

Блок задач 4

Сафонов Андрей ТФ-15-22

Вариант 18

Стальная цилиндрическая болванка диаметром $d = \text{«d_мм»}$ мм и высотой $H = \text{«H_мм»}$ мм с начальной температурой $T_0 = 20^\circ\text{C}$ помещается в печь, где она нагревается продуктами сгорания с температурой $T_{ж} = \text{«Tж»}^\circ\text{C}$. Коэффициент теплоотдачи равен $\alpha = \text{«а»} \text{ Вт}/\text{м}^2\text{К}$, коэффициент теплопроводности стали $\lambda = \text{«\lambda»} \text{ Вт}/\text{мК}$, коэффициент температуропроводности $a = \text{«a106»} \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$. Определить:

1. Температуру в центре болванки через $\tau_1 = \text{«\tau»}$ мин.
2. Время τ_2 , в течение которого температура в центре болванки достигнет значения $T_k = \text{«Tk»}^\circ\text{C}$, а также температуры в середине образующей (T_b), в центре основания (T_a) и по периметру основания (T_c) в этот момент времени.

N var	H, мм	d, мм	λ	$a \cdot 10^6$	α	τ'	Tж	Tк
18	150	160	41	6.5	90	50	780	750

$$d := 0.16 \text{ м} \quad \alpha := 90 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}} \quad \tau_1 := 60 \cdot 50 = 3 \times 10^3 \text{ с} \quad T_{ж} := 780 \text{ }^\circ\text{C} \quad T_0 := 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$H := 0.15 \text{ м} \quad \lambda := 41 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}} \quad a := 6.5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \quad T_k := 750 \text{ }^\circ\text{C}$$

1) Решение для бесконечной пластины толщиной $\delta = H/2$

$$\theta(X, Fo_x) := \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2 \sin(\mu x_k)}{\mu x_k + \sin(\mu x_k) \cos(\mu x_k)} \cdot \cos(\mu x_k X) \cdot e^{-(\mu x_k)^2 Fo_x} \right] \right] \quad X(x_0) := \frac{2 \cdot x_0}{H}$$

2) Решение для бесконечного цилиндра радиуса $r = d/2$

$$\theta(R, Fo_r) := \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2 J_1(\mu r_k)}{\mu r_k \cdot (J_1(\mu r_k)^2 + J_0(\mu r_k)^2)} \cdot J_0(\mu r_k R) \cdot e^{-(\mu r_k)^2 Fo_r} \right] \right] \quad R(r_0) := \frac{2 r_0}{d}$$

Решение:

$$\theta(R, Fo_r, X, Fo_x) := \theta(R, Fo_r) \cdot \theta(X, Fo_x)$$

Определим температуру в центре болванки:

$$\delta := \frac{H}{2} = 0.075 \text{ м} \quad r := \frac{d}{2} = 0.08 \text{ м}$$

Число фурье:

$$Fo_x := \frac{a \cdot \tau_1}{\delta^2} = 3.467 \quad Fo_r := \frac{a \cdot \tau_1}{r^2} = 3.047$$

Так как число фурье > 0.3 (регулярный режим), можно взять первый член суммы для решений θ :

$$\theta_1(R, Fo_r) := \frac{2 J_1(\mu r_1)}{\mu r_1 \cdot (J_1(\mu r_1)^2 + J_0(\mu r_1)^2)} \cdot J_0(\mu r_1 R) \cdot e^{-(\mu r_1)^2 Fo_r}$$

$$\theta_1(X, Fo_x) := \frac{2 \sin(\mu x_1)}{\mu x_1 + \sin(\mu x_1) \cos(\mu x_1)} \cdot \cos(\mu x_1 X) \cdot e^{-(\mu x_1)^2 Fo_x}$$

