

**В.В.Ягов**

---

# **ТЕПЛООБМЕН в однофазных средах и при фазовых превращениях**

*Допущено УМО вузов России  
по образованию в области  
энергетики и электротехники  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных  
заведений, обучающихся  
по направлению подготовки  
“Ядерная энергетика  
и теплофизика”*

Москва  
Издательский дом МЭИ  
2014

УДК 536.2(075.8)

ББК 31.31

Я 542

Р е ц е н з е н т ы :

профессор кафедры «Гидроаэродинамика» Санкт-Петербургского

государственного политехнического университета,

доктор технических наук **Е.Д. Федорович**;

зав. кафедрой «Теплофизика», профессор, доктор технических наук

МГТУ им. Н.Э. Баумана **В.И. Хвесюк**

**Ягов В.В.**

Я 542 Теплообмен в однофазных средах и при фазовых превращениях: учебное пособие для вузов / В.В. Ягов. — М.: Издательский дом МЭИ, 2014. — 542 с.: ил.

ISBN 978-5-383-00854-6

Содержание учебного пособия соответствует программе дисциплины «Тепломассообмен», которая читается студентам, обучающимся по профилю теплофизика в рамках направления подготовки «140700. Ядерная энергетика и теплофизика». В первой части книги дается общая характеристика процессов однофазного конвективного теплообмена, выводятся дифференциальные уравнения сохранения, кратко излагаются основы теории подобия. Далее представлены все традиционные разделы однофазного конвективного теплообмена: теплообмен в ламинарном и турбулентном пограничном слое, при внешнем обтекании одиночного цилиндра и в пучках труб; теплообмен при свободной конвекции; теплообмен при течении в каналах. Во второй части книги во вводной главе кратко изложены закономерности переноса через межфазные поверхности, анализируются неравновесные эффекты на границах раздела фаз. Теплообмену при конденсации и кипении посвящены две последние главы книги, при этом последний раздел (гл. 9) изложен значительно подробнее, чем это делается обычно в курсах тепломассообмена. В этой главе использованы многие результаты научных исследований автора.

Книга адресована, в первую очередь, студентам-теплофизикам; а также студентам, магистрантам и аспирантам близких направлений подготовки (тепловая и атомная энергетика, авиационная и космическая техника, химические технологии).

УДК 536.2(075.8)

ББК 31.31

ISBN 978-5-383-00854-6

© Ягов В.В., 2014

© ЗАО «Издательский дом МЭИ», 2014

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

<b>Предисловие</b>	9
<b>Список основных обозначений</b>	15
<b>Часть 1. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОФАЗНОЙ СРЕДЕ</b>	19
<i>Глава 1. Введение</i>	19
1.1. Основные понятия	19
1.1.1. Классификация процессов конвективного теплообмена	19
1.1.2. Основное содержание задач конвективного теплообмена	24
1.1.3. Связь молекулярного и конвективного переноса тепла	27
1.2. Физический смысл коэффициента теплоотдачи	29
1.2.1. Толщина эквивалентной пленки	29
1.2.2. Коэффициент теплоотдачи как гидродинамический параметр	31
1.3. Качественные закономерности процесса и расчетные формулы для теплообмена в пограничном слое	34
1.3.1. Теплообмен при ламинарном обтекании плоской пластины	34
1.3.2. Число Прандтля	38
1.3.3. Теплообмен при турбулентном обтекании плоской пластины	40
1.4. Качественные закономерности процесса и расчетные формулы для теплообмена при течении в каналах	42
1.4.1. Тепловой баланс, среднемассовая температура	42
1.4.2. Изменение закономерностей течения и теплообмена по длине трубы	45
1.4.3. Теплообмен при ламинарном течении в трубах	47
1.4.4. Теплообмен при турбулентном течении в круглой трубе	51
Контрольные вопросы к главе 1	54
<i>Глава 2. Математическое описание процессов конвективного тепломассообмена</i>	56
2.1. Общая форма законов сохранения	56
2.1.1. Предварительные замечания	56
2.1.2. Обоснование общей формы законов сохранения	59
2.2. Закон сохранения массы	61
2.3. Закон сохранения импульса	64
2.3.1. Вывод в общей форме	64
2.3.2. Тензоры плотности потока импульса, давлений и вязких напряжений	66
2.3.3. Различные формы дифференциального уравнения сохранения импульса	68
2.4. Закон сохранения энергии	71
2.4.1. Вывод в общей форме	71
2.4.2. Плотность потока энергии	72
2.4.3. Различные формы дифференциального уравнения энергии	73

---

2.5. Законы сохранения для смесей . . . . .	76
2.5.1. Уравнение сохранения массы компонента в бинарной смеси . . . . .	76
2.5.2. Молекулярный поток массы компонента в смеси . . . . .	80
2.5.3. Влияние молекулярных потоков массы компонента на перенос импульса и энергии в смеси . . . . .	82
2.6. Система уравнений сохранения для конвективного тепломассообмена; аналогия процессов переноса . . . . .	86
Контрольные вопросы к главе 2 . . . . .	89
<b>Глава 3. Основы теории подобия . . . . .</b>	<b>91</b>
3.1. Подобие физических явлений . . . . .	91
3.2. Теоремы теории подобия . . . . .	95
3.2.1. Первая теорема теории подобия . . . . .	95
3.2.2. Вторая теорема теории подобия . . . . .	99
3.2.3. Третья теорема теории подобия . . . . .	101
3.3. Физический смысл критериев и чисел подобия . . . . .	102
3.3.1. Гидродинамические числа подобия . . . . .	102
3.3.2. Числа подобия в процессах теплообмена . . . . .	106
3.3.3. Числа подобия в процессах массообмена . . . . .	108
3.3.4. Параметрические числа подобия (симплексы) . . . . .	110
3.4. Практическое использование теории подобия . . . . .	111
3.4.1. Теория подобия как научная основа экспериментальных исследований . . . . .	111
3.4.2. Теория подобия и моделирование . . . . .	114
3.5. Теория размерностей . . . . .	116
Контрольные вопросы к главе 3 . . . . .	119
<b>Глава 4. Теплообмен при внешнем обтекании (в пограничном слое) . . . . .</b>	<b>121</b>
4.1. Уравнения температурного пограничного слоя . . . . .	121
4.2. Теплообмен при ламинарном обтекании плоской пластины . . . . .	126
4.2.1. Постановка задачи и анализ методами теории размерностей . . . . .	126
4.2.2. Основные результаты задачи Блазиуса . . . . .	128
4.2.3. Точное решение задачи о теплообмене . . . . .	132
4.2.4. Теплоотдача в предельных по числу Прандтля случаях . . . . .	137
4.3. Переход к турбулентному течению . . . . .	140
4.3.1. О результатах теоретического анализа . . . . .	140
4.3.2. Анализ влияния различных факторов на турбулентный переход . . . . .	143
4.4. Осредненные уравнения импульса и энергии при турбулентном течении . . . . .	150
4.4.1. Вывод осредненных уравнений . . . . .	150
4.4.2. Анализ осредненных уравнений . . . . .	154
4.4.3. Осредненные уравнения в приближении пограничного слоя . . . . .	161
4.5. Механизм турбулентного переноса импульса и методы его моделирования . . . . .	162
4.5.1. О внутренних масштабах турбулентного течения . . . . .	162
4.5.2. Структура пристеночной турбулентной области . . . . .	166

4.5.3. Моделирование переноса импульса в пристеночной турбулентной области .....	173
4.6. Теплообмен при турбулентном течении в граничном слое .....	177
4.6.1. Аналогия Рейнольдса .....	177
4.6.2. Аналогия Рейнольдса, модифицированная на основе двухслойной модели пристеночной турбулентной области .....	180
4.6.3. Анализ результатов. Рекомендации по расчету .....	182
4.7. Теплообмен при поперечном обтекании труб .....	184
4.7.1. Гидродинамика и теплообмен при поперечном обтекании кругового цилиндра .....	184
4.7.2. Теплообмен в пучках труб .....	189
Контрольные вопросы к главе 4 .....	192
<b>Глава 5. Теплообмен при свободной конвекции .....</b>	<b>195</b>
5.1. Механизм и математическое описание свободной конвекции .....	195
5.1.1. Качественный анализ. Приближение Буссинеска .....	195
5.1.2. Математическое описание свободной конвекции в приближениях Буссинеска и граничного слоя .....	198
5.1.3. Максимальная скорость свободной конвекции. Оценка толщины свободноконвективного граничного слоя .....	200
5.2. Теплообмен при свободной конвекции у вертикальной плоскости .....	202
5.2.1. Постановка задачи .....	202
5.2.2. Приближенное аналитическое решение .....	204
5.2.3. Турбулентная свободная конвекция на вертикальной плоскости .....	208
5.2.4. Заключительные замечания .....	209
5.3. Свободная конвекция у поверхности цилиндров и сфер .....	210
5.3.1. Горизонтальные цилиндры большого диаметра .....	211
5.3.2. Горизонтальные цилиндры малого диаметра .....	213
5.3.3. Свободная конвекция на сферических поверхностях .....	216
5.4. Свободная конвекция на горизонтальной плоскости и в замкнутых объемах .....	218
5.4.1. Горизонтальные поверхности и прослойки .....	218
5.4.2. Свободная конвекция в замкнутых объемах .....	221
Контрольные вопросы к главе 5 .....	223
<b>Глава 6. Теплообмен при течении жидкостей в каналах .....</b>	<b>225</b>
6.1. Постановка задачи .....	225
6.1.1. Содержание анализа .....	225
6.1.2. Математическое описание для круглой трубы .....	226
6.2. Общие закономерности стабилизированного течения и теплообмена .....	229
6.2.1. Гидродинамическая и тепловая (температурная) стабилизация .....	229
6.2.2. Влияние вида граничных условий на стабилизированный теплообмен .....	231

6.3. Обобщенные (интегральные) количественные характеристики стабилизированного теплообмена в круглой трубе при $q_c = \text{const}$ . . . . .	237
6.3.1. Профили скорости, теплового потока, температуры . . . . .	237
6.3.2. Общее выражение для коэффициента теплоотдачи (интеграл Лайона) . . . . .	240
6.4. Стабилизированный теплообмен при ламинарном течении в каналах . . . . .	241
6.4.1. Круглые трубы . . . . .	241
6.4.2. Призматические каналы . . . . .	243
6.5. Стабилизированный теплообмен при турбулентном течении в круглой трубе . . . . .	246
6.5.1. Качественный анализ профилей скорости, теплового потока и температуры . . . . .	246
6.5.2. Результаты теоретического исследования теплообмена . . . . .	252
6.5.3. Расчетные уравнения для теплоотдачи . . . . .	254
6.6. Теплообмен в начальном термическом участке при ламинарном течении в круглой трубе . . . . .	258
6.6.1. Постановка задачи . . . . .	258
6.6.2. Приближенное решение Левека для $T_c = \text{const}$ . . . . .	259
6.6.3. Задача Гретца—Нуссельта для $T_c = \text{const}$ . . . . .	262
6.6.4. Теплообмен в начальном термическом участке при $q_c = \text{const}$ . . . . .	270
6.7. Теплообмен в начальном гидродинамическом участке при ламинарном течении в круглой трубе . . . . .	273
6.8. Начальные участки при турбулентном течении в трубах . . . . .	276
6.8.1. Начальный термический участок . . . . .	276
6.8.2. Начальный гидродинамический участок . . . . .	278
6.9. Влияние переменности теплофизических свойств на теплообмен и гидравлическое сопротивление при течении в трубах . . . . .	282
6.9.1. Общие положения . . . . .	282
6.9.2. Влияние переменности свойств жидкости на теплообмен и гидравлическое сопротивление . . . . .	284
6.9.3. Влияние переменности свойств газов на теплообмен и гидравлическое сопротивление . . . . .	288
6.10. Влияние свободной конвекции на теплообмен при вынужденном течении в трубах . . . . .	292
6.10.1. Общие положения . . . . .	292
6.10.2. Влияние свободной конвекции на теплообмен при ламинарном вынужденном течении в круглой трубе . . . . .	294
6.11. Теплообмен в однофазной сверхкритической области . . . . .	299
6.12. Интенсификация однофазного конвективного теплообмена . . . . .	306
6.12.1. Содержание задачи . . . . .	306
6.12.2. Влияние микроструктуры поверхности на гидравлическое сопротивление . . . . .	307
6.12.3. Принципы и методы интенсификации конвективного однофазного теплообмена . . . . .	311
Контрольные вопросы к главе 6 . . . . .	315

<b>Часть 2. ТЕПЛООБМЕН ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ . . . . .</b>	319
<b>Глава 7. Введение в механику двухфазных систем . . . . .</b>	319
7.1. Предмет, методы анализа и модели двухфазных систем . . . . .	319
7.2. Универсальные условия совместности . . . . .	326
7.2.1. Вывод в общей форме . . . . .	326
7.2.2. Развернутая запись универсальных условий совместности . . . . .	329
7.2.3. Универсальные условия совместности для частных случаев . . . . .	332
7.3. Универсальные условия совместности в системе отсчета наблюдателя . . . . .	335
7.3.1. Скорость движения границы раздела фаз . . . . .	335
7.3.2. Запись универсальных условий совместности в лабораторной системе отсчета . . . . .	340
7.4. Специальные условия совместности . . . . .	343
7.4.1. Общие положения . . . . .	343
7.4.2. Результаты линейной теории для некоторых задач гидродинамики и теплообмена в однокомпонентной среде . . . . .	348
7.4.3. Специальные условия совместности в квазиравновесном приближении . . . . .	359
7.5. Количественные характеристики двухфазных потоков в каналах . . . . .	362
7.5.1. Паросодержание . . . . .	362
7.5.2. Скорости, плотность смеси . . . . .	365
7.5.3. Гомогенная модель для трения . . . . .	368
Контрольные вопросы к главе 7 . . . . .	370
<b>Глава 8. Теплообмен при конденсации . . . . .</b>	372
8.1. Общие положения . . . . .	372
8.1.1. Определения. Классификация . . . . .	372
8.1.2. Пленочная и капельная конденсация . . . . .	373
8.2. Теплообмен при пленочной конденсации неподвижного пара на вертикальной плоскости . . . . .	376
8.2.1. Постановка задачи . . . . .	376
8.2.2. Решение задачи . . . . .	379
8.3. Конденсация пара на наклонных и криволинейных поверхностях . . . . .	384
8.3.1. Конденсация на наклонной плоскости . . . . .	384
8.3.2. Конденсация на поверхности горизонтального цилиндра . . . . .	385
8.4. Современная методика расчета теплообмена при конденсации неподвижного пара . . . . .	390
8.4.1. Анализ допущений Нуссельта . . . . .	390
8.4.2. Практические рекомендации по расчету . . . . .	398
8.5. Теплообмен при турбулентном течении пленки конденсата . . . . .	401
8.6. Теплообмен при конденсации пара, движущегося внутри труб . . . . .	404
8.6.1. Общие положения . . . . .	404
8.6.2. Конденсация в охлаждаемых каналах при турбулентном течении смеси . . . . .	407

8.7. Конденсация пара в промышленных аппаратах и методы ее интенсификации . . . . .	410
8.7.1. Конденсация на пучках горизонтальных труб . . . . .	410
8.7.2. Методы интенсификации теплообмена при конденсации . . . . .	413
Контрольные вопросы к главе 8 . . . . .	417
<b>Глава 9. Теплообмен при кипении . . . . .</b>	419
9.1. Зарождение паровой фазы . . . . .	419
9.1.1. Общие положения . . . . .	419
9.1.2. Образование паровой фазы в объеме однородно перегретой жидкости . . . . .	420
9.1.3. Парообразование на твердой стенке (при кипении) . . . . .	426
9.2. Рост паровых пузырьков в объеме равномерно перегретой жидкости . . . . .	432
9.2.1. Предельные схемы роста . . . . .	432
9.2.2. Динамическая инерционная схема роста парового пузырька . . . . .	434
9.2.3. Тепловая энергетическая схема роста . . . . .	437
9.2.4. Рост пузырька при больших числах Якоба . . . . .	442
9.3. Динамика паровых пузырьков при кипении . . . . .	447
9.3.1. Основные результаты опытных наблюдений . . . . .	447
9.3.2. Приближенная модель роста парового пузырька на обогреваемой стенке . . . . .	450
9.3.3. Условия отрыва паровых пузырьков от твердой поверхности . . . . .	455
9.4. Качественный анализ теплоотдачи при кипении . . . . .	468
9.5. Теплообмен при пленочном и переходном кипении . . . . .	472
9.5.1. Пленочное кипение при ламинарном течении пара . . . . .	472
9.5.2. Пленочное кипение при турбулентном течении пара . . . . .	475
9.5.3. Теплообмен при переходном кипении . . . . .	478
9.6. Теплообмен при пузырьковом кипении . . . . .	483
9.6.1. Качественные закономерности процесса . . . . .	483
9.6.2. Приближенная теория теплообмена при пузырьковом кипении . . . . .	491
9.7. Теплообмен при кипении жидкости в условиях вынужденного движения . . . . .	500
9.7.1. Пузырьковое кипение в конвективном потоке . . . . .	500
9.7.2. Теплообмен при высоких паросодержаниях потока . . . . .	508
9.8. Кризисы кипения в условиях свободного движения . . . . .	515
9.8.1. Гидродинамическая модель кризиса . . . . .	516
9.8.2. Кризис как результат роста площади сухих пятен . . . . .	521
9.8.3. Кризис пленочного кипения . . . . .	525
9.9. Кризис теплообмена при кипении жидкостей в каналах . . . . .	527
9.9.1. Общие закономерности . . . . .	527
9.9.2. Модель кризиса в высокоскоростных потоках недогретой жидкости . . . . .	530
Контрольные вопросы к главе 9 . . . . .	533
<b>Список литературы . . . . .</b>	537

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

---

Содержание настоящего учебного пособия соответствует программе дисциплины «Тепломассообмен», которая читается студентам, обучающимся по профилю теплофизика в рамках направления подготовки: 140700 «Ядерная энергетика и теплофизика». Традиционно курс «Тепломассообмен», включающий, помимо вопросов конвективного теплообмена, разделы теплопроводности и радиационного теплообмена, входит в учебные планы многих энергетических, химико-технологических и машиностроительных специальностей. Отечественная высшая школа имеет в этом направлении хорошие традиции. Учебники по теплопередаче М.А. Михеева (последнее издание вышло в 1977 г. совместно с И.М. Михеевой [27]), В.П. Исащенко, В.А. Осиповой и А.С. Сукомела [13] неоднократно переиздавались не только на русском, но и на иностранных языках. В относительно недавнее время вышли учебные пособия Б.С. Петухова и др. [31], А.И. Леонтьева и др. [41], Ф.Ф. Цветкова и Б.А. Григорьева [44]. Специалистам старших поколений известны переведенные на русский язык книги авторитетных зарубежных авторов Э. Эккера и Р. Дрейка [46], В.М. Кэйса [19], Т. Себиси и П. Бредшоу [34].

Профиль подготовки теплофизика естественным образом наследует более чем 50-летний опыт подготовки инженеров-исследователей по специальности «Теплофизика». В МЭИ традиции преподавания теории тепломассообмена для теплофизиков были заложены чл.-корр. АН СССР Б.С. Петуховым (1912—1984), который более 20 лет читал курс «Теплообмен в движущейся среде». Это был пример получения студентами знаний «из первых рук», т.е. от активно работающих в соответствующей области ученых, вовлеченных в учебный процесс. (В 60—80-е годы прошлого века на кафедре ИТФ МЭИ успешно использовали в учебном процессе элементы «системы физтеха», одним из которых является участие в нем ведущих ученых академических институтов.)\* Многие научные результаты Петухова в области конвективного теплообмена в однофазной среде сегодня стали классикой и отражены в современных учебных курсах, включая и настоящую книгу.

Автор настоящего учебного пособия начал читать курс «Теплообмен в движущейся среде» с сентября 1983 г. Затем в связи с изме-

---

\* Профессор Е.Д. Федорович в своей рецензии отметил, что эта система представляет собой перенесенную на московскую почву известную «систему Физмеха», созданную в 1919 году в Петроградском политехническом институте проф. А.Ф. Иоффе».

нением учебных планов основное его содержание стало частью двухсеместрового курса «Тепломассообмен». При этом была преодолена некоторая односторонность: в новый курс вошли проблемы теплообмена при фазовых превращениях, которые прежде отражались — по необходимости очень скучно — в небольшом по объему общем курсе теплопередачи. В настоящем издании теплообмен при фазовых превращениях составляет вторую из двух частей книги; по объему она меньше, чем первая, посвященная однофазному конвективному теплообмену и таким общим вопросам, как теория подобия, но, видимо, превосходит аналогичные разделы других учебных изданий по тепломассообмену.

Разделы второй части книги формировались под сильным влиянием профессора Д.А. Лабунцова (1929—1992), одного из крупнейших отечественных теплофизиков. Вышедшая после его кончины монография [21] позволяет оценить широту его научных интересов и представляет научные результаты, не утратившие актуальности по прошествии 30—50 лет после их публикации. Автору настоящего учебного пособия посчастливилось не только выполнить под руководством Д.А. Лабунцова кандидатскую диссертацию, но и на протяжении 25 лет достаточно тесно с ним сотрудничать. Важная часть этого сотрудничества — постановка новых учебных курсов и новых разделов в существовавших. Дмитрий Александрович тщательнейшим образом готовил каждую лекцию, заботясь, прежде всего, о логике и доступности изложения физического содержания проблемы, не жертвуя при этом строгостью математического анализа. В настоящей книге содержание 3, 7 и 8-й глав в наибольшей степени отражает влияние подходов Д.А. Лабунцова к преподаванию различных курсов в МЭИ.

Предлагаемый читателю текст отражает почти 30-летний опыт преподавания курса автором на кафедре ИТФ МЭИ. Каждое новое представление курса аудитории связано с изменениями (по мнению лектора — улучшениями) его содержания и формы; в некоторых случаях эти изменения заметны только лектору, поскольку касаются методики изложения. Сформулированный выше принцип: отдавать приоритет физической ясности изложения, не принося в жертву строгость математического анализа, — автор старался проводить на протяжении всей книги. Конвективный теплообмен, особенно осложненный фазовыми переходами, довольно редко может быть описан строго аналитически. Большинство используемых в расчетной практике уравнений для теплоотдачи эмпирические или полуэмпирические; но даже применительно к ним возможно (и обычно дается в

книге) качественное объяснение отражаемых этими уравнениями физических закономерностей. В этом отношении бывают полезны приближенные физические модели сложных явлений; на их основе могут быть получены полуэмпирические уравнения с точностью до числовых множителей. Этот подход предпочтительнее эмпирических корреляций, обобщающих определенный массив опытных данных; он по возможности и используется в книге применительно к процессам, не имеющим замкнутого математического описания.

Последовательность изложения материала в книге практически исключает ситуации, когда при анализе некоторого процесса приходится обращаться не к предшествующим, а к последующим разделам. Именно по этой причине внешние задачи (теплообмен в пограничном слое, включая свободноконвективный пограничный слой) излагаются раньше, чем теплообмен в каналах. Это не вызывает ненужных трудностей при анализе теплообмена в начальном участке трубы, а также влияния термогравитационной конвекции на теплообмен в трубах.

Глава 7 книги является кратким введением в механику двухфазных систем. В известной учебной литературе аналогичные разделы отсутствуют. Здесь приходилось и при чтении курса, и при написании учебного пособия решать непростую задачу — дать информацию, необходимую для понимания задач теплообмена при конденсации пара и при кипении жидкостей, уложившись в минимальный объем. По этой причине в обсуждаемой главе отсутствует раздел о структурах (режимах течения) двухфазных потоков в каналах, хотя упоминания о них есть в главах 8 и 9. Механика парожидкостных систем — это большой самостоятельный раздел науки; видимо, любой объем изложения его проблем в рамках другой дисциплины будет недостаточным. Естественно, и в тексте книги, и в лекциях даются ссылки на соответствующую литературу, в частности на вышедшее двумя изданиями учебное пособие [24].

Глава 9 книги, посвященная теплообмену при кипении, отличается очень сильно от аналогичных разделов в известной учебной литературе. Автор занимается исследованием различных аспектов этого процесса более 40 лет. Результаты, касающиеся парообразования на стенке, скорости роста и условий отрыва паровых пузырьков, опубликованы еще в 1970—1980 гг., некоторые из них были включены в учебные издания [13, 31, 44]. Более 20 лет назад были разработаны приближенные модели теплообмена при пузырьковом и переходном кипении, кризисов кипения в объеме и в каналах; эти результаты также известны по публикациям в авторитетных для специалис-

тов журналах и по обсуждению на отечественных и международных научных конференциях. Это дало основания последовательно изложить в учебном пособии авторский взгляд на современное состояние исследований кипения и выявленные в этих исследованиях основные его закономерности. Объем главы превосходит возможности изложения соответствующих разделов в курсе лекций, но при этом обеспечивается необходимая целостность представлений о процессе кипения.

Книга в известной мере отражает специфику организации учебного процесса на кафедре ИТФ МЭИ. В частности, необычно построена первая глава (Введение), в которую после собственно вводных разделов (§ 1.1 и 1.2) включены два параграфа, содержащих качественное обоснование некоторых расчетных соотношений для коэффициента теплоотдачи в пограничном слое и в каналах. Это обусловлено тем, что семинарские занятия у студентов начинаются одновременно с лекциями, и им уже на первых занятиях приходится производить практические расчеты, используя упомянутые соотношения. В дальнейших разделах их вывод дается строго. Опыт показал оправданность такого дублирования небольшой части материала в различных разделах книги, тем более что в этих параграфах содержится и такая вводная по существу информация, которая не повторяется, но активно используется в дальнейшем изложении (число Прандтля, тепловой баланс для канала). Представляется, что форма изложения § 1.3 и 1.4 могла бы быть полезной в тех случаях, когда теплообмен не является для слушателей базовой дисциплиной (например, в таких прикладных курсах, как теплообмен в электротехнических машинах, в радиоэлектронной аппаратуре и т.п.).

Учебное пособие содержит только теоретический материал с минимальным числом примеров расчета; это также связано с организацией учебного процесса на кафедре. Еженедельные семинарские занятия предполагают непрерывный тренинг студентов в решении практических расчетных задач; на сайте кафедры выставлены типовые задачи по курсу. Каждый студент, помимо текущих заданий к практическим занятиям, выполняет одно достаточно объемное расчетное задание в семестр. В каждом семестре проводится по три контрольных опроса, охватывающих весь теоретический материал; варианты шести контрольных опросов также представлены на сайте кафедры. Это — форма контроля самостоятельной работы студентов. На практических занятиях выполняется по три контрольные работы в семестр. Успешная сдача контрольных опросов и написание контрольных работ, самостоятельное решение обязательного набора

домашних заданий, выполнение и защита типового расчета — условие получения семестрового зачета по курсу.

Содержание учебного пособия полностью соответствует теоретической части программы госэкзамена по курсу «Тепломассообмен», которым завершается обучение по программе бакалавриата по направлению «Ядерная энергетика и теплофизика» (после госэкзамена студенты защищают выпускные работы).

В процессе работы над лекционным курсом автор общался с коллегами, результаты таких повседневных контактов и обсуждений, конечно, оказались на содержании настоящего учебного пособия. На протяжении многих лет практические занятия по курсу вел прекрасный специалист и опытнейший педагог Ю.Б. Смирнов, постоянное общение с которым помогало автору в отборе материала, его методическом построении. Полезные замечания были им сделаны и по некоторым разделам рукописи настоящей книги.

Работа в составе очень квалифицированного коллектива преподавателей и научных сотрудников, контакты с коллегами на научных семинарах и конференциях создают ту среду, вне которой книга была бы другой. Иногда частное замечание на семинаре, при обсуждении диссертации подталкивало к коррекции каких-то разделов курса. Автор признателен всем коллегам за возможность работать в такой обстановке. Академик А.И. Леонтьев и профессор Л.Г. Генин едва ли подозревают, что два конкретных вопроса в учебном пособии изложены так, а не иначе, под их влиянием; автор им за такое неявное участие в работе над книгой искренне благодарен.

Этап непосредственной подготовки рукописи к изданию занял практически два полных учебных года. Само решение о ее написании вызревало исподволь; здесь была важна моральная поддержка со стороны профессора В.Г. Свиридова, возглавлявшего кафедру ИТФ в 2003—2008 гг., и Г.Г. Янькова, руководившего кафедрой в 2008—2013 гг. Георгий Глебович прямо «подтолкнул» автора к переводу этого вопроса в практическую плоскость. А после того, как рукопись книги была подготовлена, он внимательно ее прочитал, высказав ряд замечаний, большинство из которых было практически учтено автором.

В технической подготовке рукописи неоценимой была помочь коллег по кафедре и одновременно сотрудников Издательского дома МЭИ: Д.О. Лазарева и Л.Т. Васильевой, а также студентки Н.В. Капустиной. Особые слова благодарности автор обращает к своей жене З.Г. Яговой. Здесь дело не только в обычной признательности за терпение в связи с постоянной занятостью мужа; Зоя Георгиевна не

только с энтузиазмом отнеслась к самой идее подготовить рукопись книги, но и непосредственно участвовала в этой подготовке, набирая текст и формулы с рукописных черновиков.

Работа над книгой на заключительном этапе редактирования рукописи в издательстве позволила автору еще раз убедиться в высоком профессионализме и доброжелательности (к авторам) коллектива Издательского дома МЭИ.

Автор надеется, что книга будет полезна, в первую очередь, тем, кому она адресована — студентам-теплофизикам. Думаю, что в ней найдут интересную для себя информацию аспиранты и магистранты близких специальностей. Что касается коллег-преподавателей, автор рассчитывает на внимание к этой книге и на последующее заинтересованное обсуждение. Буду признателен за любые замечания, которые помогут в улучшении этого учебного пособия при возможном переиздании и в текущем чтении курса лекций.

*B.B. Ягов*

# СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

---

## Латинские буквы

- A* — удельное (на единицу объема) свойство среды, единицы  $A/m^3$ ; константа интегрирования; условное обозначение константы роста парового пузырька (гл. 9)\*;
- a* — температуропроводность,  $m^2/c$ ;
- B* — удельное (на единицу массы) свойство среды, единицы  $B/kg$ ; безразмерный комплекс в уравнении для теплоотдачи при пузырьковом кипении;
- b* — капиллярная постоянная, м; ширина сечения прямоугольного канала, м; коэффициент восстановления;
- C* — скорость (теплового движения молекул, звука, межфазной границы),  $m/c$ ; массовая доля компонента в смеси;
- $C_f$  — коэффициент трения;
- $C_0, C_1, C_2, \dots$  — константа интегрирования; числовой множитель в приближенном анализе;
- $c_p, c_v$  — изобарная и изохорная теплоемкости,  $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;
- D* — коэффициент диффузии,  $m^2/c$ ; диаметр (сферы, цилиндра, парового пузырька), м;
- d* — внутренний диаметр канала, м;
- E* — плотность потока энергии,  $\text{Вт}/m^2$ ; кинетическая энергия жидкости, Дж;

\* Поскольку практически в каждом направлении теплообмена сложилась своя система обозначений, один и тот же символ во многих случаях используется в книге для обозначения различных величин; в пределах одной главы обычно каждый символ соответствует лишь одному объекту.

- e* — внутренняя энергия единицы массы,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;
- $e_*$  — полная энергия единицы массы,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;
- $\dot{e}$  — плотность молекулярного потока энергии в бинарной смеси,  $\text{Вт}/m^2$ ;
- F* — площадь поверхности,  $m^2$ ; сила, Н;
- f* — безразмерная функция тока; функция распределения молекул по скоростям; площадь поперечного сечения канала,  $m^2$ ;
- $f_i, f_\mu, f_g, f_p, f_\sigma$  — силы инерции, вязкости, массовые, давления, поверхностного натяжения, отнесенные к единице площади поверхности,  $\text{Н}/m^2$ ;
- G* — массовый расход,  $\text{кг}/c$ ; безразмерный комплекс в уравнении для скорости роста пузырька (гл. 9);
- g* — гравитационное ускорение,  $m/c^2$ ;
- H* — кривизна поверхности,  $m^{-1}$ ; высота поверхности, сечения канала, м;
- h* — энталпия единицы массы,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ; высота искусственной шероховатости, прямоугольного канала, м;
- $h_*$  — полная энталпия (энталпия торможения) единицы массы,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;
- $h_{LG}$  — теплота испарения,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;
- J* — плотность потока свойства среды *A*, единицы  $A/(m^2 \cdot c)$ ;
- j* — плотность диффузионного потока массы компонента,  $\text{кг}/(m^2 \cdot c)$ ;
- $K_T, K_p$  — коэффициенты термодиффузии и бародиффузии;
- k* — коэффициент теплопередачи,  $\text{Вт}/(m^2 \cdot \text{К})$ ; кинетическая энер-

$g$	гравитация, $\text{м}^2/\text{s}^2$ ;	$r_0$	радиус трубы, м;
$\mu$	коэффициент вязкости, $\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$ ;	$Q$	теплопроизводительность, тепловая мощность, $\text{Вт}$ ;
$c_p/c_v$	показатель адиабаты;	$q$	плотность теплового потока, $\text{Вт}/\text{м}^2$ ;
$C_p$	enthalpy, $\text{Дж}/\text{кг}\cdot\text{К}$ ;	$\dot{q}_v$	плотность объемного тепловыделения, $\text{Вт}/\text{м}^3$ ;
$k_B$	постоянная Больцмана, $\text{Дж}/\text{К}$ ;	$S$	площадь поперечного сечения канала (при анализе двухфазных потоков), $\text{м}^2$ ;
$k_T$	коэффициент, учитывающий переменность теплофизических свойств;		энтропия, $\text{Дж}/\text{К}$ ;
$k_s$	высота поверхностной (песчаной) шероховатости, м;	$s$	удельная энтропия, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;
$k_\lambda$	коэффициент конвекции;	$s_1, s_2$	поперечный и продольный шаг в пучках труб, м;
$l$	длина, м;	$T$	температура, К;
$l_0$	характерный линейный масштаб, м;	$T_{kp}$	критическая температура, К;
$m$	масса, кг;	$T_m$	псевдокритическая температура, К;
$m_*$	присоединенная масса, кг;	$T_{lim}$	температура предельного перегрева жидкости, К;
$\dot{m}$	плотность потока массы, $\text{кг}/(\text{м}^2\cdot\text{с})$ ;	$Tu$	турбулентность;
$\dot{m}^a$	скорость производства компонента в процессе химической реакции, $\text{кг}/(\text{м}^3\cdot\text{с})$ ;	$t$	время, с;
$N_A$	скорость производства свойства $A$ внутри контрольного объема, единицы $A/(\text{м}^3\cdot\text{с})$ ;	$U$	внутренняя энергия, Дж;
$N_F$	поверхностная плотность производства свойства на межфазной границе, единицы $A/(\text{м}^2\cdot\text{с})$ ;	$U_\infty$	скорость невозмущенного потока, $\text{м}/\text{с}$ ; установившаяся скорость всплытия пузырька в жидкости, $\text{м}/\text{с}$ ;
$n$	нормаль к поверхности, м;	$U_0$	характерная (масштабная) скорость, $\text{м}/\text{с}$ ; максимальная скорость свободной конвекции, $\text{м}/\text{с}$ ;
$n_F$	плотность центров парообразования, $\text{м}^{-2}$ ;	$u, v$	продольная и поперечная компоненты скорости в двумерном течении, $\text{м}/\text{с}$ ;
$P_{kl}$	тензор давлений, Па;	$V$	объем, $\text{м}^3$ ;
$p$	давление, Па;	$v$	удельный объем, $\text{м}^3/\text{кг}$ ;
$R$	безразмерный радиус трубы; радиус парового пузырька, м;	$v_*$	динамическая скорость при турбулентном течении, $\text{м}/\text{с}$ ;
$R_*$	равновесный радиус парового пузырька в перегретой жидкости, м;	$W$	скорость (в двухфазных потоках), $\text{м}/\text{с}$ ; водяной эквивалент, $\text{Вт}/\text{К}$ ;
$R_i$	(индивидуальная) газовая постоянная, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;	$W_0$	скорость циркуляции, $\text{м}/\text{с}$ ; средняя скорость парообразования, $\text{м}/\text{с}$ ;
$r$	радиус-вектор точки, м;		
$r$	радиальная координата в сферической и цилиндрической системах координат, м;		

$x$	— массовое расходное паросодержание;	$\eta_{op}$ — эффективность оребрения;
$x, y, z$	— декартовы координаты, м;	$\Phi_{diss}$ — диссипативная функция, $\text{м}^2/\text{с}^2$ ;
$Z$	— приведенная поверхность конденсации (определяющий критерий при анализе теплообмена при конденсации).	$\varphi$ — истинное объемное паросодержание; азимутальный угол в сферических и цилиндрических координатах; удельный потенциал Гиббса, Дж/кг;
		$\Lambda$ — формпараметр;
		$\lambda$ — теплопроводность, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ;
$\alpha$	— коэффициент теплоотдачи, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ;	$\mu$ — динамическая вязкость, $\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ ;
$\beta$	— коэффициент массоотдачи, $\text{м}/\text{с}$ ; термический коэффициент объемного расширения, $\text{К}^{-1}$ ; объемное расходное паросодержание; коэффициент испарения (конденсации);	$v$ — кинематическая вязкость, $\text{м}^2/\text{с}$ ;
$\beta, \gamma$	— числовые константы в уравнении для скорости роста парового пузырька;	$\Pi$ — периметр сечения канала, м;
$\Gamma_l$	— объемный расход жидкости на единицу ширины пленки, $\text{м}^2/\text{с}$ ;	$\Pi_{kl}$ — тензор плотности потока импульса, $\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2)$ ;
$\delta$	— толщина динамического пограничного слоя, жидкой пленки, м;	$\theta$ — безразмерная температура; краевой угол смачивания;
$\delta_\mu$	— толщина вязкого подслоя, м;	$\rho$ — плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$ ;
$\Delta$	— толщина температурного пограничного слоя, м;	$\sigma$ — поверхностное натяжение, Н/м;
$\Delta_\lambda$	— толщина теплопроводного подслоя, м;	$\tau$ — вектор касательной к поверхности раздела, м;
$\Delta T$	— характеристическая разность температур, температурный напор, К;	$\tau$ — касательное напряжение, $\text{Н}/\text{м}^2$ ;
$\varepsilon$	— скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, $\text{м}^2/\text{с}^3$ ;	$\tau_{kl}$ — тензор вязких напряжений, $\text{Н}/\text{м}^2$ ;
$\varepsilon_t$	— турбулентная вязкость, $\text{м}^2/\text{с}$ ;	$\vartheta$ — «избыточная» температура, например, $T - T_\infty$ , К;
$\varepsilon_q$	— турбулентная температуропроводность, $\text{м}^2/\text{с}$ ;	$\omega$ — круговая частота, $\text{с}^{-1}$ ;
$\varepsilon_T, \varepsilon_w$	— поправочные множители к формуле Нуссельта для теплообмена при конденсации;	$\xi$ — коэффициент гидравлического сопротивления;
$\eta$	— автомодельная переменная Бланзуза, Левека; колмогоровский масштаб турбулентности, м;	$\psi$ — функция тока, $\text{м}^2/\text{с}$ .

*Верхние индексы*

$a, b$	— компоненты бинарной смеси;
'	— конденсированная (жидкая) фаза;
"	— газовая (паровая) фаза;
+	— безразмерная величина.

*Нижние индексы*

$0$	— определяет параметр в особых условиях: отрыв пузырька, вход в канал и т.п.; приведенная скорость фазы;
$\infty$	— стабилизированный параметр (скорость, коэффициент теплоотдачи); невозмущенный поток;

в — волна;  
 г — гидравлический;  
 гл — гладкий;  
 ж — жидкость;  
 кр — критический;  
 нед — недогрев;  
 н.г — начальный гидродинамический;  
 н.т — начальный термический;  
 н.к — начало кипения;  
 с — стенка;  
 т.т — тройная точка;  
 шер — шероховатая (поверхность);  
 э — эквивалентный;  
 D — диффузионный;  
 l — отнесенный к единице ширины  
пленки;  
 s — на линии насыщения.

*Числа (критерии) подобия\**

Ar — Архимеда;  
 Во — Бонда;  
 De — Дина;

\* Определение большинства чисел подобия дается в гл. 3; немногие исключения отмечены в скобках.

Es — Эккерта;  
 Eu — Эйлера;  
 Fo — Фурье;  
 Fr — Фруда;  
 G — Гиббса (гл. 9);  
 Ga — Галилея;  
 Gr — Грасгофа;  
 Gz — Гретца;  
 Но — число гомохронности;  
 Ja — Якоба (гл. 9);  
 Кн — Кнудсена (гл. 1, 7);  
 Le — Семенова—Льюиса;  
 М — Маха (гл. 1, 7);  
 Nu — Нуссельта;  
 Pe — Пекле;  
 Pr — Прандтля (гл. 1);  
 Ra — Рэлея;  
 Re — Рейнольдса;  
 Ri — Ричардсона (гл. 4);  
 Sc — Шмидта;  
 Sh — Шервуда;  
 St — Стантона;  
 We — Вебера.

# Часть 1

## КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОФАЗНОЙ СРЕДЕ

### Глава 1

#### ВВЕДЕНИЕ

##### 1.1. Основные понятия

*Конвективный теплообмен* — это процесс переноса энергии (теплоты) между поверхностью конденсированной фазы (обычно — твердой) и движущейся жидкостью. Термином «жидкость» обозначают как капельную жидкость, так и газ. Конвективный теплообмен всегда включает молекулярный перенос энергии — теплопроводность и собственно конвекцию, т.е. перенос энергии, обусловленный макроскопическим перемещением в пространстве объемов жидкости. Конвективный теплообмен — неотъемлемая часть большинства промышленных технологий; его роль важна в атмосферных процессах и при взаимодействии атмосферы с океаном. Разнообразие видов конвективного теплообмена отражает приводимая ниже классификация.

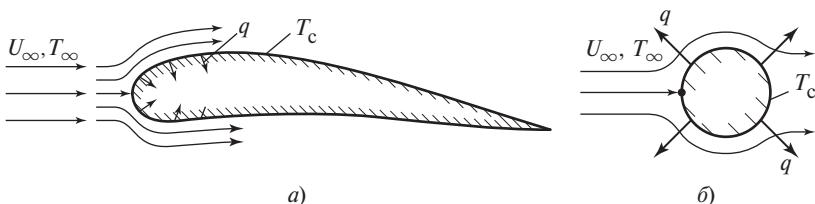
##### 1.1.1. Классификация процессов конвективного теплообмена

Принципиально важные различия определяют три признака классификации:

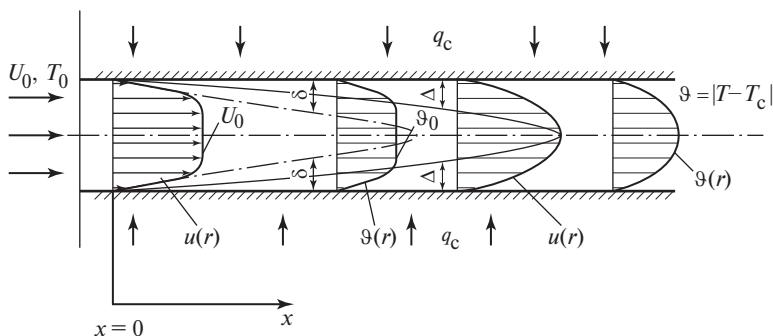
- А. По характеристике области протекания процесса — внешние и внутренние задачи;
- Б. По физической природе источника движения — вынужденная и свободная конвекция;
- В. По режиму течения — теплообмен при ламинарном течении и теплообмен при турбулентном течении.

*Внешние задачи* — это теплообмен при обтекании тел внешним потоком; это, в первую очередь, — теплообмен в пограничном слое, а также в отрывной зоне плохо обтекаемых тел. На рис. 1.1 в качестве примеров показаны теплообмен потока газа с крыловым профилем (рис. 1.1, *а*) (тепловой поток направлен к твердой стенке) и теплообмен при охлаждении жидкостью поверхности кругового цилиндра (рис. 1.1, *б*). Во внешних задачах не определен расход жидкости, участвующей в теплообмене. По этой причине не имеет смысла макроскопический тепловой баланс. При внешнем обтекании не достигается гидродинамическая и тепловая стабилизация процесса; это справедливо даже для таких гигантских по размеру поверхностей, как обшивка корпуса океанских лайнеров или танкеров, имеющих длину несколько сот метров.

*Внутренние задачи* — это теплообмен в каналах (в трубах). В этом случае расход жидкости определен, составление теплового баланса, связывающего конвективные потоки энергии (энталпии) на входе в канал и выходе из него и плотность теплового потока на его поверхности, является обязательным этапом анализа. В прямом канале постоянного сечения по длине изменяются профиль скорости  $u$  и избыточной температуры  $\vartheta = T - T_c$  (рис. 1.2). В большинстве практических задач в достаточно длинном канале достигается гидродинамическая стабилизация, означающая, что поперечные компоненты скорости обращаются в нуль (для турбулентного течения это относится к осредненной скорости), а профиль продольной скорости остается неизменным по длине. В условиях теплообмена по длине канала в общем случае изменяется и температура жидкости во всех точках сечения, и температура стенки. Однако, как будет показано в дальнейшем, существует безразмерный профиль температуры, который остается неизменным по длине канала за пределами некоторого начального участка, т.е. достигается стабилизация теплообмена.



**Рис. 1.1. Схема теплообмена во внешних задачах: в пограничном слое при обтекании крылового профиля (*а*) и кругового цилиндра (*б*)**



**Рис. 1.2. Схема развития профиля скорости и температуры по длине канала (внутренняя задача)**

Таким образом, во внутренних задачах различают теплообмен в начальном участке канала и стабилизированный теплообмен.

По физической природе источника движения различают теплообмен при вынужденной конвекции и при свободной (естественной) конвекции. В первом случае источник движения не зависит от процесса теплообмена, является по отношению к нему внешним: нагнетательное устройство (насос, компрессор, вентилятор и т.п.), разность уровней для капельной жидкости, сосуд (баллон) со сжатым газом. Во втором случае движение обусловлено самим процессом тепло- или массообмена. Пространственная неоднородность температуры вызывает неоднородность плотности жидкости, что в поле массовых сил ведет к возникновению свободноконвективного движения (термогравитационная конвекция). Такой же эффект вызывает и обусловленная массообменом неоднородность состава смеси газов или жидких растворов (концентрационная свободная конвекция). В капельных жидкостях свободная конвекция может возникать благодаря градиенту поверхностного натяжения на свободной поверхности — термокапиллярная конвекция, или конвекция Марангони. Неоднородность поверхностного натяжения возможна лишь в случаях неоднородной температуры или неоднородного состава поверхностного слоя жидкости, т.е. обусловлена процессами тепломассообмена. Этот последний тип свободной конвекции особенно актуален в условиях космического полета (микрогравитация), когда массовые силы практически отсутствуют.

Механизмы переноса импульса и энергии в условиях ламинарного и турбулентного течения различаются принципиально. Переход от ламинарного режима течения к турбулентному (при прочих равных

условиях) определяется критическим значением числа Рейнольдса  $Re = \rho U_0 l_0 / \mu$ . В пограничном слое на плоской пластине характерная скорость  $U_0$  — это скорость невозмущенного потока  $U_\infty$ , характерный линейный масштаб  $l_0$  — расстояние от передней кромки пластины до рассматриваемой точки;  $Re_{kp} \approx 3 \cdot 10^5$ . Для течения в каналах  $U_0$  — среднемассовая скорость жидкости,  $l_0 = d_r$  — гидравлический диаметр;  $Re_{kp} \approx 2300$ .

Любая реальная задача конвективного теплообмена определяется — явно или неявно — по рассмотренным трем признакам. Например, формулировки «теплообмен при турбулентном обтекании корпуса ракеты в атмосфере» или «теплообмен при турбулентном течении жидкости в круглой трубе», помимо явно обозначенного режима течения, неявно подразумевают, что в первом случае задача является внешней, а во втором — внутренней, конвекция в обоих случаях — вынужденная. Примером внешней задачи со свободноконвективным течением является ламинарная свободная конвекция на вертикальной стенке.

Кроме трех универсальных, полезно ввести несколько дополнительных частных признаков классификации процессов конвективного теплообмена.

*По уровню режимных параметров:*

а) по скорости (только для потоков газа):

теплообмен в несжимаемом потоке газа; газ ведет себя как практически несжимаемая среда, если число Маха  $M_\infty = U_\infty / C_{3B} \leq 0,3$ ;  $C_{3B}$  — скорость звука при температуре в потоке  $T_\infty$ ;

теплообмен в сжимаемом дозвуковом потоке газа,  $0,3 \leq M_\infty < 1$ ;

теплообмен в сверхзвуковом потоке газа,  $1 \leq M_\infty < 6$ ;

теплообмен в гиперзвуковом потоке,  $M_\infty \geq 6$ ; этот режим выделяют применительно к движению летательных аппаратов в воздухе, он отличается от предыдущего тем, что из-за высокой температуры торможения вблизи обтекаемой поверхности начинаются химические реакции диссоциации-рекомбинации азота и кислорода;

б) по интенсивности массовых сил:

теплообмен в условиях микрогравитации (практической невесомости);

теплообмен в интенсивных полях центробежных сил (закрученные потоки);

теплообмен в электрических и магнитных полях;

в) по уровню давлений. Абсолютное давление само по себе не является определяющим параметром для процессов теплообмена, в уравнения сохранения давление входит только под знаком производных. Влияние давления на процессы тепломассообмена проявляется через зависящие от него теплофизические свойства. Существует область давлений, индивидуальная для каждого вещества, в которой наблюдается аномально сильная зависимость теплофизических свойств от температуры, — это сверхкритические давления (СКД). Поэтому теплообмен в однофазной сверхкритической области выделяется как специфический тип конвективного теплообмена.

Кроме того, необходимо назвать, как особый вид теплообмена, теплообмен в разреженных газах. Газ рассматривается как сплошная среда (континуум), если выполняется условие  $\text{Kn} \ll 1$ , где число Кнудсена соотносит длину свободного пробега молекул  $l_m$  и характерный масштаб области протекания процесса, т.е.  $\text{Kn} = l_m/l_0$ . Практически приближение сплошной среды применимо при  $\text{Kn} < 0,01$ . При  $\text{Kn} > 1$  процессы переноса рассматриваются в соответствии с закономерностями свободномолекулярного течения; для промежуточной области разработаны специальные методы расчета.

*По специфике свойств теплоносителя:*

теплообмен в жидких металлах; жидкые металлы отличаются от других капельных жидкостей прежде всего высокой теплопроводностью (теплопроводность  $\lambda$  жидкого натрия почти в 100 раз выше, чем у воды); кроме того, жидкые металлы — электропроводные жидкости, что создает дополнительные проблемы при их течении в магнитных и электрических полях;

теплообмен в реологически сложных (неньютоновских) жидкостях;

теплообмен в химически реагирующих теплоносителях; этот вид теплообмена можно включать в рассматриваемый признак классификации довольно условно, поскольку вступать в химические реакции при определенном сочетании условий могут многие жидкости или газы. Естественно, при наличии химических реакций всегда рассматриваются совместно протекающие процессы тепломассообмена.

*По геометрическим особенностям области протекания процесса:*

теплообмен в каналах малого диаметра; проблемы охлаждения элементов электронных приборов, в частности персональных компьютеров, делают это направление чрезвычайно актуальным, ежегодно проводятся международные конференции по теплообмену в мини- и микроканалах; строго говоря, пока выполняется условие  $\text{Kn} \ll 1$ , нет оснований ожидать влияния размера канала на закономерности теплообмена (и гидродинамики) однофазных сред. Это

влияние неизбежно при соизмеримости диаметра канала с межмолекулярными расстояниями; в двухфазных средах имеются внутренние масштабы (размеры пузырьков, капель, толщина жидкой пленки), соизмеримость которых с поперечным размером сечения канала предопределяет специфику процессов переноса импульса и энергии;

теплообмен в пористых средах и засыпках;

теплообмен в загроможденных и извилистых каналах; в ряде случаев этот тип теплообмена сводится к предыдущему, т.е. успешно моделируется как течение в пористой среде.

