

КМ №3 Определение эффективной теплопроводности композитного материала

1. Введение. Характеристики свойств композитных материалов

Композитными материалами (композитами) называются материалы, представляющие собой целенаправленным образом составленную неоднородную структуру (композицию) из нескольких материалов с заметно различающимися свойствами. При этом можно положительные свойства одних составляющих (например, требуемые теплофизические свойства) дополнять положительными свойствами (например, механическими) других составляющих, то есть создавать материалы с заданными свойствами. По этой причине композиты находят все более широкое применение. Для создания композитов с заранее заданными свойствами и для проектирования изделий из композитных материалов весьма актуально определение свойств композитов исходя из их структуры и свойств отдельных составляющих.

В качестве простейшего примера композитного материала рассмотрим комбинацию плоских слоев двух разных изотропных материалов. На рис. 1 схематически изображены две плоские стенки толщиной L , изготовленные из такого композита, и показаны обозначения геометрических параметров.

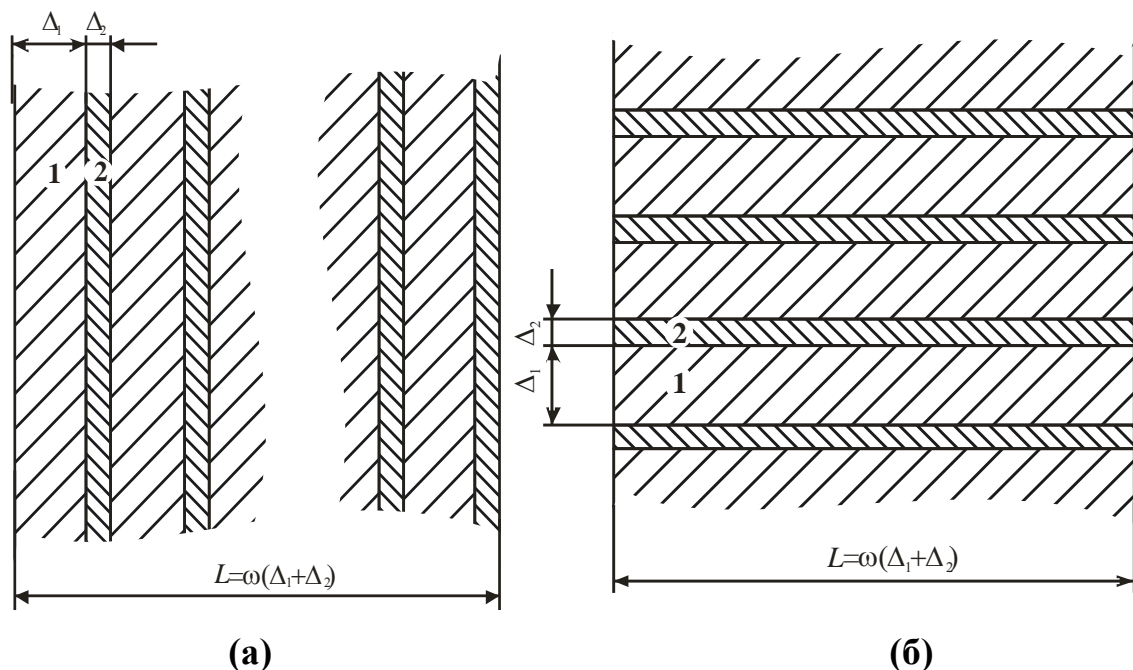


Рис. 1. Стенка из композитного материала с продольным (а) и поперечным (б) расположением слоев двух материалов, составляющих этот композит.

Рассмотрим теплопроводящие свойства такого композита. Для однородных материалов эти свойства обычно характеризуются коэффициентом теплопроводности λ соответствующего вещества.

По определению, за *эффективный коэффициент теплопроводности* ($\lambda_{\text{эф}}$) композита принимается коэффициент теплопроводности некоторого **однородного** материала (возможно, и не существующего в природе), обеспечивающего при тех же заданных внешних условиях передачу такого же количества тепла, что и рассматриваемый композит.

