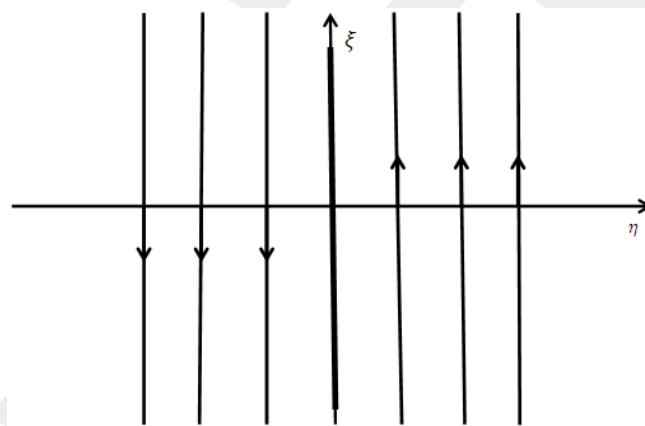


Рис. 2.17.

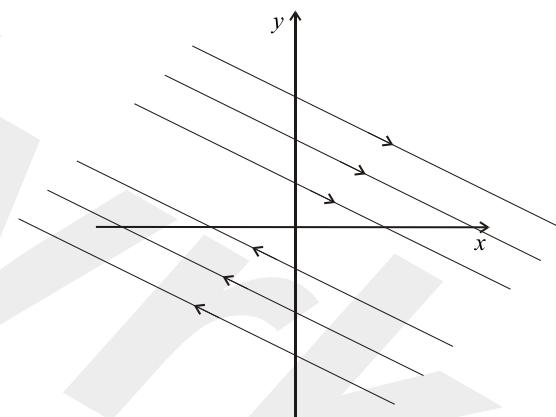


Рис. 2.18.

Після зворотного перетворення отримуємо фазовий портрет системи типу «водорозділу» (Рис. 2.18).

Позначимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \sigma = a + d.$$

Тоді в площині виміру параметрів (σ, Δ) залежності типів положення рівноваги мають наступний вигляд (Рис. 2.19)

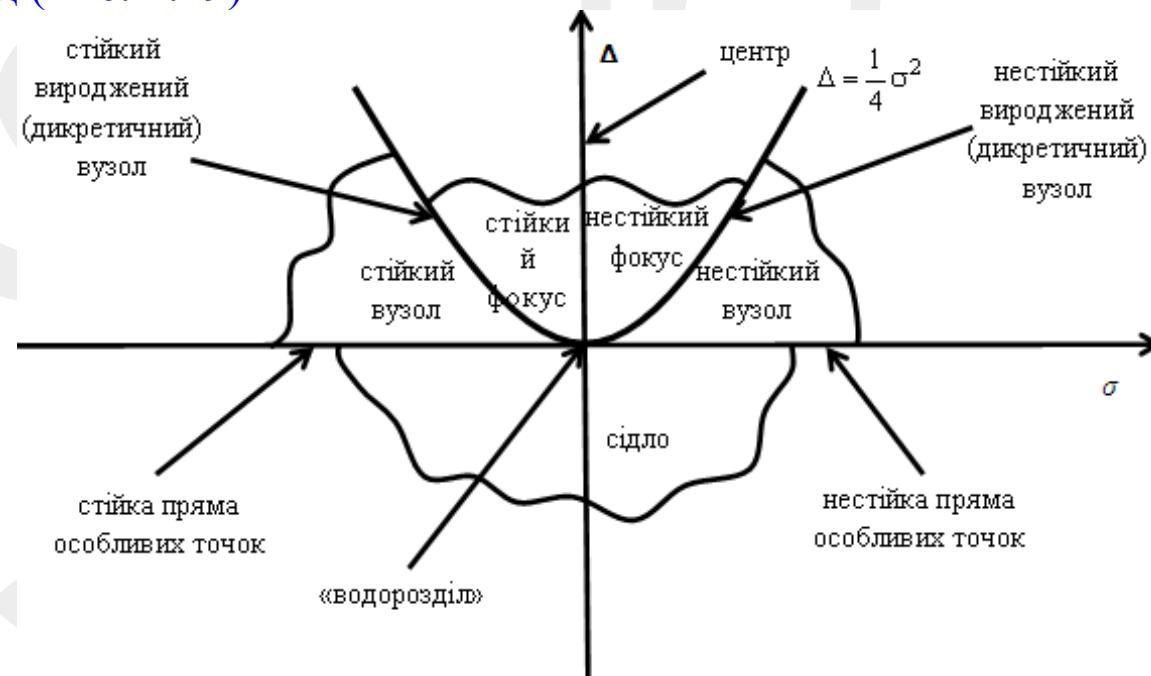


Рис. 2.19.

Оскільки характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

то

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta} \right].$$

I крива $\Delta = \frac{1}{4}\sigma^2$ є так званою **біфуркаційною**.

3.3. СТІЙКІСТЬ У ЗАСТОСУВАННІ ДО АНАЛІТИЧНОГО КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Нехай система (3.7) є лінійною:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t, \Delta x(t)). \quad (3.8)$$

Позначивши $\Delta x(t) = x(t)$, $\Delta u(t) = u(t)$, перепишемо систему (3.8) у вигляді:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t, x(t)). \quad (3.9)$$

Задачу аналітичного конструювання регулятора для лінійної системи (3.9) сформулюємо таким чином:

знайти матрицю $C(t)$ розмірності $m \times n$ таку, щоб при керуванні $u(t, x(t)) = C(t)x(t)$ нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (3.9), тобто системи рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A(t) + B(t)C(t))x(t) \quad (3.10)$$

буде асимптотично стійким за Ляпуновим.

Розглянемо спочатку лінійні стаціонарні системи

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x(t). \quad (3.11)$$

Скористаємось відомими результатами дослідження стійкості розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь.

Теорема 3.1. Для асимптотичної стійкості за Ляпуновим лінійної стаціонарної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{A}x(t) \quad (3.12)$$

необхідно ѹ досить, щоб усі корені λ_j характеристичного рівняння

$$\det(\tilde{A} - \lambda E) = 0 \quad (3.13)$$

мали від'ємні дійсні частини:

$$\operatorname{Re} \lambda_j < 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.14)$$

Тут і далі E – одинична матриця.

Застосуємо цю теорему до задачі аналітичного конструювання регулятора системи (3.11).

Запишемо для цієї системи характеристичне рівняння

$$\det(A + BC - \lambda E) = 0. \quad (3.15)$$

Корені даного рівняння будуть залежати від невідомих елементів матриці C , тобто $\lambda_j = \lambda_j(C)$.

Згідно з теоремою 3.1, невідомі елементи матриці C вибираємо з умови $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, $j = \overline{1, n}$, що й забезпечить асимптотичну стійкість системи (3.11).

Теорема 3.2 (Критерій Руза-Гурвиця). Нехай характеристичне рівняння (3.13) має вигляд:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3.16)$$

Тоді для того, щоб усі корені характеристичного рівняння (3.16) мали від'ємні дійсні чистини: $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, $j = \overline{1, n}$, необхідно й досить виконання умови додатності всіх головних мінорів матриці:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n+1} & a_n \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

де $a_j = 0$ при $j > n$, $a_0 \neq 0$.

Тобто має виконуватись система нерівностей:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{тощо.} \quad (3.18)$$

Якщо застосувати критерій Рууса-Гурвиця до задачі аналітичного конструювання регулятор системи (3.11), то отримаємо головні мінори, які будуть залежати від невідомих елементів матриці C .

В результаті маємо систему нерівностей

$$\Delta_j(C) > 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.19)$$

Матриця C , що знаходиться з цієї системи нерівностей, згідно з теоремою 3.2 забезпечує від'ємність дійсних частин коренів характеристичного рівняння, тобто виконання умови (3.14). Тоді згідно з критерієм асимптотичної стійкості (теорема 3.1) лінійна стаціонарна система (3.11) буде асимптотично стійкою за Ляпуновим.

3.3.1. МОДАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

Розглянемо систему зі скалярним керуванням

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bu(t), \quad A, b - \text{const}. \quad (3.20)$$

Тут A - $n \times n$ матриця, b - n -вектор-стовпчик, u – скаляр.

Теорема 3.3. Якщо система (3.20) цілком керована, тобто виконується умова

$$\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0 \quad (3.21)$$

то існує функція керування

$$u(t) = c^T x(t), \quad \text{де } c = (c_1, \dots, c_n)^T \quad (3.22)$$

при якій система

$$\frac{dx}{dt} = (A + bc^T)x(t) \quad (3.23)$$

має наперед довільно задані корені $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння

$$\det(A + bc^T - \lambda E) = 0. \quad (3.24)$$

Доведення цієї теореми побудовано так, що одночасно вказано алгоритм знаходження величин c_1, \dots, c_n за відомими значеннями коренів $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння (3.24).

У процесі доведення отримано явний вигляд вектора c :

$$c = (S_n^{-1})^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} (p - a) \quad (3.25)$$

Тут

$$S_n = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b),$$

$$\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = -S_n^{-1} A^n b,$$

a – n -вектор стовбчик,

що знаходиться через відомі значення коренів $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння (3.24), фактично це значення коефіцієнтів відповідного характеристичного поліному.

Алгоритм розв'язку задачі модального керування.

0-й крок. Обчислити матрицю керованості $S_n = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b)$, та переконатися у цілком керованості досліджуваної системи.

1-й крок. Обчислити матрицю обернену до матриці керовності: $(S_n)^{-1}$

2-й крок. Обчислити вектор $A^n b$

$$\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = -S^{-1}A^n b$$

3-й крок. Обчислити вектор

4-й крок. Визначити характеристичний поліном за заданими коренями

$$(\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2) \dots (\lambda - \bar{\lambda}_n) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

та скомпонувати вектор коефіцієнтів характеристичного полінома

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

5-й крок. Обчислити за формулою (3.25) вектор \mathbf{c} :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (S_n^{-1})^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

6-й крок. Записати шукане керування

$$u(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

3.4. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ЛЯПУНОВА ДО ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ПРОГРАМНИХ РУХІВ

Розглянемо систему керування:

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(t, x(t), u(t, x(t))) \quad (3.26)$$

яка відповідає системі (3.7) при

$$\Delta x(t) = x(t), \Delta u(t) = u(t).$$

Як відомо з теорії стійкості, найбільш загальним методом дослідження систем на стійкість є так званий *метод функцій Ляпунова (або прямий метод, або другий метод Ляпунова)*.

Цей метод не вимагає знання загального розв'язку системи диференціальних рівнянь (3.26) і дозволяє зробити висновок про характер стійкості нульового розв'язку системи, використовуючи функції Ляпунова, що мають бути спеціально побудовані. За характером поведінки функцій Ляпунова згідно із системою (3.26) і робиться висновок про стійкість або нестійкість нульового розв'язку.

Основна ідея другого методу А.М.Ляпунова полягає в тому, що стійкість нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи визначається з поведінки наперед визначеної функції Ляпунова.

Фізична інтерпретація

Коливання маятника, чи рух кульки можна описати за допомогою систем диференціальних рівнянь.

Ці системи мають **два стани рівноваги** – верхній та нижній.

Верхній стан рівноваги – нестійкий,
нижній – стійкий.

Якщо за характеристичну функцію брати повну енергію, то стійкість буде там, де енергія мінімальна, причому, при переході до стійкого стану рівноваги енергія зменшується.

Таким чином, дослідження стійкості фізичної системи можна проводити, використовуючи функцію повної енергії (енергетичної функції).

Наведемо означення та формулювання основних теорем другого методу Ляпунова.

Нехай для системи (3.26) існує така сукупність керувань $u(t, x(t))$, при яких у деякій області

$$\|x\| \leq H \quad (3.27)$$

виконуються умови існування розв'язків рівнянь (3.26). Тут H – деяке задане число, $H > 0$.

Нехай функція $X(t, x(t), u(t, x(t)))$ – аналітична (неперервна й диференційована) в області (3.27) і задовольняє умову $X(t, 0, u(t, 0)) = 0$.

Розглянемо стаціонарну систему, тобто частинний випадок системи (3.26), коли права частина рівнянь явно не залежить від часу:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u(x)) \quad (3.28)$$

Введемо до розгляду неперервну функцію $v(x)$, яка задовольняє умови:

- a) $v(0) = 0$;
- б) $v(x)$ – однозначна в області (3.27);
- в) $\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, n}$ - неперервні в області (3.27).

Визначення 3.2. Функція $v(x)$ називається додатно-визначеною, якщо для деякого заданого числа $H > 0$ в області $\|x\| \leq H$ виконується умова: $v(x) > 0$, при $\|x\| \neq 0$.

Визначення 3.3. Функція $v(x)$ називається додатно-сталою, якщо для деякого заданого числа $H > 0$ в області $\|x\| \leq H$ виконується умова $v(x) \geq 0$.

Аналогічно вводяться поняття від'ємно-визначеної та від'ємно-сталої функцій.

Визначення 3.4. Функція $v(x)$ називається знакозмінною, якщо в області $\|x\| \leq H$ для як завгодно малого заданого числа $H > 0$ вона приймає як додатні, так і від'ємні значення.

Визначення 3.5 Повною похідною функції $v(x,t)$ в силу системи $x'(t) = F(x,t)$ називається функція

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + (\text{grad}(v(x,t)), F(x,t)) = \\ &= \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\end{aligned}$$

В основі другого методу Ляпунова лежать дві теореми про стійкість та теорема Четаєва про нестійкість.

Наступні дві теореми є фактично безпосередніми наслідками **Першої та Другої теорем Ляпунова** на випадок розгляду систем керування типу (3.26).

Теорема 3.4. Якщо для системи керування (3.28) можна визначити таку додатно-визначену функцію $v(x)$, щоб її повна похідна по t згідно з цією системою

$$\frac{dv}{dt} = \text{grad}^T v(x) \frac{dx}{dt} = \text{grad}^T v(x) X(x, u(x)) = w(x) \quad (3.30)$$

була від'ємно-сталою функцією $w(x) \leq 0$,

то програмний рух $x(t) \equiv \mathbf{0}$ системи (3.28) буде стійкий за Ляпуновим.

Теорема 3.5. Якщо для системи (3.28) можна визначити таку додатно-визначену функцію $v(x)$, щоб її повна похідна по t згідно з цією системою

$$\frac{dv}{dt} = \text{grad}^T v(x) \frac{dx}{dt} = \text{grad}^T v(x) X(x, u(x)) = w(x)$$

була від'ємно-визначеню функцією $w(x) < 0$,

то програмний рух $x(t) \equiv \mathbf{0}$ системи (3.28) буде асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Функції $v(x)$, які задовольняють Теоремам 3.4 та 3.5 називають **функціями Ляпунова**.

Геометрична інтерпретація теорем Ляпунова

Метод функцій Ляпунова допускає просту геометричну інтерпретацію:

1. Існування додатно-визначеної функції Ляпунова означає існування всюди щільної системи поверхонь рівня $v(x) = \alpha$, які не розширяються та охоплюють початок координат.
2. Умова $\frac{dv}{dt} = w(x) < 0$, ($\frac{dv}{dt} = w(x) \leq 0$) означає, що векторне поле системи спрямоване всередину областей, обмежених поверхнями рівня (або дотикається до них).

Перша теорема Ляпунова, про стійкість представлена на рис.3.1.

Друга теорема Ляпунова, про асимптотичну стійкість представлена на рис.3.2.