*Особый вид процесса* — теплообмен в каналах с проницаемой поверхностью, т.е. при наличии отсоса или вдува жидкости.

### 1.1.2. Основное содержание задач конвективного теплообмена

Большинство конкретных задач конвективного теплообмена сводится к реализации одной из двух целей:

термостатирование, т.е. поддержание твердой поверхности на заданном уровне температур (чаще бывает необходимым охлаждение поверхности);

нагрев или охлаждение жидкости до заданной температуры.

В первом случае часто бывает заданным количество тепла  $Q$  (тепловой поток), которое требуется отвести от твердой поверхности площадью  $F$  так, чтобы температура этой поверхности не превысила некоторого уровня  $T_c$ . В простейшем случае можно принять, что плотность теплового потока однородна по поверхности, т.е.  $Q/F = q = \text{idem}$ . Тогда самая высокая температура стенки канала имеет место в его выходном сечении. Охлаждающий теплоноситель должен отвести от стенки тепловой поток  $Q$ , при этом его температура по длине канала вырастет от  $T_1$  на входе до  $T_2$  на выходе (рис. 1.3). При постоянной удельной теплоемкости жидкости  $c_p$

$$Q = Gc_p(T_2 - T_1), \quad (1.1)$$

где  $G$  — массовый расход жидкости, кг/с.

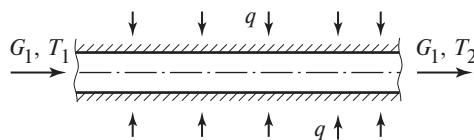


Рис. 1.3. Типичная схема охлаждающего канала

Легко понять, что подбор расхода, теплоемкости и температур, обеспечивающий выполнение уравнения теплового баланса при  $T_2 < T_c$ , сам по себе не гарантирует, что нужное количество тепла будет отведено от стенок канала. Необходимо, чтобы интенсивность теплопереноса на охлаждаемой поверхности позволила отводить от нее плотность теплового потока при сохранении допустимой разности температур (например, твэлов в ядерных реакторах):

$$q = \alpha(T_c - T_2). \quad (1.2)$$

Коэффициент теплоотдачи (КТО)  $\alpha$  с единицей измерения  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  является количественной характеристикой интенсивности теплообмена. Этот параметр определяет, обеспечит ли выбранный теплоноситель при заданных расходе и входной температуре требуемый режим охлаждения поверхности. В общем случае КТО зависит от свойств жидкости, расхода и геометрических характеристик канала; если эта зависимость известна, то совместное решение уравнений (1.1) и (1.2) определяет параметры, обеспечивающие требуемый режим охлаждения. В современных технологиях задачи охлаждения могут быть очень сложными. Например, от обращенных к плазме элементов конструкции термоядерного реактора необходимо отводить тепловые потоки плотностью в несколько десятков мегаватт на квадратный метр ( $\text{МВт}/\text{м}^2$ ) при температуре охлаждаемой поверхности на уровне 300—350 °C. Эти тепловые потоки сопоставимы с теми, что излучаются с поверхности Солнца — около 60  $\text{МВт}/\text{м}^2$  при температуре около 6000 К. Хотя в микроэлектронике рассеиваемые мощности по абсолютному значению малы, непрерывная тенденция к увеличению плотности упаковки элементов схем делает проблемы охлаждения критическими для их дальнейшей миниатюризации. К примеру, отвод мощности 1 Вт от элемента с характерным размером 1 мм означает, что плотность теплового потока должна составлять 1  $\text{МВт}/\text{м}^2$ , что соответствует уровню тепловых потоков, отводимых от поверхности твэлов в ядерных реакторах АЭС.

Второй случай относится к нагреву или охлаждению жидкости в теплообменных аппаратах, включенных в определенную технологическую линию. Например, вода — рабочее тело термодинамического цикла в технологии производства электроэнергии на ТЭС или АЭС — проходит последовательно через несколько теплообменных аппаратов, в каждом из которых изменяется либо ее агрегатное состояние (конденсатор, котел), либо уровень температуры (деаэратор, водоподогреватель, регенеративные подогреватели низкого и

высокого давления). Конструирование каждого из этих аппаратов включает проведение тепловых расчетов, в которых при определении плотности теплового потока обязательно рассчитывают коэффициенты теплоотдачи. Таким образом, в прикладных задачах конвективного теплообмена расчет КТО практически всегда является обязательным этапом анализа.

Исторически коэффициент теплоотдачи был введен как коэффициент пропорциональности в законе Ньютона—Рихмана:

$$Q = \alpha F(T_c - T_{\text{ж}}), \quad (1.3)$$

где  $T_{\text{ж}}$  — характерная температура жидкости. Фактически Ньютон в такой форме это соотношение не записывал. На основе экспериментов по охлаждению на воздухе нагретых до высокой температуры металлических предметов он установил, что скорость их охлаждения пропорциональна разности температур  $\Delta T = T_c - T_{\text{ж}}$ , что и послужило в дальнейшем основанием для закона (1.3). На протяжении почти двух веков после опытов Ньютона КТО оставался эмпирически определяемым коэффициентом пропорциональности. Лишь в конце XIX в. было получено первое теоретическое решение задачи о конвективном теплообмене (для ламинарного течения в круглой трубе).

Число аналитических решений, определяющих поле температуры, и сегодня невелико. Но в распоряжении современного исследователя имеются методы численного решения. При известном поле температур  $T = T(t, x, y, z)$ , полученном в результате теоретического решения, коэффициент теплоотдачи на твердой поверхности  $s = s(x, y, z)$  определяется с использованием закона Фурье на твердой поверхности ( $\mathbf{n} = 0$ ):

$$\mathbf{q} = -\lambda(\nabla T)_n = 0.$$

Для простой геометрической фигуры (плоскость, цилиндрическая поверхность) обычно в качестве нормальной к поверхности координаты принимается  $y$ , т. е. условие  $\mathbf{n} = 0$  заменяется условием  $y = 0$ . Тогда на стенке

$$q = -\lambda(\partial T / \partial y)_{y=0} = \alpha \Delta T,$$

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\Delta T} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (1.4)$$

Характеристическая разность температур  $\Delta T = T_c - T_{\text{ж}}$  задается с учетом специфики задачи, конкретные случаи разбираются в § 1.3

и 1.4. Если поле температур  $T(t, x, y, z)$  известно, то (1.4) дает аналитическое определение КТО.

Если в задаче имеется естественный линейный масштаб  $l_0$  (расстояние в направлении течения во внешних задачах, гидравлический диаметр во внутренних), то уравнение (1.4) преобразуется к безразмерному виду. Вводя безразмерную координату  $Y = y/l_0$  и безразмерную температуру  $\theta = (T - T_{\infty})/(T_c - T_{\infty})$ , получаем

$$\alpha l_0/\lambda = -(\partial \theta / \partial Y)_{Y=0}.$$

Безразмерный комплекс в левой части — число Нуссельта  $Nu = \alpha l_0/\lambda$ , названный в честь известного немецкого специалиста в области теории теплообмена и ее приложений (W. Nusselt, 1882—1957). По существу  $Nu$  — это безразмерный коэффициент теплоотдачи.

### 1.1.3. Связь молекулярного и конвективного переноса тепла

Конвективный теплообмен — результат совместного действия молекулярного переноса тепла (теплопроводности) и макроскопического переноса тепла движущимися частицами жидкости. Чтобы отразить взаимодействие этих механизмов переноса, рассмотрим простую модель конвективного теплообмена, максимально «очищенную» от других эффектов. На рис. 1.4 показана схема течения и теплообмена в плоском канале, ширина сечения которого  $b$  намного больше высоты  $H$ , т.е.  $b \gg H$ . В таком канале устанавливается плоское (двумерное) течение всюду, кроме узких областей у боковых стенок. За пределами начального гидродинамического участка ( $x > l_{h.r.}$ ) компоненты скорости  $u_y = u_z = 0$ , профиль продольной компоненты скорости стабилизирован, т.е.  $\partial u_x / \partial x = 0$ ,  $u_x = u(y)$ . К широким гра-

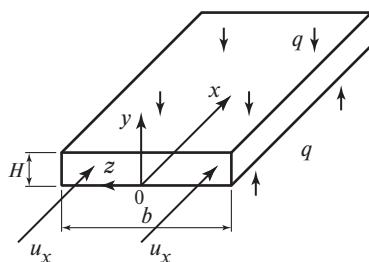


Рис. 1.4. Схема стабилизированного теплообмена в плоском канале

ням канала приложен однородный тепловой поток  $q$ ; очевидно, задача симметрична относительно плоскости  $y = H/2$ . Для анализа переноса энергии в этом случае достаточно рассмотреть половину сечения канала, например нижнюю. В плоскости  $x0y$  (рис. 1.5) рассматриваем бесконечно малый контрольный объем с единичным размером в направлении оси  $z$ . Принимаем свойства жидкости постоянными. В направлении течения перенос энергии осуществляется конвекцией, в поперечном направлении — теплопроводностью (плотность теплового потока  $q$  в последующем анализе рассматривается как скаляр). В дальнейшем будет показано, что эффект молекулярного переноса теплоты в осевом направлении в условиях стабилизированного теплообмена ничтожен. Принимая за положительное направление внешнюю нормаль к поверхности контрольного объема, составим баланс входящих и выходящих потоков тепла (символом  $h$  обозначена энтальпия жидкости)

$$-\rho u h \, dy + \rho u h \, dy + \rho u \frac{\partial h}{\partial x} \, dx \, dy - q \, dx + q \, dx + \frac{\partial q}{\partial y} \, dy \, dx = 0.$$

В итоге получаем искомую взаимосвязь конвективного и молекулярного переноса энергии:

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y}. \quad (1.5)$$

При подводе тепла к поверхности канала  $\partial h / \partial x > 0$ , следовательно,  $\partial q / \partial y < 0$ . Это значит, что молекулярный тепловой поток непрерывно уменьшается от стенки, где  $q = q_c$ , до  $y = H/2$ , где  $q = 0$ . Абсолютное значение производной  $|\partial q / \partial y|$  изменяется по сечению аналогично продольной скорости  $u$ , т.е. эта величина равна нулю на

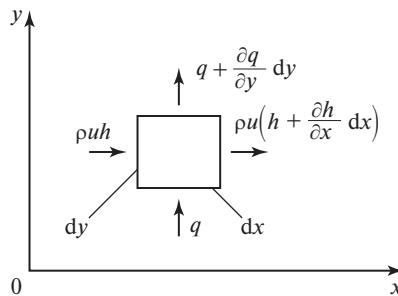


Рис. 1.5. Тепловой баланс для бесконечно малого контрольного объема

стенке и максимальна в плоскости симметрии канала. При  $y = 0$  действует прилипание ( $u = 0$ ),  $\partial q / \partial y = 0$ , что позволяет сделать вывод об абсолютном доминировании механизма теплопроводности, причем в очень тонком слое жидкости на стенке плотность теплового потока совпадает с плотностью теплового потока на стенке ( $q = q_c \approx \text{const}$ ). По мере удаления от стенки плотность молекулярного теплового потока непрерывно уменьшается, поскольку возрастает конвективный поток энергии в осевом направлении. Это и отражает уравнение (1.5).

Оно представляет собой простую форму уравнения энергии для теплообмена при стабилизированном течении. Используя закон Фурье и предположение о постоянстве изобарной теплоемкости ( $dh = c_p dT$ ,  $c_p = \text{const}$ ), получаем

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \text{или} \quad u \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (1.6)$$

где температуропроводность  $a = \lambda / (\rho c_p)$ .

Ясно, что даже в рассмотренном простом случае поле температуры определяется дифференциальным уравнением с частными производными; для нахождения поля скорости требуется решить систему уравнений движения. В данном примере это решение хорошо известно; в общем случае это поле (а значит, и уравнение энергии) трехмерное.

## 1.2. Физический смысл коэффициента теплоотдачи

### 1.2.1. Толщина эквивалентной пленки

Рассмотрим показанный на рис. 1.6 типичный профиль избыточной температуры  $\vartheta = T - T_\infty$  вблизи поверхности теплообмена ( $y = 0$ ). Будем для определенности рассматривать внешнюю задачу, когда  $T_\infty = T_\infty$ . Формула (1.4) для избыточной температуры принимает вид

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_c} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0},$$

где  $\vartheta_c = T_c - T_\infty$ . Производная  $\partial \vartheta / \partial y$  численно равна тангенсу угла наклонной касательной к оси  $y$ . В нашем случае

$$-(\partial \vartheta / \partial y)_{y=0} = \operatorname{tg} \gamma = \vartheta_c / \Delta_\vartheta,$$

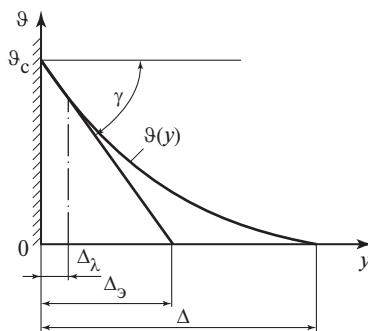


Рис. 1.6. Профиль температуры жидкости у поверхности теплообмена

где  $\Delta_\theta$  — отрезок на оси  $y$ , отсекаемый касательной к профилю температуры при  $y = 0$  (см. рис. 1.6). Подставляя этот результат в формулу для КТО, получаем

$$\alpha = \lambda / \Delta_\theta. \quad (1.7)$$

Следовательно,  $q_c \equiv \alpha \vartheta_c \equiv \lambda \vartheta_c / \Delta_\theta$ , где  $\Delta_\theta$  — толщина эквивалентной пленки, т.е. толщина заторможенного слоя жидкости, имеющего термическое сопротивление при передаче тепла теплопроводностью, равное термическому сопротивлению в реальном процессе конвективного теплообмена. Если бы жидкость была неподвижной, то все изменение температуры происходило бы на участке толщиной  $\Delta_\theta$ . Поскольку в реальном процессе существует механизм конвективного переноса тепла, область изменения температуры от  $T_c$  до  $T_\infty$  охватывает большее расстояние вдоль оси  $y$ . Достигнение условия  $T_c = T_\infty$  ( $\vartheta = 0$ ) реализуется асимптотически; условие  $\vartheta = 0,01\vartheta_c$  определяет толщину температурного (теплового) пограничного слоя:  $y = \Delta$ . В пределах температурного пограничного слоя происходит изменение избыточной температуры на 99 % от ее максимального значения  $\vartheta_c = \Delta T$  (так называемого «температурного напора»).

Вместе с тем, в любом процессе однофазного конвективного теплообмена можно выделить очень тонкий слой жидкости толщиной  $\Delta_\lambda$ , в пределах которого абсолютно доминирует перенос тепла теплопроводностью,  $q \approx q_c \approx \text{const}$ . Этот слой практически важен при анализе переноса энергии при турбулентном режиме течения жидкости, в этом случае его называют теплопроводным подслоем. Очевидно, что всегда справедливо

$$\Delta_\lambda \leq \Delta_\theta \leq \Delta. \quad (1.8)$$

## 1.2.2. Коэффициент теплоотдачи как гидродинамический параметр

Введение толщины эквивалентной пленки  $\Delta_3$  придает КТО определенное физическое содержание. Существует практически используемый процесс — течение тонкой гравитационной пленки, в котором рассмотренные выше поперечные (по отношению к направлению потока жидкости) масштабы совпадают, т.е.  $\Delta_3 = \Delta_\lambda = \Delta = \delta$ , где  $\delta$  — толщина пленки. Последний параметр — величина вполне осозаемая и измеряемая инструментально (рис. 1.7). Гравитационные пленки широко используются в различных технологиях (дистилляция, выпарка, охлаждение различного оборудования и др.). В случае ламинарного течения тонкой пленки насыщенной жидкости с температурой  $T_{ж} = T_s$ , при температуре стенки  $T_c > T_s$ , но недостаточно высокой, чтобы началось кипение, тепловой поток от стенки определяется теплопроводностью слоя стекающей жидкости:

$$q = \lambda \Delta T / \delta, \quad \Delta T = T_c - T_s.$$

Определяя коэффициент теплоотдачи как

$$q = \alpha \Delta T,$$

получаем  $\alpha = \lambda / \delta$ . В рассматриваемой задаче собственно конвективный перенос энергии ничтожен.

Толщина гравитационной пленки  $\delta$  зависит от расхода жидкости на единицу ширины пленки  $G_l$ , кг/(м · с), гравитационного ускорения  $g$ , динамической вязкости  $\mu$  и плотности жидкости  $\rho$ , т.е. является чисто гидродинамическим параметром. В этом случае, очевидно, коэффициент теплоотдачи сохраняет смысл и в пределе

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{q}{\Delta T} = \alpha \neq 0, \quad (1.9)$$

так как КТО не зависит от собственно «тепловых» параметров ( $q, \Delta T$ ).

Рассмотренный предельный случай ясно определяет физическое содержание КТО и целесообразность его введения. Задачу о теплообмене стекающей пленки впервые решил Нуссельт (1916)

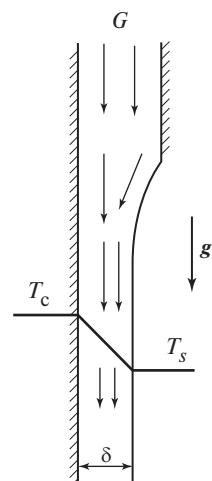


Рис. 1.7. Схема течения жидкости в гравитационной пленке

применительно к конденсации неподвижного пара на вертикальной стенке. Решение было получено в предположении о пренебрежимо малом вкладе конвективного переноса энергии, что и ведет к простой связи коэффициента теплоотдачи и толщины пленки:  $\alpha = \lambda/\delta$ ; выражение для  $\delta$  получается из решения гидродинамической задачи как функция  $G_l$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $g$ . Но при конденсации расход формируется за счет конденсации пара, так что предел (1.9) лишен физического смысла, поскольку при нулевой разности температур конденсация невозможна. В реальном процессе толщина пленки растет с ростом температурного напора как  $\delta \sim \Delta T^{1/4}$ , так что  $\alpha \sim \Delta T^{-1/4}$ . Тем не менее, во всех практических важных случаях при пленочной конденсации КТО вполне может рассматриваться как имеющий наглядный физический смысл гидродинамический параметр. Сходная ситуация характерна для теплообмена при свободной конвекции: свободная конвекция при нулевом  $\Delta T$  не возникает, но в этом процессе толщина заторможенного слоя жидкости, определяющего термическое сопротивление, зависит от характерной скорости свободной конвекции, т.е. является по существу гидродинамическим параметром.

При вынужденной конвекции как при ламинарном, так и при турбулентном течении коэффициент теплоотдачи — гидродинамический параметр (с точностью до влияния на теплофизические свойства температуры жидкости). Расчетные уравнения для безразмерного КТО ( $Nu$ ) включают только гидродинамические параметры ( $Re$ ,  $x/d$ ) и свойства жидкости ( $Pr$ ). При этом при развитом турбулентном течении капельных жидкостей параметр  $\Delta_\lambda$  может составлять до 90 %  $\Delta_3$ . В этих случаях физический смысл КТО нагляден.

В 1970-е годы американский специалист Адиутори (E. Adiutori) активно боролся за «новую теплопередачу», доказывая ненужность КТО. С ним можно согласиться только в отношении пузырькового и переходного режимов кипения. Зависимость  $q(\Delta T)$ , представленная на рис. 1.8 в логарифмическом масштабе\* и называемая кривой кипения, содержит несколько характерных участков (здесь  $\Delta T = T_c - T_s$ ). В режиме пузырькового кипения (участок  $BC$ ) зависимость  $q(\Delta T)$  сильно нелинейная:  $q \sim \Delta T^3$ . Ясно, что предел (1.9) для этого процесса не выполняется, КТО — сильная функция негидродинамических параметров ( $\alpha \sim \Delta T^2$ ). По существу для пузырькового кипения (как и для переходного — участок  $CE$  кривой кипения) коэффициент теплоотдачи лишен физического содержания и служит лишь сервис-

\* В гл. 9 кривая кипения анализируется детально.

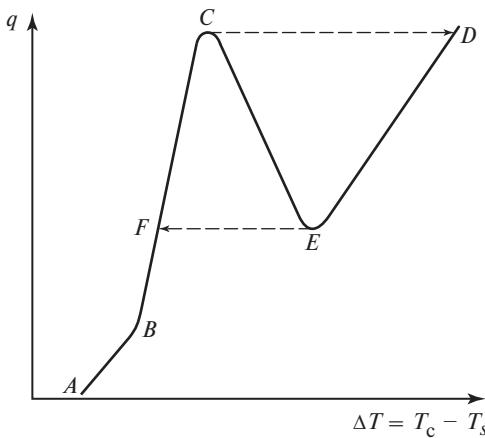


Рис. 1.8. Типичная кривая кипения

ной величиной, полезной для оценки относительной интенсивности различных видов теплообмена.

При однофазной вынужденной и свободной конвекции, как и при конденсации, использование КТО не только оправдано практически, но и имеет ясное физическое обоснование. Формула (1.7), вводящая понятие толщины эквивалентной пленки, показывает, что значение КТО сильно зависит от теплопроводности жидкости; значение  $\Delta_3$  определяется в основном гидродинамикой процесса. Прямая пропорциональность  $\alpha \sim \lambda$  наблюдается очень редко (испарение стекающей пленки насыщенной жидкости, стабилизированный теплообмен при ламинарном течении в каналах, конвекция сферических частиц при  $d \rightarrow 0$ ). Поскольку поле температуры у поверхности теплообмена, а следовательно, и являющаяся его характеристикой величина  $\Delta_3$  зависят от свойств жидкости, в том числе от теплопроводности, то в большинстве случаев  $\alpha \sim \lambda^n$ , где для газов и неметаллических капельных жидкостей  $n \approx 0,6 \div 0,75$ . Эти качественные соображения подтверждаются данными табл. 1.1, в которой приведены примерные значения КТО в типичных процессах теплообмена.

Из таблицы видно, что вода как теплоноситель превосходит не только газы, но и другие неметаллические жидкости. Главная причина — более высокая теплопроводность воды; по отношению к некоторым хладонам теплопроводимость  $\lambda$  воды выше почти на порядок.

Таблица 1.1. Примерные значения КТО в типичных процессах

Вид теплообмена	Значения КТО, Вт/(м <sup>2</sup> · К)		
	Газы	Вода	Неводные неметаллические капельные жидкости
Свободная конвекция	(1)—10	10 <sup>2</sup> —10 <sup>3</sup>	(10)—10 <sup>2</sup>
Вынужденная конвекция	10—10 <sup>2</sup>	10 <sup>3</sup> —10 <sup>4</sup>	(10 <sup>2</sup> )—10 <sup>3</sup>
Конденсация	—	10 <sup>3</sup> —10 <sup>4</sup>	(10 <sup>2</sup> )—10 <sup>3</sup>
Пузырьковое кипение	—	10 <sup>3</sup> —10 <sup>5</sup>	10 <sup>3</sup> —10 <sup>5</sup>

Значения, которые в таблице даются в скобках, примерно соответствуют нижней границе КТО в рассматриваемом процессе. При пузырьковом кипении неводных жидкостей в области низких тепловых потоков КТО могут быть даже ниже, чем указанное в таблице значение 10<sup>3</sup> Вт/(м<sup>2</sup> · К). К примеру, при кипении хладона R-134a в условиях, соответствующих режимам работы домашнего холодильника,  $\alpha = 500 \div 2000$  Вт/(м<sup>2</sup> · К), но в экспериментах при высоких приведенных давлениях ( $p/p_{\text{кр}} \approx 0,8$ ) и высоких тепловых потоках КТО превосходит 10<sup>5</sup> Вт/(м<sup>2</sup> · К) (как и у воды!).

В двух последующих параграфах приводятся без строгого вывода, но с некоторым качественным обоснованием формулы для расчета коэффициентов теплоотдачи в некоторых процессах однофазной конвекции. Этот материал может быть полезен как справочный при решении конкретных задач.

### 1.3. Качественные закономерности процесса и расчетные формулы для теплообмена в гравитационном слое

#### 1.3.1. Теплообмен при ламинарном обтекании плоской пластины

Теплообмен при обтекании изотермической плоской пластины ламинарным потоком жидкости — это классическая модельная задача, результаты решения которой широко используются для приближенного анализа более сложных случаев теплообмена. Строгое решение задачи изложено в гл. 4; здесь дается качественное объяснение

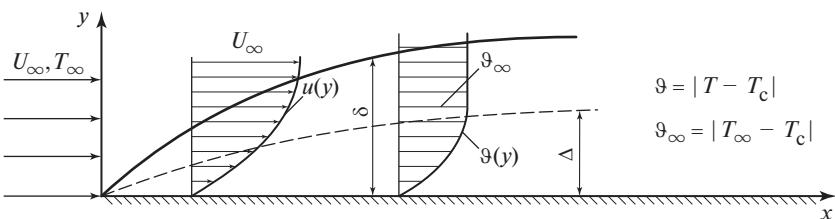


Рис. 1.9. Схема развития динамического и температурного пограничных слоев на плоской пластине

ние закономерностей процесса. На рис. 1.9 схематически показано развитие динамического и температурного (теплового) пограничных слоев по длине изотермической пластины.

В 1907 г. Блазиус впервые практически применил теорию пограничного слоя Прандтля для решения задачи о ламинарном течении жидкости вдоль плоской пластины. Решение Блазиуса включает профиль скорости в пограничном слое, формулы для коэффициента трения

$$\frac{C_f}{2} = 0,332 \text{Re}_x^{1/2} \quad (1.10)$$

и толщины пограничного слоя

$$\delta = 5x \text{Re}_x^{-1/2}. \quad (1.11)$$

В этих формулах  $\text{Re}_x = U_\infty x / v$ ;  $v$  — кинематическая вязкость жидкости.

Определение коэффициента трения следует из соотношения между касательным напряжением на стенке и динамическим напором:

$$\tau_c = \frac{C_f}{2} \rho U_\infty^2. \quad (1.12)$$

Формула (1.11) определяет толщину пограничного слоя как расстояние от стенки, на котором скорость жидкости с погрешностью 1 % становится равной скорости невозмущенного потока. Другими словами, при  $y = \delta$  имеем  $u/U_\infty = 0,99$ . Из (1.11) следует  $\delta = 5(xv/U_\infty)^{1/2}$ , т.е. чем выше значение  $v$ , тем толще динамический пограничный слой и тем на большем расстоянии от стенки поток ощущает ее влияние.

В задачах теплообмена роль, аналогичную роли кинематической вязкости, играет коэффициент температуропроводности  $\alpha = \lambda / (\rho c_p)$ . (В газах три коэффициента переноса с одинаковой размерностью,  $\text{м}^2/\text{с}$ :  $v$ ,  $a$ ,  $D$  — рассматриваются как коэффициенты диффузии соответственно импульса, температуры и вещества). Можно полагать, что отношение толщин динамического и температурного пограничных слоев  $\delta/\Delta$  — функция отношения коэффициентов переноса  $v/a$ . Последнее — важнейший параметр, безразмерная характеристика теплофизических свойств жидкости, названная в честь выдающегося немецкого ученого числом Прандтля (L. Prandtl, 1875—1953):

$$\text{Pr} \equiv v/a \equiv \mu c_p / \lambda. \quad (1.13)$$

Следовательно, в общем случае  $\Delta = \delta \cdot f(\text{Pr})$ . Для ламинарного обтекания плоской пластины  $\Delta = \delta \cdot \text{Pr}^{-1/3}$ , т.е. с учетом (1.11)

$$\Delta = 5x \text{Re}_x^{-1/2} \text{Pr}^{-1/3}. \quad (1.14)$$

Соотношение (1.8) позволяет принять, что  $\Delta_3 \sim \Delta$ , т.е. согласно (1.7)  $\alpha \sim \lambda / \Delta$ . Тогда

$$\alpha \sim \frac{\lambda}{x} \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}.$$

Имея в виду определение безразмерного КТО (число Нуссельта) и используя результаты строгого решения для коэффициента пропорциональности, получаем

$$\text{Nu}_x \equiv ax / \lambda = 0,332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}. \quad (1.15)$$

Этот результат, как будет показано в гл. 4, следует из решения Польгаузена для теплообмена на изотермической пластине, т.е. при  $T_c = \text{const}$ . При граничных условиях второго рода  $q_c = \text{const}$

$$\text{Nu}_x \equiv ax / \lambda = 0,47 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}. \quad (1.16)$$

В случае ламинарного обтекания плоской пластины КТО при условиях  $q_c = \text{const}$  и  $T_c = \text{const}$  соотносятся как  $\alpha_q = \alpha_{T_c} \sqrt{2}$ .

Взаимозависимость размерных параметров, следующая из этих формул:

$$\alpha \sim \lambda^{2/3} (\rho U_\infty)^{1/2} x^{-1/2} \mu^{-1/6} c_p^{1/3}.$$

Сильная зависимость КТО от  $\lambda$  свидетельствует о важной роли молекулярной теплопроводности при ламинарном течении; собственно конвективный перенос энергии отражен вторым сомножителем  $(\rho U_\infty)^{1/2}$ . Падение интенсивности теплоотдачи в направлении потока по закону  $\alpha \sim x^{-1/2}$  отражает эффект роста толщины пограничного слоя  $\Delta$  согласно формуле (1.14). Формулы (1.15) и (1.16) справедливы, пока сохраняется ламинарный режим ( $Re_x \leq Re_{x \text{ кр}} \approx 3 \cdot 10^5$ ).

Важно обратить внимание на одинаковость числового коэффициента в формулах (1.10) для  $C_f/2$  и (1.15) для  $Nu_x$  при  $T_c = \text{const}$ . Если вместо числа  $Nu_x$  в качестве безразмерного коэффициента теплоотдачи использовать число Стантона (Stanton), которое вводится как

$$St \equiv \frac{q_c}{\rho U_\infty c_p \Delta T} \equiv \frac{\alpha}{\rho U_\infty c_p},$$

то легко убедиться, что  $St = Nu / (RePr)$ . По физическому содержанию число Стантона — это безразмерный поток энергии (тепла) на стенке, причем  $\alpha = \alpha(x)$ . Из (1.15) следует

$$St = 0,332 Re_x^{-1/2} Pr^{-2/3},$$

т.е.

$$St = \frac{C_f}{2} Pr^{-2/3}. \quad (1.17)$$

При равенстве коэффициентов переноса импульса и энергии  $v = a$ , т.е. при  $Pr = 1$ ,

$$St = C_f/2. \quad (1.18)$$

Последнее соотношение определяет *аналогию* процессов переноса: безразмерный поток энергии и безразмерный поток импульса на стенке равны. То, что коэффициент трения определяет поток импульса, т.е. потерю импульса невозмущенного потока из-за вязкости, следует из (1.12). Аналогия выполняется лишь при одинаковых коэффициентах переноса; уравнение (1.17) справедливо и при  $Pr \neq 1$ . В дальнейшем будет показано, что (1.17) — это частный случай общей взаимосвязи трения и теплового потока на стенке, которая

выполняется при относительно простой геометрической форме поверхности теплообмена и может быть представлена в виде

$$St = \frac{C_f}{2} f(\text{Pr}), \quad (1.19)$$

где  $f(\text{Pr})$  — показатель отклонения от аналогии. В случае ламинарного обтекания плоской изотермической пластины  $f(\text{Pr}) = \text{Pr}^{-2/3}$  — так называемый фактор Колберна (Colburn).

Уравнения (1.15)–(1.17) определяют локальный коэффициент теплоотдачи  $\alpha_x$ , который в стационарном процессе для жидкости с постоянными свойствами может быть представлен как  $\alpha_x = \text{const} \cdot x^{-1/2}$ . Очевидно, средний КТО на участке длиной  $l$  от передней кромки пластины

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha_x \, dx = 2\alpha_{x=l}.$$

В частности, при  $T_c = \text{const}$

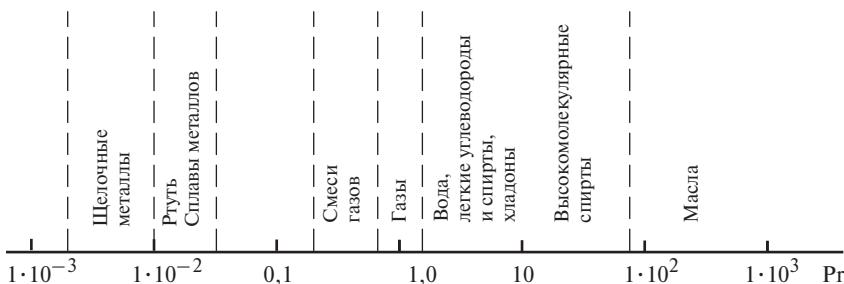
$$\overline{\text{Nu}} \equiv \frac{\bar{\alpha}l}{\lambda} = 0,664 \text{Re}_l^{1/2} \text{Pr}^{1/3}. \quad (1.15a)$$

### 1.3.2. Число Прандтля

Определяемая соотношением (1.13) безразмерная характеристика физических свойств — число Прандтля — очень важный параметр в теории и практике теплообмена. Для жидкостей и газов, используемых в процессах теплообмена, число Прандтля изменяется в очень широких пределах. Это с некоторым «запасом» отражено на числовой оси (рис. 1.10), где изменение числа  $\text{Pr}$  охватывает шесть порядков — от  $10^{-3}$  до  $10^3$ ; на рисунке указаны вещества, имеющие соответствующие значения  $\text{Pr}$ .

В идеальном газе упругих твердых сфер возможно лишь поступательное движение молекул; в таком модельном веществе  $v = a$ ,  $\text{Pr} = 1$ . В реальных газах при невысоких давлениях  $\text{Pr} = 0,7 \div 1$ . При высоких приведенных давлениях ( $p_r = p/p_{\text{кр}} > 0,8$ ), т.е. вблизи термодинамической критической точки, число  $\text{Pr}$  в газах возрастает весьма заметно и может превышать 10.

Малые числа Прандтля ( $\text{Pr} = 4 \cdot 10^{-3} \div 3 \cdot 10^{-2}$ ) характерны для жидких щелочных металлов (Na, K, Cs, Rb), что обусловлено их



**Рис. 1.10. Характерные значения числа Прандтля для различных теплоносителей**

высокой теплопроводностью; к примеру,  $\lambda$  жидкого натрия в 100 раз выше, чем  $\lambda$  воды. Для металлических сплавов обычно  $Pr = 0,01 \div 0,1$ . Для капельных жидкостей число  $Pr$  довольно сильно зависит от температуры, что обусловлено, главным образом, изменением динамической вязкости. Приведенные выше (и на рис. 1.10) значения  $Pr$  для жидких металлов относятся к области их наиболее широкого применения как теплоносителей.

Широко используемые в технике капельные жидкости в рабочем диапазоне температур характеризуются числами Прандтля в диапазоне  $Pr = 1 \div 10$ ; сюда относятся вода, хладоны, легкие углеводороды, криожидкости, фторуглероды, легкие спирты (метанол, этанол) — список может быть продолжен. Для неметаллических жидкостей зависимость  $Pr$  от температуры проявляется в общем сильнее, чем у металлов. Даже у воды, относящейся к маловязким жидкостям, число Прандтля изменяется более чем на порядок величины в технически важном диапазоне температур, что демонстрирует табл. 1.2.

Таблица 1.2. Значения  $Pr$  воды на линии насыщения

$T, ^\circ\text{C}$	0	20	100	175—320
$Pr$	13,7	~7	1,75	0,85—1,05

У капельных жидкостей  $\partial \mu / \partial T < 0$ , причем зависимость вязкости от температуры в некотором диапазоне температур может быть сильной. У воды при росте температуры от нуля до  $60^\circ\text{C}$  вязкость и число Прандтля уменьшаются более чем вчетверо. Более разительны эти изменения у вязких жидкостей. Например, глицерин при комнатной температуре — очень вязкая жидкость,  $Pr \approx 10^4$ , а при  $T = 160^\circ\text{C}$  число  $Pr \approx 7$ . Поэтому область больших значений  $Pr$  ( $10 \div 1000$ ) сле-

дует понимать как характеризующую масла, высокомолекулярные углеводороды и спирты в типичном для их использования диапазоне температур. Следует также иметь в виду, что жидкости с очень высокой вязкостью ( $Pr > 10^4$ ) могут обнаруживать отклонение от ньютоновского закона вязкого трения, т.е. относятся к реологически сложным жидкостям.

Наконец, заслуживает упоминания то, что бинарные смеси газов с очень сильно различающимися молекулярными массами характеризуются неожиданно низкими значениями числа Прандтля. Речь идет о смесях водорода или гелия с аргоном или ксеноном, которые рассматриваются в качестве возможных рабочих тел для космических энергоустановок. Для этих смесей диапазон чисел Прандтля составляет  $Pr = 0,17 \div 0,7$ .

### **1.3.3. Теплообмен при турбулентном обтекании плоской пластины**

При турбулентном течении все актуальные параметры процесса (при теплообмене это — скорость, давление, температура) претерпевают беспорядочные пульсации. Характерные частоты — сотни герц, килогерцы. При этом еще во времена О. Рейнольдса, т. е. в конце XIX в., было установлено, что важные для практики параметры (коэффициенты гидравлического сопротивления трения и теплоотдачи) определяются осредненными характеристиками потока. Выведенные Рейнольдсом осредненные уравнения турбулентного течения до настоящего времени остаются основой для решения инженерных задач. Поскольку система осредненных уравнений не замкнута, для получения практических результатов всегда используется опытная информация. Все уравнения для расчета теплоотдачи при турбулентном течении представляют собой либо результат непосредственного обобщения опытных данных, либо (в лучшем случае) основаны на приближенных моделях, также использующих определенную эмпирическую информацию.

Применение аналогии процессов переноса импульса и энергии оказывается достаточно эффективным методом построения полуэмпирических моделей теплообмена при турбулентном течении. Фактически речь идет об использовании уравнения (1.19); в области развитой турбулентности, т.е. за пределами тонкого пристенного слоя жидкости, аналогия выполняется достаточно точно. Применительно к турбулентным течениям она носит название аналогии Рейнольдса. Функция  $f(Pr)$  отражает специфику переноса непосредственно

у стенки (в пределах вязкого и теплопроводного подслоя), где преобладает молекулярный перенос импульса и энергии.

При внешнем обтекании тел простой геометрической формы и при течении в прямых каналах сопротивление трения подчиняется простым законам. Для коэффициента трения при обтекании плоской пластины может использоваться, например, формула Шлихтинга

$$C_f = 0,059 \operatorname{Re}_x^{-0,2},$$

т.е.

$$\frac{C_f}{2} = 0,0295 \operatorname{Re}_x^{-0,2}. \quad (1.20)$$

Тогда с учетом (1.19) для безразмерного коэффициента теплоотдачи можно записать:

$$\operatorname{St} = \frac{C_f}{2} f(\operatorname{Pr}) = 0,0295 \operatorname{Re}_x^{-0,2} f(\operatorname{Pr}). \quad (1.21)$$

Часто используемая в расчетах эмпирическая формула

$$\operatorname{Nu}_x = 0,296 \operatorname{Re}_x^{0,8} \operatorname{Pr}^{0,43}, \quad (1.22)$$

очевидно, связана с (1.21), если иметь в виду, что  $\operatorname{Nu}_x \equiv \operatorname{St} \cdot \operatorname{Re}_x \cdot \operatorname{Pr}$ , и принять  $f(\operatorname{Pr}) = \operatorname{Pr}^{-0,57}$ . Различие числовых множителей (в третьем знаке), конечно, практического значения не имеет. Формулы (1.20)—(1.22) относятся к турбулентному течению в пограничном слое на плоской пластине, они справедливы при  $\operatorname{Re}_x > 3 \cdot 10^5$ . В основной части курса будут рассмотрены более строгие подходы к проблеме теплообмена в турбулентном пограничном слое.

Важно отметить, что при турбулентном течении КТО намного сильнее зависит от массовой скорости, чем при ламинарном:  $\alpha \sim (\rho U_\infty)^{0,8}$ . В то же время влияние молекулярного переноса на теплоотдачу слабее, чем при ламинарном обтекании пластины:  $\alpha \sim \lambda^{0,57}$ ; слабее падение КТО по длине пластины:  $\alpha \sim x^{-0,2}$ .

Задачи на теплообмен при внешнем обтекании чаще относятся к течению газов. Так как для газов число Прандтля обычно несильно отличается от 1, то в этом случае в формуле (1.21) можно приближенно принять  $f(\operatorname{Pr}) \approx 1$ , и появляется возможность производить (грубые) оценки КТО. В практически важном для турбулентного течения диапазоне  $\operatorname{Re}_x = 3 \cdot 10^5 \div 10^8$  значение  $C_f/2$  изменяется от

$2,4 \cdot 10^{-3}$  до  $0,74 \cdot 10^{-3}$ . Таким образом, из (1.21) следует:  $St \approx (0,74 \div \div 2,4) \cdot 10^{-3}$ ; так как  $\alpha = St c_p \rho U_\infty$ , то во многих случаях порядок коэффициента теплоотдачи к потоку газа можно оценить лишь на основе знания скорости течения. Например, для воздуха при атмосферном давлении  $\rho \approx 1,25 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $c_p \approx 1000 \text{ Дж}/\text{кг}$ , так что  $\alpha \approx \approx 2U_\infty \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ , если скорость измеряется в метрах в секунду. Легко убедиться, что эта оценка вполне согласуется с рекомендациями табл. 1.1. При типичной для наземного транспорта скорости  $U_\infty = 25 \text{ м}/\text{с} = 90 \text{ км}/\text{ч}$  коэффициент теплоотдачи  $\alpha \approx 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ . Полезно отметить, что при этой скорости в случае обтекания плоской пластины турбулентное течение устанавливается на малом расстоянии от передней кромки:

$$Re_{x_{kp}} = 3 \cdot 10^5 = U_\infty x_{kp} / v; \text{ при } v \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с} \quad x_{kp} = 0,24 \text{ м.}$$

Ясно, что обтекание поверхности поездов, автомобилей происходит в основном при турбулентном режиме.

Для капельных жидкостей описанный метод оценки КТО не пригоден. К примеру, для воды при  $30^\circ\text{C}$  число  $Pr \approx 5,4$ ,  $f(Pr) = Pr^{-0,57} \approx 0,4$ . Если воспользоваться формулой (1.21), то в этом случае при  $C_f/2 = 2 \cdot 10^{-3}$  число  $St = 8 \cdot 10^{-4}$ . Но КТО даже при небольшой скорости  $U_\infty = 2 \text{ м}/\text{с}$  (скорость хорошего пловца) оказывается весьма высоким:  $\alpha = St c_p \rho U_\infty \approx 6500 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ , если положить  $\rho \approx \approx 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $c_p \approx 4190 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ . Заметим, что при обтекании водой со скоростью 2 м/с плоской пластины при  $T = 30^\circ\text{C}$  переход к турбулентному течению произойдет на расстоянии  $x_{kp} = 0,12 \text{ м}$  от передней кромки.

## 1.4. Качественные закономерности процесса и расчетные формулы для теплообмена при течении в каналах

### 1.4.1. Тепловой баланс, среднемассовая температура

Рассматривается стационарный теплообмен в прямом канале произвольного сечения площадью  $f$ , периметром  $P$ . Массовый расход жидкости  $G$ ,  $\text{кг}/\text{с}$ ; он связан со среднемассовой скоростью жидкости  $\bar{u}$  очевидным соотношением

$$G = \rho \bar{u} f.$$

При течении в каналах обычно выполняется условие несжимаемости ( $\rho = \text{const}$ ), тогда среднемассовая скорость

$$\bar{u} = \frac{1}{f} \int u \, df.$$

К поверхности канала подводится тепловой поток с плотностью  $q$ , в общем случае переменный по длине канала:  $q = q(x)$ . Среднемассовая энталпия жидкости

$$\bar{h} = \frac{1}{G} \int_f \rho u h \, df = \frac{1}{f} \int_f h \frac{u}{\bar{u}} \, df$$

изменяется в результате по длине канала. Как ясно из рис. 1.11, тепловой баланс для бесконечно малого контрольного объема  $dV = f dx$  имеет вид

$$-G\bar{h} + G\left(\bar{h} + \frac{d\bar{h}}{dx} dx\right) - q\Pi \, dx = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{d\bar{h}}{dx} = \frac{q\Pi}{G} = \frac{q\Pi}{\rho\bar{u}f}. \quad (1.23)$$

Это соотношение — наиболее общая форма уравнения теплового баланса для обогреваемого канала при умеренной скорости течения. В качестве характерного размера для канала часто используют гидравлический диаметр  $d_r = 4f/\Pi$ . Если применить этот параметр, то (1.23) примет вид

$$\frac{d\bar{h}}{dx} = \frac{4q}{\rho\bar{u}d_r}. \quad (1.23a)$$

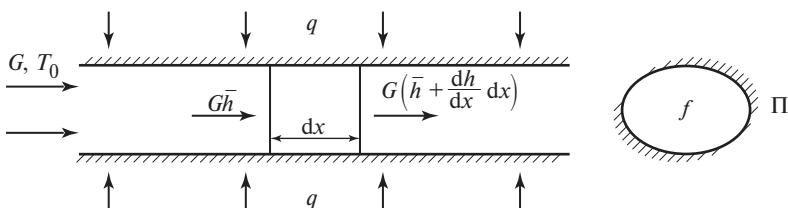


Рис. 1.11. Схема для расчета теплового баланса в обогреваемом канале

Очевидно, для произвольно выбранного сечения из (1.23а) следует:

$$\bar{h}(x) = \bar{h}_0 + \frac{4}{\rho \bar{u} d_r} \int_0^x q \, dx, \quad (1.24)$$

где  $\bar{h}_0$  — среднемассовая энталпия в начальном сечении ( $x = 0$ ).

Уравнения (1.23)–(1.24) справедливы для прямых каналов произвольного сечения при любом законе изменения теплового потока по длине; никаких ограничений не накладывается на характер изменения теплофизических свойств в зависимости от температуры. Практически запись теплового баланса через изменение среднемассовой энталпии потока используется при заметном изменении изобарной теплоемкости с температурой; это особенно актуально в окрестности критической точки вещества, в частности в однофазной сверхкритической области.

Во многих практических важных задачах теплоемкость жидкости по длине канала с достаточной точностью можно считать неизменной. В этом случае  $dh = c_p \, dT$ , уравнения (1.23а) и (1.24) могут быть записаны через среднемассовую температуру:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{4q}{\rho c_p \bar{u} d_r}; \quad (1.25)$$

$$\bar{T}(x) = \bar{T}_0 + \frac{4}{\rho c_p \bar{u} d_r} \int_0^x q \, dx. \quad (1.26)$$

В практических случаях постоянной плотности теплового потока на стенке канала, что типично для лабораторных исследований теплообмена, формулы (1.24) и (1.26) принимают вид:

$$\bar{h}(x) = \bar{h}_0 + \frac{4qx}{\rho u d_r}; \quad (1.24a)$$

$$\bar{T}(x) = \bar{T}_0 + \frac{4qx}{\rho c_p \bar{u} d_r}. \quad (1.26a)$$

В круглой трубе гидравлический диаметр — это внутренний диаметр трубы,  $d_r = d$ . При этом, очевидно,  $f = \pi d^2/4 = \pi r_0^2$ ,  $df = 2\pi r \, dr$  ( $r$  — радиальная координата в цилиндрической системе координат,

$r_0$  — радиус трубы). Определения среднемассовых скорости, энталпии и температуры записываются соответственно:

$$\bar{u} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} u r \, dr = 2 \int_0^1 u R \, dR;$$

$$\bar{h} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} h \frac{u}{\bar{u}} r \, dr = 2 \int_0^1 h \frac{u}{\bar{u}} R \, dR;$$

$$\bar{T} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} T \frac{u}{\bar{u}} r \, dr = 2 \int_0^1 T \frac{u}{\bar{u}} R \, dR.$$

В этих соотношениях используется безразмерный радиус трубы  $R = r/r_0$ .

#### 1.4.2. Изменение закономерностей течения и теплообмена по длине трубы

Если на вход в трубу поступает однородный по скорости и температуре поток жидкости, то в условиях теплообмена по длине трубы неизбежны изменения в распределении этих параметров по сечению. Непосредственно вблизи входа в трубу жидкость находится в условиях, аналогичных тем, которые характерны при формировании пограничного слоя на пластине. В ядре потока температура жидкости та же, что и во входном сечении:  $T = T_0$ ; соответствующая избыточная температура  $\vartheta \equiv |T - T_c| = \vartheta_0$ . Скорость в ядре остается однородной, хотя из-за торможения потока на стенке некоторое возрастание скорости в сравнении со входной скоростью  $U_0$  неизбежно. В целом формирование гидродинамического пограничного слоя (профиля скорости) и температурного пограничного слоя (профиля температуры) идет аналогично тому, что наблюдается при обтекании плоской пластины, по крайней мере, при малых  $x$ , пока толщина соответствующих пограничных слоев много меньше радиуса трубы ( $\delta \ll r_0, \Delta \ll r_0$ ). Схематически развитие профилей скорости и температуры на входном участке круглой трубы было представлено на рис. 1.2.

Ясно, что в обсуждаемых условиях закономерности трения и теплообмена на стенке трубы также должны быть схожими с теми, что

характерны для обтекания плоской изотермической пластины. Во всяком случае, при малых  $x$   $C_f = C_f(x)$ ,  $\alpha = \alpha(x)$ , причем численные значения обоих параметров уменьшаются по длине. Этот тип теплообмена называют теплообменом в *начальном гидродинамическом участке* ( $x \leq l_{\text{н.г.}}$ ). Длина начального гидродинамического участка  $l_{\text{н.г.}}$  — это расстояние от входа в трубу до сечения, в котором устанавливается стабилизированный профиль скорости:  $u_x = u(r)$ ,  $u_r = u_\varphi = 0$ .

В лабораторных экспериментах часто обеспечивают условия, при которых участку теплообмена предшествует изотермический участок гидродинамической стабилизации, так что теплообмен происходит при установленвшемся профиле скорости. При этом от начала участка теплообмена формируется температурный пограничный слой, КТО уменьшается по мере увеличения толщины температурного пограничного слоя  $\Delta$ . Такой вид теплообмена называется теплообменом в *начальном термическом участке* длиной  $l_{\text{н.т.}}$ .

По длине трубы температура жидкости изменяется всегда, когда есть подвод или отвод тепла от стенки. Но профиль температуры в виде

$$\theta = \frac{T - T_c}{\bar{T} - T_c} \quad (1.27)$$

изменяется только в пределах длины  $x \leq l_{\text{н.т.}}$ . При  $x > l_{\text{н.т.}}$

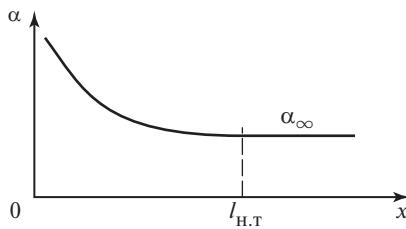
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \quad (1.28)$$

Это означает, что при  $x > l_{\text{н.т.}}$  темп изменения избыточной температуры во всех точках сечения по длине канала одинаков. Условие (1.28) определяет режим стабилизированного теплообмена. В этом режиме  $\theta = \theta(R)$ . Поскольку согласно (1.4) коэффициент теплоотдачи на внутренней поверхности трубы

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_c - \bar{T}} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \frac{\lambda}{r_0} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=1},$$

ясно, что при  $x > l_{\text{н.т.}}$  коэффициент теплоотдачи  $\alpha = \alpha_\infty = \text{const.}$

Конкретный закон изменения  $\alpha$  на начальном участке зависит от режима течения и от числа  $\text{Pr}$ , но качественно во всех случаях КТО от входа в трубу уменьшается практически всегда (исключение составляет достаточно сложный случай относительно низких турбулентных чисел  $\text{Re}$ , когда на начальном участке наблюдается немонотонность:



**Рис. 1.12. Типичный характер изменения коэффициента теплоотдачи по длине канала**

падение  $\alpha$ , затем подъем и потом уже выход на  $\alpha_\infty$ ). Типичная картина изменения КТО по длине трубы представлена на рис. 1.12. Качественно падение КТО по длине начального термического участка связано с увеличением толщины температурного пограничного слоя  $\Delta$ . Если участок теплообмена начинается от входа в трубу, так что формирование профилей температуры и скорости идет одновременно (теплообмен на начальном гидродинамическом участке), то на падение  $\alpha$  влияет дополнительно уменьшение по длине канала радиальной компоненты скорости  $u_r$ .

