1. Алгебра висловлювань.
2. ***Інтерпретація формул алгебри висловлювань.***

Нехай G – формула і А1, ..., Аn – її атоми. Тоді інтерпретацією формули G називається приписування істиносних значень всім атомам А 1, ..., Аn.  
 **Df**. Говорять, що формула G істинна при деякій інтерпретації, якщо її значення є істиною при цій інтерпретації.Іноді ітерпретацію формули будемо задавати множинами всіх атомів, які в ній зустрічаються.**Наприклад**, множина {P, ¬Q, ¬R, S} представляє інтерпретацію, в якій атомам приписані значення 1, 0, 0, 1.

1. ***Загальнозначимість і суперечливість.***  
   **Df**. формула *загальнозначима* (*тавтологія*), якщо вона істинна при всіх можливих інтерпретаціях.

**Df**. Формула *незагальнозначима*, якщо вона не є загальнозначимою.**Df**. формула *суперечлива*, якщо вона фальшива при всіх можливих інтерпретаціях.**Df**. Формула *несуперечлива (виконувана)*, якщо вона не є суперечливою.  
 **Із приведених визначень випливає:**1. Формула загальнозначима, якщо її заперечення суперечливе.2. Формула суперечлива, якщо її заперечення загальнозначиме.3. Формула незагальнозначима, якщо існує по крайній мірі одна інтерпретація, при якій формула фальшива.4. Формула несуперечлива, якщо існує по крайній мірі одна інтерпретація, при якій формула істинна

1. ***Рівносилність формул.***   
    **Df.** Дві формули F і G називаються *рівносильними* (*тотожними*), якщо при будь-яких інтерпретаціях ці формули приймають однакові значення.  
     
    **Приклади** (рівносильних формул).   
   ¬¬X = X,

X∧Y = Y∧X,

(X∧Y)∧Z = X∧(Y∧Z),   
X∧(Y∨Z) = (X∧Y)∨(X∧Z),  
 X∨(X∧Y) = X, X∧(X∨Y) = X,  
 ¬(X∨Y) = ¬X∧¬Y,   
X∨X = X,  
X∨¬X = 1,   
X∧¬X = 0.

1. ***Нормальні форми.*** Часто виникає потреба перетворення формул із однієї форми в іншу, особливо в так звану “нормальну форму”.**Df**. *Літера* є атом або заперечення атома. **Df**. формула F знаходиться в кон’юнктивній нормальній формі, якщо F = F 1 ∧ F2 ∧ … ∧ Fn, n≥1, де кожна з Fi є диз’юнкцією літер. **Df**. формула F знаходиться в диз’юнктивній нормальній формі, якщо F = F 1 ∨ F2 ∨ … ∨ Fn, n≥1,

де кожна з Fi є кон’юнкцією літер.

**Приклади**. Формула F = (P ∨¬Q ∨ R)∧(¬P ∨ Q) є формулою в кон’юнктивній нормальній формі. Формула F = (¬P∧Q) ∨ (P∧¬Q∧¬R) є формулою в диз’юнктивній нормальній формі.  
 Всяка формула може бути перетворена в нормальну форму. Це легко досягається за допомогою тотожностей, приведених вище.

**Приклад**. Побудувати ДНФ для формули (P∨¬Q)→R. (P∨¬Q)→R = ¬(P∨¬Q)∨R = (¬P∧Q)∨R.

1. ***Логічні наслідки.***

**Df**. Нехай задані формули F1, F2, ..., Fn і формула G. Говорять, що G є логічним наслідком формул F1,, F2, ..., Fn, якщо для всякої інтерпретації I в якій F1 ∧ F2 ∧ … ∧ Fn істинна, G також істинна.

**Теорема 1**. Нехай задані формули F1,, F2, ..., Fn і формула G. Тоді G є логічним наслідком F1, F2, ..., Fn тоді і тільки тоді, коли формула

(F1 ∧ F2 ∧ … ∧ Fn)→G загальнозначима.  
  
 **Доведення** (⇒). Нехай G є логічним наслідком формул F1, F2, ..., Fn і I довільна інтерпретація. Якщо F1, F2, ..., Fn істинні в I, то за визначенням логічного наслідку G є істинною в I. Отже, (F1 ∧ F2 ∧ … ∧ Fn)→G є істинною в I. З іншого боку, якщо не всі формули F1, F2, ..., Fn істинні в I, тобто хоча б одна з них фальшива, то (F1∧F2 ∧ … ∧Fn)→G істинна в I. Таким чином, (F1 ∧ F2 ∧ … ∧ Fn) → G – загальнозначима.

