

Задачи 2 блока

Сафонов А.А.

Вариант 18

Задача 2.1.

Рассчитать плотность линейного теплового потока и построить график распределения температуры в криотрубопроводе, выполненном в виде трубы из нержавеющей стали с диаметрами $d_1/d_2 = 28 / 32$ мм, $\lambda_{ст} = 20$ Вт/мК, покрытой снаружи слоем изоляции толщиной $\delta_{из} = \langle \delta_{из_мм} \rangle$ мм, $\lambda_{из} = \langle \lambda_{из} \rangle$ Вт/мК. Температура внутренней поверхности трубопровода равна $T_{c1} = \langle T_{c1} \rangle$ °C, температура на поверхности изоляции - $T_{c2} = \langle T_{c2} \rangle$ °C.

N var	$\lambda_{из}$	$\delta_{из}$, мм	T_{c1}	T_{c2}
18	0.43	20	-95	8

$$\lambda_{из} := 0.43 \quad \lambda_{ст} := 20 \quad \frac{\text{Вт}}{\text{мК}} \quad d_1 := 28 \text{ мм}$$

$$\delta_{из} := 20 \text{ мм} \quad d_2 := 32 \text{ мм}$$

$$T_{c1} := -95 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_{c2} := 8 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Плотность линейного теплового потока:

$$q_l := \frac{2 \cdot \pi \cdot (T_{c2} - T_{c1})}{\frac{1}{\lambda_{ст}} \cdot \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{1}{\lambda_{из}} \cdot \ln\left(\frac{d_2 + 2 \cdot \delta_{из}}{d_2}\right)} = 341.954 \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}}$$

Температура внутренней стенки цилиндра:

$$T_{ст} := T_{c2} - \frac{q_l}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{из}} \cdot \ln\left(\frac{d_2 + 2 \cdot \delta_{из}}{d_2}\right) = -94.637 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Распределение температуры в стенке трубы:

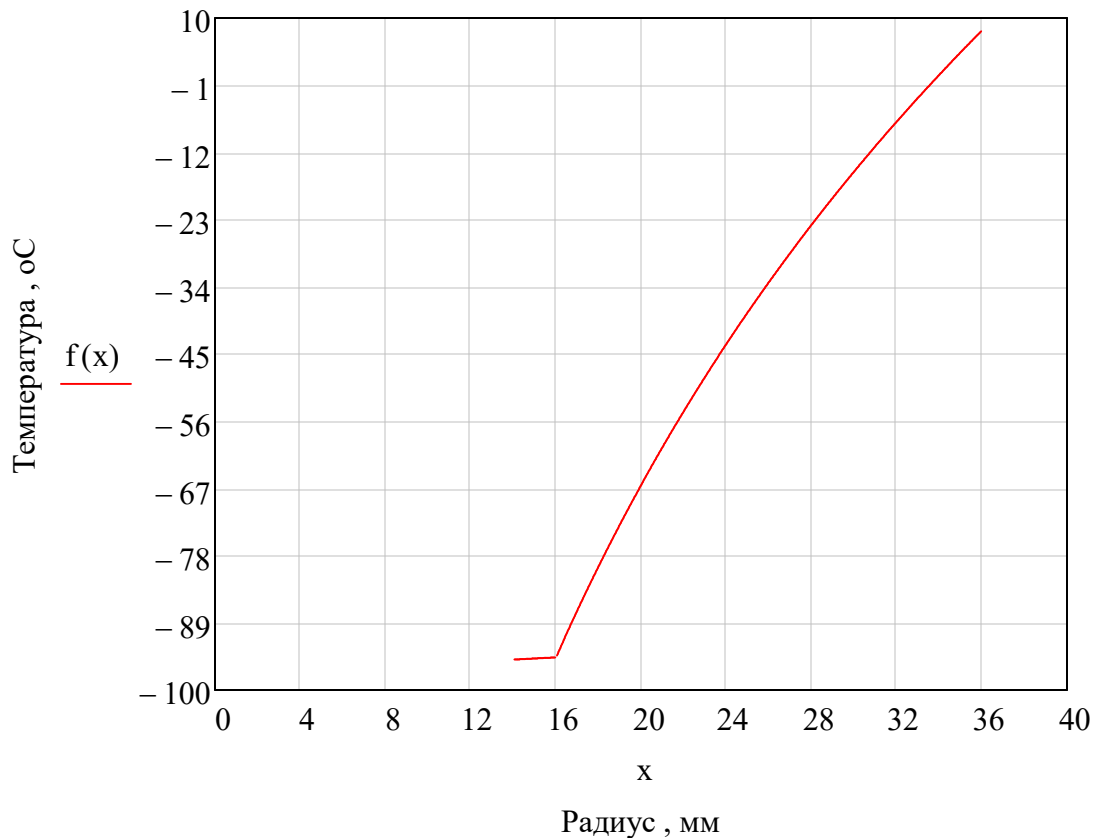
$$T(x) := T_{c1} - \frac{T_{c1} - T_{ct}}{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} \cdot \ln\left(\frac{x}{\frac{d_1}{2}}\right)$$