Обычно при теоретическом анализе за длину начального термического участка принимают  $x = l_{н.т}$ , при которой  $\alpha/\alpha_\infty = 1,01$ . В опытных исследованиях погрешность измерения КТО 1 % практически не достижима; обычно длину начального участка в экспериментах определяют из условия  $x = l_{н.т}$ , если  $\alpha/\alpha_\infty = 1,05$ .

### 1.4.3. Теплообмен при ламинарном течении в трубах

При ламинарном течении практическое значение начального участка существенно; обычно для вязких жидкостей  $l_{н.т}$  больше, чем длина типичных теплообменников. Как обсуждалось выше, на малых расстояниях от входа в канал ( $\delta \ll r_0$ ) течение и теплообмен в трубе должны быть аналогичны процессам, характерным для обтекания пластины. При этом приближенно вместо скорости невозмущенного потока можно использовать среднюю скорость жидкости  $\bar{u} \approx U_0$ ;

температура в ядре потока  $T = T_0 \approx \bar{T}$ . Эти приближения оправданы, пока справедливы сильные неравенства:  $\delta \ll r_0$ ,  $\Delta \ll r_0$ .

Тогда для описания теплообмена в канале можно применять уравнения (1.15) и (1.16) для граничных условий  $T_c = \text{const}$  и  $q = \text{const}$  соответственно. Однако надо иметь в виду, что для труб более естественно использовать в числах подобия не длину участка теплообмена, а диаметр трубы. Очевидны следующие соотношения:

$$\text{Nu} \equiv \frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{\alpha x}{\lambda} \frac{d}{x} = \text{Nu}_x \frac{d}{x};$$

$$\text{Re} \equiv \frac{\bar{u}d}{v} = \frac{\bar{u}x}{v} \frac{d}{x} = \text{Re}_x \frac{d}{x}.$$

С учетом этих тождеств уравнение (1.15) может быть представлено как

$$\text{Nu} = 0,332 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3} (x/d)^{-1/2}. \quad (1.29)$$

После завершения гидродинамической стабилизации вязкость жидкости не должна влиять на перенос энергии (тепла). Поэтому в условиях установившегося профиля скорости, т.е. на начальном термическом участке, числа Рейнольдса и Прандтля должны входить в расчетное уравнение в такой комбинации, чтобы вязкость исчезла из числа влияющих на теплообмен параметров. Очевидно, этому требованию удовлетворяет произведение  $\text{Re} \cdot \text{Pr} = \bar{u}d/a \equiv \text{Pe}$ ; новое число подобия — число Пекле (Peclet) — широко используется для описания теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах.

На участке гидродинамически стабилизированного течения ( $x > l_{\text{н.р.}}$ ) числом подобия, определяющим теплообмен, является комбинация числа Пекле и относительной длины канала  $x/d$  — число Гретца (Graetz)  $Gz = \text{Pe}(d/x)$ . В отечественной литературе чаще используют величину, обратную числу Гретца, — приведенную длину  $\frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} = \frac{1}{Gz}$ . С использованием этого параметра формула (1.29) записывается как

$$\text{Nu} = 0,332 \left( \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} \right)^{-1/2} \text{Pr}^{-1/6}. \quad (1.29a)$$

Уравнения (1.29), (1.29a) и аналогичное им уравнение для условия  $q = \text{const}$  (с числовым множителем 0,47) пригодны лишь при очень малых расстояниях от входа в трубу, строго говоря, лишь при  $(x/d)(\text{Re})^{-1} \leq 1 \cdot 10^{-3}$ . Эти уравнения важны для понимания физиче-

ских закономерностей процесса; более универсальные соотношения для расчета КТО в начальном гидродинамическом участке круглой трубы даются в гл. 6.

В условиях начального термического участка зависимости для теплообмена выглядят проще. При  $T_c = \text{const}$

$$\text{Nu} = 1,03 \text{Gz}^{1/3} = 1,03 \left( \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} \right)^{-1/3}. \quad (1.30)$$

При  $q_c = \text{const}$

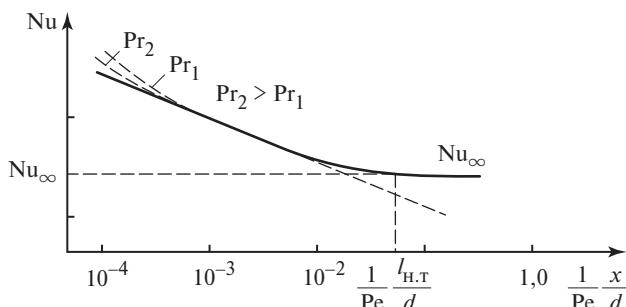
$$\text{Nu} = 1,31 \text{Gz}^{1/3} = 1,31 \left( \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} \right)^{-1/3}. \quad (1.30a)$$

Эти формулы справедливы соответственно при  $x/d \leq 0,01\text{Pe}$  и  $x/d \leq 0,001\text{Pe}$ . Как будет показано в гл. 6, они представляют собой степенные аппроксимации строгих решений. Длина начального термического участка, определяемого на основе этих решений по условию  $\text{Nu}/\text{Nu}_\infty = 1,01$  при  $x = l_{\text{н.т}}$  для двух видов граничных условий, равна соответственно:

$$l_{\text{н.т}} = 0,055d \cdot \text{Pe} \quad \text{при } T_c = \text{const};$$

$$l_{\text{н.т}} = 0,07d \cdot \text{Pe} \quad \text{при } q = \text{const}.$$

Ясно, что (1.30) и (1.30a) описывают теплоотдачу лишь на части начального термического участка. На рис. 1.13 качественно показано, как соотносятся точное аналитическое решение и степенная аппрок-



**Рис. 1.13. Качественная картина изменения безразмерного коэффициента теплоотдачи по длине трубы при ламинарном течении**

симация (1.30) для условия  $T_c = \text{const}$ . Во-первых, важно отметить, что при  $x \geq l_{\text{н.т}}$   $\text{Nu} = \text{Nu}_\infty = \text{const}$ . Результат выглядит неожиданным, так как означает независимость интенсивности стабилизированного теплообмена при ламинарном течении от числа Рейнольдса (или Пекле), а значит, и от абсолютного значения скорости жидкости в широком диапазоне изменения этих параметров. Тем не менее, указанный результат является строгим. Он, естественно, подтвержден и экспериментальными исследованиями, хотя в данном случае такое подтверждение не является необходимым, так как при соблюдении условий, для которых получено теоретическое решение, нет никаких оснований ставить его под сомнение.

Во-вторых, на основании рис. 1.13 можно заключить, что в приближенных расчетах можно применять формулы (1.30) и (1.30a) для всей длины начального термического участка, если помнить, что действительный КТО не может быть меньше, чем  $\alpha_\infty$ . Это означает, что при использовании указанных формул расчетное число  $\text{Nu}_{\text{расч}}$  должно приниматься равным  $\text{Nu}_\infty$ , если  $\text{Nu}_{\text{расч}} < \text{Nu}_\infty$ . В этом случае действительная зависимость числа Nu от приведенной длины, изображенная на рис. 1.13 сплошной гладкой линией, приближенно заменяется ломаной линией, состоящей из отрезка, определяемого формулой (1.30) [или (1.30a)], и горизонтальной прямой  $\text{Nu} = \text{Nu}_\infty$ . Погрешность такого приближения не превышает 15 %.

Значения безразмерного КТО при стабилизированном теплообмене — это просто числа:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } T_c = \text{const} \quad \text{Nu}_\infty \approx 3,657; \\ \text{при } q = \text{const} \quad \text{Nu}_\infty = 48/11 \approx 4,364. \end{array} \right\} \quad (1.31)$$

Эти результаты позволяют наглядно показать преимущества каналов малого диаметра. Для условий  $q = \text{const}$  коэффициент  $\alpha_\infty = 48\lambda/(11d)$ ; при течении воды в канале диаметром 200 мкм [ $\lambda \approx 0,65 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ] это дает  $\alpha_\infty \approx 14 \cdot 10^3 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ , что в «обычных» каналах можно достичнуть только в условиях развитого турбулентного течения, причем при высоких скоростях течения. Стоит отметить, что в практических условиях при ламинарном течении стабилизированный теплообмен достигается при больших значениях относительной длины  $x/d$ , при этом в каналах субмиллиметрового диаметра стабилизация может установиться в пределах реальной длины тепло-

обменного канала. Начальный участок такого канала характеризуется еще большим уровнем КТО.

Из уравнений (1.30) и (1.30а) ясно, что средний коэффициент теплоотдачи всегда выше, чем локальный в конце рассматриваемого участка теплообмена. Поскольку  $\alpha(x) \sim x^{-1/3}$ , из этих формул следует, что средний КТО на длине  $l$

$$\bar{\alpha}_l = \frac{3}{2} \alpha_{x=l}.$$

В частности, при  $T_c = \text{const}$  из формулы (1.30) следует

$$\overline{\text{Nu}} \equiv \frac{\bar{\alpha}d}{\lambda} = 1,55 \left( \frac{1}{\text{Pe}} \frac{l}{d} \right)^{-1/3}.$$

Наконец, отметим, что в пределах начального гидродинамического участка согласно уравнению (1.29а) интенсивность теплообмена падает по закону

$$\alpha(x) \sim x^{-1/2},$$

но при этом КТО остается выше, чем на начальном термическом участке. На рис. 1.13 пунктирные линии в верхней части отражают зависимость (1.29а); из нее следует также, что переход на условия теплообмена при гидродинамически стабилизированном течении зависит от числа Прандтля: чем больше Pr, тем быстрее (в координатах рис. 1.13) наступает режим теплообмена в условиях начального термического участка.

#### 1.4.4. Теплообмен при турбулентном течении в круглой трубе

При турбулентном течении из-за высокой интенсивности турбулентного переноса импульса и энергии длина начальных участков  $l_{n,g}$  и  $l_{n,t}$  намного меньше, чем при ламинарном. Когда жидкость поступает в трубу из приемной камеры теплообменника, на входной острой кромке трубы поток претерпевает отрыв от обтекаемой поверхности, возникают сильные возмущения, что быстро ведет к установлению развитого турбулентного течения. Обычно в технических устройствах при турбулентном течении длина начальных участков  $l_{n,g} \approx l_{n,t}$ , и эта длина составляет не более 20 калибров (т.е. внутренних диаметров канала). По этим причинам главное внимание при турбулентном течении уделяется стабилизированному теплообмену.

Из-за интенсивного переноса импульса и энергии в турбулентном потоке в ядре канала скорость и температура достаточно однородны. Применительно к скорости говорят о «заполненном профиле». Принципиальное различие стабилизованных профилей скорости при ламинарном и турбулентном режимах течения в круглой трубе отражает отношение среднемассовой скорости к скорости на оси. Если при  $Re \leq 2300$   $\bar{u}/u(0) = 0,5$ , то при  $Re = 10^4$  это отношение составляет 0,83, а при увеличении  $Re$  становится еще больше.

Основное изменение скорости и температуры происходит в довольно тонком пристенном слое. При анализе переноса импульса и энергии в турбулентном потоке вблизи твердой поверхности достаточно эффективно используется модель пристеночной турбулентной области. В этой области постулируется постоянство касательных напряжений по толщине:  $\tau \approx \tau_c$ ; это допущение достаточно точно выполняется в граничном слое до  $y \leq 0,2\delta_t$ , где  $\delta_t$  — толщина турбулентного граничного слоя. При стабилизированном турбулентном течении в трубах касательное напряжение линейно зависит от радиальной координаты  $r$ ; здесь можно говорить только о приближенном выполнении условия  $\tau = \text{const}$  на расстояниях от стенки  $y \leq 0,2r_0$ . На внешней границе пристеночной турбулентной области в трубе скорость примерно равна среднемассовой  $\bar{u}$ .

При оговоренных допущениях для расчета КТО при турбулентном течении в трубах успешно используется рассмотренная в п. 1.3.1 аналогия переноса импульса и энергии, выраженная в общей форме уравнением (1.19). Для труб обычно применяют другой в сравнении с задачами внешнего обтекания коэффициент трения. Вместо  $C_f$  (в зарубежной литературе его называют коэффициентом трения Фаннинга) используется вчетверо большая величина  $\xi$ , следующая из закона Дарси—Вейсбаха для сопротивления трения в трубах. При гидродинамически стабилизированном течении в трубе справедливы следующие соотношения:

$$\frac{dp}{dx} = \text{const} = \frac{4\tau_c}{d}; \quad \Delta p = \frac{l}{d} \frac{\xi}{2} \rho \bar{u}^2 = \frac{4\tau_c l}{d}.$$

Учитывая определение коэффициента трения  $C_f$  (1.12), получаем  $\xi = 4C_f$ .

Для расчета коэффициента гидравлического сопротивления  $\xi$  в трубах существуют степенные зависимости от числа Рейнольдса

(формула Блазиуса, «закон 1/5» и др.). Универсальная формула для гидравлически гладких труб при  $\text{Re} \geq 2300$  предложена Филоненко:

$$\xi = (1,82 \lg \text{Re} - 1,64)^{-2}. \quad (1.32)$$

В научном коллективе, которым руководил Б.С. Петухов (1912—1984), начиная с публикации 1958 г. (совместной с В.В. Кирилловым), проводился поиск наиболее надежного расчетного уравнения для стабилизированного теплообмена в круглых трубах, основанного на использовании аналогии Рейнольдса для переноса импульса и энергии. Окончательный вариант этого уравнения, полученный в 1970-е годы, имеет вид

$$\text{Nu} = \frac{\text{Re} \text{Pr} \frac{\xi}{8}}{1 + \frac{900}{\text{Re}} + 12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8}} \left( \text{Pr}^{2/3} - 1 \right)}. \quad (1.33)$$

Имея в виду тождество  $\text{Nu} \equiv \text{St}\text{Re}\text{Pr}$ , входящую в уравнение (1.19) функцию числа Прандтля можно записать как

$$f(\text{Pr}) = \frac{1}{1 + \frac{900}{\text{Re}} + 12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8}} \left( \text{Pr}^{2/3} - 1 \right)}.$$

Уравнение (1.33) — наиболее физически обоснованное из множества соотношений, предложенных за последние 80 лет для турбулентного теплообмена в трубах. Оно справедливо в диапазоне  $\text{Re} = 5 \cdot 10^3 \div 5 \cdot 10^6$ ,  $\text{Pr} = 0,1 \div 200$ . Многие из известных степенных корреляций, как это будет показано в гл. 6, могут быть получены как частные случаи из (1.33).

В частности, при высоких значениях  $\text{Re}$  ( $4 \cdot 10^4 \div 2 \cdot 10^5$ ) для коэффициента трения справедлив степенной «закон 1/5»:  $\xi = 0,184/\text{Re}^{0,2}$ . В этом случае при  $\text{Pr} = 1$  из (1.33) следует

$$\text{Nu} = 0,023 \text{Re}^{0,8}.$$

В 1930-е годы в США на основе экспериментов с водой и воздухом ( $\text{Pr} \approx 0,7 \div 7$ ) была получена эмпирическая формула

$$\text{Nu} = 0,023 \text{Re}^{0,8} \text{Pr}^{0,4}, \quad (1.34)$$

широко известная по зарубежной литературе как формула Диттуса—Белтера. В этой формуле не только зависимость от числа Рейнольдса,

но и числовой множитель совпадают с выражением, полученным на основе уравнения (1.33). Формула (1.34) находится в согласии с результатами измерений в указанном выше диапазоне изменения чисел  $\text{Pr}$  и  $\text{Re} = 5 \cdot 10^3 \div 1 \cdot 10^5$ . При  $\text{Pr} < 0,7$  и  $\text{Pr} > 10$  формула Диттуса—Белтера обнаруживает значительные расхождения с опытными значениями КТО.

В экспериментах выявлено, что с ростом числа  $\text{Pr}$  интенсивность теплоотдачи более сильно зависит от скорости течения жидкости; эмпирические корреляции опытных данных дают зависимость вида  $\text{Nu} \sim \text{Re}^{0,9}$  при  $\text{Pr} > 20$ . При  $\text{Pr} < 0,7$   $\text{Nu} \sim \text{Re}^{0,8}$ , т.е. влияние скорости на теплообмен такое же, как предсказывает формула (1.34), но степень при числе  $\text{Pr}$  должна быть заметно выше, чем в (1.34), чтобы добиться согласия с опытными данными. Формула Б.С. Петухова с сотрудниками (1.33) верно отражает обе обсуждаемые тенденции, установленные в опытных исследованиях.

## Контрольные вопросы к главе 1

1. Чем различаются внешние и внутренние задачи конвективного теплообмена?
2. Почему на качественные закономерности конвективного теплообмена влияет не только режим течения, но и абсолютное значение скорости потока (в газах)?
3. Как связаны молекулярный и конвективный потоки энергии в случае стабилизированного теплообмена в канале?
4. Что является непосредственной целью решения задач конвективного теплообмена?
5. Как определяется коэффициент теплоотдачи, если поле температур найдено аналитически или численно?
6. Что такое толщина эквивалентной пленки? В какой мере эта величина определяет физический смысл коэффициента теплоотдачи (КТО)?
7. В каком смысле КТО — гидродинамический параметр? В каких процессах гидродинамическая суть КТО проявляется с наибольшей очевидностью?
8. Почему в процессах пузырькового и переходного кипения КТО объективно не имеет физического содержания?
9. Какие закономерности формирования динамического пограничного слоя на плоской пластине установлены Блазиусом?
10. Как влияет на толщину пограничного слоя кинематическая вязкость жидкости? Какой коэффициент переноса играет в процессах теплообмена роль, аналогичную роли кинематической вязкости при переносе импульса?
11. Каков физический смысл числа Прандтля? Чем объясняется сильное различие численного значения  $\text{Pr}$  у газов, жидких металлов и неметаллических жидкостей?
12. Почему число Прандтля сильно изменяется с изменением температуры у капельных жидкостей и почти не зависит от температуры у газов?

13. Как и почему изменяется КТО по длине пластины при ламинарном и турбулентном режимах течения в пограничном слое?
14. Как определены и как взаимосвязаны два безразмерных КТО: число Стантона и число Нуссельта?
15. Как выражается аналогия переноса импульса и энергии в пограничном слое? Каким образом используется эта аналогия при построении расчетных уравнений для теплообмена в турбулентном пограничном слое?
16. Какое содержание имеет уравнение теплового баланса для теплообмена в канале?
17. Как рассчитываются среднемассовые значения скорости, энтальпии и температуры при течении в канале? Как определить эти параметры в эксперименте?
18. Как изменяются закономерности течения и теплообмена по длине круглой трубы?
19. На чем основано предположение об аналогии течения и теплообмена на малых расстояниях от входа в трубу и при обтекании плоской пластины? Как эта аналогия используется практически?
20. Какие числа подобия используются для описания теплообмена в начальном участке круглой трубы при ламинарном течении?
21. От каких параметров зависит КТО в условиях стабилизированного теплообмена при ламинарном течении в круглой трубе?
22. Как строится расчетное уравнение для стабилизированного теплообмена при турбулентном течении в круглой трубе?
23. Как влияет на КТО при турбулентном течении в трубе массовая скорость потока?

## Глава 2

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОМАССООБМЕНА

---

## 2.1. Общая форма законов сохранения

### 2.1.1. Предварительные замечания

Математическое описание — это система дифференциальных уравнений сохранения массы, импульса, энергии; в случае массообмена (дополнительно) — массы компонента в смеси; эта система должна быть дополнена условиями однозначности. При однофазном тепломассообмене условия однозначности включают в себя сведения о геометрической форме области протекания процесса, свойствах жидкости, граничные и начальные условия.

В механике сплошных сред принципиальное значение имеет метод описания процессов. Пусть фиксирована некоторая декартова система отсчета  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , или  $\{x_k\}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . В пространстве  $\{x_k\}$  происходит движение сплошной среды.

Один из возможных методов анализа и описания заключается в том, что в пространстве  $\{x_k\}$  фиксируется некоторый контрольный объем  $V$  с площадью поверхности  $F$ . Этот объем неподвижен (в системе отсчета  $\{x_k\}$ ) и является лишь воображаемым контрольным элементом пространства. Среда свободно проходит через его границы (рис. 2.1). Такой подход называют описанием «с точки зрения Эйлера» [35].

Другой метод принадлежит Лагранжу. В той же системе отсчета  $\{x_k\}$  можно выделить в качестве объекта наблюдения определенную индивидуальную порцию материи (вещества). Эта контрольная масса вещества движется относительно системы отсчета  $\{x_k\}$ . В разные моменты ее объем может быть, в общем случае, разным; ее граница перемещается в пространстве и деформируется во времени. Важно отметить, что эта граница индивидуальной порции вещества макроскопически непроницаема. Условная графическая интерпретация такого подхода дается на рис. 2.2, где для двух моментов времени показаны пространственное расположение и форма индивидуальной порции вещества, рассматриваемой в качестве объекта анализа. Такой подход называют описанием «с точки зрения Лагранжа».

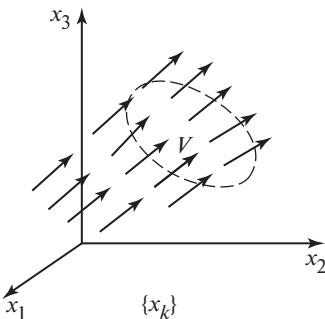


Рис. 2.1. Эйлеров контрольный объем в системе координат  $\{x_k\}$

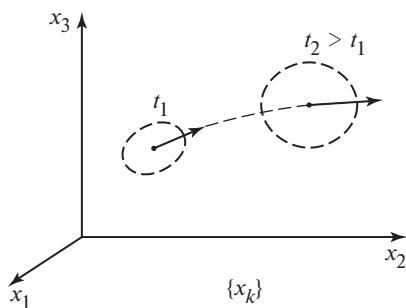


Рис. 2.2. Лагранжева контрольная масса в системе координат  $\{x_k\}$

Различие подходов, более кратко, в том, что:

эйлеров контрольный объем проницаем для вещества и неподвижен в пространстве  $\{x_k\}$ ;

лагранжева контрольная масса вещества неизменна, ее поверхность макроскопически непроницаема, она перемещается в пространстве  $\{x_k\}$ .

В настоящем курсе будет отдаваться предпочтение эйлерову методу описания как практически более рациональному.

Математический аппарат, используемый в настоящем издании, основан на стандартном вузовском курсе высшей математики. Некоторая специфика состоит в широком применении векторных величин и соответствующих векторных дифференциальных операторов, а также в использовании в различных действиях с такими величинами тензорной формы записи и метода «немого суммирования», который был предложен А. Эйнштейном. Существо метода будет ясно из нижеследующего. Векторный дифференциальный оператор  $\nabla$  (набла) имеет смысл вектора с проекциями (в системе координат  $\{x_k\}$ ):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{i}_3 = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{i}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{i}_k,$$

где  $i_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) — единичные ортогональные векторы.

В последнем равенстве использован метод немого суммирования по дважды повторяющемуся индексу. Применение этого метода для записи в проекциях произвольного вектора  $A$  дает

$$A = A_k i_k,$$

т.е. немое суммирование позволяет опускать знак суммирования и таким образом заметно упрощает форму записи, а во многих случаях — и математические выкладки.

В применении к вектору  $\mathbf{A}$  оператор  $\nabla$  можно представить как скалярное произведение:

$$(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{div} \mathbf{A} = \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{i}_k \cdot A_m \mathbf{i}_m \right) = \frac{\partial A_k}{\partial x_k}.$$

Здесь использовано то обстоятельство, что произведение

$$(\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_m) \equiv \delta_{km} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = m; \\ 0 & \text{при } k \neq m, \end{cases}$$

где  $\delta_{km}$  — символ Кронекера (единичный тензор второго ранга).

Заметим, что повторяющиеся индексы можно обозначать любой буквой, т.е.

$$A_k \mathbf{i}_k \equiv A_m \mathbf{i}_m \equiv A_n \mathbf{i}_n \equiv \dots$$

Применение  $\nabla$  к скалярной функции дает градиент этой функции:

$$\nabla \varphi \equiv \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \mathbf{i}_k.$$

Оператор Лапласа  $\nabla^2 \varphi \equiv \Delta \varphi$  можно представить как

$$\nabla^2 \varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = (\nabla \cdot \nabla \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \cdot \partial x_k}.$$

И, наконец, укажем, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A},$$

при этом произвольная проекция вектора  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  выражается через единичный тензор Леви—Чивита  $\epsilon_{ijk}$  как

$$\operatorname{rot}_i \mathbf{A} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k.$$

(Необходимые сведения о тензорном анализе можно получить, например, в [35].)

### 2.1.2. Обоснование общей формы законов сохранения

Содержание законов сохранения массы, импульса и энергии при эйлеровом методе описания имеет идентичный характер. Общая формулировка законов сохранения:

*полное изменение за единицу времени количества некоторого свойства  $A$  (массы, импульса, энергии) внутри эйлерова контрольного объема  $V$  равно суммарному притоку этого свойства через поверхность  $F$  плюс возможное объемное возникновение свойства  $A$  внутри объема  $V$ .*

Менее строго это значит, что изменение свойства  $A$  определяется его внешним притоком в контрольный объем и возможным внутренним возникновением в объеме. Свойство  $A$  при этом рассматривается как удельная (на единицу объема) аддитивная величина.

Аналитически эта формулировка выражается так:

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV = - \int_F J_k dF_k + \int_V \dot{N}_A dV. \quad (2.1)$$

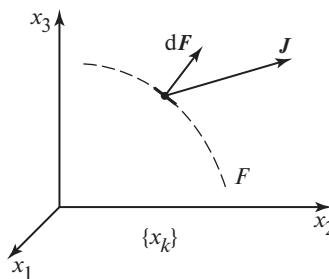
$$\left( \text{При фиксированном значении объема } \frac{d}{dt} \int_V A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV. \right)$$

Слева в (2.1) стоит величина, определяющая изменение  $A$  внутри объема  $V$  в единицу времени. Величина  $\dot{N}_A$  — это скорость объемного возникновения  $A$  в единице объема, так что второе слагаемое справа определяет внутреннее производство  $A$  в контрольном объеме.

Первый интеграл правой части характеризует суммарный приток свойства  $A$  через поверхность  $F$ . Действительно, произведение  $J_k dF_k$  есть индексная форма записи (с использованием суммирования по дважды повторяющемуся индексу) скалярного произведения векторов ( $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{F}$ ).

Вектор  $\mathbf{J}$  характеризует плотность потока свойства  $A$ ;  $d\mathbf{F}$  — это направленный элемент поверхности, т.е. вектор с модулем, равным площади  $dF$ , и положительным направлением, совпадающим с внешней нормалью к поверхности (рис. 2.3).

Таким образом, произведение  $J_k dF_k = (\mathbf{J} \cdot d\mathbf{F})$  есть «убыль» свойства  $A$  из объема  $V$  через площадку  $dF$ , а взятый со знаком «минус»



**Рис. 2.3. Схема, поясняющая смысл произведения  $J_k \, dF_k$  в уравнении (2.1)**

интеграл от этого произведения по всей поверхности  $F$  соответствует внешнему притоку свойства  $A$  в контрольный объем.

Соотношение (2.1) будем называть общей формулировкой законов сохранения в интегральном виде, или интегральным уравнением сохранения в общей форме.

Если внутри контрольного объема среда однородна (т.е. весь объем находится в пределах одной фазы), то из соотношения (2.1) можно получить общее уравнение законов сохранения в дифференциальной форме.

В сплошной однородной среде все характеристики меняются непрерывным образом. В частности, плотности потока  $J_k$  будут непрерывными и дифференцируемыми функциями координат. При выполнении последнего условия справедлива формула Остроградского—Гаусса (преобразующая интеграл по объему в интеграл по ограничивающей этот объем поверхности и обратно):

$$\int_F J_k \, dF_k = \int_V \frac{\partial J_k}{\partial x_k} \, dV.$$

Для запоминания можно пользоваться основанным на размерности правилом  $dF_k \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} dV$ .

Используя формулу Остроградского—Гаусса и учитывая произвольность объема  $V$  (в частности, его конечность), получаем из (2.1)

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{\partial J_k}{\partial x_k} + \dot{N}_A. \quad (2.1a)$$

Это соотношение определяет общую формулировку законов сохранения в дифференциальном виде, или дифференциальное уравнение сохранения в общей форме. Из самого метода вывода (2.1а) ясно, что это соотношение и каждое его слагаемое имеют такой же смысл, что и исходное уравнение (2.1). Различие лишь в том, что в (2.1а) все величины относятся к бесконечно малому эйлерову контрольному объему (к объему «элемента жидкости» [5]). В частности,  $-\partial J_k / \partial x_k$  представляет суммарное поступление свойства  $A$  через поверхность внутрь бесконечно малого эйлерова объема.

Важно иметь в виду, что уравнение (2.1) имеет более общую область применения. Оно правомерно и тогда, когда внутри эйлерова объема находятся две фазы (т. е. среда неоднородна). Тогда интегралы по объему разбиваются на части, охватывающие области отдельных фаз, интеграл по общей для всего контрольного объема поверхности подразделяется на две части, отвечающие тоже двум фазам. Внутри контрольного объема располагается в рассматриваемом случае также участок межфазной поверхности. На нем возможно возникновение свойства  $A$ , которое учитывается в последнем слагаемом (2.1), но потоки свойства на внутренних поверхностях раздела взаимно скомпенсированы.

Общая формулировка законов сохранения в виде уравнений (2.1) или (2.1а) позволяет достаточно просто получать соотношения для законов сохранения массы, импульса, энергии. При этом требуется лишь расшифровка величин:  $A$ ,  $J_k$ ,  $\dot{N}_A$ . Применительно к однофазным средам, рассматриваемым в первой части книги, естественно, используются дифференциальные уравнения сохранения.

## 2.2. Закон сохранения массы

Для записи закона сохранения массы нужно положить:

$A = \rho$  — плотность (масса вещества в единице объема);

$J = \rho u$  — плотность потока массы (массовая скорость) вследствие макроскопического движения среды;

$u$  — макроскопическая скорость среды;

$\dot{N}_A = 0$  — масса не может возникать или исчезать (рассматривается нерелятивистская механика).

Тогда из (2.1) и (2.1a) имеем:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_F \rho u_k dF_k = 0 \quad (2.2)$$

— интегральное уравнение сохранения массы;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0 \quad (2.2a)$$

— дифференциальное уравнение сохранения массы (уравнение неразрывности).

*Следствие.* Закон сохранения массы позволяет получить полезное для последующих преобразований соотношение. Вспомним сначала понятие субстанциональной производной. Это понятие соответствует методу описания движения сплошной среды по Лагранжу. Пусть индивидуальная дифференциально малая масса вещества в момент времени  $t$  находится вокруг точки  $x_k(t)$  пространства. В следующие моменты времени контрольная масса занимает другие области пространства, причем  $x_k(t)$  могут всюду рассматриваться как координаты контрольной массы. Если состояние вещества характеризуется величиной  $B$  (плотность, внутренняя энергия, температура и т.д.), то для лагранжевой контрольной массы

$$B = B[t, x_k(t)].$$

Полная («субстанциональная», «индивидуальная») производная от  $B$  по времени по правилу дифференцирования сложной функции запишется

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t}.$$

Очевидно, что  $\frac{\partial x_k}{\partial t} = u_k$  —  $k$ -я проекция вектора скорости.

Таким образом, имеем

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + u_k \frac{\partial B}{\partial x_k},$$

где первое слагаемое в правой части — это локальная производная по времени, а второе — конвективная производная.

Поскольку в настоящем учебном пособии предпочтение будет отдаваться эйлерову методу описания, то субстанциональная произ-

водная будет использоваться в основном в промежуточных выкладках. Пусть, в частности,  $B$  — некоторое удельное (на единицу массы) свойство среды. Тогда применение для этого свойства общей формулировки законов сохранения в форме (2.1а) во многих случаях приведет к появлению выражения вида

$$\frac{\partial(\rho B)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k B)}{\partial x_k}.$$

Элементарные преобразования и использование закона сохранения массы в форме (2.2а) дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho B)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k B)}{\partial x_k} &= \rho \left[ \frac{\partial B}{\partial t} + u_k \frac{\partial B}{\partial x_k} \right] + \\ &+ B \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} \right] = \rho \frac{dB}{dt}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если, в частности,  $B$  — удельный объем среды, т. е.

$$B = v \equiv 1/\rho,$$

то из (2.3) следует

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dt}.$$

Полученное соотношение позволяет дать определенное физическое толкование дивергенции скорости: дивергенция скорости представляет собой относительное субстанциональное изменение удельного объема среды.

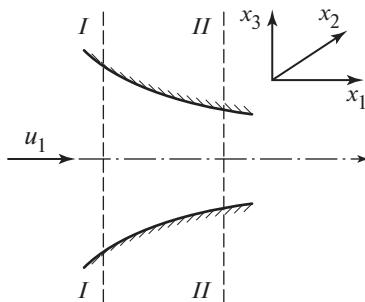
Используя субстанциональную производную, уравнение (2.2а) можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \quad (2.2б)$$

Для несжимаемой среды ( $\rho = \text{const}$ ) из уравнений (2.2) и (2.2а) имеем

$$\int_F u_k dF_k = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0.$$

Последнее соотношение — это известное дифференциальное уравнение неразрывности (сплошности) несжимаемой среды.



**Рис. 2.4. Схема одномерного течения в канале переменного сечения**

**Пример.** Применим соотношение (2.2) для случая стационарного одномерного течения среды через канал переменного сечения (рис. 2.4). Выделим два сечения I—I и II—II площадью  $F_I$  и  $F_{II}$ .

Вследствие предположения о стационарности первое слагаемое в (2.2) равно нулю. Второе сводится к величине

$$-\int_F \rho u_k dF_k = -\left( \int_{F_I} \rho u_k dF_k + \int_{F_{II}} \rho u_k dF_k \right) = (\rho u F)_I - (\rho u F)_{II} = 0.$$

Итак, в рассматриваемом случае имеем

$$\rho u F = \text{const},$$

где  $\text{const} = G$  — массовый расход вещества. (Конечно, это соотношение можно было записать и без вывода в силу его очевидности.)

## 2.3. Закон сохранения импульса

### 2.3.1. Вывод в общей форме

Импульс единицы объема сплошной среды определяется как  $\rho \mathbf{u}$ , а вектор скорости  $\mathbf{u}$  можно толковать как импульс единицы массы. Импульс единицы объема  $\rho \mathbf{u}$  есть вектор. Векторное уравнение баланса импульса можно разложить на три уравнения баланса проекций импульса на оси  $x_k$ . Рассмотрим проекцию импульса на одну из осей —  $\rho u_l$ . Величина  $\rho u_l$  — скаляр. К ней могут быть применены общие соотношения закона сохранения (2.1) и (2.1a). Здесь следует положить:

$A = \rho u_l$  —  $l$ -проекция (проекция на ось  $l$ ) импульса единицы объема;

$J_k = \Pi_{kl}$  — тензор плотности потока импульса (подробнее см. ниже);

$\dot{N}_A = \rho g_l$  — возникновение (производство) импульса вследствие действия внешнего поля массовых сил с ускорением  $\mathbf{g}$ .

В настоящем издании под массовыми силами мы будем понимать только силы гравитации (так что в невесомости  $\dot{N}_A = 0$ ). В общем случае в ускорение  $\mathbf{g}$  могут давать вклад массовые силы другой природы (центробежные, электрические, магнитные).

Итак, имеем:

$$\int_V \frac{\partial(\rho u_l)}{\partial t} dV = - \int_F \Pi_{kl} dF_k + \int_V \rho g_l dV \quad (2.4)$$

— интегральное уравнение закона сохранения импульса;

$$\frac{\partial(\rho u_l)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{kl}}{\partial x_k} = \rho g_l \quad (2.4a)$$

— дифференциальное уравнение сохранения импульса.

Пояснений требует величина  $\Pi_{kl}$ . Ее смысл ясен из рис. 2.5. Если вектор плотности потока импульса в проекции на ось  $l$  в некоторой точке поверхности  $F$  определяется величиной  $\Pi_l$ , то перенос  $l$ -й проекции импульса через бесконечно малую площадку  $dF$  в окрестности рассматриваемой точки выражается скалярным произведением

$$\Pi_l dF = \Pi_{kl} dF_k$$

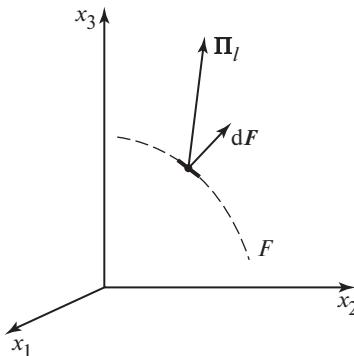


Рис. 2.5. Схема переноса  $l$ -проекции импульса через элементарную пло-щадку  $dF$

Тензор  $\Pi_{kl}$  может рассматриваться как  $k$ -я проекция вектора  $\Pi_l$ . Поскольку для любой другой проекции импульса, например  $\rho u_m$ , вектор плотности потока  $\Pi_m$  отличен от  $\Pi_l$ , т.е.  $\Pi_{km} \neq \Pi_{kl}$ , то становится понятной неизбежность использования тензорных величин в уравнении сохранения импульса. В рассматриваемом случае первый индекс ( $k$ ) у тензора  $\Pi_{kl}$  определяет направление нормали к площадке, а второй ( $l$ ) показывает, какая из проекций импульса через эту площадку переносится.

### 2.3.2. Тензоры плотности потока импульса, давлений и вязких напряжений

В сплошной среде перенос импульса через поверхность эйлерова контрольного объема осуществляется посредством конвективного и молекулярного механизмов. В соответствии с этим тензор плотности потока импульса  $\Pi_{kl}$  подразделяется на две части:

$$\Pi_{kl} = \rho u_k u_l + P_{kl}. \quad (2.5)$$

Величина  $\rho u_k u_l$  — конвективная составляющая потока импульса, переносимая вследствие макроскопического движения среды;  $P_{kl}$  — часть потока импульса, определяемая механизмами молекулярного переноса, т.е. за счет теплового движения и силового взаимодействия молекул среды. Величина  $P_{kl}$  называется тензором давлений.

Связь тензора давлений с другими параметрами среды определяется моделью этой среды. В невязкой среде (идеальная жидкость)

$$P_{kl} = p \delta_{kl}, \quad (2.6a)$$

где  $p$  — давление (скаляр);

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = l, \\ 0 & \text{при } k \neq l \end{cases} \quad \text{единичный тензор (дельта Кронекера).}$$

Ясно, что в идеальной жидкости предполагаются только нормальные напряжения. Модель идеальной жидкости оказывается вполне достаточной для задач гидростатики.

В реальной (вязкой) среде в выражении для тензора давлений необходимо учесть вязкие напряжения:

$$P_{kl} = p \delta_{kl} - \tau_{kl}, \quad (2.6b)$$

где  $\tau_{kl}$  — тензор вязких напряжений. Знак «минус» отражает то, что вязкие напряжения связаны с потерей импульса за счет внутреннего трения.

Тензор потока импульса симметричен, т.е.  $\Pi_{kl} = \Pi_{lk}$ ,  $\tau_{kl} = \tau_{lk}$ .

Это утверждение, интуитивно очевидное, так как внутри текущей среды не могут существовать внутренние неуравновешенные моменты импульса, имеет и строгое доказательство (см., например, [45]). Вследствие симметрии всего имеется шесть различных компонент  $\Pi_{kl}$ : три нормальные  $\Pi_{11}$ ,  $\Pi_{22}$ ,  $\Pi_{33}$  и три касательные  $\Pi_{12} = \Pi_{21}$ ,  $\Pi_{13} = \Pi_{31}$ ,  $\Pi_{23} = \Pi_{32}$ .

Развернутые выражения нормальных и касательных компонент имеют вид:

$$\Pi_{11} = \rho u_1^2 + p - \tau_{11};$$

$$\Pi_{12} = \Pi_{21} = \rho u_1 u_2 - \tau_{12} \text{ и т.д.}$$

Тензор вязких напряжений  $\tau_{kl}$  возникает из-за наличия в потоке относительного движения соседних слоев среды, что возможно лишь при наличии градиентов скорости. Если эти градиенты не слишком велики, то мерой такого движения являются производные вида  $\partial u_k / \partial x_l$ , т. е. первые производные скорости по координате, а зависимость тензора вязких напряжений от этих производных должна быть линейной. При этом следует учитывать, что величина  $\tau_{kl}$  симметрична. Наиболее общий возможный вид такого линейного соотношения есть

$$\tau_{kl} = a \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + b \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{kl}, \quad (2.7)$$

где коэффициенты  $a$  и  $b$  зависят от свойств среды.

В несжимаемой жидкости  $\partial u_m / \partial x_m = 0$ . Поэтому в последнем соотношении коэффициент  $a$  равен  $\mu$  — обычному коэффициенту динамической вязкости, поскольку без последнего слагаемого уравнение (2.7) описывает закон вязкого трения Ньютона для несжимаемой жидкости. В общем случае сжимаемой среды определение второго коэффициента  $b$  в соотношении (2.7) требует дополнительных постулатов или качественных соображений. Обычно постулируется, что среднеарифметическое трех нормальных компонент тензора давлений  $P_{kk}$  равно давлению среды (гипотеза Стокса [45]):

$$\frac{1}{3}(P_{11} + P_{22} + P_{33}) = \frac{1}{3}P_{kk} = p. \quad (2.8)$$

Этой предпосылки достаточно для определения коэффициента  $b$ . Действительно, из (2.6б) и (2.8) имеем

$$\frac{1}{3}\tau_{kk} = 0.$$

Это означает, что сумма трех нормальных компонент тензора вязких напряжений равна нулю (хотя каждая из этих компонент  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$ ,  $\tau_{33}$  в общем случае отлична от нуля). С учетом этого результата из (2.7) находим

$$2\mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + b \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} (2\mu + 3b) = 0,$$

или

$$b = -\frac{2}{3}\mu.$$

Таким образом,

$$\tau_{kl} = \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{kl} \right). \quad (2.9)$$

Это известный обобщенный закон вязкого трения Ньютона.

Физически более строгим было бы введение коэффициента «второй вязкости» [5, 26] по соотношению

$$\frac{1}{3}P_{kk} = p - \mu' \frac{\partial u_m}{\partial x_m}.$$

Однако влияние члена  $\mu' \frac{\partial u_m}{\partial x_m}$  существенно лишь в условиях экспериментально быстрого изменения плотности вещества (типа ситуации в ударных волнах). Из-за отсутствия обоснованных теоретических и надежных опытных данных в отношении  $\mu'$  даже в газовой динамике обычно полагают  $\mu' = 0$ .

### 2.3.3. Различные формы дифференциального уравнения сохранения импульса

С учетом (2.5) уравнение (2.4а) принимает вид

$$\frac{\partial(\rho u_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k u_l)}{\partial x_k} = -\frac{\partial P_{kl}}{\partial x_k} + \rho g_l.$$

Используя следствие из закона сохранения массы (2.3) (здесь  $B = u_l$ ), находим

$$\rho \frac{du_l}{dt} = -\frac{\partial P_{kl}}{\partial x_k} + \rho g_l. \quad (2.10)$$

Дальнейшие преобразования связаны с рассмотрением выражения для тензора давлений. Соотношение (2.6б) дает

$$\rho \frac{du_l}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_l} + \frac{\partial \tau_{kl}}{\partial x_k} + \rho g_l. \quad (2.10a)$$

Это уравнение известно как дифференциальное уравнение сплошной среды в напряжениях. [При выводе этого уравнения используется то, что  $\frac{\partial(p\delta_{kl})}{\partial x_k} = \frac{\partial p}{\partial x_l}$ .] По существу, уравнения (2.10) и (2.10а) можно рассматривать как запись второго закона Ньютона для массы единицы объема сплошной среды: сумма сил (поверхностных и объемных) равна произведению массы на ускорение.

Подстановка в (2.10а) выражения для тензора вязких напряжений согласно соотношению (2.9) при  $\mu = \text{const}$  приводит к уравнению Навье—Стокса для вязкой сжимаемой жидкости:

$$\rho \frac{du_l}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_l} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \rho g_l. \quad (2.11)$$

В случае  $\rho = \text{const}$  второе слагаемое в круглых скобках обращается в нуль, т.е. получается уравнение Навье—Стокса для несжимаемой жидкости

$$\rho \frac{du_l}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_l} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k} \right) + \rho g_l. \quad (2.11a)$$

Наконец, приведем векторную форму уравнения Навье—Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.11b)$$

В этом уравнении лапласиан от вектора скорости следует понимать как

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 u_l \mathbf{i}_l.$$

**Пример.** На основе (2.4) и остальных соотношений главы записать выражение для перепада давлений при одномерном стационарном течении сжимаемой невязкой среды в канале постоянного сечения (рис. 2.6).

Применяя к контрольному объему  $I$ — $II$  соотношение (1.4), имеем

$$\begin{aligned} - \int_F \Pi_{kl} dF_k &= - \left( \int_{F_I} \Pi_{11} dF_1 + \int_{F_{II}} \Pi_{11} dF_1 \right) = \\ &= F[(\Pi_{11})_I - (\Pi_{11})_{II}] = 0, \end{aligned}$$

но

$$\Pi_{11} = \rho u_1 u_1 + p,$$

поэтому

$$p_I - p_{II} = (\rho u_1^2)_{II} - (\rho u_1^2)_I.$$

Используя уравнение сохранения массы

$$F(\rho u_1)_I = F(\rho u_1)_{II} = G,$$

где  $G$  — массовый расход, имеем окончательно

$$p_I - p_{II} = \frac{G}{F}(u_{II} - u_I).$$

Таким образом, если скорость увеличивается (плотность падает), то  $p_I > p_{II}$ . Если скорость падает (плотность растет), то  $p_I < p_{II}$ .

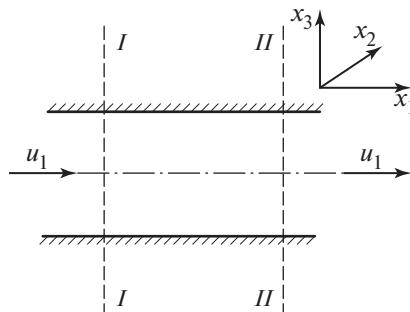


Рис. 2.6. Схема одномерного течения в канале постоянного сечения

## 2.4. Закон сохранения энергии

### 2.4.1. Вывод в общей форме

В движущейся сплошной среде вследствие внутреннего вязкого трения часть механической энергии переходит в тепло. Это явление называют вязкой диссипацией механической энергии. С другой стороны, в условиях теплообмена происходит тепловое расширение (или сжатие) отдельных участков среды; при этом внутренняя (тепловая) энергия среды частично переходит в механическую энергию движения.

В силу этого при формулировке закона сохранения энергии следует рассматривать полную энергию среды:

$$e_* = e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2,$$

т.е. сумму внутренней  $e$  и кинетической  $\frac{1}{2} \mathbf{u}^2$  энергии единицы массы вещества. Аналогично вводится понятие полной энталпии среды

$$h_* = h + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 = e_* + p/\rho,$$

где  $p$  и  $\rho$  — соответственно давление и плотность среды;  $h = e + p/\rho$  — обычная энталпия среды.

Для перехода от общих соотношений (2.1) и (2.1а) к уравнению закона сохранения энергии необходимо положить:

$A = \rho e_*$  — полная энергия единицы объема;

$\mathbf{J} = \mathbf{E}$  ( $J_k = E_k$ ) — плотность потока энергии;

$\dot{N}_A = \rho g_k u_k + \dot{q}_V$ , где  $\rho u_k g_k$  — мощность внешней массовой силы (силы тяжести), которая в нашем рассмотрении выступает как источник энергии (в невесомости эта часть  $\dot{N}_A = 0$ );  $\dot{q}_V$  — внутренние источники тепла (эта часть  $\dot{N}_A$  актуальна, например, для электропроводных жидкостей).

Имеем

$$\int_V \frac{\partial(\rho e_*)}{\partial t} dV = - \int_F E_k dF_k + \int_V (\rho g_k u_k + \dot{q}_V) dV \quad (2.12)$$

— интегральное уравнение сохранения энергии;

$$\frac{\partial(\rho e_*)}{\partial t} + \frac{\partial E_k}{\partial x_k} = \rho g_k u_k + \dot{q}_V \quad (2.12a)$$

— дифференциальное уравнение сохранения энергии.

### 2.4.2. Плотность потока энергии

Рассмотрим плотность потока энергии  $E_k$  (точнее,  $k$ -ю проекцию вектора плотности потока энергии). Через поверхность эйлерова контрольного объема энергия подводится:

за счет конвективного притока полной энергии вследствие макроскопического движения среды  $\rho u_k e_*$ ;

вследствие работы поверхностных сил (давления и вязкого напряжения) в единицу времени  $u_l P_{kl}$ ;

за счет молекулярного механизма переноса энергии (в однокомпонентной среде эта часть потока энергии называется плотностью потока теплоты  $q_k$ , согласно закону Фурье  $q_k = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}$ , где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности).

Таким образом, плотность потока энергии (в проекции на ось  $x_k$ )

$$E_k = \rho u_k e_* + u_l P_{kl} + q_k. \quad (2.13)$$

Используя развернутую запись (2.6б) тензора давлений  $P_{kl}$ , можно получить другое выражение для плотности потока энергии. Действительно,

$$\rho u_k e_* + u_l P_{kl} = \rho u_k e_* + u_l p \delta_{kl} - u_l \tau_{kl} = \rho u_k (e_* + p/\rho) - u_l \tau_{kl}.$$

Вспоминая определение полной энталпии среды, получаем

$$E_k = \rho u_k h_* - u_l \tau_{kl} + q_k. \quad (2.13a)$$

Согласно последней записи поток энергии через любой элемент контрольной поверхности состоит из конвективного потока полной энталпии среды, работы вязких напряжений в единицу времени и молекулярного переноса энергии.

Эта интерпретация тем удобна, что в невязкой ( $\tau_{kl} = 0$ ) и нетеплопроводной ( $q_k = 0$ ) среде плотность потока энергии сводится лишь к величине

$$E_k = \rho u_k h_*,$$

т. е. представляет собой плотность конвективного потока полной энталпии. Такой подход широко используется в газовой динамике.

Выражение плотности потока энергии (2.13) или (2.13а) представляет интерес для анализа двухфазных систем. Поскольку эта величина определяет поток энергии, переносимый через любую контрольную поверхность, выражение для  $E_k$  может быть использовано для анализа переноса энергии через поверхности раздела фаз. Такой анализ дается во второй части курса.

