Норми векторів та матриць

Розглянемо СЛАР

$$Ax = b, \tag{1}$$

$$n \times n, detA \neq 0,$$
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

На практиці замість (1) маємо систему (2)

$$\overline{A}\overline{x} = \overline{b}, \tag{2}$$

тобто матрицю A та вектор b задано із деякою похибкою.

Важливо знати похибку, яка виникає при розв'язанні СЛАР:

$$\delta(x) = \frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|}$$

$||x||$ – норма в просторі H

1) $||x|| > 0$, якщо $x \neq 0$; $||0|| = 0$

2) $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$

3) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \qquad \forall x, y, \alpha \in H$

$$\|x\|_p = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leqslant p < \infty;\ \|x\|_\infty = \max_{j=\overline{1,n}} |x_j|$$

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

Зв'язок норм

$\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant n \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \quad \Rightarrow$

$\boxed{||x||_\infty \leqslant ||x||_1 \leqslant n||x||_\infty}$

Нехай $y = (1, 1, \cdots, 1)$

$$\left.\begin{array}{l}|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} \\ \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i| \leqslant (\sum\limits_{i=1}^{n}1)^{1/2}(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2} = n^{1/2}(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2)^{1/2} \Rightarrow \\ n^{-1/2}||x||_1 \leqslant ||x||_2 \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 \leqslant (\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|)^2 \Rightarrow ||x||_2 \leqslant ||x||_1^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{n^{-1/2}||x||_1 \leqslant ||x||_2 \leqslant ||x||_1^2}$$

Матрична $\|A\|_p$ та векторна $\|x\|_p$ норми називають узгодженими, якщо

$$\|Ax\|_p \leqslant \|A\|_p\|x\|_p$$

$$\|A\|_1 = \max_{k=\overline{1,n}}\sum_{j=1}^{n}|a_{jk}|,\ \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n}|x_j|,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(AA^*)},\ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2}$$

$\lambda_{max}(AA^*)$ – максимальне власне число матриці AA^*

$$\|A\|_\infty = \max_{j=\overline{1,n}}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|,\ \|x\|_\infty = \max_{j=\overline{1,n}}|x_j|$$

Розглянемо систему

$$A\overline{x} = \overline{b} \tag{3}$$

В (3) вектор правих частин заданий наближено. Оцінимо похибку, яка при цьому буде виникати

Із (1) маємо $x = A^{-1}b$

Із (3): $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$

Тоді

$$x - \overline{x} = A^{-1}(b - \overline{b})$$

$$\|x-\overline{x}\| = \|A^{-1}(b-\overline{b})\| \leqslant \|A^{-1}\|\|b-\overline{b}\|\frac{\|A\overline{x}\|}{\|A\overline{x}\|},\ \overline{b} = A\overline{x}$$

$$\delta(x) = \frac{\|x-\overline{x}\|}{\|x\|} \leqslant \|A^{-1}\|\|A\|\delta(b),$$

де величина $\nu(A) = cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$ називається числом обумовленості, це число є мірою невизначеності розв'язку (1) у разі неточних вихідних даних.

Розглянемо модель

$$\overline{A}\overline{x} = b,$$

тобто випадок, коли матриця A задана неточно.

В подальших викладках застосуємо матричну рівність:

$$C^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(B - C)C^{-1}$$

$$\overline{x} - x = (\overline{A}^{-1} - A^{-1})b = A^{-1}(A - \overline{A})\overline{A}^{-1}b = A^{-1}(A - \overline{A})\overline{x}$$

$$\|\overline{x} - x\| \leqslant \|A^{-1}\|\|A - \overline{A}\|\|\overline{x}\| \cdot \frac{\|A\|}{\|A\|}$$

$$\delta(x) = \frac{\|\overline{x} - x\|}{\|x\|} \leqslant cond(A)\frac{\|A - \overline{A}\|}{\|A\|} = cond(A)\delta(A)$$

Лема. *Якщо C – матриця розмірності $n \times n$ така, що $\|C\| < 1$, то існує матриця $(E + C)^{-1}$*, при цьому

$$\|(E + C)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|C\|}.$$

▲

$$\|(E + C)x\| = \|x + Cx\| \geqslant (1 - \|C\|)\|X\|.$$

Оскільки $1 - \|C\| > 0$. то $\|(E + C)x\| > 0$, якщо $x \neq 0$,

т.т. СЛАР $(E+C)x = 0$ має лише тривіальний розв'язок. Це означає, $\exists(E+C)^{-1}$.

