Варіант 27

1. Знайти похибки при наближеному обчисленні функції $f(x, y) = \ln x + y^2$, якщо $x = 0.925$, $y = 1.123$ і відомо, що аргументи мають дві правильні цифри.

2. За яку кількість кроків можна знайти найменший корінь нелінійного рівняння

$$\operatorname{sh} x - 12 \operatorname{th} x - 0.311 = 0$$

методом дихотомії з точністю $\varepsilon = 0,001$.

3. Зробити дві ітерації методом Якобі для знаходження розв'язку

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Перевірити умову припинення, $\varepsilon = 0.01$. Перевірити достатню умову збіжності.

4. За допомогою інтерполяції (Ньютона) обчислити $e^{0.15}$ та оцінити похибку, якщо

x	0	0.1	0.2
y	1	1.10517	1.22140

5. За допомогою рядів Тейлора показати, що для вузлів x_0, x_1, x_2:

$$\left| f'(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} \right| \leqslant \frac{h^2 f'''(\xi)}{6}$$

Варіант 27

1. $f(x,y) = \ln x + y^2$, $x = 0{,}925$, $y = 1{,}123$

$\Delta x = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$, $\Delta y = 0{,}5 \cdot 10^{-1}$

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \approx 1{,}081; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2y \approx 2{,}246$$

$$\Delta f = |1{,}081| \cdot 0{,}005 + |2{,}246| \cdot 0{,}05 \approx 0{,}118$$

2. $\operatorname{sh} x - 12 \operatorname{th} x - 0{,}311 = 0, \quad \varepsilon = 0{,}001$

Нехай, $a = -3$, $b = -2$, тоді:

$$\left.\begin{aligned} f(-4) &= \operatorname{sh}(-4) - 12 \operatorname{th}(-4) - 0{,}311 \approx -15{,}6 \\ f(-3) &= \operatorname{sh}(-3) - 12 \operatorname{th}(-3) - 0{,}311 \approx 1{,}6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-4) f(-3) < 0 \Rightarrow x^* \in [-4; -3]$$

$$n \geq \left[\log_2 \frac{-3+4}{0{,}001}\right] = [9{,}96578] = 9$$

3. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ $\varepsilon = 0,01$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -8 & 1 & -2 \end{array}\right)$ $|6| \geq |1| + |3|$; $|6| \geq |0| + |-1|$; $|-8| \geq |3| + |1|$ $\Rightarrow$ метод Якобі збіжний

$x_1 = -6x_2 - 3x_3$ $\quad$ $x_1^{k+1} = -6x_2^k - 3x_3^k$

$x_2 = \frac{1}{8}(3x_1 + x_3 + 2)$ $\quad$ $x_2^{k+1} = \frac{1}{8}(3x_1^k + x_3^k + 2)$

$x_3 = 6x_1 - 2$ $\quad$ $x_3^{k+1} = 6x_1^k - 2$

Крок 1

$x^0 = (0;0;0)^T$

$x_1^1 = 0$

$x_2^1 = 0,25$

$x_3^1 = -2$

$\|x^1 - x^0\| = \|(0;0,25;-2)^T - (0;0;0)^T\|_\infty = 2 > \varepsilon$

Крок 2

$x_1^2 = -6 \cdot 0,25 - 3 \cdot (-2) = 4,5$

$x_2^2 = \frac{1}{8}(3 \cdot 0 + \cancel{(-2)+2}) = 0$

$x_3^2 = 6 \cdot 0 - 2 = -2$

$\|x^2 - x^1\| = \|(4,5;0;-2)^T - (0;0,25;-2)^T\| = 4,5 > \varepsilon$

4. $e^{0,15}$

x	0	0,1	0,2
y	1	1,10517	1,22140

k	x_k	$f(x_k)$	р.р. I п.	р.р. II п.
0	0	$\boxed{1}$	$\frac{1,10517-1}{0,1-0} = \boxed{1,0517}$	$\frac{1,1623-1,0517}{0,2-0} = \boxed{0,553}$
1	0,1	1,10517	$\frac{1,2214-1,10517}{0,2-0,1} = 1,1623$	
2	0,2	1,22140		

$$P_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x-x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x-x_0)(x-x_1) =$$

$$= 1 + 1,0517x + 0,553x(x-0,1) =$$

$$= 0,553x^2 + 0,9964x + 1$$

$$f(0,15) = 0,553 \cdot (0,15)^2 + 0,9964 \cdot 0,15 + 1 \approx 1,162$$

$$M_3 = \max_{x \in [0;0,2]} |(e^x)'''| = e^x \approx 1,162$$

$$|f(0,15) - P_2(0,15)| \leq \frac{M_3}{3!} |(0,15-x_0)(0,15-x_1)(0,15-x_2)| =$$

$$= \frac{1,162}{6} |(0,15-0)(0,15-0,1)(0,15-0,2)| \approx 7,26 \cdot 10^{-5}$$

5. $\left| f'(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} \right| \le \frac{h^2 f'''(\xi)}{6}$

$$= f'(x_1) - \frac{1}{2h}\Big(\cancel{f_1} + \cancel{h f_1'} + \cancel{\frac{h^2}{2} f_1''} + \frac{h^3}{6} f_1'''(\xi) -$$

$$\cancel{-f_1} - h f_1' + \cancel{\frac{h^2}{2} f_1''} - \frac{h^3}{6} f_1'''(\xi)\Big)\Big|$$

$$= f'(x_1) - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$