### 2.4.3. Различные формы дифференциального уравнения энергии

Уравнение (2.12а) с учетом (2.13) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial(\rho e_*)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k e_*)}{\partial x_k} = -\frac{\partial(P_{kl}u_l)}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \rho g_k u_k + \dot{q}_V.$$

Полагая в соотношении (2.3)  $B = e_*$ , имеем

$$\rho \frac{de_*}{dt} = -u_l \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - P_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \rho g_k u_k + \dot{q}_V. \quad (2.12б)$$

Уравнение (2.12б) — наиболее общий вид уравнения сохранения полной энергии. Для задач теплообмена больший интерес представляет уравнение сохранения внутренней энергии, которое можно получить, вычитая из (2.12б) уравнение сохранения кинетической энергии. Последнее получается умножением на  $u_l$  уравнения сохранения импульса (2.10):

$$\rho u_l \frac{du_l}{dt} = -u_l \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_k} + \rho g_l u_l.$$

Так как  $u_l u_l \equiv u_k u_k = \mathbf{u}^2$ , то искомое уравнение сохранения кинетической энергии имеет вид

$$\rho \frac{d(\mathbf{u}^2/2)}{dt} = -u_l \frac{\partial P_{kl}}{\partial x_k} + \rho g_k u_k. \quad (2.14)$$

Вычитая это уравнение из (2.12б), получаем уравнение баланса внутренней энергии

$$\rho \frac{de}{dt} = -P_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \dot{q}_V. \quad (2.15)$$

Далее с учетом (2.6б) и определения дивергенции скорости из § 2.2, имеем

$$P_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \tau_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = p \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} - \tau_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}.$$

Используя полученное соотношение в (2.15), получаем

$$\rho \left( \frac{de}{dt} + p \frac{dv}{dt} \right) = \tau_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \dot{q}_V. \quad (2.15a)$$

Теперь видно, что это фактически запись уравнения первого закона термодинамики: приращение внутренней энергии плюс работа расширения равны подводимому теплу. Последняя величина складывается из тепла, подводимого извне через поверхность единичного контрольного объема  $-\frac{\partial q_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right)$  и тепла, выделяющегося внутри объема  $\tau_{kl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$ , которое представляет собой интенсивность вязкой диссипации кинетической энергии потока, и внутренних источников тепла  $\dot{q}_V$ .

Тепло вязкой диссипации в задачах теплообмена часто обозначают как

$$Q_{diss} = \mu \Phi_{diss} = \mu \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \delta_{kl} \right) \frac{\partial u_l}{\partial x_k}.$$

Ясно, что диссипативная функция  $\Phi_{diss} \sim \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$ , т.е. квадратична относительно пространственных производных скорости. Для течения в плоском пограничном слое, как будет показано в гл. 4,  $\Phi_{diss} = (\partial u_x / \partial y)^2$ .

Уравнение энергии в задачах однофазной конвекции используют для нахождения поля температур. Учитывая взаимосвязь внутренней энергии и энталпии  $de = dh - p dv - v dp$ , из (2.15a) получаем

$$\rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} = \mu \Phi_{diss} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \dot{q}_V. \quad (2.15b)$$

Из термодинамики имеем для дифференциала энталпии

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp;$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = c_p \text{ — изобарная теплоемкость.}$$

Производная энталпии по давлению может быть выражена через удельный объем и коэффициент объемного расширения  $\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = v(1 - \beta T).$$

Учитывая эти соотношения и выражая молекулярный поток энергии согласно закону Фурье:  $q_k = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}$ , получаем из (2.15б)

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} - \beta T \frac{dp}{dt} = \mu \Phi_{diss} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + \dot{q}_V. \quad (2.16)$$

Это выражение — наиболее полная запись уравнения сохранения внутренней энергии, описывающего поле температуры; ясно, что оно включает в себя также поля скорости и давления. В практических задачах уравнение (2.16) обычно может быть заметно упрощено. В газах при относительно невысоких давлениях использование уравнения состояния совершенного газа дает  $\beta \approx 1/T$ , кроме того, в газах практически всегда отсутствуют внутренние источники тепла ( $\dot{q}_V = 0$ ). Для этого случая (2.16) принимает вид

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt} = \mu \Phi_{diss} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right). \quad (2.16a)$$

При этом работа сил давления  $dp/dt$  и вязкая диссипация учитываются только при высоких скоростях течения газа,  $M_\infty \geq 0,3$ .

В капельных жидкостях  $\beta < 1/T$ , а  $dp/dt \ll \rho c_p dT/dt$  во всех практических ситуациях; в отсутствие внутренних источников тепла для этого случая имеем

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \mu \Phi_{diss} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right). \quad (2.16b)$$

Для часто рассматриваемых случаев теплообмена потока газа с умеренной скоростью или маловязкой капельной жидкости эффекты вязкой диссипации ничтожны, коэффициент теплопроводности можно принимать постоянным. Тогда

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (2.17)$$

где коэффициент температуропроводности  $\alpha = \lambda / (\rho c_p)$ .

Ясно, что каждое из четырех последних уравнений (2.16)–(2.17) дает в качестве частного случая уравнение нестационарной теплопроводности, если в нем положить равными нулю слагаемые, содержащие компоненты скорости. В частности, для наиболее общего случая неподвижной среды с переменной  $\lambda$  и наличием внутренних источников тепла из (2.16) следует

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + \dot{q}_V.$$

## 2.5. Законы сохранения для смесей

### 2.5.1. Уравнение сохранения массы компонента в бинарной смеси

В предыдущих параграфах объектом анализа была однокомпонентная сплошная среда. Настоящий параграф посвящен рассмотрению законов сохранения для сплошной среды — смеси. (Например, влажный воздух как смесь воздуха и пара, растворы двух жидкостей, растворы твердого вещества в жидкостях.) Специфика смеси проявляется только при пространственно неоднородном составе вещества; в противном случае смесь ведет себя как простое (однокомпонентное) вещество. Наиболее наглядный пример — воздух, который, будучи многокомпонентной смесью газов, во многих задачах теплообмена рассматривается как простое вещество, свойства которого хорошо изучены и табулированы. Вместе с тем, в условиях атмосферного давления и температур от 0 до 100 °C в процессах кондиционирования воздуха и в технологиях сушки рассматривают бинарную смесь сухого воздуха и водяного пара; в процессах разделения воздуха на разных температурных уровнях анализируют бинарные смеси углекислого газа и «воздуха» (как смеси кислорода и азота), азота и кислорода. Из сказанного ясно, что в представляющих практический интерес процессах даже многокомпонентные смеси могут прибли-

женно рассматриваться как бинарные. В настоящей книге анализ ограничивается именно случаем бинарных смесей.

Для обозначения компонентов бинарной смеси будут использованы верхние индексы «*a*» и «*b*». Состав смеси может быть задан объемной концентрацией массы компонентов (парциальными плотностями компонентов):

$$\rho = \rho^a + \rho^b, \quad (2.18)$$

или в относительных массовых долях, так называемых массовых концентрациях:

$$1 = C^a + C^b. \quad (2.18a)$$

Здесь  $\rho^a$  и  $\rho^b$  — количество вещества *a* и *b* в единице объема смеси;  $\rho$  — плотность смеси;  $C^a = \rho^a/\rho$ ,  $C^b = \rho^b/\rho$  — массовые доли (концентрации) компонентов смеси. Применяются и иные формы задания состава смеси: объемные доли, молярные (мольные) доли компонентов. Последние удобны для описания процессов тепломассообмена при химических превращениях. В отсутствие химических реакций использование мольных долей не дает преимуществ в сравнении с массовыми концентрациями, которым отдано предпочтение в данном курсе.

Введенные в настоящей главе законы сохранения массы, импульса и энергии остаются справедливыми в своей общей форме и для смеси в целом. Специфика того, что перенос энергии и импульса молекулярным путем в смеси происходит несколько иначе, чем в однокомпонентной среде, находит свое отражение в конкретном виде выражения для молекулярного потока энергии и тензора вязких напряжений. Эти выражения рассматриваются ниже.

Поскольку для бинарной смеси число переменных увеличивается на единицу (дополнительной зависимой переменной является концентрация одного из компонентов), должно существовать еще одно уравнение, которое совместно с уже названными законами сохранения образует математическое описание процессов в смеси. В качестве этого дополнительного уравнения выступает уравнение дифузии, в основе которого лежит закон сохранения массы компонента бинарной смеси.

Используя общую форму записи законов сохранения, рассмотрим закон сохранения массы компонента *a*. Очевидно, для величин, входящих в уравнения (2.1) и (2.1a), имеем:

$A = \rho^a$ , кг/м<sup>3</sup>, — парциальная плотность компонента;

$\mathbf{J} = \mathbf{J}^a$ , кг/(м<sup>2</sup> · с), — массовый поток компонента смеси через эйлерову контрольную поверхность;

$\dot{N}_A = \dot{m}^a$ , кг/(м<sup>3</sup> · с) — производство массы компонента  $a$  в результате гомогенной химической реакции. Следует отметить, что в бинарной смеси возможен, видимо, только один тип гомогенной химической реакции, приводящей к производству массы компонента в объеме, — реакция диссоциации — рекомбинации. Фактически мы ввели величину  $\dot{m}^a$  только для записи уравнения сохранения массы компонента в достаточно общей форме.

Имеем

$$\int_V \frac{\partial \rho^a}{\partial t} dV = - \int_F J_k^a dF_k + \int_V \dot{m}^a dV \quad (2.19)$$

— интегральная форма закона сохранения массы компонента;

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \frac{\partial J_k^a}{\partial x_k} = \dot{m}^a \quad (2.19a)$$

— дифференциальная форма.

Аналогичные выражения можно записать для компонента  $b$ , например

$$\frac{\partial \rho^b}{\partial t} + \frac{\partial J_k^b}{\partial x_k} = \dot{m}^b.$$

Однако это уравнение не несет новой информации по отношению к уравнениям для компонента  $a$  в силу наличия соотношений (2.18) и (2.18a).

Потоки  $\mathbf{J}^a$  и  $\mathbf{J}^b$  можно представить состоящими из двух частей. Перенос вещества  $a$  или  $b$  через элемент поверхности эйлерова объема, во-первых, связан просто с движением смеси, как целого, со скоростью  $\mathbf{u}$ . Соответствующие величины равны, очевидно,

$$\rho^a \mathbf{u} = C^a \rho \mathbf{u},$$

$$\rho^b \mathbf{u} = C^b \rho \mathbf{u}$$

и представляют собой конвективные потоки массы компонентов смеси. Вторая часть потоков  $\mathbf{J}^a$  и  $\mathbf{J}^b$  обусловлена молекулярным пере-

мешиванием компонентов, т. е. диффузией. Диффузионные потоки будем обозначать символами  $\mathbf{j}^a$  и  $\mathbf{j}^b$ .

Итак,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J}^a &= \rho^a \mathbf{u} + \mathbf{j}^a; \\ \mathbf{J}^b &= \rho^b \mathbf{u} + \mathbf{j}^b. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Поскольку сумма  $\mathbf{J}^a + \mathbf{J}^b = \rho \mathbf{u}$ , из соотношений (2.20) следует, что  $\mathbf{j}^a + \mathbf{j}^b = 0$ , т. е.

$$\mathbf{j}^a = -\mathbf{j}^b. \quad (2.21)$$

Таким образом, дополнительное дифференциальное уравнение диффузии, представляющее собой закон сохранения массы компонента смеси, имеет вид

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^a u_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial j_k^a}{\partial x_k} = 0.$$

Здесь и далее мы не будем учитывать возможность гомогенных химических реакций, т. е. полагаем  $\dot{m}^a = \dot{m}^b = 0$ . Используя, как и в предыдущих параграфах, соотношение (2.3), перепишем это уравнение в следующей форме:

$$\rho \frac{dC^a}{dt} + \frac{\partial j_k^a}{\partial x_k} = 0. \quad (2.22)$$

Аналогичный вид имеет уравнение для второго компонента, но оно, как говорилось выше, не дает новых сведений, так как является следствием уравнения сохранения массы смеси в целом и уже записанного соотношения для компонента  $a$ .

Итак, в бинарной смеси (при отсутствии гомогенных химических реакций) выполняются общие для сплошных сред законы сохранения массы, импульса и энергии, а также закон сохранения массы компонента (уравнение диффузии). Совокупность уравнений, выражающих законы сохранения для бинарных смесей, можно проиллюстрировать [используя обозначения, введенные для уравнений сохранения (2.1) или (2.1а) в общей форме] следующими двумя таблицами.

Подчеркнутые величины в табл. 2.2 — это молекулярные потоки массы компонента  $j_k^a$ , «вязкой» составляющей  $l$ -й проекции

Таблица 2.1. Величины, входящие в уравнения законов сохранения для бинарных смесей

Закон сохранения	Параметр		
	$A$	$J_k$	$\dot{N}_A$
Массы (смеси)	$\rho$	$\rho u_k$	0
Массы компонента $a$	$\rho^a$	$J_k^a$	0
Импульса	$\rho u_l$	$\Pi_{kl}$	$\rho g_l$
Энергии*	$\rho e_*$	$E_k$	$\rho g_k u_k + \dot{q}_V$

\* В уравнении энергии не учитывается как малая величина кинетическая энергия диффузии. Эта величина квадратична относительно диффузионных потоков:

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\mathbf{j}^a}{\rho^a} \right)^2 + \left( \frac{\mathbf{j}^b}{\rho^b} \right)^2 \right].$$

Таблица 2.2. Расшифровка значений потоков  $J_k$

Плотность потока $J_k$	Развернутая запись
Массы (смеси)	$\rho u_k$
Массы компонента $J_k^a$	$\rho^a u_k + \underline{j}_k^a$
$l$ -проекции импульса $\Pi_{kl}$	$\rho u_k u_l + p \delta_{kl} - \underline{\tau}_{kl}$
Полной энергии $E_k$	$\rho u_k e_* + P_{kl} u_l - \dot{e}_k$

импульса  $\tau_{kl}$  и энергии  $\dot{e}_k$ . Они обусловлены необратимыми процессами молекулярного перемешивания в объеме смеси. Эти молекулярные потоки определяют специфику бинарных смесей по сравнению с однокомпонентной средой. Для замкнутого описания процессов необходимо располагать развернутыми выражениями для потоков  $j_k^a$ ,  $\tau_{kl}$  и  $\dot{e}_k$ .

### 2.5.2. Молекулярный поток массы компонента в смеси

Основной причиной появления молекулярных потоков массы компонентов в смеси является неоднородность их концентраций. Вследствие молекулярного перемешивания смеси осуществляется перенос вещества данного компонента из области с более высокой концентрацией в область с пониженной концентрацией. Этот про-

цесс описывается законом концентрационной диффузии — законом Фика, который во многом похож на закон теплопроводности Фурье:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j}^a &= -\rho D \nabla C^a = -\rho D \frac{\partial C^a}{\partial x_k} \mathbf{i}_k, \\ \mathbf{j}^b &= -\rho D \nabla C^b = -\rho D \frac{\partial C^b}{\partial x_k} \mathbf{i}_k. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Здесь  $D$  — коэффициент взаимной диффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ , который обычно для данной пары веществ практически не зависит от концентрации. Знак «минус» означает взаимообратную ориентацию векторов градиента и потока.

Однако, строго говоря, закон молекулярной диффузии в общем случае имеет существенно более сложный вид. Перенос массы компонентов в смеси происходит также под действием градиентов температуры и давления. Соответствующие эффекты именуют термо- и бародиффузией. Общие выражения для  $\mathbf{j}^a$  и  $\mathbf{j}^b$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j}^a &= -\rho D \left[ \nabla C^a + \frac{K_T^{ab}}{T} \nabla T + \frac{K_p^{ab}}{p} \nabla p \right], \\ \mathbf{j}^b &= -\rho D \left[ \nabla C^b + \frac{K_T^{ba}}{T} \nabla T + \frac{K_p^{ba}}{p} \nabla p \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.23a)$$

Безразмерные коэффициенты термодиффузии  $K_T$  и бародиффузии  $K_p$  зависят от концентрации и при переходе к чистому однокомпонентному веществу обращаются в нуль:

$$K_T \left|_{\substack{C^a \rightarrow 1 \\ (C^b \rightarrow 1)}} \right. \rightarrow 0; \quad K_p \left|_{\substack{C^a \rightarrow 1 \\ (C^b \rightarrow 1)}} \right. \rightarrow 0.$$

Кроме того, очевидно, что  $K_T^{ab} = -K_T^{ba}$ ;  $K_p^{ab} = -K_p^{ba}$ . Это следует из условия (2.21). Эффекты бародиффузии обычно на практике совершенно незначительны и с полным основанием могут не учитываться. Заметное влияние эффекты термодиффузии могут оказывать в газовых смесях при существенно различной массе молекул (водо-

род — фреон и т.п.), значительных температурных градиентах и средних концентрациях компонентов. Все эти условия одновременно имеют место не часто. Поэтому в задачах тепломассообмена во многих случаях могут быть опущены и термодиффузионные эффекты, хотя эффект термодиффузии нашел практическое применение в технологиях разделения изотопов. Для задач тепломассообмена обычно используют соотношения (2.23) закона Фика. Именно это приближение и будет рассматриваться далее.

С учетом выражения (2.23) уравнение конвективной диффузии (2.22) принимает вид

$$\frac{dC^a}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( D \frac{\partial C^a}{\partial x_k} \right). \quad (2.22a)$$

### 2.5.3. Влияние молекулярных потоков массы компонента на перенос импульса и энергии в смеси

В бинарной смеси поверхность эйлерова контрольного объема пересекают не только конвективный поток смеси, но и молекулярные потоки массы компонента, которые переносят импульс и энергию. Равенство (2.21) означает, что эти потоки не влияют на форму уравнения сохранения массы смеси. Но наличие потоков  $j^a$  и  $j^b$  вносит особенности в выражения для тензора вязких напряжений и вектора плотности молекулярного потока энергии в смесях.

Потоки массы компонентов смеси

$$\mathbf{J}^a = \rho^a \mathbf{u} + \mathbf{j}^a; \quad \mathbf{J}^b = \rho^b \mathbf{u} + \mathbf{j}^b$$

обусловливают дополнительный перенос импульса, определяемый выражениями  $\frac{1}{\rho^a} J_k^a J_l^a$ ;  $\frac{1}{\rho^b} J_k^b J_l^b$  (аналогично выражению  $\rho u_k u_l \equiv \frac{1}{\rho} (\rho u_k)(\rho u_l)$  для однокомпонентной среды).

Раскрывая выражения  $\mathbf{J}^a$  и  $\mathbf{J}^b$ , имеем

$$(\rho^a + \rho^b) u_k u_l + u_l (j_k^a + j_k^b) + u_k (j_l^a + j_l^b) + \frac{1}{\rho} j_k^a j_l^a + \frac{1}{\rho} j_k^b j_l^b.$$

Первое слагаемое равно  $\rho u_k u_l$ , т. е. представляет перенос импульса сплошной среды вследствие конвекции. Второе и третье

слагаемые равны нулю, так как  $\mathbf{j}^a + \mathbf{j}^b = 0$ . Два последних определяют искомый перенос импульса вследствие диффузии. При  $\mathbf{j}^a = -\mathbf{j}^b = 0$  эти слагаемые исчезают. Однако молекулярный перенос импульса (из-за вязкости среды) остается. Так что строгое выражение для вязких напряжений в смеси при наличии диффузии имеет вид

$$\tau_{kl} = \overset{\circ}{\tau}_{kl} - \left( \frac{j_k^a j_l^a}{\rho^a} + \frac{j_k^b j_l^b}{\rho^b} \right),$$

где  $\overset{\circ}{\tau}_{kl}$  — касательное напряжение, выраженное через коэффициент вязкости смеси. Добавка за счет диффузионных потоков квадратична относительно малых величин  $j^a$  и  $j^b$  и потому обычно несущественна. (Представление о реальных скоростях молекулярной диффузии дает известный опыт Лошмидта. В этом опыте в вертикальной трубе длиной 1 м, первоначально разделенной перегородкой посередине, в верхней половине находился водород, в нижней — углекислый газ. Через 30 мин после удаления перегородки в нижней половине трубы благодаря диффузии оказывалось 33 % молекул водорода.)

Таким образом, вязкие напряжения в бинарной смеси с хорошим приближением можно выражать в той же форме, которая использовалась для однокомпонентной среды [уравнение (2.9)]. При этом коэффициент динамической вязкости  $\mu$  в таком соотношении приобретает смысл коэффициента вязкости смеси  $\mu^{ab}$ . Его значения для различных бинарных смесей приводятся в справочниках. Правило аддитивности для  $\mu^{ab}$  не выполняется. Известны теоретические и полуэмпирические формулы, выражающие  $\mu^{ab}$  через  $\mu^a$ ,  $\mu^b$  и концентрацию компонентов.

Поток энергии  $\dot{e}$ , переносимый молекулярным путем при наличии диффузионного переноса вещества, должен включать в себя перенос энергии за счет диффузии. В этих условиях (из-за проницаемости контрольной поверхности, относительно которой данный поток энергии рассматривается) понятие потока теплоты становится неоднозначным и его применение может вести к различным двусмыслистиям и недоразумениям. Поэтому при анализе процессов в смесях предпочтительнее использовать понятие потока энергии, переносимого молекулярным путем, а не потока теплоты. По этой причине в табл. 2.2 использовано обозначение  $\dot{e}$ , а не  $q$ .

Выражение для потока энергии в бинарной смеси имеет вид

$$\dot{e} = -\lambda^{ab} \nabla T + h^a j^a + h^b j^b. \quad (2.24)$$

Первый член в правой части (2.24) имеет структуру закона Фурье, причем в нем используется коэффициент теплопроводности смеси. Коэффициент  $\lambda^{ab}$  задается в таблицах свойств смесей, и для него существуют приближенные соотношения, позволяющие найти  $\lambda^{ab}$  по  $\lambda^a$  и  $\lambda^b$  и концентрации (правило аддитивности обычно не выполняется). Два следующих слагаемых характеризуют перенос энергии за счет диффузии. Величины  $h^a$  и  $h^b$  представляют парциальные энталпии компонентов; энталпия смеси определяется по правилу аддитивности (см. термодинамику растворов\*):

$$h = h^a C^a + h^b C^b.$$

Для газов при не очень высоких давлениях  $h^a = h_0^a$ ,  $h^b = h_0^b$ , т. е. парциальные энталпии равны энталпиям чистых компонентов (идеальные смеси). В жидких смесях при растворении компонентов выделяется теплота смешения, отличная от нуля (неидеальные смеси). В этих условиях  $h^a \neq h_0^a$ ,  $h^b \neq h_0^b$ .

Выражение для потока энергии (2.24) можно записать, используя равенство  $j^a + j^b = 0$ , в виде

$$\dot{e} = -\lambda^{ab} \nabla T + (h^a - h^b) j^a.$$

Ранее такая форма записи была популярна. При этом величина  $\dot{e}$  нестрого называлась «потоком тепла», а величина  $(h^a - h^b)$  называлась «теплотой переноса» вследствие диффузии.

Для газов энталпия смеси  $h$  практически не зависит от давления. Используя известное в термодинамике растворов выражение для полной производной энталпии смеси при  $p = \text{const}$

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_C dT + h^a dC^a + h^b dC^b$$

---

\* Например, книгу: Кириллин В.А., Шейндлин А.Е., Шпильрайн Э.Э. Термодинамика растворов. М.: Энергия, 1980.

и выражение закона Фика  $\mathbf{j}^a = -\rho D \nabla C^a$ ,  $\mathbf{j}^b = -\rho D \nabla C^b$ , находим, что

$$\nabla h = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_C \nabla T - \frac{1}{\rho D} (h^a \mathbf{j}^a + h^b \mathbf{j}^b).$$

Отсюда имеем

$$(h^a \mathbf{j}^a + h^b \mathbf{j}^b) = \rho D \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_C \nabla T - \rho D \nabla h.$$

Величина  $\left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_C = c_p^{ab}$  называется «замороженной» теплоемкостью, т.е. теплоемкостью при неизменном составе. Для идеальных смесей (применимо для смеси газов):

$$c_p^{ab} = c_p^a C^a + c_p^b C^b.$$

В итоге исходное соотношение (2.24) принимает вид

$$\dot{e} = -\lambda^{ab} [1 - Le] \nabla T - \rho D \nabla h. \quad (2.25)$$

Здесь введено число Льюиса—Семенова\*

$$Le = \frac{\rho D c_p^{ab}}{\lambda^{ab}} = \frac{D}{a^{ab}},$$

где  $a^{ab}$  — температуропроводность смеси.

Удобство новой записи состоит в том, что для многих газовых смесей число  $Le \approx 1$ . Полагая  $Le = 1$ , находим, что поток энергии в бинарной газовой смеси определяется лишь градиентом энталпии смеси:

$$\dot{e} = -\rho D \nabla h. \quad (2.25a)$$

В жидкостях такого рода преобразования не дают существенных выгод. При этом следует иметь в виду, что для жидкостей из-за малого коэффициента диффузии и относительно большой теплопроводности ( $Le \ll 1$ ;  $D \ll a^{ab}$ ) обычно оправдано приближение, не учитывающее диффузионного переноса энергии. В этом случае принимают, что молекулярный поток энергии определяется только градиентом температуры [первым слагаемым правой части (2.24)]. Применимость этого допущения требует конкретных оценок для тех или иных условий.

---

\* Иногда этому названию ставят в соответствие обратную величину.

## 2.6. Система уравнений сохранения для конвективного тепломассообмена; аналогия процессов переноса

Анализ, представленный выше, ведет к выводу о том, что теплообмен в движущейся однофазной среде для замкнутого математического описания требует записи системы из пяти дифференциальных уравнений сохранения: уравнение сохранения массы (2.2а) или (2.2б), три уравнения для проекций импульса  $\rho u_i$  (2.11) и уравнение энергии (2.16). Решение этой системы дает поля трех компонент скорости, давления и температуры.

Для бинарных смесей в случае совместного переноса массы компонента и энергии к этим уравнениям добавляется шестое — уравнение сохранения массы компонента (2.22); при этом в уравнении энергии учитывается влияние молекулярного потока массы компонента (в соответствии с рекомендациями п. 2.5.3). Дополнительная переменная, поле которой отыскивают в этом случае, — массовая доля компонента смеси.

Если свойства жидкости ( $\rho, \mu, \lambda, c_p, D$ ) зависят от температуры, то система уравнений сохранения дополняется алгебраическими уравнениями (в аналитической или табличной форме), описывающими эти зависимости. Естественно, это математическое описание дополняется условиями однозначности, характеризующими конкретную задачу. Таким образом, получается система из 11 уравнений, из которых шесть — дифференциальные, в частных производных. В такой полной постановке задача решается довольно редко. Однако именно полное математическое описание является основой для анализа, на которой может быть проведено упрощение задачи. Это утверждение справедливо и в отношении анализа методами теории подобия.

Полезно указать наиболее часто используемые методы упрощения исходного математического описания:

в стационарных задачах из уравнений сохранения исчезают локальные производные по времени;

во многих случаях может быть использовано допущение о постоянстве физических свойств жидкости; в этом случае, помимо естественного упрощения процедуры решения, система уравнений движения (уравнения неразрывности и сохранения импульса) решается независимо от уравнений энергии и конвективной диффузии;

в ряде случаев геометрическая область протекания процесса позволяет снизить размерность задачи, т.е. перейти от трехмерной задачи к двухмерной (плоской или осесимметричной); это означает

не только уменьшение числа членов уравнений, но и уменьшение числа уравнений для проекций импульса;

достаточно часто уже на стадии предварительного анализа удается пренебречь некоторыми эффектами и опустить в уравнениях отражающие эти эффекты члены; фактически этот путь упрощения математического описания уже проиллюстрирован в общем плане при анализе уравнения энергии (пренебрежение работой сил давления, вязкой диссипацией, внутренними источниками тепла);

особый вид упрощения математического описания — это использование приближений пограничного слоя или аналогичного по содержанию приближения длинной трубы для канальных течений.

В заключение настоящей главы кратко остановимся на проблеме аналогии различных процессов переноса. Аналогия естественным образом связана с идентичностью содержания различных уравнений сохранения в общей форме при эйлеровом методе описания. Анализ, выполненный в § 2.2—2.6, а также отраженный в табл. 2.1 и 2.2, показывает, что отличие конкретной формы записи различных уравнений сохранения связано, главным образом, с разной формой выражения потока свойства на поверхности эйлерова контрольного объема ( $J_k$ ).

В некоторых случаях имеется полная аналогия математического описания для процессов переноса импульса, энергии и массы компонента в бинарной смеси. Рассмотрим, например, процессы совместного тепломассообмена при обтекании плоской пластины внешним потоком жидкости с постоянными свойствами. При умеренных скоростях течения, когда оправдано пренебрежение вязкой диссипацией и работой сил давления, в отсутствие внутренних источников тепла уравнения сохранения импульса, энергии и массы компонента в смеси запишутся следующим образом:

$$\frac{du_l}{dt} = v \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k}; \quad (2.11b)$$

$$\frac{dT}{dt} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}; \quad (2.17)$$

$$\frac{dC^a}{dt} = D \frac{\partial^2 C^a}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (2.226)$$

Уравнение (2.17) для оговоренных условий уже было записано в такой форме; в уравнении (2.22б) только учтено условие  $D = \text{const}$ . В уравнении сохранения  $l$ -проекции импульса (2.11а) учтено, что при обтекании плоской пластины внешним потоком отсутствует градиент продольного давления, эффект массовых сил при внешнем вынужденном движении обычно ничтожно мал, им пренебрегли; введен коэффициент кинематической вязкости  $\nu = \mu/\rho$ .

Математически эти три уравнения не отличаются ничем, поскольку выбор обозначений — это всегда воля автора. Коэффициенты переноса импульса ( $v$ ), энергии ( $a$ ), массы компонента ( $D$ ) имеют одинаковую размерность,  $\text{m}^2/\text{s}$ ; в газах невысокого давления эти коэффициенты достаточно близки численно, что отражает сходный механизм переноса импульса, энергии и массы компонента в этом случае. При использовании безразмерных переменных:  $\tilde{u} = u/U_\infty$ ,  $\theta = (T - T_c)/(T_\infty - T_c)$ ,  $\tilde{C}^a = (C^a - C_c^a)/(C_\infty^a - C_c^a)$ , где нижний индекс « $c$ » относится к условиям на стенке, а  $\infty$  — к невозмущенному потоку, могут оказаться совпадающими и граничные условия. В этом случае при численном равенстве коэффициентов  $\nu = a = D$  будет наблюдаться так называемая *тройная аналогия*, при которой поля безразмерных скорости, температуры и концентрации будут совпадать.

Равенство коэффициентов переноса обычно выражают условиями  $\text{Pr} = \nu/\alpha = 1$ ,  $\text{Le} = D/a = 1$ . Наряду с ранее введенными числами Прандтля и Льюиса—Семенова, используют также число Шмидта (Schmidt)  $\text{Sc} = \nu/D$ . Ясно, что достаточно знать любые два из этих трех безразмерных чисел подобия для характеристики коэффициентов переноса рассматриваемого вещества. Строгое выполнение условий тройной аналогии — событие маловероятное. В этом случае, помимо обсуждавшегося в гл. 1 равенства безразмерного потока импульса ( $C_f/2$ ) безразмерному потоку тепла ( $\text{St}$ ), должно выполняться равенство

$$C_f/2 = \text{St}_D,$$

где диффузионное число Стантона — это безразмерный поток массы компонента на стенке:  $\text{St}_D = j_c^a / (\rho U_\infty)$ .

В общем случае, когда числа  $\text{Pr}$ ,  $\text{Le}$  и  $\text{Sc}$  отличны от единицы, соотношения аналогии применяют в форме

$$\text{St} = (C_f/2)f(\text{Pr})$$

или

$$\text{St}_D = (C_f/2)f(\text{Sc}).$$

Этот подход оказывается полезным при обработке результатов экспериментальных исследований. В частности, известны работы, в которых на основе измерений интенсивности массоотдачи при испарении в поток нафталина строили соотношения для теплоотдачи в геометрически подобных условиях («нафталиновая аналогия»). К проблемам аналогии мы еще раз обратимся в следующей главе.

## Контрольные вопросы к главе 2

1. Чем различаются методы описания процессов в движущейся среде по Лагранжу и по Эйлеру?
2. Каково общее содержание законов сохранения при эйлеровом методе описания?
3. Какой смысл имеет входящее в интегральное уравнение сохранения (2.1) выражение  $J_k dF_k$ ? Почему интеграл от него берется со знаком «минус»?
4. Всегда ли возможен переход от интегрального уравнения сохранения к дифференциальному с использованием формулы Остроградского—Гаусса?
5. Каким путем с помощью уравнения сохранения массы получается соотношение (2.3)?
6. Какой физический смысл имеет дивергенция скорости для сплошной среды?
7. Почему в уравнении сохранения импульса неизбежно обращение к тензорным величинам (к тензору второго ранга)?
8. Как выражается тензор давлений для идеальной и реальной жидкости?
9. Какое свойство реальных жидкостей и газов отражает тензор вязких напряжений? Почему он должен быть симметричным?
10. Как уравнения (2.10) и (2.10a) соотносятся со вторым законом Ньютона?
11. Какой физический смысл имеют члены уравнения Навье—Стокса (2.11) и (2.11a)?
12. Что такое полная энергия и полная энтальпия единицы массы сплошной среды?
13. Какие факторы вызывают производство энергии внутри контрольного объема?
14. Какие составляющие определяют поток полной энергии?
15. В каких средах поток полной энергии может быть приближенно оценен как поток полной энтальпии?
16. Каким путем получается уравнение сохранения кинетической энергии?
17. Почему уравнение (2.15a) можно рассматривать как уравнение первого закона термодинамики для движущейся жидкости?
18. Чем определяется теплота вязкой диссипации в реальной движущейся жидкости?
19. Какой физический смысл имеют слагаемые уравнения сохранения энергии (2.16)?

- 
20. Какие упрощения могут быть использованы в уравнении (2.16) при его применении к газам и капельным жидкостям?
  21. В каких случаях анализ процессов, происходящих в газовых смесях и жидких растворах, требует использования уравнения сохранения массы компонента?
  22. Чем обусловлен молекулярный поток массы компонента в смеси?
  23. В каких случаях становится существенным эффект термодиффузии?
  24. Почему в бинарных смесях молекулярные потоки массы компонентов влияют на перенос импульса и энергии? Почему это влияние существенно лишь для переноса энергии?
  25. В каких случаях использование числа Семенова—Льюиса упрощает выражение для молекулярного потока энергии в смеси?
  26. Какие уравнения сохранения образуют полное математическое описание процессов тепломассообмена?
  27. Чем обусловлена аналогия процессов переноса импульса, энергии и массы компонента в смеси? При каких условиях выполняется тройная аналогия?

# Глава 3

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

---

### 3.1. Подобие физических явлений

Теория подобия — эффективное средство исследования (обычно приближенного) сложных процессов. Она определяет условия, при которых взаимозависимости между физическими параметрами могут заменяться функциональной связью между безразмерными комплексами — уравнениями подобия. Так как каждому значению безразмерного комплекса (обобщенной переменной, по А.А. Гухману [7]) отвечает бесконечное множество значений размерных величин, составляющих этот комплекс, то объективно уравнения подобия несут несравненно большую информацию о процессе, чем исходная взаимосвязь размерных параметров.

В основе теории подобия лежат первичные (фундаментальные) физические законы. Выражающие их уравнения корректны по размерности, только при этом условии и могут быть построены безразмерные уравнения подобия. В этом смысле можно утверждать, что теория подобия закладывалась работами Галилея, Ньютона, Фурье, Навье, Максвелла, Стокса, Рейнольдса, Больцмана, Рэлея, Жуковского, Менделеева... Как самостоятельное научное направление теория подобия сформировалась на этапе середина XIX — первая треть XX в. В приложении к тепломасообмену теория подобия в очень большой степени сложилась благодаря нашим соотечественникам (В.М. Кирпичёв, А.А. Гухман и др.). Теория подобия остается при этом живым направлением научных исследований в том отношении, что сталкивается с некоторыми нерешенными проблемами, например с приложением теории подобия и моделирования к задачам со многими разнопорядковыми линейными масштабами, что характерно, в частности, для установок ядерной энергетики. (Этой задаче посвящена одна из последних работ Д.А. Лабунцова, 1990 г. [21].)

Теория подобия в значительной мере «отталкивается» от хорошо известного геометрического подобия. Для него необходима одинакость формы подобных фигур (тел), включающая равенство соответствующих углов в случаях многоугольников и многогранников. При этом подобие определяется следующим соотношением линейных размеров (рис. 3.1):

$$l_0/l'_0 = l_1/l'_1 = \dots = l_k/l'_k = C_l \text{ при } k = \text{idem};$$

$C_l$  — константа подобия.

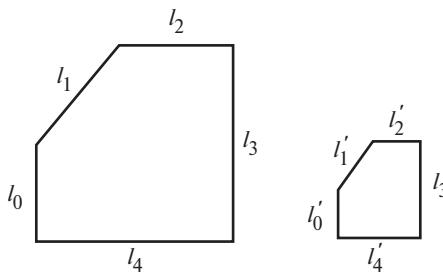


Рис. 3.1. Геометрически подобные фигуры

Если  $l_0$  и  $l'_0$  использовать как естественные масштабы, то при  $k = \text{idem}$   $l_k/l_0 = l'_k/l'_0 = \tilde{l}_k$ , т.е подобные геометрические фигуры — это одна и та же фигура, взятая в разных масштабах. Ясно, что подобны все шары, кубы, равносторонние треугольники, круговые цилиндры и круглые трубы при одинаковом отношении длины к диаметру и т.д.

Для подобия физических явлений геометрическое подобие областей протекания процессов обязательно. Но, кроме того, требуются одинаковая физическая природа этих процессов и идентичность их математического описания, а также необходимо, чтобы определяющие процесс параметры, имеющие одинаковую физическую природу и размерность, в сходственных точках пространства в сходственные моменты времени были связаны отношениями подобия.

В двух геометрически подобных областях с системами координат  $\{x_k\}$  и  $\{x'_k\}$  при наличии естественных масштабов  $l_0$  и  $l'_0$ :  $x_k/l_0 = \tilde{x}_k$ ,  $x'_k/l'_0 = \tilde{x}'_k$ , причем  $\tilde{x}_k = \tilde{x}'_k$  при  $k = \text{idem}$ . Таким образом, сходственные точки пространства — это фактически одни и те же точки в безразмерных системах координат. К примеру, в двух длинных трубах (с соотношением длины и диаметра  $l/d \gg 1$ ) естественный линейный масштаб — это диаметр ( $d, d'$ ) или радиус ( $r_0, r'_0$ ). Цилиндрическая система координат  $\{x, r, \phi\}$  в безразмерном виде — это  $\{\tilde{x}, \tilde{r}, \phi\}$ . Для сходственных точек должно выполняться:

$$x/d = x'/d' = \tilde{x} = \text{idem}; r/r_0 = r'/r'_0 = \tilde{r} = \text{idem}; \phi = \text{idem}.$$

Сходственные моменты времени  $t$  актуальны для нестационарных процессов. В технике наиболее важны два типа нестационарных процессов — периодические и переходные (от одного стационарного

состояния к другому). В периодических процессах с периодом  $t_0$  сходственные моменты времени соответствуют одинаковой фазе развития этих процессов, т.е.  $t/t_0 = t'/t'_0 = \tilde{t} = \text{idem}$ .

В переходных процессах в качестве масштаба времени используются величины, определяемые физическими свойствами жидкости и линейным масштабом области анализа. В задачах гидромеханики  $t_0 = l_0^2/v$ , так что сходственные моменты времени определяются условием

$$\frac{vt}{l_0^2} = \frac{v't'}{l_0'^2} = \text{Ho} = \text{idem},$$

где  $\text{Ho}$  — это так называемое число гомохронности (гомохронность в переводе с греческого — это одновременность).

Аналогично вводятся масштабы времени в задачах теплообмена и массообмена, при этом вместо кинематической вязкости используются соответствующие этим процессам коэффициенты температуропроводности и диффузии. Для теплообмена  $t_0 = l_0^2/a$ , сходственные моменты времени в рассматриваемых процессах определяются как

$$\frac{at}{l_0^2} = \frac{a't'}{l_0'^2} = \text{Fo} = \text{idem},$$

где  $\text{Fo}$  — число Фурье (безразмерное время).

Для массообмена  $t_0 = l_0^2/D$  сходственные моменты времени определяются условием

$$\frac{Dt}{l_0^2} = \frac{D't'}{l_0'^2} = \text{idem}.$$

Если в анализируемых физических явлениях одинаковой физической природы определяющие процесс параметры с одинаковой раз мерностью — это  $\psi$  и  $\theta$ , то для подобия этих явлений, протекающих в системах  $\{x_k\}$  и  $\{x'_k\}$ , необходимо:

$$\frac{\psi(t, x_k)}{\psi'(t', x'_k)} = C_\psi; \quad \frac{\theta(t, x_k)}{\theta'(t', x'_k)} = C_\theta$$

при  $t/t_0 = t'/t'_0 = \tilde{t} = \text{idem}$ ;  $x_k/l_0 = x'_k/l'_0 = \tilde{x}_k = \text{idem}$ .

Эта запись означает, что в подобных физических явлениях определяющие процесс параметры связаны отношениями подобия, т.е. поля этих параметров подобны.

Если для параметров  $\psi$  и  $\theta$  в каждой из рассматриваемых систем существуют естественные масштабы ( $\psi_0$  и  $\psi'_0$ ;  $\theta_0$  и  $\theta'_0$ ), то для подобных явлений:

$$\frac{\psi(\tilde{t}, \tilde{x}_k)}{\psi_0} = \frac{\psi'(\tilde{t}, \tilde{x}_k)}{\psi'_0} = \tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{x}_k);$$

$$\frac{\theta(\tilde{t}, \tilde{x}_k)}{\theta_0} = \frac{\theta'(\tilde{t}, \tilde{x}_k)}{\theta'_0} = \tilde{\theta}(\tilde{t}, \tilde{x}_k).$$

Таким образом, поля безразмерных значений, определяющих процессы параметров  $\psi$  и  $\theta$  в системах  $\{x_k\}$  и  $\{x'_k\}$ , тождественно совпадают. Другими словами, два подобных физических процесса — это фактически один и тот же процесс в разных масштабах.

В качестве хорошо известного примера можно назвать стабилизированное ламинарное течение в круглой трубе. Используя для системы координат в качестве естественного масштаба радиус трубы  $r_0$ , а для процесса — среднемассовую скорость  $\bar{u}$ , запишем известный профиль Пуазейля:

$$\tilde{u} = 2(1 - R^2),$$

где  $\tilde{u} = u/\bar{u}$ ,  $R = r/r_0$ .

Этот профиль справедлив для неограниченно большого числа конкретных реализаций. Каждая такая реализация — это одно из множества подобных явлений, причем все это множество явлений — фактически одно и то же явление, взятое в разных масштабах.

Итак, *два физических явления подобны, если они имеют одинаковую физическую природу, идентичное математическое описание, протекают в геометрически подобных областях, а определяющие процесс одноименные физические параметры (с одинаковой размерностью) в сходственных точках пространства в сходственные моменты времени связаны отношениями подобия*.

Кратко (и не очень строго) можно сказать, что подобные физические явления — это одно и то же явление, рассматриваемое с использованием различных масштабов.

Профессор А.А. Гухман [7, 8] называл такое определение подобия «подобием в узком смысле». Подобие «в широком смысле» не включает требований об одинаковой физической природе процессов и одинаковой размерности определяющих процесс параметров, т. е. для такого понимания подобия достаточно удовлетворить требованиям о геометрическом подобии областей протекания процесса и об идентичности математического описания. Мы будем для такого расширенного понимания подобия использовать термин «аналогия». В § 2.6 примеры аналогии были рассмотрены.

## 3.2. Теоремы теории подобия

Основные свойства подобных явлений определены тремя теоремами. Эти теоремы имеют достаточно строгие, но весьма громоздкие доказательства. В настоящем издании упрощенное доказательстводается только для первой теоремы теории подобия и то лишь потому, что оно демонстрирует наиболее строгий путь получения чисел подобия для процессов гидродинамики и теплообмена. Для двух других теорем теории подобия приводятся лишь формулировки и краткие пояснения к их содержанию.

### 3.2.1. Первая теорема теории подобия

*Подобные явления имеют одинаковые (численно равные) числа подобия.* Теорема сформулирована и доказана Ж. Берtrandом (1848 г.).

Теорема определяет свойства физических явлений, подобие которых задано, предопределено и подчиняется определению, сформулированному в предыдущем параграфе. Докажем теорему для двух подобных явлений конвективного теплообмена. Для сокращения объема выкладок (только!) рассматриваем стационарные процессы; физические свойства жидкостей принимаем постоянными; не учтываем работу сил давления; нет внутренних источников тепла,  $\dot{q}_V = 0$ .

Процессы протекают (по условию теоремы) в геометрически подобных областях в системах координат  $\{x_k\}$  и  $\{x'_k\}$ .

Математическое описание для первого процесса:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0; \quad (3.1)$$

$$\rho u_k \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_l} + \mu \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k} + \rho g_l; \quad (3.2)$$

$$\rho c_p u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} + \mu \Phi_{diss}; \quad (3.3)$$

$$\Phi_{diss} = \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right). \quad (3.4)$$

Математическое описание второго процесса в системе  $\{x'_k\}$  идентично, но все входящие в него величины отмечены верхним индексом «штрих» (''). Несложно представить себе систему уравнений для второго процесса. В последующем мы будем всегда иметь в виду, что все преобразования для системы  $\{x_k\}$  повторяются в системе  $\{x'_k\}$ , но не будем загромождать текст переписыванием идентичных уравнений.

Приведем математическое описание к безразмерному виду, используя естественные масштабы. Для длины в системе  $\{x_k\}$  —  $l_0$ ; в системе  $\{x'_k\}$  —  $l'_0$  (практически это — диаметр  $d$  для канала, расстояние от передней кромки  $l_0$  — для пограничного слоя). Для скоростей масштабные величины обозначим соответственно  $U_0$  и  $U'_0$  (для канала это  $\bar{u}$ , для пограничного слоя  $U_\infty$ ).

При введении естественных масштабов для температуры  $T$  и давления  $p$  важно понимать, что абсолютные величины этих параметров не влияют на процесс, поскольку  $T$  и  $p$  входят в уравнения сохранения только под знаком производной. В каждом реальном процессе всегда можно выбрать некоторый уровень, от которого удобно в данной задаче отсчитывать эти параметры. Для температуры это, например, температура стенки или невозмущенного потока (в случае пограничного слоя). Итак, выбираем в качестве масштабов для температуры  $\vartheta_0$  и  $\vartheta'_0$  (для трубы  $\vartheta_0 = \bar{T} - T_c$ , т.е. разность среднемассовой температуры в некотором сечении, например во входном, и температуры стенки; для пограничного слоя  $\vartheta_0 = T_\infty - T_c$ ). Совершенно

естественно и переменную  $T$  в уравнениях (3.3) и (3.3') заменить на избыточные температуры  $\vartheta$  и  $\vartheta'$ .

Для давления выберем в качестве масштабов характерные разности давлений  $\Delta p$  и  $\Delta p'$  (например, разность входного и выходного давлений для канала или разность давлений в передней критической точке обтекаемого тела и в невозмущенном потоке в пограничном слое).

Наконец, для общности (например, для процессов теплообмена в условиях межпланетного полета или на другой планете) введем в качестве масштабов для ускорения массовых сил характерные ускорения  $g_0$  и  $g'_0$ .

Теперь все переменные в исходных уравнениях могут быть заменены их безразмерными аналогами в соответствии со следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_k &= \frac{x_k}{l_0} = \frac{x'_k}{l'_0}; & \tilde{x}_l &= \frac{x_l}{l_0} = \frac{x'_l}{l'_0}; \\ \tilde{u}_k &= \frac{u_k}{U_0} = \frac{u'_k}{U'_0}; & \tilde{u}_l &= \frac{u_l}{U_0} = \frac{u'_l}{U'_0}; \\ \frac{\vartheta}{\vartheta_0} &= \frac{\vartheta'}{\vartheta'_0} = \theta; & \tilde{p} &= \frac{p}{\Delta p} = \frac{p'}{\Delta p'}; & \tilde{g}_l &= \frac{g_l}{g_0} = \frac{g'_l}{g'_0}.\end{aligned}$$

После подстановки этих величин в исходные системы уравнений получим:

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_k} = 0; \quad (3.1a)$$

$$\frac{\rho U_0^2}{l_0} \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial \tilde{x}_k} = - \frac{\Delta p_0}{l_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_l} + \frac{\mu U_0}{l_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}_l}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k} + \rho g_0 \tilde{g}_l; \quad (3.2a)$$

$$\frac{\rho c_p U_0 \vartheta_0}{l_0} \tilde{u}_k \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}_k} = \frac{\lambda \vartheta_0}{l_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k} + \frac{\mu U_0^2}{l_0^2} \tilde{\Phi}_{diss}. \quad (3.3a)$$

Очевидно,

$$\tilde{\Phi}_{diss} = \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial \tilde{x}_k} \left( \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial \tilde{x}_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_l} \right).$$

Уравнение неразрывности в безразмерной форме (3.1а) осталось таким же, как и в исходном размерном виде (3.1), никаких новых преобразований к нему применять не следует. В уравнениях импульса и энергии (3.2а) и (3.3а) каждое слагаемое содержит размерный коэффициент и безразмерные переменные. Поделив все члены этих уравнений на коэффициенты при соответствующих первых членах, получим:

$$\tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial \tilde{x}_k} = - \frac{\Delta p}{\rho U_0^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_l} + \frac{\mu}{\rho U_0 l_0} \frac{\partial^2 \tilde{u}_l}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k} + \frac{g_0 l_0}{U_0^2} \tilde{g}_l; \quad (3.26)$$

$$\tilde{u}_k \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}_k} = \frac{\lambda}{\rho c_p U_0 l_0} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_k} + \frac{\mu}{\rho U_0 l_0} \frac{U_0^2}{c_p \vartheta_0} \tilde{\Phi}_{diss}. \quad (3.36)$$

Для системы  $\{x_k'\}$  получается идентичная система уравнений (3.1'а), (3.2'б), (3.3'б). Так как процессы подобны по условию, то безразмерные поля давления, скорости и температуры тождественны; значит, тождественны и безразмерные математические описания. Следовательно, безразмерные коэффициенты в (3.2б), (3.3б) и в (3.2'б), (3.3'б) численно равны. Эти безразмерные комплексы есть числа подобия; следовательно, теорема Бертрана доказана.

Рассмотрим полученные числа подобия. В уравнениях сохранения импульса это

$$\frac{\Delta p}{\rho U_0^2} = \frac{\Delta p'_0}{\rho' U'_0{}^2} = Eu,$$

$Eu$  — число Эйлера (Euler);

$$\frac{\mu}{\rho U_0 l_0} = \frac{\mu'}{\rho' U'_0 l'_0} = \frac{1}{Re},$$

$Re$  — хорошо известное число Рейнольдса (Reynolds);

$$\frac{U_0^2}{g_0 l_0} = \frac{U'_0{}^2}{g'_0 l'_0} = Fr,$$

$Fr$  — число Фруда (Froude).

В уравнении энергии с учетом того, что  $\lambda/(\rho c_p) = a$ , и того, что первый множитель в последнем слагаемом (3.3б) — обратное число Рейнольдса,

$$\frac{a}{U_0 l_0} = \frac{a'}{U'_0 l'_0} = \frac{1}{\text{Pe}},$$

Pe — число Пекле (Peclet);

$$\frac{U_0^2}{c_p \vartheta_0} = \frac{U'_0{}^2}{c'_p \vartheta'_0} = \text{Ec},$$

Ec — число Эккерта (Eckert).

Таким образом, доказано, что в подобных процессах конвективного теплообмена численно равны числа Эйлера, Рейнольдса, Фруда, Пекле и Эккерта. Поскольку  $\text{Pe} \equiv \text{Re} \cdot \text{Pr}$ , то числа Прандтля в этих процессах тоже одинаковы. Метод получения чисел подобия путем приведения уравнений сохранения к безразмерному виду позволяет понять и физический смысл этих чисел, но этому будет посвящен отдельный параграф.