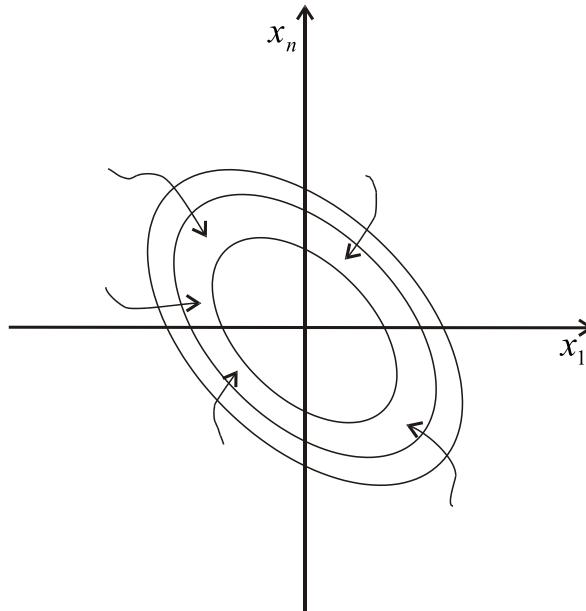


Рис.3.1. Геометрична інтерпретація першої теореми Ляпунова.

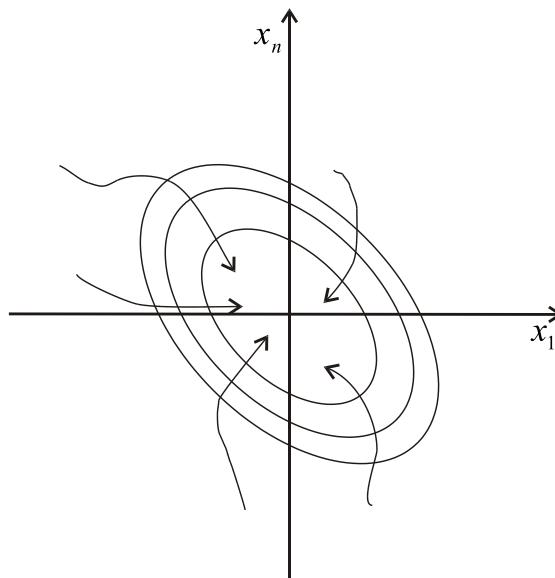


Рис.3.2. Геометрична інтерпретація другої теореми Ляпунова.

Методи побудови функції Ляпунова

В розглянутих вище теоремах використовується поняття додатної визначеності функції $v(x)$, яка найчастіше будується у вигляді квадратичної форми $v(x) = x^T D x$ з деякою додатно-визначеною матрицею D .

Для перевірки знако-визначеності матриці D використовують критерій Сильвестра.

Теорема 3.6 (критерій Сильвестра) Для того щоб квадратична форма $v(x) = x^T D x$ була додатно-визначеною необхідно і достатньо, щоб головні діагональні мінори матриці D були додатними

$$d_{11} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} > 0. \quad (3.29)$$

До даного часу не існує (і мабуть, не буде існувати) конструктивних методів побудови функції Ляпунова!!!

«Побудова функції Ляпунова – це мистецтво»

Розглянемо деякі частинні випадки.

1. Нехай розглядається лінійна стаціонарна система на площині

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t), \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

Функцію Ляпунова (ФЛ) шукаємо у вигляді квадратичної форми

$$v(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

де A, B, C – невідомі сталі.

Виберемо сталі таким чином, щоб для похідної в силу системи виконувалась умова

$$\frac{dv(x, y)}{dt} = -2(x^2 + y^2).$$

Після підстановки одержимо (в лівій частині повна похідна ФЛ в силу системи)

$$(2Ax + 2By)x'(t) + (2Bx + 2Cy)y'(t) = -2(x^2 + y^2) \text{ або } (2Ax + 2By)(ax + by) + (2Bx + 2Cy)(cx + dy) = -2(x^2 + y^2)$$

Розкривши дужки, запишемо

$$Aax^2 + Baxy + Abxy + Bby^2 + Bcx^2 + Ccxy + Bdxy + Cdऽy^2 = -x^2 - y^2.$$

Прирівнявши коефіцієнти при одинакових степенях, одержимо:

$$\begin{aligned} x^2 & \left\{ \begin{array}{l} aA + cB = 1 \\ bA + (a+d)B + cC = 0 \end{array} \right. \\ xy & \\ y^2 & \left\{ \begin{array}{l} bB + dC = -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Звідси, розв'язуючи систему за правилом Крамера, маємо

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -1 & c & 0 \\ 0 & a+d & c \\ -1 & b & d \end{vmatrix}, \quad B = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}, \quad C = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & c & -1 \\ b & a+d & 0 \\ 0 & b & -1 \end{vmatrix},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & a+d & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix}$$

Використовуючи критерій Сильвестра, запишемо умови додатної визначеності функції $v(x, y)$. Вони мають вигляд

$$A > 0 \quad \text{та} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0.$$

Тобто, при виборі параметрів, що задовольняють ці нерівності, ФЛ існує, а отже система стійка!

2. Розглянемо рівняння коливання маятника

$$x''(t) + g(x)x'(t) + f(x) = 0,$$

де $f(x)$ - відновлююча сила (*керуючий вплив*), $g(x)$ – сила тертя.

Зробимо заміну $x'(t) = y(t)$

і перепишемо рівняння другого порядку у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -f(x) - g(x)y(t) \end{cases}$$

Функцію Ляпунова беремо у вигляді повної енергії (суми кінетичної і потенціальної енергій)

$$v(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(\tau) d\tau.$$

Тоді для її похідної буде виконуватись

$$\frac{dv(x, y)}{dt} = f(x)y(t) + y(t)[-f(x) - g(x)y(t)] = -y^2(t)g(x).$$

Звідси умови стійкості стану рівноваги будуть мати вигляд $f(x) > 0$, $g(x) \geq 0$.

3. Розглянемо лінійну стаціонарну систему загального вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

Функцію Ляпунова будуємо у вигляді квадратичної форми

$$v(x) = x^T H x,$$

де H – деяка додатно визначена матриця. Повна похідна функції $v(x)$ в силу системи має вигляд

$$\frac{dv(x)}{dt} = x'^T H x + x^T H x' = (Ax)^T H x + x^T H (Ax) = x^T (A^T H + H A) x.$$

Будемо вимагати, щоб похідна дорівнювала від'ємно визначеній квадратичній формі

$$W(x) = -x^T C x,$$

де C – деяка додатно визначена матриця. Тоді при заданій матриці C пошук додатно визначеної матриці H зводиться до розв'язку матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H + H A = -C.$$

Доведено, що для існування квадратичної функції Ляпунова для лінійних стаціонарних систем необхідною та достатньою умовою є асимптотична стійкість матриці A , тобто матриця A повинна мати власні числа з від'ємною дійсною частиною. Причому матриця H знаходиться з матричного рівняння Ляпунова при довільній додатно визначеній матриці C .

Розглянемо **метод дослідження на стійкість за першим (лінійним) наближенням** системи керування (3.28)

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u(x)).$$

Цей метод називають ще **першим методом Ляпунова**.

При його застосуванні з правої частини рівнянь нелінійної системи виділяється лінійна по x частина. Потім окремо досліджується на стійкість система, у рівнянні якої справа стоїть тільки виділена лінійна функція. Це система першого або лінійного наближення. Тоді характер стійкості розв'язку початкової нелінійної системи буде таким самим, як і розв'язку системи першого наближення. Формулювання основних теорем цього методу наведені нижче.

Зобразимо систему (3.28) у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu(x) + \tilde{X}(x, u(x)), \quad (3.31)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \Big|_{x=0} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \Big|_{x=0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} \Big|_{x=0} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \Big|_{x=0} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} \Big|_{x=0} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial u_m} \Big|_{x=0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_n}{\partial u_1} \Big|_{x=0} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial u_m} \Big|_{x=0} \end{pmatrix},$$

функція $\tilde{X}(x, u(x))$ при $x \rightarrow 0$ має порядок малості не нижче другого.

Права частина системи (3.28) – n -мірна вектор-функція:

$$X(x, u(x)) = (X_1(x, u(x)), \dots, X_n(x, u(x)))^T.$$

Нехай керування задається у вигляді $u(x) = Cx(t)$.

Тоді система першого наближення має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = (A + BC)x(t). \quad (3.32)$$

Теорема 3.7. Якщо програмний рух $x(t) \equiv 0$ для системи першого наближення $\frac{dx}{dt} = (A + BC)x$ є асимптотично стійким за Ляпуновим, то такий рух асимптотично стійкий також і для нелінійної системи (3.31) незалежно від вигляду нелінійних функцій $\tilde{X}(x, u(x))$.

Теорема 3.8. Якщо серед коренів характеристичного рівняння системи першого наближення (3.32) $\det(A + BC - \lambda E) = 0$ знайдеться хоча б один із додатною дійсною частиною, то програмний рух $x(t) \equiv 0$ нелінійної системи (3.31) буде нестійкий за Ляпуновим незалежно від вигляду нелінійних функцій $\tilde{X}(x, u(x))$.

Теорема 3.9. Якщо характеристичне рівняння $\det(A + BC - \lambda E) = 0$ системи першого наближення (3.32) не має коренів із додатними дійсними частинами то, залежно від характеру нелінійності функцій $\tilde{X}(x, u(x))$, програмний рух $x(t) \equiv 0$ нелінійної системи (3.31) може бути як стійким, так і нестійким за Ляпуновим (так званий *критичний випадок*).

Визначення 3.6. Програмний рух системи $x(t) \equiv 0$ системи

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u(x)) + R(t, x) \quad (3.33)$$

називається *стійким за умови постійно діючих збурень*, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0, \exists \delta_2 > 0$$

такі, що, як тільки

$$\|x(t_0)\| \leq \delta_1, \quad \|R(t_0, x)\| \leq \delta_2,$$

то при $t \geq t_0$ для траєкторії системи виконується нерівність $\|x(t)\| \leq \varepsilon, t \geq t_0$.

Теорема 3.10. Якщо для системи $\frac{dx}{dt} = X(x, u(x))$ можна знайти таку додатно-визначену функцію $v(x)$,

щоб її повна похідна по t згідно з цією системою $\frac{dv}{dt} = \text{grad}^T v(x)X(x, u(x)) = w(x)$ була від'ємно-

сталою функцією $w(x) \leq 0$ (тобто виконувалися умови теореми 3.4), то програмний рух $x(t) \equiv 0$ системи (3.33) буде стійким за умови постійно діючих збурень.

Приклади дослідження стійкості нульового розв'язку нелінійної системи за лінійним наближенням

Розглянемо нелінійну систему диференційних рівнянь на площині

$$\begin{cases} x'(t) = P(x(t), y(t)), \\ y'(t) = Q(x(t), y(t)) \end{cases}$$

1. Розв'яжемо систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} P(x(t), y(t)) = 0, \\ Q(x(t), y(t)) = 0 \end{cases}$$

Розв'язки (x_i, y_i) , $i \in I$ цієї системи будуть **особливими точками**.

2. Візьмемо точку (x_k, y_k) . Розкладемо функції $P(x(t), y(t))$, $Q(x(t), y(t))$ в ряд Тейлора в околі точки (x_k, y_k) з точністю до лінійного наближення і запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} x'(t) = P(x_k, y_k) + \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_k, y_k)} \cdot (x - x_k) + \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_k, y_k)} \cdot (y - y_k) + R_1(x, y), \\ y'(t) = Q(x_k, y_k) + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_k, y_k)} \cdot (x - x_k) + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_k, y_k)} \cdot (y - y_k) + R_2(x, y) \end{cases}$$

Оскільки (x_k, y_k) – особлива точка, то $P(x_k, y_k) = 0, Q(x_k, y_k) = 0$.

Позначивши

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_k, y_k)} = a_k, \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_k, y_k)} = b_k,$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_k, y_k)} = c_k, \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_k, y_k)} = d_k,$$

одержимо систему

$$\begin{cases} x'(t) = a_k(x(t) - x_k) + b_k(y(t) - y_k) + R_1(x, y), \\ y'(t) = c_k(x(t) - x_k) + d_k(y(t) - y_k) + R_2(x, y) \end{cases}$$

3. Відкинемо нелінійні члени $R_1(x, y), R_2(x, y)$, та одержимо систему лінійного наближення

$$\begin{cases} x'(t) = a_k(x(t) - x_k) + b_k(y(t) - y_k), \\ y'(t) = c_k(x(t) - x_k) + d_k(y(t) - y_k) \end{cases}$$

Приклад 3.1 За допомогою методу лінійного наближення дослідити стійкість нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ нелінійної системи

$$\begin{cases} x'(t) = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ y'(t) = \sqrt{4+8x} - 2e^y \end{cases}$$

Розкладемо праві частини в околі особливої точки в ряд з точністю до лінійного наближення

$$\begin{cases} x'(t) = (e^{x+2y} - \cos 3x)|_{(0,0)} + e^{x+2y}|_{(0,0)} \cdot x + 3 \sin 3x|_{(0,0)} \cdot x + 2e^{x+2y}|_{(0,0)} \cdot y + R_1(x, y), \\ y'(t) = (\sqrt{4+8x} - 2e^y)|_{(0,0)} + \frac{8}{2\sqrt{4+8x}}|_{(0,0)} \cdot x - 2e^y|_{(0,0)} \cdot y + R_2(x, y) \end{cases}$$

Відкинувши члени порядків вище першого, одержуємо

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t). \end{cases}$$

Характеристичне рівняння лінеаризованої системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0, \quad \lambda_1 = -3 < 0, \quad \lambda_2 = 2 > 0.$$

Звідси нульовий розв'язок вихідної нелінійної системи нестійкий.

Приклад 3.2 За допомогою методу лінійного наближення дослідити, при яких значеннях параметрів буде стійким нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - 2y(t) + x^2(t), \\ y'(t) = x(t) + by(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

Лінійне наближення має вигляд

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - 2y(t), \\ y'(t) = x(t) + by(t) \end{cases}$$

Характеристичне рівняння матриці лінійного наближення має вигляд

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & -2 \\ 1 & b - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + b)\lambda + (ab + 2) = 0.$$

Необхідна і достатня умова асимптотичної стійкості має вигляд

$$-(a + b) > 0, \ ab + 2 > 0.$$

В площині параметрів отримаємо область асимптотичної стійкості рис.3.3.

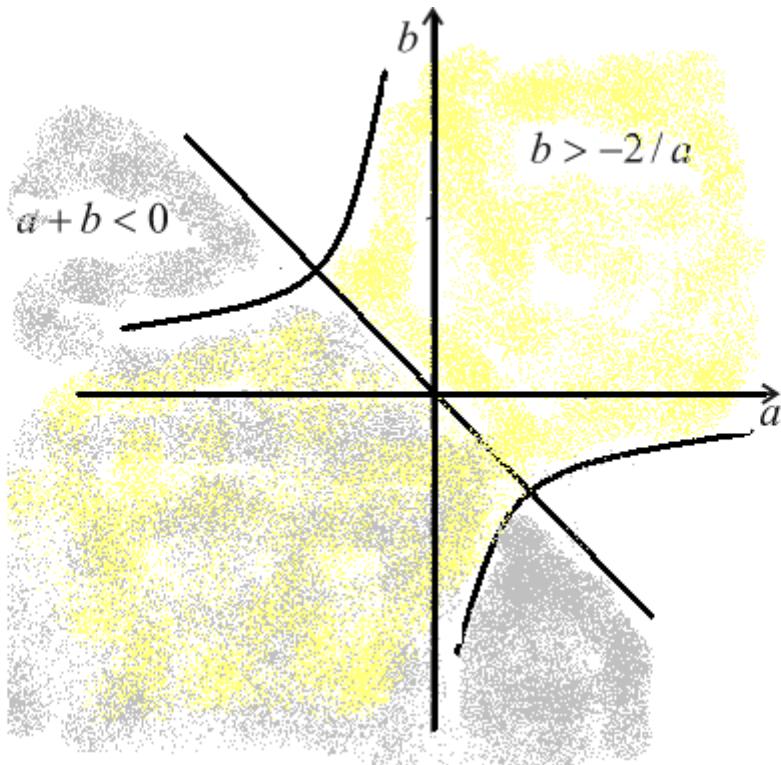


Рис.3.3.