Распределение температуры в слое изоляции:

$$T_1(x) := T_{ct} - \frac{T_{ct} - T_{c2}}{\ln\left(\frac{d_2 + 2 \cdot \delta_{из}}{d_2}\right)} \cdot \ln\left(\frac{x}{\frac{d_2}{2}}\right)$$

$$f(x) := \begin{cases} T(x) & \text{if } \frac{d_1}{2} < x \wedge x < \frac{d_2}{2} \\ T_1(x) & \text{if } \frac{d_2}{2} < x \wedge x < \frac{d_2}{2} + \delta_{из} \end{cases}$$

График распределения температуры в стенке



Задача 2.2.

Вычислить допустимую силу тока в медном проводе диаметром $d = \langle d_{\text{мм}} \rangle$ мм при условии, что максимальная температура меди не должна превышать $T_{\text{макс}} = 80^\circ\text{C}$, для четырех случаев:

1. Провод находится в воздушной среде при температуре $T_{\text{ж}} = 20^\circ\text{C}$, коэффициент теплоотдачи на наружной поверхности равен $\alpha_1 = \langle \alpha_1 \rangle$ Вт/м²К.

1.1 Провод без изоляции.

1.2 Провод покрыт слоем резиновой изоляции толщиной $\delta_{\text{из}} = \langle \delta_{\text{из}}_{\text{мм}} \rangle$ мм.

2. Провод охлаждается водой с температурой $T_{\text{ж}} = 20^\circ\text{C}$, Коэффициент теплоотдачи на наружной поверхности равен $\alpha_2 = \langle \alpha_2 \rangle$ Вт/м²К.

2.1 Провод без изоляции.

2.2 Провод покрыт слоем резиновой изоляции толщиной $\delta = \langle \delta_{\text{из}}_{\text{мм}} \rangle$ мм.

Коэффициент теплопроводности резины равен $\lambda_{\text{из}} = 0,16$ Вт/мК, удельное электрическое сопротивление меди $\rho_{\text{м}} = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Для всех рассмотренных случаев построить графики распределения температур. Объяснить полученные результаты.

N var	d, мм	δиз, мм	α1	α2
18	2.2	0.9	11	960

$$\begin{aligned}
 d &:= 0.0022 \text{ м} & T_{\text{max}} &:= 80 \text{ }^\circ\text{C} & \rho &:= 1.7 \cdot 10^{-8} \\
 \delta_{\text{из}} &:= 0.0009 \text{ мм} & T_{\text{ж}} &:= 20 \text{ }^\circ\text{C} & \delta &:= \delta_{\text{из}} \text{ по условию} \\
 \alpha_1 &:= 11 & r_0 &:= \frac{d}{2} = 1.1 \times 10^{-3} \\
 \alpha_2 &:= 960 & \lambda_{\text{м}} &:= 394 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}
 \end{aligned}$$

Провод находится в воздушной среде:

1) Без изоляции

$$T_{\text{max}} := \frac{q_v \cdot r_0}{\alpha_1 \cdot 2} + T_{\text{ж}} + \frac{q_v \cdot r_0^2}{4 \cdot \lambda_{\text{м}}} \quad \text{где} \quad \frac{q_v \cdot r_0}{\alpha_1 \cdot 2} + T_{\text{ж}} = \blacksquare \cdot T_{\text{с}}$$

Отсюда объемная плотность теплового потока:

$$q_v := \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{ж}}}{\frac{r_0}{\alpha_1 \cdot 2} + \frac{r_0^2}{4 \cdot \lambda_{\text{м}}}} = 1.2 \times 10^6 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$$

