ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Вступ

Передумови для виникнення теорії диференціальних рівнянь склалися в 2-й половині XVIIст..
Актуальні на той час так звані «обернені задачі на дотичні», тобто пошук кривих за відомими властивостями їх дотичних, були одними з перших, що зводилися до розв'язання диференціальних рівнянь.

Приклад 1 (Р.Декарт 1639р.)

Нехай на площині з прямокутною системою координат потрібно знайти криву, в кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної пропорційний ординаті точки дотику, з заданим коефіцієнтом пропорційності k.

Якщо таку криву шукати у вигляді графіка деякої диференційованої функції $y = y(x), \quad x \in \Re$, то враховуючи геометричний зміст похідної, умову задачі можна подати у вигляді співвідношення

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

яке являє собою найпростіше але важливе диференціальне рівняння. Легко переконатися (підстановкою), що його задовольняє будь-яка функція вигляду

$$y = Ce^{kx},$$

де C - довільна дійсна константа.

З метою показати необхідність вивчення теорії диференціальних рівнянь, проілюструємо декілька прикладів з різних галузей, що призв зводять природнім шляхом до математичного запису постановки задачі у вигляді диференціальних рівнянь.

Приклад2. Модель економічної динаміки.

Введемо наступні позначення

$x(t)$ - обсяг основних фондів (капіталу), з розрахунку на одного працівника в момент часу t,

$\mu = const > 0$ та $\nu = const > 0$ - норми амортизації капіталу та темпи росту чисельності робочої сили, відповідно,

$c(t)$ - обсяг споживання з розрахунку одного працівника в момент часу t,

$f(x)$ - виробнича функція, яка є характеристикою продуктивності праці й має певні властивості (опуклість, монотонність…)

Тоді в наведених позначеннях математична модель економічної динаміки (в найпростішому вигляді) буде записана через наступне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) - (\mu + \nu)x(t) - c(t)$$

Приклад 3. Модель розвитку одновидової популяції.

Введемо до розгляду величину
$x(t)$ - величина (кількість, маса популяції) в момент часу t.
Ідеалізуючи процес будемо вважати, що $x(t)$ неперервно змінюється в часі.

Гіпотеза Т.Мальтуса (1798р.):

За малий проміжок часу $[t, t+\Delta t]$
кількість новонароджених особин становить $ax(t)\Delta t$,
а кількість померлих - $bx(t)\Delta t$.
Тут a та b – коефіцієнти народжуваності , та смертності відповідно.

Тоді загальна зміна величини популяції за вказаний проміжок часу виражається формулою

$$x(t+\Delta t) - x(t) = (a-b)x(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0$$

Покладемо $k = a - b$, поділимо обидві частини цієї рівності на Δt й перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$.

Отримаємо вже знайоме диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Розв’язком якого є функція $x = Ce^{kt}$, де C - довільна дійсна константа.

Якщо відомо, що величина популяції в момент часу t_0 становить x_0, значення довільної сталої обчислимо з початкової умови $Ce^{kt_0} = x_0$ та отримаємо залежність

$$x = x_0 e^{k(t-t_0)},$$

яка є розв'язком **задачі Коші** з початковими даними (t_0, x_0).

Зауваження.
Коефіцієнт k можна знайти й у випадку якщо a та b невідомі, але визначивши значення $x_1 = x(t_1)$ в деякий момент t_1.

Тоді з умови $$x_1 = x_0 e^{k(t_1-t_0)}$$

матимемо

$$k = (t_1 - t_0)^{-1} \ln(x_1 / x_0).$$

Цікавий факт, що коли за такою методикою обчислили коефіцієнт k, користуючись даними про населення Землі в 1961р. та 1971р., то отримали залежність

$$x = 3.06 \cdot 10^9 \cdot e^{0.02(t-1961)},$$

яка непогано узгоджується з оцінками приросту населення земної кулі в період між 1700 та 1960рр. У цей час воно реально подвоювалося кожні **35** років.
Отримана нами формула дає подвоєння за **34.6** року**!**

Наведемо декілька основних визначень теорії диференціальних рівнянь, що будуть використовуватися надалі.

Визначення. Рівняння, що містять похідні від шуканої функції та можуть містити шукану функцію та незалежну змінну, називаються **диференціальними рівняннями**.

Визначення. Якщо в диференціальному рівнянні невідомі функції є функціями однієї змінної

$$F(x, y, y', y'', \ldots , y^{(n)}) = 0,$$

то диференціальне рівняння називається **звичайним**.

Визначення. **Порядком** диференціального рівняння називається максимальний порядок похідної від невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння.

Наприклад,

$$y(x) = xy'(x) + y'^3(x) \quad \text{- д.р. 1-го порядку,}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) - \cos y(t) = 0 \quad \text{- д.р. 2-го порядку,}$$

$$y^{IV}(x) - 4y'''(x) + 2y'(x) - y(x) = xe^x \quad \text{- д.р. 4-го порядку,}$$

Визначення. Якщо невідома функція, що входить в диференціальне рівняння, є функцією двох або більшої кількості незалежних змінних

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}, \ \dots\ , \frac{\partial^k z(x,y)}{\partial x^l, \partial y^{k-l}}, \ \dots\ , \frac{\partial^n z(x,y)}{\partial y^n}\right) = 0,$$

то диференціальне рівняння називається **рівнянням в частинних похідних**.

Наприклад,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} = f(x,y,z)$$

Визначення. **Розв'язком** диференціального рівняння називається функція, що має необхідну ступінь гладкості, і яка при підстановці в диференціальне рівняння обертає його в тотожність.

Наприклад,

функція $y(x) = \cos 2x$ є розв'язком д.р. другого порядку $y''(x) + 4y(x) = 0$.

Розв'язками цього рівняння також будуть $y = \sin 2x$, $y = 3\cos 2x - \sin 2x$,
І взагалі всі функції вигляду

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \quad \text{де} \quad C_1, C_2 \text{ - довільні сталі.}$$

З геометричної точки зору розв'язку диференціального рівняння в декартовій системі координат відповідає деяка крива, яку називають **інтегральною кривою**.

Сукупність інтегральних кривих, що залежить від довільних сталих, називають **сім'єю інтегральних кривих**.

Наприклад,

Розв'язки рівняння $y''(x)=2$ утворюють двопараметричну сім'ю парабол $y(x)=x^2+C_1x+C_2$, кожна з яких э інтегральною кривою.

Визначення. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається **інтегруванням** диференціального рівняння.

Якщо при цьому всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції, то кажуть, що рівняння зінтегроване в **скінченному вигляді**, якщо ж розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій, то кажуть про розв'язок у **квадратурах**.

1. Диференціальні рівняння першого порядку.

Рівняння першого порядку, що ***розв'язане відносно похідної***, має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Диференціальне рівняння становить зв'язок між координатами точки (x, y) та кутовим коефіцієнтом дотичної $\frac{dy}{dx}$ до графіку розв'язку в цій же точці.

Якщо знати x та y, то можна обчислити $f(x, y)$ тобто $\frac{dy}{dx}$.

Таким чином, диференціальне рівняння визначає **поле напрямків**, і задача інтегрування рівнянь зводиться до знаходження кривих, що звуться **інтегральними кривими**, напрям дотичних до яких в кожній точці співпадає з напрямом поля.

1.1. Існування та єдиність розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. Неперервна залежність та диференційованість

Теорема (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші).

Нехай у диференціальному рівнянні $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ визначена в прямокутнику

$$D = \{(x, y): |x_0 - a \le x \le x_0 + a, \;\; y_0 - b \le y \le y_0 + b\}.$$

і задовольняє умовам:

1) $f(x, y)$ неперервна по x та y в D ;
2) $f(x, y)$ задовольняє умові Ліпшиця по змінній y, тобто

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N|y_1 - y_2|, \quad N = const.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння, який визначений при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, і задовольняє умові

$$y(x_0) = y_0,$$

де $$h < \min\{a, b/M, 1/N\}, \;\; M = \max_{x, y \in D} |f(x, y)|.$$

Зауваження. Умову Ліпшиця $\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| \le N\left|y_1-y_2\right|$ можна замінити іншою, більш грубою, але легше перевіряємою умовою існування обмеженої по модулю частинної похідної $f_y^{'}(x,y)$ в області D.

Дійсно,

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right| = \left|f_y^{'}(x,\xi)\right|\left|y_1-y_2\right| \le N\left|y_1-y_2\right|,$$

де $\xi \in [y_1,y_2]$, $N = \max\limits_{(x,y)\in D}\left|f_y^{'}(x,y)\right|$.

Використовуючи доведену теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші розглянемо ряд теорем, що описують якісну поведінку розв'язків.

Теорема (*про неперервну залежність розв'язків від параметру*).

Якщо права частина диференціального рівняння $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y,\mu)$ неперервна по μ при $\mu \in [\mu_1,\mu_2]$ і при кожному фіксованому μ задовольняє умовам теореми існування й єдиності, причому стала Ліпшиця N не залежить від μ,
то розв'язок $y = y(x,\mu)$, що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, неперервно залежить від μ.

Теорема (*про неперервну залежність від початкових умов*).

Нехай виконані умови теореми про існування та єдиність розв'язків рівняння $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0$.

Тоді, розв'язки $y = y(x_0, y_0; x)$, що записані у формі Коші, неперервно залежать від початкових умов.

Теорема (*про диференційованість розв'язків*).

Якщо в околі точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має неперервні змішані похідні до k-го порядку, то розв'язок $y(x)$ рівняння $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ з початковими умовами $y(x_0) = y_0$ в деякому околі точки (x_0, y_0) буде $(k+1)$-раз неперервно-диференційований.

1.2. Рівняння зі змінними, що розділяються

1.2.1. Загальна теорія

Рівняння вигляду
$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

або більш загального вигляду
$$f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0$$

називаються ***рівняннями зі змінними, що розділяються***.

Розділимо його на $f_2(y)g_1(x)$ і одержимо
$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Взявши інтеграли, отримаємо
$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = C,$$

або
$$\Phi(x, y) = C.$$

Визначення. Кінцеве рівняння $\Phi(x,y)=0$, що визначає розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння як неявну функцію від x, називається ***першим інтегралом*** розглянутого рівняння.

Визначення. Рівняння $\Phi(x,y)=C$, що визначає всі без винятку розв'язки даного диференціального рівняння, називається ***загальним інтегралом***.

Бувають випадки (в основному), що невизначені інтеграли $\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx$ або $\int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy$ не можна записати в елементарних функціях. Незважаючи на це, задача інтегрування вважається виконаною. Кажуть, що диференціальне рівняння ***розв'язане в квадратурах***.

Можливо, що загальний інтеграл $\Phi(x,y)=C$ розв'язується відносно y: $y=y(x,C)$. Тоді, завдяки вибору C, можна одержати всі розв'язки.

Визначення. Залежність $y=y(x,C)$, що тотожно задовольняє вихідному диференціальному рівнянню, де C довільна стала, називається ***загальним розв'язком*** диференціального рівняння.

Геометрично загальний розв'язок являє собою сім'ю кривих, що не перетинаються, які заповнюють деяку область. Іноді треба виділити одну криву сім'ї, що проходить через задану точку $M(x_0,y_0)$.

Визначення. Знаходження розв'язку $y=y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0,y_0)$, називається ***розв'язком задачі Коші***.

Визначення. Розв'язок, який записаний у вигляді $y=y(x,x_0,y_0)$ і задовольняє умові $y(x_0,x_0,y_0)=y_0$, називається розв'язком у формі Коші.

Вправи

Рівняння зі змінними, що розділяються можуть бути записані у вигляді

$$y' = f(x)g(y) \qquad \text{або} \qquad f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0.$$

Для розв'язків такого рівняння необхідно обидві частини помножити або розділити на такий вираз, щоб в одну частину входило тільки x, а в другу - тільки y. Тоді обидві частини рівняння можна проінтегрувати.

Якщо ділити на вираз, що містить x та y, може бути загублений розв'язок, що обертає цей вираз в нуль.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\quad x^2y^2(x)y'(x) + y(x) = 1.$

Розв'язок. Підставивши $y' = \dfrac{dy}{dx}$ в задане рівняння, отримаємо $\quad x^2y^2\dfrac{dy}{dx} = -y + 1.$

Помножимо обидві частини рівняння на dx і розділимо на $x^2(y-1)$. Перевіримо, що $y = 1$ при цьому є розв'язком, а $x = 0$ цим розв'язком не є:

$$\frac{y^2}{y-1}dy = -\frac{dx}{x^2}.$$

Проінтегрируємо обидві частини рівняння:

$$\int\frac{y^2}{y-1}dy = -\int\frac{dx}{x^2}; \qquad \text{тобто} \qquad \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = \frac{1}{x} + C.$$

1.3. Рівняння, що зводяться до рівнянь зі змінними, що розділяються

Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),$$

де a, b, c - сталі.

Зробимо заміну $$ax + by + c = z.$$

Тоді $$adx + bdy = dz$$ і $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right).$$

Підставивши в вихідне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z)$$ або $$\frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

Розділивши змінні, запишемо

$$\frac{dz}{a + bf(z)} - dx = 0$$ і $$\int \frac{dz}{a + bf(z)} - x = C.$$

Загальний інтеграл має вигляд $$\Phi(ax + by + c, x) = C.$$

1.4. Однорідні рівняння

1.4.1. Загальна теорія

Нехай рівняння має вигляд $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Визначення.
Якщо функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні одного ступеня, то рівняння називається однорідним.

Нехай функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні ступеня k,

тобто $$M(tx,ty) = t^k M(x,y), \qquad N(tx,ty) = t^k N(x,y).$$

Робимо заміну $$y = ux, \qquad dy = udx + xdu.$$

Після підстановки одержуємо

$$M(x,ux)dx + N(x,ux)(udx + xdu) = 0,$$

або $$x^k M(1,u)dx + x^k N(1,u)(udx + xdu) = 0.$$

Скоротивши на x^k і розкривши скобки, запишемо

$$M(1,u)dx + uN(1,u)dx + xN(1,u)du = 0.$$

Згрупувавши, одержимо рівняння зі змінними, що розділяються

$$[M(1,u) + uN(1,u)]dx + xN(1,u)du = 0,$$

або
$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)} du = C.$$

Взявши інтеграли та замінивши $u = y/x$,

отримаємо загальний інтеграл $\Phi(x, y/x) = C.$

1.5. Рівняння, що зводяться до однорідних

Нехай маємо рівняння вигляду $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Розглянемо два випадки

1) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді система алгебраїчних рівнянь $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

має єдиний розв’язок (x_0, y_0).