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ ЯК ЗАДАЧ ВАРИАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Варіаційне числення, як відомо, вивчає методи, що дозволяють знаходити мінімальні та максимальні значення функціоналів.

Даний розділ спрямовано на дослідження можливостей застосування відомих методів варіаційного числення до задач оптимізації систем керування.

Для того, щоб показати, як і в яких випадках задачі теорії керування можна звести до задач варіаційного числення, запишемо окремо постановки задач теорії керування та варіаційного числення.

Задача теорії керування

Для системи

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.1)$$

де

$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ – вектор стану,

$u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ – вектор керувань,

з початковим станом

$$x_i(t_0) = x_{0i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.2)$$

на фіксованому проміжку часу $[t_0, t_1]$

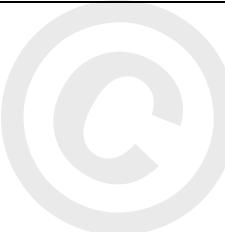
треба знайти такий вектор керувань $u(t)$

і відповідну (4.1), (4.2) траєкторію $x(t)$,

які б забезпечували мінімум функціонала

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t) dt. \quad (4.3)$$

Задача Лагранжа варіаційного числення



Потрібно знайти таку вектор-функцію

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$$

з початковою умовою (4.2), щоб функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G^1(x, \frac{dx}{dt}, t) dt \quad (4.4)$$

приймав своє мінімальне значення.

Для того, щоб показати, як задачу теорії керування можна звести до задачі варіаційного числення, будемо вимагати, щоб керування в системі (4.1) знаходились у вигляді

$$u_i = \varphi_i(x, \frac{dx}{dt}, t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.5)$$

Підставивши (4.5) в (4.3), отримаємо функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G^1(x, \frac{dx}{dt}, t) dt,$$

який є функціоналом (4.4) задачі Лагранжа.

Таким чином, за умов (4.5) задача оптимізації (4.1) – (4.3) системи керування полягає у знаходженні оптимальної траєкторії, на якій досягається мінімум функціонала (4.4), що повністю збігається із задачею Лагранжа.

Отже, коли в системах керування вектор керувань можна зобразити у вигляді (4.5), то задачу оптимального керування можна звести до задачі варіаційного числення.

Наведемо постановки основних задач варіаційного числення в термінах теорії керування.

Задача Майера.

Нехай задані рівняння руху системи у вигляді (4.1)

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u, t), \quad i = \overline{1, n},$$

початковий і кінцевий стани

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad (4.6)$$

Функціонал

$$Q = g(x, u, t) |_{t=t_1}, \quad (4.7)$$

де $g(x, u, t)$ – функція, визначена на множині кінцевих станів системи.

Необхідно знайти таку вектор-функцію керувань $u(t)$ і відповідну до (4.1), (4.6) траєкторію $x(t)$, щоб функціонал (4.7) набував свого мінімального значення.

Задача Больця.

Нехай задані рівняння руху системи у вигляді (4.1)

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u, t), i = \overline{1, n},$$

початковий і кінцевий стани (4.6),

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t) dt + g(x, u, t) |_{t=t_1}. \quad (4.8)$$

Задача Больця полягає у знаходженні такої вектор-функції керувань $u(t)$, і відповідну траєкторію $x(t)$, щоб задовольнялись умови (4.1), (4.6) і функціонал (4.8) набував свого мінімального значення.

Відмітимо, що остання задача є найбільш загальною, але шляхом введення додаткових змінних завжди можна одну з наведених задач звести до іншої й навпаки.

4.2. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІОНАЛІВ

Для дослідження необхідних і достатніх умов екстремуму функціоналів наведемо деякі визначення.

Визначення 4.1. Змінна величина Q називається функціоналом, що залежить від функції $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ і позначається $Q[x(t)]$, якщо кожній функції $x(t)$ з деякого класу відповідає число $Q[x(t)]$.

Визначення 4.2. Функція

$$\delta x(t) = x(t) - x^0(t) \quad (4.9)$$

називається варіацією аргументу $x(t)$.

Визначення 4.3. Якщо приріст $\Delta Q[x(t)] = Q[x(t)] - Q[x^0(t)]$ функціонала $Q[x(t)]$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta Q[x(t)] &= Q[x(t)] - Q[x^0(t)] = Q[x^0(t) + \delta x(t)] - Q[x^0(t)] = \\ &= L[x(t), \delta x(t)] + \beta[x(t), \delta x(t)] \times \max_{t \in [t_0, t_1]} \|\delta x(t)\|, \end{aligned} \quad (4.10)$$

то $L[x(t), \delta x(t)]$ – лінійна відносно варіації аргументу $\delta x(t)$ частина приросту функціонала $Q[x(t)]$ – називається варіацією (першою варіацією) функціонала й позначається

$$\delta Q[x(t)] = L[x(t), \delta x(t)]. \quad (4.11)$$

Тут $\beta[x(t), \delta x(t)] \rightarrow 0$ при $\max_{t \in [t_0, t_1]} \|\delta x(t)\| \rightarrow 0$.

Теорема 4.1. Якщо функціонал $Q[x(t)]$ має варіацію (4.11) і досягає екстремуму (мінімуму чи максимуму) на $x^0(t)$, де $x^0(t)$ – внутрішня точка області визначення функціонала, то

$$\delta Q[x^0(t)] = \mathbf{0}.$$

Наведемо необхідні й достатні умови екстремуму функціонала залежно від постановок задач варіаційного числення.

Задача із закріпленими (нерухомими) кінцями траєкторії.

Теорема 4.2. Необхідними умовами екстремуму функціонала

$$Q[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} G(x, \frac{dx}{dt}, t) dt \quad (4.12)$$

для траєкторії $x(t) \in C^1_{[t_0, t_1]}$ із закріпленими кінцями $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ за умови, що функція $G = G(x, \frac{dx}{dt}, t)$ – двічі диференційована за всіма своїми аргументами, є рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial x'_i} = \mathbf{0}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (G'_x - \frac{d}{dt} G'_{x'} = \mathbf{0}) \quad (4.13)$$

тобто, якщо функціонал (4.12) досягає екстремуму на кривій $x^0(t)$, то ця крива є розв'язком рівняння (4.13).

Зауваження 4.1. Рівняння (4.13) завжди є диференціальними рівняннями другого порядку.

Для одномірного $x(t)$ рівняння (4.13) можна аналітично проінтегрувати в таких випадках:

- G не залежить явно від x' : $G = G(x, t);$
- G не залежить явно від t : $G = G(x, x');$
- G не залежить явно від x : $G = G(x', t);$
- G лінійна відносно x' : $G = g_1(x, t) + x' \cdot g_2(x, t).$

Розв'язок рівнянь (4.13) визначає цілу множину кривих, на яких функціонал (4.12) може досягати свого екстремуму, а може й не досягати.

Щоб визначити, чи досягається екстремум на окремих кривих і дослідити характер екстремуму, треба перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

Умова Якобі в аналітичній формі.

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно функції $w = w(t)$:

$$\left(G_{xx} - \frac{d}{dt} G_{xx'} \right) w - \frac{d}{dt} (G_{x'x'} w') = 0.$$

Це рівняння називається **рівнянням Якобі**.

Якщо існує розв'язок рівняння $w(t)$ такий, що при $t = t_0$: $w(t_0) = 0$ і не дорівнює нулю в жодній іншій точці проміжку, тобто $w(t) \neq 0$, $t_0 < t \leq t_1$, тоді існує **поле (екстремалей)**, що складається з кривих – розв'язків (4.13), яке включає досліджувану криву (екстремаль) $x(t)$.

Теорема 4.3. Нехай крива $x(t)$ – розв'язок рівняння (4.13), що задовольняє умову Якобі.

Тоді достатньою умовою досягнення функціоналом $Q[x(t)]$ вигляду (4.12) мінімуму на кривій $x(t)$ є **умова Вейєрштраса**:

$$E(x, x', t, v) \geq 0 \tag{4.14}$$

для довільних значень v , $t_0 \leq t \leq t_1$,

де $E(x, x', t, v) = G(x, v, t) - G(x, x', t) - (v - x')^T G_{x'}(x, x', t)$ – функція Вейєрштраса.

Зауваження 4.2. Умова Вейєрштраса має й необхідний характер у тому смыслі, що, якщо в точках досліджуваної кривої $x(t)$ – розв'язку рівняння (4.13), яка задовольняє умову Якобі, для деяких значень v функція $E(x, x', t, v)$ має протилежні знаки, то екстремум не досягається.

Теорема 4.4. Якщо на кривій $x(t)$ досягається мінімум функціонала (4.12) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії, то виконується **умова Лежандра**:

$$G_{x'x'}(x, x', t) \geq 0 \quad (4.15)$$

для довільних значень $x', t_0 < t \leq t_1$.

Теорема 4.5. Нехай досліджувана крива $x(t)$ – розв'язок рівняння (4.13) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії. Тоді умова Лежандра (4.15) у поєднанні з умовою Якобі є достатніми умовами досягнення мінімуму функціоналом (4.12) на кривій $x(t)$.

Зауваження 4.3. Наведені вище достатні умови є достатніми умовами так званого **сильного мінімуму** функціонала (4.12) для задачі із закріпленими кінцями траєкторії.

Щоб отримати умови максимуму функціонала, треба в наведених вище умовах мінімуму (4.14), (4.15) взяти знаки нерівностей протилежними.

Розглянемо варіаційну задачу з рухомим кінцем траєкторії.

Нехай один кінець траєкторії закріплено в точці $x(t_0) = x_0$, а інший – на кривій $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, тобто $x(t_1) = \varphi(t_1)$.

Теорема 4.6. Необхідними умовами екстремуму функціонала (4.12) на множині неперервно-диференційованих функцій $x(t)$ таких, що один кінець траєкторії закріплено в точці $x(t_0) = x_0$, а інший – на кривій $x(t) = \varphi(t)$, тобто $x(t_1) = \varphi(t_1)$, є рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial x'_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

і умова трансверсальності:

$$G|_{t=t_1} - \sum_{i=1}^n [x'_i(t_1) - \varphi'_i(t_1)] \frac{\partial G}{\partial x'_i}|_{t=t_1} = 0. \quad (4.16)$$

Тут, як і раніше, $G(x, x', t)$ – двічі диференційована за всіма аргументами функція.

Умову (4.16) можна записати в компактнішій формі:

$$[G + (\phi' - x')^T G_{x'}]|_{t=t_1} = 0.$$

Дослідимо варіаційні задачі для функціоналів із вищими похідними:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t), t) dt. \quad (4.17)$$

Теорема 4.7. Необхідною умовою екстремуму функціонала (4.17) на множині $2n$ разів неперервно-диференційованих функцій $x(t)$, заданих разом із своїми похідними до $(n - 1)$ -го порядку включно в початковий і кінцевий моменти часу за умови, що функція G за всіма аргументами $n + 2$ рази диференційована, є рівняння Ейлера-Лагранжа–Пуасона:

$$G_x - \frac{d}{dt} G_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} G_{x''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} G_{x^{(n)}} = 0. \quad (4.18)$$

Відзначимо, що диференціальне рівняння (4.18) є рівнянням порядку $2n$.

Теорема 4.8. Якщо на кривій $x(t)$, на якій може досягатися екстремум функціонала (4.17), виконана умова

$$G_{x^{(n)} x^{(n)}} \geq 0 (\leq 0) \quad (4.19)$$

і відрізок $[t_0, t_1]$ не містить точок, спряжених із точкою t_0 , то на цій кривій досягається мінімум (максимум) функціонала (4.17).

4.3. ВАРИАЦІЙНА ЗАДАЧА НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ ІЗ ЗАКРІПЛЕНИМИ КІНЦЯМИ ТРАЄКТОРІЙ

Розглянемо задачу мінімізації функціонала

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, x', t) dt, \quad (4.20)$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, у випадку, коли змінні x_1, \dots, x_n – залежні.

Вигляд залежності будемо визначати трьома типами співвідношень:

кінцеві:

$$\varphi_j(x, t) = 0, \quad (4.21)$$

диференціальні:

$$\phi_j(x, x', t) = 0, \quad (4.22)$$

інтегральні:

$$\psi_j = \int_{t_0}^{t_1} \phi_j(x, x', t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, m < n. \quad (4.23)$$

Задача мінімізації функціонала (4.20) з урахуванням однієї з умов (4.21) – (4.23) називається варіаційною задачею на умовний екстремум.

Задача мінімізації функціонала (4.20) із залежностями диференціального типу (4.22) називається загальною задачею Лагранжа. До неї зводяться всі інші задачі на умовний екстремум.

Розв'язок задачі (4.20), (4.22) збігається з розв'язком задачі на безумовний екстремум функціонала:

$$Q' = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{G}(x, x', t) dt, \quad \text{де } \tilde{G} = G + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \varphi_j. \quad (4.24)$$

Тут $\lambda_j(t), j = \overline{1, m}$ – деякі невизначені функції, які разом із функціями $x_i(t), i = \overline{1, n}$ є незалежними аргументами функціонала (4.24).

Рівняння Ейлера-Лагранжа для функціонала (4.24):

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x'} = 0$$

разом з обмеженнями (4.22) утворюють замкнену систему $n+m$ рівнянь із невідомими $x_i(t), i = \overline{1, n}$ і $\lambda_j(t), j = \overline{1, m}$.

Сталі інтегрування вказаної системи знаходяться із заданих умов $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

МОДАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ

Розглянемо систему зі скалярним керуванням

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bu(t), \quad A, b - \text{const}. \quad (3.20)$$

Тут A – $n \times n$ матриця, b – n -вектор-стовпчик, u – скаляр.

Теорема 3.3. Якщо система (3.20) цілком керована, тобто виконується умова

$$\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0 \quad (3.21)$$

то існує функція керування

$$u(t) = c^T x(t), \quad \text{де } c = (c_1, \dots, c_n)^T \quad (3.22)$$

при якій система

$$\frac{dx}{dt} = (A + bc^T)x(t) \quad (3.23)$$

має наперед довільно задані корені $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння

$$\det(A + bc^T - \lambda E) = 0. \quad (3.24)$$

Доведення цієї теореми побудовано так, що одночасно вказано алгоритм знаходження величин c_1, \dots, c_n за відомими значеннями коренів $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння (3.24).

У процесі доведення отримано явний вигляд вектора c :

$$c = (S_n^{-1})^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} (p - a) \quad (3.25)$$

Тут

$$S_n = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b),$$

$$\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = -S_n^{-1} A^n b,$$

$a - n$ -вектор стовбчик,

що знаходиться через відомі значення коренів $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ характеристичного рівняння (3.24), фактично це значення коефіцієнтів відповідного характеристичного поліному.

Алгоритм розв'язку задачі модального керування.

0-й крок. Обчислити матрицю керованості $S_n = (\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b})$, та переконатися у цілком керованості досліджуваної системи.

