# КМ №2. РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

## 1. Введение. Теплопередача через оребренную поверхность

Вспомним понятие эффективного оребрения. Рассмотрим сначала предельную модель теплопередачи от поверхности $F_1$, с однородной температурой $T_{c1}$ к оребренной поверхности $F_2$ с температурой $T_{c2}$ (рисунок 1).

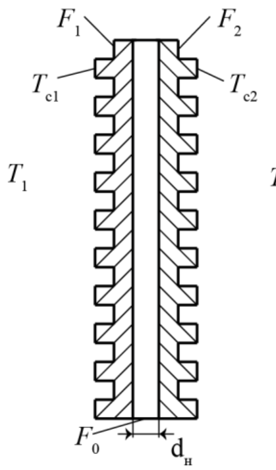



**Рисунок 1 – Оребренная поверхность**

Данная достаточно искусственная ситуация возникает, если две высокотеплопроводных поверхности разделены слоем $\delta_c$ с относительно низкой теплопроводностью $\lambda_c$. Тепловой поток от среды с $T = T_1$ к среде с $T=T_2$:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \alpha_1 \left(T_1 - T_{c1}\right) F_1 \\ Q &= \frac{\lambda_c}{\delta_c}\left(T_{c1} - T_{c2}\right) F_o \\ Q &= \alpha_2 \left(T_{c2} - T_2\right) F_2 \end{aligned}\right\} Q = idem$$

Коэффициент теплопередачи, отнесенный к базовой разделяющей поверхности $F_o$

$$k = \frac{Q}{F_o\left(T_1 - T_2\right)}$$

Разрешая три равенства относительно перепадов температур и складывая, находим ($T_1$-$T_2$), а затем $k$:

$$k=\left(\frac{1}{\dfrac{\alpha_1 F_1}{F_o}}+\frac{\delta_c}{\lambda_c}+\frac{1}{\dfrac{\alpha_2 F_2}{F_o}}\right)^{-1}.$$

Безразмерные множители $\dfrac{F_1}{F_o}$ и $\dfrac{F_2}{F_o}$ — это коэффициенты оребрения, показывающие, во сколько раз площадь оребренной поверхности больше базовой.

В действительной оребренной поверхности температура поверхности неоднородна, что уменьшает действительные потоки тепла между окружающей средой и оребренной стенкой. Это означает, что коэффициенты оребрения должны не учитывают данное обстоятельство и приводят к несколько завышенным значениям коэффициента теплопередачи. Для корректировки указанного обстоятельства вводят *коэффициент эффективности ребра* $\eta_p \le 1$. При постоянстве коэффициента теплоотдачи на поверхности ребер $\alpha_{пов}$ и равенстве его коэффициенту теплоотдачи на оребренной поверхности в промежутках между ребрами $\alpha_0$ коэффициент эффективности ребра определяется как

$$\eta_p=\frac{1}{F_p\left(T_o-T_{o.c.}\right)}\int\limits_{F_p}\left(T_{пов}-T_{o.c.}\right)dF=\frac{\bar{T}_{пов}-T_{o.c.}}{T_o-T_{o.c.}},$$

где $T_{\text{о}}$ – температура основания ребра (Рисунок 2), $\bar{T}_{пов}=\left(1/F_p\right)\int\limits_{F_p}T_{пов}dF$ – действительная осредненная температура поверхности ребра. Ясно, что $\eta_p=1$ при $\lambda_p=\infty$.

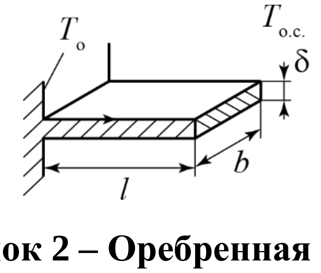



**Рисунок 2 – Оребренная стенка**

Эффективность ребра рассчитывается обычно в предположении однородности температуры в поперечном сечении ребра при любом *x*, что справедливо при $Bi=\alpha\delta/\lambda<<1$ , т. е. при малых $\alpha$ и $\delta$. Оребрение актуально для газовых теплоносителей. При этом второе допущение ( $\alpha=idem$), использованное ранее тоже достаточно реалистично.

При высоких $\alpha$ и зависимости $\alpha(x)$ или $\alpha(T_{пов})$ более естественным определением коэффициента эффективности ребра будет отношение

$$\eta_p = \frac{\bar{q}_p}{q_0},$$

где $q_0 = \alpha_0(T_0 - T_{о.с.})$, $\bar{q}_p = \frac{1}{F_p}\int\limits_{F_p} \alpha_{пов}\left(T_{пов} - T_{о.с.}\right)dF$.