(⇐). Нехай (F1∧ F2 ∧ … ∧ Fn)→G – тавтологія. Тоді для всякої інтерпретації I, якщо F1∧ F2 ∧ … ∧ Fn істинна в I, то G повинна бути істинною в I, тобто G є логічним наслідком F1∧ F2 ∧ … ∧ Fn.  
  
 **Теорема 2**. Нехай задані формули F1, F2, ... , Fn і формула G. Тоді G є логічним наслідком F1, F2, ..., Fn тоді і тільки тоді, коли формула (F1 ∧ F2 ∧ … ∧ Fn ∧ ¬G) суперечлива.

**Доведення.** За попередньою теоремою G є логічним наслідком F1, F2, ..., Fn тоді і тільки тоді, коли формула (F1∧ F2 ∧ … ∧ Fn)→G є тавтологією. Отже, G є логічним наслідком F1, F2,..., Fn тоді і тільки тоді, коли ¬((F1∧ F2 ∧ … ∧ F n)→G) суперечлива.

Так, як ¬((F1∧ F2 ∧ … ∧ Fn)→G) = ¬(¬(F1∧ F2 ∧ … ∧ Fn) ∨ G) = (¬¬(F1∧ F2 ∧ … ∧ Fn) ∧ ¬G) =

(F1∧ F2 ∧ … ∧ Fn) ∧ ¬G = (F1∧ F2 ∧ … ∧ Fn ∧ ¬G).

1. ***Числення висловлювань. Приклади.*** Ч*исленням висловлювань* (ЧВ) - система, яка адекватна алгебрі висловлювань в тому розумінні, що дозволяє іншими (*синтаксичними*) методами розв’язувати проблему загальнозначимості логічних формул на відміну від так званих *семантичних* методів алгебри висловлювань.  
     
    Визначення всякого числення містить:

1. Визначення символів числення.

2. Визначення формул числення, що є скінченими конфігураціями символів.

3. Визначення вивідних формул.

*Символами* ЧВ є символи наступних категорій:

а) Малі латинські букви з індексами і без них – a, b, …, x, y, z, a1, … . f. - *змінні висловлювання*.

b) Cимволи ∧, ∨, →, ¬, які називаються *логічними зв’язками*.

c) Символи (, ), які називаються *лівою і правою дужками*.

*Формули* ЧВ – це скінченні послідовності символів вищеописаних категорій.

Для позначення формул будемо використовувати великі латинські букви з індексами і без них А, В, С, ... .

Зрозуміло, що не всяке слово є формулою.  
  
 Визначення *формули.* а) Змінне висловлювання – формула.

b) Якщо А і В – формули, то слова

(А∧В), (А∨В), (А→В), ¬А   
теж є формулами.

**Приклади**. Змінні висловлювання a і b є формулами. Тоді (а→b), ¬a, (¬a ∧ (а→b)) – формули. Наступні слова (а→b, а¬b, ∧а, а→b не є формулами

1. ***Теорема дедукції.***   
    **Теорема** (*про дедукцію*). Нехай Г – множина формул, А і В - формули. Якщо Г, А Ⱶ В, то Г Ⱶ А→В.

**Доведення**. Нам потрібно побудувати виведення формули А→В із Г. Нехай С1, С2, ..., Сn – виведення формули В = Сn із Г∪{А}. Перетворимо це виведення в наступну послідовність формул:

(А→С1), (А→С2), ..., (А→Сn).

Ця послідовність закінчується формулою (А→ В).  
  
 Перебудуємо цю послідовність (рухаючись зліва направо і додаючи деякі формули) у виведення формули (А→ В).

Нехай ми підійшли до формули (А→Сi). За припущенням, формула Сi або співпадає з А, або належить Г, або є вивідною, або одержується із двох попередніх за правилом МР. Розглянемо всі ці випадки по черзі.

(1) Якщо Сi є А, то формула має вигляд А→А. Вона вивідна. Додамо перед нею її виведення  
  
 (2) Нехай Сi належить Г. Тоді ми вставляємо формули Сi і вивідну формулу Ci→(A→Ci). Застосування правила МР до цих формул дає формулу (A→Ci).