### 3.2.2. Вторая теорема теории подобия

*Группа подобных явлений имеет одинаковые уравнения подобия. Этой лаконичной формулировке соответствует более развернутая: взаимозависимость размерных параметров, определяющих процесс, может быть представлена в виде зависимости между безразмерными комплексами, составленными из размерных параметров, т.е. в виде уравнения подобия, причем для группы подобных явлений уравнения подобия одинаковы.*

Вторая теорема теории подобия вошла в историю как теорема Бэкингема (Buchingham, 1914 г.). Однако еще в 1911 г. в записках Петербургского технологического института была опубликована статья профессора Федермана, содержащая общий анализ теории подобия, из которого теорема Бэкингема следует как частный случай [40]. Причем уже в 1912 г. результаты Федермана успешно использовались в работах лаборатории Н.Е. Жуковского.

Согласно первой теореме подобные явления имеют численно равные числа подобия. В процессе доказательства этой теоремы было фактически показано, что тождественно одинаковые поля существенных для процесса безразмерных параметров определяются коэффициентами безразмерных уравнений сохранения. Взаимозависимость

чисел подобия, включающих определяемые и определяющие параметры процесса, образует уравнение подобия для подобных явлений. Ясно, что в определенном диапазоне изменения определяющих процесс параметров (а значит, и в определенном диапазоне изменения чисел подобия) явления сохраняют свои закономерности и, следовательно, для них должны оставаться справедливыми уравнения подобия. Это и утверждает вторая теорема теории подобия. Группа подобных явлений — это совокупность качественно однородных явлений, для которых в определенном диапазоне изменения параметров между ними сохраняются одинаковые взаимосвязи.

В приведенном выше (§ 3.1) примере уравнение подобия для профиля скорости при стабилизированном ламинарном течении в круглой трубе является результатом теоретического анализа, справедливого при  $Re \leq 2300$  после завершения гидродинамической стабилизации, т.е. при  $x \geq 0,065Re \cdot d$ . Этими условиями и определяется группа подобных явлений в данном случае.

В гл. 1 были приведены уравнения для коэффициента трения (1.10) и теплообмена при обтекании плоской изотермической пластины (1.15), которые также служат примерами теоретически полученных уравнений подобия. Группа подобных явлений, для которых эти уравнения справедливы, — это обтекание плоской пластины при ламинарном режиме течения ( $Re_x \leq Re_{x \text{ кр}} \approx 3 \cdot 10^5$ ), для уравнения (1.15) еще добавляется ограничение на вид граничного условия ( $T_c = \text{const}$ ).

Более жестко ограничена группа подобных явлений, для которых справедливо уравнение подобия (1.30а), описывающее теплообмен в начальном термическом участке при ламинарном течении в круглой трубе при  $q_c = \text{const}$ :

$$Nu = 1,31 Gz^{1/3} = 1,31 \left( \frac{1}{Pe} \frac{x}{d} \right)^{-1/3}.$$

В этом случае, помимо требований, следующих из описания условий течения и вида граничных условий, накладывается ограничение на приведенную длину ( $x/d \leq 0,001Pe$ ), при которой расчетное уравнение обеспечивает необходимую точность. Само это уравнение также получено теоретически как степенная аппроксимация аналитического решения в виде бесконечного ряда.

Многие уравнения подобия, используемые в инженерных расчетах, получены в результате обобщения опытных данных. Примерами

эмпирических уравнений подобия являются приведенная в гл. 1 формула Диттуса—Белтера (1.34) или сходная формула М.А. Михеева:

$$Nu = 0,021 Re^{0,8} Pr^{0,43} (Pr_{ж}/Pr_c)^{0,25}. \quad (3.5)$$

Обе формулы относятся к стабилизированному теплообмену при турбулентном течении в круглой трубе. Уравнения подобия такого типа применимы лишь в том диапазоне изменения определяющих параметров, в котором были получены опытные данные, лежащие в основе этих уравнений. В случае двух обсуждаемых формул этот диапазон примерно одинаков:  $Re = 5 \cdot 10^3 \div 10^5$ ,  $Pr = 0,7 \div 10$ . Основное отличие формулы Михеева от формулы Диттуса—Белтера — учет влияния переменности свойств жидкости, что обеспечивает последний множитель в (3.5). Индексы «ж» и «с» означают, что число Прандтля в первом случае берется при среднемассовой температуре жидкости, а во втором — при температуре стенки.

Все рассмотренные примеры показывают, что группу подобных явлений всегда образуют качественно однородные процессы, причем это их качество сохраняется лишь в некотором конечном диапазоне изменения безразмерных параметров. Но при этом любое уравнение подобия в общем информативнее, чем прямая связь между размерными параметрами, поскольку каждому значению безразмерного комплекса ( $Re$ ,  $Pr$ ,  $Pe$ ) соответствует бесконечное число возможных конкретных реализаций

### 3.2.3. Третья теорема теории подобия

Третья теорема, доказанная В.М. Кирпичёвым и А.А. Гухманом (1930), определяет необходимые и достаточные условия подобия.

*Явления подобны, если подобны их условия однозначности, а определяющие критерии подобия, составленные из величин, входящих в условия однозначности, численно равны.*

Условия однозначности — это начальные и граничные условия, геометрические характеристики области протекания процесса, теплофизические свойства. Можно сказать, что это — совокупность заданных параметров, определяющих процесс.

В этой теореме вводятся терминологические различия чисел подобия на определяющие (критерии подобия) и определяемые (числа подобия). Сегодня в научной и даже в учебной литературе эта дифференциация почти не применяется, но по существу она, конечно, всегда должна осознаваться при анализе любой конкретной задачи. В однофазном конвективном тепломассообмене обычно опре-

деляющими критериями подобия являются числа Прандтля и Шмидта ( $\text{Pr}$ ,  $\text{Sc}$ ), определяющие свойства среды, и число Рейнольдса ( $\text{Re}$ ); определяемые — это числа Нуссельта, Шервуда или Стантона ( $\text{Nu}$ ,  $\text{Sh}$ ,  $\text{St}$ ).

Однако свойство быть определяющим критерием подобия, строго говоря, не является универсальным для данного числа. Все определяется условиями задачи. Например, в задачах теплообмена при конденсации пара число Рейнольдса, построенное по расходу жидкости в пленке конденсата ( $\text{Re}_{\text{пл}}$ ), — это определяемое число подобия, фактически включающее в себя искомое значение среднего коэффициента теплоотдачи.

### 3.3. Физический смысл критериев и чисел подобия

Наиболее надежный и обоснованный подход к получению формул для чисел подобия — это использование дифференциальных уравнений сохранения (импульса, энергии, массы компонента в смеси). В п. 3.2.1 продемонстрировано, как приведением уравнений сохранения к безразмерному виду с использованием естественных масштабов задачи получаются числа подобия. Каждое такое число представляет собой меру отношения различных физических эффектов.

#### 3.3.1. Гидродинамические числа подобия

Фактически числа подобия в п. 3.2.1 получались путем соотнесения различных членов уравнений сохранения импульса и энергии. Уравнение импульса (3.2) можно рассматривать как баланс сил (различной физической природы), что подчеркивалось при анализе этого уравнения в п. 2.3.3 [уравнения (2.10) и (2.10а)]. Следовательно, *гидродинамические числа подобия — это мера отношения сил различной физической природы*. В уравнении (3.2) каждое слагаемое — это сила на единицу объема ( $\text{Н}/\text{м}^3$ ); практически удобнее определять структуру выражений для различных сил, отнесенных к единице площади. Итак, опираясь на уравнение (3.2а), имеем:

силы инерции  $f_i \sim \rho U_0^2$ ;

силы давления  $f_p \sim \Delta p$ ;

силы вязкости  $f \sim \mu U_0 / l_0$ ;

массовые силы  $f_g \sim \rho g_0 l_0$ .

Эти четыре различные силы, входящие в уравнение сохранения импульса, дают три независимых числа подобия:

$$f_i/f_\mu = (\rho U_0 l_0)/\mu = \text{Re};$$

$$f_p/f_i = \Delta p/(\rho U_0^2) = \text{Eu};$$

$$f_i/f_g = \frac{U_0^2}{g_0 l_0} = \text{Fr}.$$

Теперь введенные в п. 3.2.1 числа Рейнольдса, Эйлера и Фруда представлены как мера отношения различных по природе сил. Другие возможные комбинации сил, полезные в некоторых задачах, могут быть получены из этих чисел подобия. (Набор из четырех параметров одинаковой размерности дает лишь три линейно независимых безразмерных комплекса; какие именно комплексы сформировать в заданной ситуации, зависит от содержания задачи.) Ниже будут рассмотрены еще два безразмерных числа, имеющих практическое применение. Отношение сил вязкости к массовым дает число, не имеющее устоявшегося имени, но весьма полезное при качественном анализе условий всплытия или падения малых тел в вязких жидкостях:

$$N_{\mu g} = f_\mu/f_g \equiv \text{Fr}/\text{Re} = \frac{U_0 \mu}{\rho g_0 l_0^2}.$$

При установившемся движении массовые силы, вызывающие движение, и силы вязкости, ему препятствующие, уравновешены, т.е. в этом случае  $N_{\mu g} = \text{const}$ . Это сразу позволяет найти структуру формулы для скорости падения (всплытия) дискретной частицы в жидкости:

$$U_0 \sim \rho g_0 l_0^2 / \mu.$$

Для малой сферической частицы диаметром  $d = l_0$ , падающей (или всплывающей) в вязкой жидкости при  $\text{Re} \ll 1$ , скорость установившегося движения определяет известная формула Стокса:

$$U_\infty = (1/18)g\Delta\rho d^2/\mu.$$

Легко видеть, что эти формулы совпадают с точностью до константы, которая, конечно, не может быть определена методами теории подобия; в формуле Стокса учтено также, что массовые силы фактически зависят не от плотности жидкости, а от разности плотностей

частицы и жидкости  $\Delta\rho = \rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{ж}}$ , а  $g_0 = g$  — земному ускорению свободного падения.

Важную комбинацию образует соотношение

$$\frac{f_i f_g}{f_\mu^2} = \frac{gl_0^3}{v^2} = \text{Ga}, \quad (3.6)$$

где  $\text{Ga}$  — число Галилея (Galilei);  $v = \mu/\rho$ ; здесь и в дальнейшем мы опускаем индекс (0) у ускорения массовых сил, имея в виду под  $g$  в каждом случае фактическое ускорение в данной системе (чаще всего — земное).

Новый набор чисел подобия появляется при переходе к двухфазным (газожидкостным) системам. Во-первых, на криволинейной межфазной поверхности действует лапласов скачок давлений. Для сферы радиусом  $R$  имеем

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 2\sigma/R.$$

Эта формула определяет структуру выражения для сил поверхностного натяжения:

$$f_\sigma \sim \sigma/l_0.$$

Следовательно, к четырем силам, актуальным для однофазной гидродинамики, добавляется еще одна, так что для газожидкостных систем может быть образовано новое линейно независимое число подобия. Например, число Вебера (Weber):

$$\text{We} = f_i/f_\sigma = \rho U_0^2 l_0 / \sigma.$$

Обычно в двухфазных системах в качестве линейного масштаба используется  $d$  — диаметр пузырька или капли; в некоторых случаях (например, при численном решении задач гидростатики газожидкостных систем)  $l_0 = R$  — характерный радиус кривизны поверхности раздела.

В газожидкостных системах претерпевает изменение структура выражения для массовых сил:

$$f_g \sim \Delta\rho g l_0,$$

где  $\Delta\rho = \rho' - \rho''$  — разность плотностей жидкости и пара. С учетом этого определим широко используемое в задачах гидростатики газожидкостных систем число Бонда (Bond):

$$\text{Bo} = f_g/f_\sigma = g \Delta\rho l_0^2 / \sigma. \quad (3.7)$$

Ясно, что  $Bo \equiv We/Fr$ , т.е. включение в анализ одной новой силы позволяет получить лишь одно линейно независимое число подобия.

Наличие двух фаз в потоке ведет к тому, что число  $Fr$  может определяться по-разному. Если несущая (дисперсионная) фаза — газ, то  $f_i \sim \rho'' U_0^2$ ,

$$Fr'' = \rho'' U_0^2 / (g \Delta \rho l_0),$$

причем  $\rho''/\Delta \rho \ll 1$ . Если дисперсионная фаза — жидкость, то  $f_i \sim \rho' U_0^2$ ,

$$Fr' = \rho' U_0^2 / (g \Delta \rho l_0) \approx U_0^2 / (gl_0).$$

Число Галилея в двухфазных системах (с несущей жидкой фазой) преобразуется в число Архимеда:

$$\frac{f_i f_g}{f_\mu^2} = \frac{\rho' U_0^2 g \Delta \rho l_0^3}{(\mu U_0)^2} = \frac{gl_0^3}{v^2} \frac{\Delta \rho}{\rho'} = Ar. \quad (3.8)$$

В процессах однофазной естественной конвекции движение возникает под действием массовых сил благодаря неоднородности плотности. Если плотность вдали от поверхности теплообмена равна  $\rho_0$ , то плотность в температурном пограничном слое при небольших ее изменениях

$$\rho(T) = \rho_0 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \Delta T + \dots$$

Отсюда следует

$$\frac{\rho_0 - \rho(T)}{\rho_0} = - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \Delta T = \beta \Delta T,$$

где  $\beta$  — термический коэффициент объемного расширения. Таким образом, характерная разность плотностей, которая в поле массовых сил и приводит к возникновению свободной конвекции, может быть выражена как

$$\Delta \rho = \rho_0 \beta \Delta T, \quad \text{или} \quad \Delta \rho = \rho \beta \Delta T.$$

Массовые силы, вызывающие свободноконвективное движение, запишутся в виде

$$f_g \sim g \rho \beta \Delta T l_0,$$

а число Галилея преобразуется в новый критерий подобия:

$$\frac{f_i f_g}{f_\mu^2} = \frac{\rho U_0^2 g \beta \Delta T l_0^3}{(\mu U_0)^2} = \frac{g \beta \Delta T l_0^3}{v^2} = Gr$$

— число Грасгофа (Grashof).

Наконец, укажем, что с числами  $Ga$ ,  $Ar$  и  $Bo$  связаны специфические линейные масштабы, достаточно широко используемые в теории теплообмена. Равенство любого числа подобия единице означает соизмеримость сил, которые входят в определение этого числа. В частности, условия  $Ga = 1$  или  $Ar = 1$  определяют размер области, в которой произведение сил инерции и массовых примерно равно квадрату сил вязкости. Из (3.6) при  $Ga = 1$  получаем

$$l_g = \sqrt[3]{v^2/g}, \quad (3.9)$$

а из (3.8) при  $Ar = 1$

$$l_g = \sqrt[3]{\frac{v^2 \rho'}{g \Delta \rho}}. \quad (3.9a)$$

Эти линейные масштабы используются при анализе течения гравитационных пленок и процессов теплообмена при конденсации. При этом обычно для маловязких жидкостей порядок величины  $l_g$  составляет  $10^{-5}$  м.

Условие  $Bo = 1$  определяет линейный масштаб области, для которой сопоставимы силы тяжести и поверхностного натяжения. Из (3.7) получаем

$$l_0 \equiv b = \sqrt{\sigma/(g \Delta \rho)}. \quad (3.10)$$

Этот линейный масштаб используется очень широко (иногда — чрезмерно широко) в задачах механики газожидкостных систем. Величина  $b$  называется *капиллярной постоянной* (постоянной Лапласа). Для воды при атмосферном давлении в земных условиях  $b \approx 2,5$  мм, а в условиях космического полета, например, на борту МКС (международная космическая станция) капиллярная постоянная имеет порядок 1 м.

### 3.3.2. Числа подобия в процессах теплообмена

Слагаемые уравнения энергии (3.3), как и его более полных вариантов, рассмотренных в п. 2.4.2, отражают различные механизмы, вызывающие изменение энергии в единичном контрольном объеме;

размерность этих слагаемых —  $\text{Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^3) = \text{Вт}/\text{м}^3$ . При этом если не считать внутренних источников тепла  $\dot{q}_V$  в различных видах уравнений (2.15) и (2.16), то все члены стационарного уравнения энергии представляют собой дивергенцию от потоков энергии различной физической природы. Чтобы получить структуру выражений для основных тепловых потоков, входящих в уравнение энергии, нужно домножить коэффициенты в уравнении (3.3а) на  $l_0$ . Тогда получим:

$$\text{конвективный поток энергии } q_{\text{конв}} \sim \rho c_p U_0 \Delta T;$$

$$\text{молекулярный поток энергии } q_\lambda \sim \lambda \Delta T / l_0;$$

$$\text{конвективный поток кинетической энергии } q_{\text{к.э.}} \sim \rho U_0^3.$$

Характерная разность температур  $\Delta T$  здесь применяется вместо масштабной величины  $\vartheta_0$  в уравнениях (3.3а) и (3.3б); для получения  $q_{\text{к.э.}}$  использовано уравнение сохранения полной энергии (2.12б).

В граничных условиях задач конвективного теплообмена всегда в той или иной форме используется выражение для теплового потока на стенке, т. е. фактически выражение закона Ньютона—Рихмана:

$$q_c = \alpha \Delta T.$$

Это выражение включает искомую величину — коэффициент теплопередачи  $\alpha$ .

Теперь ясно, что полученные в п. 3.2.1 как безразмерные коэффициенты в уравнении (3.3б) числа Пекле и Эккерта могут быть представлены в виде

$$\text{Pe} = \frac{U_0 l_0}{\alpha} = \frac{q_{\text{конв}}}{q_\lambda}; \quad \text{Ec} = \frac{U_0^2}{c_p \Delta T} = \frac{q_{\text{к.э.}}}{q_{\text{конв}}}.$$

И в целом, числа подобия в процессах теплообмена — это отношения тепловых потоков различной физической природы. Два введенных в гл. 1 выражения для безразмерного КТО — числа Нуссельта и Стантона ( $Nu$  и  $St$ ) — можно представить соответственно как

$$Nu = q_c / q_\lambda = \alpha l_0 / \lambda; \quad St = q_c / q_{\text{конв}} = q_c / (\rho c_p U_0 \Delta T) \equiv \alpha / (\rho c_p U_0).$$

Так как  $Pe \equiv Re \cdot Pr$ , то число  $Pr = \mu c_p / \lambda$ , которое, конечно, является безразмерной характеристикой теплофизических свойств, может быть представлено как

$$Pr = Pe / Re = (q_{\text{конв}} / q_\lambda) (f_\mu / f_i).$$

Наконец, укажем, что при анализе свободной конвекции широко используется число Рэлея (Rayleigh), определяемое как  $\text{Ra} \equiv \text{Gr} \cdot \text{Pr}$ . Учитывая введенное в предыдущем пункте число Грасгофа и выше представленную форму числа Прандтля, получаем

$$\text{Ra} = (f_i f_g / f_\mu^2) (f_\mu / f_i) (q_{\text{конв}} / q_\lambda) = \frac{g \beta \Delta T l_0^3}{\nu a}.$$

### 3.3.3. Числа подобия в процессах массообмена

По аналогии с числами подобия в процессах теплообмена *массообменные числа подобия* можно рассматривать как меру отношения потоков массы компонента различной физической природы. Используя уравнения (2.22) и (2.22а), можно получить:

конвективный поток массы компонента  $a$  —  $j_{\text{конв}}^a \sim \rho \Delta C^a U_0$ ;

молекулярный (диффузионный) поток массы компонента  $a$  —  $j_D^a \sim \rho \Delta C^a D / l_0$ .

Характерная для рассматриваемого процесса разность массовых долей (концентраций) компонента  $\Delta C^a$  во внешних задачах (пограничный слой) — это  $C_\infty^a - C_c^a$ , где индексы  $\infty$  и « $c$ » относятся соответственно к невозмущенному потоку и к «стенке», под которой в задачах массообмена может пониматься и поверхность жидкости.

В случае канальных течений  $\Delta C^a = \bar{C}^a - C_c^a$ , где  $\bar{C}^a$  — среднемассовая концентрация компонента  $a$  в некотором сечении канала. Заметим, что выражение для диффузионного потока повторяет структуру закона Фика.

Отношение конвективного потока массы к диффузионному дает диффузионное число Пекле:

$$\text{Pe}_D = j_{\text{конв}}^a / j_D^a = U_0 l_0 / D.$$

Этот критерий обычно является определяющим в задачах массообмена. Очевидно,

$$\text{Pe}_D \equiv \text{Re} \cdot \text{Sc} = (\rho U_0 l_0 / \mu)(\nu / D),$$

где  $\text{Sc} = \nu / D$  — число Шмидта (Schmidt) — безразмерная характеристика теплофизических свойств смеси; его в прошлом называли диффузионным (массообменным) числом Прандтля.

Целью решения задач массообмена обычно является определение потока массы на межфазной поверхности (на «стенке»). Практически это может быть и твердая стенка, покрытая, например, слоем нафтальина, но чаще — поверхность жидкости. Поток массы компонента на стенке

$$j_c^a = \rho \Delta C^a \beta.$$

Эта запись фактически является определением коэффициента массоотдачи  $\beta$  (аналога  $\alpha$ ); его размерность — метр в секунду ( $\text{м}/\text{с}$ ). Ясно, что для внешних задач  $\rho \Delta C^a = \rho_\infty^a - \rho_c^a$ .

Безразмерный коэффициент массоотдачи — число Шервуда (Sherwood) — это отношение массового потока компонента на стенке к диффузионному:

$$\text{Sh} = j_c^a / j_D^a = \beta l_0 / D.$$

Здесь очевидна аналогия с числом Нуссельта; прежде в литературе использовали термин диффузионное число Нуссельта  $\text{Nu}_D$ .

Другое выражение для безразмерного коэффициента массоотдачи — это диффузионное число Стантона

$$\text{St}_D = j_c^a / (\rho U_0) = \beta \Delta C^a / U_0.$$

Иногда используют другое определение  $\text{St}_D$ :

$$\text{St}_D = j_c^a / j_{\text{конв}}^a = \beta / U_0.$$

Важно помнить, что по порядку величины  $\text{St}_D$  близок к коэффициенту трения, т.е.  $\text{St}_D \ll 1$  всегда.

Ясно, что в приложении методов теории подобия к задачам массообмена прослеживается аналогия с описанием соответствующих задач теплообмена. Если в данном веществе  $v = \text{idem}$ ,  $D = a$ , т.е. число Льюиса—Семенова  $\text{Le} = 1$ , то при соблюдении геометрического подобия областей протекания и оговоренных в § 2.6 условий, обеспечивающих идентичность математического описания, должна выполняться аналогия процессов тепло- и массообмена. Это отражается в использовании идентичных уравнений подобия. Поскольку точное равенство  $\text{Le} = 1$  — случай исключительный, то в этих уравнениях подобия используются для отражения влияния свойств

вещества соответственно числа  $Pr$  и  $Sc$ . Типичная форма представления уравнений подобия для конвективного теплообмена:

$$Nu = C Re^m Pr^n; \quad (3.11)$$

для массообмена

$$Sh = C Re^m Sc^n. \quad (3.12)$$

В случае аналогии  $C = \text{idem}$ ,  $m = \text{idem}$ ,  $n = \text{idem}$ .

### 3.3.4. Параметрические числа подобия (симплексы)

Введенные выше числа подобия — это мера отношения однотипных физических параметров (сил, потоков энергии, потоков массы компонента) различной природы. Эти числа содержат весьма разнородные свойства среды и параметры процесса, порой они достаточно сложны по структуре (в числах  $Gr$ ,  $Ra$  пять или шесть различных по содержанию и размерности величин).

Вместе с тем во многих практических задачах возникает необходимость сопоставлять одноименные параметры в различных точках пространства. В двухфазных (газожидкостных) системах обычно удается выделить одну определяющую процесс характеристическую скорость, но потоки импульса в жидкости и в газе при этом различны из-за сильно различающихся плотности и вязкости. По этой причине для характеристики гидродинамики газожидкостных систем, помимо введенных в п. 3.3.1 чисел подобия, часто вводят отношения одноименных параметров  $\mu''/\mu'$ ,  $\rho''/\rho'$ . По существу, такие отношения — это тоже числа подобия; их называют параметрическими, или симплексами.

В задачах однофазного теплообмена для учета влияния изменения свойств жидкости поперек потока на КТО вводят симплекс  $\mu_{ж}/\mu_{c}$ . Для газов, в которых с температурой сильно изменяются все существенные для процесса теплофизические свойства, аналогичную роль играет параметрический критерий  $\bar{T}/T_c$  или  $T_\infty/T_c$  — температурный фактор. (Шкала для температуры, конечно, абсолютная!)

В некоторых случаях при анализе процессов теплообмена оказывается необходимым учитывать два и более линейных масштабов. В рассмотренных в § 1.4 задачах ламинарного теплообмена в начальном участке круглой трубы интенсивность теплоотдачи изменяется по длине канала. Если числа  $Re$  и  $Nu$  строятся по диаметру  $d$ , что совершенно естественно для описания теплообмена в трубах, то

их взаимосвязь не может отразить указанное изменение КТО по длине. Использование в уравнениях подобия одновременно чисел  $Nu$  и  $Nu_x$ ,  $Re$  и  $Re_x$  неудобно и нелогично. Поэтому для описания теплообмена вводится параметрический критерий  $x/d$ . Для теплообмена в начальном гидродинамическом участке этот симплекс объединен с  $Re$  [как  $(Re \cdot d/x)^{1/2}$ ], а в начальном термическом участке — с числом  $Pe$ , образуя число Гретца  $Gz = Pe \cdot d/x$  [или приведенную длину  $(1/Pe)(x/d)$ ].

При обтекании поперечным потоком жидкости шахматного пучка труб числа  $Nu$  и  $Re$  строятся по диаметру. Но в определенных диапазонах чисел  $Re$  зависимость  $Nu(Re, Pr)$  включает дополнительные симплексы  $(S_1/S_2)^m$ , где  $S_1$  и  $S_2$  — соответственно поперечный и продольный шаг пучка;  $m$  — эмпирически подбираемый показатель степени (обычно  $m = 0,2$ ).

При течении в змеевиках оказывается необходимым учитывать влияние на гидродинамику и теплообмен отношения диаметров змеевика  $d_{зм}$  и трубы  $d$ . В частности, условия турбулентного перехода определяются числом Дина (Dean):

$$De = Re(d/d_{зм})^{1/2}.$$

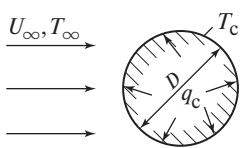
В змеевиках, оказывается, устойчивость ламинарного течения повышается,  $Re_{kp}$  возрастает в сравнении с течением в прямой трубе.

### 3.4. Практическое использование теории подобия

#### 3.4.1. Теория подобия как научная основа экспериментальных исследований

В отличие от заводских испытаний, проверяющих соответствие технических устройств четко сформулированным требованиям, экспериментальное (научное) исследование направлено на выявление некоторых общих закономерностей изучаемого процесса. Осознанное планирование, продуманность методики — залог успешности экспериментов. Теория подобия своими теоремами отвечает на три важных вопроса, встающих перед исследователем:

- 1) какие величины измерять в опытах? — те, которые входят в числа подобия (первая теорема);
- 2) в каком виде целесообразно представлять результаты экспериментов? — в виде уравнений подобия (вторая теорема);



**Рис. 3.2. Схема обтекания цилиндра поперечным потоком жидкости**

3) на какие процессы можно распространять полученные уравнения подобия? — на те, у которых подобны условия однозначности, а определяющие критерии подобия численно равны (третья теорема).

Проиллюстрировать сказанное удобнее всего на конкретном примере. Пусть необходимо выполнить исследование теплообмена при поперечном обтекании круглой трубы (рис. 3.2). Ясно, что предстоит выявить зависимость КТО от скорости течения  $U_\infty$ , диаметра трубы  $D$  и свойств жидкости (газа). Общий анализ математического описания показывает, что в стационарной задаче из уравнений гидродинамики и энергии (п. 3.2.1) получаются числа подобия:  $Re$ ,  $Eu$ ,  $Fr$ ,  $Pr$ ,  $Ec$ . Массовые силы, входящие в число Фруда, при вынужденном обтекании, очевидно, несущественны; число Эйлера  $Eu$  — чисто гидродинамический параметр. Если нет задачи изучить силу сопротивления, то  $Eu$  (как и  $Fr$ ) можно не рассматривать. Число Эккерта  $Ec$  становится значимым при высоких скоростях течения газа, что обычно неактуально для поперечного обтекания труб.

Остаются, следовательно, числа Рейнольдса и Прандтля ( $Re$ ,  $Pr$ ). Число  $Pr$  — характеристика теплофизических свойств вещества, определяемая в основном температурой; следовательно, первая величина, которую обязательно надо измерять в планируемом эксперименте, — это температура потока жидкости  $T_\infty$ . Ее знание необходимо и для определения других свойств жидкости, и (как будет ясно из дальнейшего) при расчете коэффициента теплоотдачи.

Число  $Re = \rho U_\infty D / \mu$ , следовательно, помимо нахождения в справочнике теплофизических свойств жидкости при  $T_\infty$ , нужно измерить наружный диаметр трубы  $D$ , а затем проводить эксперименты при различных скоростях течения, т.е. искать зависимость  $\alpha(U_\infty)$ . Так как  $\alpha = q_c / (T_c - T_\infty)$ , то в эксперименте при каждом значении  $U_\infty$  необходимо измерять плотность теплового потока на стенке и температуру наружной поверхности  $T_c$ . (Мы не затрагиваем здесь вопросов техники эксперимента, поскольку это — самостоятельная область теплофизики.)

Кроме определяющих чисел подобия в искомом уравнении подобия присутствует определяемое число — безразмерный КТО,  $Nu =$

$= \alpha D/\lambda$ . Таким образом, из общего анализа следует, что общая форма искомого уравнения подобия — это

$$\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Re}, \text{Pr}). \quad (3.13)$$

Намеченных измерений достаточно для построения конкретной опытной зависимости, пока — на результатах для одной жидкости.

В большинстве практических задач связь  $\alpha(U_\infty)$  представляет собой степенную зависимость. [Это отражают, в частности, приведенные выше уравнения подобия (3.11) и (3.12).] Поэтому удобно результаты первичных измерений представлять в логарифмических координатах, в которых такая зависимость выглядит как линейная.

В рассматриваемом случае и размерная связь  $a \sim U_\infty^m$ , и связь безразмерных комплексов  $\text{Nu} \sim \text{Re}^m$  приводят в конечном счете к одному результирующему. Логичнее сразу строить безразмерную зависимость, как это показано на рис. 3.3. В данной задаче аппроксимация опытных данных должна привести к уравнению

$$\text{Nu} = C_1 \text{Re}^{0.6}. \quad (3.13a)$$

Уже этот результат показывает, что  $\alpha \sim D^{-0.4}$ , демонстрируя эффективность теории подобия при обработке результатов опытных измерений. Специальных опытов с трубами разных диаметров проводить не нужно!

Первичная зависимость (3.13а) соответствует условию  $\text{Pr} = \text{idem}$ , так как рассматривались результаты измерений на одной жидкости при фиксированной температуре. Если эксперимент проводится с жидкостью большой вязкости, то, изменяя  $T_\infty$ , можно выявить зависимость КТО от  $\text{Pr}$ . Другой путь, используемый на практике чаще, — проведение опытов с газами и капельными жидкостями, для которых

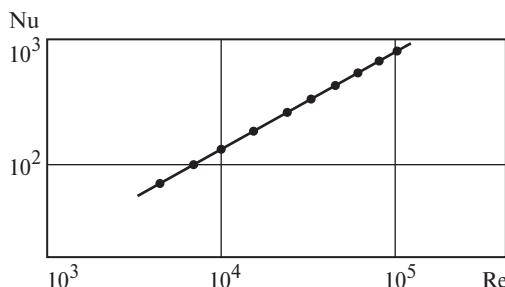


Рис. 3.3. Опытная зависимость безразмерного КТО при обтекании цилиндра от числа  $\text{Re}$

значения числа  $\text{Pr}$  различаются существенно. В любом случае после проведения таких экспериментов их результаты можно представить в форме  $\text{Nu}/\text{Re}^{0,6} = f(\text{Pr})$ . Вид функции, определенный на основе многих экспериментов,  $f(\text{Pr}) = \text{Pr}^{0,37}$ .

Итоговое уравнение подобия согласно [10]

$$\text{Nu} = 0,26 \text{Re}^{0,6} \text{Pr}^{0,37}. \quad (3.14)$$

Оно справедливо при  $\text{Re} = 10^3 \div 2 \cdot 10^5$ ,  $\text{Pr} = 0,7 \div 300$ . Диапазон чисел Прандтля определяется фактически использованным в различных экспериментах набором теплоносителей; по числам Рейнольдса в опытах выходили далеко за указанный диапазон, но вне его зависимости получаются другие.

Таким образом, мы показали, как на практике, используя выводы теории подобия (три ее теоремы), грамотно провести опытное исследование теплообмена.

Конечно, действительный путь к уравнению (3.14) сложнее, чем это можно представить по изложению. В частности, чтобы выявить диапазон применимости уравнения подобия по числу  $\text{Re}$ , необходимо было провести большое число измерений для обоснованного усреднения данных в указанном и соседних диапазонах изменения  $\text{Re}$ .

Практически важный вопрос: при каких плотностях тепловых потоков  $q_c$  лучше производить измерения? Так как  $\alpha$  — гидродинамический параметр, то непосредственно на КТО  $q_c$  не влияет. Целесообразно иметь невысокие  $q_c$ , но достаточные, чтобы относительная погрешность в расчете  $q_c$  и при измерении  $\Delta T$  была небольшой. Высокие значения  $q_c$  позволяют выяснить эффект «негидродинамического» фактора — влияние переменности свойств на теплообмен. Для капельной жидкости это приведет к появлению в (3.14) множителя  $(\mu_\infty/\mu_c)^n$ , для газов —  $(T_\infty/T_c)^m$ . Обычно в этом уравнении подобия теплофизические свойства ( $\mu, c_p, \lambda, \rho$ ) выбираются при

$$\bar{T} = (T_\infty + T_c)/2.$$

### 3.4.2. Теория подобия и моделирование

Моделирование — изучение процессов на *модели* с целью переноса выявленных закономерностей на *объект*. Во многих случаях моделирование минимизирует риски при создании сложных технических устройств. (Компьютерное моделирование, надежность которого предполагает адекватность математического описания объекту,

здесь не рассматривается.) Моделирование широко используется в авиации, космонавтике. При этом во многих случаях на земных установках (аэродинамические трубы, термобарокамеры, бассейны) воспроизводят «штатные» условия на моделях тех же размеров, что и реальные объекты.

Часто к моделированию прибегают, чтобы изучить процесс на уменьшенных моделях реальных объектов. В этом случае возникают трудности, иногда непреодолимые. Перенести результаты исследований с модели на объект можно, если выполняются все условия подобия: геометрическое подобие, идентичность процесса, равенство определяющих критериев подобия.

Легко понять, что последнее условие во многих случаях выполнить сложно. К примеру, в магистральных газопроводах диаметром  $d = 1440$  мм скорость газа обычно  $\bar{u} \approx 30 \div 60$  м/с. Ясно, что на том же газе в трубе, например, с десятикратно меньшим диаметром невозможно выдерживать условие  $Re = idem$ : десятикратный рост скорости не осуществим технически. К тому же при высоких дозвуковых скоростях перестает выполняться условие несжимаемости газа, которое вполне применимо к течению в реальном газопроводе. В таких ситуациях возможно моделирование с использованием капельной жидкости.

Например, некоторые вопросы аэродинамики газового тракта котельной установки успешно изучались на водяной гидравлической модели. Динамическая вязкость газа много меньше, чем у жидкости; но кинематическая, напротив, выше. У воды комнатной температуры  $v \approx 1 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, при нагреве до 40—50 °С она уменьшается в 2—3 раза. Горячие газы (из-за роста  $\mu$  и снижения  $\rho'$ ) могут иметь кинематическую вязкость в 50—100 раз больше ( $v \approx 2 \div 5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с). Это позволяет обеспечить в водяной гидравлической модели  $Re = \rho U_0 l_0 / \mu = idem$  при уменьшении  $l_0 = d$  в 10 раз и меньшей скорости течения. На модели можно изучать, в частности, условия обтекания различных поверхностей (воздухоподогреватель, водяной экономайзер, конвективные поверхности) потоком горячих газов.

Сложные и не до конца решенные проблемы связаны с моделированием теплогидравлики в элементах оборудования АЭС (активная зона ядерного реактора, парогенератор). Активная зона (АЗ) реактора ВВЭР — это сотни тепловыделяющих сборок (ТВС) с твэлами диаметром 9,6 мм, диаметр и высота корпуса 3—4 м. Даже геометрическое моделирование всей АЗ при наличии элементов со столь различными линейными размерами — задача, по сложности сопоставимая

с созданием объекта. Сегодня основной путь — это «частичное» моделирование, когда эксперименты проводят на сборке из 7—37 модельных электрообогреваемых стержней натурных размеров, что составляет лишь малую часть одной реальной ТВС. Но и в этом случае используемая в эксперименте мощность может составлять десятки мегаватт (!). При таком методе моделирования неизбежно часть вопросов остается «за кадром», в частности роль возможных поперечных потоков теплоносителя.

Очень трудно моделировать условия свободной конвекции на больших объектах. Число Грасгофа  $\text{Gr} \sim l_0^3$ , что делает практически невозможным соблюдение условий  $\text{Gr} = \text{idem}$  на модели. Моделирование процессов при тяжелой аварии (с расплавлением АЗ) потребовало расчета свободной конвекции на поверхности корпуса реактора (внутри корпуса — расплав, снаружи — охлаждающая вода). Уровни температур и размеры таковы, что характерные числа  $\text{Gr}$  (или  $\text{Ra}$ ) приблизительно  $10^{15}$ , что в  $\sim 100$  раз больше, чем исследовались ранее. Физическое моделирование таких процессов затруднительно.

Конечно, существуют относительно простые задачи моделирования, например, элементов теплообменных аппаратов, различных охлаждаемых устройств, где не только геометрическое подобие, но и равенство определяющих чисел подобия ( $\text{Re}$ ,  $\text{Gr}$ ) обеспечивается довольно легко.

### 3.5. Теория размерностей

Содержание теории размерностей определяется  $\pi$ -теоремой Бэкингема: *если некоторое явление определяется взаимозависимостью  $n$  размерных параметров  $q_i$ , из которых  $t$  имеют независимую размерность, то оно может быть описано уравнением подобия, содержащим  $n - t$  безразмерных чисел подобия.*

Пусть связь размерных параметров представлена как

$$F_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_m, q_{m+1}, \dots, q_n) = 0. \quad (3.15)$$

Тогда согласно  $\pi$ -теореме существует эквивалентная связь безразмерных комплексов, составленных из  $q_i$ :

$$F_2(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0. \quad (3.16)$$

Эта теорема имеет строгое, но очень громоздкое доказательство, которое можно найти в литературе, специально посвященной теории подобия [7, 8, 40]. Само название —  $\pi$ -теорема — связано только

с тем, что Бэкингем использовал греческую букву  $\Pi$  для обозначения безразмерных комплексов.

При наличии замкнутого математического описания процесса  $\pi$ -теорема ведет к тому же результату, что и приведение уравнений сохранения к безразмерному виду с помощью естественных масштабов. Чтобы показать это, вернемся к анализу уравнения сохранения импульса для несжимаемой жидкости с постоянными свойствами, которое рассматривалось в п. 3.2.1. Очевидно, уравнение (3.2) выражает взаимозависимость шести размерных параметров, что может быть представлено в форме уравнения (3.15) как

$$F_1(u_l, \rho, \mu, \Delta p, x_k, g) = 0.$$

Это — самая общая форма функциональной связи, выражаемой уравнением (3.15). В любой конкретной задаче вместо  $u_l$  и  $x_k$  должны быть взяты характерные параметры  $U_0$  и  $l_0$ , т. е. размерная связь параметров представляется в виде

$$F(U_0, l_0, \rho, \mu, \Delta p, g) = 0. \quad (3.15a)$$

Из шести размерных параметров, входящих в уравнение (3.15a), независимую размерность имеют три, поскольку в уравнениях гидромеханики всегда представлены три размерности: килограмм, метр, секунда (кг, м, с). Фактически необходимо выбрать три любых параметра, которые в совокупности включают эти размерности, и «назначить» их параметрами с независимой размерностью. Размерность остальных трех параметров может быть получена через размерности выбранных параметров. Пусть в рассматриваемом примере такими параметрами будут:

$$[l_0] = \text{м}; \quad [U_0] = \text{м}/\text{с}; \quad [\rho] = \text{кг}/\text{м}^3.$$

(В данном случае символ «квадратные скобки» вводится для обозначения размерности параметра, в этих скобках заключенного.) Размерность трех остальных параметров:

$$[\mu] = \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}) = [\rho][U_0][l_0];$$

$$[g] = \text{м}/\text{с}^2 = [U_0]^2/[l_0];$$

$$[\Delta p] = \text{Н}/\text{м}^2 \equiv \text{кг}(\text{м}/\text{с}^2)/\text{м}^2 = [\rho][U_0]^2.$$

Ясно, что отношение левых и правых частей равенств, определяющих размерности  $\mu$ ,  $\Delta p$ ,  $g$ , дает числа подобия:

$$\text{Re} = \rho U_0 l_0 / \mu; \quad \text{Eu} = \Delta p / (\rho U_0^2); \quad \text{Fr} = U_0^2 / (gl_0).$$

Эти же числа подобия были получены и путем приведения (3.2) к безразмерному виду с использованием естественных масштабов. Таким образом, в тех случаях, когда имеется замкнутое математическое описание процесса, справедливо утверждение С.С. Кутателадзе: «теория подобия — это теория размерностей».

Проблема, однако, в том, что теорией размерностей пользуются и в тех случаях, когда замкнутое математическое описание процесса отсутствует. Наиболее яркий пример — теплообмен при пузырьковом кипении. По-видимому, последняя серьезная попытка получить обоснованное уравнение подобия для этого процесса была предпринята в 1979—1981 гг. К. Стефаном (K. Stephan, ФРГ) с сотрудниками. В двух обширных по объему и охвату источников информации статьях проведено обобщение большого массива опытных данных о теплообмене при пузырьковом кипении в условиях свободного и вынужденного течения с использованием  $\pi$ -теоремы. В первом случае (так называемое кипение в большом объеме — pool boiling) авторы выбрали первоначально 17 размерных параметров, влияющих на теплообмен. В задачах теплообмена используются четыре первичные размерности ( $m$ ,  $c$ ,  $kg$ ,  $K$ ), что определяет возможное число параметров с независимой размерностью. Таким образом,  $\pi$ -теорема предсказывает, что процесс должен описываться уравнением подобия с числом безразмерных комплексов  $17 - 4 = 13$ .

Ясно, что установить на основе имеющейся опытной информации взаимозависимости такого числа безразмерных комплексов практически невозможно. Авторы, опираясь на регрессионный анализ опытных данных, определили маловлияющие комплексы, которые исключались из уравнения подобия. Эта операция объективно не может давать однозначные результаты, в том числе из-за того, что между различными теплофизическими свойствами существует взаимозависимость (инвариантные соотношения между группами теплофизических свойств). В итоге были предложены четыре разных уравнения подобия для четырех классов жидкостей: вода, органические жидкости, криожидкости, хладоны. Это само по себе говорит о том, что результат неубедительный, универсальные закономерности процесса полученные уравнения не отражают. Многие из них обнаруживают низкую точность при описании опытных данных, не включенных авторами в обработку. Сегодня достаточно ясно, что попытки подобрать определяющие числа подобия для пузырькового кипения в отсутствие замкнутого математического описания или физической модели, адекватной процессу, не имеют шансов на успех.

Наконец, укажем, что история использования  $\pi$ -теоремы на практике началась с полемики, которую следует считать курьезной. В 1915 г. Рэлей (Rayleigh) опубликовал в журнале «Nature» статью, в которой на основе  $\pi$ -теоремы показал, что при внешнем обтекании тела с характерным размером  $l_0$  уравнение подобия должно иметь вид  $Nu = Nu(Re)$ . В этой задаче шесть размерных параметров, определяющих процесс, исходная связь этих параметров

$$F(l_0, U_0, \rho, c_p, \lambda, \alpha) = 0.$$

(При установленвшемся движении вязкость несущественна.) Поскольку в параметрах, определяющих процесс, четыре первичные размерности: м, с, кг, К, то Рэлей, естественно, пришел к выводу о том, что процесс может быть описан связью двух безразмерных комплексов ( $n - m = 6 - 4$ ). Рябушинский в том же журнале опубликовал возражение, суть которого в том, что Кельвин не является величиной с независимой размерностью, так как температура есть мера интенсивности теплового движения молекул ( $m\bar{v}^2/2 = (3/2)kT$ ).

Ответ Рэля был предельно интеллигентен: расширение наших знаний не должно усложнять описание процесса. (По Рябушинскому  $n - m = 6 - 3$ .) В действительности, Рябушинский нарушил принципиальное положение, согласно которому в анализе нельзя выходить за рамки принятой модели: в сплошной среде, в которой используются феноменологические понятия (коэффициент теплопроводности, температура), молекул «не существует».

### Контрольные вопросы к главе 3

1. Какие требования определяют подобие физических явлений?
2. Что такое сходственные точки пространства?
3. Как определяются сходственные моменты времени в периодических и переходных процессах?
4. Чем различаются подобие и аналогия?
5. Что утверждает первая теорема теории подобия?
6. Какие числа подобия получаются из уравнений сохранения импульса и энергии при преобразовании их к безразмерной форме с использованием естественных масштабов?
7. Что понимается под группой подобных явлений, для которых могут быть получены идентичные уравнения подобия?
8. Как формулируются необходимые и достаточные условия подобия физических явлений?
9. Какой физический смысл имеют гидродинамические числа подобия?

10. Как определяется число Галилея и какие числа подобия могут быть получены на его основе?
11. Какие гидродинамические числа подобия появляются дополнительно при переходе от однофазных систем к двухфазным?
12. Какие линейные масштабы определяются с помощью чисел Архимеда и Бонда?
13. Что выражают числа подобия в процессах теплообмена?
14. Какие числа подобия обычно являются определяющими в процессах теплообмена?
15. Какой физический смысл имеют числа Нуссельта и Стантона?
16. В анализе каких процессов используется число Рэлея, как оно определяется?
17. Какой физический смысл имеют числа подобия, используемые в анализе процессов массообмена?
18. Какие массообменные числа подобия рассматриваются как аналоги чисел  $Nu$ ,  $St$ ,  $Pe$ ,  $Pr$ ?
19. Как записываются уравнения подобия, отражающие аналогию процессов теплообмена и массообмена? Каковы условия этой аналогии?
20. Чем бывает обусловлена необходимость использования в уравнениях подобия параметрических чисел подобия?
21. В каком смысле теория подобия является научной основой экспериментальных исследований?
22. Почему теория подобия необходима при моделировании?
23. Каково содержание теории размерностей?
24. Всегда ли теория размерностей может считаться идентичной теории подобия?

# ГЛАВА 4

## ТЕПЛООБМЕН ПРИ ВНЕШНEM ОБТЕКАНИИ (В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ)

### 4.1. Уравнения температурного пограничного слоя

В 1904 г. своей работой о движении тел в жидкостях с исчезающе малой вязкостью Л. Прандтль положил начало новому направлению в гидромеханике — теории пограничного слоя. Согласно Прандтлю, вся область течения подразделяется на пограничный слой толщиной  $\delta$ , в пределах которого необходимо учитывать действие вязкости, и внешний поток, где жидкость ведет себя как идеальная (потенциальный поток). Принимается, что  $\delta \ll l_0$ , где  $l_0$  — характерный размер в направлении течения; именно это допущение позволяет упростить математическое описание.

Рассмотрим (как это делалось в работе Прандтля) стационарное плоское течение несжимаемой жидкости с постоянными свойствами. Исходное математическое описание включает уравнение неразрывности (2.2в), уравнение сохранения импульса (2.11а) и уравнение сохранения энергии (2.16). Для рассматриваемого течения (рис. 4.1 или 1.9 в гл. 1)  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $u_1 = u_x = u$ ,  $u_2 = u_y = v$ ;  $\theta = T - T_c$  — избыточная температура, отсчитанная от температуры стенки. Уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.1)$$

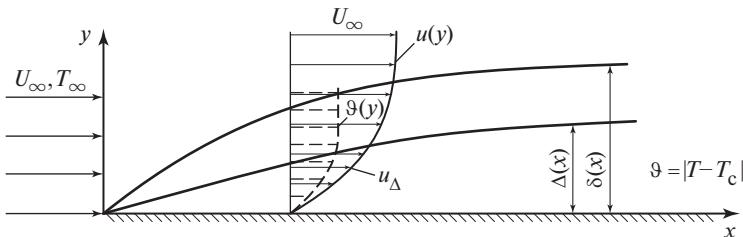


Рис. 4.1. Схема развития профилей скорости и температуры (динамического и температурного пограничных слоев) при обтекании плоской изотермической пластины

Исходные допущения приближения пограничного слоя позволяют принять: переменная  $x$  в направлении течения имеет порядок  $l_0$ , т. е.  $x = O(l) = O(1)$ ; в пределах толщины пограничного слоя  $y = O(\delta) \ll 1$ . Продольная скорость, очевидно, имеет порядок скорости невозмущенного потока,  $u_x = u = O(U_\infty) = O(1)$ . Уравнение (4.1) имеет смысл, если оба его члена одного порядка; отсюда следует:  $v = O(\delta) \ll 1$ .

Используя эти оценки, проведем далее оценку величин в уравнениях  $x$ - и  $y$ -проекций импульса (см., например, [45]). В  $x$ -проекции конвективные члены  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  и  $v \frac{\partial u}{\partial y}$  — одного порядка ( $O(1)$ ); из двух вязкостных членов  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . В  $y$ -проекции импульса все слагаемые, кроме  $\partial p / \partial y$ , оказываются порядка  $\delta$  или более высокого порядка малости. В итоге от  $y$ -проекции остается очень важное для теории пограничного слоя соотношение, говорящее о постоянстве давления поперек слоя:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Если градиент давления существен для рассматриваемого течения, то  $\Delta p = O(1)$ , так что в  $x$ -проекции импульса член с градиентом давления удерживается. В итоге уравнение  $x$ -проекции импульса в приближении пограничного слоя (массовыми силами пренебрегаем) принимает вид

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4.2)$$

Используя естественные масштабы  $l_0$  и  $U_\infty$ , это уравнение можно записать (см. п. 3.2.1) так:

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = - \frac{\Delta p}{\rho U_0^2} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} + \frac{v}{U_0 l_0} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}. \quad (4.2a)$$

Уравнение имеет смысл, если инерционные и вязкостные члены

одного порядка. Так как  $\tilde{y} = y/l_0 = O(\delta/l_0) \ll 1$ , то  $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} = O\left(\frac{1}{\tilde{\delta}^2}\right) \gg 1$ .

Так как левая часть уравнения имеет порядок 1, однопорядковость членов обеспечивается, если  $v/(U_0 l_0) = 1/\text{Re} \ll 1$ . Следовательно,

сильное неравенство  $\text{Re} \gg 1$  — это условие применимости приближений пограничного слоя. У передней кромки пластины ( $x \rightarrow 0$ ) формально приближение пограничного слоя не выполняется. Но практически  $\text{Re}_x = U_\infty x / v \gg 1$  на любых практически значимых расстояниях от точки  $x = 0$ . В этих оценках отражаются условия анализа Прандтля — жидкости с исчезающе малой вязкостью.

Толщина пограничного слоя, строго говоря, не может определяться точно, переход от области с влиянием вязкости к внешнему потоку, где оно может не учитываться, происходит не скачком. Если исходить из условия  $u = U_\infty$  при  $y = \delta$ , то оно задается с некоторой, практически достаточной точностью. Если применять условие  $u = 0,99U_\infty$  при  $y = \delta$ , то в решении Блазиуса  $\delta = 5x \cdot \text{Re}_x^{-1/2}$ .