Проведемо заміну $x = x_1 + x_0, \quad y = y_1 + y_0$ та отримаємо

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1(x_1+x_0)+b_1(y_1+y_0)+c_1}{a_2(x_1+x_0)+b_2(y_1+y_0)+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1+(a_1x_0+b_1y_0+c_1)}{a_2x_1+b_2y_1+(a_2x_0+b_2y_0+c_2)}\right).$$

Оскільки (x_0, y_0) - розв'язок системи алгебраїчних рівнянь, то диференціальне рівняння прийме вигляд

$$\frac{dy_1}{dx_1} == f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_2x_1+b_2y_1}\right)$$

і є однорідним нульового ступеня.

Робимо заміну $y_1 = ux_1, \quad dy_1 = udx_1 + x_1du$.

Підставимо в рівняння
$$u + x_1\frac{du}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x_1+b_1ux_1}{a_2x_1+b_2ux_1}\right).$$

Одержимо

$$x_1du + \left[u - f\left(\frac{a_1+b_1u}{a_2+b_2u}\right)\right]dx_1 = 0.$$

Розділивши змінні, маємо

$$\int \frac{du}{u - f\left(\frac{a_1 + b_1 u}{a_2 + b_2 u}\right)} + \ln x_1 = C.$$

І загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд

$$\Phi(u, x_1) = C.$$

Повернувшись до вихідних змінних, запишемо

$$\Phi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}, x - x_0\right) = C.$$

2) Нехай $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто строки лінійно залежні і $$a_1 x + b_1 y = \alpha(a_2 x + b_2 y).$$

Робимо заміну $$a_2 x + b_2 y = z.$$

Звідси $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right).$$

Підставивши в диференціальне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right) = f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right),$$

або

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right).$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\int \frac{dz}{a_2 + b_2 f\left(\dfrac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right)} - x = C.$$

Загальний інтеграл має вигляд

$$\Phi(a_2 x + b_2 y, x) = C.$$

1.6. Лінійні рівняння першого порядку

1.6.1. Загальна теорія

Визначення. Рівняння, що є лінійним відносно невідомої функції та її похідної, називається лінійним диференціальним рівнянням.

Його загальний вигляд такий:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

Якщо $q(x) \equiv 0$, тобто рівняння має вигляд $$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$ то воно зветься ***однорідним***.

Однорідне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються і розв'язується таким чином:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + \ln C,$$

$$\ln y = -\int p(x)dx + \ln C.$$

Нарешті $$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Розв'язок **неоднорідного** рівняння будемо шукати **методом варіації довільних сталих** (**методом невизначених множників Лагранжа**). Він складається в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв'язок однорідного, але C вважається невідомою функцією від x,

тобто $$C = C(x)$$

і $$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Для знаходження $C(x)$ підставимо y у рівняння

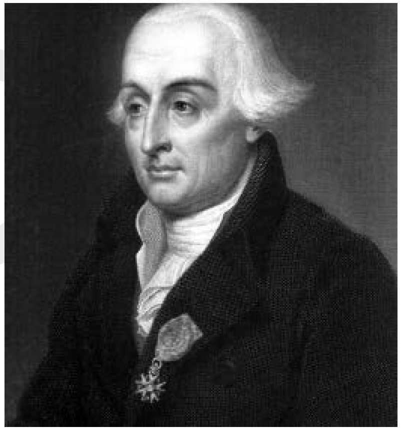
$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Звідси

$$dC(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Проінтегрувавши, одержимо

Жозеф-Луї Лагранж



$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

І загальний розв’язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y=e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C].$$

Якщо використовувати початкові умови $y(x_0)=y_0$, то розв’язок можна записати у формі Коші:

$$y(x,x_0,y_0)=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}y_0+\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{t}^{x}p(\xi)d\xi}q(t)dt.$$

Огюстен Луї Коші

1.6.2. Рівняння Бернуллі

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^m, \qquad m\neq 1$$

називається **рівнянням Бернуллі**.

Розділимо на y^m і одержимо

$$y^{-m}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-m}=q(x).$$

Зробимо заміну:

$$y^{1-m}=z, \qquad (1-m)y^{-m}\frac{dy}{dx}=dz/dx$$

Підставивши в рівняння, отримаємо

$$\frac{1}{1-m}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x).$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння. Його розв'язок має вигляд

$$z=e^{-(1-m)\int p(x)dx}\left[(1-m)\int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx}dx+C\right].$$

1.6.3. Рівняння Рікатті

Jacopo Riccati

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

називається **рівнянням Рікатті.**

В загальному випадку рівняння Рікатті не інтегрується.
Відомі лише деякі частинні випадки рівнянь Рікатті, що інтегруються в квадратурах.

Розглянемо один з них.
Нехай відомий один частковий розв'язок $y = y_1(x)$.

Робимо заміну $y = y_1(x) + z$ і одержуємо

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dz}{dx} + p(x)\left[y_1(x) + z\right] + r(x)\left[y_1(x) + z\right]^2 = q(x).$$

Оскільки $y_1(x)$ - частинний розв'язок, то

$$\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 + r(x){y_1}^2 \equiv q(x).$$

Розкривши скобки і використовуючи вказану тотожність, одержуємо

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z + 2r(x)y_1(x)z \ + r(x)z^2 = 0.$$

Перепишемо одержане рівняння у вигляді

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) + 2r(x)y_1(x)\right]z = -r(x)z^2,$$

це рівняння Бернуллі з $m = 2$.

1.7. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, має такий вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

Функція $F(x, y, y')$ вважається неперервною в деякій області $D \subset \Re^3$.

Функцію $y = y(x)$, яка визначена і неперервно диференційована на інтервалі (a, b), називають **розв'язком** рівняння (1), якщо на цьому інтервалі вона перетворює його у тотожність.

Іноді рівняння $F(x, y, y') = 0$ можна розв'язати відносно y' і воно має n-коренів,

тобто його можна записати у вигляді $\prod_{i=1}^{n} \left[y' - f_i(x, y) \right] = 0$.

Розв'язавши кожне з рівнянь $y' = f_i(x, y),\ i = \overline{1, n}$,

отримаємо n загальних розв'язків (або інтервалів)

$$y = \varphi_i(x, C),\ i = \overline{1, n} \qquad \text{(або } \varphi_i(x, y) = C,\ i = \overline{1, n}\text{)}.$$

І загальний розв'язок вихідного рівняння, не розв'язаного відносно похідної має вигляд

$$\prod_{i=1}^{n}\left[y-\varphi_i(x,C)\right]=0 \qquad \text{або} \qquad \prod_{i=1}^{n}\left(\varphi_i(x,y)-C\right)=0.$$

Рівняння (1), так само, як і рівняння розв'язане відносно похідної, визначає на площині xOy деяке поле напрямків. **Але тепер, як правило, у заданій точці (x_0, y_0) матимемо не один, а декілька напрямків поля, бо розв'язуючи $F(x_0, y_0, y')=0$ відносно y', зазвичай одержуємо декілька дійсних різних розв'язків.**

Задача Коші для рівняння (1) формулюється так само, як і для рівняння, розв'язного відносно похідної, тобто, потрібно знайти розв'язок $y=y(x)$ рівняння (1), що задовольняє початкову умову $y(x_0)=y_0$.

При цьому, якщо таких розв'язків не більше ніж кількість напрямків поля, визначеного рівнянням (1) у цій точці, тобто не більше кількості розв'язків y_0' рівняння $F(x_0, y_0, y')=0$ то кажуть, що задача Коші має єдиний розв'язок. В противному випадку єдиність розв'язку цієї задачі порушується.

Нехай y_0' - один з дійсних коренів рівняння (1).
З'ясуємо коли ж таки справджується єдність розв'язку.

Теорема.

Нехай ліва частина рівняння (1) задовольняє наступні умови:

1) функція $F(x, y, y')$ визначена і неперервна разом з частинними похідними $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ в деякому замкненому околі точки (x_0, y_0, y_0');

2) $F(x_0, y_0, y_0') = 0$;

3) $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(x_0, y_0, y_0')} \neq 0$

Тоді рівняння (1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, визначений і неперервно диференційований у деякому околі точки $x = x_0$, який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$, і такий, що $y'(x_0) = y_0'$.

Особливим розв'язком називають розв'язок, у кожній точці якого порушується умова його єдиності. Особливий розв'язок не можна отримати з формули загального розв'язку (загального інтеграла) диференціального рівняння при жодному значення довільної сталої C.

З Теореми випливає, що особливі розв'язки можуть існувати лише у тих точках, де порушуються умови цієї теореми. Тобто якщо $F(x, y, y')$ неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку, то особливі розв'язки потрібно шукати серед тих точок, координати яких задовольняють систему

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ F'_p(x, y, p) = 0, \end{cases} \quad p = y'.$$

Якщо ця система сумісна, то, виключаючи параметр p, отримаємо деяку множину точок $\varphi(x, y) = 0$, яка може бути особливим розв'язком рівняння (1).
Однак, потрібно ще перевірити, чи геометричне місце точок $\varphi(x, y) = 0$ є розв'язком заданого рівняння, і чи у кожній точці порушується властивість єдиності розв'язку (тобто чи знайдений розв'язок є особливим).

1.7.1. Частинні випадки рівнянь, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо ряд диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1) Рівняння вигляду $F(y')=0$.

Нехай алгебраїчне рівняння $F(k)=0$ має по крайній мірі один дійсний корінь $k=k_0$.

Тоді, інтегруючи $y'=k_0$, одержимо $y=k_0x+C$.

Звідси $k_0=\dfrac{y-C}{x}$

і вираз $F\left(\dfrac{y-c}{x}\right)=0$ містить всі розв'язки вихідного диференціального рівняння.

2) Рівняння вигляду $F(x, y') = 0$.

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи співвідношення $$dy = y'dx,$$

одержимо $$dy = \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Проінтегрувавши, запишемо
$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C. \end{cases}$$

3) Рівняння вигляду $\boldsymbol{F(y, y') = 0}$.

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді $\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = \psi(t). \end{cases}$

Використовуючи співвідношення $dy = y'dx$,

отримаємо $\varphi'(t)dt = \psi(t)dx$ і $dx = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$.

Проінтегрувавши, запишемо

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C.$$

І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

4) Рівняння Лагранжа $y = \phi(y')x + \psi(y')$.

Введемо параметр $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$

і отримаємо $y = \phi(p)x + \psi(p)$.

Продиференціювавши, запишемо $dy = \phi'(p)xdp + \phi(p)dx + \psi'(p)dp$.

Замінивши $dy = pdx$

одержимо $pdx = \phi'(p)xdp + \phi(p)dx + \psi'(p)dp$.

Звідси $[p - \phi(p)]dx - \phi'(p)xdp = \psi'(p)dp$.

І отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}.$$

Його розв'язок $$x=e^{-\int\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\left[\int\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}e^{\int\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}dp+C\right]=\Psi(p,C).$$

І остаточний розв'язок рівняння Лагранжа в параметричній формі запишеться у вигляді

$$\begin{cases}x=\Psi(p,C)\\ y=\varphi(p)\Psi(p,C)+\psi(p).\end{cases}$$

5) Рівняння Клеро.

Частинним випадком рівняння Лагранжа, що відповідає $\varphi(y') = y'$ є рівняння Клеро $y = y'x + \psi(y')$.

Поклавши $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$,

отримаємо $y = px + \psi(p)$.

Продиференціюємо $dy = pdx + xdp + \psi'(p)dp.$

Оскільки $dy = pdx$,

то $pdx = pdx + xdp + \psi'(p)dp.$

Скоротивши, одержимо $[x + \psi'(p)]dp = 0.$

Можливі два випадки.

1. $x+\psi'(p)=0$ і розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x=-\psi'(p) \\ y=-p\psi'(p)+\psi(p). \end{cases}$$

2. $dp=0, \quad p=C$ і розв'язок має вигляд

$$y=Cx+\psi(C).$$

Загальним розв'язком рівняння Клеро буде сім'я прямих $y=Cx+\psi(C)$.

Цю сім'ю огинає особа крива $x=-\psi'(p), \quad y=-p\psi'(p)+\psi(p)$.

6) Параметризація загального вигляду.

Нехай диференціальне рівняння $F(x, y, y') = 0$ вдалося записати у вигляді системи рівнянь з двома параметрами

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \\ y' = \theta(u,v) \end{cases}.$$

Використовуючи співвідношення $dy = y'\,dx$, одержимо

$$\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}dv = \theta(u,v)\left[\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}dv\right].$$

Перегрупувавши члени, запишемо

$$\left[\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} - \theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\right]du = \left[\theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right]dv.$$

Звідси

$$\frac{du}{dv} = \frac{\theta(u,v)\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} - \dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}}{\dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} - \theta(u,v)\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}}.$$

Або отримали рівняння вигляду

$$\frac{du}{dv} = f(u,v).$$

Зауваження. Параметризація загального вигляду не дає інтеграл диференціального рівняння. Вона дозволяє звести диференціальне рівняння, не розв'язане відносно похідної, до диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної !

2. Диференціальні рівняння вищих порядків

2.1. Загальні визначення. Існування та єдиність розв'язків рівнянь

Диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0.$$

Якщо диференціальне рівняння розв'язане відносно старшої похідної, то воно має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}).$$

Іноді його називають **диференціальним рівнянням у нормальній формі**.

Для диференціального рівняння, *розв'язного відносно похідної*, **задача Коші** ставиться таким чином.