1-й крок. Обчислити матрицю обернену до матриці керовності: $(S_n)^{-1}$

2-й крок. Обчислити вектор $A^n\mathbf{b}$

3-й крок. Обчислити вектор

$$\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = -S^{-1}A^n\mathbf{b}$$

4-й крок. Визначити характеристичний поліном за заданими коренями

$$(\lambda - \bar{\lambda}_1)(\lambda - \bar{\lambda}_2) \dots (\lambda - \bar{\lambda}_n) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

та скомпонувати вектор коефіцієнтів характеристичного полінома

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

5-й крок. Обчислити за формулою (3.25) вектор \mathbf{c} :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (S_n^{-1})^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

6-й крок. Записати шукане керування

$$u(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)$$

5.1. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

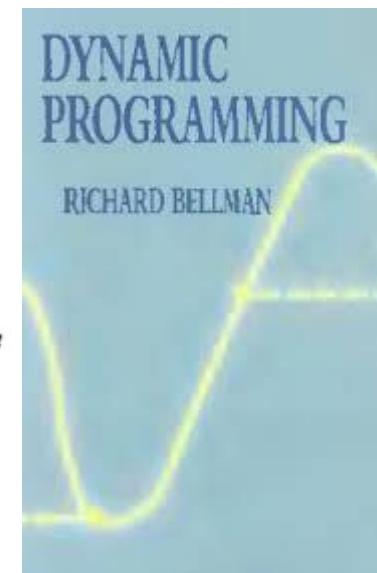
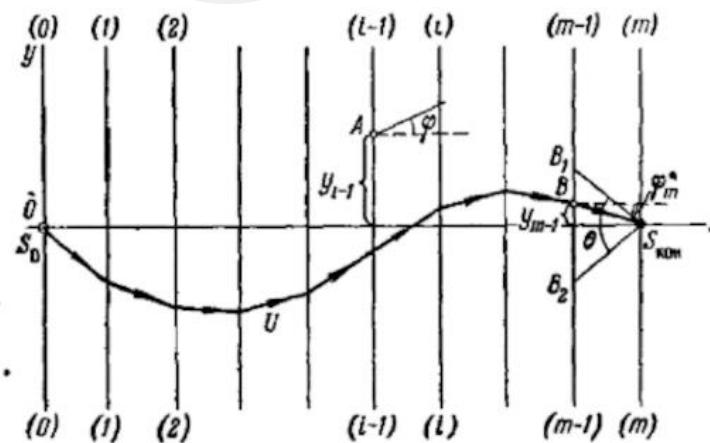


$$U_i^*(y_{i-1}) = \varphi_i^*(y_{i-1})$$

$$\varphi_m^* = \varphi_m^*(y_{m-1})$$

$$T_m^* = T_m^*(y_{m-1})$$

$$\begin{aligned} \varphi_m^*(y_{m-1}^{(1)}); & \quad \varphi_m^*(y_{m-1}^{(2)}); \dots \\ T_m^*(y_{m-1}^{(1)}); & \quad T_m^*(y_{m-1}^{(2)}); \dots \end{aligned}$$



Розглянемо задачу оптимального керування:
знайти керування та траєкторії, на яких функціонал

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t) dt + \Phi(x(t_1)) \quad (5.1)$$

досягає свого екстремального (мінімального) значення для системи

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t), \quad (5.2)$$

де

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \Omega_t(X) \subseteq X, \quad (5.3)$$

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T \in \Omega_t(U) \subseteq U. \quad (5.4)$$

Тут X – фазовий простір, U – простір керувань, $t \in [t_0, t_1]$.

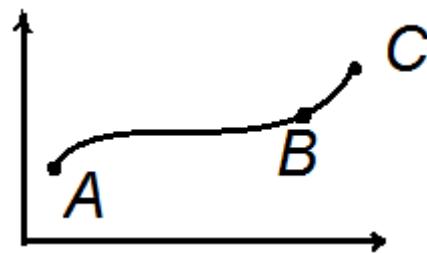
У задачі (5.1) – (5.4) моменти часу t_0, t_1 у загальному випадку вважаються невідомими й підлягають визначенню.

Ці моменти після їх визначення будемо позначати через t_0^0, t_1^0 .

Метод динамічного програмування є наслідком принципу оптимальності, який був сформульований Р.Белманом. Принцип оптимальності справедливий для досить широкого класу задач оптимального керування, але не для всіх.

Для задачі (5.1) – (5.4) **принцип оптимальності** може бути сформульований таким чином:

якщо деяка траєкторія AC керованої системи (5.2) є оптимальною траєкторією задачі (5.1) – (5.4), то траєкторія BC також буде оптимальною при будь-якому виборі точки B на оптимальній траєкторії AC .



Наведемо інше формульовання принципу оптимальності.

Нехай $u^0(t), x^0(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ – розв'язок задачі (5.1) – (5.4),

де $u^0(t)$ – оптимальне керування,

$x^0(t)$ – оптимальна траєкторія,

і нехай t' – довільний фіксований момент часу, $t' \in [t_0, t_1]$.

Тоді розв'язок задачі (5.1) – (5.4) для $t \geq t'$ визначається фіксованим значенням $x^0(t')$ і не залежить від $u^0(t), x^0(t)$ для $t < t'$,

тобто

$$\inf_{u \in \Omega(U(x^0(t')))} \left\{ \int_{t'}^{t_1} G(x, u, t) dt + \Phi(x(t_1)) \right\} = \int_{t'}^{t_1} G(x^0, u^0, t) dt + \Phi(x^0(t_1)).$$

Для задачі (5.1)–(5.4) принцип оптимальності Белмана доводиться на основі властивості адитивності визначеного інтеграла.

Доведення принципу оптимальності можна провести наступним чином.

Нехай:

$$\begin{aligned} Q^0 &= \inf_{\substack{u(t) \in \Omega_t(U) \\ x(t) \in \Omega_t(X) \\ t_0^0 \leq t \leq t_1^0}} \int_{t_0^0}^{t_1^0} G(x^0, u^0, t) dt + \Phi(x^0(t_1^0)) = \\ &= \int_{t_0^0}^{t^*} G(x^0, u^0, t) dt + \int_{t^*}^{t_1^0} G(x^0, u^0, t) dt + \Phi(x^0(t_1^0)) = Q_1^0 + Q_2^0. \end{aligned}$$

Тут t^* – довільна точка з $[t_0^0, t_1^0]$.

Розглянемо задачу (5.1)–(5.4) за умови, що:

$$t_0^0 = t^*, x(t^*) = x^0(t^*).$$

Розв'язок цієї задачі позначимо через $\tilde{u}(t), \tilde{x}(t)$, $t^* \leq t \leq t_1^0$.

Припустимо, всупереч принципу оптимальності, що цей розв'язок не співпадає з $u^0(t), x^0(t)$ при $t > t^*$.

Тоді

$$\tilde{Q} = \int_{t^*}^{\tilde{t}_1} G(\tilde{x}, \tilde{u}, t) dt + \Phi(\tilde{x}(\tilde{t}_1)) < Q_2^0.$$

Побудуємо допустиме керування для задачі (5.1)-(5.4) у вигляді кусково-неперервної функції

$$u_*(t) = \begin{cases} u^0(t), & t_0^0 \leq t < t^*, \\ \tilde{u}(t), & t^* \leq t < t_1^0. \end{cases}$$

Відповідна цьому керуванню траєкторія буде мати вигляд:

$$x_*(t) = \begin{cases} x^0(t), & t_0^0 \leq t < t^*, \\ \tilde{x}(t), & t^* \leq t \leq t_1^0. \end{cases}$$

Для розв'язку $u_*(t), x_*(t)$ задачі (5.1)-(5.4) будемо мати

$$Q(u_*) = Q_1^0 + \tilde{Q} < Q_1^0 + Q_2^0 = Q^0.$$

Остання нерівність вказує на те, що розв'язок $u^0(t), x^0(t)$ не є оптимальним, оскільки $u_*(t)$ дає менше значення функціоналу Q .

Протиріччя доводить справедливість принципу оптимальності.

Різницеве Рівняння Белмана для дискретних систем

Наведемо дискретний аналог задачі оптимального керування (5.1)-(5.4).

Розіб'ємо заданий інтервал часу рівномірно точками: $t_0^0 = t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_1^0 = t_N$.

Позначимо
підінтервали часу через
стан системи в моменти часу t_k через
і керування відповідно

$$\Delta t_k = \Delta t = t_{k+1} - t_k,$$

$$x(t_k) = x_k, k = \overline{0, N},$$

$$u(t_k) = u_k, k = \overline{0, N-1}.$$

Тоді дискретний аналог функціоналу (5.1) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} Q = Q(x_0, t_0, \{u_k\}_{k=0}^{k=N-1}) &= \sum_{k=0}^{N-1} G(x_k, u_k, t_k) \Delta t_k + \Phi(x_N) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} F_0(x_k, u_k, t_k) + \Phi(x_N) \longrightarrow \inf \end{aligned} \tag{5.5}$$

Дискретний аналог для системи (5.2) отримаємо наступним чином:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k} = f(x_k, u_k, t_k),$$

звідки

або

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k, u_k, t_k) \Delta t_k,$$

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k, t_k), k = \overline{0, N-1}, \quad (5.6)$$

Множини (5.3), (5.4) у випадку дискретного часу будуть мати вигляд, відповідно:

$$x_k \in \Omega_k(X), k = \overline{0, N}, \quad (5.7)$$

$$u_k \in \Omega_k(U), k = \overline{0, N-1}. \quad (5.8)$$

Для постановки задачі оптимального керування дискретною системою (5.6) припускається, що множини (5.7), (5.8) непорожні та обмежені. Задача оптимального керування (5.5) – (5.8) має сенс лише в тому випадку, коли з точок множини $\Omega_0(X)$ можна перейти в точки множини $\Omega_N(X)$ через точки множин $\Omega_k(X)$, $k = \overline{1, N-1}$.

Визначення 5.1. Множина $\Omega_N(X)$ називається **досяжною** з точок $x_k \in \Omega_k(X)$, $k = \overline{0, N-1}$, якщо існують такі допустимі керування $\{u_j\}, j = \overline{k, N-1}$, що відповідна їм згідно з рівнянням (5.6) траєкторія $\{x_j\}, j = \overline{k, N}$ з початковою точкою x_k з'єднує цю точку з деякою точкою множини $\Omega_N(X)$.

Якщо множина початкових значень $\Omega_0(X)$ складається не з одного елементу, то задача (5.5) – (5.8) розбивається на дві задачі:

а) знаходження допустимих керувань, які доставляють мінімум функціонала (5.5) при фіксованому значенні $x_0 \in \Omega_0(X)$, тобто

$$\min_{\{u_k\}_{k=0}^{k=N-1}} Q(x_0, t_0, \{u_k\}_{k=0}^{k=N-1}) = Q(x_0, t_0);$$

б) знаходження мінімуму $Q(x_0, t_0)$ як функції змінної x_0 на множині $\Omega_0(X)$, тобто

$$Q^0 = \min_{x_0 \in \Omega_0(X)} Q(x_0, t_0) = Q^0(t_0).$$

Для фіксованого моменту часу $t_k, k = \overline{0, N-1}$ введемо деяку функцію $S_k(x_k, t_k)$, яку будемо називати **функцією Белмана**, у вигляді:

$$S_k(x_k, t_k) = \min_{\{u_j\}_{j=k}^{j=N-1}} \left\{ \sum_{j=k}^{N-1} F_0(x_j, u_j, t_j) + \Phi(x_N) \right\} = \sum_{j=k}^{N-1} F_0(x_j, u_j^0(x_k), t_j) + \Phi(x_N), \quad (5.9)$$

де $u_j^0(x_k), k = \overline{j, N-1}$, – послідовність керувань, що відповідає оптимальному руху системи (5.6) з деякої точки $x_k \in \Omega_k(X)$, взятої в момент t_k , у точки множини $\Omega_N(X)$.

Виокремо у формулі (5.9) перший член.

Маємо

$$S_k(x_k, t_k) = F_0(x_k, u_k^0(x_k), t_k) + \sum_{j=k+1}^{N-1} F_0(x_j, u_j^0(x_k), t_j) + \Phi(x_N).$$

Далі візьмемо $j = k + 1$

і для керувань

$$u_k^0(x_k),$$

під дією яких система (5.6) переходить у точку

$$x_{k+1}: \quad x_{k+1} = F_0(x_k, u_k^0(x_k), t_k),$$

розглянемо функцію Белмана

$$S_{k+1}(x_{k+1}, t_{k+1}) = \min_{\{u_k\}_{j=k+1}^{N-1}} \left\{ \sum_{j=k+1}^{N-1} F_0(x_j, u_j, t_j) + \Phi(x_N) \right\} = \sum_{j=k+1}^{N-1} F_0(x_j, u_j^0(x_{k+1}), t_j) + \Phi(x_N), \quad (5.10)$$

де $u_j^0(x_{k+1})$, $j = \overline{k+1, N-1}$ – послідовність керувань, які відповідають оптимальному руху системи (5.6) із вказаної точки $x_{k+1} \in \Omega_{k+1}(X)$ у точки множини $\Omega_N(X)$.

З принципу оптимальності Белмана випливає, що розв'язок задачі (5.5)-(5.8) на проміжку $[t_k, t_N]$ збігається з розв'язком відповідної задачі на $[t_{k+1}, t_N]$, якщо перехід від x_k до x_{k+1} здійснено згідно з оптимальним керуванням $u_k^0(x_k)$ для системи керування (5.6).

Звідси будуть збігатися керування:

$$u_k^0(x_k) = u_j^0(x_{k+1}), \quad j = \overline{k+1, N-1}.$$

Отже, враховуючи це та формулу (5.10), вираз для функції $S_k(x_k, t_k)$ можна записати у вигляді:

$$S_k(x_k, t_k) = F_0(x_k, u_k^0(x_k), t_k) + S_{k+1}(x_{k+1}, t_{k+1}).$$

Оскільки $x_{k+1} = F_0(x_k, u_k^0(x_k), t_k)$, остаточно отримаємо:

$$S_k(x_k, t_k) = \min_{u_k \in \Omega_k(U)} \{F_0(x_k, u_k, t_k) + S_{k+1}(F(x_k, u_k, t_k), t_{k+1})\}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (5.11)$$

При цьому $S_N(x_N, t_N) = \Phi(x_N)$.

Рівняння (5.11) називається **різницевим рівнянням Белмана**.

5.2. АЛГОРИТМ МЕТОДУ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Алгоритм методу динамічного програмування розв'язування задачі вигляду (5.5) – (5.8) для дискретних систем керування складається з двох частин:

знаходження керувань як функцій від станів системи (**прямий хід**)

та обчислення оптимальних керувань і оптимальної траєкторії (**зворотний хід**).

A: Прямий хід.

Крок 1.

Покладемо в рівнянні Белмана (5.11) $k = N - 1$ і розв'яжемо задачу

$$S_{N-1}(x_{N-1}, t_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in \Omega_{N-1}(U)} \{F_0(x_{N-1}, u_{N-1}, t_{N-1}) + \Phi(F(x_{N-1}, u_{N-1}, t_{N-1}))\}$$

для всіх точок множини $\Omega_{N-1}(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$,

тобто для точок $x_N = F(x_{N-1}, u_{N-1}(x_{N-1}), t_{N-1}) \in \Omega_N(X)$.

Знаходимо $u_{N-1}^0(x_{N-1})$ як функцію точок $x_{N-1} \in \Omega_{N-1}(X)$.