Предполагая коэффициенты теплопроводности материалов, составляющих рассматриваемый композит, (λ_k , $k = 1, 2$) не зависящими от температуры, для граничных условий 1 рода на обеих поверхностях стенок, изображенных на рис. 1, нетрудно получить следующие выражения для эффективного коэффициента теплопроводности при продольном (как на рис. 1а, $\lambda_{\text{эф}} = \lambda_{\parallel}$) и поперечном (как на рис. 1б, $\lambda_{\text{эф}} = \lambda_{\perp}$) расположениях слоев через теплопроводности составляющих и геометрические параметры композита:

$$\lambda_{\parallel} = \left(\frac{1}{\lambda_1} \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \right)^{-1}, \quad (1)$$

$$\lambda_{\perp} = \lambda_1 \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} + \lambda_2 \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}. \quad (2)$$

Очевидно, что эти выражения для отличающихся значений λ_1 и λ_2 приводят к различным значениям λ_{\parallel} и λ_{\perp} . Откуда следует, что эффективная теплопроводность композита может быть *анизотропной*, то есть зависимой от ориентации его структуры.

Выражения (1), (2) определяют свойства композита через его структуру (толщины отдельных слоев) и свойства составляющих его материалов. Но эти выражения получены для стационарных граничных условий 1 рода для конкретной структуры композита.

Могут ли эффективные свойства материала зависеть и как сильно от внешних условий, например, для граничных условий 3-го рода? Как эффективный коэффициент теплопроводности зависит от структуры композита? Для ответа на подобные вопросы можно прибегнуть к численному решению соответствующей задачи.

2. Постановка задачи

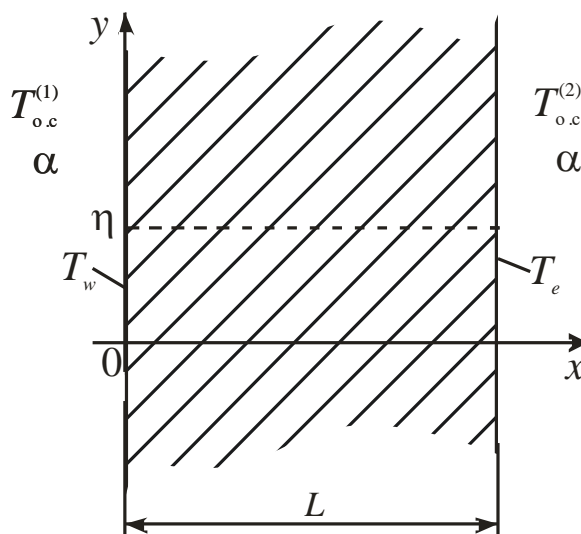


Рис. 2. К определению эффективного коэффициента теплопроводности

Рассмотрим плоскую стенку толщиной L (рис. 2), на поверхностях которой заданы следующие условия теплоотдачи: $T_{o.c}^{(1)}$ и $T_{o.c}^{(2)}$ — значения температуры окружающей среды; α — коэффициент теплоотдачи, который будем полагать одинаковым для левой и правой поверхностей стенки. Пусть η — характерный вертикальный размер рассматриваемого участка стенки: для продольного расположения слоев (рис. 1а) он может быть выбран произвольно; для поперечного расположения (рис. 1б) должен быть кратным $(\Delta_1 + \Delta_2)$. Введем также среднюю плотность теплового потока вдоль оси Ox

$$\bar{q}_x = \frac{1}{\eta} \int_0^\eta q_x(x, y) dy \quad (3)$$

и эффективные значения температуры T_w на левой («западной») и T_e на правой («восточной») поверхностях стенки.

С учетом определения $\lambda_{эф}$ для стационарной теплопередачи можно записать следующую цепочку равенств:

$$\lambda_{эф} \frac{T_w - T_e}{L} = \bar{q}_x = \alpha (T_{o.c}^{(1)} - T_w) = \alpha (T_e - T_{o.c}^{(2)}), \quad (4)$$

откуда следует

$$T_w - T_e = (T_{o.c}^{(1)} - T_{o.c}^{(2)}) - \frac{2}{\alpha} \bar{q}_x, \quad (5)$$

и, окончательно,

$$\lambda_{\text{эф}} = \bar{q}_x \frac{L}{\left(T_{\text{o.c}}^{(1)} - T_{\text{o.c}}^{(2)}\right) - \frac{2}{\alpha} \bar{q}_x}. \quad (6)$$

Это выражение определяет эффективный коэффициент теплопроводности через измеримые величины, характеризующие процесс теплопередачи.

3. Метод решения

При наличии компьютерной программы для численного решения задач стационарной диффузии определение значения эффективного коэффициента теплопроводности для стационарных условий по формуле (6) можно осуществить путем численного решения задачи о распределении температуры в рассматриваемой области пространства с заданными граничными условиями.