Это актуально, например, при кипении на оребренных поверхностях. В базовом случае $\alpha_{пов} = \alpha_0 = idem$ и оба определения совпадают.

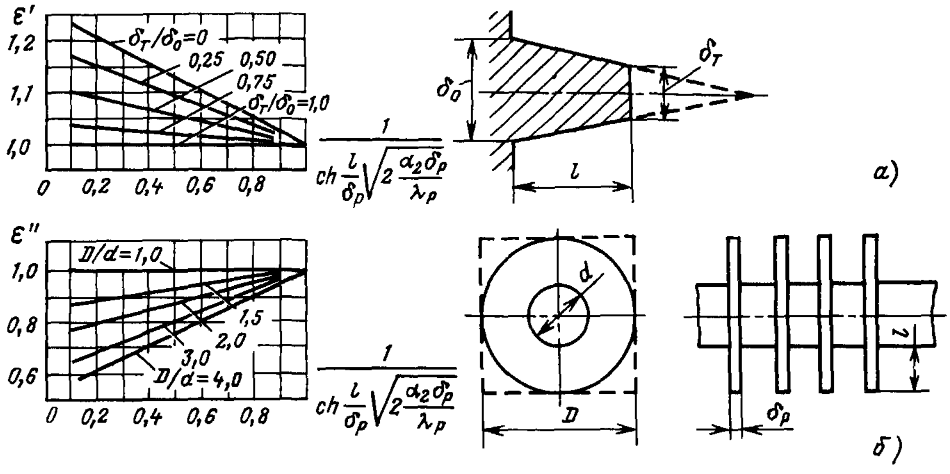
В приближении тонкого ребра и $\alpha = idem$ рассчитаны $\eta_p$ для различных геометрий. Классическое решение для прямого ребра при $b \gg \delta$ и пренебрежении теплоотдачей с торца ребра (т. е. $l \gg \delta$):

$$\eta_p^{пр} = \frac{th\left(m_0 l\right)}{m_0 l}, \qquad (1)$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\delta\lambda_c}} \equiv \frac{1}{\delta}\sqrt{2Bi},\ m_0 l = \frac{l}{\delta}\sqrt{2Bi}.$$

Часто (1) используется как базовое соотношение для расчета эффективности ребер другой формы:

$$\eta_p = \varepsilon' \eta_p^{пр}.$$




**а) – трапецеидальное и треугольное ($\delta_т = 0$) ребра, б) – круглое и квадратное ребра**

**Рисунок 3 – Поправочный коэффициент для расчета коэффициента эффективности ребер сложной геометрии**

Значения $\varepsilon'$ обычно представляют в виде номограмм в зависимости от индивидуальных геометрических особенностей ребра. К примеру, в «Теплоэнергетика и теплотехника», т. II – номограмма для трапециевидных, треугольных, круглых ребер (рисунок 3). Трапециевидные ребра оказываются более эффективными, чем прямые. Для них для расчета используется среднеарифметическое значение толщины ребра. Для круглых ребер на прямых круглых трубах высота ребра $l=\left(D-d\right)/2$. Из (1) ясно, что $\eta_p$ быстро уменьшается с ростом Bi, т. е. при больших КТО.

Для реальной оребренной поверхности коэффициент эффективности оребренной стенки вводится как отношение действительного потока тепла к максимально возможному (идеальному), отвечающему условию $\eta_p=1$. Между ребрами $q=q_{ид}$, $F_\Sigma$ - полная площадь поверхности (в рассмотренной идеальной оребренной поверхности $F_1$ и $F_2$ отвечают $F_\Sigma$), $F_p$ - площадь поверхности ребер. Коэффициент эффективности оребренной стенки

$$\eta_c=\frac{Q_{действ.ст.}}{Q_{ид}}=\frac{F_p\overline{q}_p+\left(F_\Sigma-F_p\right)q_{ид}}{F_\Sigma q_{ид}}=1-\frac{F_p}{F_\Sigma}\left(1-\eta_p\right),$$

так как $\dfrac{\overline{q}_p}{q_{ид}}=\eta_p$.

Ясно, что $\eta_c=1$ при гладкой поверхности ($F_p=0$) или $\eta_p=1$.

Таким образом, коэффициент теплопередачи действительной оребренной стенки (при двухстороннем оребрении)

$$k=\left(\frac{1}{\dfrac{\alpha_1\eta_{c1}F_1}{F_o}}+\frac{\delta_c}{\lambda_c}+\frac{1}{\dfrac{\alpha_2\eta_{c2}F_2}{F_o}}\right)^{-1}.$$

$\dfrac{F_1}{F_o},\dfrac{F_2}{F_o},\dfrac{F_p}{F_1},\dfrac{F_p}{F_2}$ - определяются конкретной геометрией.

