1) Означення інтеграла Рімана.

Який інтеграл еквівалентний наступній границі: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{9(i-1)}{n}}\frac{9}{n}$;

Інтегралом Рімана називається число $I \in \mathbb{R}$ функції $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, якщо $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$:

$\forall (P=P([a,b]), \xi_P), \|P\|<\delta \Rightarrow |I-S_P(f,\xi_P)|<\varepsilon$,

де $P=P([a,b])$ - розбиття, $S_P(f,\xi_P)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ - інтегральна сума Рімана.

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{9(i-1)}{n}}\frac{9}{n} = \frac{1}{n}$$

2. Теорема про зв'язок інтеграла Н-Л та суми Рімана

Нехай $[a,b]\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ інтегровна в розумінні Ньютона-Лейбніца на $[a,b]$. Тоді $\forall P=P_{[a,b]}$ існує ξ_P і в силу адитивності інтеграла Н-Л відносно меж інтегрування виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) = S_P(f,\xi_P)$$

Доведення. Нехай F - первісна f на $[a,b]$, тоді $\forall k=\overline{0,n-1}$:

$$F(x_{k+1})-F(x_k)=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = F'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)=f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$

⇒ за теоремою Лагранжа $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx =$
$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = S_p(f, \xi_p)$ □

3) Довести наступну властивість інтегровної за Ріманом ф-ції:
Якщо $f \in R[a,b]$, $g \in R[a,b]$, то $\forall \alpha, \beta$ $(\alpha f + \beta g) \in R[a,b]$
і $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$
За означенням інтегровної за Ріманом функції, існують границі інтегральних сум
$\lim_{n\to\infty} S_p(f, \xi_p) = \int_a^b f(x)\,dx$ і $\lim_{n\to\infty} S(g, \xi_p) = \int_a^b g(x)\,dx$

Оскільки $S_p(\alpha f + \beta g, \xi_p) = \alpha S_p(f, \xi_p) + \beta S(g, \xi_p)$, то існує границя $\lim_{n\to\infty} S_p(\alpha f + \beta g, \xi_p) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$.
⇒ $f + g \in R[a,b]$ ⇒ рівність доведена □
4) Чи інтегровна за Ріманом ф-ція $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in R \setminus Q \end{cases}$
Оберемо довільний відрізок $[a,b]: -\infty < a < b < +\infty$.
Оберемо довільне розбиття відрізка $P = P([a,b]) = \{x_k \mid k = \overline{0,n}\}$
Складемо інтегральні суми для наборів точок $\xi_p = \{\xi_k \mid k = \overline{0,n-1}\}$
та $\theta_p = \{\theta_k \mid k = \overline{0,n-1}\}$, де $\xi_k \in Q \cap [x_k, x_{k+1}]$, $\theta_k \in [x_k, x_{k+1}] \setminus Q$
$S_p(f, \xi_p) = \sum_{k=0}^{n-1} D(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot (x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 = b - a$
$S_p(f, \theta_p) = \sum_{k=0}^{n-1} D(\theta_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0$
⇒ не існує границі інтегральних сум ф-ції $D(x)$ на довільному відрізку $[a,b] \subset R$
⇒ вона не інтегровна

5) Теорема про диференційовність ІФВМ

Обчислити похідну ф-ції $g'(4)$, якщо $g(x) = \int_{10}^{x} \frac{t^2-6}{\sqrt{t}}\,dt$

Якщо $f \in R[a, b]$, то Φ диференційована в кожній точці $x \in [a, b]$, в якій f неперервна і при цьому в цих точках $\Phi'(x) = f(x)$

$g'(x) =$

6) Формула Бонне. Продемонструвати графіком

~~Нехай ф-ція $f: [a, b] \to R$~~

$$\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt = g(a)\int_a^{\xi} f(t)\,dt + g(b)\int_{\xi}^{b} f(t)\,dt$$

7) Площа плоскої фігури

в п. к.: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$

$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\,d\varphi$

$S(\Phi) = \int_{\alpha} x(t)\cdot y'(t)\,dt$