Крок 2. Для $k = N - 2$ розв'яжемо задачу

$$\begin{aligned} S_{N-2}(x_{N-2}, t_{N-2}) &= \min_{u_{N-2} \in \Omega_{N-2}(U)} \{F_0(x_{N-2}, u_{N-2}, t_{N-2}) + S_{N-1}(x_{N-1}, t_{N-1})\} = \\ &= \min_{u_{N-2} \in \Omega_{N-2}(U)} \{F_0(x_{N-2}, u_{N-2}, t_{N-2}) + S_{N-1}(F(x_{N-2}, u_{N-2}, t_{N-2}), t_{N-1})\} \end{aligned}$$

для всіх $x_{N-2} \in \Omega_{N-2}(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$.

Звідси знаходимо $u_{N-2}^0(x_{N-2})$ для $x_{N-2} \in \Omega_{N-2}(X)$.

.....

Продовжуємо далі процес, поки не дійдемо до $k = 0$.

.....

Крок N . Для $k = 0$ розв'яжемо задачу

$$S_0(x_0, t_0) = \min_{u_0 \in \Omega_0(U)} \{F_0(x_0, u_0, t_0) + S_1(F(x_0, u_0, t_0), t_1)\}$$

для всіх $x_0 \in \Omega_0(X)$, з яких досяжна множина $\Omega_N(X)$.

Одержано $u_0^0(x_0)$, $x_0 \in \Omega_0(X)$.

B: Зворотній хід.

Якщо множина $\Omega_0(X)$ складається більш ніж з одного елементу, то потрібно розв'язати задачу:

$$\min_{x_0 \in \Omega_0(X)} S_0(x_0, t_0) = S_0(x_0^0, t_0) = Q^0(t_0).$$

Знайшовши x_0^0 , отримаємо оптимальне керування $u_0^0(x_0^0) = u_0^0$ у момент часу $t = t_0$.

Крок 1. Підставимо знайдені оптимальні x_0^0 , $u_0^0(x_0^0)$ у рівняння (5.6):

$$x_1^0 = F(x_0^0, u_0^0, t_0).$$

Знайшли x_1^0 у момент $t = t_1$.

Підставляючи значення x_1^0 у функцію $u_1^0(x_1^0)$, отриману на прямому ході алгоритму, знаходимо оптимальне керування $u_1^0(x_1^0) = u_1^0$.

Продовжуємо цей процес.

.....

Крок N. Аналогічно знаходимо керування $u_{N-1}^0(x_{N-1}^0) = u_{N-1}^0$ і точку $x_N^0 = F(x_{N-1}^0, u_{N-1}^0, t_{N-1})$.

Таким чином, знайшли $\{u_j^0\}, j = \overline{0, N-1}, \{x_j^0\}, j = \overline{0, N}$ – оптимальне керування та оптимальну траєкторію для задачі (5.5)-(5.8).

5.3. РІВНЯННЯ БЕЛМАНА ДЛЯ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Рівняння Белмана для неперервних систем в інтегральній формі

Розглянемо задачу оптимального керування з фіксованим часом і вільним правим кінцем траєкторії. Потрібно знайти мінімум функціонала

$$Q = Q(u) = \int_{t_0}^{t_1} G(x, u, t) dt + \Phi(x(t_1)) \quad (5.12)$$

для системи

$$x'(t) = f(x, u, t) \quad (5.13)$$

з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0,$$

і з обмеженнями на керування

$$u = u(t) \in \Omega_t(U) \quad (5.14)$$

$$x = x(t) \in \Omega_t(X), \quad (5.15)$$

та на траєкторії

для всіх $t_0 \leq t \leq t_1$.

Вважаємо, що

моменти часу t_0, t_1 фіксовані,

функції $G(x, u, t)$, $\Phi(x(t))$, вектор-функції $f(x, u, t)$ – неперервні за змінними x, u і кусково-неперервні за t на проміжку $[t_0, t_1]$.

Крім того, для функції $f(x, u, t)$ виконуються умови Ліпшиця за змінною керування, тобто для довільних w, v з множини (5.14):

$$|f(x, w, t) - f(x, v, t)| \leq \alpha |w - v|,$$

де $\alpha > 0$ – деяка стала величина.

Припускаємо, що $u(t)$ – кусково-неперервна функція змінної t на проміжку $[t_0, t_1]$.

Візьмемо для довільного фіксованого $t \in [t_0, t_1]$ деяку точку $x = x(t) \in \Omega_t(X)$.

Для цих t і $x(t)$, які візьмемо за t_0 та $x(t_0)$ відповідно, розглянемо задачу (5.12)-(5.15).

Розв'язок цієї задачі запишемо як $u^0(\tau, x)$, $x^0(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t_1$.

Мінімум відповідного функціонала для даного розв'язку позначимо через $S(x, t)$.

$$S(x, t) = \min_{\substack{u(\tau) \in \Omega_\tau(U) \\ t \leq \tau \leq t_1 \\ x = x(t) \in \Omega_t(X)}} \left\{ \int_t^{t_1} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x(t_1)) \right\} =$$

Задача А

$$= \int_t^{t_1} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + \Phi(x^0(t_1)).$$

Візьмемо на інтервалі $[t, t_1]$ довільний момент часу $t + \Delta t$ і точку $x(t + \Delta t) \in \Omega_{t+\Delta t}(X)$.

Розглянемо задачу (5.12)-(5.15) для цих $t + \Delta t, x(t + \Delta t)$, які візьмемо за t_0 та $x(t_0)$ відповідно.

Відзначимо, що ця задача відрізняється від попередньої лише початковими даними.

Мінімум відповідного функціонала позначимо через $S(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$.

$$S(x(t + \Delta t), t + \Delta t) = \\ = \min_{\substack{u(\tau) \in \Omega_\tau(U) \\ t + \Delta t \leq \tau \leq t_1 \\ x(t + \Delta t) \in \Omega_{t+\Delta t}(X)}} \left\{ \int_{t + \Delta t}^{t_1} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x(t_1)) \right\} =$$

Задача В

$$= \int_{t + \Delta t}^{t_1} G(\tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau, x(t + \Delta t), \tau), \tau) d\tau + \Phi(\tilde{x}(t_1)),$$

де $\tilde{u}(\tau, x(t + \Delta t))$, $\tilde{x}(\tau)$ – розв'язок задачі (5.12)-(5.15) на проміжку $[t + \Delta t, t_1]$.

Виберемо за $x(t + \Delta t)$ той стан системи (5.13), в який вона потрапляє в момент $t + \Delta t$, рухаючись із точки $x(t)$ по оптимальній траєкторії $x^0(\tau)$, тобто за стан $x(t + \Delta t)$ візьмемо стан $x^0(t + \Delta t)$.

Тоді, згідно з принципом оптимальності, розв'язки наведених вище двох задач збігаються на проміжку $t + \Delta t \leq \tau \leq t \leq t_1$.

Тому

$$S(x(t + \Delta t), t + \Delta t) = \int_{t + \Delta t}^{t_1} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + \Phi(x^0(t_1)).$$

Повернемось до значення функціонала $S(x, t)$.

Використовуючи властивість адитивності інтеграла можемо записати

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \int_t^{t + \Delta t} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + \\ &+ \int_{t + \Delta t}^{t_1} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + \Phi(x^0(t_1)). \end{aligned}$$

Звідси

$$S(x, t) = \int_t^{t + \Delta t} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + S(x^0(t + \Delta t), t + \Delta t),$$

де траєкторія $x^0(t + \Delta t)$ системи (5.13) отримана під дією керування $u^0(\tau)$.

Отже,

$$S(x, t) = \int_t^{t+\Delta t} G(x^0(\tau), u^0(\tau, x), \tau) d\tau + S(x^0(t + \Delta t), u^0(\tau), t + \Delta t).$$

Ця рівність виконується лише для оптимального керування $u^0(\tau)$. Якщо брати інші керування з множини допустимих керувань згідно з (5.14), то права частина останньої рівності може тільки збільшитись.

Отже, отримаємо **рівняння Белмана в інтегральній формі**

$$S(x, t) =$$

*

$$= \min_{\substack{u(\tau) \in \Omega_\tau(U) \\ t \leq \tau \leq t + \Delta t \leq t_1 \\ x = x(t) \in \Omega_t(X)}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} G(x(\tau), u(\tau, x), \tau) d\tau + S(x(t + \Delta t), u(\tau, x), t + \Delta t) \right\}.$$

Позначимо це рівняння через *.

Рівняння Белмана в диференціальній формі для неперервних систем

Для задачі (5.12)-(5.15),

запишемо рівняння Белмана в диференціальній формі.

Для цього скористаємося отриманим вище рівнянням Белмана в інтегральній формі (*).

Додатково до наведених у цій задачі умов будемо вважати:

керування $u(t)$ неперервні за t ,

для задачі (5.12)-(5.15) функція $S(x,t)$ має неперервні частинні похідні:

за фазовими координатами

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \equiv \text{grad}_x^T S(x,t) \equiv \left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_n} \right),$$

та часом

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial t};$$

За цих припущень, розклавши рівняння Белмана в інтегральній формі (*) в ряд Тейлора й знехтувавши членами другого порядку й вище, можна записати рівняння у вигляді:

для задачі з фікованим часом і вільним правим кінцем

$$S(x, t) = \min_{\substack{u(\tau) \in \Omega_\tau(U) \\ t_0 \leq t \leq \tau \leq t + \Delta t \leq t_1 \\ x = x(t) \in \Omega_t(X)}} \{G(x(\tau), u(\tau), \tau) \Delta t + S(x, t) + \\ + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Delta t + \text{grad}_x^T S(x, t)(x(t + \Delta t, u(\tau)) - x) + o(\Delta t)\};$$

Тут τ – деяке фіксоване значення, $o(\Delta t)$ – нескінченно мала більш високого порядку малості, ніж Δt .

Зauważмо, що величина $S(x, t)$ зліва і справа взаємно знищується.

При переході до границі при $\Delta t \rightarrow 0$ матимемо:

$$\tau \rightarrow t, \quad u(\tau) \rightarrow u(t),$$

$$x(\tau) \rightarrow x(t), \quad x(t + \Delta t, u(\tau)) \rightarrow x(t),$$

$$\frac{x(t + \Delta t, u(\tau)) - x(t)}{\Delta t} \rightarrow x'(t).$$

Отже, одержимо рівняння:

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_{\substack{u(t) \in \Omega_t(U) \\ t_0 \leq t \leq t_1}} \{G(x, u, t) + \text{grad}_x^T S(x, t) x'(t)\},$$

Це рівняння має виконуватись у кожній точці оптимальної траєкторії системи $x' = f(x, u, t)$.

В результаті

рівняння Белмана в диференціальній формі
для задачі з фіксованим часом й вільним правим кінцем траєкторії (5.12)-(5.15)

прийме вигляд

$$(+)\quad -\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_{\substack{u(t) \in \Omega_t(U) \\ t_0 \leq t \leq t_1}} \{G(x,u,t) + \text{grad}_x^T S(x,t) \cdot f(x,u,t)\},$$

$$S(x,t_1) = \Phi(x(t_1)).$$

Початкові умови випливають із вигляду функції $S(x,t)$.

Приклад 6.1. Знайти оптимальні керування й траєкторію, для яких функціонал

$$Q(u) = \int_0^T u^2(t) dt + \lambda x^2(T),$$

приймає свого мінімального значення для системи

$$x'(t) = u(t)$$

з початковою умовою

$$x(0) = x_0.$$

Тут $\lambda > 0$ – задана стала величина, T – задане, $0 \leq t \leq T$.

Розв'язок.

Оскільки час фіксований, то рівняння Белмана в диференціальній формі для цієї задачі запишемо у вигляді

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_u \{u^2(t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} u(t)\},$$
$$S(x, T) = \lambda x^2(T). \quad (!)$$

Звідси

$$\min_u \left\{ \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + u^2(t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} u(t) \right\} = 0 \quad (*)$$

З необхідної умови мінімуму по керуванню маємо

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} + 2u(t) = 0$$

Отже, знайдене керування буде мати вигляд:

$$u^0(t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}$$

Підставивши цей вираз у рівняння Белмана (*)

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = 0,$$

одержимо

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right)^2 = 0$$

Отримали нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних.

Розв'язок цього рівняння – функцію $S(x, t)$ – будемо шукати у вигляді полінома з невідомими коефіцієнтами, які залежать від часу t :

$$S(x, t) = c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2. \quad (**)$$

Підставимо останній вираз $S(x, t)$ у рівняння Белмана $(**)$ та в умову для $S(x, t)$ (!):

$$\begin{cases} c'_0(t) + c'_1(t)x + c'_2(t)x^2 - \frac{1}{4}(c_1(t) + 2c_2(t)x)^2 = 0 \\ c_0(T) + c_1(T)x + c_2(T)x^2 = \lambda x^2 \end{cases}$$

Прирівняємо коефіцієнти при одинакових степенях x одержимо систему нелінійних диференціальних рівнянь з початковими умовами (на правому кінці)

$$\begin{cases} c'_0(t) - \frac{1}{4}c_1^2(t) = 0 \\ c'_1(t) - c_1(t)c_2(t) = 0 \\ c'_2(t) - c_2^2(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_0(T) = 0 \\ c_1(T) = 0 \\ c_2(T) = \lambda \end{cases}$$

Звідси, враховуючи, що $c_1^2(t) \geq 0$, знаходимо

$$c_0(t) \equiv 0, c_1(t) \equiv 0, 0 \leq t \leq T.$$

Розв'яжемо останнє рівняння системи:

$$\begin{aligned} \frac{dc_2(t)}{dt} - c_2^2(t) = 0 &\Rightarrow \frac{dc_2(t)}{c_2^2(t)} = dt \Rightarrow \\ -\frac{1}{c_2(t)} &= t + C \Rightarrow c_2(t) = -\frac{1}{t + C} \end{aligned}$$

де C – стала інтегрування.

Враховуючи умову $c_2(T) = -\frac{1}{T + C} = \lambda$, маємо $C = -\frac{1 + \lambda T}{\lambda}$.

Отже,

$$c_2(t) = \frac{\lambda}{1 - \lambda(t - T)}.$$

Таким чином функція Белмана остаточно запишеться у наступному вигляді

$$S(x, t) = \frac{\lambda x^2}{1 - \lambda(t - T)}.$$

Тоді функція керування (виписана через функцію Белмана) як функція координат системи,

$$u^0 = -\frac{\lambda x}{1 - \lambda(t - T)}, \quad 0 \leq t \leq T$$

є розв'язком задачі синтезу оптимального керування.

Далі підставимо u^0 у систему:

$$x'(t) = -\frac{\lambda x}{1 - \lambda(t - T)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{\lambda x}{1 - \lambda(t - T)} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(1 - \lambda(t - T))}{1 - \lambda(t - T)} \Rightarrow \ln x = \ln C(1 - \lambda(t - T))$$

де C – стала інтегрування.

Таким чином, траєкторія має вигляд

$$x = C(1 - \lambda(t - T)).$$

Невідому константу визначимо з початкової умови:

$$x(0) = (1 + \lambda T)C = x_0.$$

Звідси

$$C = \frac{x_0}{1 + \lambda T}.$$

Отже, оптимальна траєкторія матиме вигляд

$$x^0(t) = \frac{(1 - \lambda(t - T))x_0}{1 + \lambda T}$$

Тоді

$$u^0(t) = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda T}, \quad 0 \leq t \leq T$$

– оптимальне керування.

Приклад 6.2. Знайти оптимальні керування й траєкторію, для яких функціонал

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^1 u^2(t) dt + \frac{1}{2} x_2^2(1), \quad \text{де} \quad t \in [t_0, 1],$$

для системи

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = u(t) \end{cases}$$

з початковою умовою

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \end{cases}$$

досягає свого мінімального значення.