Потрібно знайти функцію $y = y(x)$, n- раз неперервно диференційовану, таку, що при підстановці в рівняння обертає його в тотожність і задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \ \ y'(x_0) = y_0^1, \ \dots \ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Для диференціального рівняння, *нерозв'язного відносно похідної*, задача Коші полягає в знаходженні розв'язку $y = y(x)$, що задовольняє початковим даним

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0^1,\ \dots\ ,\ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1},\ \ y^{(n)}(x_0) = y_0^n\ ,$$

де значення $x_0, y_0, y_0^1,\ \dots\ , y_0^{n-1}$ довільні,

а y_0^n один з коренів алгебраїчного рівняння $F(x_0, y_0, y_0^1,\ \dots\ , y^n) = 0$.

Теорема (існування та єдиності розв'язку задачі Коші рівняння, *розв'язного відносно похідної*).

Нехай у деякому замкненому околі точки $(x_0, y_0, y_0^1,\ \dots\ , y_0^{n-1})$ функція $f(x, y, y',\ \dots\ , y^{(n-1)})$ задовольняє умовам:

1) вона визначена і неперервна по всім змінним;

2) задовольняє умові Ліпшиця по всім змінним, починаючи з другої.

Тоді при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, де h - досить мала величина, існує і єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння $y^{(n)} = f(x, y, y',\ \dots\ , y^{(n-1)})$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_0^1,\ \dots\ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}\ .$$

Теорема (існування та єдиності розв'язку задачі Коші рівняння, *нерозв'язного відносно похідної*).

Нехай у деякому замкненому околі точки $(x_0, y_0, y_0^1, \ \dots \ , y_0^{n-1}, y_0^n)$ функція $F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)})$ задовольняє умовам:

1) вона визначена і неперервна по всім змінним;

2) $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| < M_0, \left|\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right| < M_1, \ \dots \ , \left|\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}\right| < M_n;$

3) $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right| \neq 0.$

Тоді при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, де h- досить мала величина, існує і єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння $F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^1, \ \dots \ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \ y^{(n)}(x_0) = y_0^n \ .$$

Визначення. Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається n-раз неперервно диференційована функція $y = y(x, C_1, C_2, \ \dots \ , C_n)$, що обертає при підстановці рівняння на тотожність, у якій вибором сталих $C_1, \ \dots \ , C_n$ можна одержати розв'язок довільної задачі Коші в області існування та єдиності розв'язків.

2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1) Рівняння вигляду $y^{(n)}(x) = f(x)$.

Проінтегрувавши його n-раз одержимо загальний розв'язок у вигляді

$$y(x) = \underbrace{\int \ \dots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \ \dots \ dx}_{n} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ \dots \ + C_{n-1} x + C_n \ .$$

Якщо задані умови Коші $y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0^1, \ \dots \ , \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$,

то розв'язок має вигляд

$$y = \int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x} f(x) dx \ \dots \ dx +$$

$$+ \frac{y_0}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \frac{y_0^1}{(n-2)!}(x - x_0)^{(n-2)} + \ \dots \ + y^{(n-2)}(x - x_0) + y_0^{(n-1)}.$$

2) Рівняння вигляду $F(x, y^{(n)}) = 0$.

Нехай це рівняння вдалося записати в параметричному вигляді $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$

Використовуючи основне співвідношення $y^{(n)} = \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}$ **тобто** $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$,

одержимо $dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)dt$.

Проінтегрувавши його, маємо $y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1)$.

І одержимо параметричний запис рівняння $(n-1)$-порядку $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n-1)} = \psi_1(t, C_1). \end{cases}$

Пробивши зазначений процес ще $(n-1)$-раз, одержимо загальний розв'язок рівняння в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, \ \dots \ , C_n) \end{cases}$$

3) Рівняння вигляду $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.

Нехай це рівняння вдалося записати в параметричному вигляді
$$\begin{cases} y^{(n-1)} = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи основне співвідношення
$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx\ ,$$

одержуємо
$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt.$$

Проінтегрувавши, маємо
$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

І одержали параметричний запис рівняння $(n-1)$-порядку
$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y^{(n-1)} = \varphi(t). \end{cases}$$

Використовуючи попередній пункт, понизивши порядок на одиницю, запишемо

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y^{(n-2)} = \varphi_2(t, C_2). \end{cases}$$

Пробивши останню процедуру $(n-2)$-раз, запишемо загальний розв'язок у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y = \varphi_n(t, C_2, \ \dots \ , C_n). \end{cases}$$

4) Нехай рівняння вигляду $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ можна розв'язати відносно старшої похідної

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}).$$

Домножимо його на $2y^{(n-1)}dx$ й одержимо

$$2y^{(n-1)}y^{(n)}dx = 2f(y^{(n-2)})y^{(n-1)}dx\ .$$

Перепишемо його у вигляді

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)})\ .$$

Проінтегрувавши, маємо

$$(y^{(n-1)})^2 = 2\int f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) + C_1\ ,$$

тобто

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) + C_1}\ ,$$

або
$$y^{(n-1)} = \pm\psi_1(y^{(n-2)}, C_1).$$

Таким чином одержали параметричний запис рівняння $(n-1)$-порядку

$$\begin{cases} y^{(n-2)} = t \\ y^{(n-1)} = \pm\psi_1(t, C_1) \end{cases}$$

І фактично повернулися до третього випадку.

2.3. Найпростіші випадки зниження порядку в диференціальних рівняннях вищих порядків

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь вищого порядку, що допускають зниження порядку.

1) Рівняння не містить шуканої функції і її похідних до $(k-1)$-порядку включно

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)} \ \ldots\ , y^{(n)}) = 0.$$

Зробивши заміну: $$y^{(k)} = z, \quad y^{(k+1)} = z', \ \ldots\ , \ y^{(n)} = z^{(n-k)},$$

одержимо рівняння $(n-k)$-порядку $$F(x, z, z', \ \ldots\ , z^{(n-k)}) = 0.$$

2) Рівняння не містить явно незалежної змінної $\quad F(y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0$.

Будемо вважати, що y - нова незалежна змінна, а $y', \ \dots \ , y^{(n)}$ - функції від y.

Тоді

$$y'_x = p(y),$$

$$y''_{x^2} = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{d}{dy}(p(y))\frac{dy}{dx} = p'_y p,$$

$$y'''_{x^3} = \frac{d}{dx} y''_{x^2} = \frac{d}{dy}(p'_y p)\frac{dy}{dx} = (p''_{y^2} p + p'^2_{y^2})p,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Після підстановки одержимо диференціальне рівняння $(n-1)$-порядку.

$$F(y, p, p'_y p, (p''_{y^2} p + p'^2)p, \ \dots \ , p^{(n-1)}) = 0,$$

3) Нехай функція F диференціального рівняння $F(x,y,y',\ \dots\ y^{(n)})=0$ є однорідною щодо аргументів $y,y',\ \dots\ ,y^{(n)}$.

Робимо заміну $y=e^{\int udx}$, де $u=u(x)$ - нова невідома функція.

Одержимо

$$y'=e^{\int udx}u,$$

$$y''=e^{\int udx}u^2+e^{\int udx}u'=e^{\int udx}(u^2+u'),$$

$$y'''=e^{\int udx}u(u^2+u')+e^{\int udx}(2uu'+u'')=e^{\int udx}(u^3+3uu'+u''),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Після підстановки одержимо

$$F(x,e^{\int udx},e^{\int udx}u,e^{\int udx}(u^2+u'),e^{\int udx}(u^3+3uu'+u''),\ \dots)=0.$$

Оскільки рівняння однорідне відносно $e^{\int udx}$, то цей член можна винести і на нього скоротити.

Одержимо диференціальне рівняння $(n-1)$-порядку

$$F(x,1,u,u^2+u',u^3+3uu'+u'',\ \dots\ ,u^{(n-1)})=0$$

4) Нехай диференціальне рівняння $F(x,y,y',\ \dots\ ,y^{(n)})=0$, розписано у вигляді диференціалів $\Phi(x,y,dx,dy,d^2y,\ \dots\ ,d^n y)=0$ і Φ- функція однорідна по всім змінним.

Зробимо заміну $x=e^t,\ y=ue^t,$ де $u,\ t$ - нові змінні.

Тоді одержуємо

$$dx=e^t dt,\qquad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{u'_t e^t+ue^t}{e^t}=u'_t+u,\qquad y''_{x^2}=\frac{d}{dx}y'_x=\frac{d}{dt}(u'_t+u)\frac{dt}{dx}=\frac{u''_{t^2}+u'_t}{e^t},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{d}{dx}y''_{x^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{u''_{t^2}+u'_t}{e^t}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{(u'''_{t^3}+u''_{t^2})e^t-(u''_{t^2}+u'_t)e^t}{e^{3t}}=\frac{u'''_{t^3}-u'_t}{e^{2t}}\ \dots\ .$$

Підставивши у початкове рівняння, одержимо

$$\Phi(x,y,dx,dy,\ d^2y,\ \dots\ ,\ d^n y)=\Phi(e^t,ue^t,e^t dt,\ (u'_t+u)e^t dt,(u''_{t^2}+u'_t)e^t dt,\ \dots)=0.$$

Скоротивши на e^t одержимо $\Phi(1,u,dt,u'_t+u,\ u''_{t^2}+u'_t,\ \dots,\ u_t^{(n)})=0$.

Тобто одержимо диференціальне рівняння, що не містить явно незалежної змінної, або повертаємося до другого випадку.

5) Нехай ліва частина рівняння $F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0$ є похідною деякого диференціального виразу ступеня $(n-1)$, тобто $$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}) = F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}).$$

У цьому випадку легко обчислюється, так званий, перший інтеграл

$$\Phi(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}) = C.$$

3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Рівняння вигляду

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y(x)=b(x)$$

називається **лінійним неоднорідним** диференціальним рівнянням n-го порядку.

Рівняння вигляду

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y(x)=0$$

називається **лінійним однорідним** диференціальним рівнянням n-го порядку.

Якщо при $x\in[a,b]$, $a_0(x)\neq 0$ коефіцієнти $b(x)$, $a_i(x)$, $i=\overline{0,n}$ неперервні, то для рівняння

$$y^{(n)}(x)=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y^{(n-1)}(x)-\ \dots\ -\frac{a_n(x)}{a_0(x)}y(x)+\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

виконуються умови теореми існування та єдиності і існує єдиний розв’язок $y=y(x)$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

3.1. Лінійні однорідні рівняння.

3.1.1. Властивості лінійних однорідних рівнянь

Властивість 1. Лінійність і однорідність зберігаються при довільному перетворенні незалежної змінної

$$x = \varphi(t).$$

Властивість 2. Лінійність і однорідність зберігаються при лінійному перетворенні невідомої функції

$$y(x) = \alpha(x) z(x).$$

3.1.2. Властивості розв'язків лінійних однорідних рівнянь

Властивість 1. Якщо $y = y_1(x)$ є розв'язком однорідного лінійного рівняння, то і $y = Cy_1(x)$, де C - довільна стала, теж буде розв'язком однорідного лінійного рівняння.

Властивість 2. Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками лінійного однорідного рівняння, то і $y = y_1(x) + y_2(x)$ теж буде розв'язком лінійного однорідного рівняння.

Властивість 3. Якщо $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots\ ,\ y_n(x)$- розв'язки однорідного лінійного рівняння, то і $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, де $C_1,\ C_2,\ ,\ C_n$- довільні сталі, також буде розв'язком лінійного однорідного рівняння.

Властивість 4. Якщо комплексна функція дійсного аргументу $y(x)=u(x)+iv(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, то окремо дійсна частина $u(x)$ і уявна $v(x)$ будуть також розв'язками цього рівняння.

3.1.3. Лінійна залежність і незалежність розв'язків. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння вищого порядку

Визначення. Функції $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots\ ,\ y_n(x)$ називаються **лінійно залежними** на відрізку $[a,b]$ якщо існують не всі рівні нулю сталі $C_1,\ \ldots\ ,\ C_n$ такі, що при всіх $x\in[a,b]$

$$C_1y_1(x)+C_2\,y_2(x)+\ \ldots+C_ny_n(x)\equiv 0.$$

Якщо ж тотожність справедлива лише при $C_1=C_2=\ \ldots\ =C_n=0$,

то функції $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots\ ,\ y_n(x)$ називаються **лінійно незалежними**.

Приклад 3.1.1. Функції $1,\ x,\ x^2,\ \ldots\ ,\ x^{n-1}$ - лінійно незалежні на будь-якому відрізку $[a,b]$, тому що вираз $C_1+C_2x+\ \ldots\ +C_nx^{n-1}=0$ є многочленом ступеню $(n-1)$ і має не більш, ніж $(n-1)$ дійсних коренів.

Приклад 3.1.2. Функції $e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ \ldots\ ,\ e^{\lambda_n x}$, де всі λ_i - дійсні різні числа - лінійно незалежні.

Приклад 3.1.3. Функції $1,\ \sin x,\ \cos x,\ \ldots\ ,\ \sin nx,\ \cos nx$ - лінійно незалежні.

Теорема. Для того щоб розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння $y_1(x), \ \dots \ , y_n(x)$ були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб **визначник Вронського**

$$W[y_1, \ \dots \ , y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

не дорівнював нулю в жодній точці $x \in [a,b]$, тобто $W[y_1(x), \ \dots \ , y_n(x)] \neq 0$.

Теорема. Загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ \dots \ + a_n(x)y(x) = 0$$

є лінійна комбінація n - лінійно незалежних розв'язків

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

Визначення. Будь-які n -лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку називаються **фундаментальною системою розв'язків**.

3.1.4. Формула Остроградського – Ліувіля

Формула, яка пов’язує значення визначника Вронського в довільній точці і його значення в початковій точці

$$W\left[y_1(x), y_2(x), \ \ldots \ , y_n(x)\right] =$$

$$= W\left[y_1(x_0), y_2(x_0), \ \ldots \ , y_n(x_0)\right] e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}.$$

називається формулою Остроградського-Ліувілля.

Зокрема, якщо рівняння має вид

$$y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ \ldots \ + p_n(x) y(x) = 0,$$

то формула запишеться у вигляді

$$W\left[y_1(x), y_2(x), \ \ldots \ , y_n(x)\right] =$$

$$= W\left[y_1(x_0), y_2(x_0), \ \ldots \ , y_n(x_0)\right] e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x) dx}.$$

3.1.5. Формула Абеля

Розглянемо застосування формули Остроградського-Ліувіля до рівняння 2-го порядку

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0.$$

Нехай $y_1(x)$- один з розв’язків.