(3) Ті ж формули можна додати, якщо Сi є вивідною формулою ЧВ.

(4) формула С1 або співпадає з А, або належить Г, або є вивідною. Тому, формула A→C1 є вивідною з Г. Теж саме стосується формули С2. Нехай, нарешті, формула С3 одержується із двох попередніх С1 та С2 за правилом МР. Це означає, що попередніми були формули С1 і С2 = С1 → C3.  
  
 Тоді в новій послідовності (з формулою А) вже будуть формули (А→С1) і (А→(С1→C3)). Ці формули є вивідними із Г. Дійсно, маємо послідовності: С 1, С1 →(А →С1), А→С1; (C1 = A або С1 вивідна або С1 ∈ Г) С 1→C3, (С1→C3) →(А → (С1→C3)), А → (С1→C3), які є виведенням цих формул з Г. Тому ми можемо дописати до послідовності С 1, С1 →(А →С1), А→С1, С1→C3, (С1→C3) →(А → (С1→C3)), А → (С1→C3), формули ((А→(С1→C3)) → ((A→C1) → (A→ C3)) (ПП); ((A→C1) → (A→ C3)) (MP); (A→ C3) (MP). Отже, формула A→ C3 є вивідною з Г. Продовжуючи так далі, одержимо, що формула A→ Cn є вивідною з Г. Теорема доведена

1. ***Теорема про коректність.***   
    **Теорема 3** (*про коректність* ЧВ). Всяка теорема ЧВ є тавтологією.

**Доведення**. Неважко перевірити, що всі аксіоми є тавтологіями. Якщо формули А→В і А є тавтологіями, то формула В також тавтологія. Таким чином всі теореми є тавтологіями. Зворотнє твердження довести більш складно.

1. ***Деякі правила і твердження числення висловлювань.***  
   R - довільна вивідна формула.

**Твердження**. b → R вивідна формула. **Доведення**.

1. R (вивідна);

2. R→ (b → R) (ПП, I.1);

3. (b → R) (МР 1, 2).  
  
 **Твердження**. a → a – вивідна. **Доведення.**

1. ((a→(b→a)) → ((a→b) → (a→ a)) (ПП, I.2);

2. (a→b) → (a→ a) (MP 1, I.1);

3. (a→R) → (a→ a) (ПП 2);

4. (a→R)

5. (a→ a) (МР 3, 4).

1. ***Несуперечливість числення висловлювань.*** Проблема *несуперечливості* є однією із найважливіших проблем математичної логіки.

**Df**. Логічне числення називається *несуперечливим*, якщо в ньому не виводяться ніякі дві формули, із яких одна є запереченням іншої.  
  
 Іншими словами, несуперечливе числення – це таке числення, що для довільної формули А, ніколи формули А і ¬А не можуть одночасно виводитись із аксіом числення.*Проблема несуперечливості* полягає в наступному: є дане числення суперечливим чи ні?

1. Незалежність аксіом числення висловлювань.   
    **Df**. Аксіома, яка не виводиться з інших, називається *незалежною* від цих аксіом, а система аксіом, в якій жодна аксіома не виводиться з інших, називається *незалежною системою аксіом*.  
    залежна система аксіом менш досконала, ніж незалежна, так як містить лишні аксіоми.

**Теорема**. Система аксіом ЧВ є незалежною.

1. ***Інтуїціоністська логіка.***   
   Інтуїціоністська логіка, є альтернативою класичній логіці, що ґрунтується на інтуїціоністських принципах математичного мислення.   
     
   Основні принципи інтуїціоністської логіки
2. **Відмова від закону виключеного третього**: У класичній логіці приймається, що для будь-якого висловлювання A істинно або A, A або ¬A (закон виключеного третього: A∨¬A). Інтуїціоністська логіка відкидає цей принцип, стверджуючи, що ми можемо приймати A∨¬A лише тоді, коли маємо конструктивний доказ одного з них.
3. **Конструктивність доказів**: Доказ існування (∃x)P(x) вимагає конструктивного прикладу x, для якого P(x) істинне. Подібним чином, доказ імплікації A→B вимагає методу перетворення доказу A у доказ B.
4. **Відмова від подвійного заперечення**: У класичній логіці ¬¬A≡A. В інтуїціоністській логіці це твердження не є загальнозначущим. Ми можемо мати доказ ¬¬A (неможливості ¬A), але це не дає нам автоматично конструктивного доказу A.
5. Логіка предикатів. Приклади.
6. Формули та інтерпретації. Терми.
7. Предикатні символи.
8. ***Загальнозначимість. Попередня нормальна форма.***   
    В алгебрі висловлювань ми вводили дві нормальні форми – кон’юнктивну і диз’юнктивну. В логіці предикатів теж є нормальні форми. Мета їх введення – спрощення процедури доведення загальнозначимості. Одна з них – так звана *попередня нормальна форма*.