Часто вводят значение эффективного коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha_{1,эфф}=\frac{\alpha_1\eta_{c1}F_1}{F_0}.$$

При его использование важно помнить, что в этом случае для расчета используется базовая площадь поверхности $F_0$.

## 2. Пример расчета эффективного коэффициента теплоотдачи

Имеется стенка с трапециевидными ребрами с толщиной у основания 4 мм и толщиной у вершины 2 мм. Высота ребер 20 мм. Расстояние между ребрами 2 мм. Теплопроводность ребер принять равным 15 Вт/(м·К). Коэффициент теплоотдачи $\alpha = 50\text{ Вт}/\left(\text{м}^2\text{К}\right)$.

Дано: $\delta_0 = 4\,мм$, $\delta_T = 2\,мм$, $l = 20\,мм$, $\Delta = 2\,мм$, $\alpha = 50\text{ Вт}/\left(\text{м}^2\text{К}\right)$.

Найти: $\alpha_{эфф}$.

Решение

Рассчитаем число *Bi*, *m₀* и *l*:

$$Bi = \frac{\alpha\delta_{ср}}{\lambda_c} = \frac{\alpha\left(\delta_0 + \delta_T\right)}{2\lambda_c} = 1\cdot10^{-2}.$$

$$m_0 = \frac{1}{\delta_{ср}}\sqrt{2Bi} = \frac{\sqrt{2\cdot1{,}0\cdot10^{-2}}}{3\cdot10^{-3}} = 47{,}1.$$

$$m_0 l = 18{,}3\cdot20\cdot10^{-3} = 0.942.$$

Определим эффективность прямого ребра $\eta_p^{пр}$:

$$\eta_p^{пр} = \frac{th(m_0 l)}{m_0 l} = 0.78.$$

Отношение толщин ребра – 0.5. Комплекс по оси абсцисс:

$$\frac{1}{ch\left(m_0 l\right)} = 0.68.$$

Коэффициент:

$$\eta_p = \varepsilon'\eta_p^{пр} = 1.03\cdot0.78 = 0.8$$

Считаем площади:

$$F_p = \delta_T + 2\sqrt{l^2 + \left(\left(\delta_0 - \delta_T\right)/2\right)^2} = 42.5\cdot10^{-3}\text{ м}^2,$$

$$F_\Sigma = F_p + \Delta = 44.5\cdot10^{-3}\text{м}^2.$$

Итоговый коэффициент:

$$\eta_c = 1 - \frac{F_p}{F_\Sigma}\left(1-\eta_p\right) = 1 - \frac{42.5}{44.5}\cdot(1-0.8) = 0.81$$

Отношение суммарной площади и площади не оребренной поверхности:

$$\frac{F_\Sigma}{F_0} = \frac{F_\Sigma}{2\Delta} = \frac{44.5}{2\cdot2} = 11.1.$$

Эффективный коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha_{эфф} = \frac{\alpha\eta_c F_\Sigma}{F_0} = 50 \cdot 0.81 \cdot 11.1 = 450 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}.$$

## 3. Задание

1) Предложить математическое описание задачи о стационарном распределении температурного поля в прямом ребре. Предложить способ обработки полученных результатов для определения эффективности ребра.

2) Реализовать граничные условия третьего рода в предоставленной заготовке программы.

3) Продемонстрировать правильность выполненной модернизации программы для учета граничных условий третьего рода. Например, сравнив распределение температуры внутри пластины, с двух сторон которой заданы граничные условия третьего рода.

4) Осознанно выбирая параметры, определить эффективность прямого ребра. Сравнить результаты с известными теоретическими зависимостями. При проведении расчетов доказать независимость решения от используемой сетки.

5) Повторить предшествующие расчеты для трапециевидных ребер. Главное отличие заключается в правильном определении параметров контрольных объемов. Построить несколько кривых на номограмме, представленной на рисунке 3.

6) Настроить программу для решения задач в цилиндрической системе координат. Для этого нужно использовать допущение о том, что площадь грани КО пропорциональна радиусу.

7) выполнить пункты 1)-4) для цилиндрического ребра.

*Примечание:* необходимые для решения параметры следует задать на свое усмотрение. Оценки – пункты 1-4 на оценку «3», пункт 5 на оценку «4», пункты 6-7 на оценку «5».

Содержание отчета:

- Титульный лист, содержащий название работы, наименование кафедры, номер и состав бригады, год подготовки отчета.
- Описание ответов на все пункты задания с анализом полученных результатов.
- Файл с программой.
- Дополнительные материалы (по желанию самих членов бригады).