Тоді
$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = C_2 e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Розкривши визначник, одержимо

$$y'(x)y_1(x) - y(x)y_1'(x) = C_2 e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Розділивши на $y_1^2(x)$, запишемо

$$\frac{y'(x)y_1(x) - y(x)y_1'(x)}{y_1^2(x)} = C_2 \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx},$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)=C_2\,\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$\frac{y(x)}{y_1(x)}=C_2\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}dx+C_1.$$

Остаточно

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2\left\{y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}dx\right\}.$$

Отримана формула називається **формулою Абеля**.

Вона дозволяє по одному відомому розв'язку знайти загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння другого порядку.

3.1.6. Лінійні однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійні однорідні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_ny(x)=0.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $y(x)=e^{\lambda x}$.

Продиференціювавши, одержимо $y'(x)=\lambda e^{\lambda x},\quad y''(x)=\lambda^2e^{\lambda x},\ \dots,\ y^{(n)}(x)=\lambda^n e^{\lambda x}$.

Підставивши отримані значення $y,\ y',\ \dots\ ,y^{(n)}$ диференціальне рівняння перепишемо

$$\lambda^n e^{\lambda x}+a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+\ \dots\ +a_ne^{\lambda x}=0.$$

Скоротивши на $e^{\lambda x}$, одержимо характеристичне рівняння

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ \dots\ +a_n=0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го степеня має n- коренів.
У залежності від їхнього вигляду будемо мати різні розв'язки.

1) Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_n$ ***- дійсні і різні.***

Тоді функції $e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}, \ \dots \ , \quad e^{\lambda_n x}$ є розв'язками

й оскільки всі λ_i різні, то $e^{\lambda_i x}$ - розв'язки лінійно незалежні,

тобто $\left\{e^{\lambda_i x}\right\}_{i=\overline{1,n}}$ фундаментальна система розв'язків.

Загальним розв'язком буде лінійна комбінація $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}.$

2) Нехай маємо комплексно спряжені корені $\lambda = p + iq, \quad \bar{\lambda} = p - iq.$

Їм відповідають розв'язки $e^{(p+iq)x}, \quad e^{(p-iq)x}$.

Розкладаючи їх по формулі Ейлера, одержимо:

$$e^{(p+iq)x} = e^{px}e^{iqx} = e^{px}\cos qx + ie^{px}\sin qx = u(x) + iv(x),$$

$$e^{(p-iq)x} = e^{px}e^{-iqx} = e^{px}\cos qx - ie^{px}\sin qx = u(x) - iv(x).$$

І, як випливає з властивості 4, функції $u(x)$ й $v(x)$ будуть окремими розв'язками.

Таким чином, кореням $\lambda = p + iq, \quad \bar{\lambda} = p - iq$ відповідають два лінійно незалежних розв'язки

$$u(x) = e^{px}\cos qx, \quad v(x) = e^{px}\sin qx.$$

Загальним розв'язком, що відповідає цим двом кореням, буде

$$y(x) = C_1 e^{px}\cos qx + C_2 e^{px}\sin qx.$$

3) Нехай λ - кратний корінь, кратності k, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$, $k \le n$.

а) Розглянемо випадок $\lambda = 0$.

Тоді загальним розв'язком, що відповідає кореню λ кратності k,

буде лінійна комбінація цих функцій $y(x) = C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}$.

б) Нехай $\lambda = \nu \ne 0$ - і корінь дійсний.

Тоді кореню $\lambda = \nu$ кратності k відповідає розв'язок $y(x) = C_1 e^{\nu x} + C_2 x e^{\nu x} + \ldots + C_k x^{k-1} e^{\nu x}$.

в) Нехай характеристичне рівняння має корені $\lambda = p + iq$, $\overline{\lambda} = p - iq$ кратності k.

Тоді загальним розв'язком, що відповідає цим кореням буде

$$y(x) = C_1 e^{px} \cos qx + C_2 x e^{px} \cos qx + \ldots + C_k x^{k-1} e^{px} \cos qx +$$

$$+ C_{k+1} e^{px} \sin qx + C_{k+2} x e^{px} \sin qx + \ldots + C_{2k} x^{k-1} e^{px} \sin qx.$$

3.1.7. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо деякі лінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, які за допомогою заміни незалежної змінної або шуканої функції можна звести до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1) **Рівнянням Ейлера** називають диференціальне рівняння вигляду

$$x^n y^{(n)}(x)+a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_{n-1} x y'(x)+a_n y(x)=0$$

Заміна пряма $x=e^t$ й зворотня $t=\ln x$.

2) Узагальнене рівняння Ейлера (**рівняння Лагранжа**)

$$(ax+b)^n y^{(n)}(x)+p_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)}(x)+\ \dots + p_{n-1}(ax+b) y'(x)+p_n y(x)=0$$

Заміна $(ax+b)=e^t$

3) **Рівняння Чебишова**

$$(1-x^2)y''(x)-xy'(x)+n^2 y(x)=0$$

Заміна $t=\arccos x$ $(x=\cos t)$

4) **Рівняння Бесселя** $x^2 y''(x)+xy'(x)+(x^2-\nu)y(x)=0$ при $\nu=1/4$

3.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Загальний вигляд лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь наступний

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \ldots\ +a_n(x)y(x)=b(x).$$

3.2.1. Властивості розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь.
Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

Властивість 1. Якщо $y_0(x)$ - розв'язок лінійного однорідного рівняння,

$y_1(x)$- розв'язок неоднорідного рівняння,

то $y(x)=y_0(x)+y_1(x)$ буде розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Властивість 2 (принцип суперпозиції). Якщо $y_i(x),\ i=\overline{1,n}$ - розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y(x)=b_i(x)\ ,\ i=\overline{1,m}\,,$$

то $y(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i y_i(x)$ з довільними сталими C_i буде розв'язком лінійного неоднорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y(x)=\sum_{i=1}^{m}C_i b_i(x).$$

Властивість 3. Якщо комплексна функція $y(x)=u(x)+iv(x)$ з дійсними елементами є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння з комплексною правою частиною $b(x)=f(x)+ip(x)$,

то дійсна частина $u(x)$ є розв'язком рівняння з правою частиною $f(x)$,

а уявна $v(x)$ є розв'язком рівняння з правою частиною $p(x)$.

Теорема. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається з загального розв'язку лінійного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Як випливає з теореми для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння треба шукати загальний розв'язок однорідного рівняння, тобто будь-які n - лінійно незалежні розв'язки і якийсь частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Розглянемо методи побудови частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

3.2.2 Метод варіації довільної сталої побудови частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Метод варіації довільної сталої полягає в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв'язок однорідного, але сталі $C_i,\ i=\overline{1,n}$ вважаються невідомими функціями.

Якщо розглядати диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=b(x)$$

Де загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $y_{одн}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$,

то частинний розв'язок неоднорідного шукаємо у вигляді $y_{неодн}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$.

Візьмемо похідну

$$y'_{неодн}(x)=C'_1(x)y_1(x)+C'_2(x)y_2(x)+C_1(x)y'_1(x)+C_2(x)y'_2(x)$$

і ***прирівняємо її першу частину до нуля.***

Отримаємо рівняння $$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0.$$

Візьмемо другу похідну і отримаємо

$$y''_{неодн}(x)=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x).$$

Підставивши значення функції, та її похідних у вихідне рівняння і скоротивши потрібні члени, отримаємо

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Таким чином для знаходження функцій $C_1(x),\quad C_2(x)$ маємо систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=\dfrac{b(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Звідси $$C_1(x)=\int\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(x)\\ \dfrac{b(x)}{a_0(x)} & y_2'(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}dx,\quad C_2(x)=\int\frac{\begin{vmatrix}y_1(x) & 0\\ y_1'(x) & \dfrac{b(x)}{a_0(x)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}dx.$$

І одержуємо $$y_{неодн}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

з обчисленими функціями $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

3.2.3. Метод Коші

Нехай $y = K(x, s)$ – розв'язок однорідного диференціального рівняння, що задовольняє умови

$$K(s,s) = K'_x(s,s) = \ \dots \ = K_x^{(n-2)}(s,s) = 0, \qquad K_x^{(n-1)}(s,s) = 1.$$

Тоді функція

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$$

буде розв'язком неоднорідного рівняння, що задовольняє початкові умови $y(x_0) = y'(x_0) = \ \dots \ = y^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Дійсно, розглянемо похідні від функції $y(x)$:

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} K'_x(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds + K(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

І оскільки $K(x,x) = 0$, то $y' = \int_{x_0}^{x} K'_x(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$.

Аналогічно

$$y''(x)=\int_{x_0}^{x} K_x''(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x'(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}=\int_{x_0}^{x} K_x''(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds.$$

....

$$y^{(n-1)}(x)=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x^{(n-2)}(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds.$$

$$y^{(n)}(x)=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x^{(n-1)}(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}$$

І оскільки $K_x^{(n-1)}(s,s)=1$, то

$$y^{(n)}=\int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Підставивши функцію $y(x)$ та її похідні у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$a_0(x)\left[\int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+\frac{b(x)}{a_0(x)}\right]+a_1(x)\left[\int_{x_0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds\right]+\ldots$$

$$\ldots+a_n(x)\left[\int_{x_0}^{x} K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds\right]=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\left[a_0(x)K_x^{(n)}(x,s)+a_1(x)K_x^{(n-1)}(x,s)+\ \ldots\ +a_n(x)K(x,s)\right]\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+b(x)=b(x).$$

Оскільки $K(x,s)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, то

$$a_0(x)K_x^{(n)}(x,s)+a_1(x)K_x^{(n-1)}(x,s)+\ \ldots\ +a_n(x)K(x,s)\equiv 0.$$

У такий спосіб показано, що $y(x)=\int_{x_0}^{x} K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння.

Підставляючи $x = x_0$ у вирази для $y(x),\ y'(x),\ \dots\ ,\ y^{(n)}(x)$

одержимо, що
$$y(x_0) = y'(x_0) = \ \dots\ = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Для знаходження функції $K(x,s)$ (інтегрального ядра) можна використати такий спосіб.

Якщо $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння, то загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{одн}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Оскільки $K(x,s)$ є розв'язком однорідного рівняння, то його слід шукати у такому ж вигляді, тобто

$$K(x,s) = C_1(s) y_1(x) + C_2(s) y_2(x) + \dots + C_n(s) y_n(x).$$

Відповідні початкові умови мають вигляд

$$K(s,s)=0 \;\rightarrow\; C_1(s)y_1(s)+C_2(s)y_2(s)+\ldots+C_n(s)y_n(s)=0$$

$$K'_x(s,s)=0 \;\rightarrow\; C_1(s)y'_1(s)+C_2(s)y'_2(s)+\ldots+C_n(s)y'_n(s)=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_x^{(n-2)}(s,s)=0 \;\rightarrow\; C_1(s)y_1^{(n-2)}(s)+C_2(s)y_2^{(n-2)}(s)+\ldots+C_n(s)y_n^{(n-2)}(s)=0.$$

$$K_x^{(n-1)}(s,s)=1 \;\rightarrow\; C_1(s)y_1^{(n-1)}(s)+C_2(s)y_2^{(n-1)}(s)+\ldots+C_n(s)y_n^{(n-1)}(s)=1.$$

Звідси

$$C_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(s) & \ldots\ldots\ldots & y_n(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & y_2^{(n-2)}(s) & \ldots\ldots & y_n^{(n-2)}(s) \\ 1 & y_2^{(n-1)}(s) & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}}{W\left[y_1(s), y_2(s), \;\ldots\;, y_n(s)\right]}, \qquad C_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & 0 & \ldots & y_n(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(s) & 0 & \ldots\ldots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1^{(n-1)}(s) & 1 & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}}{W\left[y_1(s), y_2(s), \;\ldots\;, y_n(s)\right]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n(s) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \ldots & y_{n-1}(s) & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & & \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(s) & 0 \\ y_1^{(n-1)}(s) & y_2^{(n-1)}(s) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(s) & 1 \end{vmatrix}}{W\left[y_1(s), y_2(s), \ \ldots \ , y_n(s)\right]}.$$

І ядро $K(x,s)$ має вигляд

$$K(x,s) = C_1(s)y_1(x) + C_2(s)y_2(x) + \ldots + C_n(s)y_n(x)$$

з одержаними функціями $C_1(s), C_2(s), \ldots, C_n(s)$.

Якщо розглядати диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)=b(x),$$

то функція $K(x,s)$ має вигляд

$$K(x,s)=C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x),$$

де

$$C_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(s)\\ 1 & y_2'(s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s)\\ y_1'(s) & y_2'(s)\end{vmatrix}},\qquad C_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}y_1(s) & 0\\ y_1'(s) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s)\\ y_1'(s) & y_2'(s)\end{vmatrix}}.$$

Звідси

$$K(x,s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(s)\\ 1 & y_2'(s)\end{vmatrix}y_1(x)+\begin{vmatrix}y_1(s) & 0\\ y_1'(s) & 1\end{vmatrix}y_2(x)}{W\left[y_1(s),y_2(s)\right]}=\frac{y_1(s)y_2(x)-y_1(x)y_2(s)}{W\left[y_1(s),y_2(s)\right]}.$$

3.2.4. Метод невизначених коефіцієнтів

Якщо лінійне диференціальне рівняння є рівнянням з сталими коефіцієнтами, а функція $b(x)$ **спеціального виду**, то частинний розв'язок можна знайти за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

1) Нехай $b(x)$ має вид многочлена, тобто $b(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_{s-1}x + A_s$.

а) Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння не має нульового кореня, тобто $\lambda \neq 0$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо вигляді:

$$y_{неодн} = B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_{s-1}x + B_s,$$

де $B_0, \ \ldots, B_s$ - невідомі сталі.