**Df**. Формула F логіки предикатів знаходиться в *попередній нормальній формі* тоді і тільки тоді, коли формула F має вигляд (Q1x1) … (Qnxn) (M), де (Qixi), i=1,…, n є або (∀xi) або (∃xi), М - формула, яка не містить кванторів. (Q1x1) … (Qnxn) є *префіксом*, а М – *матрицею* формули F.

1. ***Еквівалентність формул.***   
    **Df**. Формули F і G *еквівалентні* (записується F=G) тоді і тільки тоді, коли істинносні значення цих формул одні і ті ж при будь-яких інтерпретаціях.

Основні пари еквівалентних формул алгебри висловлювань будуть, еквівалентними і логіці предикатів. Крім них існують еквівалентності, що містять квантори. Розглянемо такі еквівалентності  
  
 Нехай F є формулою, що містить вільну змінну x. Щоб підкреслити, що вільна змінна x входить в F, будемо записувати F в вигляді F[x]. Нехай G є формулою, яка не містить вільної змінної x. Тоді будемо мати наступні пари еквівалентних формул (де Q є ∀ або ∃):

1. (Qx)F[x]∨G = (Qx)(F[x]∨G), 2. (Qx)F[x]∧G = (Qx)(F[x]∧G), 3. ¬((∀x)F[x]) = (∃x)(¬F[x]), 4. ¬((∃x)F[x]) = (∀x)(¬F[x]).

1. ***Алгоритм перетворення формул до попередньої нормальної форми.***

1. Використовуючи правила

F↔G = (F→G)∧(G→F),

F→G = ¬F∨G, виключити логічні операції ↔, →.

2. Використовуючи правило

¬(¬F) = F, закони де Моргана і закони

¬((∀x)F[x]) = (∃x)(¬F[x]), ¬((∃x)F[x]) = (∀x)(¬F[x]),

переносимо знак заперечення всередину формули.  
  
 3. Перейменовуємо зв’язані змінні, якщо це потрібно.

4. Використовуємо тотожності ЛП 1-8 з тим, щоб винести квантори на початок формули.  
  
 **Приклад**. Привести формулу

(∀x)P(x)→(∃x)Q(x) до попередньої нормальної форми.  
 (∀x)P(x)→(∃x)Q(x) = ¬(∀x)P(x)∨(∃x)Q(x) = (∃x)(¬P(x))∨(∃x)Q(x)= (∃x)(¬P(x)∨Q(x)).

1. Скулемівські стандартні форми. Приклади.
2. ***Теорема про суперечливість множини диз’юнктів.*** Ця теорема є основою більшості сучасних алгоритмів доведення теорем. Вона тісно зв’язана з теоремою про те, що множина диз’юнктів S суперечлива тоді і тільки тоді коли S фальшива при всіх H-інтерпретаціях.

**Теорема** (Ербрана). Для того, щоб множина диз’юнктів була суперечливою необхідно і достатньо, щоб існувала скінченна суперечлива множина основних прикладів диз’юнктів.  
  
 **Доведення**. Нехай існує скінченна суперечлива множина S′ основних прикладів диз’юнктів S.

Так як кожна інтерпретація I для S містить інтерпретацію I′ множини S′ і I′ заперечує S′, то I також повинна заперечувати S′. Але S′ заперечується в кожній інтерпретації I′. Отже, S′заперечується в кожній інтерпретації I множини S.

Тому S заперечується в кожній інтерпретації множини S′. Отже, S суперечлива

1. Метод Ербрана. Ербранівський універсум множини диз’юнктів.
2. Ербранівський базис. Основні приклади.
3. Н-інтерпретація.
4. Теорема про суперечливість множини диз’юнктів для Н-інтерпретацій.
5. ***Застосування теореми Ербрана.????***   
    Теорема Ербрана для доведення суперечливості множини диз’юнктів припускає процедуру спростування. Це означає, що для доведення суперечливості множини диз’юнктів S повинна існувати машинна процедура, яка породжує множини S1, ..., Sn, ... основних прикладів диз’юнктів із S і встановлює їх суперечливість.