Расчитаем допустимую силу тока:

$$q_v := \frac{Q}{V} = \frac{I^2 \frac{\rho l}{S}}{\pi \cdot r_0^2 \cdot l} \quad \text{Расчетная формула}$$

$$S := \pi \cdot r_0^2 = 3.801 \times 10^{-6}$$

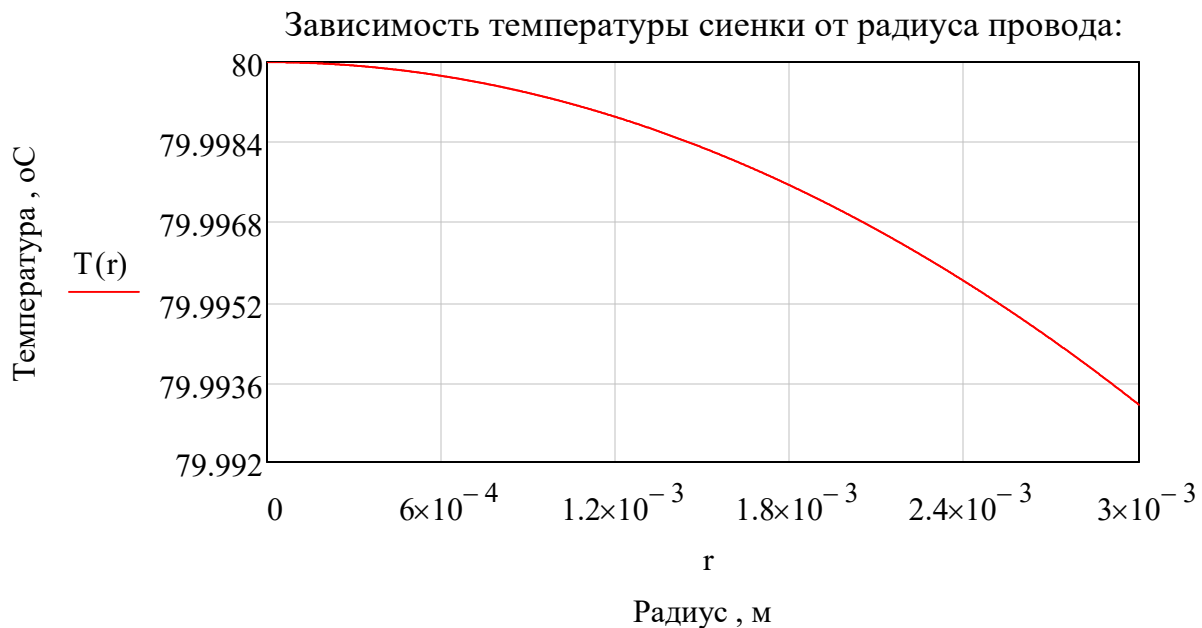
$$I := S \cdot \sqrt{\frac{q_v}{\rho}} = 31.937 \quad \text{A}$$

Найдем температуру стенки:

$$T_c := \frac{q_v \cdot r_0}{2 \cdot \alpha_1} + T_{\text{ж}} = 79.999 \quad \text{oC}$$

Зависимость температуры сиенки от радиуса провода:

$$T(r) := T_c + \frac{q_v \cdot r_0^2}{4 \cdot \lambda_m} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$



2) С резиновой изоляцией

$$q_l := \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{из}} \cdot \ln\left(\frac{r_0 + \delta_{из}}{r_0}\right)}$$

$$q_l := \alpha_1 \cdot (T_{c2} - T_{ж}) \cdot 2 \cdot \pi \cdot (r_0 + \delta)$$

Отсюда :

$$T_{c1} - T_{ж} = \frac{q_l}{\alpha_1 \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{1}{(r_0 + \delta)} + \frac{1}{\lambda_{из}} \ln \cdot \left(\frac{r_0 + \delta_{из}}{r_0} \right) \right]$$

Температура поверхности провода:

$$T_{c1} := T_{c2} + \frac{q_l \cdot \ln\left(\frac{r_0 + \delta_{из}}{r_0}\right)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{из}}$$

Найдем температуру наружной поверхности изоляции:

$$\text{при } q_l = q_v \cdot r_0^2 \cdot \pi$$

$$T_{c1} := T_{ж} + \frac{q_v \cdot r_0^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot (r_0 + \delta)} + \frac{\ln\left(\frac{r_0 + \delta_{из}}{r_0}\right)}{\lambda_{из}} \right]$$

Найдем распределение температуры в проводе:

$$T_1(r) := T_{c1} + \frac{q_v \cdot r_0^2}{4 \cdot \lambda_m} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

$$q_v := \frac{q_l}{\pi \cdot r_0^2}$$

$$q_v := \frac{2(T_{\max} - T_{\text{ж}})}{r_0^2 \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \lambda_m} + \frac{1}{\alpha_1 \cdot (r_0 + \delta)} + \frac{\ln\left(\frac{r_0 + \delta}{r_0}\right)}{\lambda_{\text{из}}} \right]} = 2.117 \times 10^6 \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$$

