

# Блок задач 4

## Сафонов Андрей ТФ-15-22

### Вариант 18

Стальная цилиндрическая болванка диаметром  $d = \langle d_{\text{мм}} \rangle$  мм и высотой  $H = \langle H_{\text{мм}} \rangle$  мм с начальной температурой  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  помещается в печь, где она нагревается продуктами сгорания с температурой  $T_{\text{ж}} = \langle T_{\text{ж}} \rangle^\circ\text{C}$ . Коэффициент теплоотдачи равен  $\alpha = \langle \alpha \rangle \text{ Вт/м}^2\text{К}$ , коэффициент теплопроводности стали  $\lambda = \langle \lambda \rangle \text{ Вт/мК}$ , коэффициент температуропроводности  $a = \langle a_{106} \rangle \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ . Определить:

1. Температуру в центре болванки через  $\tau_1 = \langle \tau \rangle$  мин.
2. Время  $\tau_2$ , в течение которого температура в центре болванки достигнет значения  $T_k = \langle T_k \rangle^\circ\text{C}$ , а также температуры в середине образующей ( $T_b$ ), в центре основания ( $T_a$ ) и по периметру основания ( $T_c$ ) в этот момент времени.

N var	H, мм	d, мм	$\lambda$	$a \cdot 10^6$	$\alpha$	$\tau'$	$T_{\text{ж}}$	$T_k$
18	150	160	41	6.5	90	50	780	750

$$d := 0.16 \text{ м} \quad \alpha := 90 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}} \quad \tau_1 := 60 \cdot 50 = 3 \times 10^3 \text{ с} \quad T_{\text{ж}} := 780 \text{ }^\circ\text{C} \quad T_0 := 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$H := 0.15 \text{ м} \quad \lambda := 41 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}} \quad a := 6.5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}} \quad T_k := 750 \text{ }^\circ\text{C}$$

1) Решение для бесконечной пластины толщиной  $\delta = H/2$

$$\theta(X, Fo_x) := \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2 \sin(\mu x_k)}{\mu x_k + \sin(\mu x_k) \cos(\mu x_k)} \cdot \cos(\mu x_k X) \cdot e^{-(\mu x_k)^2 Fo_x} \right] \right] \quad X(x_0) := \frac{2 \cdot x_0}{H}$$

2) Решение для бесконечного цилиндра радиуса  $r = d/2$

$$\theta(R, Fo_r) := \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2 J_1(\mu r_k)}{\mu r_k \cdot (J_1(\mu r_k)^2 + J_0(\mu r_k)^2)} \cdot J_0(\mu r_k R) \cdot e^{-(\mu r_k)^2 Fo_r} \right] \right] \quad R(r_0) := \frac{2 r_0}{d}$$

Решение:

$$\theta(R, Fo_r, X, Fo_x) := \theta(R, Fo_r) \cdot \theta(X, Fo_x)$$

Определим температуру в центре болванки:

$$\delta := \frac{H}{2} = 0.075 \text{ м} \quad r := \frac{d}{2} = 0.08 \text{ м}$$

Число фурье:

$$Fo_x := \frac{a \cdot \tau_1}{\delta^2} = 3.467 \quad Fo_r := \frac{a \cdot \tau_1}{r^2} = 3.047$$

Так как число фурье > 0.3 (регулярный режим), можно взять первый член сумм для решений  $\theta$ :

$$\theta_1(R, Fo_r) := \frac{2 J_1(\mu r_1)}{\mu r_1 \cdot (J_1(\mu r_1)^2 + J_0(\mu r_1)^2)} \cdot J_0(\mu r_1 R) \cdot e^{-(\mu r_1)^2 Fo_r}$$

$$\theta_1(X, Fo_x) := \frac{2 \sin(\mu x_1)}{\mu x_1 + \sin(\mu x_1) \cos(\mu x_1)} \cdot \cos(\mu x_1 X) \cdot e^{-(\mu x_1)^2 Fo_x}$$