Тоді

$$y'_{неодн} = sB_0x^{s-1} + (s-1)B_1x^{s-2} + \ldots + B_{s-1},$$

$$y''_{неодн} = s(s-1)B_0x^{s-2} + (s-1)(s-2)B_1x^{s-3} + \ldots + 2\cdot 1\cdot B_{s-2},$$

……………………………………………………..

Підставляючи у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$a_0[\ldots]+\ \ldots\ +a_{n-2}[s(s-1)B_0x^{s-2}+(s-1)(s-2)B_1x^{s-3}+\ \ldots+2\cdot1\cdot B_{s-1}]+$$

$$+a_{n-1}[sB_0x^{s-1}+(s-1)B_1x^{s-2}+\ \ldots+B_{s-1}]+a_n[B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ \ldots+B_s]=$$

$$=A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ \ldots+A_{s-1}x+A_s.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x запишемо:

$$\begin{aligned}
x^s &: \quad a_nB_0=A_0\\
x^{s-1} &: \quad a_nB_1+sa_{n-1}B_0=A_1\\
x^{s-2} &: \quad a_nB_2+(s-1)a_{n-1}B_1+s(s-1)a_{n-2}B_0=A_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Оскільки характеристичне рівняння не має нульового кореня, то

$$a_n\neq0.$$

Звідси одержимо

$$\boldsymbol{B_0 = \frac{1}{a_n} A_0}, \qquad \boldsymbol{B_1 = \frac{1}{a_n}\left[A_1 - s a_{n-1} B_0\right]}, \ \ldots \ .$$

б) Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння має нульовий корінь кратності $\boldsymbol{r}$.

Тоді частинний розв'язок вихідного однорідного рівняння має вигляд

$$\boldsymbol{y_{неодн} = (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ \ldots \ + B_s) x^r}.$$

2) Нехай $b(x)$ має вигляд $b(x)=e^{px}(A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ \dots\ +A_s)$.

а) Розглянемо випадок, коли p - не є коренем характеристичного рівняння.

Частинний розв'язок вихідного неоднорідного диференціального рівняння шукається у вигляді:

$$y_{неодн}=e^{px}(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ \dots\ +B_s).$$

б) Розглянемо випадок, коли p - корінь характеристичного рівняння кратності r.

Тут частинний розв'язок вихідного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y_{неодн}=e^{px}(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ \dots\ +B_s)x^r.$$

3) Нехай $b(x)$ має вигляд: $$b(x) = e^{px}[P_s(x)\cos qx + Q_l(x)\sin qx],$$

де $P_s(x),\ Q_l(x)$ - многочлени степеня s і l, відповідно, і, наприклад, $l \le s$.

Використовуючи **властивості 2 , 3** розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь, а також **випадки 2 а), б)** знаходження частинного розв'язку лінійних неоднорідних рівнянь, одержимо, що частинний розв'язок шукається у наступних виглядах:

а)
$$y_{неодн} = e^{px}[(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ \dots\ + A_s)\cos qx + \\ + (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ \dots\ + B_s)\sin qx],$$

якщо $p \pm iq$ - не є коренем характеристичного рівняння;

б)
$$y_{неодн} = e^{px}[(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ \dots\ + A_s)\cos qx + \\ + (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ \dots\ + B_s)\sin qx]x^r,$$

якщо $p \pm iq$- є коренем характеристичного рівняння кратності r.

4. Системи диференціальних рівнянь

4.1. Загальна теорія

Система звичайних диференціальних рівнянь

$$F_k(x, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2', y_2'', \ldots, y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n', y_n'', \ldots, y_n^{(k_n)}) = 0, \qquad (1)$$

$$k = 1, n$$

яка є розв'язною відносно старших похідних $y_1^{(k_1)}$, $y_2^{(k_2)}, \ldots, y_n^{(k_n)}$

називається **канонічною системою** диференціальних рівнянь.

Зазвичай вона записується наступним чином

$$\begin{cases} y_1^{(k_1)} = f_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}\right), \\ y_2^{(k_2)} = f_2\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(k_n)} = f_n\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(k_n-1)}\right). \end{cases} \qquad (2)$$

Порядком системи називається число $p = k_1 + k_2 + \ldots k_n$

Приклад 1.

Звести до канонічного вигляду систему рівнянь

$$\begin{cases} y_2 y_1' - \ln(y_1'' - y_1) = 0 \\ e^{y_2'} - y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$$

►

Дана система має третій порядок, бо $k_1 = 2$, а $k_2 = 1$. Отже $p = 3$.

Розв'яжемо перше рівняння відносно y_1'', а друге відносно y_2' й отримаємо канонічну систему

$$\begin{cases} y_1'' = y_1 + e^{y_2 y_1'} \\ y_2' = \ln(y_1 + y_2) \end{cases}$$

◄

Співвідношення вигляду

$$\begin{cases} F_1(x_1', x_2', \dots x_n', x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0 \\ F_2(x_1', x_2', \dots x_n', x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1', x_2', \dots x_n', x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0 \end{cases}$$

називається **системою** n- звичайних диференціальних рівнянь **першого порядку**.

Якщо система розв'язана відносно похідних і має вигляд

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(t) = f_n(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \end{cases} \tag{3}$$

то вона називається **системою в нормальній формі**.

Число n називається **порядком нормальної системи** (3).

Дві системи називаються **еквівалентними**, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки.

Будь яку канонічну систему (2) можна звести до еквівалентної їй нормальної системи (3). Порядок цих систем буде однаковим.

Приклад 2.

Звести до нормальної наступну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} - y(t) = 0 \\ t^3\dfrac{dy(t)}{dt} - 2x(t) = 0 \end{cases}$$

►Дана система має третій порядок, бо $k_1 = 2$, а $k_2 = 1$. Отже $p = 3$.

Покладемо $x(t) = x_1(t)$, $\dfrac{dx(t)}{dt} = x_2(t)$, $y(t) = x_3(t)$

Тоді матимемо наступну нормальну систему того ж таки третього порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) \\ \dfrac{dx_3(t)}{dt} = \dfrac{2x_1(t)}{t^3} \end{cases}$$

◄

Приклад 3.

Звести до нормальної системи наступне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+p(t)\frac{dx(t)}{dt}+q(t)x(t)=0$$

► Покладемо

$$x(t)=x_1(t), \qquad \frac{dx(t)}{dt}=x_2(t).$$

Тоді

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t),\ \frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{dx_2(t)}{dt}$$

Отже нормальна система запишеться у вигляді

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t)\\[2mm] \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-p(t)x_2(t)-q(t)x_1(t)\end{cases}$$

◄

Визначення 4.1.1. Розв'язком системи диференціальних рівнянь називається набір n неперервно диференційованих функцій $x_1(t), \dots, x_n(t)$, які тотожно задовольняють кожному з рівнянь системи.

У загальному випадку розв'язок системи залежить від n - довільних сталих і має вигляд

$$x_1(t, C_1, \dots, C_n), \dots, x_n(t, C_1, \dots, C_n)$$

Задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку ставиться в такий спосіб. Потрібно знайти розв'язок, що задовольняє початковим умовам (умовам Коші):

$$x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0.$$

Визначення 4.1.2. Розв'язок $x_1(t, C_1, \dots, C_n), \dots, x_n(t, C_1, \dots, C_n)$ називається **загальним**, якщо за рахунок вибору сталих $C_1, \dots, C_n$ можна розв'язати довільну задачу Коші.

Для систем звичайних диференціальних рівнянь досить важливим є поняття інтеграла системи. В залежності від гладкості (тобто диференційованості) можна розглядати два визначення інтеграла.

Визначення 4.1.3.

1. Функція $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ стала вздовж розв'язків системи, називається інтегралом системи.

2. Функція $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ повна похідна, якої в силу системи тотожно дорівнює нулю, називається інтегралом системи.

Для лінійних рівнянь існує поняття лінійної залежності і незалежності розв'язків. Для нелінійних рівнянь (систем рівнянь) аналогічним поняттям є функціональна незалежність.

Визначення 4.1.4.

Інтеграли $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, $F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, … , $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ називаються **функціонально незалежними**, якщо не існує функції n- змінних $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ такої, що

$$\Phi(F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \ldots, F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)) \equiv 0.$$

Теорема.

Для того щоб інтеграли $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, $F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$,…, $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ системи звичайних диференціальних рівнянь були функціонально незалежними, необхідно і достатньо, щоб визначник Якобі (якобіан) був відмінний від тотожного нуля, тобто

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

або ж

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 0.$$

Визначення 4.1.5. Якщо $F\ (x_1, x_2,\ \dots\ , x_n, t)$ інтеграл системи диференціальних рівнянь, то рівність $F\ (x_1, x_2,\ \dots\ , x_n, t) = C$ називається **першим інтегралом**.

Визначення 4.1.6. Сукупність n- функціонально незалежних інтегралів називається **загальним інтегралом** системи диференціальних рівнянь.

Власне кажучи **загальний інтеграл** - це **загальний розв'язок** системи диференціальних рівнянь **у неявному вигляді.**

Теорема. (існування та єдиності розв'язку задачі Коші).

Для того щоб система диференціальних рівнянь, розв'язних відносно похідної, мала єдиний розв'язок, що задовольняє умовам Коші: $x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0,\ \dots\ ,\ x_n(t_0)=x_n^0$

Достатньо виконання наступних умов:

1) функції $f_1, f_2, \dots , f_n$ - неперервні за змінними $x_1, x_2, \dots , x_n, t$ в околі початкової точки $x_1^0, x_2^0, \dots , x_n^0, t_0$;

2) функції $f_1, f_2, \dots , f_n$ задовольняють умову Ліпшиця за аргументами $x_1, x_2, \dots , x_n$ у тому ж околі.

Зауваження Т. Умову Ліпшиця можна замінити більш грубою умовою, що перевіряється легше: умовою існування обмежених частинних похідних, тобто

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \le M,\quad i, j = 1,2,\ \dots\ , n.$$

Зауваження 1. Не всяку систему можна звести до одного диференціального рівняння!

Наприклад система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) \end{cases}$$

розпадається на два окремих рівняння. Загальний розв'язок отримується інтегруванням кожного з рівнянь самостійно

$$x_1(t) = C_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{t}.$$

Зауваження 2. Якщо число рівнянь в системі - n, а число невідомих функцій - N, причому $n < N$, то така система називається **невизначеною**. В цьому випадку можна довільно вибирати $N - n$ шуканих функцій (диференційованих необхідну кількість разів), й в залежності від них визначати останні n функцій.

Зауваження 3. Якщо число рівнянь в системі - n, а число невідомих функцій - N, причому $n > N$, то така система може виявитися **несумісною**. Тобто вона не має розв'язку.

4.1.1. Геометрична інтерпретація розв’язків

Назвемо $n+1$ -вимірний простір змінних $x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t$ **розширеним фазовим простором** $\mathfrak{R}^{n+1}$.

Тоді розв’язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ \dots \ , x_n = x_n(t)$ визначає в просторі $\mathfrak{R}^{n+1}$ деяку криву, що називається **інтегральною кривою**.

Загальний розв’язок (чи загальний інтеграл) визначає сім’ю інтегральних кривих, що всюди щільно заповнюють деяку область $D \subset \mathfrak{R}^{n+1}$ (область існування та єдиності розв’язків).

Задача Коші ставиться як виділення із сім’ї інтегральних кривих, окремої кривої, що проходить через задану початкову точку $M(x_1^0, x_2^0, \ \dots \ , x_n^0, t_0) \in D$.

4.1.2. Механічна інтерпретація розв'язків

В евклідовому просторі $\boldsymbol{R}^{n}$ змінних $x_1(t), \ \dots \ , x_n(t)$

розв'язок $x_1 = x_1(t), \ x_2 = x_2(t), \ \dots \ , \ x_n = x_n(t)$

визначає **закон руху** по деякій траєкторії в залежності від часу t.

При такій інтерпретації

функції $f_1, \ f_2, \ \dots \ , \ f_n$ є **складовими швидкості руху**,

простір зміни змінних називається - **фазовим простором**,

система - **динамічною**,

крива, на якій відбувається рух $x_1 = x_1(t), \ x_2 = x_2(t), \ \dots \ , \ x_n = x_n(t)$ - **фазовою траєкторією**.

Фазова траєкторія є проекцією **інтегральної кривої** на **фазовий простір**.

Приклад 4. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -x(t) \end{cases}$$

з початковими даними $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$.

► Продиференціюємо за t перше рівняння системи, і в те що отримали підставимо друге рівняння.

Матимемо одне рівняння другого порядку $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = 0$.

Його розв'язок $x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$.

Тоді (зважаючи на друге рівняння системи) маємо

$$y(t) = -C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$$

Розв'язком задачі Коші матимемо

$$x(t) = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t), \quad y(t) = -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t) \qquad (*)$$

Піднесемо кожне з останніх до квадрату й почленно складемо:

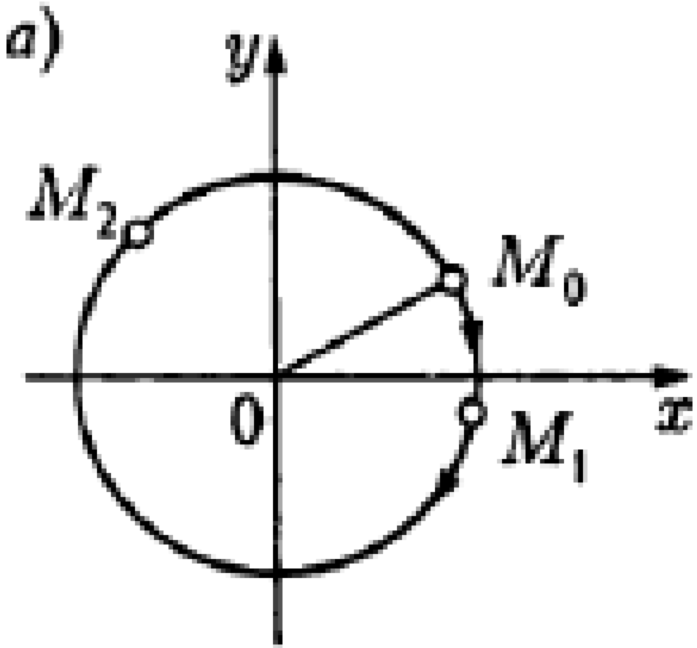
$x^2(t) + y^2(t) = R^2$, де $R = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2}$. (Інтеграл системи).