Найдем допустимую силу тока:

$$I := S \cdot \sqrt{\frac{q_v}{\rho}} = 42.42 \quad \text{А}$$

Линейная плотность теплового потока в изоляции:

$$q_l := q_v \cdot r_0^2 \cdot \pi = 8.047 \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}}$$

Температура наружной поверхности изоляции:

$$T_{c2} := T_{\text{ж}} + \frac{q_l}{\alpha_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot (r_0 + \delta)} = 78.218$$

Температура поверхности провода:

$$T_{c1} := T_{c2} + \frac{q_l \cdot \ln\left(\frac{r_0 + \delta_{\text{из}}}{r_0}\right)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{\text{из}}} = 79.998$$

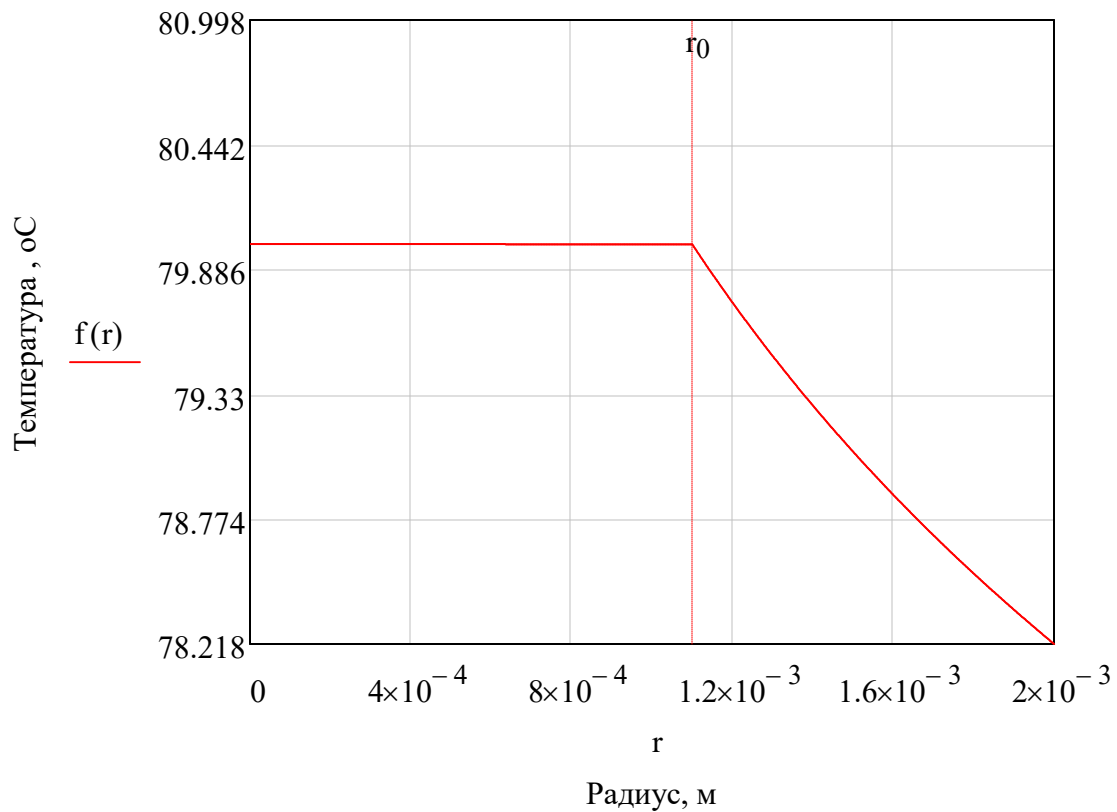
Распределение температур в проводе:

$$T_1(r) := T_{c1} + \frac{q_v \cdot r_0^2}{4 \cdot \lambda_m} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

Распределение температур в изоляции:

$$T_2(r) := T_{c1} - \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\ln\left(\frac{r_0 + \delta}{r_0}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

$$f(r) := \begin{cases} T_1(r) & \text{if } (0 \leq r \wedge r \leq r_0) \\ T_2(r) & \text{if } (r_0 \leq r \wedge r \leq r_0 + \delta) \end{cases}$$



Провод находится в воде при температуре $T_{\text{ж}} = 20$:

1) Без изоляции

$$q := \alpha_2 (T_c - T_{\text{ж}}) \quad \text{отсюда} \quad T_c := \frac{q_v \cdot r_0}{2 \cdot \alpha_2} + T_{\text{ж}}$$

$$q := \frac{q_v \cdot r_0}{2}$$

Выразим максимально допустимую температуру:

$$T_{\text{max}} := T_c + \frac{q_v \cdot r_0^2}{4 \cdot \lambda_m}$$

Найдем q_v :

$$q_v := \frac{T_{\text{max}} - T_{\text{ж}}}{\frac{1}{\alpha_2} + \frac{r_0}{2 \cdot \lambda_m}} \cdot \frac{2}{r_0} = 1.046 \times 10^8 \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$$

$$q_v := \frac{I^2}{S^2} \cdot \rho$$

Из этой системы найдем максимально допустимый ток:

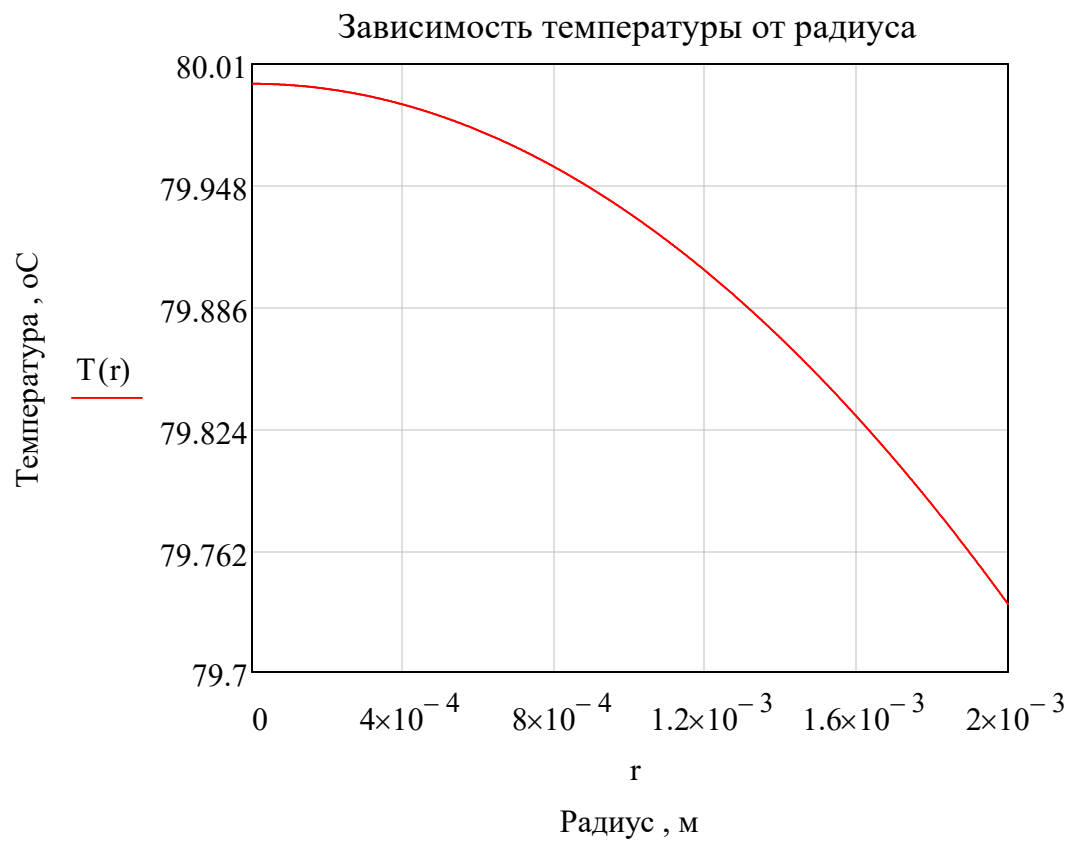
$$I := \pi \cdot r_0^2 \cdot \sqrt{\frac{q_v}{\rho}} = 298.16 \quad \text{А}$$

Выразим температуру стенки:

$$T_c := \frac{q_v \cdot r_0}{2 \cdot \alpha_2} + T_{\text{ж}} = 79.92 \quad \text{°C}$$

Построим график зависимости температуры от радиуса:

$$T(r) := T_c + \frac{q_v \cdot r_0^2}{4 \cdot \lambda_m} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$



2) С изоляцией

$$d_{\text{кр}} := \frac{2 \cdot \lambda_{\text{из}}}{\alpha_2} = 8.958 \times 10^{-4} \text{ мм} \quad \text{меньше } r_0 \text{ значит уменьшение теплоотдачи}$$

Найдем температуру поверхности провода;

$$T_{\text{c1}} := T_{\text{c2}} + \frac{q_l \cdot \ln\left(\frac{r_0 + \delta_{\text{из}}}{r_0}\right)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{\text{из}}} \quad \blacksquare$$

$$q_l := \frac{T_{\text{c1}} - T_{\text{c2}}}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{\text{из}}} \cdot \ln\left(\frac{r_0 + \delta_{\text{из}}}{r_0}\right)} \quad \blacksquare \quad \text{и} \quad \underline{q_l} := \alpha_2 \cdot (T_{\text{c2}} - T_{\text{ж}}) \cdot 2 \cdot \pi \cdot (r_0 + \delta)$$

