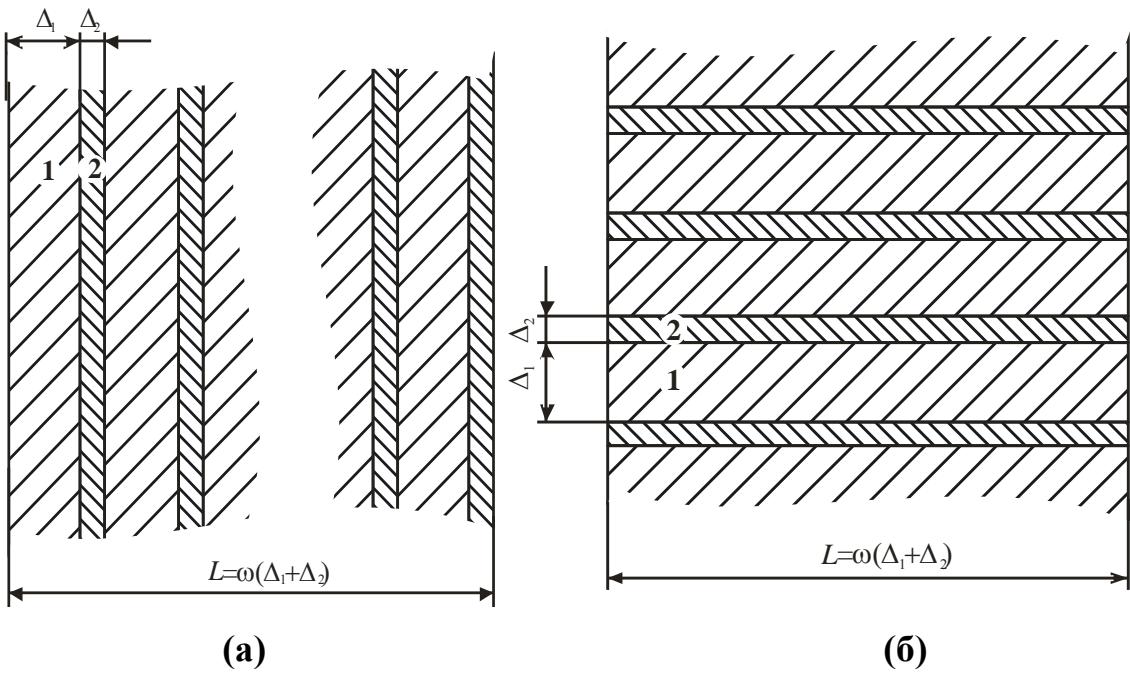


## **КМ №3 Определение эффективной теплопроводности композитного материала**

### **1. Введение. Характеристики свойств композитных материалов**

Композитными материалами (композитами) называются материалы, представляющие собой целенаправленным образом составленную неоднородную структуру (композицию) из нескольких материалов с заметно различающимися свойствами. При этом можно положительные свойства одних составляющих (например, требуемые теплофизические свойства) дополнять положительными свойствами (например, механическими) других составляющих, то есть создавать материалы с заданными свойствами. По этой причине композиты находят все более широкое применение. Для создания композитов с заранее заданными свойствами и для проектирования изделий из композитных материалов весьма актуально определение свойств композитов исходя из их структуры и свойств отдельных составляющих.

В качестве простейшего примера композитного материала рассмотрим комбинацию плоских слоев двух разных изотропных материалов. На рис. 1 схематически изображены две плоские стенки толщиной  $L$ , изготовленные из такого композита, и показаны обозначения геометрических параметров.



**Рис. 1. Стенка из композитного материала с продольным (а) и поперечным (б) расположением слоев двух материалов, составляющих этот композит.**

Рассмотрим теплопроводящие свойства такого композита. Для однородных материалов эти свойства обычно характеризуются коэффициентом теплопроводности  $\lambda$  соответствующего вещества.

По определению, за *эффективный коэффициент теплопроводности* ( $\lambda_{\text{эфф}}$ ) композита принимается коэффициент теплопроводности некоторого **однородного** материала (возможно, и не существующего в природе), обеспечивающего при тех же заданных внешних условиях передачу такого же количества тепла, что и рассматриваемый композит.

