2. Довести, що $A, B, C \vdash (A \land B) \to C$

$\vdash C \to ((A \land B) \to C)$ (I. 1) За лемою:

$\vdash (A \land B) \to C$ (M. P.) $A, B \vdash (A \land B)$

Отже $A, B, C \vdash (A \land B) \to C$

3. Дослідити формулу:

$\forall x (P(x) \to \neg Q(x)) \to \neg(\forall x P(x) \land \exists x Q(x))$. (1)

Візьмемо заперечення:

$\neg(\forall x (P(x) \to \neg Q(x)) \to \neg(\forall x P(x) \land \exists x Q(x)))$

Зведемо до нормальної форми:

$\neg(\neg\forall x (\neg P(x) \lor \neg Q(x)) \lor (\exists x \neg P(x) \lor \forall x \neg Q(x)))$

$\forall x (\neg P(x) \lor \neg Q(x)) \land (\forall x P(x) \land \exists x Q(x))$

$\forall x (\neg P(x) \lor \neg Q(x)) \land \forall x \exists z (P(x) \land Q(z))$

$\forall x \forall y \exists z ((\neg P(x) \lor \neg Q(x)) \land P(y) \land Q(z))$

Елімінуємо квантор існування: $z \to f(x, y)$

$\forall x \forall y ((\neg P(x) \lor \neg Q(x)) \land P(y) \land Q(f(x, y)))$

Множина диз'юнктів:

$S = \{\neg P(x) \lor \neg Q(x), P(y), Q(f(x, y))\}$

Ербранівський універсум:

$E = \{a, f(a,a), f(f(a,a), f(a,a)), f(f(a,a), a), \dots\}$

Виведемо порожній диз'юнкт:

1. $\neg P(f(a,a)) \vee \neg Q(f(a,a))$

2. $P(f(a,a))$

3. $\neg Q(f(a,a))$ 1+2

4. $Q(f(a,a))$

5. $\square$ 3+4

Отже отримано порожній диз'юнкт.
Це означає що заперечення до формули (1) є суперечливою тому формула (1) є тавтологією.