По аналогии с динамическим пограничным слоем Прандтля вводятся понятия температурного и диффузационного пограничных слоев. С точки зрения физических закономерностей эти понятия должны соответствовать той части пристенной области, где существен молекулярный перенос энергии и массы компонента. Практически, однако, чаще под толщинами температурного и диффузационного пограничных слоев понимают расстояние от стенки, на котором происходит основное изменение температуры и состава смеси.

Для температурного пограничного слоя, если  $\vartheta = |T - T_c|$ ,  $\vartheta_\infty = |T_\infty - T_c|$ , то при  $y = \Delta$  отношение  $\vartheta/\vartheta_\infty = 0,99$ . Для диффузационного пограничного слоя при  $y = \delta_D$  отношения  $(C^a - C_c^a)/(C_\infty^a - C_c^a) = 0,99$ .

Полагая, что по порядку величины  $O(\Delta) \approx O(\delta)$ , т. е.  $\Delta \ll l_0$ , получаем уравнение температурного пограничного слоя для обтекания изотермической поверхности жидкостью с постоянными свойствами. Без учета работы сил давления ( $dp/dt \approx 0$ ) и внутренних источников тепла ( $\dot{q}_V = 0$ ) двумерное уравнение энергии запишется следующим образом:

$$\rho c_p u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \mu \Phi_{diss}.$$

1	1	1	$1/\delta^2$	$1/\delta^2$
---	---	---	--------------	--------------

Не оценивая порядок величины теплофизических свойств, опираясь на результаты анализа Прандтля, получаем, что конвективные

слагаемые (левая часть уравнения) одного порядка [порядка 1, если  $\vartheta = O(\vartheta_\infty) = O(1)$ ]. В правой части  $\partial^2 \vartheta / \partial x^2 \ll \partial^2 \vartheta / \partial y^2$ , что позволяет опустить член, соответствующий теплопроводности в направлении течения.

Оценим порядок диссипативной функции для плоского пограничного слоя:

$$\Phi_{diss} = \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 +$$

$$+ 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \approx \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 .$$

$$1/1 \quad \delta^2 \quad \delta/\delta \quad 1/\delta^2$$

Следовательно, остается одно слагаемое. Таким образом, с учетом того что  $\lambda / (\rho c_p) = a$ , уравнение энергии для пограничного слоя принимает вид

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 . \quad (4.3)$$

При использовании естественных масштабов  $l_0$ ,  $U_\infty$ ,  $\vartheta_\infty = |T_\infty - T_c|$ ,  $\theta = \vartheta / \vartheta_\infty$  уравнение (4.3) преобразуется к безразмерному виду:

$$\frac{U_\infty \vartheta_\infty}{l_0} \left( \tilde{u} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{a \vartheta_\infty}{l_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\mu U_\infty^2}{\rho c_p l_0^2} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 ,$$

откуда

$$\tilde{u} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\mu}{\rho U_\infty l_0} \frac{U_\infty^2}{c_p \vartheta_\infty} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 ,$$

где  $\tilde{u} = u / U_\infty$ ;  $\tilde{v} = v / U_\infty$ ;  $\tilde{x} = x / l_0$ ;  $\tilde{y} = y / l_0$ .

Так как  $\text{Pe} = U_\infty l_0 / a$ ,  $\text{Re} = \rho U_\infty l_0 / \mu$ ,  $\text{Pe}/\text{Re} = \text{Pr}$ ,  $\text{Ec} = U_\infty^2 / (c_p \vartheta_\infty)$ , то

$$\tilde{u} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\text{Pe}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} + \text{Pr} \text{Ec} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right). \quad (4.3a)$$

В такой форме уравнение удобно для качественного анализа. Чтобы уравнение температурного пограничного слоя имело смысл, необходимо, чтобы все слагаемые были одного порядка. Величина  $\partial^2 \theta / \partial \tilde{y}^2$  имеет порядок  $1/\tilde{\Delta}^2$ , где  $\tilde{\Delta} = \Delta / l_0$ ; слагаемые левой части

порядка 1. Таким образом, только при  $1/\text{Pe} = O(\tilde{\Delta}^2)$ , т. е. при  $1/\text{Pe} \ll 1$ , уравнение энергии для температурного пограничного слоя имеет физическое содержание. Следовательно, приближения пограничного слоя для теплообмена соблюдаются, если  $\text{Re}_x \gg 1$ ,  $\text{Pe}_x \gg 1$ . Очевидно, что в жидкостях металлах ( $\text{Pr} \ll 1$ ) во многих случаях приближения температурного пограничного слоя следует использовать с осторожностью.

Уравнение (4.3а) позволяет оценить, в каких случаях существенна вязкая диссипация в пограничном слое. Порядок величин  $\partial^2 \theta / \partial \tilde{y}^2$  и  $(\partial \tilde{u} / \partial \tilde{y})^2$  можно считать одинаковым. Значит, роль вязкой диссипации зависит от произведения  $\text{Pr} \text{Ec}$ . Ясно, что для жидкостей металлов, если даже сами приближения пограничного слоя справедливы, эффект вязкой диссипации ничтожен всегда. В капельных неметаллических жидкостях обычно  $\text{Ec} \ll 1$ , так что в этом случае эффект диссипации может быть заметным лишь при  $\text{Pr} \gg 1$  (вязкие жидкости).

В газах  $\text{Pr} = O(1)$ , диссипация определяется значением  $\text{Ec}$ . Вводя

$$M_\infty = U_\infty / C_{3B}, \quad C_{3B} = \sqrt{k R_i T_\infty}, \quad k = c_p / c_v, \quad R_i = c_p - c_v,$$

получаем

$$\text{Ec} = \frac{U_\infty^2}{c_p \vartheta_\infty} \frac{k R_i T_\infty}{C_{3B}^2} = \frac{M_\infty^2 T_\infty (c_p - c_v)}{\vartheta_\infty c_v} = \frac{M_\infty^2 (k - 1) T_\infty}{\vartheta_\infty}.$$

Ясно, что  $\text{Ec} = O(1)$ , если  $M_\infty = O(1)$ . При  $M_\infty < 0,3$  (несжимаемые течения) вязкой диссипацией пренебрегают. Только в около- и сверхзвуковых течениях диссипация существенна.

## 4.2. Теплообмен при ламинарном обтекании плоской пластины

### 4.2.1. Постановка задачи и анализ методами теории размерностей

Теплообмен при ламинарном обтекании плоской пластины — классическая модельная задача. Хотя ее прямых приложений немного, результаты решения часто используются для оценки теплообмена в сложных задачах.

В математическом описании, представленном уравнениями (4.1), (4.2) и (4.3), учитываем, что при обтекании плоской пластины неограниченным внешним потоком  $dp/dx = 0$ ; свойства жидкости принимаем постоянными, не учитываем вязкую диссипацию. Тогда имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (4.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (4.2)$$

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}. \quad (4.3)$$

Границные условия:

$$y = 0: u = v = 0, \vartheta = 0;$$

$$y = \infty: u = u_\infty, \vartheta = \vartheta_\infty.$$

Как и выше, избыточная температура  $\vartheta = |T - T_c|$ ,  $\vartheta_\infty = |T_\infty - T_c|$ .

Поскольку математическое описание основано на приближении пограничного слоя, в уравнениях (4.2) и (4.3) все члены имеют одинаковый порядок, что позволяет провести приближенный анализ задачи методами теории размерностей. Фактически речь идет о замене дифференциальных уравнений их алгебраическими аналогами; переменные заменяются характерными масштабами задачи, дифференциалы — конечными разностями. Практически  $u \rightarrow U_\infty$ ,  $\partial u \rightarrow U_\infty$ ,  $\partial \vartheta \rightarrow \vartheta_\infty$ ,  $\partial x \rightarrow x$ ,  $\partial y \rightarrow \delta$ . Этот анализ, конечно, не дает строгого решения, но позволяет найти структуру расчетных формул (с точностью до коэффициентов).

Левая часть (4.2б) имеет порядок  $U_\infty^2/x$ , правая —  $vU_\infty/\delta^2$ , т. е.

$$U_\infty^2/x = C_1 v U_\infty / \delta^2;$$

$$\delta = \sqrt{C_1} \sqrt{vx/U_\infty} = C'_1 x \text{Re}_x^{-1/2}. \quad (4.4)$$

Касательное напряжение на стенке

$$\tau_c \equiv (C_f/2)\rho U_\infty^2 = \mu (\partial u / \partial y)_{y=0} \sim \mu U_\infty / \delta.$$

С учетом (4.4) получаем для коэффициента трения

$$C_f/2 = C_2 \text{Re}_x^{-1/2}. \quad (4.5)$$

Выражения (4.4) и (4.5) воспроизводят структуру формул Блазиуса (1.11) и (1.10), приведенных в гл. 1.

При анализе (4.3б) будет рассмотрен случай  $\text{Pr} > 1$ , так что  $v > a$ , толщина динамического пограничного слоя больше толщины температурного погранслоя:  $\delta > \Delta$ . Характерная скорость берется на внешней границе температурного пограничного слоя ( $y = \Delta$ ), масштаб для поперечной координаты  $\Delta$ , так что  $\delta y \rightarrow \Delta$  (см. рис. 4.1). Алгебраический аналог (4.3б):

$$(u_\Delta \vartheta_\infty)/x = (C_3 a \vartheta_\infty)/\Delta^2.$$

На внешней границе температурного пограничного слоя принимаем  $u = u_\Delta \approx U_\infty \Delta / \delta$  — линейная аппроксимация профиля скорости. Тогда с учетом (4.4)

$$\begin{aligned} \Delta^3 &= C_3(a\delta x)/U_\infty = C'_3(ax/U_\infty)(vx/U_\infty)^{1/2} \frac{x^{3/2}v}{x^{3/2}v} = \\ &= C'_3 x^3 (1/\text{Pr}) (1/\text{Re}_x)^{3/2}; \\ \Delta &= C_4 x \text{Pr}^{-1/3} \text{Re}_x^{-1/2} \sim \delta \text{Pr}^{-1/3}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для коэффициента теплоотдачи имеем

$$\alpha = -\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dy} \right)_{y=0} \frac{1}{T_c - T_\infty} = \lambda \left( \frac{d\theta}{dy} \right)_{y=0} \sim \frac{\lambda}{\Delta},$$

так как  $\theta = O(1)$ . Тогда с учетом (4.6)

$$\alpha = \lambda \frac{1}{C_4} x^{-1} \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3},$$

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\alpha x}{\lambda} = C_5 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}. \quad (4.7)$$

Формула такой структуры была получена в гл. 1 при использовании связи  $\delta$  и  $\Delta$ , представленной соотношением (4.6), как заданной. Естественно, коэффициенты в рамках такого приближенного анализа определить нельзя.

#### 4.2.2. Основные результаты задачи Блазиуса

Блазиус в 1907 г. опубликовал результаты решения задачи об обтекании плоской пластины ламинарным потоком жидкости, в которой впервые были использованы положения теории пограничного слоя Прандтля. Блазиус использовал автомодельную переменную, которая имеет смысл относительного — в сравнении с толщиной пограничного слоя — расстояния от стенки:

$$\eta = y/\delta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{v x}}. \quad (4.8)$$

Условие автомодельности состоит в том, что при любом  $x$  продольная компонента скорости — универсальная функция автомодельной переменной, т. е. относительного (по сравнению с  $\delta$ ) расстояния от стенки:

$$\frac{u[x, y/\delta(x)]}{U_\infty(x)} = \text{idem}.$$

Существование автомодельных решений в гидромеханике доказано строго для ряда задач, в частности для обтекания клина, когда  $U_\infty = C_0 x^m$ . При  $m = 0$ ,  $U_\infty = \text{const}$  — случай обтекания плоской пластины. Выражение (4.8) получено с учетом структуры формулы для  $\delta$  согласно (4.4).

Решение Блазиуса изложено в любом серьезном учебнике по гидромеханике, поэтому здесь лишь кратко воспроизведены основные его этапы и следующие из него выводы, в первую очередь, с позиций приложения их к анализу задачи о теплообмене. Для решения гидро-

динамической задачи (4.1), (4.2б) Блазиус использовал функцию тока  $\psi$ , которая определяется соотношениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

обращающими в тождество уравнение неразрывности (4.1). Безразмерная функция тока получается, если учесть, что  $y = \delta \eta$  и выразить  $\psi$  через  $u$ . Тогда

$$\psi = \int_0^y u dy = \sqrt{\frac{vx}{U_\infty}} \int_0^\eta u d\eta = \sqrt{vx U_\infty} \int_0^\eta \frac{u}{U_\infty} d\eta.$$

Так как интеграл безразмерный, то, следовательно,

$$f = \frac{\psi}{\sqrt{vx U_\infty}} = \int_0^\eta \frac{u}{U_\infty} d\eta \quad (4.9)$$

— безразмерная функция тока. Из этого следует, что

$$\psi = \sqrt{vx U_\infty} f,$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \sqrt{vx U_\infty} = f' \sqrt{vx U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}} = f' U_\infty. \quad (4.10)$$

Ясно, что величина  $f' = u/U_\infty$  — безразмерная продольная скорость — является одной из главных целей анализа. Далее определяются через  $\psi$ :  $v$ ,  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial u / \partial y$ ,  $\partial^2 u / \partial y^2$ .

Определение  $v$  потребуется в дальнейшем при анализе задачи о теплообмене:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (f \sqrt{U_\infty vx}) = -\frac{\partial f}{\partial x} \sqrt{U_\infty vx} - \frac{1}{2} f \sqrt{\frac{U_\infty v}{x}}; \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U_\infty}{vx^3}} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x}; \\ v &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty v}{x}} (f - f' \eta). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Остальные величины:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_\infty \frac{\partial f'}{\partial x} \equiv U_\infty \frac{df'}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} U_\infty f'' \frac{\eta}{x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{\partial f'}{\partial y} \equiv U_\infty \frac{df'}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty f'' \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_\infty \frac{\partial^2 f'}{\partial y^2} \equiv U_\infty \frac{d^2 f'}{d\eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = U_\infty f''' \frac{U_\infty}{vx}.$$

Здесь

$$f'' = \frac{d^2 f}{d\eta^2}; \quad f''' = \frac{d^3 f}{d\eta^3}.$$

Подстановка всех найденных выражений в (4.2б) после несложных преобразований дает

$$\frac{f'''}{f''} = -\frac{1}{2}f. \quad (4.12)$$

Это — обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \eta &= 0, \quad f = f' = 0; \\ \eta &= \infty, \quad f' = 1. \end{aligned}$$

Блазиус получил решение (4.12) в виде бесконечных рядов по  $\eta$  при  $\eta < 1$  и по  $1/\eta$  при  $\eta > 1$  со сшивкой при  $\eta \approx 1$ . Последующие численные решения подтвердили высокую точность расчетов Блазиуса [45]. Таблица 4.1 представляет фрагмент решения Блазиуса; анализ данных таблицы позволяет сформулировать выводы, важные для дальнейшего изложения:

1) получен универсальный (автомодельный) профиль скорости  $u/U_\infty = f'(\eta)$ , представленный на рис. 4.2. Из таблицы следует, в частности, что значение  $f' = 0,99$ , т. е.  $u = 0,99U_\infty$  достигается при  $\eta =$

Таблица 4.1. Фрагмент таблицы, представляющей результаты решения задачи Блазиуса

$\eta$	$f$	$f'$	$f''$
0,00	0,00	0,00	0,332
1,00	0,166	0,330	0,323
2,00	0,650	0,630	0,267
5,00	3,283	0,992	0,016
6,00	4,280	0,999	0,0024

$= y \sqrt{U_\infty / (\nu x)} = 5$ . Это означает, что толщина динамического пограничного слоя, определенная из условия совпадения скорости на его границе со скоростью невозмущенного потока с погрешностью 1 %, выражается соотношением

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} = 5x \text{Re}_x^{-1/2}. \quad (4.4a)$$

Если принять, что при  $y = \delta$  должно выполняться условие  $u/U_\infty = 0,999$ , то  $\eta = 6$ ;

2) важный параметр, определенный в результате решения Блазиуса, — тангенс угла наклона касательной  $\gamma$  к профилю скорости в начале координат, т. е.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{df'(0)}{d\eta} = f''(0) = 0,332.$$

Эта величина связана с коэффициентом трения. Действительно,

$$\tau_c = \frac{C_f}{2} \rho U_\infty^2 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0};$$

$$\frac{C_f}{2} = \nu \frac{1}{U_\infty^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\nu}{U_\infty^2} \frac{\partial}{\partial y} (U_\infty f')_{y=0} = \frac{\nu}{U_\infty} f''(0) \frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$= 0,332 \frac{\nu}{U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}};$$

$$\frac{C_f}{2} = \frac{0,332}{\text{Re}_x^{1/2}}. \quad (4.5a)$$

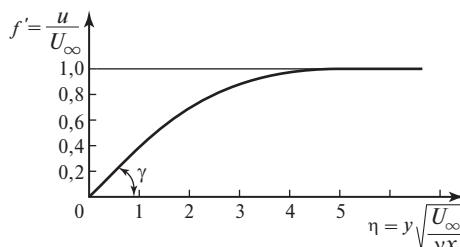


Рис. 4.2. Автомодельный профиль скорости по Блазиусу

Формулы (4.4а) и (4.5а) конкретизируют аналогичные соотношения предыдущего пункта, определенные с точностью до коэффициентов;

3) начальный участок профиля скорости близок к линейному.

Действительно, при  $\eta = 1$   $f' = \frac{u}{U_\infty} = 0,330$ ,  $f''(1) = 0,323$ , т. е. скорость отклоняется от значения, отвечающего линейному профилю ( $u \sim y$ ), лишь на 1 %, а  $f''(1)$  отличается от  $f''(0)$  на 3 %;

4) решение полностью подтвердило оценку, согласно которой  $v \ll u$ . В частности, на внешней границе пограничного слоя  $v_\infty / U_\infty = 0,86 \text{Re}_x^{-1/2}$ , т. е. при  $\text{Re}_x \gg 1$   $v_\infty \ll U_\infty$ .

#### 4.2.3. Точное решение задачи о теплообмене

Точное решение задачи о теплообмене при ламинарном обтекании изотермической плоской пластины осуществил Польгаузен (Pohlhausen, 1921).

Прежде чем перейти к анализу его решения, перепишем систему (4.2б), (4.3б), используя в (4.2б) под знаком производных вместо  $u$  равную ей величину  $f'U_\infty$ , а в уравнении (4.3б) перейдем к безразмерной температуре  $\theta$ :

$$u \frac{\partial f'}{\partial x} + v \frac{\partial f'}{\partial y} = v \frac{\partial^2 f'}{\partial y^2}, \quad (4.2\text{в})$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (4.3\text{в})$$

Границные условия:

$$y = 0: \quad u = v = 0; \quad f = f' = 0; \quad \theta = 0;$$

$$y = \infty: \quad u = U_\infty; \quad f' = 1; \quad \theta = 1;$$

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_\infty - T_c}.$$

Уравнения и их граничные условия абсолютно идентичны. При  $v = a$ , т.е. при  $\text{Pr} = 1$ , поля безразмерной скорости  $u/U_\infty = f'$  и безразмерной температуры  $\theta = \vartheta/\vartheta_\infty$  совпадают,  $\theta(\eta) = f'(\eta)$ .

Из этого должно быть ясно, что в общем случае при  $\text{Pr} \neq 1$

$$\theta = \theta(\eta, \text{Pr}).$$

Так как свойства жидкости постоянны, поле скорости не зависит от поля температуры, т.е. в (4.3в) для  $u$  и  $v$  можно использовать результаты Блазиуса. (При постоянстве физических свойств гидродинамическая задача всегда может быть решена независимо от тепловой.) Необходимо решить (4.3в), для чего запишем его в безразмерном виде, используя автомодельную переменную Блазиуса  $\eta$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} \theta'; \quad \theta' = \frac{d\theta}{d\eta};$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \theta' \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}};$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \theta'' \frac{U_\infty}{vx}.$$

После подстановки в (4.3в) имеем:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} f' U_\infty \theta' - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty v}{x}} f \theta' \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}} + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty v}{x}} f' \eta \theta' \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}} = \frac{a U_\infty}{vx} \theta'', \end{aligned}$$

откуда

$$-\frac{1}{2} f \theta' = \frac{1}{\text{Pr}} \theta''.$$

С учетом (4.12) имеем

$$\frac{\theta''}{\theta'} = \text{Pr} \frac{f'''}{f''}. \quad (4.13)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение должно быть решено при граничных условиях:

$$\eta = 0: \quad f = f' = 0; \quad \theta = 0;$$

$$\eta = \infty: \quad f' = 1; \quad \theta = 1.$$

Так как  $\theta'' = \frac{d\theta'}{d\eta}$ ,  $f''' = \frac{df''}{d\eta}$ , то первое интегрирование (4.13) дает

$$\theta' = A_0 f''^{\text{Pr}}, \quad (4.13a)$$

где  $A_0$  — константа интегрирования.

После второго интегрирования получаем

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_\infty - T_c} = A_0 \int_0^\eta f''^{\text{Pr}} d\eta + A_1.$$

Из условия на стенке ( $\eta = 0, \theta = 0$ ) константа интегрирования  $A_1 = 0$ . Из условия на бесконечности ( $\eta = \infty, \theta = 1$ ) находим

$$A_0 = \frac{1}{\int_0^\infty f''^{\text{Pr}} d\eta}.$$

Таким образом, поле температур в жидкости

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_\infty - T_c} = \frac{\int_0^\eta f''^{\text{Pr}} d\eta}{\int_0^\infty f''^{\text{Pr}} d\eta}. \quad (4.14)$$

Прежде всего, убедимся, что при  $\text{Pr} = 1$   $\theta(\eta) = f'(\eta)$ . Это очевидно, так как  $f'' = df'/d\eta$ , а при  $\eta \rightarrow \infty f' = 1$ . На рис. 4.3, где представлены расчетные профили температуры при различных значениях

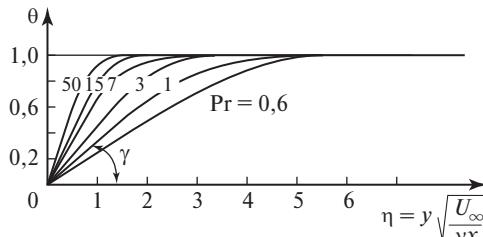


Рис. 4.3. Расчетные профили безразмерной температуры при различных числах Прандтля

Pr, условию  $\text{Pr} = 1$  отвечает кривая, точно совпадающая с графиком профиля скорости на рис. 4.2. Для этой кривой тангенс угла наклона

$$\text{касательной при } \eta = 0 \left( \frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=0} = f''(0) = 0,332.$$

При расчете поля безразмерной температуры (4.14) при различных Pr (рис. 4.3) используется решение Блазиуса для  $f''(\eta)$ . Качественно вид расчетных профилей соответствует установленной ранее зависимости (4.6)  $\Delta = \delta \text{Pr}^{-1/3}$ . При  $\text{Pr} > 1$   $\Delta < \delta$ , т.е. температурный профиль раньше (при меньших  $\eta$ ) достигает своего асимптотического значения  $\theta = 1$ . (Например, при  $\text{Pr} = 10$   $\Delta = \delta/10^{1/3}$ , что отвечает значению  $\eta \approx 2,32$ .) При  $\text{Pr} < 1$   $\Delta > \delta$ , т.е. температура продолжает изменяться и в той области течения, где скорость уже достигла значения  $u = U_\infty$ .

Заметим, что в оригинальной работе Польгаузена, результаты которой чаще всего воспроизводятся в литературе, использовалась

безразмерная температура, отсчитанная от  $T_\infty$ , т.е.  $\theta_1 = \frac{T - T_\infty}{T_c - T_\infty} = 1 - \theta$ . На методике решения это, естественно, не сказывается, но граничные условия изменяются:  $\eta = 0$ ,  $\theta_1 = 1$ ;  $\eta = \infty$ ,  $\theta_1 = 0$ . При нашем выборе вида  $\theta$  в явном виде проявляется тождественность  $\theta$  и  $f'$  при  $\text{Pr} = 1$ .

Для расчета коэффициента теплоотдачи необходимо использовать (4.13а) с известным значением константы интегрирования  $A_0$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\lambda}{T_c - T_\infty} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda \left( \frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=0} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= \lambda \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}} \theta'(0). \end{aligned}$$

Из (4.13а)

$$\theta'(0) = \frac{[f''(0)]^{\text{Pr}}}{\int_0^{\infty} f''^{\text{Pr}} d\eta} = \frac{0,332^{\text{Pr}}}{\int_0^{\infty} f''^{\text{Pr}} d\eta}; f''(0) = 0,332.$$

Таким образом,  $\theta'(0) = \varphi(\text{Pr})$ .

Безразмерный КТО

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\alpha x}{\lambda} = \text{Re}_x^{1/2} \varphi(\text{Pr}).$$

При  $\text{Pr} = 1$  очевидно  $\varphi(\text{Pr}) = 0,332$  (точно). Этот случай строго соответствует аналогии процессов переноса импульса и энергии:

$$\text{St} \equiv \frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x \text{Pr}},$$

$$\text{при } \text{Pr} = 1 \quad \text{St} = 0,332 \text{Re}_x^{-1/2} = \frac{C_f}{2}.$$

Польгаузен рассчитал  $\varphi(\text{Pr})$  при  $\text{Pr} = 0,6 \div 15$ , используя решение Блазиуса для  $f''(\eta)$ . Результаты расчетов аппроксимированы как

$$\varphi(\text{Pr}) = 0,332 \text{Pr}^{1/3}.$$

Следовательно, при  $\text{Pr} = 0,6 \div 15$

$$\text{Nu}_x = 0,332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}. \quad (4.15)$$

Этот результат в п. 4.2.1 предсказан с точностью до коэффициента [формула (4.7)].

С учетом того что  $\alpha(x) \sim x^{-1/2}$ , средний КТО

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) dx = 2\alpha_{x=l}.$$

Следовательно,

$$\overline{\text{Nu}}_l \equiv \frac{\overline{\alpha l}}{\lambda} = 0,664 \text{Re}_l^{1/2} \text{Pr}^{1/3}.$$

Для граничных условий  $q_c = \text{const}$  имеется приближенное аналитическое решение, полученное интегральным методом. Оно ведет к уравнению

$$\text{Nu}_x = 0,47 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3},$$

$$\text{т. е. } \alpha_{q=\text{const}} \approx \alpha_{T_c=\text{const}} \sqrt{2}.$$

#### 4.2.4. Теплоотдача в предельных по числу Прандтля случаях

$\text{Pr} \gg 1$ . Этот случай анализировал Левек. В пределе при очень высоких числах Прандтля  $v \gg a$ ,  $\delta \gg \Delta$ , значит, температурный пограничный слой составляет малую долю динамического (рис. 4.4, а), и можно принять, что в пределах  $y \leq \Delta$  сохраняется линейный профиль

скорости. Так как  $\tau \approx \tau_c = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$ , то при линейном профиле

$\frac{\partial u}{\partial y} = \text{const}$ ,  $u = y\tau_c/\mu$ ,  $v \approx 0$  (у стенки). Из анализа п. 4.2.2 ясно, что  $\tau_c = \text{const}$ .

Уравнение энергии (4.3в) принимает вид

$$\frac{\tau_c}{\mu} y \frac{\partial \theta}{\partial x} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (4.3\gamma)$$

Границные условия:

$$y = 0, \quad \theta = 0;$$

$$y = \infty, \quad \theta = 1.$$

Задача была решена Левеком с использованием оригинальной автомодельной переменной, хотя она тоже имеет структуру  $\eta_{\text{Лев}} = y/\delta$ . Методика решения этой задачи технически та же, что позднее использовалась Левеком для анализа теплообмена в начальном термическом участке круглой трубы при ламинарном течении и  $T_c = \text{const}$ ; дополнительное условие, при котором проводилось решение, — малые расстояния от начала теплообмена, на которых выпол-

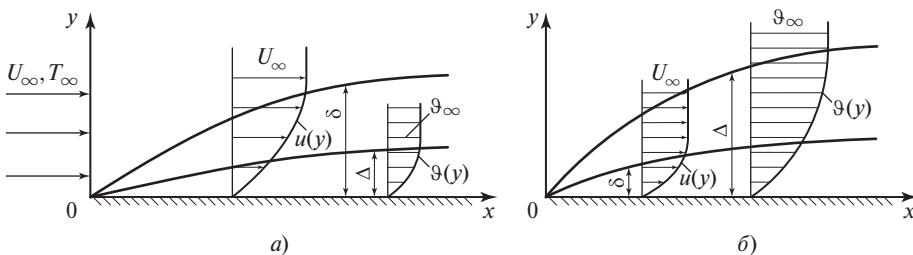


Рис. 4.4. Схема формирования профилей скорости и температуры при  $\text{Pr} \gg 1$  (а) и  $\text{Pr} \ll 1$  (б)

няются условия  $\Delta \ll r_0$ . Это условие и делает задачу для трубы аналогичной рассматриваемому случаю теплообмена на пластине при высоких числах  $\text{Pr}$ . Так как эта задача будет разобрана в § 6.6, здесь ограничимся итоговым результатом:

$$\text{Nu}_x = 0,339 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}. \quad (4.16)$$

Поскольку полученный результат отличается от (4.15) лишь на 2 %, можно считать, что формула Польгаузена справедлива в широком диапазоне  $\text{Pr} \geq 0,6$ .

**Pr << 1 (жидкие металлы).** В этом случае  $v \ll a$ ,  $\delta \ll \Delta$  (рис. 4.4, б); здесь можно приближенно принять, что теплообмен (изменение температуры жидкости) происходит в основном в условиях невозмущенного по скорости потока, т.е. при  $y > \delta$ , когда  $u_x = U_\infty$ ,  $v = 0$ . В этом предельном случае уравнение энергии можно представить в виде

$$U_\infty \frac{\partial \theta}{\partial x} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (4.3d)$$

Границные условия задачи:

$$y = 0, \quad \theta = 0;$$

$$y = \infty, \quad \theta = 1.$$

Легко понять, что уравнение (4.3д) математически идентично уравнению одномерной нестационарной теплопроводности; граничные условия соответствуют задаче об охлаждении полуграниценного массива с однородной начальной температурой  $T_\infty$ . Безразмерная температура при  $t < 0$  равна  $\theta = (T - T_0)/(T_\infty - T_0) = 1$ . При  $t = 0$  температура поверхности массива скачком изменяется до значения  $T_0 < T_\infty$  и поддерживается постоянной. Эта задача хорошо и давно (более 100 лет назад) исследована и решается с помощью автотемпературной переменной

модельной переменной  $\xi = \frac{y}{2\sqrt{ax/U_\infty}} = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{ax}}$ . По структуре эта

переменная — аналог переменной Блазиуса  $\eta$ , только вместо  $v$  используется величина той же размерности  $a$  и добавлен множитель 2 в знаменателе.

(В задачах нестационарной теплопроводности, как обсуждалось в гл. 3, величина  $\sqrt{at}$  с размерностью длины характеризует размер

области, охваченной температурным возмущением к текущему моменту времени  $t$ . В данном случае вместо времени  $t$  используется отношение  $x/U_\infty$  также с размерностью времени.)

Используя новую переменную, имеем:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \theta' \left( -\frac{1}{4} \frac{y}{x} \sqrt{\frac{U_\infty}{ax}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\xi}{x} \theta';$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{4} \theta'' \frac{U_\infty}{ax}.$$

Подставляя эти выражения в (4.3д), находим

$$-\frac{1}{2} U_\infty \frac{\xi}{x} \theta' = a \frac{1}{4} \frac{U_\infty}{ax} \theta'',$$

т. е.  $\theta''/\theta' = -2\xi$ ; граничные условия:

$$\xi = 0, \quad \theta = 0;$$

$$\xi = \infty, \quad \theta = 1.$$

Первое интегрирование дает

$$\theta' = A_0 e^{-\xi^2},$$

второе —

$$\theta = A_0 \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi + A_1.$$

Границное условие на стенке дает  $A_1 = 0$ . Из второго граничного условия находим

$$A_0 = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Итак,

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_\infty - T_c} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi = erf \xi$$

— интеграл ошибок Гаусса.

Для расчета коэффициента теплоотдачи необходимо знание производной от температуры на стенке. Используя полученные соотношения, находим

$$\alpha = \lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=0} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \lambda \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{ax}} \theta'(0);$$

$$\theta'(0) = A_0 = 2 / \sqrt{\pi}.$$

Таким образом,

$$Nu_x \equiv \frac{ax}{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sqrt{\frac{U_\infty x}{a}} = 0,564 Re_x^{1/2}.$$

Как это и предопределено анализом, при  $Pr \ll 1$  вязкость не влияет на теплообмен. Для жидких металлов это — обычный результат.

### 4.3. Переход к турбулентному течению

#### 4.3.1. О результатах теоретического анализа

Турбулентное течение принципиально отличается от ламинарного. Оно существенно нестационарно, все актуальные параметры процесса претерпевают пульсации во времени. О. Рейнольдс (O. Reynolds) не только экспериментально установил, что смена режимов происходит при некотором фиксированном (для данной геометрии) значении параметра  $U_0 l_0 / v$ , названного его именем, но и сформулировал положение, составляющее основу теоретических исследований устойчивости ламинарных течений. Согласно Рейнольдсу, ламинарное течение как решение уравнений Навье—Стокса в принципе возможно всегда, но при некотором сочетании параметров становится неустойчивым к бесконечно малым возмущениям. Практически это значит, что при некоторых значениях числа  $Re$  ламинарное течение становится нереализуемым.

Теоретический анализ устойчивости ламинарного течения основывается на уравнении Орра—Зоммерфельда. На основное течение вязкой жидкости с постоянными свойствами накладывается бесконечно малое периодическое возмущение. Исходное течение — двумерное, что позволяет задавать возмущение в виде периодической функции тока

$$\psi = \phi \exp i(kx - \omega t),$$

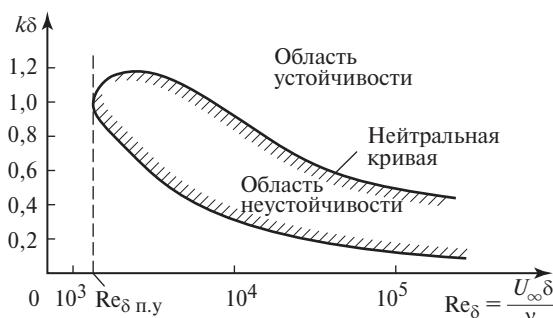
где  $\phi = \phi_R + i\phi_I$  — комплексная амплитуда;  $k = 2\pi/\lambda_b$  — волновое число;  $\lambda_b$ ,  $t_b$  — длина и период волны;  $\omega = 2\pi/t_b$  — круговая частота.

В исходном математическом описании двумерного течения, преобразованном с использованием функции тока, каждый параметр представляется в виде суммы начальной (невозмущенной) и возмущенной величин; так как возмущения считаются малыми, в уравнениях опускаются слагаемые, квадратичные относительно возмущений. В итоге получается линеаризованное обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка относительно возмущенной функции тока. Это и есть уравнение Оппа—Зоммерфельда.

Это уравнение было опубликовано в начале XX в. Успешные попытки его решения, связанные, в первую очередь, с работами Прандтля, Шлихтинга, Толмина и др. [45], относятся к 1930-м годам. Интересно, что анализ уравнения Оппа—Зоммерфельда в приближении невязкой жидкости понижает его порядок до 2-го. При этом оказывается, что в невязкой жидкости к неустойчивости ведут возмущения в более широком диапазоне длин волн, чем в реальной вязкой жидкости. Можно (нестрого) говорить о том, что течение невязкой жидкости менее устойчиво.

Целью анализа на устойчивость является получение зависимости круговой частоты  $\omega$  от параметров процесса — дисперсионного уравнения. Если мнимая часть комплексной круговой частоты отрицательна,  $\omega_I < 0$ , то система устойчива — наложенные возмущения затухают. При  $\omega_I > 0$  они растут экспоненциально. Условие  $\omega_I = 0$  определяет границу устойчивых и неустойчивых состояний — нейтральную кривую. Она строится в плоскости  $\{k\delta, \text{Re}_\delta\}$ , где  $k\delta$  — безразмерное волновое число,  $\text{Re}_\delta = U_\infty \delta / v$  (рис. 4.5).

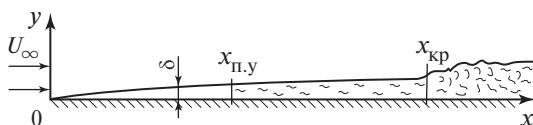
К неустойчивости ведут волны, характеристики которых отражаются точками в области, ограниченной нейтральной кривой. Как



**Рис. 4.5. Примерный вид нейтральной кривой по результатам анализа устойчивости при обтекании плоской пластины**

видно, в вязкой жидкости диапазон возмущений, ведущих к неустойчивости, достаточно узок. При этом ясно, что при  $Re_{\delta} = U_{\infty}\delta/v < Re_{\delta \text{ п.у}}$  нет возмущений, ведущих к потере устойчивости, любые малые возмущения затухают. Число  $Re_{\delta \text{ п.у}}$ , отвечающее потере устойчивости ламинарного течения, определяется вертикальной касательной к нейтральной кривой. Ему отвечает безразмерное волновое число  $k\delta \approx 1$ . Так как  $k = 2\pi/\lambda_b$ , то ясно, что к неустойчивости ведут волны с длиной  $\lambda_b \approx 2\pi\delta$ , т.е. достаточно длинные в сравнении с локальной толщиной пограничного слоя. Шлихтинг впервые расчитал скорость нарастания возмущений, ведущих к неустойчивости; она определяется абсолютным значением  $\omega_I$ . Примерно 10 лет спустя Драйден в экспериментах подтвердил теоретические результаты; он показал, что возмущения начинают расти как двумерные и только ниже по течению, т.е. при больших  $x$  и  $Re_x$  становятся трехмерными, что и ведет к появлению турбулентности. Практически турбулентный режим обнаруживается не в момент потери устойчивости, а при больших значениях  $x = x_{\text{кр}}$ , т.е.  $Re_x = Re_{x \text{ кр}}$ , больших, чем  $Re_{x \text{ п.у}}$ . Возмущения, которые начинают нарастать при  $Re_x = Re_{x \text{ п.у}}$ , сносятся потоком, на некотором участке течения наблюдаются режимы перемежаемости (переводование ламинарного и турбулентного режима в данной точке), и лишь затем, ниже по течению, устанавливается турбулентный режим течения. Эта схема развития процесса качественно представлена на рис. 4.6.

Теоретические результаты дают:  $Re_{\delta \text{ п.у}} \approx 1200$ ,  $Re_{\delta \text{ кр}} = 2750$ . Последняя величина вполне согласуется с ранее указанным значением  $Re_{x \text{ кр}} = 3 \cdot 10^5$ . Действительно,  $Re_{\delta \text{ кр}} = \frac{U_{\infty}\delta_{\text{кр}}}{v} = \frac{5U_{\infty}x}{v} \times Re_x^{-1/2} = 2750$ .



**Рис. 4.6. Схема нарастания возмущений в пограничном слое на плоской пластине**

Таким образом,  $Re_x^{1/2} = \frac{2750}{5} = 550$ ,  $Re_{x \text{ кр}} = 3,025 \cdot 10^5$ .

Эти результаты справедливы для «стандартных условий»: турбулентность набегающего потока  $Tu = 1 \div 3 \%$ , технически гладкая поверхность. На очень гладкой поверхности в условиях глубокого подавления турбулентности набегающего потока устойчивость возрастает, переход к турбулентности может происходить при числах Рейнольдса, на порядок больших.

### 4.3.2. Анализ влияния различных факторов на турбулентный переход

В целом можно считать доказанным, что переход к турбулентному течению, действительно, результат потери устойчивости. На устойчивость ламинарного течения влияют различные эффекты; в ряде случаев это влияние исследовано теоретически, иногда в основе выводов лежит эксперимент. Турбулентный переход остается серьезной научной проблемой, в настоящем издании дается лишь краткое качественное представление о предмете.

*Влияние турбулентности набегающего потока.* Количественной характеристикой турбулентности служит отношение среднеквадратичной скорости турбулентных пульсаций к осредненной скорости основного течения:

$$Tu = \frac{1}{U_\infty} \sqrt{\frac{u'_k u'_k}{3}}.$$

Качественно ясно, что рост турбулентности набегающего потока снижает устойчивость; напротив, снижение  $Tu$  повышает  $Re_{x \text{ кр}}$  и  $Re_{x \text{ п.у.}}$ . Эксперименты в совершенных аэродинамических трубах (Драйден, 1940 г.) показали, что значения  $Re_{x \text{ кр}}$  растут от  $(3 \div 5) \cdot 10^5$  при  $Tu \approx 0,01$  до  $(2,8 \div 4,2) \cdot 10^6$  при снижении  $Tu$  до примерно  $1 \cdot 10^{-3}$ .

Дальнейшее снижение  $Tu$  практически не влияет на устойчивость течения (рис. 4.7), т. е. при  $Re_x > 3 \cdot 10^6$  течение становится неустойчивым при любом уровне подавления турбулентности потока  $Tu$ .

*Влияние микрошероховатости стенок канала.* Это влияние связано с тем, что при обтекании элементов микрошероховатости создаются возмущения, воздействующие на поток. Фактически речь идет



Рис. 4.7. Влияние турбулентности набегающего потока на устойчивость ламинарного течения при обтекании плоской пластины

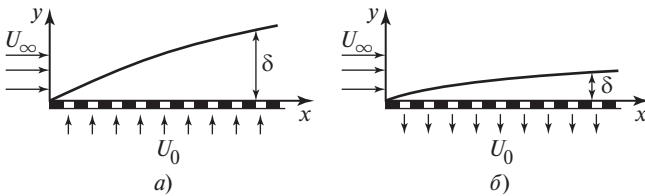
о таком же по сути влиянии на устойчивость, какое было рассмотрено выше. В опытах Драйдена подавление турбулентности обеспечивалось использованием конфузорных (суживающихся) каналов с высокой чистотой обработки поверхности их стенок.

Специальные исследования влияния на устойчивость течения проводились с использованием искусственной шероховатости двух типов: песочной и двумерной. В обоих случаях количественный критерий воздействия на устойчивость — безразмерная высота шероховатости

$$k_s^+ = \frac{k_s v_*}{V}, \text{ где } k_s \text{ — высота микрошероховатости; } v_* = \sqrt{\tau_c / \rho} \text{ —}$$

динамическая скорость. С ростом  $k_s^+$  устойчивость снижается, с уменьшением — возрастает. Но, так же как и с влиянием  $Tu$ , при  $k_s^+ \leq 7$  дальнейшее снижение высоты выступов не ведет к росту  $Re_{x \text{ кр}}$ .

*Влияние отсоса (вдува).* В данном случае рассматривается течение вдоль проницаемой поверхности (рис. 4.8); поперечный поток массы очень сильно влияет на устойчивость основного потока. Вдув широко используется в технике, в первую очередь как эффективная тепловая защита поверхности от воздействия газа высокой температуры. Вдув увеличивает толщину пограничного слоя  $\delta$  и, следовательно, снижает устойчивость ламинарного течения. Отсос, напротив, уменьшает  $\delta$ , увеличивает устойчивость. Поэтому, помимо такого «естественног» течения с отсосом, каким является, например, конденсация из потока парогазовой смеси, отсос, в принципе, может рассматриваться как средство управления пограничным слоем. Отсос позволяет сохранять ламинарный режим обтекания



**Рис. 4.8. Схема течения у проницаемой поверхности:**

*a* — вдув; *б* — отсос

даже при высоких скоростях, что снижает сопротивление аппарата. Шлихтинг [45] рассматривает оптимизационную задачу: при какой интенсивности отсоса пограничного слоя полет летательного аппарата энергетически выгоднее? Сопоставляются снижение сопротивления и энергетические затраты на отсос.

*Влияние продольного градиента давления.* Один из принципиальных выводов теории устойчивости ламинарного течения — это сильное влияние формы профиля скорости. Форма профиля скорости определяется второй производной скорости по поперечной координате ( $\partial^2 u / \partial y^2$ ). Профили с точкой перегиба, определяемой условием  $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$ , имеют значительно более низкий предел устойчивости, чем профили скорости без точки перегиба [45]. Выпуклому профилю скорости отвечает условие  $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$ . При течении в пограничном слое на его внешней границе профиль всегда выпуклый. Если вторая производная не изменяет знака до стенки, то точки перегиба на профиле скорости, очевидно, нет, профиль устойчивый. Признаком неустойчивости является условие  $(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0} > 0$ .

Так как при  $y = 0$  на непроницаемой стенке  $u = v = 0$ , то уравнение  $x$ -проекции импульса для плоского течения в приближении пограничного слоя (4.2) принимает вид

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0}. \quad (4.17)$$

Таким образом, знак второй производной скорости совпадает со знаком продольного градиента давления [ $\text{sign}(dp/dx) = \text{sign}(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0}$ ].

Так как в пограничном слое  $\partial p / \partial y = 0$ ,  $dp / dx = \text{idem}$  при любых  $y$ , то в невозмущенном потоке

$$\rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = -\frac{dp}{dx}.$$

Ясно, что ускоряющемуся потоку отвечает отрицательный градиент давления, замедляющемуся — положительный. При обтекании типичного выпуклого профиля (рис. 4.9) производная  $dp / dx$  изменяет знак. На начальной части профиля поток ускоряется, так как уменьшается сечение, через которое проходит поток (конфузорная часть профиля); течение здесь устойчивое. После прохождения плоскости миделевого сечения (сечение тела, имеющее максимальную площадь в плоскости, нормальной потоку)  $dp / dx$  изменяет знак, становится положительной. Это ведет к резкому росту толщины пограничного слоя, а при определенных условиях — к появлению зоны возвратного течения. В этой области диффузорного течения обычно происходит отрыв пограничного слоя (от обтекаемой поверхности); ламинарное течение здесь неустойчиво.

При теоретическом анализе влияния продольного градиента давления используют формпараметр

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{v} \frac{\partial U_\infty}{\partial x}.$$

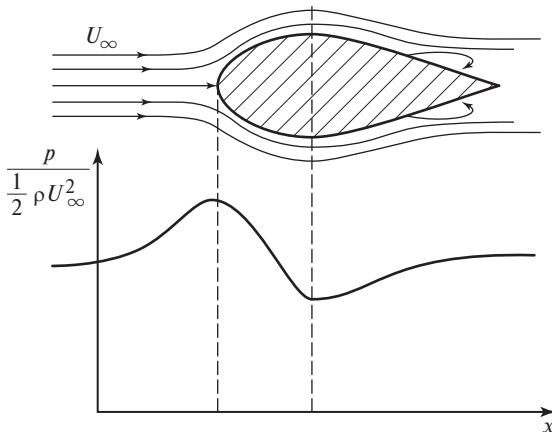


Рис. 4.9. Схема обтекания выпуклого профиля и распределение давления по его поверхности

При  $\Lambda > 0$  производная  $\frac{dp}{dx} < 0$ , устойчивость возрастает. При  $\Lambda < 0$  устойчивость резко снижается. Для течения в плоском пограничном слое влияние формпараметра качественно отражено на графике рис. 4.10.

*Влияние поперечного градиента массовых сил.* Влияние массовых сил на устойчивость ламинарного течения проявляется, если в потоке существует неоднородность плотности в направлении, нормальном к течению; это актуально для метеорологии, а также для авиации.

Если ось  $y$  направлена вверх, то условие  $\partial\rho/\partial y < 0$  отвечает так называемой устойчивой стратификации (более плотная среда внизу). Напротив, при  $\partial\rho/\partial y > 0$  стратификация неустойчивая. Если она обусловлена нагревом жидкости снизу, то возникает свободная конвекция. При определенных значениях  $\partial\rho/\partial y$  и масштабах тела даже в отсутствие направленного потока вдоль поверхности свободная конвекция становится турбулентной. В теоретическом анализе используется число Ричардсона (Richardson):

$$Ri = - \frac{\frac{g \partial \rho}{\rho \partial y}}{\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}^2}.$$

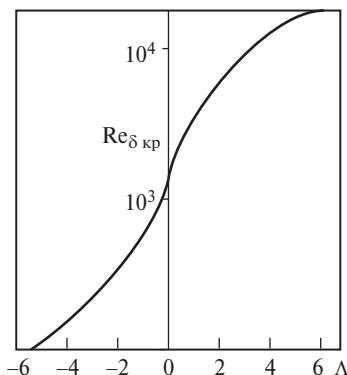


Рис. 4.10. Зависимость критического числа Рейнольдса, построенного по толщине пограничного слоя, от формпараметра

Так как  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{C_f U_\infty^2}{2 \nu}$ , то число Ричардсона можно представить как отношение модифицированного числа  $\text{Fr}$  к квадрату числа  $\text{Re}$ . Устойчивой стратификации соответствует  $\text{Ri} > 0$ . При  $\text{Ri} = 1/24$  теоретическое значение  $\text{Re}_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$  [45]. Качественно результат подтвержден в опытах.

*Влияние теплообмена.* Теплообмен влияет на устойчивость ламинарного течения, в первую очередь потому, что вызывает пространственную неоднородность плотности в жидкости, т. е. это влияние связано с рассмотренным выше влиянием массовых сил. Для обращенной вверх горизонтальной поверхности условию устойчивой стратификации  $\partial p / \partial y < 0$  отвечает охлаждение этой поверхности, а неустойчивой стратификации  $\partial p / \partial y > 0$  — нагрев.

Есть, однако, и более тонкий эффект, связанный с влиянием переменности вязкости на форму профиля скорости. Если массовые силы несущественны (невесомость, вертикальная поверхность при малом влиянии свободной конвекции на вынужденное течение), то при обтекании плоской поверхности, когда  $dp/dx = 0$ , на поверхности ( $y = 0$ ) при переменной вязкости имеем из (4.17):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_{y=0} = \left( \frac{\partial \mu}{\partial y} \right)_{y=0} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0.$$

Так как на плоской поверхности  $(\partial u / \partial y)_{y=0} > 0$  всегда, то знак второй производной скорости по координате противоположен знаку производной  $(\partial \mu / \partial y)_{y=0}$ :

$$\text{sign} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\text{sign} \left( \frac{\partial \mu}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Устойчивой форме профиля скорости соответствует  $(\partial \mu / \partial y)_{y=0} > 0$ .

В газах  $\partial \mu / \partial T > 0$ , т. е. условию  $(\partial \mu / \partial y)_{y=0} > 0$ ,  $(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0} < 0$ , соответствует охлаждение газа (по мере удаления от стенки температура газа и вязкость его растут). Следовательно, в случае течения вдоль горизонтальной, обращенной вверх поверхности устойчивость течения газа возрастает благодаря обоим факторам: устойчивая стратификация по плотности и устойчивый профиль скорости. Нагрев газа в этом случае резко снижает устойчивость ламинарного течения.

В капельных жидкостях  $\partial\mu/\partial T < 0$  всегда. В этом случае в отсутствие массовых сил охлаждение жидкости ( $\partial T/\partial y > 0$ ) означает  $\partial\mu/\partial y < 0$ , т. е. снижение устойчивости (и, наоборот, нагрев жидкости сохраняет устойчивую форму профиля скорости). Вероятно, этот эффект ведет к снижению критического числа Рейнольдса пленки  $Re_{pl}$  в процессах конденсации на вертикальной поверхности, к чему мы вернемся в гл. 8.

В случае течения капельной жидкости вдоль обращенной вверх горизонтальной поверхности влияние вязкости на форму профиля скорости и влияние массовых сил на тип стратификации действуют на устойчивость течения в противоположных направлениях. Без конкретных расчетов предсказать, какой из эффектов будет более сильным, затруднительно.

*Влияние сжимаемости (числа Maxa).* Сам по себе эффект сжимаемости снижает устойчивость ламинарного течения, т.е. с ростом числа  $M_\infty$  значение числа  $Re_{x, kp}$  падает. Но в реальных процессах течения газа с высокой скоростью сжимаемость не отделима от процессов нагрева и охлаждения пограничного слоя.

