1453. $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$

$f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$

$f_3 = e_1 + 7e_2 + 2e_3$

$B = T^{-1}AT$, де T – м. п. $e \to f$

$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (T|E) \overset{\text{е.п.р.}}{\sim} (E|T^{-1})$

$(T|A) \overset{\text{е.п.р.}}{\sim} (E|T^{-1}A)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 15 & -11 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 20 & -15 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & -7 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 8 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 6 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 8 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$B = (T^{-1}A)T = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 12 \\ -3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1456. Розглянемо лін. перетворення одновимірного простору, яке перетворює вектор x у вектор φx

$\varphi(x) = \alpha x$, де α - деяке число

Перевіримо, що $\forall\, x, y : \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

Таким чином, лін. перетворення $\varphi(x)$ має вигляд

$\varphi(x) = \alpha x$ для будь-якого вектора.

1458. φ, ψ - лін. пер.

$a_1 = (-3, 7)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$a_2 = (1, -2)$

$b_1 = (6, -7)$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$b_2 = (-5, 6)$

$E = C \cdot D = [\varphi]_e \cdot [\psi]_e$

$C = [\varphi]_e = T^{-1} A T$, де T - м. пр. $a \to e$

$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$ T

$T^{-1} A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$D = [\psi]_e = T^{-1} B T$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -5 & 1 & 0 \\ -7 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \end{array}\right)$ T

$D = \begin{pmatrix} -143 & -722 \\ 177 & 151 \end{pmatrix}$

$C \cdot D = \begin{pmatrix} 286 & 244 \\ -674 & -595 \end{pmatrix}$

$\forall f, g, h \in V$, де f, g, h – лін. пер., V – n-вимірний простір

1461. 1) $\cancel{(f+g)+h = f+(g+h)}$ $f+g=g+f$

2) $\cancel{f+g=g+f}$ $(f+g)+h = f+(g+h)$

3) $f+0=f$

4) $f+(-f)=0$

1) Нехай f і g – лін. пер. n-вимірного простору, α – довільні числа

Тоді $(f+g)(\alpha) = f(\alpha)+g(\alpha)$ і $(g+f)(\alpha) = g(\alpha)+f(\alpha)$

Оскільки додавання ф-цій комутативне, маємо $(f+g)(\alpha) = g(\alpha)+f(\alpha) \Rightarrow f+g=g+f$ $\square$

2) Нехай f, g і h – лін. пер. n-вимірного простору, α – довільне число

Тоді $((f+g)+h)(\alpha) = (f+g)(\alpha)+h(\alpha) = (f(\alpha)+g(\alpha))+h(\alpha)$,

$(f+(g+h))(\alpha) = f(\alpha)+(g+h)(\alpha) = f(\alpha)+(g(\alpha)+h(\alpha))$

Оскільки додавання чисел і функцій асоціативне, маємо $((f+g)+h)(\alpha) = f(\alpha)+(g(\alpha)+h(\alpha)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (f+g)+h = f+(g+h)$ $\square$

3) Для довільного f – лін. пер. та α – числа маємо

$(f+0)(\alpha) = f(\alpha)+0(\alpha) = f(\alpha)$

$(0+f)(\alpha) = 0(\alpha)+f(\alpha) = f(\alpha)$

$\Rightarrow f+0=f$ $\square$

4) Для довільного f - лін. пер. та α - число маємо

$(f-f)(\alpha) = (f+(-f))(\alpha) = 0(\alpha)$

$\Rightarrow f - f = 0 \;\square$

Таким чином, лін. пер. n-вимірного простору утворюють векторний простір.

Розмірність цього простору дорівнює n^2, так як кожне лін. пер. може бути представлене матрицею $n \times n$ і всі можливі матриці лін. пер. утворюють простір розмірності n^2.