$$1 = \|E\| = \|(E + C)(E + C)^{-1}\| = \|(E + C)^{-1} + C(E + C)^{-1}\| \geqslant$$

$$\geqslant \|(E + C)^{-1}\| - \|C\|\|(E + C)^{-1}\| = \|(E + C)^{-1}\|(1 - \|C\|) > 0$$

▼

Теорема. *Нехай A - невироджена $n \times n$ матриця, $\overline{A} = A + \Delta A$, при цьому*

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Тоді якщо x та $\overline{x} = x + \Delta x$ є розв язками систем $Ax = b$ та $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$, $\overline{b} = b + \Delta b$, то має місце оцінка

$$\delta(x) = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{cond(A)}{1 - cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

▲ Оскільки $\|A^{-1}\Delta A\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1$, то на підставі Леми $\exists (E + A^{-1}\Delta A)^{-1}$ та

$$\|(E + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \leqslant \frac{1}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}$$

$$A^{-1} \cdot \overline{A}\overline{x} = \overline{b}$$

$$A^{-1}\overline{A}\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$$
$$A^{-1}(A + \Delta A)\overline{x} = A^{-1}(b + \Delta b)$$

$$\overline{x} = x + \Delta x$$

$$(E + A^{-1}\Delta A)x + (E + A^{-1}\Delta A)\Delta x = A^{-1}b + A^{-1}\Delta b$$

$$\Delta x = (E + A^{-1}\Delta A)^{-1}(A^{-1}b + A^{-1}\Delta b - (E + A^{-1}\Delta A)x) =$$

$$= (E + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}(\Delta b - \Delta A x)\frac{Ax}{Ax},\ Ax = b,$$

Враховуючи, що

$$\|(E + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|},$$

дістанемо

$$\delta(x) = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\frac{\|A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right) \|A\|$$

Звідки і дістанемо шукану нерівність.

▼

Властивості числа обумовленості

1) $cond(A) \geqslant 1$

2) $cond(AB) \leqslant cond(A)cond(B)$

3) $cond(A) \geqslant \dfrac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$

4) $A^T = A^{-1} \Rightarrow cond(A) = 1$

Якщо $cond(A) >> 1$, то матриця називається погано обумовленою.

Приклад. Матриця Гільберта є прикладом погано обумовленої матриці:

$$H_n = (\frac{1}{i+j-1})_{i,j=1}^n$$

$$cond(H_8) \approx 10^9$$

Ітераційні методи

Метод простої ітерації

Розглянемо систему рівнянь

$$Ax = b \tag{4}$$

Подамо її у вигляді

$$x = Bx + c \tag{5}$$

На підставі формули (5) побудуємо ітераційний процес

$$x^{n+1} = Bx^n + c \tag{6}$$

Має місце:

Твердження. Будь-яка система

$$x = x - D(Ax - b) \tag{7}$$

має вигляд (5) та за умови $detD \neq 0$ еквівалентна системі (4).
Система (5), що еквівалентна (4) має вигляд (7) з матрицею

$$D = (E - B)A^{-1}.$$

Теорема. *Якщо*

$$\|B\| \leqslant q < 1,$$

то система (5) має єдиний розв'язок, а ітераційний процес (6) збігається до розв'язку із швидкістю збіжності геометричної прогресії із знаменником, що дорівнює q.

▲
Для будь-якого розв'язку (5) маємо

$$\|x\| \leqslant \|B\|\|x\| + \|c\|$$

Тому

$$\|x\|(1 - \|B\|) \leqslant \|c\|$$

чи

$$\|x\| \leqslant (1 - \|B\|)^{-1}\|c\|$$

Отже існує розв'язок однорідної системи $x = Bx$, відповідно і системи (5).
Нехай x^* – точний розв'язок системи (5).
Позначимо похибку на кроці

$$r^n = x^n - x^*,$$

одержимо:

$$x^{n+1} = r^{n+1} + x^*,\ x^n = r^n + x^*$$

та підставимо в (6)

