质点弹簧系统仿真

陈柯

2022 年 7 月 12 日

1 目的

实现弹簧质点模型的欧拉隐式方法及加速方法。

2 模拟方法

我们的问题是：如何由前 n 帧信息，求得第 $n+1$ 帧信息（位移 $\boldsymbol{x}$，速度 $\boldsymbol{v}$，时间间隔为 h)?

2.1 欧拉隐式方法

欧拉隐式方法即以下两式：

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + h\boldsymbol{v}_{n+1}$$

$$\boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{v}_n + h\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{f}_{int}(t_{n+1}) + \boldsymbol{f}_{ext})$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 为质点的质量矩阵。这里若假设三角网格网格共 N 个质点（顶点），那么这里的 $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{f}$ 在实现的时候就是 $3N \times 1$ 的矩阵。若记

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_n + h\boldsymbol{v}_n + h^2\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}_{ext}$$

则有

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{y}) - h^2\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{x}_{n+1}) = 0$$

为了解出 $\boldsymbol{x}_{n+1}$，我们设

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - h^2\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{x}) \tag{*}$$

利用 Newton 法进行以下的迭代：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - (\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}))^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)})$$

即可求解出 $\boldsymbol{x}_{n+1}$。迭代初值可选为 $\boldsymbol{x}^{(0)} = y$ 。实现过程当中，可规定当相邻两步之差小于某个值时就不再迭代。迭代得到位移 x 后需要更新速度 $v_{n+1} = (x_{n+1} - x_n)/h$。

在质点弹簧系统中，上式中涉及关于弹力的求导，对于单个弹簧（端点为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$)，劲度系数为 k，原长为 l，$\boldsymbol{x}_1$ 所受弹力为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = k(||\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|| - l)\frac{\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1}{||\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2||}$$

对其求导可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_1} = k(\frac{l}{||\boldsymbol{r}||} - 1)\boldsymbol{I} - kl||\boldsymbol{r}||^{-3}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T, \ \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_2} = -\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_1}$$

对所有弹簧求导并组装即可求得力的导数（组装为稀疏矩阵，矩阵为对称阵）。

2.2 加速方法（projective dynamic）

在上述欧拉方法中，对于内力（为保守力）有：

$$\boldsymbol{f}_{int}(x) = -\nabla E(\boldsymbol{x})$$

故对方程 $(*)$ 的求解可以转为为一个最小化问题：

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \min_{x} \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + h^2E(\boldsymbol{x})$$

同时对于弹簧的弹性势能可以描述为一个最小化问题：

$$\frac{1}{2}k(||\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2|| - r)^2 = \frac{1}{2}k \min_{||\boldsymbol{d}||=r} ||\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{d}||^2$$

从而原问题转化为：

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \min_{x, \boldsymbol{d}\in \boldsymbol{U}} \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{M} + h^2\boldsymbol{L})\boldsymbol{x} - h^2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}$$

其中

$$\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, ..., \boldsymbol{d}_s), \boldsymbol{d}_s \in R^3, ||\boldsymbol{d}_i|| = l_i\}(l_i \text{ 为第 } i \text{ 个弹簧原长})$$

$$\boldsymbol{L} = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \boldsymbol{A_i}\boldsymbol{A_i^T}\right) \otimes \boldsymbol{I_3} \in \mathbb{R}^{3m\times 3m}$$

$$\boldsymbol{J} = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \boldsymbol{A_i}\boldsymbol{S_i^T}\right) \otimes \boldsymbol{I_3} \in \mathbb{R}^{3m\times 3s}$$

$\boldsymbol{A_i}$ 为第 i 个弹簧的 Incidence Vector，即 $A_{i,i_1} = 1, A_{i,i_2} = -1$，其余均为 0。类似地，$\boldsymbol{S_i} \in \mathbb{R}^s$ 为第 i 个弹簧 indicator，即 $S_{i,j} = \delta_{i,j}$。矩阵 $\boldsymbol{L}$ 不过是以劲度系数为权重的质点弹簧系统的 Laplace 矩阵。从而可以对 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{d}$ 迭代优化求得该优化问题的解：

$$\text{先对 } \boldsymbol{x} \text{ 优化：求解方程}(\boldsymbol{M} + h^2\boldsymbol{L})\boldsymbol{x} = h^2\boldsymbol{J}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}$$

$$\text{再更新 } \boldsymbol{d}\text{：} \boldsymbol{d}_i = l_i\frac{\boldsymbol{p}_{i_1} - \boldsymbol{p}_{i_2}}{||\boldsymbol{p}_{i_1} - \boldsymbol{p}_{i_2}||}$$

这里 l_i 为第 i 个弹簧原长，$\boldsymbol{p}_{i_1}$ $\boldsymbol{p}_{i_2}$ 为其两端点。重复迭代过程直到收敛。

2.3 边界条件和约束

通常模拟过程中物体会有各种约束或额外条件，例如物体被固定了几个点，对某些点施加外力（如重力、浮力、风力等）。

2.3.1 外力条件

1. 物体受到的外力可以直接加在模拟的外力项中，其导数为 0.