Одним із перших використав цю ідею Гілмор. Але метод Гілмора виявився неефективним. Більш ефективний метод, що грунтується на цій ідеї був запропонований Девісом і Патнемом. Але в більшості випадків послідовність основних прикладів росте експоненціально. Щоб це побачити, розглянемо приклад.

1. ***Метод резолюцій для логіки висловлювань.***  
     
   Метод резолюцій — це метод автоматичного доведення теорем у логіці висловлювань (та першого порядку). Основна ідея методу полягає в перевірці, чи містить S пустий диз’юнкт (чи виводиться пустий дизюнкт з множини S). Якщо S містить пустий диз’юнкт , то S суперечлива.
2. ***Резольвента***.  
   Для будь-яких двох диз’юнктів С1 і С2, якщо існує літера L1 в С1, яка контрарна літері L2 в С2, то викреслюючи L1 і L2 з С1 і С2 відповідно, утворимо диз’юнкцію диз’юнктів, що залишились. Одержаний диз’юнкт є *резольвентою* С1 і С2.  
     
    **Приклад**. Розглянемо наступні дизюнкти: С 1: P∨R, C 2: ¬P∨Q.

Диз’юнкт С1 містить літеру Р, контрарну літері ¬Р в С2. Отже, викреслюючи Р і ¬Р із С1 і С2 відповідно і утворюючи диз’юнкцію решти диз’юнктів R і Q, одержимо резольвенту R ∨Q.  
  
 **Приклад**. Розглянемо диз’юнкти С 1: ¬P∨Q∨R, C 2: ¬Q∨S.

Резольвента С 1 і С2 є ¬P∨R∨S.

**Приклад**. Розглянемо диз’юнкти

С 1: ¬P∨Q, C 2: ¬P∨R.

Так як не існує контрарної пари для цих диз’юнктів, то не існує резольвенти С1 і С2  
  
 Важливою властивістю резольвенти є те, що

**Теорема**. Резольвента С диз’юнктів С1 і С2 є логічним наслідком С1 і C2.

**Доведення**. Нехай С1, С2 і С є наступними формулами: С 1 = L∨C′1, C2 = ¬L∨C′2 і С = C′1∨ C′2 , де C′1 і C′2 диз’юнкції літер.

Припустимо, що С1 і С2 істинні в інтерпретації I. Покажемо, що тоді резольвента С також істинна в I.  
 Припустимо спочатку, що L – фальшива в I. Тоді C′ 1повинен бути істинним в I. Отже, резольвента C, тобто C′ 1∨ C′2 є істинним в I.Аналогічно можна показати, що якщо ¬L фальшиве в I, то C′2 повинен бути істинним в I. Отже, резольвента C є істинною в I.

1. ***Резолютивне виведення.***   
     
   **Df**. Нехай S – множина диз’юнктів. *Резолютивне виведення* С із S є така скінченна послідовність C1, …, Ck диз’юнктів, що кожний Сi або належить S або є резольвентою диз’юнктів, попередніх Сi і Сk=C. Виведення із S називається спростуванням S.

**Приклад**. Нехай S = {(1)¬P∨Q, (2) ¬Q, (3) P}. Із (1) і (2) одержимо резольвенту (4) ¬P . Із (4) і (3) одержимо резольвенту . Отже, – логічний наслідок S.

1. Метод резолюцій для логіки першого порядку.
2. ***Повнота методу резолюцій***  
    **Теорема** (повнота методу резолюцій). Множина S диз’юнктів суперечлива тоді і тільки тоді, коли існує виведення пустого диз’юнкта.

Далі покажемо, як можна ефективно використовувати метод резолюцій для доведення теорем.

**Приклад**. Покажемо, що формула

((P→S) ∧ (S→U) ∧ P) → U істинна. Для цього треба показати, що заперечення цієї формули суперечливе.  
 Таким чином, маємо:

1. ¬P∨S,

2. ¬S∨U,

3. P,

4. ¬U,

5. S (резольвента 3,1),

6. U (резольвента 5,2),

7. (резольвента 6,4).