БІЛЕТ № 22

1. Класичне визначення ймовірності.

2. У результаті перевірки 500 контейнерів зі скляними виробами було добуто такі дані про кількість пошкоджених виробів:

i	n_i	I	n_i
0	199	5	3
1	169	6	1
2	87	7	1
3	31	8 і більше	0
4	9		
		Разом	500

(i – число пошкоджених виробів, n_i– к-ть контейнерів з i пошкодженими виробами). Чи можна вважати, що к-ть пошкоджених виробів, яка припадає на контейнер, підпорядковується закону Пуассона з довірчою йм. 0,95.

3. Нехай ξ та η – незалежні випадкові величини рівномірно розподілені на [0,2]. Знайти функцію розподілу та щільність для $\eta+\xi$.

4. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ – вибірка з щільністю $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\{-\frac{x}{\theta}\}$, якщо $x>0$. Чи буде $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ ефективною, незсунутою і консистентною оцінкою параметра θ?

Екзаменаційна робота

з теорії ймовірностей і математичної статистики

студента групи ПС-21

Вербицького Артема Віталійовича

Зобов'язуюсь дотримуватись академічної доброчесності

21 грудня 2023 Верб

2.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8+
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1	0

$n = \sum_{i=0}^{7} n_i = 500$ - незалежних спостережень

$H_0: P\{\xi_0 = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, \ldots$

За оцінку параметра λ візьмемо вибіркове середнє:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{500}(0\cdot199 + 1\cdot169 + 2\cdot87 + 3\cdot31 + 4\cdot9 + 5\cdot3 + 6\cdot1 + 7\cdot1) = 1$$

Отже, гіпотетичний розподіл має вигляд

$$P\{\xi_0 = k\} = \frac{1}{k!} e^{-1}, \ k = 0, 1, \ldots$$

$$\hat{\chi}^2_n = \frac{(199 - 500e^{-1})^2}{500e^{-1}} + \frac{(169 - 500e^{-1})^2}{500e^{-1}} + \frac{(87 - 500\frac{1}{2!}e^{-1})^2}{500\frac{1}{2!}e^{-1}} +$$

$$+ \frac{(31 - 500\frac{1}{3!}e^{-1})^2}{500\frac{1}{3!}e^{-1}} + \frac{(9 - 500\frac{1}{4!}e^{-1})^2}{500\frac{1}{4!}e^{-1}} + \frac{(3 - 500\frac{1}{5!}e^{-1})^2}{500\frac{1}{5!}e^{-1}} +$$

$$+ \frac{(1 - 500\frac{1}{6!}e^{-1})^2}{500\frac{1}{6!}e^{-1}} + \frac{(1 - 500\frac{1}{7!}e^{-1})^2}{500\frac{1}{7!}e^{-1}} \approx 31{,}962$$

$\chi^2_{0{,}95;6} = 12{,}592 \Rightarrow$ нульову гіпотезу відхиляємо //

3. $f_\xi(x) = f_\eta(x) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x-y) f_\eta(y)\,dy = \int_a^b f_\xi(x-y)\cdot f_\eta(y)\,dy = \int_{\max(0;x-2)}^{\min(2;x)} \frac{1}{4}\,dy = \frac{1}{4} y \Big|_{\max(0;x-2)}^{\min(2;x)} =$$

$$= \frac{1}{4}(\min(2;x) - \max(0;x-2)) = \begin{cases} \frac{1}{4}x, & x \in [0;2] \\ 1 - \frac{1}{4}x, & x \in [2;4] \\ 0, & x \notin [0;4] \end{cases}$$

$x-y \in [0;2]$, $y \in [0;2]$ $\begin{cases} 0 \le x-y \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2+x \le y \le x \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$ $\max(0; x-2) \le y \le \min(2;x)$

Відскановано за допомогою CamScanner

$$F_{\xi+\eta}(x) = \int f_{\xi+\eta}(x)dx = \begin{cases} \frac{x^2}{8}, & x \in [0;2] \\ x - \frac{x^2}{8}, & x \in (2;4] \\ 0, & x \notin [0;4] \end{cases}$$

3. $$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k;$$

$$M\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x;\theta)dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \left| \begin{matrix} x = u & dv = e^{-\frac{x}{\theta}} \\ dx = du & v = -\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(-\left(x \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} - \int e^{-\frac{1}{\theta}} dx\right)\right)\Big|_0^{+\infty} = \left(-\left(x e^{-\frac{x}{\theta}} + \theta \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\right)\Big|_0^{+\infty} = \theta$$ – незміщена

$$M\hat{\theta}^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = e^{-\frac{x}{\theta}} \\ du = 2x dx & v = -\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \end{matrix} \right| = \left(-\left(x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} - 2\int x e^{-\frac{x}{\theta}} dx\right)\right)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \left(-\left(x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} + 2\theta x e^{-\frac{x}{\theta}} + 2\theta^2 e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\right)\Big|_0^{+\infty} = 2\theta^2$$

$$D\hat{\theta} = M\hat{\theta}^2 - (M\hat{\theta})^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

$$L(x,\theta) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k,\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n} x_k}$$

$$\ln L(x,\theta) = -n\ln\theta - \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x,\theta) = \frac{-n\theta + \sum_{k=1}^{n} x_k}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L(x,\theta) = \frac{n\theta - 2\sum_{k=1}^{n} x_k}{\theta^3}$$

$$I(\theta) = -M\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L(\xi,\theta) = -\frac{n\theta - 2n\theta}{\theta^3} = \frac{n}{\theta^2}$$

Бачимо, що $D\hat{\theta} = (I(\theta))^{-1} \Rightarrow$ оцінка ефективна

1. Закон великих чисел

$$M\xi = \theta$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{n} \xrightarrow{P} M\xi = \theta, \; n \to \infty$$

2. Теорема про суперпозицію

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow{P} M\xi = \theta, \; n \to \infty$$

Отже, оцінка є конзистентною