Отсюда:

$$\underline{T_{\text{c1}}} := T_{\text{ж}} + \frac{q_v \cdot r_0^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{\alpha_2 \cdot (r_0 + \delta)} + \frac{\ln\left(\frac{r_0 + \delta_{\text{из}}}{r_0}\right)}{\lambda_{\text{из}}} \right]$$

Распределение температуры:

$$T_2(r) := T_{\text{c1}} + \frac{q_v \cdot r_0^2}{4 \cdot \lambda_m} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad \blacksquare$$

Найдем q_v :

$$q_v := \frac{2(T_{\max} - T_{\text{ж}})}{r_0^2 \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot \lambda_m} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot (r_0 + \delta)} + \frac{\ln\left(\frac{r_0 + \delta}{r_0}\right)}{\lambda_{\text{из}}} \right]} = 5.186 \times 10^7 \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$$

Найдем допустимый ток в провожде:

$$I := \pi \cdot r_0^2 \cdot \sqrt{\frac{q_v}{\rho}} = 209.951 \quad \text{А}$$

Найдем q_l :

$$q_l := q_v \cdot \pi \cdot r_0^2 = 197.128 \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}}$$

Температура внешней пов-сти изоляции:

$$T_{c2} := T_{\text{ж}} + \frac{q_l}{\alpha_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot (r_0 + \delta)} = 36.341 \quad \text{оС}$$

Температура пов-сти провода:

$$T_{c1} := T_{c2} + \frac{q_l \cdot \ln\left(\frac{r_0 + \delta_{\text{из}}}{r_0}\right)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{\text{из}}} = 79.96 \quad \text{оС}$$

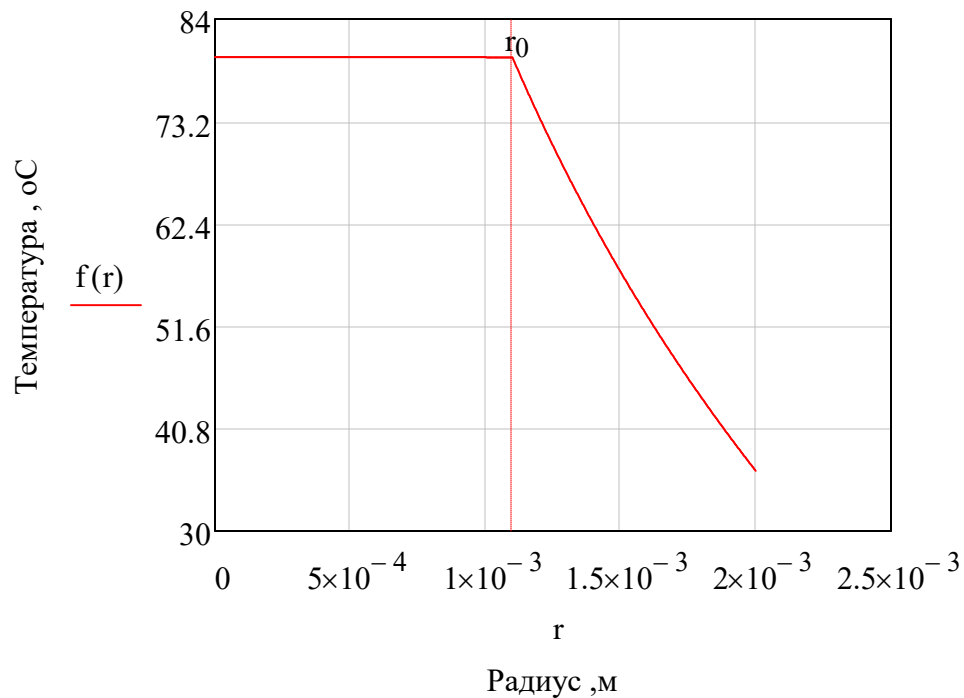
Распределение температур в проводе:

$$T_1(r) := T_{c1} + \frac{q_v \cdot r_0^2}{4 \cdot \lambda_m} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$$

Распределение температур в изоляции:

$$T_2(r) := T_{c1} - \frac{T_{c1} - T_{c2}}{\ln\left(\frac{r_0 + \delta}{r_0}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

$$f(r) := \begin{cases} T_1(r) & \text{if } (0 \leq r \wedge r \leq r_0) \\ T_2(r) & \text{if } (r_0 \leq r \wedge r \leq r_0 + \delta) \end{cases}$$



Вывод: В воздухе увеличение теплоизоляционного слоя приведет к росту тепловых потерь, в воде же увеличение теплоизоляционного слоя будет эффективно из-за уменьшения тепловых потерь.