2. 对于重力，可以将其加在外力中，另一方面，重力为保守力，也可以将重力势能加在能量项中与弹性势能进行合并

2.3.2 位移约束

这里主要考虑固定部分质点的情形，有两种方法处理：

1. 第一种方法是在每一帧中求出该点的内力，再施加与该内力大小相同，方向相反的外力，但与上一种情形不同的是，若该内力对位移导数不为 0，则该外力对位移导数也不为 0，需要将其导数考虑进去；

2. 第二种方法为仅考虑真正的自由坐标，降低问题的维数，具体如下：

若考虑固定点，将所有 m 个质点的坐标列为列向量 $x \in R^{3m}$，将所有 n 个自由质点坐标（无约束坐标）列为列向量 $x_f \in R^{3n}$, 则两者关系：

$$\boldsymbol{x}_f = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{K}^T\boldsymbol{x}_f + \boldsymbol{b},$$

其中 $K \in R^{3n\times 3m}$ 为单位阵删去约束坐标序号对应行所得的稀疏矩阵，b 为与约束位移有关的向量，计算为 $b = x - K^T Kx$, 若约束为固定质点则 b 为常量。由此我们将原本的关于 x 的优化问题转化为对 x_f 的优化问题：欧拉隐式方法中求解方程为：

$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_f) = K(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - h^2\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{x})) = 0$$

$$\text{梯度：} \nabla_{x_f}\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_f) = K\nabla_x\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})K^T$$

加速方法中优化问题中 x 迭代步骤转化为求解关于 x_f 的方程：

$$K(\boldsymbol{M}+h^2\boldsymbol{L})K^T\boldsymbol{x}_f = K(h^2\boldsymbol{J}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{M}+h^2\boldsymbol{L})\boldsymbol{b})$$

3 实现结果

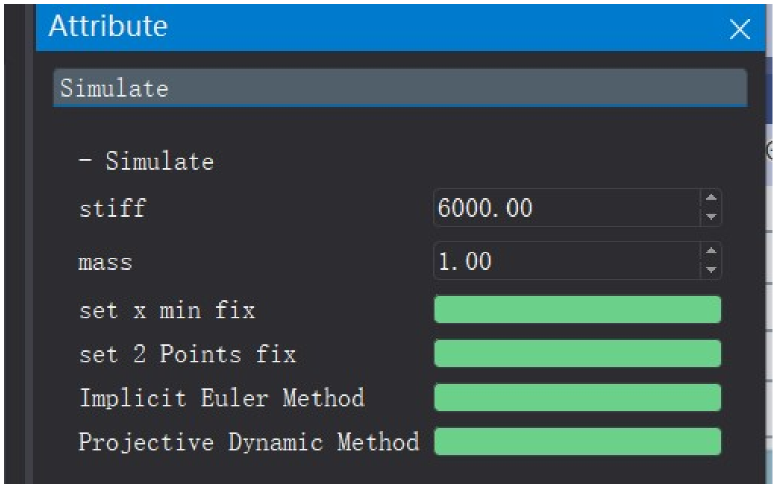
实现结果请看随本报告附带的视频。

3.1 迭代停止的条件

我两种方法在求解过程中，都采用了这样的判断迭代停止的条件：前后迭代差距小于 1e-5 或迭代次数大于 5 时，就停止迭代，结果作为本次步长的结果。

3.2 交互

我实现了以下的交互:



用户可以控制每根弹簧的劲度系数，每个质点的质量，仿真的方法，以及固定点的确定。这里可以固定 2 个点，或者所有 x 坐标最小的点。

3.3 结果评估

我们会发现:

1. 一旦质点数增加，欧拉隐式方法的劣势就特别明显了，计算速度相当慢；而 [1] 提出的加速方法就算在 441 个质点的稠密网格上计算速度也很快，仿真效果很不错。

2. 我们实现的算法就是对质点弹簧系统适用的，所以算法可以直接对四面体网格执行，不仅仅对曲面片网格适用。

4 参考文献

[1]Tiantian Liu, et al. ”Fast simulation of mass-spring systems.” *Acm Transactions on Graphics (Pro. Siggraph Asia)* 32.6(2013):1-7.