Розв'язок. Запишемо рівняння Белмана для функції $S(x, t)$:

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_u \left\{ \frac{1}{2} u^2(t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_2} u(t) \right\}$$

за умови

$$S(x_1, x_2, 1) = \frac{1}{2} x_2^2(1)$$

Перепишемо це рівняння у вигляді

$$\min_u \left\{ \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2(t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_2} u(t) \right\} = 0$$

З необхідної умови мінімуму маємо

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial x_2} + u(t) = 0$$

Звідси отримаємо вигляд можливого оптимального керування через функцію Белмана

$$u^0(x_1, x_2, t) = -\frac{\partial S(x, t)}{\partial x_2} .$$

Підставимо це $u^0(x_1, x_2, t)$ у рівняння Белмана.

Отже, для розв'язування задачі треба знайти функцію $S(x_1, x_2, t)$, що задовольняє рівняння

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_1} x_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x_2} \right)^2 = 0$$

за умови, що

$$S(x_1, x_2, 1) = \frac{1}{2} x_2^2(1)$$

Функцію $S(x_1, x_2, t)$ будемо шукати у вигляді квадратичної форми:

$$S(x_1, x_2, t) = c_{11}(t)x_1^2 + 2c_{12}(t)x_1x_2 + c_{22}(t)x_2^2$$

Підставимо це зображення функції $S(x_1, x_2, t)$ у рівняння та умову для функції $S(x_1, x_2, t)$ і для визначення коефіцієнтів полінома отримаємо систему диференціальних рівнянь з початковими умовами (на правому кінці)

$$\begin{cases} c'_{11}(t) - 2c_{12}^2(t) = 0 \\ c'_{12}(t) + c_{11}(t) - 2c_{12}(t)c_{22}(t) = 0, \\ c'_{22}(t) + 2c_{12}(t) - 2c_{22}^2(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_{11}(1) = 0 \\ c_{12}(1) = 0 \\ c_{22}(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Виконавши необхідні обчислення, знаходимо:

$$c_{11}(t) = c_{12}(t) \equiv 0; \quad c_{22}(t) = \frac{1}{2(2-t)}, \quad t \in [t_0, 1].$$

Отже, у даному випадку функція Белмана має остаточний вигляд

$$S(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} \frac{x_2^2(t)}{2-t}.$$

Тоді

$$u^0(x_1, x_2, t) = \frac{x_2(t)}{t-2} \quad \text{– розв'язок задачі синтезу оптимального керування.}$$

Таким чином, система керування матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = \frac{x_2}{t-2} \end{cases}$$

Зінтегруємо систему

$$\frac{dx_2}{x_2} = \frac{dt}{t-2} \Rightarrow \ln x_2 = \ln C(t-2) \Rightarrow x_2(t) = C(t-2)$$

$$x_1'(t) = C(t-2), \quad x_1(t) = Ct\left(\frac{1}{2}t - 2\right) + D$$

де C, D – сталі інтегрування.

З початкових умов визначимо невідомі сталі інтегрування:

$$x_1(t_0) = Ct_0\left(\frac{1}{2}t_0 - 2\right) + D = x_{10}$$

$$x_2(t_0) = C(t_0 - 2) = x_{20}$$

Звідси

$$C = \frac{x_{20}}{(t_0 - 2)}, \quad D = x_{10} - \frac{x_{20}t_0(\frac{1}{2}t_0 - 2)}{(t_0 - 2)}.$$

Отже, оптимальна траєкторія системи матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{x_{20}}{(t_0 - 2)} t (\frac{1}{2}t - 2) + x_{10} - \frac{x_{20}t_0(\frac{1}{2}t_0 - 2)}{(t_0 - 2)} \\ x_2(t) = \frac{x_{20}}{t_0 - 2} (t - 2) \end{cases}$$

Тоді оптимальне керування запишеться

$$u^0(x_1, x_2, t) = \frac{x_{20}}{t_0 - 2}.$$

5.4. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Нехай об'єкт керування описується рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (5.22)$$

де $x(t) = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор стану системи, $A(t)$ – $n \times n$ матриця, $u(t) = (u_1, \dots, u_r)^T$ – вектор керувань, $B(t)$ – матриця розмірності $n \times r$, $t \in [t_0, t_1]$.

Початковий стан заданий $x(t_0) = x_0$,

час t_1 – фіксований,
стан $x(t_1)$ – вільний.

Задача полягає в тому, щоб для системи (5.22) знайти керування й траєкторію, на яких функціонал

$$Q(x, u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt + \frac{1}{2} x^T(t_1) F x(t_1) \quad (5.23)$$

досягає свого мінімального значення.

Тут $Q(t), R(t), F$ – симетричні додатно-визначені матриці.

Задача оптимального керування лінійною системою (5.22) з мінімізацією квадратичного функціонала (5.23) у теорії керування називається задачею **аналітичного конструювання оптимального регулятора для лінійної системи**.

Розв'яжемо цю задачу за допомогою рівняння Белмана в диференціальній формі, яке для даної задачі набуває вигляду:

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_{u(t)} \left\{ \frac{1}{2} x^T Q(t) x + \frac{1}{2} u^T R(t) u + \text{grad}_x^T S(x, t) (A(t)x + B(t)u) \right\},$$

де

$$\text{grad}_x^T S(x, t) \equiv \frac{\partial S^T(x, t)}{\partial x} \equiv \left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_n} \right).$$

Зайдемо керування з необхідної умови екстремуму:

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial u} = R(t)u + B^T(t) \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = 0,$$

$$R(t)u = -B^T(t) \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}.$$

Звідси

$$u^0 = -R^{-1}(t)B^T(t) \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}.$$

Підставимо це керування в рівняння Белмана для $S(x, t)$. Маємо

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} x^T Q(t) x + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right)^T B(t) R^{-1}(t) R(t) R^{-1}(t) B^T(t) \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} + \\ & + \left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right)^T (A(t)x - B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}) \}, \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} x^T Q(t) x - \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right)^T B(t) R^{-1}(t) B^T(t) \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} + \left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right)^T A(t)x, \\ & S(x, t_1) = \frac{1}{2} x^T(t_1) F x(t_1). \end{aligned}$$

Розв'язок цього рівняння – функцію $S(x, t)$ – будемо шукати у вигляді квадратичної форми

$$S(x, t) = \frac{1}{2} x^T P(t) x,$$

де $P(t)$ – симетрична матриця, що підлягає визначенню.

Знайдемо похідні за часом і за станами цієї функції.

Маємо

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = P(t)x, \quad \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} x^T \frac{dP(t)}{dt} x.$$

Підставимо ці вирази в рівняння й отримаємо:

$$-\frac{1}{2} x^T \frac{dP(t)}{dt} x = \frac{1}{2} x^T Q(t)x - \frac{1}{2} x^T P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x + x^T P(t)A(t)x.$$

Це буде виконуватися для довільних значень x тоді й тільки тоді, коли матриця $P(t)$ задовольняє рівняння

$$-\frac{1}{2} \frac{dP(t)}{dt} = \frac{1}{2} Q(t) - \frac{1}{2} P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + P(t)A(t).$$

Скористаємося тим, що для матриць справедливо: $CD = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}C^T D$.

Остаточно отримаємо

$$\frac{dP(t)}{dt} = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) - Q(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t). \quad (5.24)$$

$$P(t_1) = F. \quad (5.25)$$

Диференціальні рівняння (5.24) називаються **матричним рівнянням Ріккаті**.

Таким чином, матрична функція $P(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ є розв'язком задачі Коші (5.24), (5.25) із зворотним напрямком зміни аргументу t .

Розв'язавши цю задачу Коші, знайдемо $P(t)$, а значить і функцію $S(x, t)$.

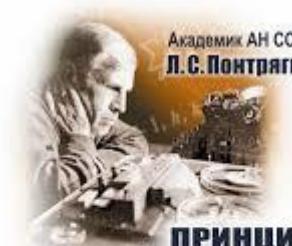
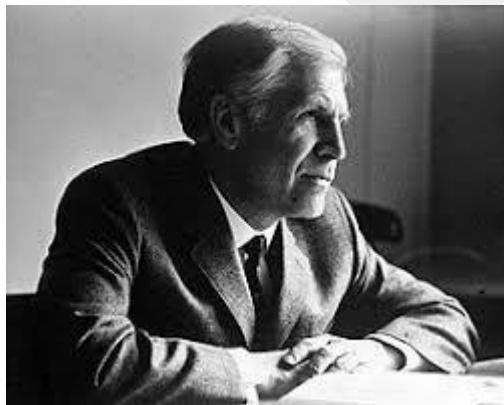
Тоді оптимальне керування запишеться, як $u^0 = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x$,
а система керування прийме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]x.$$

Разом з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ маємо задачу Коші розв'язавши яку отримаємо оптимальну траєкторію.

6.1. ПРИНЦІП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА

ДЛЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ІЗ ЗАКРІПЛЕНИМИ КІНЦЯМИ ТРАЄКТОРІЙ ТА ФІКСОВАНИМИ ПОЧАТКОВИМ І КІНЦЕВИМ МОМЕНТАМИ ЧАСУ



ПРИНЦІП МАКСИМУМА В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Принцип максимума, формулировка +
История исследований +
Доказательство принципа максимума +
Задача быстродействия +
Системы управления задач быстродействия +



Розглянемо задачу оптимального керування із закріпленими кінцями траєкторій та фіксованим часом.
Треба мінімізувати функціонал

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \inf \quad (6.1)$$

для системи

за умов

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (6.2)$$

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \quad (6.3)$$

$$u(t) \in V, t_0 \leq t \leq t_1, \quad (6.4)$$

де $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ – фазові координати,

$u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ – керування, що вважаються кусково-неперервними функціями на $[t_0, t_1]$,
моменти часу t_0, t_1 і точки x_0, x_1 – задані,

множина $V \subseteq E^r$ (E^r - Евклідів r -вимірний простір) не залежить від часу,
фазові обмеження для $t \in [t_0, t_1]$ відсутні,

$$f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \dots, f^n(x(t), u(t), t))^T.$$

Для формальної постановки задачі введемо деякі позначення та будемо вважати виконаними певні
припущення.

Припустимо, що функції $f^j(x(t), u(t), t)$, $j = \overline{0, n}$ мають частинні похідні (для спрощення записів аргументи функцій будемо опускати в тих випадках, які не викликають непорозумінь):

$$\frac{\partial f^j(x(t), u(t), t)}{\partial x_i} = \frac{\partial f^j}{\partial x_i} = f_{x_i}^j, \quad i = \overline{1, n}.$$

Аналогічно позначимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \begin{pmatrix} f_{x_1}^1 & \cdots & f_{x_n}^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{x_1}^n & \cdots & f_{x_n}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x^1 \\ \vdots \\ f_x^n \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial f^0}{\partial x} = f_x^0 = (f_{x_1}^0, \dots, f_{x_n}^0)^T.$$

Вважаємо:

функції $f^j(x(t), u(t), t)$, $j = \overline{0, n}$ та частинні похідні f_x , f_x^0 з формул (6.5) – неперервні за сукупністю аргументів $(x, u, t) \in E^n \times E^r \times [t_0, t_1]$.

Далі, введемо n допоміжних змінних $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))^T \in E^n$
та ψ_0 .

Для цих змінних і сталої визначимо функцію:

$$\begin{aligned} H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0) &= \\ &= \psi_0 f^0(x(t), u(t), t) + \psi_1(t) f^1(x(t), u(t), t) + \dots + \psi_n(t) f^n(x(t), u(t), t) = \quad (6.6) \\ &= \psi_0 f^0(x(t), u(t), t) + \psi^T(t) f(x(t), u(t), t). \end{aligned}$$

Функція $H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$ називається функцією Гамільтона – Понтрягіна.

Нехай $u = u(t)$ – кусково-неперервне керування, що задовольняє умову (6.4),
 а $x(t) = x(t, u, x_0)$ – розв'язок системи (6.2), що відповідає цьому керуванню $u(t)$, початковій умові
 x_0 і визначений на всьому відрізку $[t_0, t_1]$.

Парі $(u(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ поставимо у відповідність систему лінійних диференціальних рівнянь
 відносно допоміжних змінних $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))^T$:

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.7)$$

або інакше

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = -\sum_{j=0}^n \psi_j(t) \frac{\partial f^j(x(t), u(t), t)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

де $\psi_0(t) = \psi_0$ – стала величина.

Систему лінійних диференціальних рівнянь (6.7) називають **спряженою системою**,
 що відповідає парі $(u(t), x(t, u, x_0))$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Запишемо систему (6.7) у векторній формі:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -H'_x(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$$

або

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi_0 f_x^0(x(t), u(t), t) - (f_x(x(t), u(t), t))^T \psi(t),$$

для всіх $t_0 \leq t \leq t_1$.

Теорема 6.1. (Принцип максимуму – необхідна умова оптимальності. Закріплені кінці траєкторії, початковий і кінцевий моменти часу фіксовані).

Нехай $(u(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ – розв'язок задачі (6.1)-(6.4).

Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $\psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ і стала ψ_0 такі, що:

- 1) $\psi_0 \leq 0$, $|\psi_0| + \|\psi(t)\| \neq 0$, $t_0 \leq t \leq t_1$; (6.8)
- 2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (6.7), яка відповідає розв'язку $(u(t), x(t))$;
- 3) при кожному $t \in [t_0, t_1]$ функція Гамільтона – Понтрягіна $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ як функція змінної $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ досягає своєї верхньої грани на множині V при $u = u(t)$, тобто:

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0). \quad (6.9)$$

Центральне місце в теоремі 6.1 займає умова максимуму. Тому **теорему 6.1** і наступні аналогічні теореми прийнято називати **принципом максимуму**.

Умова (6.8) гарантує, що функція не перетвориться на тотожний нуль і робить умову максимуму (6.9) змістовою.

Як користуватися теоремою 6.1 на практиці?

Знаходять функцію $u = u(x, t, \psi, \psi_0)$, що дає $\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$.

При цьому змінні x, t, ψ і стала ψ_0 вважаються параметрами.

Відзначимо, що $u = u(x, t, \psi, \psi_0) \in V$. (6.10).

Якщо початкова задача (6.1)-(6.4) має розв'язок, то функція (6.10) визначена на непорожній множині, що випливає з умови максимуму (6.9).

Далі складають систему з $2n$ диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t) \\ \frac{d\psi}{dt} = -H'_x(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t, \psi, \psi_0) \end{cases} \quad (6.11)$$

для всіх $t \in [t_0, t_1]$ відносно невідомих функцій $x(t), \psi(t)$.

Загальний розв'язок системи (6.11) містить $2n$ довільних сталих.

Для їх визначення треба мати $2n$ умов.

В задачі (6.1) – (6.4) ці умови такі:

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1.$$

Система (6.11) містить ще один невідомий параметр $\psi_0 \leq 0$.

Як його визначити?

Зауважимо, що функція $H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$, яка визначається співвідношенням (6.6), лінійна й однорідна відносно змінних $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$, тобто

$$H(x(t), u(t), t, \alpha\psi(t), \alpha\psi_0) = \alpha H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0), \quad \forall \alpha.$$

Звідси та з умови

$$H(x(t), u(x, t, \psi(t), \psi_0), t, \psi(t), \psi_0) = \sup_{u \in V} H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0) \quad (6.12)$$

маємо

$$u(x, t, \alpha\psi(t), \alpha\psi_0) \equiv u(x, t, \psi(t), \psi_0), \quad \forall \alpha. \quad (6.13)$$

Отже теорема 6.1 визначає $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$ лише з точністю до додатного множника, і цим множником можна скористатися на свій розсуд.