4. Задание 1

Структура композита задана на рис. 3: включения из материала № 2 имеют квадратное сечение с длиной стороны Δ_2 . Вертикальные слои этого материала расположены на расстоянии Δ_1 от поверхностей стенки и на таком же расстоянии между собой. Горизонтальные грани выравнены, как показано на рис. 3.

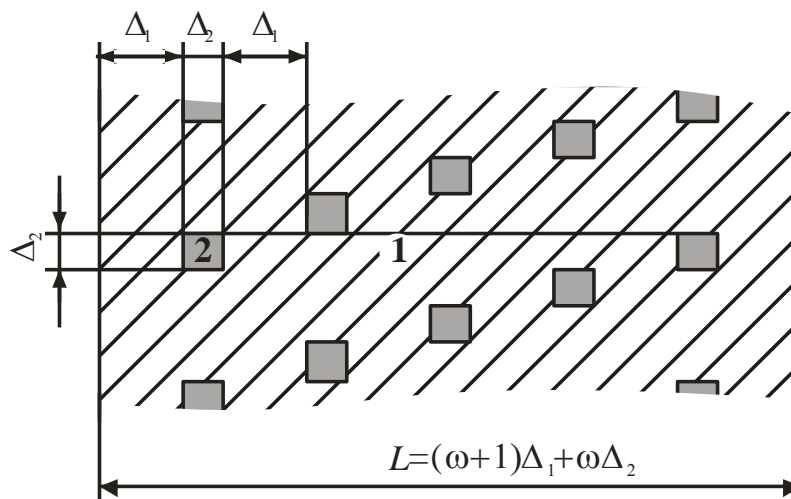


Рис. 3. Структура композита ($\omega = 5$ — количество вертикальных слоев)

Требуется:

- 1) Предложить математическое описание задачи о стационарном распределении температурного поля в композитном материале заданной структуры с граничными условиями 3-го рода на обеих поверхностях стенки (как на рис. 2). Выбрать расчетную область, описать граничные условия.

Примечание: несущественные для определения $\lambda_{\text{эф}}$ величины следует задать на свое усмотрение.

2) Расширить программу из ЛР №2 на двухмерный случай (Вам предоставлена готовая программа). При этом следует предусмотреть: расчет средней плотности теплового потока \bar{q}_x и эффективного коэффициента теплопроводности $\lambda_{\text{эф}}$ (естественно, в безразмерном виде). Требуется реализовать периодические граничные условия.

3) Осознанно выбирая параметры схемы дискретизации, провести варианты расчеты для заданных в табл. 1 значений параметров задачи и трех значений безразмерного комплекса $\frac{\alpha \Delta_1}{\lambda_1}$, равного 0,01; 1; 100.

4) Проанализировать влияние варьируемых в задании параметров на эффективный коэффициент теплопроводности. Дать объяснения.

Таблица 1 – Индивидуальные задания:

№	ω	λ_2/λ_1	Δ_2/Δ_1
1	4	50	0,5 и 2,0
2	5	40	0,4 и 2,5
3	4	30	0,3 и 3,0
4	5	35	0,4 и 2,0
5	4	45	0,3 и 1,0
6	5	55	0,6 и 4,0
7	4	60	0,4 и 1,0
8	5	5	0,5 и 3,0
9	4	10	0,4 и 1,0
10	5	80	0,5 и 2,0
11	4	45	0,3 и 4,0
12	5	20	0,4 и 2,5
13	4	10	0,3 и 1,5

5. Задание 2

Имеется область $L_x = L_y = L$. Разбить область на N_x на N_x контрольных объемов. Теплопроводность в каждом КО определяется с помощью датчика случайных чисел, т.е. она с вероятностью p равняется λ_1 , а с вероятностью $(1-p) - \lambda_2$. Слева и справа заданы граничные условия первого рода. Сверху и снизу – периодические граничные условия.

Требуется:

- 1) Для разных значений N_x (10, 50 и 100 КО) провести расчеты эффективной теплопроводности от вероятности p . Для каждого значения p повторить расчеты 10 раз и в качестве среднего значения

эффективной теплопроводности взять среднеарифметическое значение.

- 2) Построить зависимость $\lambda_{\text{эф}}$ от p для разных N_x . Проанализировать полученные результаты.

Содержание отчета:

- Титульный лист, содержащий название работы, наименование кафедры, номер и состав бригады, год подготовки отчета.
- Полное математическое описание задачи в размерном виде.
- Текст программы.
- Результаты расчета.
- Анализ полученных результатов.
- Дополнительные материалы (по желанию самих членов бригады).