Задача 2.3.

Полый цилиндрический твэл изготовлен из таблеток UO_2 с размерами $d_1 = \langle d1_мм \rangle$ мм и $d_2 = \langle d2_мм \rangle$ мм, помещенных в оболочку из нержавеющей стали толщиной $\delta = \langle \delta_мм \rangle$ мм. Рассчитать максимальную температуру в твэле, если мощность внутренних источников тепла равна $q_v = \langle qv \rangle \cdot 10^8$ Вт/м³, а отвод тепла от твэла осуществляется только с наружной поверхности, на которой заданы граничные условия: $T_{\text{ж}} = \langle T_{\text{ж}} \rangle$ °С и $\alpha = \langle \alpha \rangle$ Вт/м²К. Коэффициент теплопроводности двуокиси урана $\lambda_{\text{топл}} = [5500/(560 + T) + 0,942 \cdot 10^{-10} \cdot T^3]$ Вт/мК (здесь T в градусах К), коэффициент теплопроводности нержавеющей стали равен $\lambda_{\text{ст}} = 19$ Вт/мК, термическое сопротивление между топливом и оболочкой равно $R_t = 2 \cdot 10^{-5}$ м²К/Вт. Построить график распределения температуры в твэле.

N var	d1, мм	d2, мм	δ, мм	α	Tж	qv
18	4	14	0.5	12200	430	5

$$d_1 := 0.004 \quad \text{м} \quad q_v := 5 \cdot 10^8 \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$$

$$d_2 := 0.014 \quad \text{м} \quad \lambda_{\text{ст}} := 19 \quad \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}$$

$$\delta := 0.0005 \quad \text{м} \quad R_t := 2 \cdot 10^{-5} \quad \frac{\text{м}^2 \text{К}}{\text{Вт}}$$

$$\alpha := 12200 \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}$$

$$T_{\text{ж}} := 430 \quad \text{°C} \quad \lambda_{\text{топл}}(T) := \frac{5500}{560 + T} + 0.942 \cdot 10^{-10} \cdot T^3$$

$$r_1 := \frac{d_1}{2} = 2 \times 10^{-3}$$

$$r_2 := \frac{d_2}{2} = 7 \times 10^{-3}$$

Линейная плотность теплового потока:

$$q_l := q_v \cdot \pi \cdot (r_2^2 - r_1^2) = 7.069 \times 10^4 \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}}$$

$$q_l := (T_{\text{с4}} - T_{\text{ж}}) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot (r_2 + \delta)$$

Выразим температуру на поверхности изоляции:

$$T_{c4} := T_{ж.} + \frac{q_l}{2 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot (r_2 + \delta)} = 552.951 \quad \text{oC}$$

Выразим температуру внутри изоляции:

$$T_{c3} := \frac{q_l \cdot \ln\left(\frac{r_2 + \delta}{r_2}\right)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{ст}} + T_{c4} = 593.802 \quad \text{oC}$$

Выразим внешнюю температуру твэла:

$$T_{c2} := T_{c3} + \frac{q_l \cdot R_t}{2 \cdot \pi \cdot r_2} = 625.945 \quad \text{oC}$$

Запишем уравнение теплопроводности:

$$\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{d}{dr} \left[r \cdot \left(\frac{d}{dr} \Lambda \right) \right] \right] + q_v = 0$$

$$\Lambda_{c2} := \int_0^{T_{c2}+273} \lambda_{топ}(T) dT = 5.282 \times 10^3$$

$$\Lambda(r) := \frac{q_v}{4} \cdot \left(r_2^2 - r^2 - r_1^2 \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r}\right) \right) + \Lambda_{c2}$$

$$r := \begin{cases} r_0 \leftarrow r_1 \\ \text{for } i \in 1, 2 \dots 9 \\ r_i \leftarrow r_{i-1} + 0.0005 \\ r \end{cases}$$

	0
0	2·10 ⁻³
1	2.5·10 ⁻³
2	3·10 ⁻³
3	3.5·10 ⁻³
4	4·10 ⁻³
5	4.5·10 ⁻³
6	5·10 ⁻³
7	5.5·10 ⁻³
8	6·10 ⁻³
9	6.5·10 ⁻³