$$r^{n+1} + x^* = B(r^n + x^*) + c,$$

$$r^{n+1} + x^* = Br^n + Bx^* + c,$$

враховуючи, що

$$x^* = Bx^* + c$$

,

дістанемо

$$r^{n+1} = Br^n$$

чи

$$r^n = B^n r^0$$

Звідси випливає, що

$$\|r^n\| \leqslant \|B\|^n \|r^0\| \to 0$$

▼

$$s_n = \sup_{x^0 \neq x^*} \frac{\|r^n\|}{\|r^0\|} = \sup_{r^0 \neq 0} \frac{\|B^n r^0\|}{\|r^0\|} = \|B^n\|$$

$$s_n \leqslant \varepsilon$$

$$\|B\|^n \leqslant \varepsilon$$

$$n \geqslant n_0(\varepsilon) = \left[\frac{ln(\varepsilon^{-1})}{ln(\|B\|^{-1})}\right] + 1$$

Теорема про необхідні та достатні умови збіжності методу простої ітерації.

Нехай система

$$x = Bx + c$$

має єдиний розв'язок. Ітераційний процес

$$x^{n+1} = Bx^n + c, \ \ n = 0, 1, \dots$$

збігається до розв'язку системи при будь-якому початковому наближенні тоді і тільки тоді, коли всі власні значення матриці B за модулем менше за одиницю.

$$B = (a_{ij})_{i,j=1}^n$$

$$\forall x^0 \qquad \lim_{k\to\infty} ||x^k - x^*|| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\lambda| < 1$$

Метод Якобі

$$Ax = b$$

$$a_{ii} \neq 0$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = b_i, \ i = \overline{1,n}$$

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \ \ i = \overline{1,n}$$

Початкове наближення: $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$

Ітераційний процес:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$$

$$x^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_n^{k+1})$$

Достатня умова збіжності:

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i : i = \overline{1, n}$$

Якщо виконується нерівність:

$$q|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \ i = \overline{1, n}, \ q < 1,$$

то має місце оцінка

$$\|x^k - x^*\| \leqslant \frac{q^k}{1-q} \|x^0 - x^1\|$$

Умова припинення: $||x^n - x^{n-1}|| \leqslant \varepsilon$

чи

$$\frac{q^k}{1-q} < \varepsilon$$

Вибір останньої умови пояснюється тим, що в разі її виконання для $x = 0$ маємо оцінку

$$\delta(x) \leqslant \frac{\|x^k - x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{q^k}{1-q} < \varepsilon$$

Необхідні і достатні умови збіжності

Подамо матрицю A у вигляді

$$A = A_1 + D + A_2,$$

де

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \ A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

Ітераційний процес методу Якобі можемо записати у матричному вигляді

$$Dx^{k+1} = -A_1 x^k - A_2 x^k + b$$

чи

$$x^{k+1} = -D^{-1}A_1 x^k - D^{-1}A_2 x^k + D^{-1}b$$

$$x^{k+1} = -D^{-1}(A_1 + A_2)x^k + D^{-1}b$$

Ітераційний процес методу простої ітерації має вигляд: $x^{k+1} = Bx^k + c$. Порівняємо його з ітераційним процесом методу Якобі. Маємо:

$$B = -D^{-1}(A_1 + A_2).$$

Отже, метод Якобі - частинний випадок методу простої ітерації (МПІ). Застосуємо теорему про необхідні та достатні умови збіжності МПІ. Отримаємо:

$$det(B - \lambda E) = 0$$

$$det(-D^{-1}(A_1 + A_2) - \lambda E) = 0$$

$$det(-(A_1 + A_2) - \lambda D) = 0$$

$$det(A_1 + A_2 + \lambda D) = 0$$

Теорема про необхідні та достатні умови збіжності методу Якобі.

$$\forall x^0 \quad \lim_{k\to\infty} ||x^k_я - x^*|| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\lambda| < 1$$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Приклад

Зробити один крок методом Якобі для розв'язання системи рівнянь з точністю $0,5$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 = 1,75 \\ x_1 + 0,5x_2 + 3x_3 = 2,5 \end{cases}$$

Розв'язок

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 & 1,75 \\ 1 & 0,5 & 3 & 2,5 \end{array}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} |3| \geqslant |-1| + |1| \\ |2| \geqslant |-1| + |0,5| \\ |3| \geqslant |1| + |0,5| \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ метод Якобі збігається

$$x_1 = \frac{1}{3}(x_2 - x_3 + 1)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 - 0,5x_3 + 1,75)$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(-x_1 - 0,5x_2 + 2,5)$$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{3}(x_2^k - x_3^k + 1)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{2}(x_1^k - 0,5x_3^k + 1,75)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{3}(-x_1^k - 0,5x_2^k + 2,5)$$