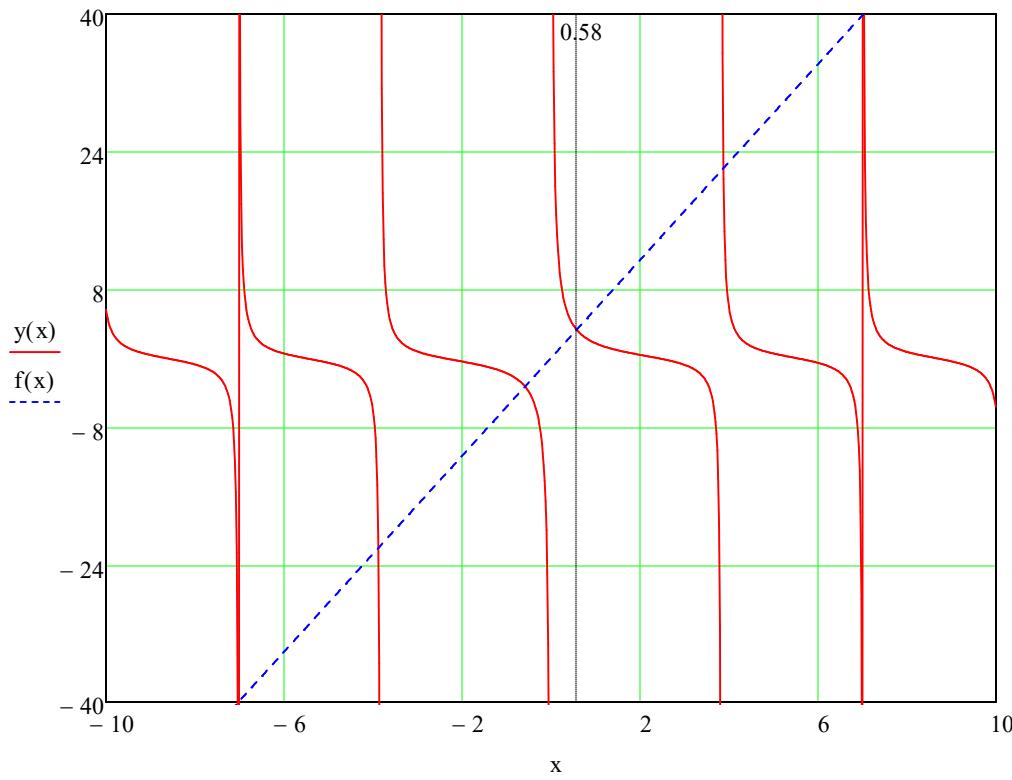
Решим трансцендентные уравнения графическим методом:

$$\frac{J_0(x)}{J_1(x)} = \frac{x}{Bi_r}$$

$$Bi_r := \frac{\alpha \cdot r}{\lambda} = 0.176$$

$$y(x) := \frac{J_0(x)}{J_1(x)}$$

$$f(x) := \frac{x}{Bi_r}$$



Given

$$b(x) = 0$$

$$b(x) := y(x) - f(x)$$

$$x := 1$$

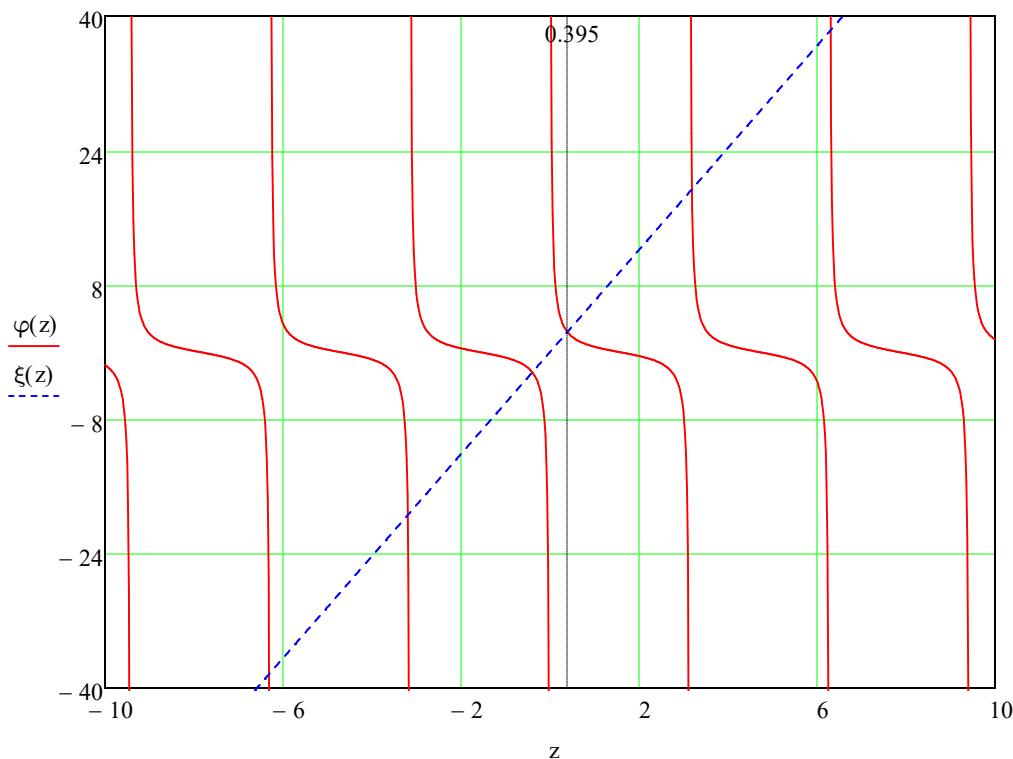
$$\text{Find}(x) = 0.58$$

$$\mu r_1 := 0.58$$

$$\frac{1}{\tan(z)} = \frac{z}{Bi_x} \quad Bi_x := \frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda} = 0.165$$

