Контрольна робота з алгебри та геометрії
студента 1 курсу ФКНК група 1КС-11
Вербицького Артема

Варіант 3

1. Лінійні оператори простої структури

Будемо вважати, що всі оператори діють на скінчено вимірному векторному просторі V над полем F і $\dim = n$.

Озн. Лінійний оператор A на векторному просторі V називається оператором простої структури, якщо простір є прямою сумою підпросторів розмірності 1, інваріантних відносно оператора A.

$V = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$, $\dim M_i = 1$, $i = \overline{1, n}$.

Озн. Квадратна матриця $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ називається діагональною, якщо $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$.

Іншими словами, всі ненульові елементи діагональної матриці стоять на головній діагоналі.

Теорема. Для оператора A на скінчено вимірному просторі V наступні умови еквівалентні:

1) Оператор A є оператором простої структури;

2) У просторі $\exists$ базис, який складається з власних векторів оператора A;

3) У просторі $\exists$ базис, у якому оператору A відповідає діагональна матриця.

Достатня умова оператора простої структури

Теорема. Нехай A — лінійний оператор на скінченновимірному просторі V над полем F, всі корені його характеристичного многочлена $\chi(A)$ різні й належать полю F. Тоді оператор A є оператором простої структури.

Критерії оператора простої структури

Теорема 1. (Критерій 1) Лінійний оператор A на векторному просторі V над полем F є оператором простої структури $\Leftrightarrow$

1) всі корені його характеристичного многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ належать полю F;

2) розмірність кожного підпростору L_{λ_i}, $i=\overline{1,s}$ дорівнює кратності відповідного власного числа як кореня характеристичного многочлена.

Теорема 2. (Критерій 2) Лінійний оператор A на векторному просторі V над полем F є оператором простої структури $\Leftrightarrow$

1) всі корені його характеристичного многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ належать полю F;

2) простір $V = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus L_{\lambda_s}$.

2. $a_1 = (1, 1, 0, 0)$ $\quad b_1 = (1, 0, 1, 0)$

$a_2 = (0, 1, 1, 0)$ $\quad b_2 = (0, 2, 1, 1)$

$a_3 = (0, 0, 1, 1)$ $\quad b_3 = (1, 2, 1, 2)$

$L_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ $\quad L_2 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} - \dim L_1 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim L_2 = 3$$

$$(a_1|a_2|a_3|b_1|b_2|b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{a_1, a_2, a_3, b_1 - \text{базис } L_1 + L_2}$

Нехай $x \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow x \in L_1,\ x \in L_2$

$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3$

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 - \beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 - \beta_3 b_3 = 0$

$$(a_1|a_2|a_3|b_1|b_2|b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ФСР:

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
1	1	1	-1	-1	0
2	0	2	-1	0	-1

$X_1 = a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 = (1, 2, 2, 1)$

$X_2 = 2a_1 + 2a_3 = b_1 + b_3 = (2, 2, 2, 2)$

$\Big\}$ базис $L_1 \cap L_2$

3. $a_1=(2,1,1)$ $\quad b_1=(1,2,3)$
$a_2=(3,1,-1)$ $\quad b_2=(0,1,1)$
$a_3=(3,1,0)$ $\quad b_3=(1,1,3)$
задані в б. $\langle e_1,e_2,e_3\rangle = e$

$$(a_1|a_2|a_3|E) \overset{е.п.р.}{\sim} (E|A^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ rank $A=3 \Rightarrow a_1,a_2,a_3$ – лін. нез., отже утворює базис в $\mathbb{R}_3$

Тому за лемою $\exists!\ \varphi$ – лін. перетворення $\mathbb{R}_3$: $\varphi(a_i)=b_i$, $i=\overline{1,3}$

A = матриця переходу $e\to a$ $\qquad A^{-1}=(e_1|e_2|e_3)_a$
A^{-1} = м. п. $a\to e$

$e_1=-a_1-a_2+2a_3 \qquad \varphi(e_1)=-b_1-b_2+2b_3=(-1,-2,-3)+(0,-1,-1)+(2,2,6)=(1,-1,2)$
$e_2=3a_1+3a_2-5a_3 \qquad \varphi(e_2)=3b_1+3b_2-5b_3=(3,6,9)+(0,3,3)+(-5,-5,-15)=(-2,4,-3)$
$e_3=-a_2+a_3 \qquad \varphi(e_3)=-b_2+b_3=(0,-1,-1)+(1,1,3)=(1,0,2)$

$$A_\varphi=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} //$$

4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda)+4(-2-\lambda)=(-3-3\lambda+\lambda+\lambda^2+4)(-2-\lambda)=$$
$$=(\lambda-1)^2(-2-\lambda)$$

$\lambda_1=-2$ кр. 1
$\lambda_2=1$ кр. 2

$\underline{\lambda_1=-2}$

ФРС:

x_1	x_2	x_3
0	0	1

$B_1=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 \sim c_1=(0,0,1)$, $c_1\neq 0$ //

$\underline{\lambda_2=1}$

$B_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ ФРС:

x_1	x_2	x_3
3	-6	20

$\lambda_2 \sim c_2=(3,-6,20)$, $c_2\neq 0$ //