ASAP 与 ARAP 参数化

陈柯

2022 年 7 月 1 日

1 目的

1. 实现 ASAP 参数化
2. 实现 ARAP 参数化

2 算法

2.1 参数化的能量

对于 3 维网格中的每个三角形 $x_t, t = 1, \cdots, T$,都有一个自己局部的等距参数化 $x_t = \{x_t^0, x_t^1, x_t^2\}$,可以理解为 x_t^j 就是一个三角形顶点的 3 维坐标。再设将其参数化后的各点为 $u_t = \{u_t^0, u_t^1, u_t^2\}$,可以理解为 u_t^j 就是一个平面上的的 2 维坐标。在 x_t 到 u_t 之间的存在唯一的仿射变换,我们设该变换的 Jacobian 矩阵记为 $J_t(u)$,它实际上代表了映射的线性变换的部分。在网格的参数化中,我们希望参数化保持了原网格的几何性质,也就是让这个 Jacobian 矩阵性质足够好,或者说更加接近我们给予的一个矩阵,我们将其引入为辅助矩阵 L_t,再定义能量:

$$E(u, L) = \sum_{t=1}^{T} A_t \|J_t(u) - L_t\|_F^2$$

其中 A_t 为三角形 x_t 的面积。这样我们就将参数化问题转化为了极小化能量 $E(u, L)$ 的问题。上面的能量表达式也可以被重写为:

$$E(u, L) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=0}^{2} \cot(\theta_t^i) \|(u_t^i - u_t^{i+1}) - L_t(x_t^i - x_t^{i+1})\|^2$$

其中 θ_t^i 为三角形 x_t 中边 $x_t^i x_t^{i+1}$ 所对的角。

2.2 ASAP 参数化

取 L_t 为相似变换下的矩阵,即 $L_t = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ -b_t & a_t \end{pmatrix}, a_t, b_t \in \mathbb{R}, t \in \{1, \cdots, T\}$。

我们设 $u_t^{i,k} - u_t^{i+1,k} = \Delta u_t^{i,k}, k = 0, 1$,那么能量可表达为

$$E(u, L) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=0}^{2} \cot(\theta_t^i) \left((\Delta u_t^{i,0} - a_t \Delta x_t^{i,0} - b_t \Delta x_t^{i,1})^2 + (\Delta u_t^{i,1} + b_t \Delta x_t^{i,0} - a_t \Delta x_t^{i,1})^2\right)$$

在能量中求 a_t, b_t 的偏导，可得：

$$\frac{\partial E}{\partial a_t} = \sum_{i=0}^{2} \cot(\theta_t^i)\left(((\Delta x_t^{i,0})^2 + (\Delta x_t^{i,1})^2)a_t - u_t^{i,0}\Delta x_t^{i,0} + u_t^{i+1,0}\Delta x_t^{i,0} - u_t^{i,1}\Delta x_t^{i,1} + u_t^{i+1,1}\Delta x_t^{i,1}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_t} = \sum_{i=0}^{2} \cot(\theta_t^i)\left(((\Delta x_t^{i,0})^2 + (\Delta x_t^{i,1})^2)b_t - u_t^{i,0}\Delta x_t^{i,1} + u_t^{i+1,0}\Delta x_t^{i,1} + u_t^{i,1}\Delta x_t^{i,0} - u_t^{i+1,1}\Delta x_t^{i,0}\right)$$

求 $u_t^{i,0}, u_t^{i,1}$ 的偏导，可得：

$$\frac{\partial E}{\partial u_{t_0}^{i_0,0}} = \sum_{u_{t_0}^{i_0}\in u_t} \cot(\theta_t^i)(\Delta u_t^{i,0} - a_t\Delta x_t^{i,0} - b_t\Delta x_t^{i,1}) - \cot(\theta_t^{i-1})(\Delta u_t^{i-1,0} - a_t\Delta x_t^{i-1,0} - b_t\Delta x_t^{i-1,1})$$

$$\frac{\partial E}{\partial u_{t_0}^{i_0,1}} = \sum_{u_{t_0}^{i_0}\in u_t} \cot(\theta_t^i)(\Delta u_t^{i,1} + b_t\Delta x_t^{i,0} - a_t\Delta x_t^{i,1}) - \cot(\theta_t^{i-1})(\Delta u_t^{i-1,1} + b_t\Delta x_t^{i-1,0} - a_t\Delta x_t^{i-1,1})$$