Розв'язок

Крок 1

$x^0 = (0;0;0)^T$

$x_1^1 = 1/3 \cdot (0 - 0 + 1) = 0,33$

$x_2^1 = 1/2 \cdot (0 - 0,5 \cdot 0 + 1,75) = 0,88$

$x_3^1 = 1/3 \cdot (-0 - 0,5 \cdot 0 + 2,5) = 0,83$

$||x^1 - x^0|| = ||(0,33;0,88;0,83)^T - (0;0;0)^T||_\infty =$

$$= 0,88 > \varepsilon$$

Приклад

Знайти область збіжності методу Якобі для СЛАР із матрицею

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Приклад

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \beta & 0 \\ \beta & \lambda\alpha & \beta \\ 0 & \beta & \lambda\alpha \end{vmatrix} = \lambda\alpha(\lambda^2\alpha^2 - \beta^2) - \beta(\beta\lambda\alpha - 0) = 0$$

$$\lambda^3\alpha^3 - \lambda\alpha\beta^2 - \lambda\alpha\beta^2 = \lambda\alpha(\lambda^2\alpha^2 - 2\beta^2) = 0$$

$$\lambda\alpha \neq 0 \Rightarrow \lambda^2\alpha^2 - 2\beta^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}\beta}{\alpha} \qquad |\lambda| < 1 \Rightarrow \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Метод Зейделя

$$Ax = b$$

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1,n}$$

Ітераційний процес: $x_i^{k+1} = -\sum\limits_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \; i = \overline{1,n}, \; k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Змінивши порядок обчислення компонент, отримаємо ще одну формулу ітераційного процесу для методу Зейделя

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Достатні умови збіжності такі ж самі як і для методу Якобі:

$$1) \; |a_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i : i = \overline{1,n}$$

Якщо матриця A близька до діагональної, то метод Зейделя збігається швидше.

Необхідні і достатні умови збіжності

Матрицю A розкладемо на суму

$$A = A_1 + D + A_2$$

де

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \; A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

Тоді ітераційний процес методу Зейделя має вигляд:

$$(A_2 + D)x^{k+1} = -A_1 x^k + b$$

або

$$x^{k+1} = -(A_2 + D)^{-1} A_1 x^k + (A_2 + D)^{-1} b$$

Ітераційний процес МПІ: $x^{k+1} = Bx^k + c$. Отже в цьому випадку

$$B = (A_2 + D)^{-1} A_1.$$

Метод Зейделя є частинним випадком МПІ. Застосуємо теорему про необхідні та достатні умови збіжності методу простох ітерації. Маємо:

$$det(B - \lambda E) = 0$$

$$det(-(A_2 + D)^{-1} A_1 - \lambda E) = 0$$

$$det(A_1 + \lambda A_2 + \lambda D) = 0$$

Теорема про необхідні та достатні умови збіжності методу Зейделя.

$\forall x^0 \quad \lim\limits_{k\to\infty} ||x_я^k - x^*|| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & ... & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\lambda| < 1$$

Теорема.

Нехай A дійсна симетрична додатньовизначена матриця ($A = A^T > 0$). Тоді метод Зейделя збігаєтьяс.

▲

Нехай $A = A^T$. Маємо

$$F(y) = (A(y - x), y - x) - (Ax, x) = (Ay, y) - 2(Ax, y) = (Ay, y) - 2(b, y)$$

Якщо

$$A > 0,$$

то

$$(A(y - x), y - x) > 0,$$

коли $y \neq x$. Тому $F(y)$ має єдиний мінімум, коли $y = x$.

Задача $Ax = b$ та задача пошуку мінімуму $F(y)$ еквівалентні.

Метод покоординатного спуску:

Нехай $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – наближення до точки екстремуму $F(y) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Розглянемо

$$F(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

та знайдемо т. x_1^1. Потім за наближення обираємо $(x_1^1, x_2^0, \dots, x_n^0)$ та знаходимо мінімум

$$F(x_1^1, x_2, x_3^0 \dots, x_n^0).$$

Процес циклічно повторюється. При уточненні компоненти x_k відбувається зміщення по прямій, що паралельна вісі x_k до точки з найменшим на цій прямій значенням....