На практиці, враховуючи умови теореми 6.1, зокрема, обмеження (6.8), найчастіше покладають

$$|\psi_0|^2 + \|\psi(\bar{t})\|^2 = 1, \quad \psi_0 \leq 0, \quad (6.14)$$

де \bar{t} – деякий момент часу, $t_0 \leq \bar{t} \leq t_1$,

наприклад, $\bar{t} = t_0$ або $\bar{t} = t_1$.

У тих задачах, у яких вдається заздалегідь показати, що $\psi_0 < 0$, замість умови нормування (6.14) часто покладають

$$\psi_0 = -1.$$

Крайову задачу,

що складається з умови максимуму (6.12), системи диференціальних рівнянь (6.11), крайових умов (6.3) та умови нормування (6.14),

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t) \\ \frac{d\psi}{dt} = -H'_x(x, u(x, t, \psi, \psi_0), t, \psi, \psi_0) \end{cases}$$

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$$

$$H(x(t), u(x, t, \psi(t), \psi_0), t, \psi(t), \psi_0) = \sup_{u \in V} H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0)$$

$$|\psi_0|^2 + \|\psi(\bar{t})\|^2 = 1, \quad \psi_0 \leq 0$$

називають **крайовою задачею принципу максимуму** для задачі оптимального керування (6.1) – (6.4).

Нехай вдалося визначити з умов (6.11), (6.3), (6.14) деякі $x(t), \psi(t), \psi_0$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Підставимо їх у (6.10) і отримаємо функцію:

$$u = u(x(t), t, \psi(t), \psi_0) \in V, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (6.15)$$

Нехай ця функція виявилася кусково-неперервною функцією. З (6.10), (6.12), (6.15) випливає, що отримане керування $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ задовольняє умову максимуму (6.9), тобто згідно з теоремою 6.1 може претендувати на роль оптимального керування задачі (6.1)-(6.4), а відповідна до нього траєкторія $x(t) = x(t, u(t), x_0)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ – на роль оптимальної траєкторії цієї задачі. Тобто вони є розв'язком, підозрілим на оптимальний.

Чи буде знайдена пара $(u(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ насправді розв'язком задачі (6.1)-(6.4), тобто оптимальним розв'язком, **теорема 6.1** не гарантує, оскільки ця теорема дас лише **необхідну умову оптимальності**. Може бути, що пара $(u(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ задовольняє умови теореми 6.1, але не є розв'язком задачі (6.1)-(6.4).

Утім, якщо з якихось міркувань відомо (зазвичай, з фізичного змісту задачі), що дана задача (6.1)-(6.4) має розв'язок, а з крайової задачі принципу максимуму знайдені $x(t), \psi(t), \psi_0, t_0 \leq t \leq t_1$ однозначно, то знайдене керування (6.15) і буде оптимальним.

6.2. ФОРМУЛЮВАННЯ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА ДЛЯ ЗАДАЧІ З ВІЛЬНИМИ КІНЦЯМИ ТРАЄКТОРІЙ ТА ФІКСОВАНИМ ЧАСОМ

Розглянемо задачу оптимального керування з більш загальними умовами на кінцях траєкторій; початковий і кінцевий моменти часу, як і раніше, фіксовані:

$$J(x_0, u(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t) dt + \Phi(x(t_1)) \rightarrow \inf , \quad (6.16)$$

$$x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (6.17)$$

$$x(t_0) \in S_0, x(t_1) \in S_I, \quad (6.18)$$

$$u(t) \in V, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (6.19)$$

де керування $u(t)$ – кусково-неперервні на $t \in [t_0, t_1]$,

тобто $u(t) = u(t+0)$ при $t_0 \leq t \leq t_1$, а при $t = t_1$: $u(t_1) = u(t_1 - 0)$;

початковий і кінцевий моменти часу t_0, t_1 – фіксовані;

$$f(x(t), u(t), t) = (f^1(x(t), u(t), t), \dots, f^n(x(t), u(t), t))^T.$$

Вважаємо, що правий кінець траєкторії *вільний*:

та (або)

лівий кінець траєкторії *вільний*:

$$S_I \equiv E^n,$$

$$S_0 \equiv E^n,$$

Далі будемо вважати:

функції $f^j(x(t), u(t), t)$, $j = \overline{0, n}$, $\Phi(x)$ мають частинні похідні за змінними x_1, \dots, x_n і неперервні разом із цими похідними за сукупністю своїх аргументів при всіх $x \in E^n$, $u(t) \in V$, $t \in [t_0, t_1]$

Також позначимо:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi'_x = (\Phi_{x_1}, \dots, \Phi_{x_n})^T,$$

Теорема 6.2 (Принцип максимуму – необхідна умова оптимальності. Кінці траєкторій вільні, початковий і кінцевий моменти часу фіксовані).

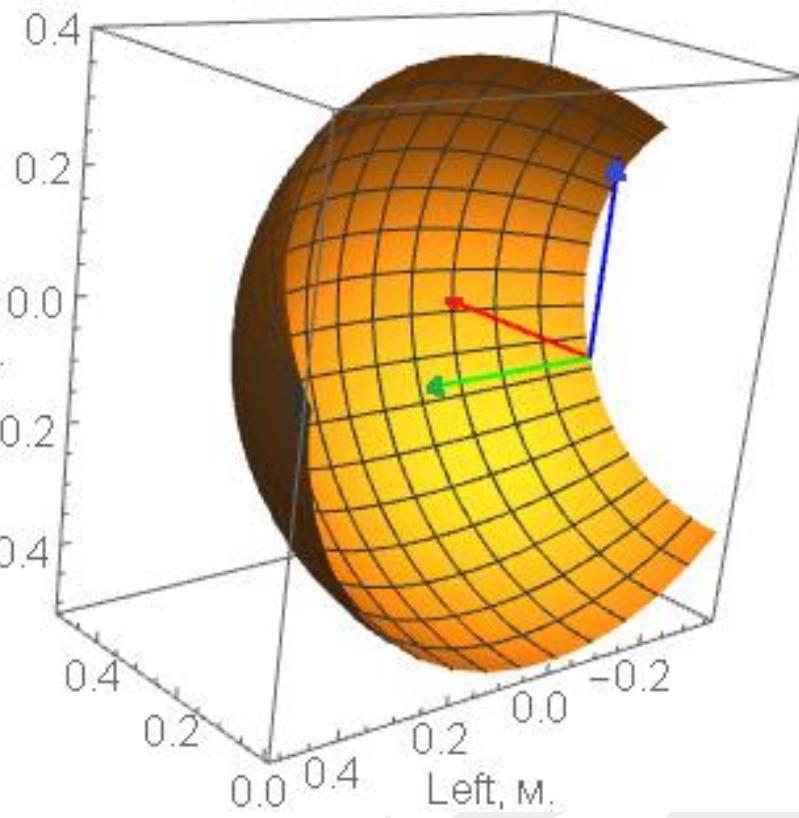
Нехай $(u(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ – розв'язок задачі (6.16)-(6.19).

Тоді необхідно існує неперервна вектор-функція $\psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ і стала ψ_0 такі, що:

- 1) $\psi_0 \leq 0$, $|\psi_0| + \|\psi(t)\| \neq 0$, $t_0 \leq t \leq t_1$;
- 2) $\psi(t)$ є розв'язком спряженої системи (6.7), яка відповідає розв'язку $(u(t), x(t))$, який розглядається;
- 3) при кожному $t \in [t_0, t_1]$ функція Гамільтона – Понtryagіна $H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0)$ як функція змінної $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ досягає своєї верхньої грани на множині V при $u = u(t)$, тобто:

$$\sup_{u \in V} H(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0) = H(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0).$$

- 4) на лівому і правому кінцях траєкторії $x(t)$ виконуються умови трансверсальності, які у випадку задачі (6.16)-(6.19) означають, що вектор $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi'_x(x(t_1))$ **ортогональний до множини S_I** у точці $x(t_1) \in S_I$, а вектор $\psi(t_0)$ **ортогональний до множини S_0** у точці $x(t_0) \in S_0$.



A.S.
2020 Worko,

Тут також можна прийняти умову нормування (6.14), або умову $\psi_0 = -1$, якщо відомо, що $\psi_0 < 0$.

Ще треба вказати $2n$ умов для визначення $2n$ сталих, від яких залежатиме загальний розв'язок системи (6.11).

Для цього розглянемо умови трансверсальності на кінцях траєкторії $x(t)$.

Наведемо ці умови на правому кінці траєкторії.

Правий кінець вільний, тобто: $S_I \equiv E^n$.

Тоді умова ортогональності вектора $\psi(t_1) - \psi_0 \Phi'_x(x(t_1))$ до всього простору E^n означає:

$$\psi(t_1) - \psi_0 \Phi'_x(x(t_1)) = 0. \quad (6.24)$$

Це дає n граничних умов для системи (6.11).

Наведемо умови трансверсальності на лівому кінці траєкторії $x(t)$.

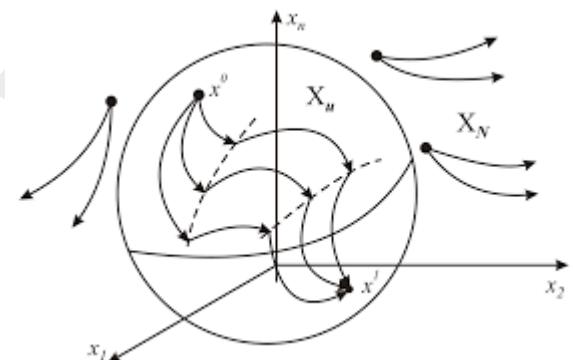
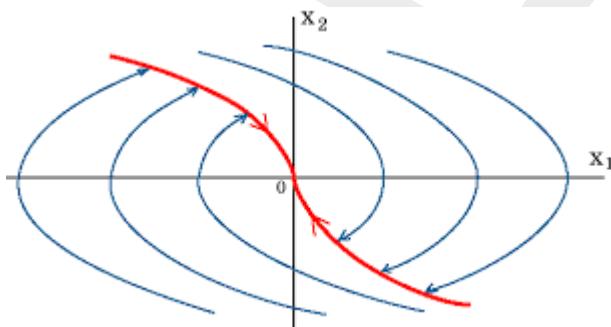
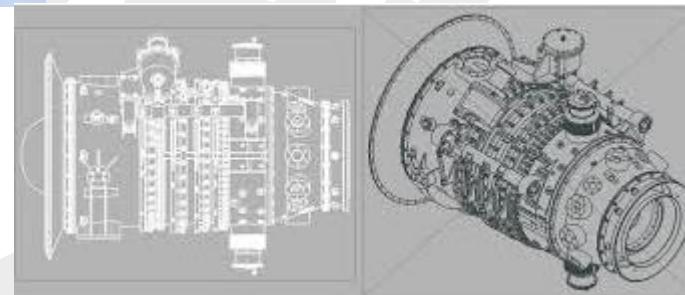
Лівий кінець вільний, тобто: $S_0 \equiv E^n$.

Тоді умова трансверсальності записується так:

$$\psi(t_0) = 0. \quad (6.30)$$

Співвідношення (6.30) дають n граничних умов для системи (6.11).

6.4. ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ ДО ЗАДАЧІ ШВИДКОДІЙ



Для системи керування

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = u(t) \end{cases}$$

із закріпленими кінцями траєкторій

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(t_1) = 0 \\ x_2(t_1) = 0 \end{cases}$$

та за умови обмеження на керування

$$|u(t)| \leq 1$$

знайти керування й траєкторії, які мінімізують час руху системи із заданої початкової точки в початок координат.

В даній задачі критерій оптимальності буде мати вигляд

$$T = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \rightarrow \min .$$

Застосовуємо принцип максимуму Понтрягіна.

Будуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна (відразу покладаємо $\psi_0 = -1$)

$$H(x(t), u(t), t, \psi(t)) = \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)u(t) - 1.$$

Записуємо спряжену систему

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), u(t), t, \psi(t))}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H(x(t), u(t), t, \psi(t))}{\partial x_2} = -\psi_1(t) \end{cases}.$$

Шукаємо керування $u^0(t)$, при якому функція Гамільтона-Понтрягіна $H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ досягає максимуму:

$$\max_u H(x(t), u, t, \psi(t)).$$

Зауважимо, що в даній задачі функція $H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ лінійна за керуванням $u(t)$ на замкненому проміжку $|u(t)| \leq 1$, а значить, може досягати свого максимуму лише на кінцях цього відрізка.

Якщо $\psi_2(t) > 0$, то функція $H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ зростає із зростанням $u(t)$, тому її максимум досягається на правому кінці відрізка, тобто $u^0 = 1$.

Аналогічно, при $\psi_2(t) < 0$ отримуємо $u^0 = -1$.

Якщо $\psi_2(t) = 0$ то $H(x(t), u(t), t, \psi(t))$ від $u(t)$ не залежить і його можна покласти довільним із допустимої області, зокрема: $u^0 = 0$.

Значить, $u^0 = \operatorname{sign} \psi_2(t)$ для $\psi_2(t) \neq 0$.

Знаходимо $\psi_1(t)$ та $\psi_2(t)$ як розв'язок спряженої системи:

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1(t)}{dt} = 0 \\ \frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\psi_1(t) \end{cases}$$

Отримаємо

$$\psi_1(t) = C_1, \quad \psi_2(t) = -C_1 t + C_2.$$

Таким чином, оптимальне керування визначається за формулою: $u^0 = sign(-C_1 t + C_2)$.

Оскільки знайдена функція $\psi_2(t)$ лінійна, то вона може змінювати свій знак на довільному замкненому проміжку не більш ніж в одній точці.

Значить, керування $u^0(t)$ буде змінюватися з $+1$ на -1 (або з -1 на $+1$) теж не більш ніж в одній точці на проміжку $[t_0, t_1]$.

Цю точку називають точкою перемикання.

Таким чином,

незалежно від вибору початкової точки $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$,

відповідне оптимальне керування є кусково-сталою функцією, яка приймає значення $+1$ або -1 та має не більше двох інтервалів сталості.

Розглянемо можливі випадки.

a) $u^0 = 1$

Система керування набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 1 \end{cases}.$$

Знайдемо звідси $x_1(t)$ як функцію від $x_2(t)$:

$$dx_2(t) = dt \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dx_2(t)} = x_2 \Rightarrow dx_1(t) = x_2 dx_2(t).$$

Звідси маємо:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + C,$$

де C – стала інтегрування.

Таким чином отримали **сім'ю парабол**. Серед них є тільки одна, що проходить через початок координат. У цьому випадку стала величина $C = 0$. Нехай початкова точка x_0 траєкторії лежить на цій параболі. Тоді система потрапляє в початок координат під дією тільки керування $u^0 = 1$.

Знайдемо час руху системи з урахуванням того, що $dx_2(t) = dt$. Для цього проінтегруємо друге рівняння:

$$T = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{x_2(t_0)}^{x_2(t_1)} dx_2(t) = x_2(t_1) - x_2(t_0) = -x_2(t_0) = -x_{20}.$$

б) $u^0 = -1$

Тоді система керування набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -1 \end{cases}.$$

Знайдемо, як і вище, залежність $x_1(t)$ від $x_2(t)$:

$$dx_2(t) = -dt \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dx_2(t)} = -x_2 \Rightarrow dx_1(t) = -x_2 dx_2(t).$$

Звідси маємо:

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + D,$$

де D – стала інтегрування.

