1. **Теорема про сумування.**

**Теорема 2.1** (про сумування)**.**Нехай функція *g* примітивно рекурсивна. Тоді функція *f*, яка визначається рівністю

теж примітивно рекурсивна.

Доведемо побудувавши алгоритм, що обчислює функцію *f.*

*1 спосіб*

function  *f*(*x*)

         begin

              if *x* = 0  then  *f* := *g*(0)

              else  *f* := *f*(*x* – 1) + *g*(*x*)

         end.

*2 спосіб*

function *f*(*x*)

         begin

*s* := 0

              for *i* = 0 to *x*

*s* := *s* + *g*(*i*)

*f* := *s*

         end.

З теореми випливають два наслідки.

**Наслідок 2.1.** Якщо функція *g* примітивно рекурсивна, то 2-місна функція *f*, яка визначається схемою

також ПР функція.

Доведемо побудувавши алгоритм, що обчислює функцію *f,* використавши другий алгоритм з доведення теореми.

function *f*(*x,y*)

begin

if *x* > *y* then *f* := 0

else

begin

*s* := 0

for *i* = *x* to *y*

*s* := *s* + *g*(*i*)

*f* := *s*

end

end.

**Наслідок 2.2.** Якщо *g*, *h*, *k* – ПР функції, то функція *f*\*, що визначається

співвідношенням

також ПР функція.

Ця функція є суперпозицією функції *f* з наслідку 2.1 та функцій *h*, *k* (*f*\*(*x*)

= *f*(*h*(*x*), *k*(*x*))) і обчислюється наступним алгоритмом:

function *f*\*(*x*)

begin

if *h*(*x*) > *k*(*x*) then *f*\* := 0

else *f*\* := *f*(*h*(*x*), k(*x*))

end.

де *f* – функція з наслідку 1.

1. **Нехай f(а, y) – ЧРФ. Сукупність А тих а, для яких рівняння f(а, y) = 0 має розв’язок є РПМ. Довести.**

Для доведення ми можемо побудувати алгоритм, який буде давати відповідь на те, чи *a* є *A*. Так як функція f(a, y) є ЧРФ, то таким алгоритмом буде алгоритм часткової характеристичної функції:

function χ*A**(x*)

begin

i := 0

while *f*(*x*, *i*) ≠ 0

do *i* := *i* + 1

χ*A**(x*) := 0

end.

Цей алгоритм буде перелічувати всі *a*, для яких рівняння *f*(*a*, *y*) = 0 має розв'язок та працювати нескінченно довго, якщо не має. Отже, сукупність *A* є РПМ.

1. **Показати, що функція**

****

**не є РФ.**

Функція ЧР, якщо існує алгоритм, що її обчислює. Покажемо, що такого алгоритму не існує. Від супротивного: припустимо, що він існує, тобто функція *w(x)* — рекурсивна. Це означає що *w(x) = U(m, x)* для деякого *m*. Тобто, цю функцію можна обчислити в довільній точці алгоритмом A:

function w(x) function U(n, x)

begin begin

w := U(m, x) i := 0

end. while D(n, x, i) ≠ 0 do

i := i + 1

U := l(i)

end.

Знайдемо значення *w(m)*. Якщо *w(m) = 0*, то *U(m,m) = 0* (Тому що *w(m) = U(m, m)*). Проте за визначенням функції якщо *w(m) = 0*, то *U(m,m) > 1*. Отримали суперечність, отже алгоритм А функцію не обчислює, отже функція *w(x)* не ЧРФ, а звідси не РФ, так як ПРФ ⊆ РФ ⊆ ЧРФ. Що й вимагалося показати.