令各偏导等于 0，我们就可以构建稀疏方阵。再令首个边界上的起点和中点为固定点，分别固定到 $(0,0)$ 和 $(1,1)$，然后解出方程组即可。

2.3 ARAP 参数化

取 L_t 为正交变换下的矩阵，即 $L_t = \begin{pmatrix} \cos(\theta_t) & \sin(\theta_t) \\ -\sin(\theta_t) & \cos(\theta_t) \end{pmatrix}, \theta_t \in [0, 2\pi), t \in \{1, \cdots, T\}$。在这里我们采用"Local/Global"算法，也称迭代法来计算 ARAP 参数化。算法分 3 步：

1. 给网格一个初始的参数化，边界固定不固定无要求，只要每个三角形不翻转即可。本次我们采用 ASAP 参数化作为初始参数化

2.Local Phase：对

$$S_t(u) = \sum_{i=0}^{2} \cot(\theta_t^i) \begin{pmatrix} \Delta u_t^{i,0} \\ \Delta u_t^{i,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_t^{i,0} & \Delta x_t^{i,1} \end{pmatrix}$$

作奇异值分解 (SVD):$S_t(u) = U\Sigma V^T$，取 $L_t = UV^T$

3.Global Phase: 再利用

$$\frac{\partial E}{\partial u_{t_0}^{i_0,0}} = \sum_{u_{t_0}^{i_0}\in u_t} \cot(\theta_t^i)(\Delta u_t^{i,0} - a_t\Delta x_t^{i,0} - b_t\Delta x_t^{i,1}) - \cot(\theta_t^{i-1})(\Delta u_t^{i-1,0} - a_t\Delta x_t^{i-1,0} - b_t\Delta x_t^{i-1,1}) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial u_{t_0}^{i_0,1}} = \sum_{u_{t_0}^{i_0}\in u_t} \cot(\theta_t^i)(\Delta u_t^{i,1} + b_t\Delta x_t^{i,0} - a_t\Delta x_t^{i,1}) - \cot(\theta_t^{i-1})(\Delta u_t^{i-1,1} + b_t\Delta x_t^{i-1,0} - a_t\Delta x_t^{i-1,1}) = 0$$

构建稀疏方程组，解出 u_t。

4. 重复第 2,3 步。

3 结果

以下在各种方法下，为对几个网格的测试效果。其中出现的固定边界的参数化都是 Cotangent 权重，而且 ARAP 参数化都是迭代 5 次。ARAP 的初始参数化我们采用 ASAP 参数化。