Аналогічно отримали **сім'ю парабол**, серед яких є тільки одна, що проходить через початок координат у випадку, коли $D = 0$. Нехай початкова точка x_0 траєкторії вибрана на цій параболі. Тоді система потрапляє в початок координат під дією тільки керування $u^0 = -1$.

Знайдемо час руху системи:

$$T = - \int_{t_0}^{t_1} dt = - \int_{x_2(t_0)}^{x_2(t_1)} dx_2(t) = -x_2(t_1) + x_2(t_0) = x_2(t_0) = x_{20}.$$

Позначимо дуги, по яких система може потрапити в початок координат, через L_1 і L_{-1} для керувань $u^0 = 1$ і $u^0 = -1$ відповідно (рис. 6.1.). Очевидно, що при $x_0 \in L_1$ оптимальна траєкторія є частиною дуги L_1 , а у випадку $x_0 \in L_{-1}$ – частиною дуги L_{-1} . Напрямок руху за кривими – до початку координат.

Крива $L_{-1}L_1$ називається лінією перемикання. Лінія перемикання $L_{-1}L_1$ поділяє всю фазову площину на дві частини: $X_{-1}X_1$.

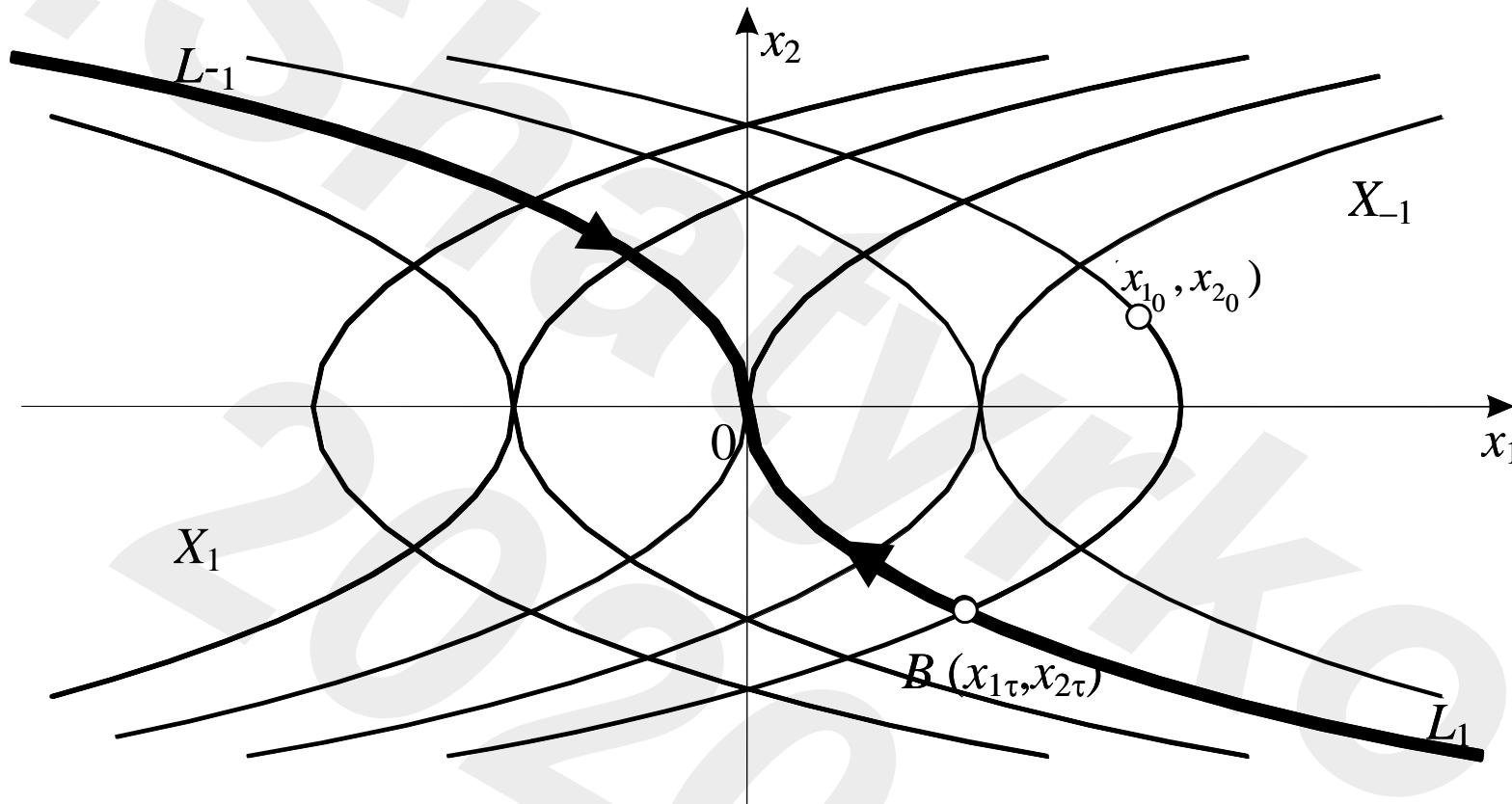
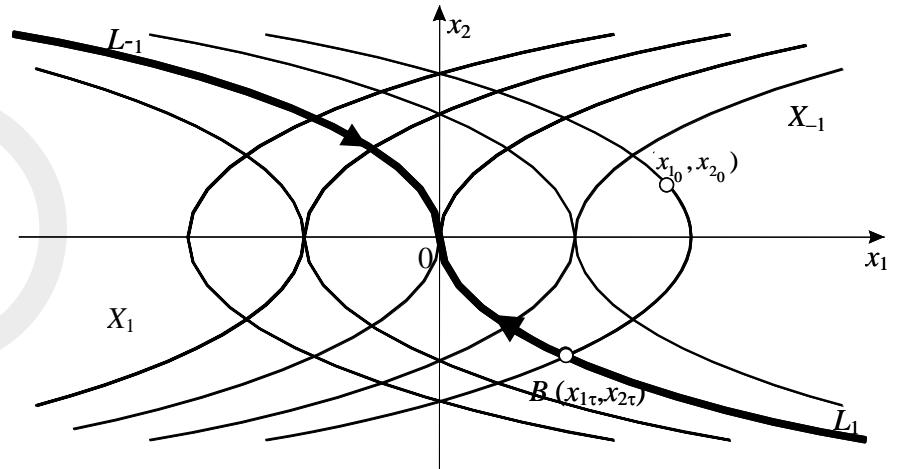


Рис. 6.1.

в) Нехай оптимальне керування змінюється з $u^0 = -1$ на $u^0 = 1$

Для цього випадку початкова точка буде належати частині X_{-1} фазової площини: $x_0 \in X_{-1}$

(див. рис. 6.1). Тоді траєкторія руху системи складається з двох частин: від x_0 до точки B під дією керування $u^0 = -1$ і від точки B до початку координат під дією керування $u^0 = 1$.



Рух від початкової точки x_0 до точки B буде проходити по параболі: $x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + D$.

Знайдемо сталу D за умови, що дана парабола проходить через точку $x_0 = (x_{10}, x_{20})^T$.

Маємо

$$x_{10} = -\frac{1}{2}x_{20}^2 + D \Rightarrow D = x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2.$$

Від точки B до початку координат система буде рухатись під дією керування $u^0 = 1$ по частині L_1 ліній перемикання $L_{-1}L_1$. У цьому випадку стала величина $C = 0$.

Знайдемо координати $(x_{1\tau}, x_{2\tau})$ точки B як точки перетину двох парабол:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 \\ x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 \end{cases}.$$

Отримаємо:

$$x_{1\tau} = \frac{1}{2}(x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2)$$

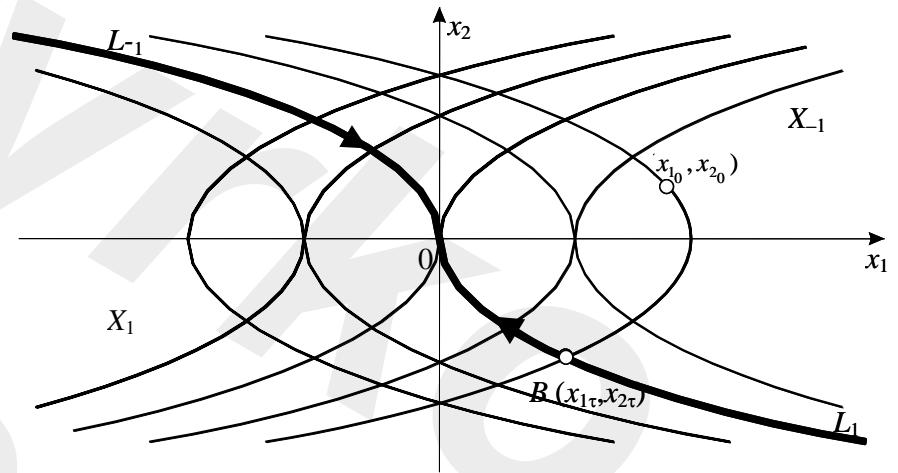
$$x_{2\tau} = -\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 + x_{10}}.$$

Знайдемо тепер час руху системи керування з початкової точки x_0 у початок координат.

Він буде складатися з часу руху з точки x_0 у точку B і з часу руху з точки B у початок координат.

Позначимо момент часу, в який система попадає в точку B , через τ .

Тоді загальний час руху системи буде дорівнювати:
 $(\tau - t_0) + (t_1 - \tau)$.



Знайдемо час руху системи з точки x_0 у точку B під дією керування $u^0 = -1$.

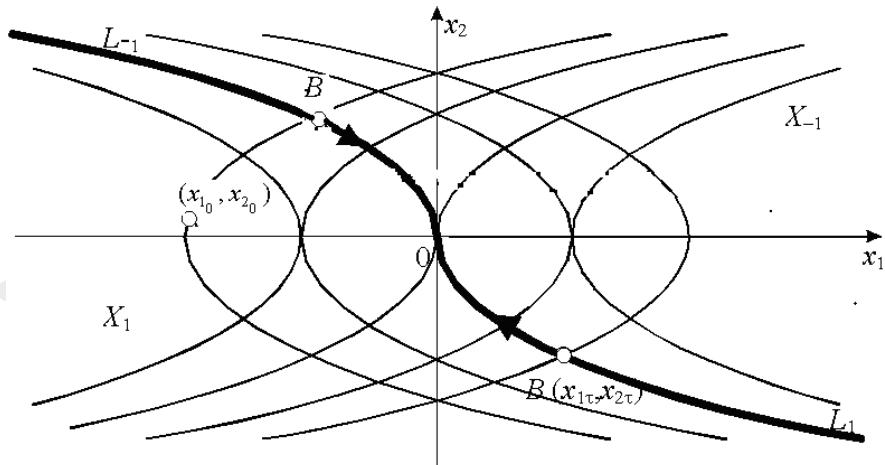
$$\int_{t_0}^{\tau} dt = \tau - t_0 = - \int_{x_2(t_0)}^{x_2(\tau)} dx_2(t) = x_{20} - x_{2\tau}.$$

Час руху системи від точки B у початок координат по частині L_1 лінії перемикання $L_{-1}L_1$ під дією керування $u^0 = 1$ буде:

$$t_1 - \tau = -x_{2\tau} = \sqrt{\frac{1}{2} x_{20}^2 + x_{10}}$$

Отже, загальний час руху системи з точки x_0 у початок координат для випадку, коли керування спочатку є $u^0 = -1$, а потім у точці B перемикається на $u^0 = 1$, буде

$$T = (\tau - t_0) + (t_1 - \tau) = x_{20} + 2\sqrt{\frac{1}{2} x_{20}^2 + x_{10}}.$$



г) Нехай оптимальне керування змінюється з $u^0 = 1$ на $u^0 = -1$.

Для цього випадку початкова точка буде належати частині X_1 фазової площини: $x_0 \in X_1$.

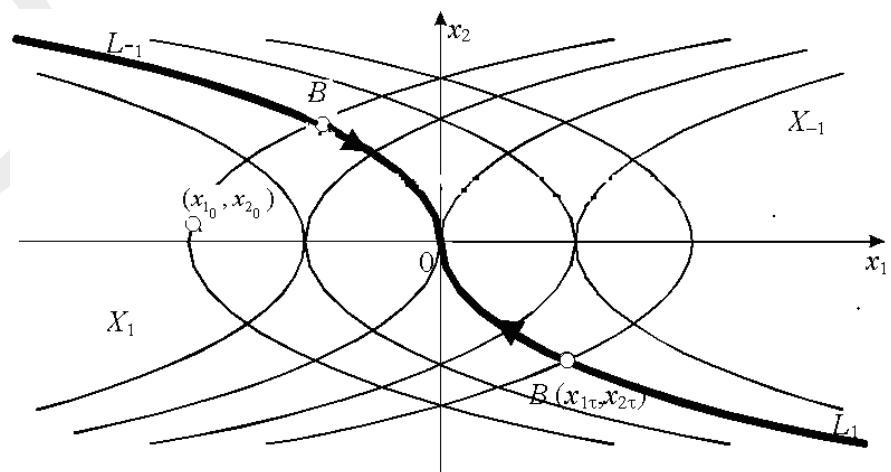
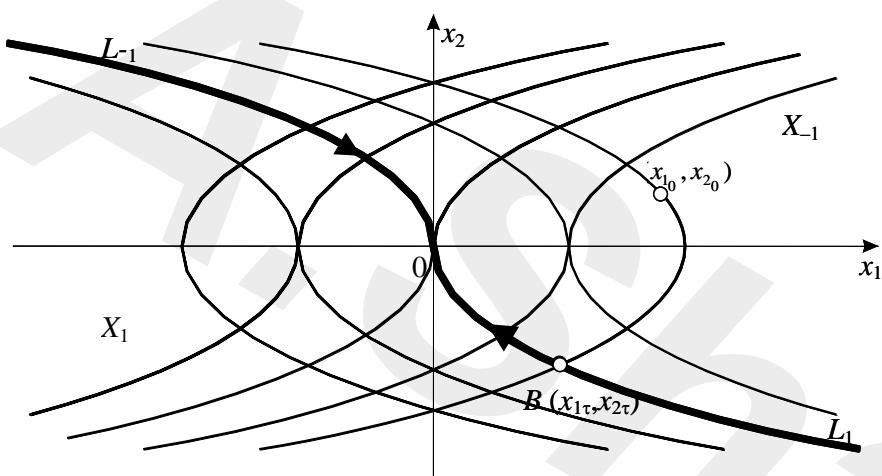
Тоді траєкторія руху системи складається з двох частин:

від точки x_0 – під дією керування $u^0 = 1$ – до точки перемикання,
і далі по дузі L_{-1} лінії перемикання – під дією керування $u^0 = -1$ – до початку координат.

Виконавши аналогічні пункту в) дії й перетворення, знайдемо час руху системи в цьому випадку:

$$T = -x_{20} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_{20}^2 - x_{10}}.$$

Таким чином, із розглянутих випадків випливає, що мінімальний час переводу системи із заданої точки x_0 у початок координат визначається лише координатами початкової точки траєкторії:



$$T = 2 \sqrt{\frac{1}{2} x_{20}^2 + x_{10}} + x_{20}, \quad x_0 \in X_{-1}$$

$$T = 2 \sqrt{\frac{1}{2} x_{20}^2 - x_{10}} - x_{20}, \quad x_0 \in X_1$$

Відзначимо, що **для лінійних систем керування принцип максимуму для задачі швидкодії є необхідною й достатньою умовами оптимальності.**

Отже, знайдені керування та траєкторія є оптимальними.