При полном торможении потока вся кинетическая энергия потока переходит в теплоту. Температура адиабатического торможения

$$T_{ad} = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2c_p}.$$

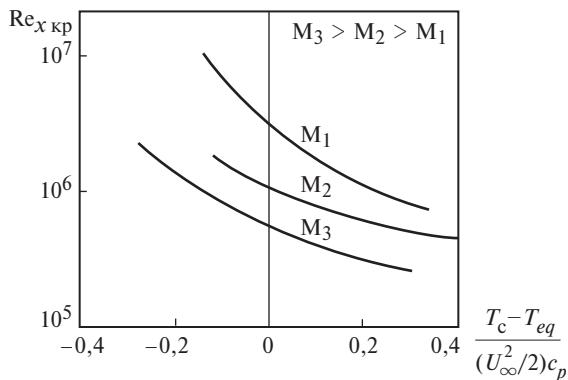
В пограничном слое скорость потока снижается до нуля на стенке (при  $y = 0$ ), но при этом тепло отводится в пограничный слой и далее в невозмущенный поток, а также, в общем случае, и через стенку (внутрь обтекаемого тела). Если стенка адиабатная, то равновесная температура в заторможенном пограничном слое

$$T_{eq} = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2c_p} b(\Pr), \quad (4.18)$$

где  $b(\Pr)$  — коэффициент восстановления. В ламинарном потоке  $b = \Pr^{1/2}$ , это — теоретический результат. В турбулентном потоке  $b(\Pr) \approx \Pr^{1/3}$ .

С учетом определения скорости звука  $C_{3B} = \sqrt{kR_i T}$ ;  $R_i = c_p - c_v$ ;  $k = c_p/c_v$ ;

$$\frac{U_\infty^2}{2c_p} \frac{kR_i T_\infty}{C_{3B}^2} = M_\infty^2 \frac{k-1}{2} T_\infty,$$



**Рис. 4.11. Влияние теплообмена и числа Маха на устойчивость ламинарного течения**

(4.18) принимает вид

$$T_{eq} = T_{\infty} \left( 1 + M_{\infty}^2 \frac{k-1}{2} b \right). \quad (4.18a)$$

В высокоскоростном потоке направление теплового потока между стенкой обтекаемого аппарата и пограничным слоем определяется знаком разности температур  $T_c - T_{eq}$ . При  $T_c < T_{eq}$  происходит охлаждение пограничного слоя, при  $T_c > T_{eq}$  — нагрев. В первом случае устойчивость ламинарного течения в пограничном слое растет, во втором — падает.

Из графика на рис. 4.11 ясно, что в адиабатических условиях рост сжимаемости снижает устойчивость. Вместе с тем, охлаждение пограничного слоя может резко повысить устойчивость течения даже при очень высоких значениях  $M_{\infty}$ . Г. Шлихтинг [45] сообщает, что при полете ракеты V-2 с криогенным охлаждением ее поверхности ламинарное течение в пограничном слое сохранялось при  $Re_x \approx 9 \cdot 10^7$  (в 300 раз больших, чем  $Re_x$  кр в стандартных условиях).

#### 4.4. Осредненные уравнения импульса и энергии при турбулентном течении

##### 4.4.1. Вывод осредненных уравнений

Так как важные для технических приложений параметры ( $\xi$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — коэффициенты трения, теплообмена и массообмена) определяются осредненными характеристиками турбулентного течения, получение

осредненных уравнений имеет очевидный практический смысл. Кроме того, эта процедура, по крайней мере качественно, объясняет резкую интенсификацию процессов переноса при турбулентном переходе.

Рейнольдс исходил из того, что нестационарные уравнения сохранения импульса и энергии справедливы для актуальных параметров турбулентного течения. Сомнения в справедливости такого предположения могли касаться только используемых в этих уравнениях эмпирических законов вязкого трения Ньютона и теплопроводности Фурье. Аргументом в пользу применимости этих законов к турбулентному течению является то, что пространственные масштабы турбулентных пульсаций на несколько порядков превосходят межмолекулярные расстояния. Сегодня имеются результаты прямого численного моделирования (DNS), которые эти сомнения снимают полностью.

Из соображений уменьшения объема формальных выкладок (и только!) будем выводить осредненные уравнения при следующих допущениях:

свойства жидкости (в том числе плотность  $\rho$ ) постоянны;

процесс конвективного теплообмена в среднем стационарен;

не учитывается действие массовых сил в уравнении импульса; работа сил давления, вязкая диссиpация и внутренние источники тепла — в уравнении энергии.

Тогда система уравнений сохранения для истинных (актуальных) параметров турбулентного течения и теплообмена такова:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0; \quad (4.19)$$

$$\rho \frac{\partial u_l}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_l} + \mu \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k}; \quad (4.20)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (4.21)$$

В этих уравнениях  $u_l$ ,  $u_k$ ,  $p$ ,  $T$  — это мгновенные (актуальные) характеристики процесса, претерпевающие непрерывные хаотические пульсации. Так как в среднем процесс стационарен, будем (вслед за Рейнольдсом) каждую актуальную величину представлять как сумму осредненного и пульсационного значений:

$$u_l = \bar{u}_l + u'_l; \quad u_k = \bar{u}_k + u'_k; \quad p = \bar{p} + p'; \quad T = \bar{T} + T'. \quad (4.22)$$

Осреднение производится за время  $t \gg t_0$  — характерного периода пульсаций, только в этом случае представление (4.22) имеет смысл. При этом очевидно

$$\bar{u}'_l = \bar{u}'_k = 0; \quad \bar{T}' = 0; \quad \bar{p}' = 0,$$

т. е. среднее значение пульсаций равно нулю.

Подставим (4.22) в (4.19)–(4.21) и проведем осреднение полученных уравнений за время  $t \gg t_0$ . При этом будем исходить из достаточно простых правил осреднения любых актуальных величин  $f = \bar{f} + f'$  и  $g = \bar{g} + g'$ :

$$\bar{f} = \overline{\bar{f} + f'} = \bar{f}; \quad \overline{f + g} = \overline{\bar{f} + f'} + \overline{\bar{g} + g'} = \bar{f} + \bar{g};$$

$$\overline{df} = d\bar{f}; \quad \overline{\bar{f}g} = \overline{\bar{f}(\bar{g} + g')} = \bar{f}\bar{g} + \overline{\bar{f}g'} = \bar{f}\bar{g}.$$

Фактически при операциях осреднения любая средняя величина выступает как постоянный множитель.

Используя уравнение неразрывности (4.19), представим конвективные члены уравнений импульса и энергии в дивергентной форме:

$$\rho u_k \frac{\partial u_l}{\partial u_k} = \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k u_l);$$

$$\rho c_p u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \rho c_p \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k T).$$

После таких преобразований подставим в (4.19)–(4.21) соотношения (4.22) и проведем осреднение. По результатам осреднения могут быть сделаны следующие выводы:

а) уравнение неразрывности сохраняет свой вид для осредненных компонент скорости:

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0. \quad (4.19a)$$

Ясно, что, вычитая из исходного уравнения (4.19) для актуальных компонент скорости осредненное уравнение (4.19a), получаем уравнение неразрывности для пульсационных компонент скорости:

$$\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0; \quad (4.19b)$$

б) линейные члены (4.20) и (4.21), т. е. их правые части после осреднения сохраняют прежнюю форму, но уже в отношении осредненных величин, т. е.

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_l} = \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_l} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_l} + \frac{\partial p'}{\partial x_l} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_l};$$

$$\frac{\overline{\partial^2(\bar{u}_l + u'_l)}}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 \bar{u}_l}{\partial x_k \partial x_k}; \quad \frac{\overline{\partial^2(\bar{T} + T')}}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_k \partial x_k};$$

в) нестационарные члены уравнений (4.20) и (4.21) исчезают, так как процесс в среднем стационарный. Действительно,

$$\frac{\overline{\partial^2(\bar{u}_l + u'_l)}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial t} + \frac{\partial u'_l}{\partial t} = 0; \quad \frac{\overline{\partial(\bar{T} + T')}}{\partial t} = 0;$$

г) конвективные члены (4.20) и (4.21), записанные в дивергентной форме, после подстановки в них соотношений (4.22) и осреднения преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_k + u'_k)(\bar{u}_l + u'_l)} &= \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\bar{u}_k \bar{u}_l} + \overline{\bar{u}_k u'_l} + \overline{u'_k \bar{u}_l} + \overline{u'_k u'_l}) = \\ &= \frac{\partial(\bar{u}_k \bar{u}_l)}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k u'_l}; \\ \overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}_k + u'_k)(\bar{T} + T')} &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\bar{u}_k \bar{T}} + \overline{\bar{u}_k T'} + \overline{u'_k \bar{T}} + \overline{u'_k T'}\right) = \\ &= \frac{\partial(\bar{u}_k \bar{T})}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_k T'}. \end{aligned}$$

Ясно, что второе и третье слагаемые в обоих промежуточных выражениях при осреднении обращаются в нуль. Таким образом, осреднение нелинейных по пульсациям членов уравнений ведет к появлению новых слагаемых в осредненных уравнениях.

При записи результирующих (после осреднения) уравнений сохранения импульса и энергии дополнительные слагаемые перене-

сем в правую часть, а слагаемые, содержащие осредненные параметры, перепишем в канонической форме, так как в силу (4.19а)

$$\frac{\partial(\bar{u}_k \bar{u}_l)}{\partial x_k} = \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial(\bar{u}_k \bar{T})}{\partial x_k} = \bar{u}_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k}.$$

Таким образом, имеем

$$\rho \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_l} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_l}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \bar{u}'_k \bar{u}'_l); \quad (4.20a)$$

$$\rho c_p \bar{u}_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} = \lambda \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho c_p \bar{u}'_k \bar{T}' \right). \quad (4.21a)$$

(То, что среднее из произведения пульсаций не равно нулю, должно быть ясно из частного случая  $\bar{u}'_k \bar{u}'_k = \sum_{k=1}^3 \bar{u}'_k^2$ ).

#### 4.4.2. Анализ осредненных уравнений

*Искусственное разделение актуальных параметров* на осредненные и пульсационные величины и последующее осреднение нестационарных уравнений, описывающих действительное турбулентное течение, привело к стационарным уравнениям сохранения для осредненных параметров. В этих осредненных уравнениях появились дополнительные члены, содержащие средние от произведения пульсаций — «вторых моментов пульсаций». Эти новые слагаемые качественно объясняют резкую интенсификацию переноса импульса и энергии при турбулентном переходе. Однако эти дополнительные члены уравнений сохранения не могут быть количественно определены на базе осредненных уравнений.

*Дополнительное слагаемое в осредненном уравнении сохранения  $l$ -проекции импульса* (4.20а) и по форме и по физическому смыслу представляет собой дивергенцию от плотности потока импульса за счет турбулентных пульсаций:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho \bar{u}'_k \bar{u}'_l \right).$$

Имея в виду, что вязкостный член в (4.20а) — это дивергенция от тензора вязких напряжений:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{kl}^{\mu}) = \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_l}{\partial x_k \partial x_k},$$

так как  $\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) = 0$ , можно представить тензор  $-\rho \bar{u}'_k \bar{u}'_l = \tau_{kl}^{(t)}$  как

тензор кажущихся напряжений турбулентного трения (напряжений Рейнольдса) и переписать (4.20а) в виде

$$\rho \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{kl}^{(\mu)} + \tau_{kl}^{(t)}). \quad (4.20б)$$

Экспериментально обнаруживаемый факт резкого возрастания сопротивления трения при турбулентном переходе говорит о том, что обычно  $\tau_{kl}^{(t)} >> \tau_{kl}^{(\mu)}$ .

*Аналогично можно утверждать, что дополнительное слагаемое в (4.21а) и по форме и по содержанию — это плотность теплового потока, обусловленного турбулентными пульсациями скорости и температуры:  $q_k^{(t)} = \rho c_p \bar{u}'_k \bar{T}'$ .*

Так как

$$\lambda \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_k \partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial q_k^{(\lambda)}}{\partial x_k},$$

то уравнение (4.21а) может быть представлено в виде

$$\rho c_p \bar{u}_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left( q_k^{(\lambda)} + q_k^{(t)} \right). \quad (4.21б)$$

*«Плата» за переход от нестационарных уравнений сохранения для актуальных параметров турбулентного течения и теплообмена, образующих замкнутое математическое описание, к системе осредненных стационарных уравнений — незамкнутость полученной системы уравнений.* В ней, помимо пяти осредненных параметров: трех компонент  $\bar{u}_l$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{T}$ , — появилось шесть неизвестных компонент тензора кажущихся напряжений турбулентного трения (рейнольдсовых напряжений) и три компонента вектора турбулентного теплового потока. Таким образом, на те же пять уравнений появилось

дополнительно девять неизвестных переменных. Проблема замыкания решается с помощью эмпирической информации, используемой в различных моделях турбулентности. Фактически замыкание реализуется с привлечением дополнительной, внешней по отношению к исходному математическому описанию, информации.

*Альтернатива использованию эмпирических или полуэмпирических моделей турбулентности* — это DNS — direct numerical simulation, т. е. прямое численное решение исходной системы нестационарных уравнений (4.19)–(4.21); DNS — сегодня и в обозримой перспективе — инструмент научного исследования. Решаются обычно гидродинамические задачи; для трубы при  $Re_d = 7000 \div 12\,000$  счет занимает  $\sim 100$  ч на современных персональных компьютерах. Масштаб турбулентности (колмогоровский), определяющий максимальный размер ячейки при численном решении, практически обратно пропорционален  $Re$ . Увеличение числа  $Re$  на порядок означает уменьшение на порядок размера сетки по каждой координате, т.е. почти на четыре порядка увеличение времени счета. При увеличении на четыре порядка времени счета, т.е. до  $10^6$  ч, оно превысит 100 лет (1 год  $\approx 8800$  ч). Практические задачи могут относиться и к  $Re \gg 10^5$ .

*Алгебраические модели как способ замыкания осредненных уравнений.* Этот нестрогий термин относится к моделям, использующим понятия коэффициентов турбулентной вязкости и турбулентной температуропроводности. Исторически они восходят к работе 1877 г. французского ученого Ж. Буссинеска. Исходя из того, что при турбулентном течении импульс (как и при ламинарном) переносится из областей с более высокой осредненной скоростью в области с более низкой скоростью, Буссинеск предложил по аналогии с ламинарным течением использовать градиентное выражение для турбулентных напряжений. Для стабилизированного течения в канале или для пограничного слоя получается:

$$\tau_{yx}^{(t)} = A_t \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y},$$

что аналогично закону вязкого трения Ньютона  $\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$  для ламинарного пограничного слоя. В формуле Буссинеска  $A_t$  — коэффициент турбулентного обмена импульсом с размерностью динамической вязкости. Но это не свойство жидкости!

Чаще используют

$$\tau_{yx}^{(t)} = \rho \varepsilon_\tau \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y},$$

где  $\varepsilon_\tau$  — турбулентная вязкость,  $\text{м}^2/\text{с}$ , формальный аналог кинематической вязкости  $\nu = \mu/\rho$ .

Так как  $\tau_{kl}^{(t)} = -\rho \overline{u'_k u'_l} = \rho \varepsilon_\tau \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k}$ , то в плоском стабилизирован-

ном течении или в пограничном слое

$$\begin{aligned} \tau_{yx}^{(t)} &= -\rho \overline{u'_x u'_y} = \rho \varepsilon_\tau \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}, \\ \varepsilon_\tau &= -\frac{\overline{u'_x u'_y}}{\partial \bar{u}_x / \partial y}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Из этих несложных преобразований ясно, что так называемая турбулентная вязкость — это параметр процесса, но не физическое свойство жидкости. Вместе с тем (4.23) показывает способ экспериментального определения  $\varepsilon_\tau$  на основе измерений составляющих пульсаций скорости и профиля осредненной скорости.

После введения турбулентной вязкости полный тензор напряжений трения в несжимаемой жидкости может быть представлен как

$$\tau_{kl} = \tau_{kl}^{(\mu)} + \tau_{kl}^{(t)} = \rho \nu \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \rho \varepsilon_\tau \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} = \rho \nu \left( 1 + \frac{\varepsilon_\tau}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k}.$$

Уравнение (4.20) принимает вид

$$\rho u_k \frac{\partial u_l}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_l} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( 1 + \frac{\varepsilon_\tau}{\nu} \right) \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right]. \quad (4.20b)$$

В этом уравнении все величины — осредненные, но знак осреднения опущен. (В дальнейшем знак осреднения мы будем использовать, как правило, только в выражениях, содержащих осредненные заначения произведений пульсационных параметров.) Если в (4.20b)  $\mu = \text{var}$ , эта величина записывается под знаком производной в качестве первого множителя в квадратных скобках.

Сама по себе такая форма записи проблемы замыкания не решает; эта проблема переносится на турбулентную вязкость  $\varepsilon_\tau$ . Однако выигрыш очевиден, так как вместо шести компонент тензора рейнольдсовых напряжений необходимо определить одну скалярную величину. Конечно, эта скалярная величина как функция процесса

никогда не может рассматриваться как постоянная (и не может быть вынесена из-под знака производной). Кроме того, действительное турбулентное течение не всегда может рассматриваться как изотропное, допускающее использование скалярных коэффициентов переноса импульса (и энергии). Однако во многих прикладных задачах в случае относительно простой геометрии (плоский пограничный слой, прямой канал) рассматриваемое приближение оправдано.

Запись осредненного уравнения сохранения импульса в форме (4.20в) качественно отражает относительную роль молекулярного и турбулентного переноса. Сумма в круглых скобках уравнения — это безразмерная характеристика полного коэффициента переноса импульса, единица при этом отвечает молекулярному переносу,  $\varepsilon_\tau/v$  — турбулентному. У стенки ( $y \rightarrow 0$ )  $\varepsilon_\tau \rightarrow 0$ , преобладает молекулярный перенос. Но при развитой турбулентности уже на малых расстояниях от стенки  $\varepsilon_\tau/v >> 1$ , турбулентный перенос становится преобладающим.

Аналогичный подход применяют для записи турбулентного теплового потока. Если при ламинарном течении

$$q_k^{(\lambda)} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} = -\rho c_p a \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

( $a$  — температуропроводность жидкости), то для турбулентного потока

$$q_k^{(т)} = -\rho c_p \varepsilon_q \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k},$$

где  $\varepsilon_q$  — формальный аналог температуропроводности  $a$ , так называемая турбулентная температуропроводность. Полный тепловой поток

$$q_k = q_k^{(\lambda)} + q_k^{(т)} = (-\rho c_p a - \rho c_p \varepsilon_a) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} = -\lambda \left( 1 + \frac{\varepsilon_q}{a} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k}.$$

Отношение  $\varepsilon_\tau/\varepsilon_q = \text{Pr}_T$  — так называемое турбулентное число Прандтля. Как и соответствующие коэффициенты турбулентного переноса импульса ( $\varepsilon_\tau$ ) и тепла ( $\varepsilon_q$ ), число  $\text{Pr}_T$  есть характеристика процесса, а не свойство жидкости. Но поскольку турбулентный перенос любой «пассивной примеси», т.е. свойства среды, непосредственно не влияющего на сам механизм турбулентного переноса, вероятно, подчиняется одним и тем же законам (аналогия Рейнольдса), то можно ожидать, что  $\text{Pr}_T \approx 1$ . В численных расчетах обычно принимают  $\text{Pr}_T = 1,0; 0,9; 0,89; 0,87$  и т. п.

Использование числа  $\text{Pr}_T$  позволяет записать

$$\frac{\varepsilon_q}{a} \equiv \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_\tau} \frac{\varepsilon_\tau}{v} \frac{v}{a} = \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \frac{\varepsilon_\tau}{v}; \quad q_k = -\lambda \left( 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \frac{\varepsilon_\tau}{v} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k},$$

где  $\varepsilon_q$  и  $\text{Pr}_T$ , как и  $\varepsilon_\tau$ , — функции процесса. Подстановка в (4.21б) дает

$$\rho c_p u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \lambda \left( 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \frac{\varepsilon_\tau}{v} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \right]. \quad (4.21\text{в})$$

Знак осреднения для  $u_k$  и  $T$  опущен. С учетом определения  $q_k^{(\text{т})}$  имеем

$$q_k^{(\text{т})} = \rho c_p \overline{u'_k T'} = -\rho c_p \varepsilon_q \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k},$$

т. е.

$$\varepsilon_q = -\frac{\overline{u'_k T'}}{\partial \bar{T} / \partial x_k},$$

или для течения в плоском пограничном слое

$$\varepsilon_q = -\frac{\overline{u'_y T'}}{\partial \bar{T} / \partial y}. \quad (4.23\text{а})$$

Это соотношение в принципе позволяет экспериментально определять  $\varepsilon_q$  и, следовательно, при известном  $\varepsilon_\tau$  турбулентное число  $\text{Pr}_T$ . Таких измерений было выполнено очень мало, эксперименты по определению  $T'$  намного сложнее, чем измерения пульсаций скорости.

Как и в случае переноса импульса, слагаемые в круглых скобках (4.21в) отражают относительную роль молекулярного переноса (ей отвечает единица) и турбулентного переноса энергии. Так как число  $\text{Pr}_T$  — величина порядка единицы, то эта относительная роль зависит не только от  $\varepsilon_\tau/v$ , но и от молекулярного числа Прандтля. При  $\text{Pr} \approx 1$  соотношение молекулярного и турбулентного переноса энергии изменяется вблизи стенки так же, как и относительная роль молекулярного и турбулентного переноса импульса: при  $y \rightarrow 0$  доминирует молекулярный перенос, по мере удаления от стенки быстро нарастает и становится преобладающим турбулентный перенос энергии. При  $\text{Pr} \gg 1$  роль молекулярного переноса энергии убывает еще быстрее при удалении от стенки.

При  $\text{Pr} \ll 1$  (жидкие металлы) даже при развитой турбулентности сохраняется значимость молекулярной теплопроводности.

*Замыкание (математического описания) на уровне вторых моментов пульсаций.* Уравнения сохранения для вторых моментов пульсаций получают следующим образом. Записывают уравнения сохранения импульса для актуальных значений  $l$ - и  $m$ -проекций скорости, которые представляются как  $u_l = \bar{u}_l + u'_l$  и  $u_m = \bar{u}_m + u'_m$ . Каждое из этих нестационарных уравнений умножается соответственно на  $u'_m$  и  $u'_l$ , уравнения складываются, после чего производится осреднение. Итогом становятся уравнения сохранения для вторых моментов пульсаций  $\overline{u'_l u'_m}$ , общее число которых равно шести — по числу компонент тензора кажущихся напряжений турбулентного трения. В каждом из этих уравнений могут быть определены локальные производные по времени, конвективные производные, отражающие перенос рейнольдсовых напряжений осредненным течением, члены, отражающие порождение турбулентных напряжений, их диссиацию, диффузию. Интерпретация некоторых членов обсуждаемых уравнений, в частности тех, которые содержат пульсации давления, неоднозначна. Уравнения сохранения для рейнольдсовых напряжений проблему замыкания не решают, поскольку в этих уравнениях появляются новые неизвестные — более высокие моменты пульсаций вида  $\overline{u'_k u'_l u'_m}$ . (Эта величина отражает перенос турбулентных напряжений пульсациями.) Необходимо отметить, что получение на основе сходной процедуры уравнений сохранения для третьих или более высоких моментов пульсаций также не решает проблему замыкания, поскольку каждый раз в этих уравнениях появляются новые неизвестные — все более высокие моменты пульсаций.

В случае  $m = l$  вторые моменты пульсаций дают  $\frac{1}{2} \overline{u'_k u'_k} = \frac{1}{2} \overline{(\bar{u}'_l)^2} = k$  — кинетическую энергию турбулентности (турбулентных пульсаций). Таким образом, из рассматриваемых уравнений сохранения рейнольдсовых напряжений следует уравнение сохранения кинетической энергии турбулентности (см., например, [31]). В этом уравнении слагаемое, отражающее интенсивность превращения энергии турбулентных пульсаций в тепло из-за вязкости, — скорость диссиpации

кинетической энергии турбулентности — имеет вид  $\varepsilon = \nu \frac{\partial \bar{u}'_l}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}'_l}{\partial x_k}$

(размерность этой величины  $\text{м}^2/\text{с}^3$ ). Уравнение сохранения для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon$  может быть получено независимо из уравнений Навье—Стокса для актуальных величин. Параметры  $k$  и  $\varepsilon$ , как ясно из изложенного, получены на основе вторых моментов пульсаций. С их использованием возможны различные способы определения коэффициентов турбулентного переноса. Например, для турбулентной вязкости применяют

$$\varepsilon_\tau = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \varepsilon_\tau = C_\mu k^{1/2} l_k,$$

где  $C_\mu$  — константа;  $l_k$  — линейный масштаб турбулентности.

Поскольку незамкнутость осредненных уравнений турбулентности — их принципиальная особенность, в любых моделях, использующих замыкание на уровне вторых моментов пульсаций, неизбежно прибегают к эмпирической информации. В частности, в достаточно популярной  $k-\varepsilon$ -модели турбулентности, основанной на уравнениях сохранения кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации, используют пять достаточно универсальных эмпирических констант.

#### 4.4.3. Осредненные уравнения в приближении пограничного слоя

К осредненным уравнениям турбулентного течения (4.20в) и теплообмена (4.21в) применяют аппарат теории пограничного слоя Прандтля в том отношении, что при  $\delta \ll l$  должны выполняться условия  $\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$ . Тогда для плоского турбулентного пограничного слоя при  $u_1 = u_x = u$ ;  $u_2 = u_y = v$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (4.19\text{в})$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 1 + \frac{\varepsilon_\tau}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right]; \quad (4.20\text{г})$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \left( 1 + \frac{\Pr_T}{\Pr} \frac{\varepsilon_\tau}{v} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right]. \quad (4.21\text{г})$$

В этих уравнениях, как и при ламинарном течении, конвективные члены уравнений (4.20г) и (4.21г) одного порядка; от уравнения  $y$ -проекции импульса остается лишь  $\partial p/\partial y = 0$ . В правой части учтено, что  $\partial^2 u / \partial x^2 \ll \partial^2 u / \partial y^2$ ,  $\partial^2 T / \partial x^2 \ll \partial^2 T / \partial y^2$  — эти неравен-

ства в отношении молекулярного переноса импульса и энергии в продольном и поперечном направлениях имеют ту же силу, что и при ламинарном течении, причем отбрасываемые члены имеют порядок малости  $\delta^2$ . Но в (4.20г) и (4.21г) отброшены и слагаемые

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\rho \overline{u' u'} \right) \text{ и } \frac{\partial}{\partial x} \left( -\rho c_p \overline{u' T'} \right) \text{ как малые в сравнении со слагаемыми}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\rho \overline{u' v'} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\varepsilon_\tau}{v} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\rho c_p \overline{v' T'} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\lambda \varepsilon_q}{a} \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Так как порядок произведений пульсаций  $\overline{u' u'}$  и  $\overline{u' v'}$ ,  $\overline{u' T'}$  и  $\overline{v' T'}$  одинаков, то отбрасываемые члены имеют порядок  $O(\delta)$ , т. е. первый порядок малости в сравнении с теми членами, которые сохранены в уравнениях в приближении пограничного слоя.

Это означает, что точность приближений пограничного слоя для турбулентного течения ниже, чем для ламинарного. Тем не менее это приближение используется: получаемые результаты обеспечивают точность, приемлемую для инженерных расчетов.

Важно отметить, что проблема замыкания сохраняется и для уравнений (4.19в)—(4.21г) в приближении пограничного слоя, так как для системы трех уравнений число неизвестных равно пяти:  $u$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $\varepsilon_\tau$ ,  $Pr_T$ .

## 4.5. Механизм турбулентного переноса импульса и методы его моделирования

### 4.5.1. О внутренних масштабах турбулентного течения

Одному из авторитетнейших специалистов в области теории турбулентности П. Брэдшоу (P. Bradshaw) принадлежит весьма характерное высказывание: «Единственное утверждение относительно турбулентности бесспорно: это — наиболее сложный вид движения жидкости» (1978).

Проблема в том, что турбулентность — это не просто хаос, как в случае теплового движения молекул газа, где сегодня успешно решаются даже очень сложные задачи. В турбулентном движении взаимодействуют структуры (вихри) весьма различных масштабов. Еще 80 лет назад Ричардсон (Richardson) «каскадную» модель турбулентного течения описал стихами\*. Эта модель в общих чертах сегодня разделяется специалистами. Детали взаимодействия турбулентных структур остаются объектом теоретических и экспериментальных исследований в механике жидкости.

Для прикладных задач в большинстве случаев оказывается достаточным использовать простейшие модели турбулентности. Хотя знания не бывают лишними: чем глубже и детальнее известны действительные механизмы процесса, тем большие основания получают и простейшие модели (в частности, те, которые используются применительно к двухфазным течениям).

Достаточно часто для разработки простых моделей используются оценки масштабов турбулентности. Обычно в турбулентных потоках линейный масштаб энергонесущих вихрей имеет порядок характерного поперечного размера течения: в каналах  $d_r$ , во внешних задачах толщина турбулентного пограничного слоя  $\delta_T$ . Однако во внешних задачах могут формироваться турбулентные области гигантских размеров — ураганы, тайфуны.

Другой важный линейный масштаб — это минимальный размер турбулентного вихря, т.е. размер тех макроскопических турбулентных образований, которые диссилируют (исчезают) благодаря вязкости. Этот минимальный размер принципиально важен при выборе шага сетки при DNS: размер ячейки должен быть меньше, чем минимальный масштаб турбулентности, чтобы можно было при моделировании воспроизводить реальные процессы.

Обсуждаемый масштаб определен А.Н. Колмогоровым и носит его имя. Вдали от твердой поверхности можно ожидать изотропную структуру течения. Никаких внешних линейных масштабов в задаче нет. Процесс диссипации малых турбулентных вихрей характеризуется скоростью диссипации кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon$  и кинематической вязкостью. Полагая, что

$$\eta = \varepsilon^m v^n,$$

---

\* Big whorls have little whorls,  
Which feed on their velocity,  
Little whorls have smaller whorls  
And so on up to viscosity.

легко найти структуру выражения для  $\eta$ , составив уравнения размерностей и учитывая, что размерности  $\eta = [\text{м}]$ ;  $\varepsilon = [\text{м}^2/\text{с}^3]$ ;  $v = [\text{м}^2/\text{с}]$ . Имеем

$$1 = 2m + 2n; \quad n = -3m,$$

откуда  $m = -1/4$ ,  $n = 3/4$ . Таким образом,

$$\eta = (v^3/\varepsilon)^{1/4}.$$

Колмогоровский масштаб турбулентности  $\eta$  позволяет определить также масштабы скорости и времени для минимальных турбулентных вихрей. Диссипация малых вихрей означает, что на их масштабах силы инерции и вязкости примерно равны, т. е.  $Re_K \approx 1 = v_K \eta / v$ ,  $v_K = v/\eta = (v\varepsilon)^{1/4}$  — колмогоровский масштаб скорости.

Характерный масштаб времени для колмогоровских вихрей получается как

$$t_K = \eta/v_K = \left( \frac{v^3}{\varepsilon \cdot v\varepsilon} \right)^{1/4} = (v/\varepsilon)^{1/2}.$$

Изотропная турбулентность в естественных (природных) или технических процессах встречается крайне редко. Но колмогоровские масштабы используют для грубых оценок и применительно к тем процессам, где турбулентность заведомо не изотропна, в частности для течения в каналах. В этом случае для определения  $\varepsilon$  используют информацию о трении на стенке. Касательное напряжение на стенке  $\tau_c$  характеризует интенсивность потери импульса из-за трения. Работа, совершаемая потоком против сил трения в единицу времени на участке  $\Delta l$  круглой трубы диаметром  $d$ , и характеризует скорость диссипации кинетической энергии:  $\tau_c \bar{u} \pi d \cdot \Delta l$ , Дж/с = Вт. Чтобы получить скорость диссипации  $\varepsilon$ , надо отнести эту величину к массе жидкости в объеме  $\Delta V = \pi d^2 \Delta l / 4$ , таким образом,

$$\varepsilon = \frac{\xi}{8} \frac{\rho \bar{u}^2 \bar{u} \pi d \cdot \Delta l \cdot 4}{\rho \pi d^2 \cdot \Delta l} = \frac{\xi}{2} \frac{\bar{u}^3}{d}.$$

Оценим колмогоровские масштабы турбулентности, например, для типичных условий в ТВС ВВЭР при  $d_r = 3 \cdot 10^{-3}$  м,  $\bar{u} = 4$  м/с,  $\rho = 750$  кг/м<sup>3</sup>;  $\mu = 1,125 \cdot 10^{-4}$  кг/(м · с),  $v = 1,5 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с:

$$Re = \frac{750 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{1,25 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^4;$$

$$\xi = 1,9 \cdot 10^{-2};$$

$$\varepsilon = \frac{1,9 \cdot 10^{-2} \cdot 64}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} \approx 200 \text{ м}^2/\text{с}^3;$$

$$\eta = \left( \frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} = \left( \frac{1,5^3 \cdot 10^{-21}}{200} \right)^{1/4} \approx 2,02 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Ясно, что при  $d_r = 3 \cdot 10^{-3}$  м число ячеек только вдоль одной координаты (в поперечном направлении) должно быть не менее 1500. Конечно, сегодня DNS для течения в стержневых сборках — это фантазия!

Колмогоровский масштаб скорости  $v_K = (v\varepsilon)^{1/4} = (1,5 \cdot 10^{-7} \cdot 200)^{1/4} \approx 7,40 \cdot 10^{-2}$  м/с, колмогоровский масштаб времени  $t_K = (v/\varepsilon)^{1/2} = (1,5 \cdot 10^{-7}/200)^{1/2} = 0,28 \cdot 10^{-4}$  с.

Для того же течения масштаб времени для энергонесущих вихрей  $t_{\text{эн}} = d_r/\bar{u} = 3 \cdot 10^{-3}/4 = 0,75 \cdot 10^{-3}$  с, т. е. на полтора порядка больше.

В 50—70-х годах прошлого века были выполнены очень информативные прецизионные опытные измерения, важные для понимания структуры и механизма турбулентности. В последующие годы и до сих пор опытные измерения структуры турбулентности успешно сочетаются с DNS. Последние нередко помогают в интерпретации результатов измерений. Из имеющихся непосредственное отношение к прикладным задачам отметим измерения пульсаций скорости.

Одновременное измерение продольной и поперечной пульсаций скорости фактически определяет величину рейнольдсовых напряжений:

$\frac{\overline{u'v'}}{\left(\overline{u'^2} \cdot \overline{v'^2}\right)^{1/2}}$  — корреляция, определяющая турбулентное трение.

Автокорреляции дают информацию о временных масштабах турбулентности (для энергонесущих вихрей):

$$R(t) = \frac{\overline{u'(0) \cdot u'(t)}}{\left( \overline{[u'(0)]^2 \cdot [u'(t)]^2} \right)^{1/2}}.$$

Ясно, что при  $t \gg t_{\text{ЭН}}$ , где  $t_{\text{ЭН}}$  — характерный период крупномасштабных пульсаций, измеряться будут независимые события  $R(t) \rightarrow 0$ . При  $t \rightarrow 0$   $R(t) \rightarrow 1$ .

Взаимные корреляции пульсаций в соседних точках дают оценку линейного масштаба пульсаций  $l_0$ :

$$R(r) = \frac{\overline{u'(0) \cdot u'(r)}}{\left( \overline{[u'(0)]^2} \cdot \overline{[u'(r)]^2} \right)^{1/2}}.$$

При  $r \gg l_0$   $R(r) \rightarrow 0$ , при  $r \rightarrow 0$   $R(r) \rightarrow 1$ .

Наконец, укажем, что динамическая скорость  $v_* = \sqrt{\tau_c / \rho}$  дает порядок средней величины пульсаций скорости в турбулентной части пристеночной турбулентной области. При  $y^+ = \frac{y v_*}{\nu} > 40$   $\tau \approx \tau_c \approx \tau^T$ ,

т. е.  $\rho v_*^2 = -\rho \overline{u' v'}$ .

Измерения пульсаций температуры много сложнее, чем пульсаций скорости. Опытной информации о числе  $\text{Pr}_T$  мало. Теория дает для изотропной турбулентности  $\text{Pr}_T = 0,7$ . Для пограничного слоя у стенки одна из приближенных моделей дает

$$\text{Pr}_T = 0,95 - 0,4(y/\delta_T)^2.$$

Толщина пристеночной турбулентной области соответствует  $y = 0,2\delta_T$ , так что на внешней границе этой области

$$\text{Pr}_T = 0,95 - 0,4 \cdot 0,04 = 0,93.$$

Таким образом, в той области, которая наиболее существенна для теплообмена в пограничном слое,  $\text{Pr}_T = 0,93 \div 0,95$ , что близко к принимаемым в численных исследованиях значениям (0,87—1,0).

#### 4.5.2. Структура пристеночной турбулентной области

В отличие от ламинарного пограничного слоя, для которого существует автомодельная переменная, в турбулентном пограничном слое автомодельность не наблюдается. В экспериментах размещали на поверхности участок с большой шероховатостью,  $\tau_{\text{ш}} \gg \tau_{\text{пл}}$ , но почти сразу за этим участком на гладкой поверхности касательное напряжение восстанавливалось до прежнего уровня  $\tau_{\text{пл}}$ . Однако профиль скорости на большом расстоянии вниз по потоку от шерохова-

того участка оставался отличным от того, который был на предшествующем участке.

Вместе с тем турбулентным течениям также присущи достаточно универсальные закономерности, определяемые некоторым сочетанием осредненных параметров течения. Для простых, но практически важных случаев обтекания плоских поверхностей, гладких профилей, для течения в прямых каналах такие универсальные закономерности характерны для пристеночной турбулентной области. Таким названием определяют область, в пределах которой касательное напряжение можно считать постоянным, т. е.  $\tau_{\text{пр.обл}} \approx \text{const} = \tau_c$ . Это условие для течения в пограничном слое выполняется практически точно, т. е. при  $y \leq 0,2\delta_T$  касательное напряжение  $\tau \approx \text{const} = \tau_c$ . В каналах при установившемся течении  $\tau/\tau_c = r/r_0$ , т. е. устанавливается линейный профиль  $\tau$ . Однако на малых расстояниях от стенки, например, при  $r = 0,9r_0$  ( $y = 0,1r_0$ ) касательное напряжение  $\tau = 0,9\tau_c$ , и даже при  $y = 0,2r_0$  отличие  $\tau$  от  $\tau_c$  составляет 20 %. Это позволяет структуру пристеночной турбулентной области и для пограничного слоя, и для канала рассматривать с единых позиций (рис. 4.12).

Механизмы переноса энергии и импульса в пристеночной турбулентной области играют определяющую роль в теплообмене.

Тонкая область на стенке — вязкий подслой — характеризуется преобладающим влиянием молекулярного переноса импульса. Следующий за ним буферный слой  $\delta_{\text{буф}}$  — переходная область, в пределах которой можно говорить о соизмеримом влиянии молекулярного

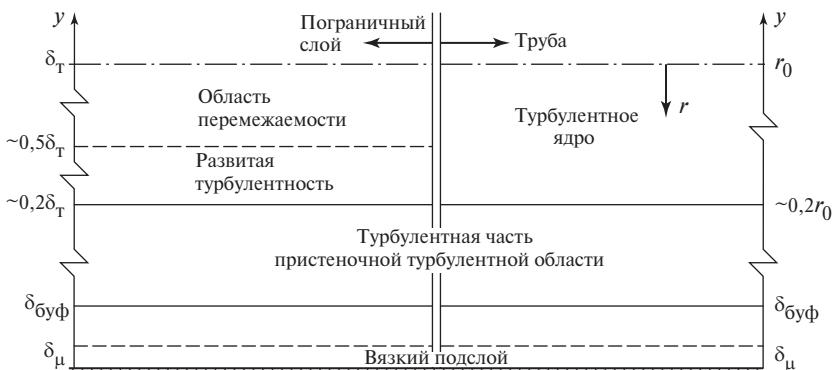


Рис. 4.12. Схематическое представление структуры пристеночной турбулентной области в пограничном слое и в трубе

и турбулентного переноса. Точнее, в пределах буферного слоя влияние молекулярного механизма переноса изменяется от преобладающего на границе с вязким подслоем до исчезающее малого на внешней границе буферного слоя. Относительная роль турбулентного переноса импульса, напротив, возрастает в направлении от границы вязкого подслоя к внешней границе буферного слоя от малой в сравнении с ролью молекулярного переноса до абсолютно доминирующей.

Толщина буферного слоя  $\delta_{\text{буф}}^+ \approx 40$ , т. е.  $\delta_{\text{буф}} \approx 40v/v_*$ .

Толщина вязкого подслоя  $\delta_\mu$  составляет примерно 1/4 от  $\delta_{\text{буф}}$ . Абсолютные значения  $\delta_\mu$  и  $\delta_{\text{буф}}$  зависят от числа Re и толщины пограничного слоя (диаметра канала). Но можно говорить о том, что при развитой турбулентности вся область  $\delta_{\text{буф}}$ , в пределах которой еще заметно влияние вязкости, обычно не превышает 10 % толщины пристеночной турбулентной области, т.е. около 2 % от  $\delta_t$  в пограничном слое или от  $r_0$  при течении в каналах.

При  $y > \delta_{\text{буф}}$  турбулентный перенос импульса абсолютно преобладает. Это — турбулентная часть пристеночной турбулентной области. Структура течения за пределами пристеночной турбулентной области весьма сильно различается при внешнем (погранслойном) течении и в каналах. В первом случае при  $0,2\delta_t \leq y \leq 0,5\delta_t$  расположена внешняя область развитой турбулентности, а при  $0,5\delta_t \leq y \leq \delta_t$  лежит область перемежаемости, где периодически наблюдаются режимы турбулентного и ламинарного течения. Естественно, коэффициент перемежаемости уменьшается в этой зоне по мере движения к внешней границе турбулентного пограничного слоя. В каналах за пределами пристеночной турбулентной области располагается турбулентное ядро с развитой турбулентностью.

Несмотря на такие различия во внешней области, пристеночная турбулентная область и во внешних задачах, и во внутренних характеризуется общими закономерностями. В турбулентной части пристеночной турбулентной области в условиях абсолютного преобладания турбулентного переноса импульса устанавливается логарифмический профиль скорости и логарифмический профиль температуры. Исторически это впервые было показано Л. Прандтлем на основе конкретной модели процесса (модель пути перемешивания). Себиси и Брэдшоу [34] продемонстрировали более общее обоснование логарифмических профилей, исходя фактически из анализа размерностей.

В турбулентной части пристеночной турбулентной области

$$u = u(\rho, \mu, y, \tau_c),$$

при этом  $\tau = \tau_c = \text{const} (!)$ . Составим матрицу размерностей и будем последовательно исключать размерности, приходя в конечном итоге к безразмерным величинам.

Параметр	Размерность			Параметр	Размерность		Параметр	Размерность
	м	с	кг		м	с		
$y$	1	0	0	$y$	1	0	$y$	1
$\rho$	-3	0	1	$u$	1	-1	$u/v_*$	0
$u$	1	-1	0	$\mu/\rho = v$	2	-1	$v/v_*$	1
$\mu$	-1	-1	1	$\tau_c/\rho = v_*^2$	2	-2		
$\tau_c$	-1	-2	1					

Таким образом, один из полученных безразмерных параметров — безразмерная скорость

$$u^+ = u/v_*.$$

Второй — безразмерная координата — получается делением размерной координаты  $y$  на масштаб  $v/v_*$ . Имеем:

$$y^+ = yv_*/v.$$

Итогом анализа размерности является уравнение подобия

$$u^+ = f_1(y^+). \quad (4.24)$$

Для профиля избыточной температуры  $\vartheta = T - T_c$  в число определяющих параметров, естественно, входят те четыре величины, которые влияют на  $u$ . Кроме того, на  $\vartheta$  влияют  $\lambda$ ,  $c_p$ ,  $q_c$ . Таким образом,

$$\vartheta = \vartheta(y, \mu, \rho, \tau_c, \lambda, c_p, q_c).$$

Если в динамической задаче было исходно пять размерных параметров, из которых три имеют независимую размерность, что и привело в соответствии с  $\pi$ -теоремой к взаимозависимости двух безразмерных переменных, то теперь общее число размерных параметров — восемь. Независимых размерностей четыре, т. е. число параметров с независимой размерностью равно четырем. Отсюда следует, что искомая безразмерная зависимость будет включать четыре безразмерных комплекса. Последовательность исключения размерностей из матрицы дается ниже.

Параметр	Размерность				Параметр	Размерность			Параметр	Размерность		Параметр	Размерность	
	м	с	кг	К		м	с	кг		м	с		м	м
$y$	1	0	0	0	$y$	1	0	0	$y$	1	0	$y$	1	
$\vartheta$	0	0	0	1	$\vartheta c_p$	2	-2	0	$\vartheta c_p$	2	-2	$\vartheta c_p$	$v_*^2$	0
$\rho$	-3	0	1	0	$\rho$	-3	0	1	$\mu/\rho = v$	2	-1			
$\mu$	-1	-1	1	0	$\mu$	-1	-1	1	$\tau_c/p = v_*^2$	2	-2		$v/v_*$	1
$\tau_c$	-1	-2	1	0	$\tau_c$	-1	-2	1	$\lambda/(\rho \times c_p) = a$	2	-1		$v/a = \text{Pr}$	0
$\lambda$	1	-3	1	-1	$\lambda/c_p$	-1	-1	1						
$c_p$	2	-2	0	-1	$q_c$	0	-3	1	$q_c/\rho$	3	-3	$q_c/\rho v_*^3$	0	
$q_c$	0	-3	1	0										

Производя исключение последней по счету размерности (м), получаем четыре безразмерных комплекса:  $y^+ = yv_*/v$ ;  $\text{Pr} = v/a$ ;

$$\text{Ec}_* = v_*^2/(\vartheta c_p); q_c^+ = q_c/(\rho v_*^3).$$

Из двух последних безразмерных комплексов получают еще один, имеющий смысл  $\text{St}_*$ :

$$\text{St}_* = \text{Ec}_* q_c^+ = \frac{v_*^2 q_c}{\rho \vartheta c_p v_*^3} = \frac{q_c}{\rho v_* \vartheta c_p}.$$

Это число подобия можно использовать вместо любого из двух чисел  $\text{Ec}_*$  или  $q_c^+$ . При этом величина  $q_c/(\rho c_p v_*) = T_*$  называется динамической температурой, а обратное числу  $\text{St}_*$  соотношение представляет собой искомую безразмерную избыточную температуру

$$\vartheta^* = \frac{T - T_c}{T_*} = \frac{\vartheta \rho v_* c_p}{q_c}.$$

Таким образом, анализ размерностей позволяет записать

$$\vartheta^+ = \vartheta^+(y^+, \text{Pr}, q_c^+).$$

Безразмерное число  $q_c^+ = q_c/(\rho v_*^3)$  соотносит плотности теплового потока на стенке и потока кинетической энергии турбулентности, обусловленного турбулентными пульсациями; последний эквивалентен плотности потока диссирируемой турбулентными

пульсациями энергии ( $\rho v_*^3 = \tau_c v_*$ ). Легко убедиться, что во всех практических задачах плотность потока энергии, диссилируемой турбулентными пульсациями, ничтожно мала в сравнении с плотностью теплового потока  $q_c$ . Действительно,  $v_* = \sqrt{\tau_c / \rho}$ , так что в пограничном слое  $v_* = U_\infty \sqrt{C_f / 2}$ , в каналах  $v_* = \bar{u} \sqrt{\xi / 8}$ . Так как  $\sqrt{C_f / 2} \approx \sqrt{\xi / 8} \approx 0,05 \div 0,07$  в обычных ситуациях, то  $\rho v_*^3 \ll q_c$ . Эти оценки позволяют принять, что критерий  $q_c^+$  может быть опущен. При этом влияние самого теплового потока  $q_c$  учтено выражением для динамической температуры. Таким образом,

$$\vartheta^+ = f_2(y^+, \text{Pr}). \quad (4.25)$$

Впервые обоснованный Л. Прандтлем логарифмический профиль скорости был подтвержден измерениями. Его качественные обоснования без использования конкретной модели даются в [26]. Ниже излагается сходный подход в соответствии с [34]. Из (4.24)

$$\frac{du^+}{dy^+} \equiv \frac{df_1}{dy^+} \frac{dy^+}{dy} = \frac{v_* y \frac{df_1}{dy}}{vy \frac{dy^+}{dy}} = \frac{1}{y} \left( y^+ \frac{df_1}{dy^+} \right).$$

$y^+ = yv_* / v$  имеет смысл локального числа  $Re$ . При  $y^+ > 40$ ,  $f_i >> f_\mu$ , т. е. силы инерции намного больше сил вязкости. Можно ожидать, что в рассматриваемой области профиль скорости не зависит непосредственно от вязкости. Откуда следует предположение, что

$$y^+ \frac{df_1}{dy^+} = \text{const} = 1/\kappa.$$

Тогда

$$\begin{aligned} du^+ &= \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{y} \equiv \frac{1}{\kappa} \frac{dy^+}{y^+}, \\ u^+ &= \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C_0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

— логарифмический профиль скорости. Две константы, входящие в (4.26), определены на основе опытных измерений.

Для трубы  $\kappa = 0,4$ ,  $C_0 = 5,5$ , т. е.

$$u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5.$$

В пограничном слое  $\kappa = 0,41$ ,  $C_0 = 4,9$ ,

$$u^+ = 2,4 \ln y^+ + 4,9.$$

Выражение (4.26) справедливо при  $y^+ > 40$ , т. е.  $y > 40 \frac{v}{v_*}$ , и  $y < 0,2\delta_T$ :

$$40 \frac{v}{v_*} \leq y \leq 0,2\delta_T \text{ (или } \leq 0,2r_0).$$

Аналогичные преобразования проведем с (4.25). При  $\Pr = \text{idem}$

$$\frac{dT^+}{dy^+} = \frac{df_2}{dy^+} \frac{dy^+}{dy} = \frac{v_*}{v} \frac{y}{y^+} \frac{df_2}{dy^+} = \frac{1}{y} \left( y^+ \frac{df_2}{dy^+} \right).$$

Очевидно, что при  $y^+ > 40$  вязкость не должна влиять на профиль температуры ( $f_i \gg f_\mu$ ). Отсюда принимается, что  $y^+ \frac{df_2}{dy^+} = \text{const} = 1/\kappa_1$ .

Тогда

$$dT^+ = \frac{1}{\kappa_1} \frac{dy^+}{y} \equiv \frac{1}{\kappa_1} \frac{dy^+}{y^+};$$

$$T^+ = (1/\kappa_1) \ln y^+ + C_1(\Pr). \quad (4.27)$$

Преобразования проводились при условии  $\Pr = \text{idem}$ , так что константа интегрирования соответствует заданному значению  $\Pr$ . Эксперименты позволяют оценить  $\kappa_1 \approx 0,44$ .

Логарифмический профиль температуры, естественно, может существовать только в турбулентной части пристеночной турбулентной области, т. е. при

$$40 \frac{v}{v_*} \leq y \leq 0,2\delta_T \text{ (или } \leq 0,2r_0).$$

Но на профиль температуры влияет и молекулярная теплопроводность; следовательно, необходимо, чтобы  $y \geq 40 \frac{a}{v_*}$  или  $y > 40 \frac{v}{v_*} \frac{1}{\Pr}$ .

Таким образом, применимость (4.27) определяется диапазоном

$$40 \frac{v}{v_*} \frac{1}{\Pr} \leq y \leq 0,2\delta_T \text{ (или } \leq 0,2r_0).$$

Ясно, что при  $\Pr > 1$  диапазон существования логарифмического профиля температуры даже шире, чем для профиля скорости. Но при

$\text{Pr} \ll 1$ , вероятнее всего, логарифмического профиля температуры просто не существует, т.е. во всей пристеночной области сохраняется влияние молекулярного переноса энергии (теплопроводности).