Це коло, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Провівши деякі нескладні аналітичні міркування

(замінивши рівняння (*) на $x(t) = R\sin(t+\alpha), y(t) = R\cos(t+\alpha)$, де $\sin\alpha = \dfrac{x_0}{R}$, $\cos\alpha = \dfrac{y_0}{R}$)

побачимо, що в залежності від зміни часу, рух точки $M(x(t), y(t))$ відбувається згідно наступного рисунку



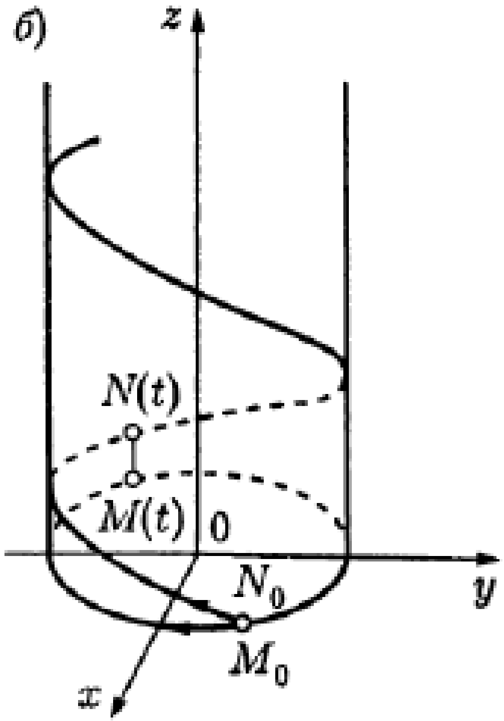
Дамо тепер іншу інтерпретацію отриманого результату.

У трьохвимірному просторі візьмемо праву систему декартових координат O_{xyz}.

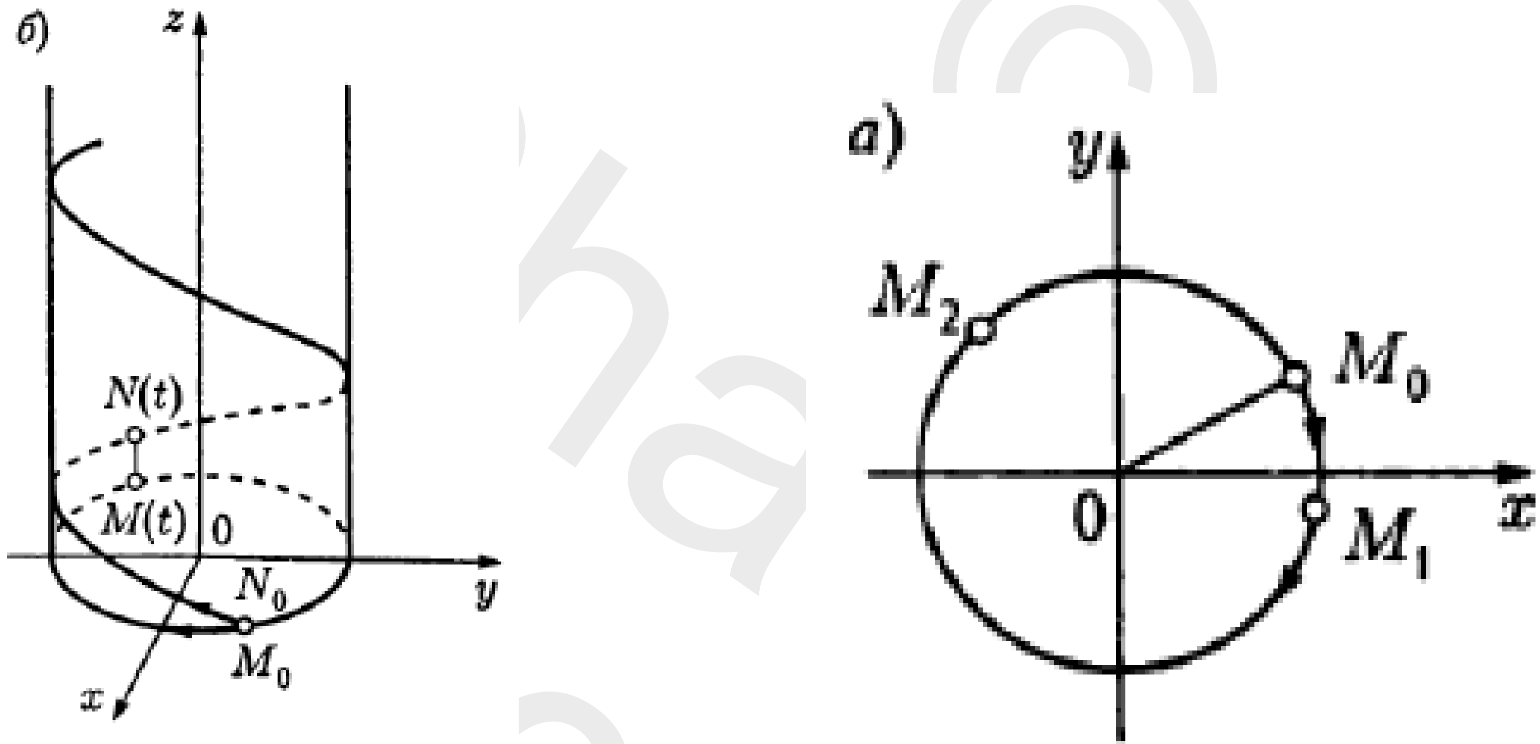
Легко переконатися, що точка $N(x(t), y(t), z(t))$, тобто точка з координатами

$$x(t) = R\sin(t+\alpha), y(t) = R\cos(t+\alpha), z(t) = t$$

рухається відповідно до наступного рис.



Цілком очевидно, що початкові точки M_0 та N_0 співпадають, й при будь якому t точка $N(t)$ проектується на фазову площину у точку $M(t)$.



4.1. Метод виключення

(зведення системи диференціальних рівнянь до одного рівняння)

Частковим випадком канонічної системи диференціальних рівнянь є одне рівняння n-го порядку, що розв’язне відносно старшої похідної

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right).$$

Введенням нових функцій

$$x_1 = x'(t), \quad x_2 = x''(t), \quad \ldots, \quad x_{n-1} = x^{(n-1)}(t)$$

це рівняння заміняється нормальною системою n рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1}, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = f(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \end{cases}$$

Можна стверджувати й зворотнє, що можливо (*згадаємо приклад Зауваження 1*), нормальна система $\boldsymbol{n}$ рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

еквівалентна одному диференціальному рівнянню $\boldsymbol{n}$-го порядку.

На цьому побудовано один з методів інтегрування систем диференціальних рівнянь – **метод виключення.**

Проілюструємо його на прикладі системи двох рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + f(t), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + g(t).$$

Тут a, b, c, d - константи, $f(t), g(t)$ - задані відомі функції, $x(t), y(t)$ - шукані невідомі функції.

З першого рівняння цієї системи знаходимо

$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right).$$

й підставимо праву частину в друге рівняння замість $y(t)$, а похідну правої частини замість $\dfrac{dy(t)}{dt}$.

Отримаємо диференціальне рівняння другого порядку відносно $x(t)$

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx + P(t) = 0,$$

де A, B, C - константи.

Розв'язавши його знаходимо $x(t) = x(C_1, C_2, t)$, далі диференціюємо й маємо $\dfrac{dx(t)}{dt}$.

Підставляємо їх у попередній вираз, отриманий з першого рівняння, й знаходимо $y(t)$.

5. Системи лінійних диференціальних рівнянь.

5.1. Загальні положення.

Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ \ldots \ + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ \ldots \ + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ \ldots \ + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{cases}$$

називається **лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь**.

Система

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{1n}(t)x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{2n}(t)x_n(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{nn}(t)x_n(t) \end{cases}$$

називається **лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь**.

Якщо ввести векторні позначення

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

то лінійну неоднорідну систему можна переписати у вигляді

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

а лінійну однорідну систему у вигляді

$$x'(t) = A(t)x(t) .$$

Якщо функції $a_{ij}(t),\ \ f_i(t),\ \ \ i, j = \overline{1,n}$ неперервні в околі точки $(x_0, t_0) = (x_1^0, x_2^0,\ \dots\ , x_n^0, t_0),$ то виконані умови **теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші**, і існує єдиний розв'язок

$$x_1 = x_1(t),\ \ x_2 = x_2(t),\ \dots\ ,\quad x_n = x_n(t),$$

системи рівнянь, що задовольняє початковим даним

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0,\ \dots\ ,\quad x_n(t_0) = x_n^0.$$

5.1.1. Властивості розв'язків лінійних однорідних систем

Властивість 5.1.1. Якщо вектор $x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ є розв'язком лінійної однорідної системи, то і $Cx(t)=\begin{pmatrix} Cx_1(t) \\ Cx_2(t) \\ \dots \\ Cx_n(t) \end{pmatrix}$, де C - довільна стала скалярна величина, також є розв'язком цієї системи.

Властивість 5.1.2. Якщо дві векторні функції $x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, $x_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}$ є розв'язками однорідної системи, то і їхня сума також буде розв'язком однорідної системи.

Властивість 5.1.3. Якщо вектори $x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, … , $x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ є розв'язками однорідної системи, то і їхня лінійна комбінація з довільними коефіцієнтами також буде розв'язком однорідної системи.

Властивість 5.1.4. Якщо комплексний вектор з дійсними елементами $u(t)+iv(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} v_1(t) \\ \dots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$ є розв'язком однорідної системи, то окремо дійсна $u(t)$ та уявна $v(t)$ частини є розв'язками системи.

Визначення 5.1.1. Вектори $x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, $x_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}$, … , $x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$

називаються **лінійно залежними** на відрізку $t\in[a,b]$, якщо існують не всі рівні нулю сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$, такі, що $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\dots+C_nx_n(t)\equiv 0$ при $t\in[a,b]$.

Якщо тотожність справедлива лише при $C_i=0,\ i=\overline{1,n}$, то вектори **лінійно незалежні**.

Визначення 5.1.2. Визначник, що складається з векторів $x_1(t), x_2(t), \; \dots \;, x_n(t)$, тобто

$$W[x_1(t), \; \dots \;, x_n(t)] = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

називається **визначником Вронського**.

Теорема 5.1.1. Для того щоб розв'язки $x_1(t), \; \dots \;, x_n(t)$ були лінійно незалежні, необхідно і достатньо, щоб $W[x_1(t), \; \dots \;, x_n(t)] \neq 0$ у жодній точці $t \in [a, b]$.

Теорема 5.1.2. **Загальний розв'язок** лінійної однорідної системи представляється у вигляді **лінійної комбінації n лінійно незалежних розв'язків**.

Властивість 5.1.5. Максимальне число незалежних розв'язків дорівнює кількості рівнянь.

Визначення 5.1.3. Матриця, складена з будь-яких n лінійно незалежних розв'язків, називається **фундаментальною матрицею** розв'язків системи.

Якщо лінійно незалежними розв'язками будуть

$$x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix},\ x_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \dots,\ x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

тоді матриця

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

буде **фундаментальною матрицею** розв'язків.

Як випливає з попередньої теореми загальний розв'язок може бути представлений у вигляді

$$x_{одн}(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t),$$

де C_i - довільні сталі.

Якщо ввести вектор $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}$, то загальний розв’язок можна записати у вигляді

$$x_{одн}(t) = X(t)C,$$

де $X(t)$ - фундаментальна матриця розв’язків.

5.1.2. Формула Якобі

Залежність визначника Вронського в довільний момент часу через значення в початковий момент має вигляд

$$W[x_1(t), \ \dots \ , x_n(t)] = W[x_1(t_0), \ \dots \ , x_n(t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^{t} SpA(t)dt\right)$$

і називається **формулою Якобі**.

5.2. Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Система диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ \dots \ + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ \dots \ + a_{2n}x_n(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ \dots \ + a_{nn}x_n(t), \end{cases}$$

де a_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ - сталі величини, називається **лінійною однорідною системою зі сталими коефіцієнтами**.

У матричному вигляді вона записується

$$x'(t) = Ax(t).$$

5.2.1. Розв’язування систем однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом Ейлера.

Розв’язок системи шукаємо у вигляді вектора

$$x(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1 e^{\lambda t}\\ \alpha_2 e^{\lambda t}\\ \dots\\ \alpha_n e^{\lambda t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \alpha_n\end{pmatrix}e^{\lambda t}.$$

Підставивши в систему диференціальних рівнянь, одержимо

$$\begin{cases}\alpha_1\lambda e^{\lambda t}=a_{11}\alpha_1 e^{\lambda t}+a_{12}\alpha_2 e^{\lambda t}+\ \dots\ +a_{1n}\alpha_n e^{\lambda t}\\ \alpha_2\lambda e^{\lambda t}=a_{21}\alpha_1 e^{\lambda t}+a_{22}\alpha_2 e^{\lambda t}+\ \dots\ +a_{2n}\alpha_n e^{\lambda t}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_n\lambda e^{\lambda t}=a_{n1}\alpha_1 e^{\lambda t}+a_{n2}\alpha_2 e^{\lambda t}+\ \dots\ +a_{nn}\alpha_n e^{\lambda t}\end{cases}$$

Скоротивши на $e^{\lambda t}\neq 0$, і перенісши всі члени вправо, запишемо

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ \dots \ + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 + \ \dots \ + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ \dots \ + (a_{nn}-\lambda)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

Отримана однорідна система лінійних алгебраїчних (відносно невідомих α_i, $i = \overline{1,n}$) рівнянь має розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Це рівняння, може бути записаним у векторно-матричній формі

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

і воно називається **характеристичним** (віковим) **рівнянням**.

Розкриємо його

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ \dots \ + p_{n-1}\lambda + p_n = 0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го ступеня має n-коренів.

Розглянемо різні випадки.

1. Всі **корені характеристичного рівняння** $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_n$ **(власні числа матриці** A**)** дійсні і різні.