Позначимо $F(y) + (Ax, x) = (A(y - x), y - x) = F_0(y)$.

При мінімізації за змінною x_k відбувається зміщення до точки, де

$$F'_{x_k} = 0$$

.

Отже нове значення x_k визначаємо із рівняння

$$F'_{x_k} = 2(\sum_{j=1}^{m} a_{kj}x_j - b_k) = 0$$

(Маємо систему $Ax = b$)

Якщо $x^n \neq x^*$, то хоча б одне рівняння системи не виконується та

$$F'_{x_k}(x^n) \neq 0$$

.

Оберемо серед таких k найменше.

Тоді при уточненні компонент $x_1, \dots, x_{k-1}$ – залишаємось в т. x^n, а при уточненні компоненти x_k відбувається зміщення в сторону менших значень $F(x)$.

При уточненні решти компонент значення $F(x)$ не збільшується, т.ч.

$$F(x^{n+1}) < F(x^n)$$

$$F_0(x^{n+1}) < F_0(x^n)$$

Тому

$$\frac{F_0(x^{n+1})}{F_0(x^n)} < 1,\ x^n \neq x^*$$

Розглянемо похибку $r^{n+1} = Br^n$

Останню нерівність перепишемо у вигляду

$$\varphi(r^n) = \frac{(ABr^n, Br^n)}{(Ar^n, r^n)} < 1,\ r^n \neq 0,\ B = -(A_2 + D)^{-1}A_1$$

На сфері $\|r^n\|_2 = 1$ величина $\varphi(r^n)$ – неперервна, тому досягає свого найбільшого значення φ_0. Оскільки

$$A > 0,$$

то

$$\varphi(r^n) > 0.$$

Покладемо

$$\sqrt{\varphi_0} = \lambda, \ \lambda^2 < 1.$$

Очевидно, що

$$\varphi(cr^n) = \varphi(r^n), \ c \in R^1, \ c \neq 0,$$

тому

$$\varphi(r^n) = \varphi(r^n/\|r^n\|_2) \leqslant \lambda^2.$$

Дістанемо

$$\frac{F_0(x^{n+1})}{F_0(x^n)} \leqslant \lambda^2$$

$$F_0(x^n) \leqslant \lambda^{2n} F_0(x^0).$$

$$F_0(y) = (A(x-y), (x-y))$$

Отже

$$\min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)\|y-x\|_2^2 \leqslant F_0(y) \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)\|y-x\|_2^2,$$

дістанемо оцінку швидкості збіжності

$$\|x^n - x\| \leqslant \sqrt{\frac{F_0(x^n)}{\min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)}} \leqslant \lambda^n \sqrt{\frac{F_0(x^0)}{\min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)}} \leqslant \sqrt{\frac{\max_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)}{\min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)}} \|x^0 - x\|_2.$$

▼

Приклад

Зробити один крок методом Зейделя для розв'язання системи рівнянь з точністю $0,5$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 = 1,75 \\ x_1 + 0,5x_2 + 3x_3 = 2,5 \end{cases}$$

Розв'язок

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 & 1,75 \\ 1 & 0,5 & 3 & 2,5 \end{array}\right)$$

$1)A = A^T$

$2)Det(3) = 3 > 0$ $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0$ $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 3 \end{vmatrix} = 11,25 > 0$

$\Rightarrow$ метод Зейделя збігається

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{3}(x_2^k - x_3^k + 1)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{2}(x_1^{k+1} - 0,5x_3^k + 1,75)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{3}(-x_1^{k+1} - 0,5x_2^{k+1} + 2,5)$$

Крок 1

$x^0 = (0;0;0)^T$

$x_1^1 = 1/3 \cdot (0 - 0 + 1) = 0,33$

$x_2^1 = 1/2 \cdot (0,33 - 0,5 \cdot 0 + 1,75) = 1,04$

$x_3^1 = 1/3 \cdot (-0,33 - 0,5 \cdot 1,04 + 2,5) = 0,55$

$$||x^1 - x^0|| = ||(0,33;1,04;0,55)^T - (0;0;0)^T||_\infty =$$
$$= 1,04 > \varepsilon$$