Предполагая коэффициенты теплопроводности материалов, составляющих рассматриваемый композит, ( $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2$ ) не зависящими от температуры, для граничных условий 1 рода на обеих поверхностях стенок, изображенных на рис. 1, нетрудно получить следующие выражения для эффективного коэффициента теплопроводности при продольном (как на рис. 1 $a$ ,  $\lambda_{\text{эфф}} = \lambda_{\parallel}$ ) и поперечном (как на рис. 1 $b$ ,  $\lambda_{\text{эфф}} = \lambda_{\perp}$ ) расположениях слоев через теплопроводности составляющих и геометрические параметры композита:

$$\lambda_{\parallel} = \left( \frac{1}{\lambda_1} \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)^{-1}, \quad (1)$$

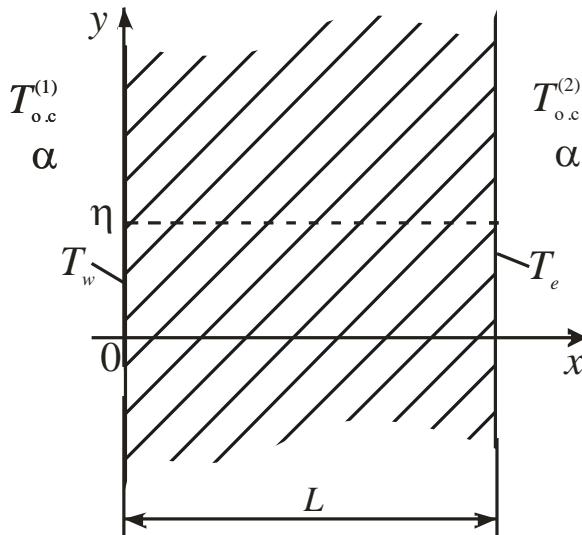
$$\lambda_{\perp} = \lambda_1 \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} + \lambda_2 \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}. \quad (2)$$

Очевидно, что эти выражения для отличающихся значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  приводят к различным значениям  $\lambda_{\parallel}$  и  $\lambda_{\perp}$ . Откуда следует, что эффективная теплопроводность композита может быть *анизотропной*, то есть зависимой от ориентации его структуры.

Выражения (1), (2) определяют свойства композита через его структуру (толщины отдельных слоев) и свойства составляющих его материалов. Но эти выражения получены для стационарных граничных условий 1 рода для конкретной структуры композита.

Могут ли эффективные свойства материала зависеть и как сильно от внешних условий, например, для граничных условий 3-го рода? Как эффективный коэффициент теплопроводности зависит от структуры композита? Для ответа на подобные вопросы можно прибегнуть к численному решению соответствующей задачи.

## 2. Постановка задачи



**Рис. 2. К определению эффективного коэффициента теплопроводности**

Рассмотрим плоскую стенку толщиной  $L$  (рис. 2), на поверхностях которой заданы следующие условия теплоотдачи:  $T_{\text{o.c}}^{(1)}$  и  $T_{\text{o.c}}^{(2)}$  — значения температуры окружающей среды;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи, который будем полагать одинаковым для левой и правой поверхностей стенки. Пусть  $\eta$  — характерный вертикальный размер рассматриваемого участка стенки: для продольного расположения слоев (рис. 1а) он может быть выбран произвольно; для поперечного расположения (рис. 1б) должен быть кратным ( $\Delta_1 + \Delta_2$ ). Введем также *среднюю плотность теплового потока* вдоль оси  $0x$

$$\bar{q}_x = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta q_x(x, y) dy \quad (3)$$

и *эффективные значения температуры*  $T_w$  на левой («западной») и  $T_e$  на правой («восточной») поверхностях стенки.

С учетом определения  $\lambda_{\text{зф}}$  для стационарной теплопередачи можно записать следующую цепочку равенств:

$$\lambda_{\text{зф}} \frac{T_w - T_e}{L} = \bar{q}_x = \alpha (T_{\text{o.c}}^{(1)} - T_w) = \alpha (T_e - T_{\text{o.c}}^{(2)}), \quad (4)$$

откуда следует

$$T_w - T_e = (T_{\text{o.c}}^{(1)} - T_{\text{o.c}}^{(2)}) - \frac{2}{\alpha} \bar{q}_x, \quad (5)$$

и, окончательно,

$$\lambda_{\text{эфф}} = \bar{q}_x \frac{L}{(T_{\text{o.c}}^{(1)} - T_{\text{o.c}}^{(2)}) - \frac{2}{\alpha} \bar{q}_x}. \quad (6)$$

