Варіант 55

1. Знайти відносні похибки аргументів, які дають змогу обчислити з точністю 6% значення функції $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1 x_2}{x_3^2}$, де $x_1^* = 1,23$, $x_2^* = 1,07$, $x_3^* = 2,31$. Використати принцип рівних абсолютних похибок аргументів.

2. Проробити дві ітерації методу простої ітерації для розв'язання системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sin(x - 0,6) - y = 1,6 \\ 3x - \cos y = 0,9 \end{cases}$$

За початкове наближення обрати точку $x_0 = 1,25$, $y_0 = 0$. Перевірити умову збіжності. Записати умову закінчення ітераційного процесу, $\varepsilon = 0.01$.

3. Знайти визначник системи методом Гаусса з вибором головного по рядках у матричній формі

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

4. З яким кроком h потрібно розбити відрізок [100; 104], щоб кусковою інтерполяцією першого степеня знайти наближене значення функції $f(x) = \ln x$ з точністю 0.001?

5. Знайти $f'(2h)$ методом невизначених коефіцієнтів для функції, що задана такими значеннями $f(0)$, $f(h)$, $f(2h)$

Варіант 88

1. $\delta(f^*) = 6\%$; $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_2}{x_3^2}$,

$x_1^* = 1,23$, $x_2^* = 1,07$, $x_3^* = 2,31$

$$\delta(f^*) = \delta(x_1^*) + \delta(x_2^*) + \delta(x_3^{**})$$

$$\Delta x_1^* = \Delta x_2^* = \Delta x_3^* = \delta$$

$$\delta(x_i^*) = \frac{\delta}{x_i^*}$$

$$\delta(f^*) = \delta\left(\frac{1}{x_1^*} + \frac{1}{x_2^*} + \frac{2}{x_3^*}\right) =$$

$$= \delta(0,813 + 0,935 + 0,866) \approx \delta \cdot 2,614$$

$$\delta \le \frac{0,06}{2,614} \approx 0,02296$$

$$\delta(x_1^*) = \frac{\delta}{x_1^*} = \frac{0,02296}{1,23} \approx 0,0187 \; (1,87\%)$$

$$\delta(x_2^*) = \frac{\delta}{x_2^*} = \frac{0,02296}{1,07} \approx 0,0215 \; (2,15\%)$$

$$\delta(x_3^*) = \frac{\delta}{x_3^*} = \frac{0,02296}{2,31} \approx 0,00994 \; (0,99\%)$$

2. $\begin{cases} \sin(x-0,6) - y = 1,6 \\ 3x - \cos y = 0,9 \end{cases}$, $x_0 = 1,25$, $y_0 = 0$, $\varepsilon = 0,01$.

Зведемо систему до вигляду $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x})$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(\cos y + 0,9) \\ y = \sin(x-0,6) - 1,6 \end{cases}$$

$$A = \varphi'(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3}\sin y \\ \cos(x-\frac{3}{5}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = A(x_0; y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos\frac{13}{20} & 0 \end{pmatrix}$$

$\|A_0\|_1 = \cos\frac{13}{20} < 1 \Rightarrow$ є збіжність

Ітерація 1.

$x_1 = \frac{1}{3}(\cos y_0 + 0,9) = \frac{1}{3}(\cos 0 + 0,9) \approx 0,63$

$y_1 = \sin(x_0 - 0,6) - 1,6 = \sin(1,25 - 0,6) - 1,6 \approx -0,99$

$\|(0,63; -0,99)^T - (1,25; 0)^T\|_\infty = 0,99 > 0,01$

Ітерація 2

$x_2 = \frac{1}{3}(\cos(-0,99) + 0,9) \approx 0,48$

$y_2 = \sin(0,63 - 0,6) - 1,6 \approx -1,57$

$\|(0,48; -1,57)^T - (0,63; -0,99)^T\|_\infty = 0,58 > \varepsilon$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

$$\bar{A}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \boxed{2} & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_1 = P_1 \bar{A}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = M_1 \tilde{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad P_2 = E, \quad \tilde{A}_2 = P_2 \bar{A}_1 = \bar{A}_1$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{A}_2 = M_2 \tilde{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 \end{array}\right)$$

$P_3 = E$

$$\tilde{A}_3 = P_3 \bar{A}_2 = \bar{A}_2 \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_3 = M_3 \tilde{A}_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$x_3 = 2$

$x_2 = 0 + x_3 = 2$

$x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 - 1 - 1 = -1$

К-сть перестановок: $p = 1$

$$\operatorname{Det} A = (-1)^p \tilde{a}_{11}^{(1)} \tilde{a}_{22}^{(2)} \tilde{a}_{33}^{(3)} = (-1)^1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) = -1$$

Отже, розв'язок системи: $(2; 2; -1)^T$, $\operatorname{Det} A = -1$ //

4. $[100; 104]$, $f(x) = \ln x$, $\varepsilon = 0{,}001$

$$|f(x) - L_1(x)| \le \frac{M_2 h^2}{8} \le \varepsilon \Rightarrow h \le \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$M_2 = \left| -\frac{1}{100^2} \right| = 0{,}0001$$

$$h \le \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3}}{10^{-4}}} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}944$$

Отже, для даної точності візьмемо крок $h = 4$, тоді відрізок складатиметься з 1 частини

5. $f'(2h),\ f(0),\ f(h),\ f(2h)$

$$f'(2h) = c_1 f(0) + c_2 f(h) + c_3 (2h)$$

$f=1 \quad 0 = c_1 + c_2 + c_3$

$f=x \quad 1 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot h + c_3 \cdot 2h$

$f=x^2 \quad 4h = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot h^2 + c_3 \cdot 4h^2$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = \frac{1}{h} \\ c_2 + 4c_3 = \frac{4}{h} \end{cases}$$

$c_1 = \frac{1}{2h}$; $c_2 = -\frac{2}{h}$; $c_3 = \frac{3}{2h}$

$$f'(2h) \approx \frac{1}{2h} f(0) - \frac{2}{h} f(h) + \frac{3}{2h} f(2h) =$$

$$= \frac{f(0) - 4f(h) + 3f(2h)}{2h}$$