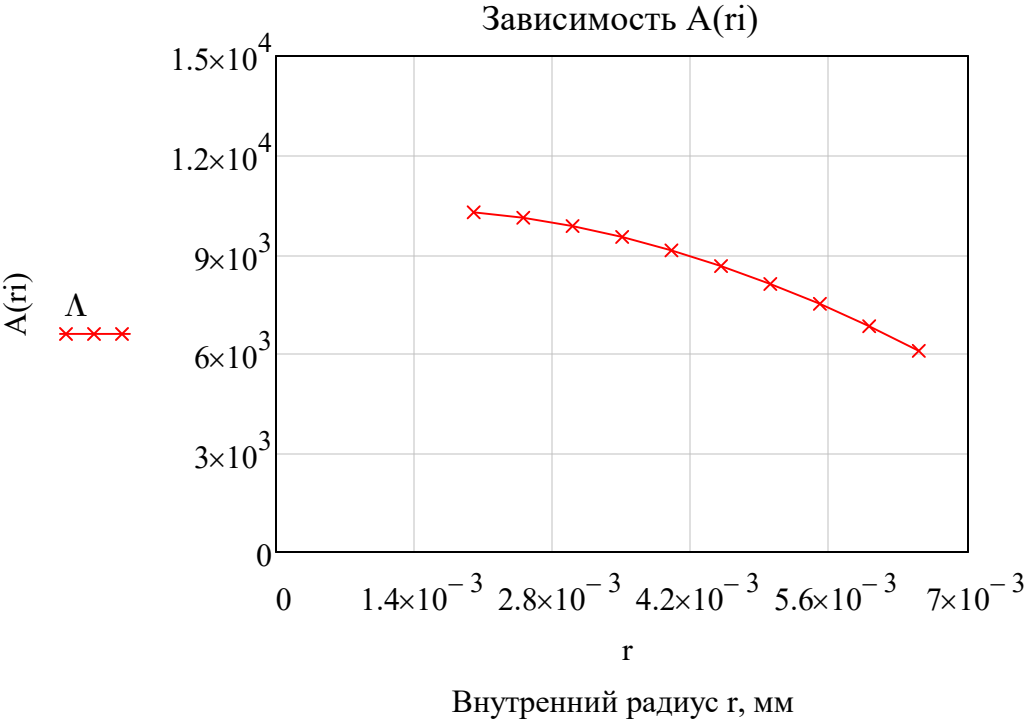
Разобьем радиус с шагом 0,0005м

$\Lambda :=$

for $i \in 0, 1 \dots 9$	$=$
$A_i \leftarrow \Lambda(r_i)$	

 A

	0
0	$1.028 \cdot 10^4$
1	$1.011 \cdot 10^4$
2	$9.858 \cdot 10^3$
3	$9.529 \cdot 10^3$
4	$9.127 \cdot 10^3$
5	$8.655 \cdot 10^3$
6	$8.114 \cdot 10^3$
7	$7.505 \cdot 10^3$
8	$6.83 \cdot 10^3$
9	$6.089 \cdot 10^3$



Найдем температуры для каждого радиуса:

$$T := \begin{cases} T_0 \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 0, 1 \dots 9 \\ T_i \leftarrow \text{root} \left(\int_0^T \lambda_{\text{топ}}(T) dT - \Lambda_i, T, -1, 3000 \right) \end{cases} =$$

	0
0	$2.506 \cdot 10^3$
1	$2.454 \cdot 10^3$
2	$2.374 \cdot 10^3$
3	$2.268 \cdot 10^3$
4	$2.134 \cdot 10^3$
5	$1.972 \cdot 10^3$
6	$1.784 \cdot 10^3$
7	$1.575 \cdot 10^3$
8	$1.351 \cdot 10^3$
9	$1.123 \cdot 10^3$

Для построения общей зависимости добавим в таблицы данные для r_1 , r_2 и $r_2 + \delta$

$$r := \begin{pmatrix} 0.002 \\ 0.0025 \\ 0.003 \\ 0.0035 \\ 0.004 \\ 0.0045 \\ 0.005 \\ 0.0055 \\ 0.006 \\ 0.0065 \\ 0.007 \\ 0.007 \\ 0.0075 \end{pmatrix} \quad T := \begin{pmatrix} 2506.17706706284 \\ 2453.90880615734 \\ 2374.35589527407 \\ 2267.74948359109 \\ 2133.6461001809 \\ 1971.98119076499 \\ 1784.27678585426 \\ 1574.82673729474 \\ 1351.10510361893 \\ 1122.66629976337 \\ T_{c2} + 273 \\ T_{c3} + 273 \\ T_{c4} + 273 \end{pmatrix}$$