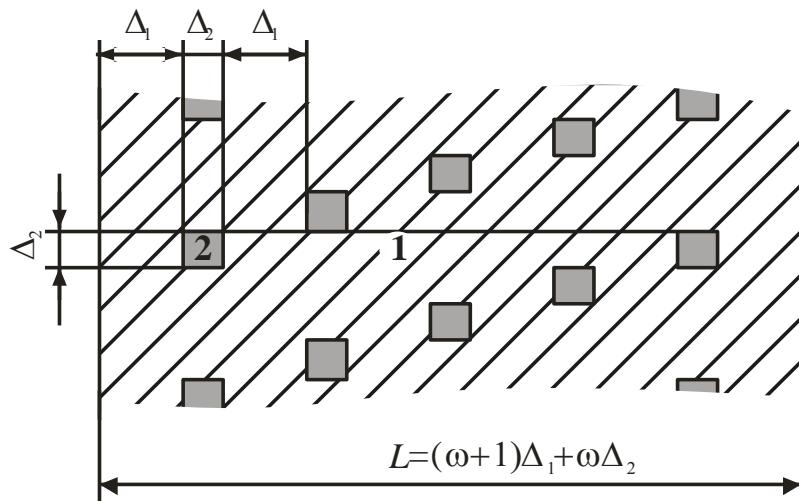
Это выражение определяет эффективный коэффициент теплопроводности через измеримые величины, характеризующие процесс теплопередачи.

### 3. Метод решения

При наличии компьютерной программы для численного решения задач стационарной диффузии определение значения эффективного коэффициента теплопроводности для стационарных условий по формуле (6) можно осуществить путем численного решения задачи о распределении температуры в рассматриваемой области пространства с заданными граничными условиями.

### 4. Задание 1

Структура композита задана на рис. 3: включения из материала № 2 имеют квадратное сечение с длиной стороны  $\Delta_2$ . Вертикальные слои этого материала расположены на расстоянии  $\Delta_1$  от поверхностей стенки и на таком же расстоянии между собой. Горизонтальные грани выравнены, как показано на рис. 3.



**Рис. 3. Структура композита ( $\omega=5$  — количество вертикальных слоев)**

Требуется:

- 1) Предложить математическое описание задачи о стационарном распределении температурного поля в композитном материале заданной структуры с граничными условиями 3-го рода на обеих поверхностях стенки (как на рис. 2). Выбрать расчетную область, описать граничные условия.

*Примечание:* несущественные для определения  $\lambda_{\phi}$  величины следует задать на свое усмотрение.

2) Расширить программу из ЛР №2 на двухмерный случай (Вам предоставлена готовая программа). При этом следует предусмотреть: расчет средней плотности теплового потока  $\bar{q}_x$  и эффективного коэффициента теплопроводности  $\lambda_{\phi}$  (естественно, в безразмерном виде). Требуется реализовать периодические граничные условия.

3) Осознанно выбирая параметры схемы дискретизации, провести вариантовые расчеты для заданных в табл. 1 значений параметров задачи и трех значений безразмерного комплекса  $\frac{\alpha \Delta_1}{\lambda_1}$ , равного 0,01; 1; 100.

4) Проанализировать влияние варьируемых в задании параметров на эффективный коэффициент теплопроводности. Дать объяснения.

**Таблица 1 – Индивидуальные задания:**

№	$\omega$	$\lambda_2/\lambda_1$	$\Delta_2/\Delta_1$
1	4	50	0,5 и 2,0
2	5	40	0,4 и 2,5
3	4	30	0,3 и 3,0
4	5	35	0,4 и 2,0
5	4	45	0,3 и 1,0
6	5	55	0,6 и 4,0
7	4	60	0,4 и 1,0
8	5	5	0,5 и 3,0
9	4	10	0,4 и 1,0
10	5	80	0,5 и 2,0
11	4	45	0,3 и 4,0
12	5	20	0,4 и 2,5
13	4	10	0,3 и 1,5

## 5. Задание 2

Имеется область  $L_x = L_y = L$ . Разбить область на  $N_x$  на  $N_x$  контрольных объемов. Теплопроводность в каждом КО определяется с помощью датчика случайных чисел, т.е. она с вероятностью  $p$  равняется  $\lambda_1$ , а с вероятностью  $(1-p)$  –  $\lambda_2$ . Слева и справа заданы граничные условия первого рода. Сверху и снизу – периодические граничные условия.

Требуется:

- Для разных значений  $N_x$  (10, 50 и 100 КО) провести расчеты эффективной теплопроводности от вероятности  $p$ . Для каждого значения  $p$  повторить расчеты 10 раз и в качестве среднего значения

эффективной теплопроводности взять среднеарифметическое значение.

- 2) Построить зависимость  $\lambda_{\text{эф}}$  от  $p$  для разных  $N_x$ . Проанализировать полученные результаты.

Содержание отчета:

- Титульный лист, содержащий название работы, наименование кафедры, номер и состав бригады, год подготовки отчета.
- Полное математическое описание задачи в размерном виде.
- Текст программы.
- Результаты расчета.
- Анализ полученных результатов.
- Дополнительные материалы (по желанию самих членов бригады).