328. $$\begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & x_3 & \dots & a_3b_n \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & x_n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(x_k - a_kb_k)\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_kb_k}{x_k}\right)\right)$$

331. $$\begin{vmatrix} (x+a_1)^n & (x+a_1)^{n-1} & \dots & x+a_1 & 1 \\ (x+a_2)^n & (x+a_2)^{n-1} & \dots & x+a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x+a_{n+1})^n & (x+a_{n+1})^{n-1} & \dots & x+a_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n+1}(a_i - a_j)$$

332. $$\begin{vmatrix} 1 & \sin\varphi_1 & \sin^2\varphi_1 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_1 \\ 1 & \sin\varphi_2 & \sin^2\varphi_2 & \dots & \sin^{n-1}\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sin\varphi_n & \sin^2\varphi_n & \dots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{n \ge i > j \ge 1}\left(\cos\frac{\varphi_i+\varphi_j}{2}\sin\frac{\varphi_i-\varphi_j}{2}\right)$$

334. $$\begin{vmatrix} 1 & q_1(x_1) & q_2(x_1) & \dots & q_{n-1}(x_1) \\ 1 & q_1(x_2) & q_2(x_2) & \dots & q_{n-1}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q_1(x_n) & q_2(x_n) & \dots & q_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & q_2(x_1) & \dots & q_{n-1}(x_1) \\ 1 & x_2 & q_2(x_2) & \dots & q_{n-1}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & q_2(x_n) & \dots & q_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} + \textcircled{=}$$

где $q_k(x) = x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \dots + a_{kk}$

$$\textcircled{=} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1}(x_i - x_j)$$

337. $$\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \end{vmatrix} =$$

(n-1 — число инверсий)

$$= (-1)(-1)(-2)(-1)(-2)(-3)\dots(-1)(-2)\dots(-n) =$$

$$= (-1)^n \cdot 1!\,2!\dots n!$$

556. $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 4 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 2 & 10 & 9 & 4 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -21 \\ -21 \\ -31 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 18 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +4II \\ +II \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ -2III \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ +3\text{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\text{IV}/3 \\ -\text{IV}/3 \\ +\text{IV}/3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\text{III} \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3\text{II} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 0 \end{array}$$

5Еб. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 1 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 5 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -8 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -8 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -4\text{I} \\ -3\text{I} \\ -2\text{I} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & -9 & -3 & 11 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 9 & -4 \\ 0 & 7 & 6 & -2 & -13 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +\text{IV} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 9 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 9 & -4 \\ 0 & 7 & 6 & -2 & -13 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ +2\text{II} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 10 & 27 & 12 \\ 0 & 7 & 6 & -2 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 10 & 27 & 12 \\ 0 & -2 & 3 & 9 & 8 \\ 0 & 7 & 6 & -2 & -13 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +2\text{II} \\ -7\text{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 10 & 27 & 12 \\ 0 & 0 & 23 & 63 & 32 \\ 0 & 0 & -64 & -191 & -97 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ +13\text{III} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 10 & 27 & 12 \\ 0 & 0 & 23 & 63 & 32 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ +4\text{III} \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 10 & 27 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 71 & 36 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ -2\text{III} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 10 & 27 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 111 & 23 \\ 0 & 0 & 5 & 34 & 36 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ -3\text{III} \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&-2&3&3\\0&1&10&22&12\\0&0&1&144&93\\0&0&0&-361&-183\end{pmatrix}$$

$x_1 = 2$
$x_2 = 1$
$x_3 = -3$
$x_4 = 1$

570. $\begin{cases}x_1+x_2-6x_3-4x_4=2\\3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2\\2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6\\3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}1&1&-6&-4&2\\3&-1&-6&-4&2\\2&3&9&2&6\\3&2&3&8&-7\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-31\\-21\\-31\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-6&-4&2\\0&-4&12&8&-4\\0&1&21&10&2\\0&-1&21&20&-13\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\+III\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-6&-4&2\\0&1&21&10&2\\0&0&75&38&2\\0&0&42&30&-11\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\-2IV\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-6&-4&2\\0&1&21&10&2\\0&0&-9&-22&24\\0&0&42&30&-11\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\+4III\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-6&-4&2\\0&1&21&10&2\\0&0&-9&-22&24\\0&0&6&-58&85\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\+IV\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-6&-4&2\\0&1&21&10&2\\0&0&-3&-80&109\\0&0&6&-58&85\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\+2III\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-6&-4&2\\0&1&21&10&2\\0&0&3&80&-109\\0&0&0&218&194\end{pmatrix}$$

$x_1 = 0 \quad x_3 = 1/3$
$x_2 = 2 \quad x_4 = -3/2$

575. $\begin{cases}6x_1+6x_2+5x_3+18x_4+20x_5=14\\10x_1+9x_2+7x_3+24x_4+30x_5=18\\12x_1+12x_2+13x_3+27x_4+35x_5=22\\8x_1+6x_2+6x_3+15x_4+20x_5=16\\4x_1+5x_2+4x_3+15x_4+15x_5=11\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}6&6&5&18&20&14\\10&9&7&24&30&18\\12&12&13&27&35&22\\8&6&6&15&20&16\\4&5&4&15&15&11\end{pmatrix}\begin{matrix}-IV\\\\\\\\\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&1&3&5&3\\10&9&7&24&30&18\\12&12&13&27&35&22\\8&6&6&15&20&16\\4&5&4&15&15&11\end{pmatrix}\begin{matrix}-5I\\-6I\\-4I\\-2I\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&1&3&5&3\\0&4&2&9&5&3\\0&6&7&9&5&14\\0&2&2&3&0&4\\0&3&2&9&5&5\end{pmatrix}\begin{matrix}-II\\-II\\\\\\\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&1&1&3&5&3\\0&1&0&0&0&-2\\0&3&5&0&0&9\\0&2&2&3&0&4\\0&3&2&9&5&5\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\-3II\\-2II\\-3II\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&1&3&5&3\\0&1&0&0&0&-2\\0&0&5&0&0&15\\0&0&2&3&0&8\\0&0&2&9&5&9\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\:5\\\\\\\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&1&3&5&3\\0&1&0&0&0&-2\\0&0&1&0&0&3\\0&0&2&3&0&8\\0&0&2&9&5&9\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\-2III\\-2III\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&1&3&5&3\\0&1&0&0&0&-2\\0&0&1&0&0&3\\0&0&0&3&0&2\\0&0&0&9&5&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\\\-3III\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&1&1&3&5&3\\0&1&0&0&0&-2\\0&0&1&0&0&3\\0&0&0&3&0&2\\0&0&0&0&5&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&-2\\0&0&1&0&0&3\\0&0&0&3&0&2\\0&0&0&0&5&-1\end{pmatrix}$$

$x_1 = \frac{1}{2}$
$x_2 = -2$
$x_3 = 3$
$x_4 = \frac{2}{3}$
$x_5 = -\frac{1}{5}$