图 1: balls 原网格

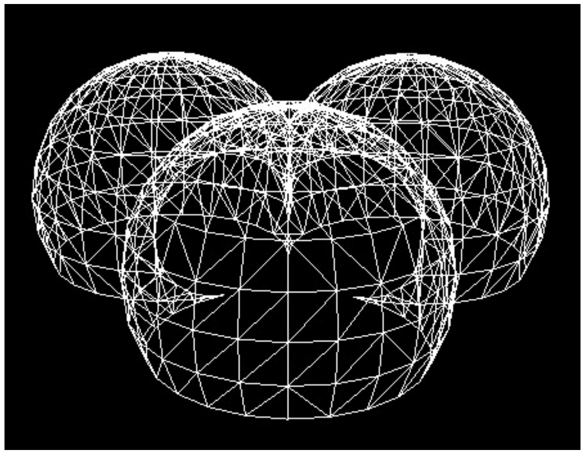


图 2: cot, 圆形边界

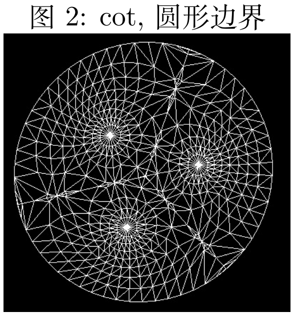


图 3: cot, 正方形边界

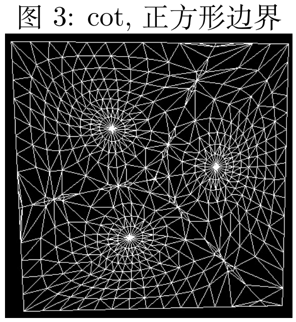


图 4: ASAP 参数化

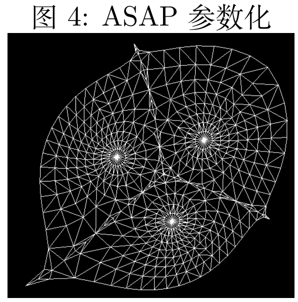


图 5: ARAP 参数化

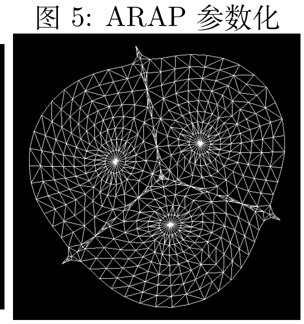


图 6: cot, 圆形边界

图 7: cot, 正方形边界

图 8: ASAP 参数化

图 9: ARAP 参数化

图 10: cow 原网格

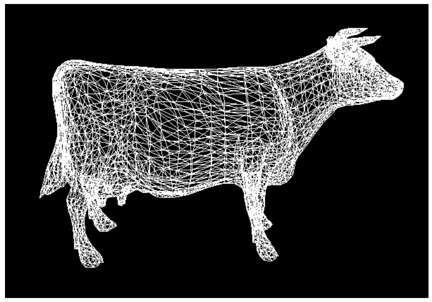


图 11: ASAP 参数化

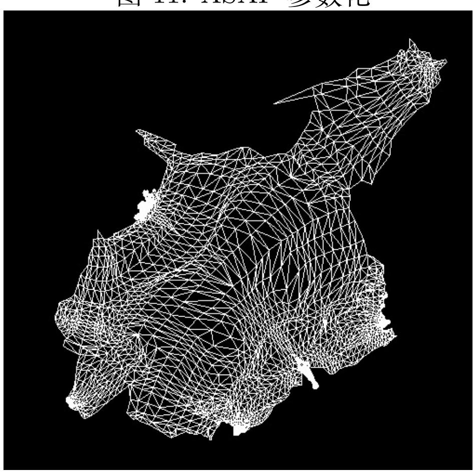


图 12: ARAP 参数化

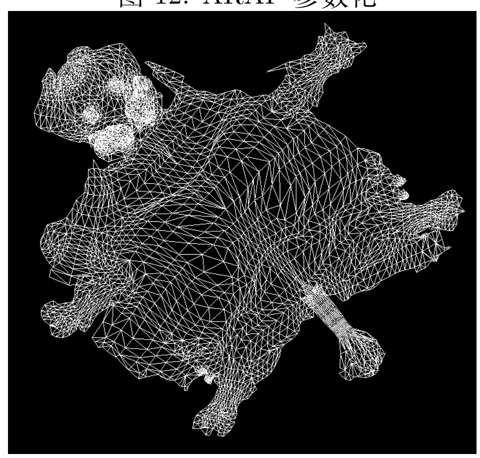


图 13: ASAP 参数化

图 14: ARAP 参数化

图 15: beetle 原网格

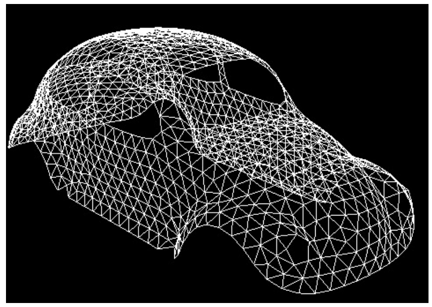


图 16: ASAP 参数化

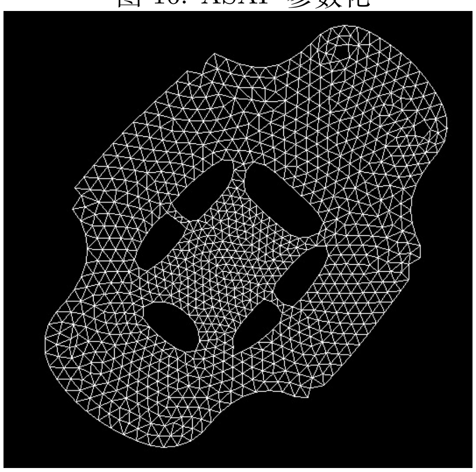


图 17: ARAP 参数化

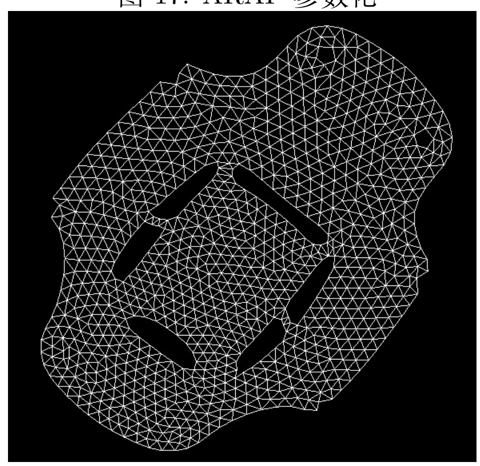