$$\varphi(z) := \frac{1}{\tan(z)}$$

$$\xi(z) := \frac{z}{Bi_x}$$



Given

$$b(z) = 0 \quad b(z) := \varphi(z) - \xi(z)$$

$$z := 1$$

$$\text{Find}(z) = 0.395 \quad \mu x_1 := 0.395$$

Температура в центре болванки через $\tau_1 = 3 \times 10^3$ секунд:

$$Fo_x = 3.467$$

$$X(0) = 0$$

$$Fo_r = 3.047$$

$$R(0) = 0$$

$$\theta(R, X, Fo_x, Fo_r) := \frac{2 J1(\mu r_1)}{\mu r_1 \cdot (J1(\mu r_1)^2 + J0(\mu r_1)^2)} \cdot J0(\mu r_1 R) \cdot e^{-(\mu r_1)^2 Fo_r} \cdot \left[\frac{2 \sin(\mu x_1)}{\mu x_1 + \sin(\mu x_1) \cos(\mu x_1)} \cdot \cos(\mu x_1 X) \cdot e^{-(\mu x_1)^2 Fo_x} \right]$$

$$\theta(R(0), X(0), Fo_x, Fo_r) = 0.223$$

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}$$

$$T := T_{\infty} + \theta(R(0), X(0), F_{ox}, F_{or}) \cdot (T_0 - T_{\infty}) = 610.173 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Определим время, в течении которого температура в центре болванки станет равной T_k

$$T_k = 750 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\theta_1 := \frac{T_k - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = 0.039$$

$$\theta(R, X, F_{ox}, F_{or}) := \frac{2 J_1(\mu r_1)}{\mu r_1 \cdot (J_1(\mu r_1)^2 + J_0(\mu r_1)^2)} \cdot J_0(\mu r_1 R) \cdot e^{-(\mu r_1)^2 F_{or}} \cdot \left[\frac{2 \sin(\mu x_1)}{\mu x_1 + \sin(\mu x_1) \cos(\mu x_1)} \cdot \cos(\mu x_1 X) \cdot e^{-(\mu x_1)^2 F_{ox}} \right]$$

$$\theta_2(R, X) := \frac{2 J_1(\mu r_1)}{\mu r_1 \cdot (J_1(\mu r_1)^2 + J_0(\mu r_1)^2)} \cdot J_0(\mu r_1 R) \cdot \left(\frac{2 \sin(\mu x_1)}{\mu x_1 + \sin(\mu x_1) \cos(\mu x_1)} \cdot \cos(\mu x_1 X) \right)$$

$$\theta_2(R(0), X(0)) = 1.07$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2(R(0), X(0))} = e^{-(\mu r_1)^2 F_{or}} \cdot e^{-(\mu x_1)^2 F_{ox}}$$

$$\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2(R(0), X(0))}\right) = -(\mu r_1)^2 F_{or} + [-(\mu x_1)^2 F_{ox}]$$

$$F_{ox} = \frac{a \cdot \tau^2}{\delta^2} \quad F_{or} = \frac{a \cdot \tau^2}{r^2}$$

$$-\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2(R(0), X(0))}\right) = (\mu r_1)^2 \cdot \frac{a \cdot \tau^2}{r^2} + (\mu x_1)^2 \cdot \frac{a \cdot \tau^2}{\delta^2}$$

$$\tau_2 := \frac{-\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2(R(0), X(0))}\right)}{(\mu r_1)^2 \cdot \frac{a}{r^2} + (\mu x_1)^2 \cdot \frac{a}{\delta^2}} = 6.321 \times 10^3 \text{ c}$$

Определим температуры в середине образующей T_b , в центре основания T_a , и по периметру основания T_c :

$$F_{or2} := \frac{a \cdot \tau_2}{r^2} = 6.42 \quad F_{ox2} := \frac{a \cdot \tau_2}{\delta^2} = 7.305$$

В середине образующей:

$$R(r) = 1$$

$$X(0) = 0$$

$$\theta(R(r), X(0), F_{ox2}, F_{or2}) = 0.036$$

$$T_b := T_\infty + \theta\left(R\left(\frac{d}{2}\right), X(0), F_{ox2}, F_{or2}\right)(T_0 - T_\infty) = 752.47 \text{ } ^\circ\text{C}$$

В центре основания:

$$R(0) = 0$$

$$X(\delta) = 1$$

$$\theta(R(0), X(\delta), F_{ox2}, F_{or2}) = 0.036$$

$$T_a := T_\infty + \theta(R(0), X(\delta), F_{ox2}, F_{or2})(T_0 - T_\infty) = 752.31 \text{ } ^\circ\text{C}$$

По периметру основания:

$$R(r) = 1$$

$$X(\delta) = 1$$

$$\theta(R(r), X(\delta), F_{ox2}, F_{or2}) = 0.033$$

$$\textcolor{red}{T_w} := T_\infty + \theta(R(r), X(\delta), F_{ox2}, F_{or2})(T_0 - T_\infty) = 754.59 \text{ } ^\circ\text{C}$$

