Вербицький Артем ПС-21

1. $\begin{pmatrix} x & y \\ ay & x \end{pmatrix}$, a — фіксоване відмінне множення

$d = x^2 - ay^2$ — визначник матриці $\begin{pmatrix} x & y \\ ay & x \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{x^2 - ay^2} \begin{pmatrix} x & -y \\ -ay & x \end{pmatrix} \Rightarrow$ обернений елемент належить множині

Візьмемо довільні дійсні x_1, y_1, x_2 та y_2

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ ay_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ ay_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + ay_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ \underbrace{a(x_1y_2 + x_2y_1)}_{m} & \underbrace{x_1x_2 + ay_1y_2}_{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & m \\ am & n \end{pmatrix}$$

Отже, добуток також належить множині, тобто вона замкнена.

Висновок. Множина є групою. //

2. $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(Z)$; $|g| = -1$

$g^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$g^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$g^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Порядок 4 //

3. $f: R^+ \to R$, $f(x) = \log_2 x$

$f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$

$\log_2 (a \cdot b) = \log_2 a + \log_2 b \Rightarrow$ гомоморфізм

Логарифмічна функція є бієкцією на $R^+ \to R \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ є ізоморфізмом //

4. $q = 2$, $n = 6$

Знайдемо кількість незвідних многочленів

$$N_6 = \frac{1}{6} \sum_{d|6} \mu\left(\frac{6}{d}\right) 2^d = \frac{1}{6} (2 + 64 - 4 - 8) = \frac{54}{6} = 9$$

$I(q, n, x) = \prod_m \varphi_m(x)$

$2^6 - 1 = 63$	3	7	9	21	63
$2^6 \equiv 1$	X	X	V	V	V
	$2^2 \equiv 1$	$2^3 \equiv 1$			

Отже, $I = \Phi_9 \Phi_{21} \Phi_{63}$

$\Phi_9 = x^6 + x^3 + 1$ — незвідний $\mid \varphi(9) = 6,\ d = 6$

$\Phi_{21} = x^{12} + x^{11} + x^9 + x^8 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1 \mid \varphi(21) = 12,\ d = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ можна розбити на 2 незвідних

$\Phi_{63} = x^{36} + x^{33} + x^{27} + x^{24} + x^{18} + x^{12} + x^9 + x^3 + 1 \mid \varphi(63) = 36,\ d = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ можна розбити на 6 незвідних

$1 + 2 + 6 = 9$ — кількість співпадає з виведеним на початку

Φ_9 - єдиний незвідний круговий многочлен

Підставимо замість x значення $\underline{x+1}$

$(x+1)^6 + (x+1)^3 + 1 = x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$ — отримуємо новий

незвідний многочлен //