图 18: ASAP 参数化

图 19: ARAP 参数化

图 20: lsis 原网格

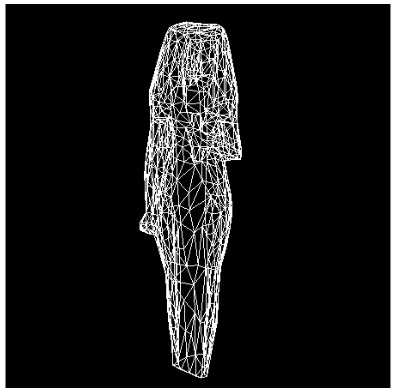


图 21: cot, 圆形边界

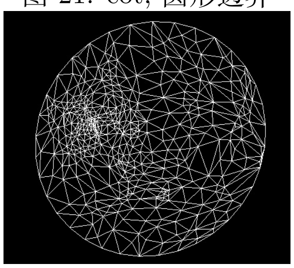


图 22: cot, 正方形边界

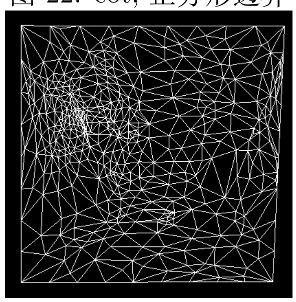


图 23: ASAP 参数化

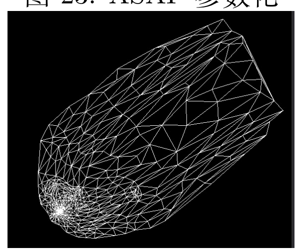


图 24: ARAP 参数化

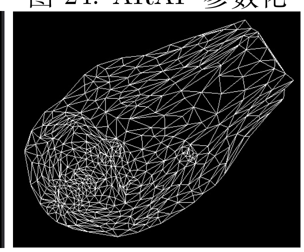


图 25: cot, 圆形边界

图 26: cot, 正方形边界

图 27: ASAP 参数化

图 28: ARAP 参数化

图 29: gargoyle 原网格

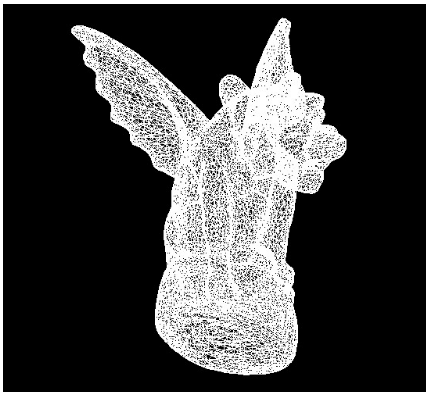


图 30: cot, 圆形边界

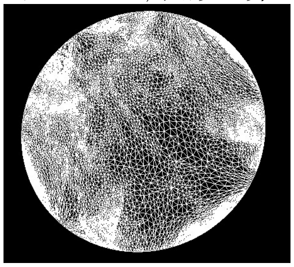


图 31: cot, 正方形边界

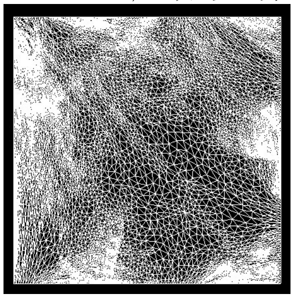


图 32: ASAP 参数化

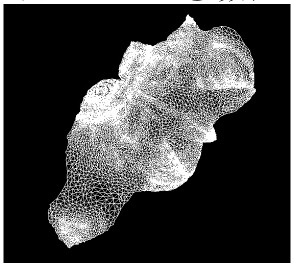


图 33: ARAP 参数化

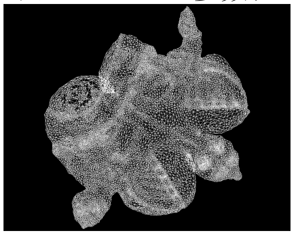


图 34: cot, 圆形边界