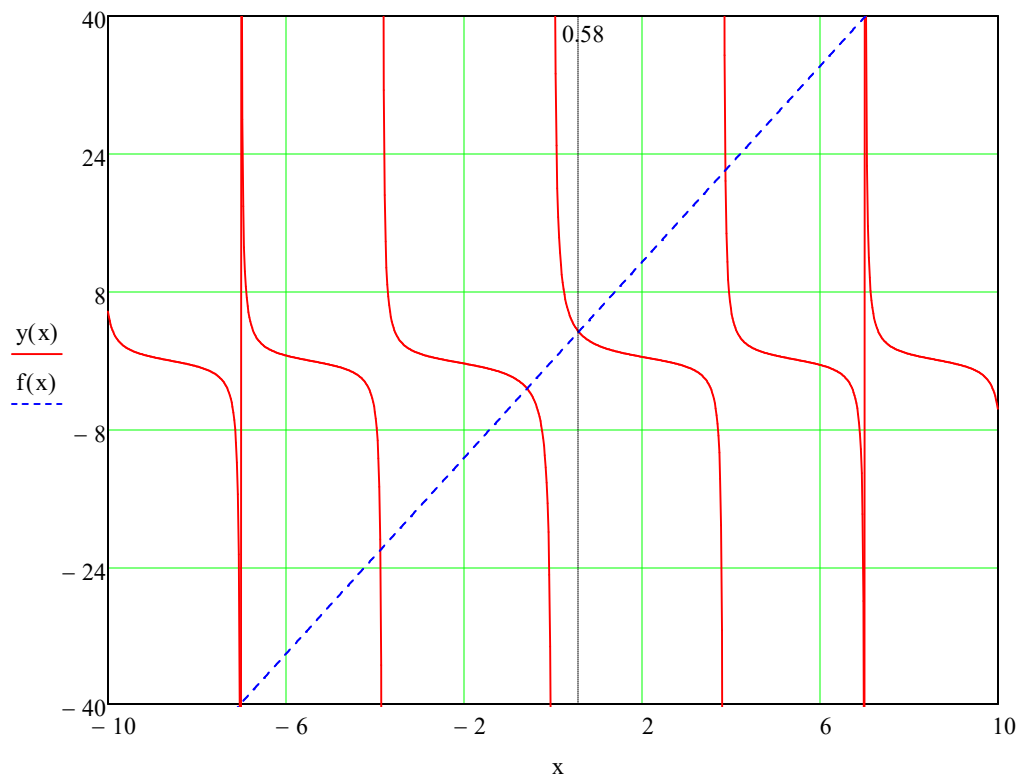
Решим трансцендентные уравнения графическим методом:

$$\frac{J_0(x)}{J_1(x)} = \frac{x}{Bi_r}$$

$$Bi_r := \frac{\alpha \cdot r}{\lambda} = 0.176$$

$$y(x) := \frac{J_0(x)}{J_1(x)}$$

$$f(x) := \frac{x}{Bi_r}$$



Given

$$b(x) = 0$$

$$b(x) := y(x) - f(x)$$

$$x := 1$$

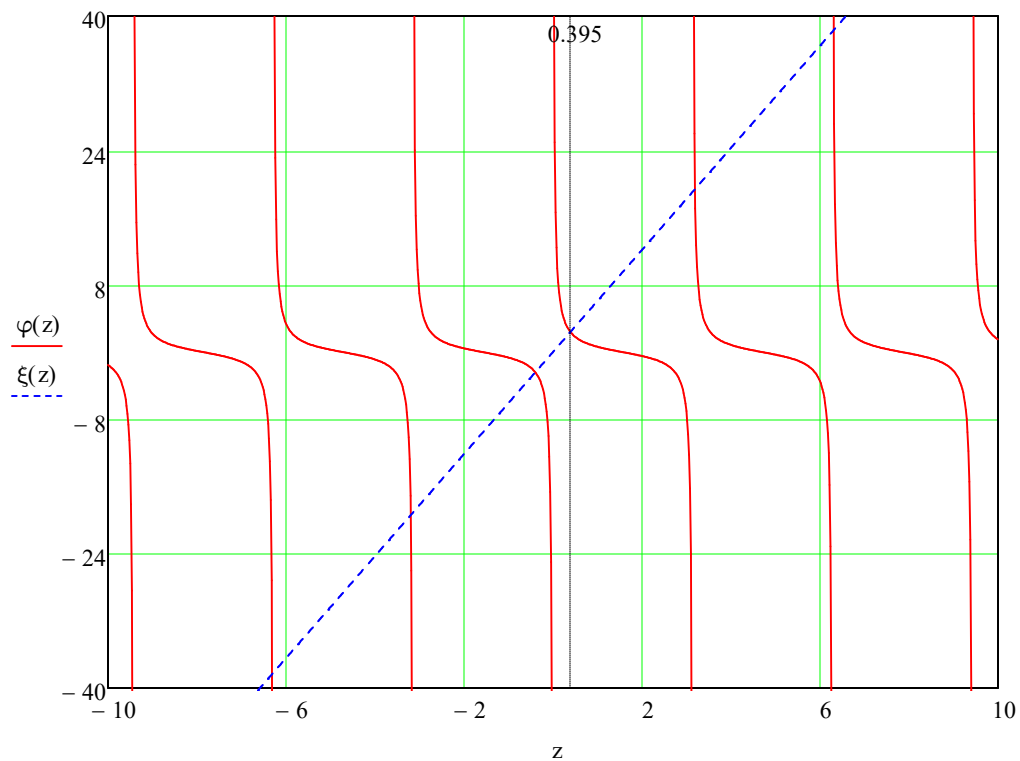
$$\text{Find}(x) = 0.58$$

$$\mu r_1 := 0.58$$

$$\frac{1}{\tan(z)} = \frac{z}{\text{Bi}_x} \quad \text{Bi}_x := \frac{\alpha \cdot \delta}{\lambda} = 0.165$$

$$\varphi(z) := \frac{1}{\tan(z)}$$

$$\xi(z) := \frac{z}{\text{Bi}_x}$$



Given

$$b(z) = 0$$

$$b(z) := \varphi(z) - \xi(z)$$

$$z := 1$$

$$\text{Find}(z) = 0.395 \quad \mu x_1 := 0.395$$

Температура в центре болванки через  $\tau_1 = 3 \times 10^3$  секунд :