Підставляючи їх по черзі в систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ \dots \ + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_i)\alpha_2 + \ \dots \ + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ \dots \ + (a_{nn} - \lambda_i)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

одержуємо відповідні ненульові розв'язки системи

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \dots \\ \alpha_n^1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \dots \\ \alpha_n^2 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad, \alpha^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \\ \dots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

що являють собою **власні вектори**, які відповідають власним числам λ_i, $i = \overline{1, n}$.

У такий спосіб одержимо n- розв'язків

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} \\ \dots \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \dots \\ \alpha_n^1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} \\ \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} \\ \dots \\ \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \dots \\ \alpha_n^2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}, \quad \dots \quad, x_n(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^n e^{\lambda_n t} \\ \alpha_2^n e^{\lambda_n t} \\ \dots \\ \alpha_n^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \\ \dots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix} e^{\lambda_n t} \dots$$

Причому оскільки $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_n$- різні, а $\alpha^1, \alpha^2, \ \dots \ , \alpha^n$- відповідні їм власні вектори, то розв'язки $x_1(t), \ \dots \ , x_n(t)$- лінійно незалежні, і загальний розв'язок системи має вигляд

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t).$$

Або у векторно-матричної формі запису

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_1^n e^{\lambda_n t} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_2^n e^{\lambda_n t} \\ \dots & & & \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_n^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix},$$

де $C_1, \ \dots \ , C_n$- довільні сталі.

2. Нехай $\boldsymbol{\lambda = p \pm iq}$ пара комплексно спряжених коренів.

Візьмемо один з них, наприклад $\boldsymbol{\lambda = p + iq}$. Комплексному власному числу відповідає комплексний власний вектор

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + is_1 \\ r_2 + is_2 \\ \dots\dots\dots \\ r_n + is_n \end{pmatrix}$$

і, відповідно, розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1)e^{(p+iq)t} \\ (r_2 + is_2)e^{(p+iq)t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n + is_n)e^{(p+iq)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1) \\ (r_2 + is_2) \\ \dots\dots\dots \\ (r_n + is_n) \end{pmatrix} e^{(p+iq)t}$$

Використовуючи залежність $e^{(p+iq)t} = e^{pt}(\cos qt + i\sin qt)$, перетворимо розв'язок до вигляду:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \\ (r_2 + is_2)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n + is_n)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt - s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\sin qt + s_1\cos qt) \\ e^{pt}(r_2\sin qt + s_2\cos qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\sin qt + s_n\cos qt) \end{pmatrix} = u(t) + iv(t).$$

І, як випливає з властивості 5.1.4 розв'язків однорідних систем, якщо комплексна функція $u(t)+iv(t)$ дійсного аргументу є розв'язком однорідної системи, то окремо дійсна і уявна частини також будуть розв'язками, тобто комплексним власним числам $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ відповідають лінійно незалежні розв'язки

$$u(t) = \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt - s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix}, \quad v(t) = \begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt + s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt + s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt + s_n\sin qt) \end{pmatrix}.$$

3. Якщо характеристичне рівняння має кратний корінь λ кратності γ, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_\gamma = \lambda$, то розв'язок системи рівнянь має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta_1^1 + \beta_1^2 t + \dots + \beta_1^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ (\beta_2^1 + \beta_2^2 t + \dots + \beta_2^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\beta_n^1 + \beta_n^2 t + \dots + \beta_n^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Підставивши його у вихідне диференціальне рівняння і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, одержимо $\gamma \times n$ - рівнянь, що містять $\gamma \times n$-невідомих. Тому що корінь характеристичного рівняння λ має кратність γ, то ранг отриманої системи $\gamma n - \gamma = \gamma(n-1)$. Вводячи γ довільних сталих $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_\gamma$ і розв'язуючи систему, одержимо

$$\beta_i^j = \beta_i^j(C_1, C_2, \dots, C_\gamma), \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,\gamma}.$$

6. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ \dots \ + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{cases}$$

або у векторно-матричному вигляді

$$x'(t) = A(t)x + f(t)$$

називається **системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь**.

6.1. Властивості розв'язків лінійних неоднорідних систем

Властивість 6.1.1.

Якщо вектор $\overline{x(t)} = \begin{pmatrix} \overline{x_1(t)} \\ \overline{x_2(t)} \\ \ldots \\ \overline{x_n(t)} \end{pmatrix}$ є розв'язком лінійної неоднорідної системи, а $x_0(t) = \begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ \ldots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}$ - розв'язком відповідної лінійної однорідної системи, то сума $\overline{x}(t) + x_0(t)$- є розв'язком лінійної неоднорідної системи.

Властивість 6.1.2 (Принцип суперпозиції).

Якщо вектори $x_i = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \dots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}, i = \overline{1,n}$ є розв'язками лінійних неоднорідних систем

$$x'(t) = A(t)x(t) + f_i(t),\ i = \overline{1,n},$$

де $f_i(t) = \begin{pmatrix} f_{1i}(t) \\ \dots\dots\dots \\ f_{ni}(t) \end{pmatrix},$

то вектор $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t),$ де C_i - довільні сталі буде розв'язком лінійної неоднорідної системи

$$x'(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t).$$

Властивість 6.1.3.

Якщо комплексний вектор з дійсними елементами $$x(t) = u(t) + iv(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \dots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$$

є розв'язком неоднорідної системи

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

де $f(t) = p(t) + iq(t)$, $p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \dots\dots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$, $q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \dots\dots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$,

то окремо дійсна $u(t)$ і уявна $v(t)$ частини є розв'язками системи.

Теорема (про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи).

Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи складається із **суми загального розв'язку однорідної системи** і якого-небудь **частинного розв'язку неоднорідної системи**.

6.2. Метод варіації довільних сталих пошуку частинного розв’язку неоднорідної системи

Для лінійної неоднорідної системи на площині

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + f_2(t) \end{cases}$$

метод варіації довільної сталої реалізується таким чином.

Нехай

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix}$$

це фундаментальна матриця розв’язків відповідної однорідної системи.

Тобто загальний розв’язок відповідної однорідної системи має вигляд $x(t)_{\text{з.о.}} = X(t)C$

Тоді частинний розв’язок неоднорідної шукається у вигляді (тобто це загальний однорідного але довільні сталі вже не константи, а вірійовані функції)

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

Де значення $\boldsymbol{C_1(t)}$ та $\boldsymbol{C_2(t)}$ знаходяться з розв'язку системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(t)x_{11}(t)+C_2'(t)x_{12}(t)=f_1(t) \\ C_1'(t)x_{21}(t)+C_2'(t)x_{22}(t)=f_2(t). \end{cases} \qquad (*)$$

Звідси

$$C_1(t)=\int\frac{\begin{vmatrix} f_1(t) & x_{12}(t) \\ f_2(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix}}dt, \qquad C_2(t)=\int\frac{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & f_1(t) \\ x_{21}(t) & f_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix}}dt.$$

І загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix},$$

де $\boldsymbol{C_1, C_2}$ - довільні сталі.

6.3. Формула Коші

Нехай $X(t,t_0)$ - фундаментальна система, нормована при $t=t_0$ тобто $X(t_0,t_0)=E$, де E - одинична матриця.

Загальний розв'язок відповідної однорідної системи має вигляд

$$x(t)=X(t,t_0)C.$$

Вважаючи C невідомою вектор-функцією і повторюючи викладення методу варіації довільної сталої, одержимо систему рівнянь типу (*):

$$X(t,t_0)C'(t)=f(t).$$

Звідси

$$\frac{dC(t)}{dt}=X^{-1}(t,t_0)f(t).$$

Проінтегруємо отриманий вираз і отримаємо

$$C(t)=C+\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau,t_0)f(\tau)d\tau.$$

Тут C - вектор із сталих, що отриманий при інтегруванні системи.

Підставивши у вихідний вираз, одержимо:

$$x(t) = X(t,t_0)[C + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau,t_0) f(\tau) d\tau] =$$

$$= X(t,t_0)C + \int_{t_0}^{t} X(t,t_0) X^{-1}(\tau,t_0) f(\tau) d\tau.$$

Якщо $X(t,t_0)$- фундаментальна матриця, нормована при $t = t_0$, тоді $X(t,t_0) = X(t) X^{-1}(t_0)$.

Звідси

$$X(t,t_0) X^{-1}(\tau,t_0) = X(t) X^{-1}(t_0)[X(\tau) X^{-1}(t_0)]^{-1} = X(t) X^{-1}(\tau) = X(t,\tau).$$

Підставивши початкові значення $x(t_0) = x_0$ і з огляду на те, що $X(t_0,t_0) = E$, одержимо

$$x(t) = X(t,t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau) f(\tau) d\tau$$

формулу Коші, загального розв’язку неоднорідного рівняння.

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння, що задовольняє нульовій початковій умові, має вид

$$x_{ч.н.}(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,\tau) f(\tau) d\tau .$$

Якщо система зі **сталою матрицею** A, тоді

$$X(t,t_0) = X(t-t_0), \qquad X(t,\tau) = X(t-\tau) .$$

І **формула Коші** має вигляд:

$$x(t) = X(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t-\tau) f(\tau) d\tau .$$

6.4. Метод невизначених коефіцієнтів

Якщо система лінійних диференціальних рівнянь **зі сталими коефіцієнтами**, а векторна функція $f(t)$ спеціального виду, то частинний розв'язок можна знайти методом невизначених коефіцієнтів. Доведення існування частинного розв'язку зазначеного виду аналогічно доведенню для лінійних рівнянь вищих порядків.

1) Нехай кожна з компонент вектора $f(t)$ є многочленом степеня ***не більш ніж*** s, тобто

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \ldots\ldots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^1 t + A_s^1 \\ A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^2 t + A_s^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^n t + A_s^n \end{pmatrix}.$$

а) Якщо характеристичне рівняння не має нульового кореня, тобто $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$,
то частинний розв'язок шукається в такому ж вигляді, тобто для всіх рівнянь частинні розв'язки шукаються у вигляді поліномів порядку s

$$\begin{pmatrix} x_1^{ч.н.}(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n^{ч.н.}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^1 t + B_s^1 \\ B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^2 t + B_s^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^n t + B_s^n \end{pmatrix}.$$

б) Якщо характеристичне рівняння має нульовий корінь кратності r, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ \dots \ = \lambda_r = 0$, тоді частинний розв'язок шукається у вигляді многочлена степеня $s + r$ для кожного рівняння, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{ч.н.}(t) \\ \dots\dots \\ x_n^{ч.н.}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^1 t^{s+r} + B_1^1 t^{s+r-1} + \ \dots \ + B_{s+r}^1 \\ B_0^2 t^{s+r} + B_1^2 t^{s+r-1} + \ \dots + B_{s+r}^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_0^n t^{s+r} + B_1^n t^{s+r-1} + \ \dots + B_{s+r}^n \end{pmatrix}.$$

Причому перші $(s+1)n$ коефіцієнти B_i^j, $i = \overline{0, s}$, $j = \overline{1, n}$ знаходяться точно, а інші з точністю до сталих інтегрування $C_1, \ \dots \ , C_n$, що входять у загальний розв'язок однорідних систем.

2) Нехай $f(t)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots\dots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ \dots \ + A_{s-1}^1 t \ + A_s^1) \\ e^{pt}(A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ \dots \ + A_{s-1}^2 t \ + A_s^2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ \dots \ + A_{s-1}^n t \ + A_s^n) \end{pmatrix}.$$

а) Якщо характеристичне рівняння не має коренем значення p, тобто $\lambda_i \neq p,\ i=\overline{1,n}$, то частинний розв'язок шукається в такому ж вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{ч.н.}(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n^{ч.н.}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^1 t \ + B_s^1) \\ e^{pt}(B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^2 t \ + B_s^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^n t \ + B_s^n) \end{pmatrix}.$$

б) Якщо p є коренем характеристичного рівняння кратності r, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ \ldots \ = \lambda_r = p$, то частинний розв'язок шукається у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1^{ч.н.}(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n^{ч.н.}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^{s+r} + B_1^1 t^{s+r-1} + \ \ldots \ + B_{s+r}^1) \\ e^{pt}(B_0^2 t^{s+r} + B_1^2 t^{s+r-1} + \ \ldots \ + B_{s+r}^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(B_0^n t^{s+r} + B_1^n t^{s+r-1} + \ \ldots \ + B_{s+r}^n) \end{pmatrix}.$$

І, як у попередньому пункті, перші $(s+1)n$ коефіцієнти $B_i^j,\ i=\overline{0,s},\ j=\overline{1,n}$ знаходяться точно, а інші з точністю до сталої інтегрування $C_1, \ \ldots \ , C_n$.

