## **Заняття №5**

## **Математичне сподівання**

Дискретна випадкова величина  називається сумовною, якщо ряд  збігається абсолютно. В цьому випадку сума цього ряду



називається математичним сподіванням.

**Теорема 1.** Математичне сподівання має наступні властивості:

1. якщо  індикатор події *А*, то ;
2. для будь-якої константи *c* ;
3. якщо випадкові величини  і  сумовні, то  теж сумовна і ;
4. якщо  (з імовірністю 1), то ;
5. якщо  (з імовірністю 1) і  то ;
6. для будь-якої константи *c* ;
7. ;
8. ;
9. Математичне сподівання функції від випадкової величини



Математичне сподівання  називається моментом *п-го* порядку випадкової величини . Абсолютним моментом *п*-го порядку будемо називати . Центральним моментом *п-го* порядку і абсолютним центральним моментом *п-го* порядку називається відповідно  і .

Центральний момент другого порядку називається дисперсією випадкової величини і позначається .

**Властивості дисперсії.**

1) Дисперсія будь-якої випадкової величини невід’ємна:

.

Наслідком з цієї властивості буде нерівність: .

2) Дисперсія сталої дорівнює нулю: .

3) Сталий множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його до квадрату:

.

4) Дисперсія суми сталої і випадкової величин дорівнює дисперсії самої випадкової величини: .

5) Якщо  і  деякі сталі, тоді .

**Приклад 1.** Проілюструємо вплив аномальних значень випадкової величини на її математичне сподівання та дисперсію.

Нехай ми маємо ряд розподілу випадкової величини :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини:



Тепер розглянемо випадкову величину , яка має наступний розподіл:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 100 |
|  |  |  |  |



**Задача 1.** Випадкова величина  дорівнює числу появ гербів при двох підкиданнях монети. Потрібно записати розподіл цієї випадкової величини і знайти  та .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |



**Задача 2.** Випадкова величина ξ приймає значення -1, 0, 1, 2 з ймовірностями 0.2, 0.1, 0.3 і 0.4 відповідно. Знайти розподіл випадкової величини η = 2ξ , Mη і Dη.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 0 | 1 | 2 |
|  | 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.4 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.5 | 1 | 2 | 4 |
|  | 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.4 |

;



.

**Задача 3.** Випадкова величина ξ приймає значення -2, -1, 0, 1, 2 з рівними ймовірностями. Знайти розподіл випадкової величини , Mη та Dη.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |



## **Генератриси цілочислових випадкових величин**

Дискретну випадкову величину , яка приймає цілі невід’ємні значення, будемо називати цілочисловоювипадковою величиною. Закон розподілу цілочислової величини визначається ймовірностями

.

Генератрисоюцілочислової випадкової величини  будемо називати функцію

.

Через закон розподілу генератриса подається сумою ряду

,

який абсолютно збігається при .

Так як , то між законами розподілу  і генератрисами встановлюється взаємно однозначна відповідність.

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію цілочислової випадкової величини  за допомогою генератриси:

1) ; ;

2) 





**Задача 4.** За допомогою генератриси, знайти математичні сподівання та дисперсії для біноміального, пуассонівського та геометричного розподілів.

1) .

;







2) 

;







3) 







.

**Завдання для самостійної роботи.**

1) Випадкова величина  має розподіл Паскаля

.

Знайти генератрису, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

2) Нехай цілочислова випадкова величина  має генератрису . Знайти через генератрису та її похідні загальне співвідношення для .