$$Fo_x = 3.467$$

$$X(0) = 0$$

$$Fo_r = 3.047$$

$$R(0) = 0$$

$$\theta(R, X, Fo_x, Fo_r) := \frac{2 J_1(\mu r_1)}{\mu r_1 \cdot (J_1(\mu r_1)^2 + J_0(\mu r_1)^2)} \cdot J_0(\mu r_1 R) \cdot e^{-(\mu r_1)^2 Fo_r} \cdot \left[ \frac{2 \sin(\mu x_1)}{\mu x_1 + \sin(\mu x_1) \cos(\mu x_1)} \cdot \cos(\mu x_1 X) \cdot e^{-(\mu x_1)^2 Fo_x} \right]$$

$$\theta(R(0), X(0), Fo_x, Fo_r) = 0.223$$

$$\theta = \frac{T - T_{\text{ж}}}{T_0 - T_{\text{ж}}}$$

$$T := T_{\text{ж}} + \theta(R(0), X(0), Fo_x, Fo_r) \cdot (T_0 - T_{\text{ж}}) = 610.173 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Определим время, в течении которого температура в центре болванки станет равной  $T_k$

$$T_k = 750 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\theta_1 := \frac{T_k - T_{\text{ж}}}{T_0 - T_{\text{ж}}} = 0.039$$

$$\theta(R, X, Fo_x, Fo_r) := \frac{2 J_1(\mu r_1)}{\mu r_1 \cdot (J_1(\mu r_1)^2 + J_0(\mu r_1)^2)} \cdot J_0(\mu r_1 R) \cdot e^{-(\mu r_1)^2 Fo_r} \cdot \left[ \frac{2 \sin(\mu x_1)}{\mu x_1 + \sin(\mu x_1) \cos(\mu x_1)} \cdot \cos(\mu x_1 X) \cdot e^{-(\mu x_1)^2 Fo_x} \right]$$

$$\theta_2(R, X) := \frac{2 J_1(\mu r_1)}{\mu r_1 \cdot (J_1(\mu r_1)^2 + J_0(\mu r_1)^2)} \cdot J_0(\mu r_1 R) \cdot \left( \frac{2 \sin(\mu x_1)}{\mu x_1 + \sin(\mu x_1) \cos(\mu x_1)} \cdot \cos(\mu x_1 X) \right)$$

$$\theta_2(R(0), X(0)) = 1.07$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2(R(0), X(0))} = e^{-(\mu r_1)^2 Fo_r} \cdot e^{-(\mu x_1)^2 Fo_x}$$

$$\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2(R(0), X(0))}\right) = -(\mu r_1)^2 Fo_r + [-(\mu x_1)^2 Fo_x]$$

$$Fo_x = \frac{a \cdot \tau_2}{\delta^2} \quad Fo_r = \frac{a \cdot \tau_2}{r^2}$$

$$-\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2(R(0), X(0))}\right) = (\mu r_1)^2 \cdot \frac{a \cdot \tau_2}{r^2} + (\mu x_1)^2 \cdot \frac{a \cdot \tau_2}{\delta^2}$$

$$\tau_2 := \frac{-\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2(R(0), X(0))}\right)}{(\mu r_1)^2 \cdot \frac{a}{r^2} + (\mu x_1)^2 \cdot \frac{a}{\delta^2}} = 6.321 \times 10^3 \text{ c}$$

Определим температуры в середине образующей  $T_b$ , в центре основания  $T_a$ , и по периметру основания  $T_c$ :

$$Fo_{r2} := \frac{a \cdot \tau_2}{r^2} = 6.42 \quad Fo_{x2} := \frac{a \cdot \tau_2}{\delta^2} = 7.305$$

В середине образующей:

$$R(r) = 1$$

$$X(0) = 0$$

$$\theta(R(r), X(0), Fo_{x2}, Fo_{r2}) = 0.036$$

$$T_b := T_{ж} + \theta\left(R\left(\frac{d}{2}\right), X(0), Fo_{x2}, Fo_{r2}\right)(T_0 - T_{ж}) = 752.47 \text{ } ^\circ\text{C}$$

В центре основания:

$$R(0) = 0$$

$$X(\delta) = 1$$

$$\theta(R(0), X(\delta), Fo_{x2}, Fo_{r2}) = 0.036$$

$$T_a := T_{ж} + \theta(R(0), X(\delta), Fo_{x2}, Fo_{r2})(T_0 - T_{ж}) = 752.31 \text{ } ^\circ\text{C}$$

По периметру основания:

$$R(r) = 1$$

$$X(\delta) = 1$$

$$\theta(R(r), X(\delta), Fo_{x2}, Fo_{r2}) = 0.033$$

$$T_{av} := T_{ж} + \theta(R(r), X(\delta), Fo_{x2}, Fo_{r2})(T_0 - T_{ж}) = 754.59 \text{ } ^\circ\text{C}$$