3) Нехай $f(t)$ має вигляд:

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \cdots\cdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ \ldots \ + A_{s-1}^1 t \ + A_s^1)\cos qt \\ e^{pt}(A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ \ldots \ + A_{s-1}^2 t \ + A_s^2)\cos qt \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{pt}(A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ \ldots \ + A_{s-1}^n t \ + A_s^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^1 t \ + B_s^1)\sin qt \\ e^{pt}(B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^2 t \ + B_s^2)\sin qt \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{pt}(B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ \ldots \ + B_{s-1}^n t \ + B_s^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$

а) Якщо характеристичне рівняння не має коренем значення $p \pm iq$, то частинний розв'язок шукається в такому ж вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{ч.н.}(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n^{ч.н.}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(C_0^1 t^s + C_1^1 t^{s-1} + \ \ldots \ + C_{s-1}^1 t \ + C_s^1)\cos qt \\ e^{pt}(C_0^2 t^s + C_1^2 t^{s-1} + \ \ldots \ + C_{s-1}^2 t \ + C_s^2)\cos qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(C_0^n t^s + C_1^n t^{s-1} + \ \ldots \ + C_{s-1}^n t \ + C_s^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} e^{pt}(D_0^1 t^s + D_1^1 t^{s-1} + \ \ldots \ + D_{s-1}^1 t \ + D_s^1)\sin qt \\ e^{pt}(D_0^2 t^s + D_1^2 t^{s-1} + \ \ldots \ + D_{s-1}^2 t \ + D_s^2)\sin qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(D_0^n t^s + D_1^n t^{s-1} + \ \ldots \ + D_{s-1}^n t \ + D_s^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$

б) Якщо $p \pm iq$ є коренем характеристичного рівняння кратності r, то частинний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1^{ч.н.}(t) \\ \ldots\ldots \\ x_n^{ч.н.}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(C_0^1 t^{s+r} + C_1^1 t^{s+r-1} + \ \ldots \ + C_{s+r}^1)\cos qt \\ e^{pt}(C_0^2 t^{s+r} + C_1^2 t^{s+r-1} + \ \ldots \ + C_{s+r}^2)\cos qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(C_0^n t^{s+r} + C_1^n t^{s+r-1} + \ \ldots \ + C_{s+r}^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} e^{pt}(D_0^1 t^{s+r} + D_1^1 t^{s+r-1} + \ \ldots \ + D_{s+r}^1)\sin qt \\ e^{pt}(D_0^2 t^{s+r} + D_1^2 t^{s+r-1} + \ \ldots \ + D_{s+r}^2)\sin qt \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{pt}(D_0^n t^{s+r} + D_1^n t^{s+r-1} + \ \ldots \ + D_{s+r}^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними

Однорідні лінійні диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними

Зв’язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними та систем звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

Рівняння з частинними похідними першого порядку має вигляд

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0. \tag{1}$$

Визначення 1. Розв’язком рівняння (1) називається функція

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{2}$$

яка визначена і неперервна разом з частинними похідними в деякій області змінних $x_1, .., x_n$ і перетворює в цій області рівняння (1) в тотожність. При цьому $x_1, .., x_n$ і значення $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ лежать в області визначення функції $\Phi(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

Якщо в рівнянні (1) функція $\Phi(x_1,\ldots, x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n})$ залежить лінійно від частинних похідних шуканої функції, то воно називається ***лінійним***

$$X_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, \ldots, x_n, u). \tag{3}$$

Розглянемо ***однорідне*** рівняння, тобто випадок коли $R(x_1,\ldots,x_n,u) \equiv 0$, а функції $X_i(x_1,\ldots, x_n,u)$, $i = 1,2,\ldots,n$ не залежать від u

$$X_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{4}$$

Рівняння (4) має тривіальний розв’язок $u = c \quad (c = const).$ (5)

Доведемо, що рівняння (4) має безліч розв’язків, відмінних від тривіальних.

Для цього, разом з (4), будемо розглядати систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі (***систему рівнянь характеристик***)

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,\ldots,x_n)}. \tag{6}$$

Наведемо дві теореми, які встановлюють зв'язок між рівнянням (4) і системою (6). Припустимо, що коефіцієнти $X_i(x_1,..,x_n),\ i=\overline{1,n}$ рівняння (4) неперервні разом з частинними похідними по $x_1,..,x_n$ в деякому околі точки $x_1^{\ 0},..,x_n^{\ 0}$ і в цій точці вони *одночасно не перетворюються в нуль* (тобто точка $(x_1^{\ 0},..,x_n^{\ 0})$ не є особливою точкою системи (8)). Наприклад, припустимо, що

$$X_n(x_1^{\ 0},..,x_n^{\ 0}) \neq 0 \tag{8}$$

Теорема 1.

Довільний інтеграл системи рівнянь характеристик (6) є нетривіальним розв'язком рівняння (4).

Теорема 2.

Довільний нетривіальний розв'язок рівняння (4) є інтегралом системи (6).

Приклад 1. Знайти розв'язки лінійного однорідного рівняння з частинними похідними

$$x\frac{\partial U}{\partial x} - 2y\frac{\partial U}{\partial y} - z\frac{\partial U}{\partial z} = 0. \qquad (13)$$

Розв'язок. Запишемо для рівняння (13) систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{-z}. \qquad (14)$$

Для системи звичайних диференціальних рівнянь маємо інтеграли

$$\psi_1 = xz, \quad \text{(прирівнявши перше й третє)}$$
$$\psi_2 = x\sqrt{y} \quad \text{(прирівнявши перше й друге)} \qquad (15)$$

Тому

$$U_1 = xz, \quad U_2 = x\sqrt{y} \qquad (16)$$

є розв'язками рівняння (13).

Загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння з частинними похідними. Розв'язок задачі Коші

Нехай

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \text{ -} \tag{17}$$

незалежні інтеграли системи рівнянь характеристик (6).

Тоді функція

$$u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \tag{18}$$

де $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ – будь-яка диференційована функція, буде розв'язком рівняння (4).

Дійсно, підставимо (18) в (4)

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} =$$

$$= X_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_i} \left(X_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \right) \equiv 0. \tag{19}$$

(*в дужках тотожний нуль, бо цефактично підставлено розв'язки в початкове рівняння(4)*)

Формулу (18) $u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ називають **загальним розв'язком рівняння з частинними похідними** (4).

На відміну від загального розв'язку звичайного диференціального рівняння в (18) входять не довільні сталі, а довільна функція.

Задача знаходження загального розв'язку рівняння (4) **рівносильна задачі знаходження** $(n-1)$ **незалежних інтегралів відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь характеристик** (6).

Розглянемо випадок двох незалежних змінних

$$X(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Y(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{20}$$

Запишемо систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)}. \tag{21}$$

Якщо $\psi(x,y)$ – інтеграл системи (21), тоді

$$z = \Phi(\psi(x,y)) \tag{22}$$

загальний розв'язок рівняння (20).

Тут $\Phi(\psi(x,y))$ довільна неперервно-диференційована функція від ψ.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $$x_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial U}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial U}{\partial x_n}=0. \qquad (23)$$

Розв'язок. Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь (рівнянь характеристик)

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\ldots=\frac{dx_n}{x_n}. \qquad (24)$$

Для системи (24) знаходимо інтеграл

$$\frac{x_2}{x_1}=c_1,\quad \frac{x_3}{x_1}=c_2,\quad \ldots\quad ,\quad \frac{x_n}{x_1}=c_{n-1}. \qquad (25)$$

Тобто

$$\psi_1=\frac{x_2}{x_1},\quad \psi_2=\frac{x_3}{x_1},\quad \ldots\quad ,\quad \psi_{n-1}=\frac{x_n}{x_1}. \qquad (26)$$

Тоді функція

$$U=\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right), \qquad (27)$$

буде **загальним розв’язком системи** (23), де $\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right)$ – неперервно-диференційована функція.

Приклад 3. Розв’язати рівняння

$$(z-y)\frac{\partial U}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial U}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial U}{\partial z}=0. \tag{29}$$

Розв'язок. Складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь характеристик

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}. \tag{30}$$

Легко визначити (*створивши інтегровані комбінації*):

$\psi_1 = x+y+z$, *(склали чисельники й знаменники покомпонентно)*

(31)

$\psi_2 = x^2+y^2+z^2$.*(склали чисельники й знаменники покомпонентно множені на x, y , z відповідно)*

Тому загальний розв’язок має вигляд

$$U=\Phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2). \tag{32}$$

Перейдемо до постановки і розв'язання **задачі Коші** для рівняння (4).

Серед всіх розв'язків рівняння знайти такий

$$u = f(x_1,\dots,x_n), \tag{33}$$

який задовольняє початковій умові

$$u = \varphi(x_1,\dots,x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = x_n^{(0)}, \tag{34}$$

або

$$u\Big|_{x_n = x_n^{(0)}} = \varphi(x_1,\dots,x_{n-1}), \tag{35}$$

де $\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$ - задана неперервно-диференційована функція від $x_1,\dots,x_{n-1}$.

Для випадку двох змінних:

знайти функцію

$$z = f(x, y), \tag{36}$$

яка задовольняє умові

$$z = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = x^{(0)}. \tag{37}$$

Геометрично (36), (37) означає, що серед всіх інтегральних поверхонь необхідно знайти ту, яка проходить через задану криву (37) при $x = x^{(0)}$.

Ця крива лежить в площині $x = x_0$, яка паралельна площині YOZ.

В загальному випадку розв'язування задачі Коші зводиться до визначення вигляду функції $\Phi(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})$ так , щоб

$$\Phi(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})\Big|_{x_n=x_n^{(0)}}=\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}). \tag{38}$$

Введемо позначення

$$\begin{cases} \psi_1(x_1,\ldots,x_n)\Big|_{x_n=x_n^{(0)}}=\overline{\psi_1} \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)\Big|_{x_n=x_n^{(0)}}=\overline{\psi}_{n-1} \end{cases}. \tag{39}$$

Тоді (38) перепишемо так

$$\Phi(\overline{\psi_1},\ldots,\overline{\psi}_{n-1})=\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}). \tag{40}$$

Розв'яжемо систему (39) в околі точок $x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}$, відносно $x_1,\ldots,x_{n-1}$ (це можливо так як $\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}$ – незалежні інтеграли)

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi_1},\ldots,\overline{\psi}_{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi_1},\ldots,\overline{\psi}_{n-1}) \end{cases}. \qquad (41)$$

Тоді функцію $\Phi(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})$ вибираємо таким чином

$$\Phi(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}),\ldots,\omega_{n-1}(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})). \qquad (42)$$

В цьому випадку умова (40) буде виконуватися

$$\Phi(\overline{\psi_1},\ldots,\overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1}),\ldots,\omega_{n-1}(\overline{\psi}_1,\ldots,\overline{\psi}_{n-1})) = \varphi(x_1,\ldots,x_{n-1}).$$

Тому функція

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}),\ldots,\omega_{n-1}(\psi_1,\ldots,\psi_{n-1})) \qquad (43)$$

– шуканий розв’язок задачі Коші.

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

при умові $z = \varphi(y)$ при $x = 0$.

Розв'язок. Складаємо систему рівнянь характеристик $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{-x}$,

звідси $\psi = x^2 + y^2$ – інтеграл.

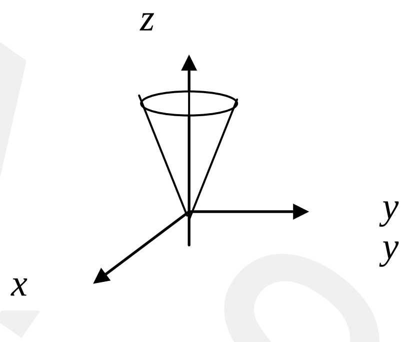
Отже

$$y^2 = \overline{\psi}, \quad y = \sqrt{\overline{\psi}}.$$

Шуканий розв'язок $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Розглянемо можливі випадки в залежності від вигляду функції $\varphi(y)$:

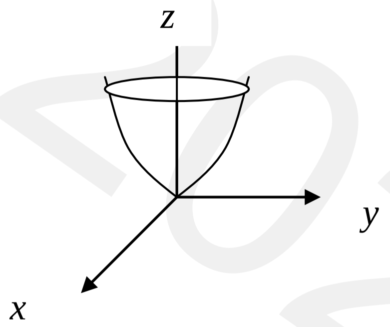
а) $\varphi(y) = y$.   Тоді $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z^2 = x^2 + y^2$



Мал.1

Розв'язок – конус, який отриманий обертанням прямої $z = y$ навколо осі OZ (мал. 1);

б) $\varphi(y) = y^2$, $z = x^2 + y^2$



Мал. 2

Розв'язок – параболоїд, який отриманий обертанням параболи $z = y^2$ навколо осі OZ (мал. 2).

Розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$X_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,...,x_n,u). \qquad (44)$$

Розв'язок диференціального рівняння (44) шукаємо у вигляді

$$V(x_1,...,x_n,u)=0, \qquad (45)$$

де

$V(x_1,...,x_n,u)$ - неперервно-диференційована функція по всім змінним і

$\dfrac{\partial V(x_1,...,x_n,u)}{\partial u}\neq 0$ в околі точки $(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)},u^{(0)})$.

Припустимо, що в (45) $u(\cdot)$ залежить від $x_1,...,x_n$.

Продиференціюємо (45) за x_k

$$\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k}=0, \quad k=1,2,...,n$$

Звідси

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_k}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \quad k = 1,2,...,n. \tag{46}$$

Підставивши (46) в (44), отримаємо

$$X_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + ... + X_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + R(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0. \tag{47}$$

Рівняння (47) – це вже однорідне рівняння типу (4).
Його розв’язуємо по відомій схемі:
а) складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь характеристик

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,...,x_n,u)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1,...,x_n,u)} = \frac{du}{R(x_1,...,x_n,u)}; \tag{48}$$

б) знаходимо n незалежних інтегралів

$$\psi_1(x_1,...,x_n,u), \; ... \;, \psi_n(x_1,...,x_n,u); \tag{49}$$

в) записуємо загальний розв’язок

$$V = \Phi(\psi_1(x_1,...,x_n,u),...,\psi_n(x_1,...,x_n,u)) = 0. \tag{50}$$

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=mu \quad (m\neq 0).$$

Розв'язок. Складаємо систему рівнянь характеристик

$$\frac{dx_1}{x_1}=\ldots=\frac{dx_n}{x_n}=\frac{du}{mu}.$$

Знаходимо інтеграли

$$\psi_1=\frac{x_2}{x_1},\quad \psi_2=\frac{x_3}{x_1},\quad \ldots\quad ,\quad \psi_{n-1}=\frac{x_n}{x_1},\quad \psi_n=\frac{u}{x_1{}^m}.$$

Тоді

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1},\frac{u}{x_1^m}\right)=0 \tag{51}$$

– загальний розв’язок.

Якщо вдасться розв’язати (51) відносно $\dfrac{u}{x_1{}^m}$, то отримаємо

$$u=x_1^m f\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\right)$$

–загальний розв’язок в явній формі.

Задача Коші ставиться та розв'язується для рівняння (44) аналогічно:

знайти таку функцію

$$u = f(x_1,...,x_n), \tag{52}$$

яка задовольняє початковій умові

$$u = \varphi(x_1,...,x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = x_n^{(0)}, \tag{53}$$

де $\varphi(x_1,...,x_{n-1})$ – задана неперервно-диференційована функція від $x_1,...,x_{n-1}$.