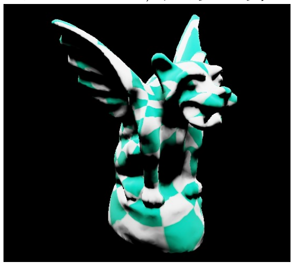


图 35: cot, 正方形边界

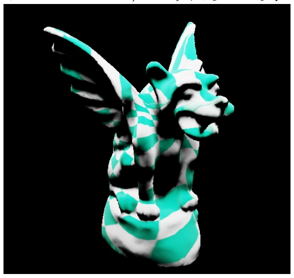


图 36: ASAP 参数化

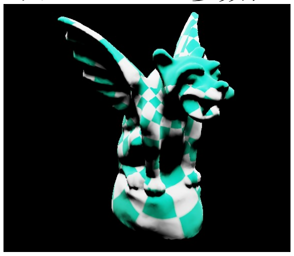
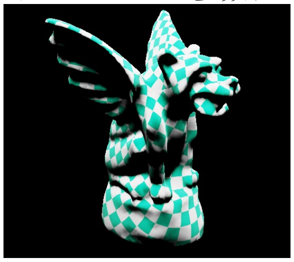


图 37: ARAP 参数化



在 ARAP 参数化中，我们采用设置了输入框和滑条，让用户给出 ARAP 参数化过程中的迭代次数（如下图）。

图 38: 迭代次数的输入框和滑条

在实现算法的过程中，难点在于 Laplace 矩阵的构建需要比较细心。从上面的结果我们可以看到，效果最好的是 ARAP 参数化，纹理贴图中它的方块没有明显的扭曲，而且大小都相近。虽然 ARAP 参数化对初始参数化不是很敏感，但是采用 ASAP 参数化作为初始参数化会导致每次迭代后的变化不是很明显，即很容易就能达到精度较高的参数化。如果我们采用固定到正方形边界的参数化作为初始参数化，可能前几次迭代还会有较大变化，之后也能很快收敛到我们想要的网格。

4 参考文献

[1]Ligang Liu，Lei Zhang，Yin Xu，Craig Gotsman，Steven J. Gortler，A Local/Global Approach to Mesh Parameterization，Eurographics Symposium on Geometry Processing 2008，Volume 27 (2008), Number 5