### 4.5.3. Моделирование переноса импульса в пристеночной турбулентной области

Исторически первая удачная модель переноса импульса в пристеночной области — модель пути смешения (перемешивания) Прандтля. Прандтль предположил, что турбулентные пульсации обусловлены перемещениями небольших объемов жидкости — турбулентных «молей». Эти объемы малы в сравнении с макроскопическими масштабами течения, но на (многие) порядки превосходят межмолекулярные расстояния. При этом каждый такой моль на некоторой длине — на пути смешения — сохраняет импульс своего первоначального слоя. Только пройдя путь  $l$ , моль обменивается импульсом с окружающей жидкостью. Здесь просматривается аналогия с тепловым движением молекул в газах.

Рассмотрим двумерное (плоское) осредненное течение,  $u = u(y)$ . Выберем два слоя в жидкости с координатами  $y_1$  и  $y_2$ , причем  $y_2 - y_1 = l$  — длина пути перемешивания (рис. 4.13). Если  $l$  достаточно мала, то, очевидно,

$$\Delta u = u_2 - u_1 \approx l \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Если турбулентный моль переходит из слоя  $y_1$  в  $y_2$ , то соответствующая такому переходу поперечная пульсация  $v' > 0$ . Поскольку этот моль до слоя  $y_2$  сохраняет импульс своего первоначального слоя, то в слое  $y_2$  он вызывает отрицательную продольную пульсацию  $u' < 0$ . Напротив, переход моля из слоя  $y_2$  в  $y_1$  связан с отрицательной поперечной пульсацией  $v' < 0$ ; в слое  $y_1$  он вызывает положительную продольную пульсацию  $u' > 0$ . Из этого ясно, что, во-первых, пульсации

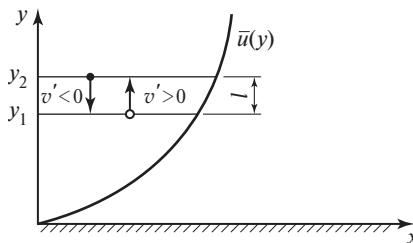


Рис. 4.13. К модели пути перемешивания Прандтля

по абсолютному значению должны быть одного порядка, а, во-вторых, как правило,  $\overline{u'v'}$  — величина отрицательная.

Обмен импульсом между соседними слоями вызывает касательное напряжение (кажущееся напряжение турбулентного трения)  $\tau^{(T)} = -\rho \overline{u'v'}$ . Величина (абсолютная) пульсаций согласно рассматриваемой модели должна быть близка к разности осредненных скоростей в слоях  $y_1$  и  $y_2$ , т. е.

$$\tau_{12}^{(T)} \approx \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

В этом соотношении пока еще не определенная количественно длина пути перемешивания  $l$  включает в себя неизвестные численные коэффициенты, отражающие соотношение между пульсациями.

Вводя понятия турбулентной вязкости, имеем

$$\tau^{(T)} = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \rho \varepsilon_\tau \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Чтобы разделить турбулентную вязкость и градиент осредненной скорости, обычно записывают

$$\tau^{(T)} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|^2, \quad \varepsilon_\tau = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|.$$

Из соображений размерности и общей физической идеи, что интенсивность турбулентного переноса нарастает с удалением от стенки, Прандтль предположил, что

$$l = \kappa y,$$

где  $\kappa = \text{const.}$

Тогда для турбулентной части пристеночной турбулентной области, в которой  $\tau = \tau^T = \tau_c$ , получают

$$\tau_c = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2; \quad (4.28)$$

$$\frac{\tau_c}{\rho} = v_*^2 = \kappa^2 y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2.$$

Извлекая корень и переходя к безразмерным величинам, имеем:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa y} v_*; \quad u^+ = u/v_*; \quad y^+ = yv_*/v; \quad du^+ = \frac{1}{\kappa} \frac{dy^+}{y^+}; \\ u^+ = (1/\kappa) \ln y^+ + C_0. \quad (4.26)$$

Теперь «восстановлена историческая справедливость»: формула (4.26), ранее обоснованная из соображений размерности, теперь получена в соответствии с исходной моделью ее автора.

Прандтль предложил предельную двухслойную схему, согласно которой (4.26) справедливо при  $y^+ \geq 11,7$ . При  $y^+ \leq 11,7$  (в вязком под-

слое)  $\tau = \tau_c = \mu \frac{du}{dy}$ ,  $\frac{\tau_c}{\rho} = v_*^2 = \frac{\mu}{\rho} \frac{du}{dy}$ ; откуда следует  $u^+ = y^+$  при  $y^+ \leq 11,7$ . Профиль скорости непрерывный, но с разрывом производной  $\partial u^+ / \partial y^+$  на границе вязкого подслоя.

Из-за малой толщины вязкого подслоя использование логарифмического профиля скорости ведет к достаточно точному выражению для коэффициента трения, если принять, что (4.26) применимо ко всему сечению круглой трубы. Таким путем был получен универсальный закон Прандтля для сопротивления трения в гладких трубах:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 2 \lg (\operatorname{Re} \sqrt{\xi}) - 0,8. \quad (4.29)$$

В этом выражении только константа 0,8 скорректирована под опытные данные. Формула (4.29) справедлива при любых  $\operatorname{Re} > 2300$  для гладких труб. Единственное неудобство — неявная зависимость  $\xi$  от  $\operatorname{Re}$ . Опираясь на формулу (4.29), строили явные аппроксимационные зависимости  $\xi(\operatorname{Re})$ . В частности, формула Филоненко

$$\xi = (1,82 \lg \operatorname{Re} - 1,64)^{-2} \quad (4.29a)$$

по структуре, очевидно, близка к (4.29).

Конечно, модель Прандтля совершенно не соответствует сегодняшним представлениям о механизме турбулентного переноса импульса. Она приведена здесь во многом как отражение важного этапа в изучении турбулентности. Кроме того, следующий из модели логарифмический профиль скорости подтвержден экспериментально. Это означает, что формула (4.28) и фактически входящее в нее соотношение для турбулентной вязкости соответствуют закономерностям переноса импульса в турбулентной части пристеночной турбулентной области. Приведенное в п. 4.4.2 соотношение для турбулентной вязкости  $\epsilon_\tau = C_\mu k^{1/2} l_k$ , как можно убедиться, по существу

эквивалентно тому, что следует из модели пути перемешивания, если принять, что  $l_k = \kappa y$ ,  $k^{1/2} = v_*$ ; по этой причине его называют соотношением (моделью) Прандтля—Колмогорова.

Для гидродинамики модель Прандтля, дающая универсальный закон сопротивления трения (4.29), оказалась достаточной, по крайней мере, для простых по геометрическим параметрам течений. Но для процессов теплообмена неточное воспроизведение профиля скорости в буферном слое может вызывать заметную погрешность. Поэтому было предложено много моделей и эмпирических соотношений, дающих непрерывный закон изменения скорости и ее производной по координате. Одна из удачных, имеющих ясный физический смысл, моделей — модель Ван Дрийста (Van Driest). В ней используется экспоненциальный закон затухания турбулентного переноса импульса:

$$\tau^{(t)} = \rho \kappa^2 y^2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right) \right]^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2, \quad (4.30)$$

что отличается от соотношения (4.28) Прандтля множителем в виде выражения в квадратных скобках. При больших  $y^+$  (4.30) переходит в (4.28). На внешней границе буферного слоя ( $y^+ = 40$ ) квадрат выражения в квадратных скобках  $[ ]^2 = 0,62$ ; можно показать, что при  $y \rightarrow 0$  выражение в квадратных скобках пропорционально  $y$ , т.е.  $\tau^{(t)} \sim y^4$ .

В пристеночной области  $\tau = \tau_c = \tau^{(\mu)} + \tau^{(t)}$ . Имеем

$$\frac{\tau_c}{\rho} = v_*^2 = v \frac{du}{dy} + \kappa^2 y^2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right) \right]^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2.$$

Поделив на  $v_*^2$ , переходим к безразмерному квадратному уравнению

$$1 = \frac{du^+}{dy^+} + a \left( \frac{du^+}{dy^+} \right)^2; \quad a = \kappa^2 y^+ \left[ 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right) \right]^2.$$

Его решение

$$\frac{du^+}{dy^+} = -\frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a}} = \frac{\sqrt{1+4a}-1}{2a} = \frac{2}{1+\sqrt{1+4a}}.$$

Непрерывный профиль безразмерной скорости

$$u^+ = \int_0^{y^+} \frac{2 dy^+}{1 + \sqrt{1 + 4a}}. \quad (4.31)$$

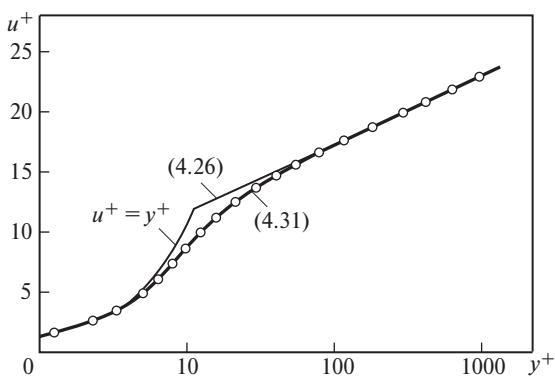


Рис. 4.14. Профиль скорости в пристеночной турбулентной области

Если двухслойная модель Прандтля дает излом на зависимости  $u^+(y^+)$ , то (4.31) — непрерывный, гладкий профиль, хорошо согласующийся с измерениями (рис. 4.14). На этом рисунке приведены также логарифмический профиль Прандтля (4.26) и линейный профиль  $u^+ = y^+$  при  $y^+ \leq 11,7$ .

Имеются десятки других аппроксимаций для профиля скорости в пристеночной турбулентной области.

## 4.6. Теплообмен при турбулентном течении в пограничном слое

### 4.6.1. Аналогия Рейнольдса

Несмотря на исключительную сложность турбулентных течений, в них удается установить некоторые универсальные закономерности, которые приближенно выполняются, по крайней мере, в случае геометрически простой области анализа. Выше это показано в отношении логарифмического профиля скорости. Аналогия Рейнольдса также устанавливает некоторую универсальную закономерность турбулентных течений, которая успешно применяется для приближенного анализа теплообмена.

Аналогия Рейнольдса не опирается на какую-либо конкретную модель турбулентности, а использует только основную особенность турбулентных течений — наличие пульсаций всех актуальных параметров потока. Благодаря пульсациям скорости в жидкости возникает эффективный поток массы, направленный поперек основного течения.

Рассмотрим два произвольных слоя  $y_1$  и  $y_2$  в турбулентной части пристеночной турбулентной области (рис. 4.15). На рисунке показаны профили осредненной продольной скорости  $\bar{u}$  и осредненной

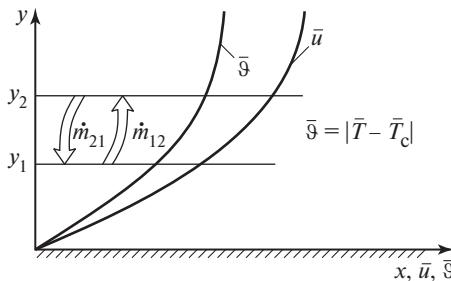


Рис. 4.15. К определению рейнольдсова эффективного потока массы

избыточной температуры  $\bar{\vartheta} = |\bar{T} - \bar{T}_c|$ ; в последующем анализе знакочередование опущен и используется абсолютная температура слоя  $T$ . Если из слоя  $y_1$  за счет поперечных турбулентных пульсаций за время  $\Delta t$  через поверхность  $\Delta F$  на границе слоя в слой  $y_2$  поступает масса  $\Delta m_{12}$ , то плотность потока массы определяется как

$$\dot{m}_{12} = \frac{\Delta m_{12}}{\Delta t \Delta F}.$$

Уравнение неразрывности требует, чтобы существовал равный поток массы из слоя  $y_2$  в слой  $y_1$ , т. е.  $\dot{m}_{12} = \dot{m}_{21}$ . В этой схеме нет ничего, что противоречило бы сложившимся представлениям о турбулентных течениях.

Ясно, что благодаря эффективному поперечному потоку массы между слоями  $y_1$  и  $y_2$  переносится импульс, энергия, масса компонента, т. е. любая «пассивная примесь», — такое свойство течения, которое непосредственно не влияет на интенсивность турбулентного переноса, в том числе на  $\dot{m}_{12}$ .

В рассматриваемом случае перенос импульса между слоями  $y_1$  и  $y_2$  проявляется как касательное напряжение (трение), определяемое как

$$\tau_{12} = \dot{m}_{12}(u_2 - u_1). \quad (4.32)$$

Перенос энергии между слоями — плотность теплового потока (при  $T_c > T_\infty$ ):

$$q_{12} = \dot{m}_{12}(h_1 - h_2),$$

где  $h_1$  и  $h_2$  — средние значения энтальпии в слоях  $y_1$  и  $y_2$ . При постоянной теплоемкости ( $c_p = \text{const}$ )

$$q_{12} = \dot{m}_{12}c_p(T_1 - T_2). \quad (4.33)$$

Главное предположение аналогии Рейнольдса состоит в том, что один и тот же поток массы (рейнольдсов поперечный поток массы) переносит в турбулентном потоке любую пассивную примесь, т. е. в (4.32) и (4.33)  $\dot{m}_{12} = \text{idem}$ . Тогда

$$\frac{\tau_{12}}{q_{12}} = \frac{u_2 - u_1}{c_p(T_1 - T_2)}. \quad (4.34)$$

Очевидно, до этого момента гипотеза об аналогии достаточно логична. Но, чтобы получить из нее практически полезное расчетное уравнение, необходим следующий шаг, уже не столь бесспорный. Принимается, что слои  $y_1$  и  $y_2$  могут быть «раздвинуты» на весь пограничный слой (или, по крайней мере, на толщину пристеночной турбулентной области), причем (4.34) сохраняется. Другими словами, полагаем  $y_1 = 0$ :  $T_1 = T_c$ ;  $y_2 = \delta_t$ ;  $u_2 = U_\infty$ ;  $T_2 = T_\infty$ . Имеем

$$\frac{\tau_c}{q_c} = \frac{U_\infty}{c_p \Delta T},$$

где  $\Delta T = |T_c - T_\infty|$ .

Умножая на  $\rho U_\infty$  числитель и знаменатель правой части, получаем

$$\frac{\tau_c}{\rho U_\infty^2} = \frac{q_c}{\rho U_\infty c_p \Delta T} = \frac{\alpha}{\rho c_p U_\infty},$$

т. е.

$$St = C_f / 2. \quad (4.35)$$

Этот результат представляет собой основное соотношение классической аналогии Рейнольдса.

Легко понять, что в пределах турбулентной части пристеночной турбулентной области аналогия Рейнольдса представляется вполне обоснованной, поскольку в этой области абсолютно доминирует турбулентный перенос импульса и энергии. Не вызывает серьезных возражений и распространение аналогии на всю толщину пограничного слоя, т.е. на области развитой турбулентности и перемежаемости, поскольку в этих областях осредненные скорость и температура изменяются в турбулентном потоке очень слабо. Но в буферном слое и вязком подслое механизм переноса импульса и энергии иной, здесь заметную роль играет молекулярный перенос, т. е. вязкость и теплопроводность. Мы видели ранее (п. 4.2.3), что в ламинарном пограничном слое при  $Pr = 1$  также выполняется условие (4.35), а поля безразмерной температуры и безразмерной скорости совпадают. Это

значит, что (4.35) должно быть справедливо в турбулентном потоке при  $\text{Pr} = 1$ , а в общем случае

$$\text{St} = \frac{C_f}{2} f(\text{Pr}). \quad (4.35\text{a})$$

Соотношения аналогии Рейнольдса (4.35) и (4.35a) имеют практический смысл, так как  $C_f$  рассчитывается достаточно точно.

#### 4.6.2. Аналогия Рейнольдса, модифицированная на основе двухслойной модели пристеночной турбулентной области

Ясно, что для нахождения  $f(\text{Pr})$  в (4.35a) необходим анализ переноса импульса и энергии в той части пристеночной турбулентной области, в которой механизм аналогии Рейнольдса не действует.

Будем приближенно полагать, что во всей пристеночной турбулентной области при  $y > \delta_\mu$  (толщина вязкого подслоя) справедлива аналогия Рейнольдса (рис. 4.16). Безразмерная толщина вязкого подслоя имеет порядок 10; Прандтль принимал  $\delta_\mu^+ = 11,7$ ; имея в виду приближенность анализа, положим  $\delta_\mu^+ = 12$ . При этом во всей турбулентной пристеночной области  $\tau = \tau_c$ , при  $y = 0,2\delta_T \approx U_\infty$ . Тогда  $\tau_c = \dot{m}(U_\infty - u_\delta)$  — перенос импульса в турбулентной части пристеночной турбулентной области, т.е. при  $y > \delta_\mu$ .

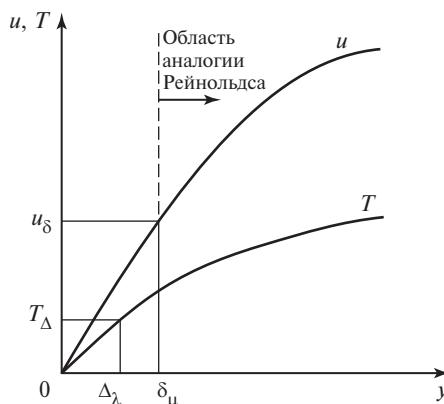


Рис. 4.16. Профили осредненных скорости и температуры вблизи стенки (к обоснованию «двухслойной» аналогии Рейнольдса)

При  $y \leq \delta_\mu = 12 \frac{v}{v_*}$  преобладает молекулярный перенос импульса, т.е.  $u^+ = y^+$ . На границе вязкого подслоя  $y^+ = 12$ ;  $u_\delta = 12v_*$ ;  $v_* = \sqrt{\tau_c/\rho} = U_\infty \sqrt{C_f/2}$ . Отсюда, имея в виду, что  $\tau_c = \frac{C_f}{2}\rho U_\infty^2$ , получаем

$$\dot{m}U_\infty \left( 1 - 12 \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) = \frac{C_f}{2}\rho U_\infty^2;$$

$$\dot{m} = \rho U_\infty \frac{C_f/2}{1 - 12 \sqrt{\frac{C_f}{2}}} \quad (4.36)$$

— это эффективный рейнольдсов поток массы, полученный с использованием двухслойной схемы переноса импульса.

Теперь применим этот результат для расчета переноса энергии. Будем полагать, что при  $y > \Delta_\lambda$  (толщина теплопроводного подслоя) преобладает турбулентный перенос энергии, действует аналогия Рейнольдса. Тогда

$$q_\Delta = \dot{m}c_p(T_\Delta - T_\infty).$$

В то же время в теплопроводном подслое при  $y \leq \Delta_\lambda$  преобладает молекулярный перенос энергии, т. е.

$$q_\Delta = q_c = \frac{\lambda}{\Delta_\lambda}(T_c - T_\Delta).$$

Из этих двух соотношений следует:

$$T_c - T_\infty = \frac{q_c \Delta_\lambda}{\lambda} + \frac{q_c}{\dot{m}c_p} = q_c \left( \frac{\Delta_\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\dot{m}c_p} \right). \quad (4.37)$$

Поскольку  $\frac{q_c}{T_c - T_\infty} = \alpha$  — искомый параметр, то ясно, что для построения уравнения для КТО необходимо иметь зависимость для толщины теплопроводного подслоя  $\Delta_\lambda$ . Анализ опытных данных о затухании у стенки пульсаций скорости и температуры ведет к следующей связи толщин вязкого и теплопроводного подслоев:

$$\Delta_\lambda = \delta_\mu \Pr^{-1/3}. \quad (4.38)$$

Ранее (п. 4.2.3) аналогичную связь мы обосновали для соотношения толщины динамического и температурного пограничных слоев при ламинарном течении. Это служит дополнительным аргументом в пользу (4.38).

Используя в (4.37) принятые допущение о толщине вязкого подслоя  $\delta_\mu$ , формулу (4.36) для  $\dot{m}$  и (4.38) для  $\Delta_\lambda$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{T_c - T_\infty}{q_c} &= \frac{1}{\alpha} = \frac{\delta_\mu \text{Pr}^{-1/3}}{\lambda} + \frac{1 - 12 \sqrt{\frac{C_f}{2}}}{\rho U_\infty c_p C_f / 2} = \\ &= \frac{1}{\rho U_\infty c_p} \frac{12 \text{Pr}^{2/3} \sqrt{\frac{C_f}{2}} + 1 - 12 \sqrt{\frac{C_f}{2}}}{C_f / 2}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\text{St} = \frac{\alpha}{\rho U_\infty c_p} = \frac{C_f / 2}{1 + 12 \sqrt{\frac{C_f}{2}} (\text{Pr}^{2/3} - 1)}. \quad (4.39)$$

Это — основной результат модифицированной аналогии Рейнольдса.

#### 4.6.3. Анализ результатов. Рекомендации по расчету

При  $\text{Pr} = 1$  выражение (4.39) переходит в соотношение классической аналогии Рейнольдса (4.35). Впервые соотношение такой структуры было получено Б.С. Петуховым и В.В. Кирилловым в 1958 г. для турбулентного течения в трубах. (В этой работе в качестве безразмерного КТО использовалось число  $\text{Nu} \equiv \text{St} \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}$ .) Уравнение подобия этих авторов не было результатом аналитической модели; оно получено путем аппроксимации численных исследований и опытных данных, обеспечивающей выход на соотношение аналогии Рейнольдса при  $\text{Pr} = 1$ . Позднее это соотношение использовал А.А. Жукаускас для описания теплообмена в пограничном слое. Его уравнение имеет вид

$$\text{St} = \frac{C_f / 2}{0,93 + 12,5 \sqrt{\frac{C_f}{2}} (\text{Pr}^{2/3} - 1)} k_t. \quad (4.39a)$$

Видно, что отличия от (4.39) — минимальные. Формула Жукаускаса (4.39а) при  $\text{Pr} = 1$  дает  $\text{St} \approx 1,07 \frac{C_f}{2}$ ; отказ от классической аналогии при  $\text{Pr} = 1$  едва ли оправдан, хотя отличие всего 7 %, т. е. на уровне экспериментальной ошибки. Коэффициент 12,5 вместо 12 перед вторым членом в знаменателе, конечно, непринципиален, поскольку его значение связано с выбором безразмерной толщины вязкого подслоя.

Коэффициент трения в турбулентном пограничном слое рассчитывается достаточно надежно. По Шлихтингу:

$$C_f = 0,059 \text{Re}_x^{-0,2},$$

т.е.  $C_f/2 = 0,0295 \text{Re}_x^{-0,2}$ .

При  $\text{Pr} = 1$  из (4.39) получается

$$\text{St} = 0,0295 \text{Re}_x^{-0,2};$$

так как  $\text{Nu} \equiv \text{St} \cdot \text{Re} \cdot \text{Pr}$ , то

$$\text{Nu}_x = 0,0295 \text{Re}_x^{0,8} \text{ при } \text{Pr} = 1.$$

Известная эмпирическая формула для турбулентного течения ( $\text{Re}_x > 3 \cdot 10^5$ )

$$\text{Nu}_x = 0,0296 \text{Re}_x^{0,8} \text{Pr}^{0,4}, \quad (4.40)$$

очевидно, подтверждает аналогию. Это степенное уравнение справедливо лишь при числах  $\text{Pr}$ , близких к единице. При произвольных числах  $\text{Pr}$  формула (4.39а) Жукаускаса предпочтительнее. Ее автор предлагал рассчитывать  $C_f$  по формуле

$$C_f = 0,39 (\lg \text{Re}_{\Delta x})^{-2,6},$$

где  $\text{Re}_{\Delta x} = \frac{U_{\infty}(x - x_{kp})}{v} = \text{Re}_x - \text{Re}_{x kp}$ ;  $\text{Re}_{x kp} = 3 \cdot 10^5$ .

Формула такой структуры для  $C_f$  ранее была предложена Шульц-Грумовым [45]:

$$C_{f,x} = 0,37 (\lg \text{Re}_x)^{-2,584}.$$

При больших  $\text{Re}_x$  (практически уже при  $\text{Re}_x > 6 \cdot 10^5$ ) все рекомендуемые разными авторами формулы дают очень близкие значения  $C_f$ .

Но вблизи  $Re_x \approx 1$  формулу, основанную на  $Re_{\Delta x}$ , конечно, применять нельзя. Вообще в окрестности  $Re_x = 3 \cdot 10^5$  при расчете теплоотдачи целесообразно использовать интерполяцию между значениями КТО, рассчитанными по формулам для ламинарного течения (4.15) и (4.39а) для турбулентного.

Важно подчеркнуть, что при турбулентном течении  $\alpha \sim U_\infty^{0,8}$  и достаточно слабо зависит от  $x$  (как  $x^{-0,2}$ ). Формула А.А. Жукаускаса предсказывает более сильное влияние скорости (до  $U_\infty^{0,9}$ ) при  $Pr \gg 1$ . Эта формула содержит поправку на переменность теплофизических свойств поперек пограничного слоя:

$$k_t = \left( \frac{Pr_\infty}{Pr_c} \right)^m,$$

где для капельных жидкостей  $m = 0,25$  при  $T_c > T_\infty$  ( $k_t > 1$ );  $m = 0,17$  при  $T_c < T_\infty$  ( $k_t < 1$ ). В этом случае  $Pr_\infty/Pr_c \approx \mu_\infty/\mu_c$ , так как  $\lambda$  и  $c_p$  изменяются слабо.

Для газов  $k_t = (T_\infty/T_c)^{m_1}$ , где  $m_1 = 0,25$  при  $T_c > T_\infty$ ;  $m_1 = 0$  при  $T_c < T_\infty$ .

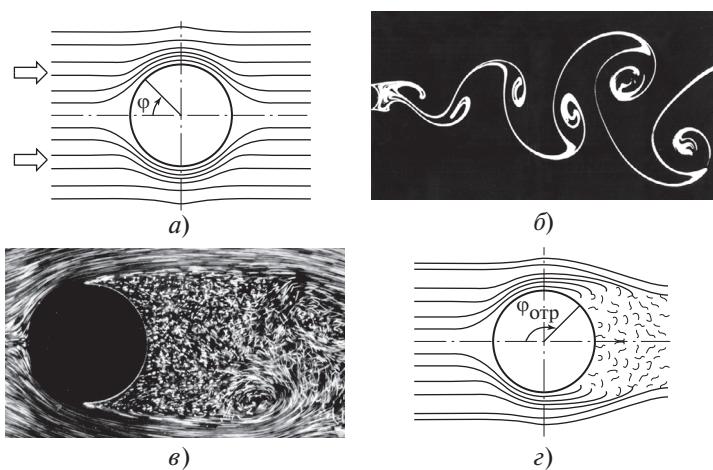
## 4.7. Теплообмен при поперечном обтекании труб

### 4.7.1. Гидродинамика и теплообмен при поперечном обтекании кругового цилиндра

Цилиндр — плохо обтекаемое тело. Это ясно из анализа фотографий, отражающих картину течения в окрестности поперечно обтекаемого кругового цилиндра\*. Только при  $Re_D = \frac{U_\infty D}{v} \leq 1$  обтекание

безотрывное, на фотографиях наблюдается полная симметрия линий тока относительно плоскости миделевого сечения. Рисунок 4.17, а дает схематическую интерпретацию таких фотографий. При больших числах  $Re$  в кормовой зоне появляется область отрыва потока, в кото-

\* Такие фотографии представлены в [1]; на рис. 4.17, б и в воспроизведены такие фотографии для двух режимов.



**Рис. 4.17. Схематическое представление картины поперечного обтекания цилиндра при различных числах Рейнольдса:**

*а* —  $Re \leq 1$ ; *б* —  $Re = 60 \div 300$  («дорожка Кармана» в ламинарном следе); *в* —  $Re = 10^3 \div 2 \cdot 10^5$ ; *г* —  $Re \geq 2 \cdot 10^5$

рой при  $Re = 1 \div 60$  формируются два стационарных вихря. Дальнейший рост числа  $Re$  ведет к потере устойчивости, вихри поочередно отрываются и сносятся потоком; размер вихрей в следе увеличивается по мере удаления от поверхности цилиндра. Такая картина — «вихревая дорожка Кармана» — наблюдается при  $Re \approx 60 \div 300$ , течение остается ламинарным (см. рис. 4.17, б из альбома [1]).

Рост числа Рейнольдса ( $Re > 300$ ) приводит к возникновению турбулентности в следе (в зоне отрыва). Площадь зоны отрыва непрерывно увеличивается с ростом числа  $Re$ . Уже при  $Re = 1000$  отрыв происходит вблизи плоскости миделевого сечения ( $\phi_{отр} \approx \pi/2$ ). Дальнейшее увеличение числа  $Re$  мало изменяет положение точки отрыва, хотя она еще смещается навстречу потоку, пока (при  $Re \geq 5 \cdot 10^3$ ) не устанавливается достаточно устойчивое состояние  $\Phi_{отр} = 82^\circ$ . Типичная картина обтекания в таких режимах представлена на рис. 4.17, в из [1]. Положение точки отрыва зависит от турбулентности набегающего потока, но не очень сильно ( $\Phi_{отр} = 80 \div 88^\circ$  при изменении турбулентности  $Tu$  от 1 до 15 %). В широкой области  $Re = 1 \cdot 10^3 \div 2 \cdot 10^5$  гидравлическое сопротивление при обтекании цилиндра связано с наличием зоны отрыва — так называемое сопротивление формы.

Сила сопротивления обусловлена тем, что в зоне отрыва возникает разрежение; естественно, эта сила направлена в сторону движения потока. Для ее расчета используется формула

$$F_c = C_D \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D l,$$

где произведение диаметра  $D$  на длину  $l$  дает площадь миделевого сечения. Коэффициент сопротивления  $C_D$  служит основной характеристикой силы сопротивления.

При  $Re = Re_{kp} = 2 \cdot 10^5$  наблюдается «кризис сопротивления», выражющийся в резком (приблизительно в 4 раза) снижении коэффициента сопротивления  $C_D$  примерно с 1,2 до 0,3. Этот кризис связан с переходом к турбулентному течению в пограничном слое. В турбулентном пограничном слое скорость течения выше, чем в ламинарном (большая заполненность профиля скорости). В результате жидкие частицы оказываются способными без отрыва преодолевать встречный градиент давления в диффузорной части течения. Точка отрыва перемещается от  $\phi = 82 \div 85^\circ$  до  $\phi = 140^\circ$ . Рисунок 4.17,  $z$  схематически представляет картину обтекания при сверхкритическом числе Рейнольдса. Уменьшается площадь зоны разрежения в кормовой части обтекаемого цилиндра. (При обтекании шаров Прандтль показал возможность снижения  $Re_{kp}$  и уменьшения  $C_D$  искусственно, путем установки проволочного кольца перед обтекаемым шаром.)

Рост числа  $Re$  после достижения критического значения сопровождается смещением точки турбулентного перехода навстречу потоку, т.е. в область меньших  $\phi$ . Если при  $Re = 2 \cdot 10^5$  точка перехода к турбулентному течению в пограничном слое соответствует примерно  $\phi \approx 82^\circ$ , то при  $Re_D = 2 \cdot 10^6$  угол  $\phi_{пер} = \pm 40^\circ$ . Площадь зоны отрыва примерно сохраняется, т.е.  $\phi_{отр} = \pm 140^\circ$ . Коэффициент сопротивления  $C_D$  в закритической области медленно возрастает с ростом  $Re_D$ : от 0,3 при  $Re_D = 3 \cdot 10^5$  до 0,9 при  $Re_D = 10^7$ . (Заметим, что это — огромное число Рейнольдса: чтобы получить  $Re_D = 10^7$  при обтекании трубы воздухом при атмосферном давлении надо иметь  $U_\infty \approx 200$  м/с при  $D = 1$  м.)

Закономерности теплообмена изменяются вдоль периметра трубы (в зависимости от угла  $\phi$ ) в соответствии с изменением условий обтекания. На рис. 4.18 дается качественная картина изменения локального

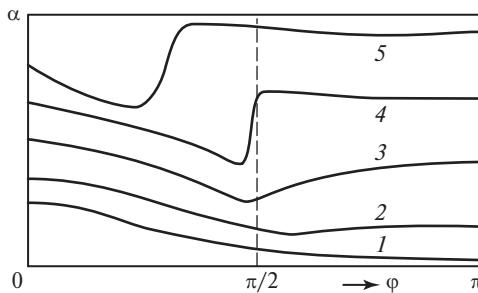


Рис. 4.18. Качественные зависимости локального КТО при обтекании цилиндра при различных числах Рейнольдса

КТО при различных числах Рейнольдса. При  $Re_D \leq 60$  (кривая 1) с ростом  $\varphi$  увеличивается толщина температурного пограничного слоя  $\Delta$ , а падает вплоть до кормовой области отрыва, в которой  $\alpha \approx \text{const}$ . Такой же характер сохраняется для зависимости  $\alpha(\varphi)$  и в следующем диапазоне чисел Re, но площадь зоны отрыва растет,  $\alpha$  в зоне отрыва при периодически отрывающихся вихрях несколько выше.

Область  $Re = 300 \div 1000$  характеризуется постоянным увеличением площади зоны отрыва,  $\alpha$  увеличивается с ростом Re, но всегда остается ниже, чем в передней критической точке:  $\alpha < \alpha_0$ , где  $\alpha_0 = \alpha$  при  $\varphi = 0^\circ$ . Этому диапазону чисел Рейнольдса примерно отвечает кривая 2 на рис. 4.18.

В практическом плане наиболее важный диапазон параметров соответствует  $Re = 10^3 \div 2 \cdot 10^5$ . В этом случае точка отрыва расположена в окрестности плоскости мидлевого сечения ( $\varphi = 90^\circ$ ). При больших Re ( $> 5 \cdot 10^3$ )  $\varphi_{\text{отр}} = 82^\circ$ . До точки отрыва  $\alpha$  падает по тому же примерно закону, что и при ламинарном обтекании плоской пластины, т.е. пропорционально  $x^{-1/2}$ ,  $x = \varphi D/2$ . После отрыва пограничного слоя устанавливается область с примерно однородным КТО в турбулентном следе, причем обычно  $\alpha$  в зоне отрыва меньше  $\alpha_0$  (кривая 3). Согласно опытным данным, уровень КТО в зоне отрыва, естественно, зависит от рода жидкости.

При критическом числе  $Re = 2 \cdot 10^5$  и сверхкритических числах Re вдоль периметра наблюдается следующая смена режимов: ламинарный пограничный слой, переход к турбулентному течению, область турбулентного пограничного слоя, зона отрыва. На зависимостях  $\alpha(\varphi)$  (кривая 4) наблюдаются два минимума: первый в области

перехода от ламинарного течения к турбулентному, второй в области отрыва турбулентного пограничного слоя. Точка второго минимума при отрыве пограничного слоя,  $\varphi_{\text{отр}} = 140^\circ$ , примерно сохраняется при любых сверхкритических  $Re$ . Точка турбулентного перехода, т.е. точка первого минимума  $\alpha$ , по мере роста  $Re$  смещается навстречу потоку, в область меньших  $\varphi$  (кривая 5 на рис. 4.18). При течении в турбулентном пограничном слое  $\alpha$  падает медленнее, чем в области ламинарного пограничного слоя (примерно по закону  $x^{-0,2}$ ).

Теоретический анализ локального теплообмена может быть реализован с хорошей точностью для течения в ламинарном пограничном слое. Для передней критической точки еще в 1930-е годы Г.Н. Кружилин получил

$$Nu_0 = 1,14 Re^{0,5} Pr^{1/3}, \quad (4.41)$$

где  $Re = U_\infty D/\nu$ ;  $Nu_0 = \alpha_0 D/\lambda$ , свойства жидкости выбираются по  $T = (T_\infty + T_c)/2$ .

Формула (4.41) полезна для оценки уровня КТО. При относительно низких числах  $Re$  (до  $10^4$ ) обычно  $Nu_0$  отвечает максимальному уровню теплоотдачи на поверхности цилиндра. При сверхкритических режимах средний КТО выше, чем в передней точке. Для инженерных расчетов важно определить средний коэффициент теплоотдачи:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \alpha_\varphi d\varphi.$$

Эмпирические расчетные уравнения подобия имеют одинаковую общую форму:

$$Nu = C Re^m Pr^n k_T, \quad (4.42)$$

где  $Nu = \bar{\alpha} D / \lambda$ .

Значения  $C$ ,  $m$ ,  $n$  даются в табл. 4.2. Первая строка соответствует работе [77], авторы которой провели обобщение очень аккуратных

Таблица 4.2. Значения параметров уравнения (4.42)

$Re$	$C$	$m$	$n$
$\leq 64$	1,34	0,32	0,31
$64—10^3$	0,52	0,50	0,37
$10^3 — 2 \cdot 10^5$	0,26	0,6	0,37
$> 2 \cdot 10^5$	0,023	0,8	0,4

измерений теплообмена на поверхности цилиндра при внешнем обтекании высоковязкими жидкостями ( $Re = 0,002 \div 64$ ); поскольку их уравнение отличается от ранее полученного уравнения А.А. Жукаускаса [10], для надежности они привлекли дополнительные данные о массообмене. В итоге получено

$$Nu = 1,34 Re^{0,32} Pr^{0,31}. \quad (4.43)$$

В последующих строках таблицы — данные А.А. Жукаускаса для трех характерных диапазонов  $Re$ . Обращает на себя внимание то, что при сверхкритических  $Re$  формула для КТО совпадает с формулой Диттуса—Белтера для турбулентного течения в круглых трубах.

Во всех случаях свойства жидкости должны выбираться по ее средней температуре. Поправочный коэффициент на переменность свойств предложен А.А. Жукаускасом как  $k_t = (Pr_\infty / Pr_c)^m$ ,  $m = 0,25$  при  $T_c > T_\infty$  ( $k_t > 1$ ),  $m = 0,20$  при  $T_c < T_\infty$  ( $k_t < 1$ ). Такая формула пригодна для капельных жидкостей. Для газов  $k_t = (T_\infty / T_c)^{m_1}$ ;  $m_1 = 0,25$  при  $T_c > T_\infty$ ; при  $T_c < T_\infty$   $k_t = 1$ .

Формула (4.42) относится к обтеканию цилиндра под прямым углом. Если угол между вектором скорости жидкости и осью цилиндра  $\psi < \pi/2$ , то вводится поправка

$$\alpha_\psi = \alpha_{\pi/2} (1 - 0,54 \cos^2 \psi).$$

При небольших отклонениях от прямого угла поправка достаточно мала: при  $\psi = 60^\circ$

$$\alpha_{60^\circ} \approx \alpha_{90^\circ} \cdot 0,865.$$

#### 4.7.2. Теплообмен в пучках труб

Поперечное обтекание пучков труб — широко распространенный случай конвективного теплообмена. Так называемые конвективные поверхности котельных установок — это последовательно расположенные трубчатые теплообменники, поперечно обтекаемые горячими газами (пароперегреватель, водяной экономайзер, воздухоподогреватель). Имеется множество других примеров теплообменников с поперечным обтеканием пучков параллельных труб. Используются две основные компоновки: коридорные пучки (in-line tube bundle) и шахматные (staggered tube bundle). Различие этих компоновок ясно из рис. 4.19.

Теплообмен в пучках достаточно условно можно отнести к внешним задачам, по крайней мере, применительно к условиям в глуби-

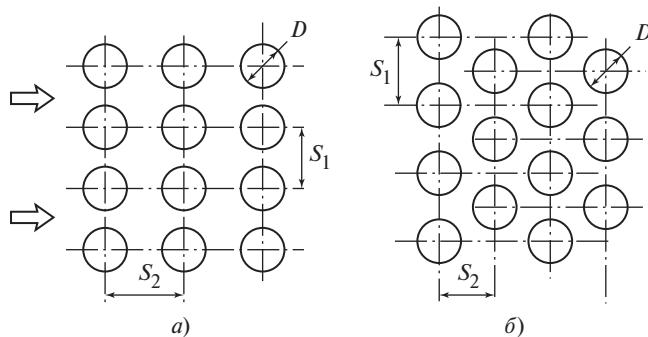


Рис. 4.19. Схемы коридорного (а) и шахматного (б) пучков поперечно обтекаемых труб

бинных рядах. Во всяком случае, начиная с третьего ряда обычно устанавливается стабилизированный теплообмен, расход теплоносителя, обтекающего трубы снаружи, определен, и, следовательно, тепловой баланс для пучков имеет смысл и обязательно используется. Но гидродинамика обтекания все же ближе к внешним задачам.

Первый ряд в обеих компоновках, очевидно, находится в тех же условиях, что характерны для поперечного обтекания одиночного цилиндра, так что средний КТО  $\bar{\alpha}_I$  следует рассчитывать по (4.42) с использованием данных табл. 4.2.

В большинстве случаев средний КТО растет в последующих рядах, т. е.  $\bar{\alpha}_{II} > \bar{\alpha}_I$ ,  $\bar{\alpha}_{III} > \bar{\alpha}_{II}$ . Практически начиная с третьего ряда устанавливается стабилизированный теплообмен, т. е.  $\bar{\alpha}_N = \bar{\alpha}_{III}$  при  $N \geq 3$ . Расчетные уравнения для КТО дают обычно для глубинных рядов, т.е. для  $N \geq 3$ . Их общая форма

$$Nu = C_1 Re^m Pr^n f \left( \frac{S_1}{S_2} \right) k_t. \quad (4.44)$$

В табл. 4.3 даны расчетные уравнения, конкретизированные для каждой компоновки и диапазона чисел  $Re$ . Из табл. 4.3 видно, что средние значения коэффициентов теплоотдачи в глубинных рядах пучков обоих типов превосходят средние КТО для одиночного цилиндра. Единственное исключение — коридорный пучок при  $Re = 100 \div 1000$ . В этом случае средний КТО  $\bar{\alpha}_N = \bar{\alpha}_I$ ; при этом  $\bar{\alpha}_{II}$  ока-

Таблица 4.3. Средние КТО для глубинных рядов коридорных и шахматных пучков

$Re$	Коридорный пучок	Шахматный пучок
$\leq 10^3$	$Nu = 0,9Re^{0,4}Pr^{0,36}k_T$ при $Re < 10^2$	$Nu = 1,04Re^{0,4}Pr^{0,36}k_T$ при $Re \leq 40$
	$Nu = 0,52Re^{0,5}Pr^{0,36}k_T$ при $10^2 < Re < 10^3$	$Nu = 0,71Re^{0,5}Pr^{0,36}k_T$ при $40 \leq Re < 10^3$
$10^3 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5$	$Nu = 0,27Re^{0,63}Pr^{0,36}k_T$	$Nu = 0,35Re^{0,6}Pr^{0,36}(S_1/S_2)^{0,2}k_T$ при $S_1/S_2 \leq 2$
		$Nu = 0,40Re^{0,6}Pr^{0,36}k_T$ при $S_1/S_2 > 2$
$Re > 2 \cdot 10^5$	$Nu = 0,033Re^{0,8}Pr^{0,4}k_T$	$Nu = 0,031Re^{0,8}Pr^{0,4}(S_1/S_2)^{0,2}k_T$

зывается ниже, чем  $\bar{\alpha}_I$ , из-за возникновения застойных зон в области между трубами первого и второго рядов. На трубы второго ряда попадают две струи, образовавшиеся при обтекании первого ряда. В результате на поверхности труб второго ряда возникают две передние критические точки при  $\phi \approx \pm 50^\circ$ . Между этими точками возникает область пониженной интенсивности теплообмена; к третьему ряду уровень КТО восстанавливается до  $\bar{\alpha}_I$ . Видимо, в этом случае, как и обычно для пучков, можно принять  $\bar{\alpha}_{II} = 0,8\bar{\alpha}_N$  при  $N \geq 3$ , но теперь  $\bar{\alpha}_N = \bar{\alpha}_I$ , а при других режимах  $\bar{\alpha}_N > \bar{\alpha}_I$ . При сверхкритических числах  $Re$  ( $Re > 2 \cdot 10^5$ ) средний КТО в 1,5 раза выше, чем для обтекания одиночного цилиндра.

В шахматных пучках  $\bar{\alpha}_N$  всегда выше, чем в коридорных, но, естественно, выше и гидравлическое сопротивление. При  $Re \geq 10^3$  на теплообмен влияет отношение поперечного шага пучка к продольному  $S_1/S_2$ . В коридорных пучках  $f(S_1/S_2) = 1$ . При  $N \geq 16$  средний КТО для всего пучка может приниматься как  $\bar{\alpha}_N$  согласно табл. 4.3; при  $N < 16$  более низкий КТО в первых двух рядах влияет на средний КТО пучка. В расчетах по формулам табл. 4.3 физические свойства жидкости выбираются по средней температуре в пограничном слое

$$\bar{T} = \frac{1}{2}(T_c + \bar{T}_\infty). \text{ Среднемассовая температура жидкости (а значит, и}$$

свойства жидкости) изменяется по длине пучка от ряда к ряду, особенно заметно при высоких  $q_c$ . В зависимости от конкретных условий, используя уравнение теплового баланса, следует либо принимать решение о расчете среднего коэффициента теплоотдачи для всего пучка, либо разбивать весь пучок по длине так, чтобы в пределах выбранного числа рядов свойства можно было считать постоянными. (Простейший вариант — расчет каждого из КТО  $\bar{\alpha}_N$  по локальным свойствам жидкости.)

В числе  $Re$  скорость выбирается для самого узкого сечения, т.е. максимальная среднемассовая скорость. Для шахматных пучков это требует несложных тригонометрических построений для конкретного сочетания  $S_1, S_2, D$ . Линейный размер в числах  $Nu$  и  $Re$  — диаметр труб.

Поправка на переменность свойств  $k_t = (\Pr_{ж}/\Pr_c)^{0,25}$  для капельных жидкостей ( $k_t > 1$  при  $T_c > T_{ж}$ ;  $k_t < 1$  при  $T_c < T_{ж}$ ).

Для газов А.А. Жукаускас не дает отдельного соотношения. Можно принять, как для одиночного цилиндра:

$$k_t = (T_{ж}/T_c)^{0,25}, \quad k_t < 1 \text{ при } T_c > T_{ж}; \quad k_t = 1 \text{ при } T_c < T_{ж}.$$

Формулы табл. 4.3 соответствуют обтеканию под прямым углом. При  $\psi < 90^\circ$  может использоваться та же поправочная формула, что для одиночной трубы (см. п. 4.7.1).

Из-за важности проблемы для приложений теплообмен в пучках продолжают исследовать, ищут оптимальные компоновки; относительно недавно были проведены исследования пучков с овальными трубами, расположенными длинной стороной вдоль потока. Главная цель исследований — добиться оптимального сочетания высокой интенсивности теплоотдачи и приемлемых значений гидравлического сопротивления.

## Контрольные вопросы к главе 4

1. Каковы исходные положения теории пограничного слоя, разработанной Прандтлем? К каким упрощениям математического описания они приводят?
2. Как определяются понятия температурного и диффузионного пограничных слоев?
3. Как записывается система уравнений теплообмена в приближении пограничного слоя?
4. Какие параметры и как могут быть приближенно (с точностью до коэффициентов) определены из системы уравнений пограничного слоя методами анализа размерностей?

5. Что такое автомодельное решение? Как определяется автомодельная переменная Блазиуса?
6. Как преобразуется система уравнений динамического пограничного слоя при использовании переменной Блазиуса и безразмерной функции тока?
7. Как изменяется скорость течения в пограничном слое вблизи стенки (при малых  $\eta$ )?
8. Какую практически важную информацию несет величина  $f''(0)$  в решении Блазиуса?
9. Как связаны поля безразмерной скорости и безразмерной температуры при ламинарном обтекании изотермической плоской пластины и почему?
10. Как решается уравнение энергии для теплообмена при обтекании изотермической пластины?
11. Как соотносятся толщины динамического и температурного пограничного слоев в зависимости от числа Прандтля?
12. Как на основе решения для поля температуры выводится уравнение для теплоотдачи при ламинарном обтекании плоской пластины?
13. Какую возможность упрощения математического описания задачи о теплообмене при ламинарном обтекании пластины использовал Левек для случая  $Pr \gg 1$ ?
14. К чему сводится уравнение энергии для обтекания плоской пластины при  $Pr \ll 1$ ? Как оно решается?
15. Как сформулировал О. Рейнольдс условие перехода к турбулентному режиму течения?
16. Какие качественные выводы об условиях потери устойчивости ламинарного течения следуют из анализа нейтральной кривой, полученной в результате решения уравнения Орра—Зоммерфельда?
17. Как влияют на устойчивость ламинарного течения шероховатость обтекаемой поверхности, турбулентность набегающего потока, наличие отсоса или вдува?
18. Как сказывается на устойчивости ламинарного течения градиент продольного давления?
19. Как влияют на условия турбулентного перехода градиент массовых сил, теплообмен и сжимаемость течения?
20. Ради чего проводится осреднение математического описания турбулентного течения и теплообмена?
21. Какие изменения претерпевают исходные уравнения импульса и энергии для актуальных параметров в результате осреднения?
22. Какой физический смысл имеют дополнительные члены, появляющиеся в уравнениях импульса и энергии в результате осреднения?
23. С чем связаны ограничения практического использования прямого численного моделирования (DNS) турбулентных течений?
24. Что дает введение турбулентной вязкости, турбулентной температуропроводности, турбулентного числа Прандтля? Замыкает ли оно систему осредненных уравнений турбулентного течения?
25. Как в эксперименте можно определить турбулентную вязкость и турбулентную температуропроводность?

26. Каким путем получают систему уравнений сохранения, составляющих  $k$ — $\varepsilon$ -модель турбулентности?
27. Как получают систему осредненных уравнений турбулентного течения и теплообмена в приближении пограничного слоя? Является ли эта система замкнутой?
28. Что выражает и как используется практически колмогоровский масштаб турбулентности?
29. Что характеризуют различные корреляции турбулентных пульсаций?
30. Имеет ли физическое содержание динамическая скорость, если да, то какое?
31. Что такое пристеночная турбулентная область, какова ее структура?
32. Как обосновываются логарифмические профили скорости и температуры для турбулентной части пристеночной турбулентной области?
33. Как влияют на область существования логарифмического профиля температуры свойства жидкости?
34. В чем суть модели пути перемешивания Прандтля? Почему некоторые результаты, следующие из модели, используются до сих пор, хотя сама модель переноса импульса по Прандтлю опровергнута современными исследованиями?
35. Какими достоинствами обладают модели турбулентности, прогнозирующие непрерывный профиль турбулентной вязкости, в частности модель Ван Дрийста?
36. В чем главное содержание аналогии Рейнольдса? К какому соотношению она приводит?
37. Как проводится модификация аналогии Рейнольдса на основе двухслойной схемы пристеночной турбулентной области?
38. Как соотносятся полученное на основе модифицированной аналогии Рейнольдса уравнение (4.39) и используемая для практических расчетов формула Жукаускаса (4.39а)?
39. Как характерные режимы поперечного обтекания кругового цилиндра связаны с числом Рейнольдса?
40. Как изменяется локальный теплообмен по поверхности кругового цилиндра при различных числах Рейнольдса?
41. Какими уравнениями подобия описывается средний КТО на поверхности цилиндра при его поперечном обтекании?
42. Чем отличаются коридорный и шахматный пучки труб? Как рассчитывается средний теплообмен на двух первых и на глубинных рядах труб?

# Глава 5

## ТЕПЛООБМЕН ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

### 5.1. Механизм и математическое описание свободной конвекции

#### 5.1.1. Качественный анализ. Приближение Буссинеска

Свободноконвективное движение — результат воздействия массовых сил на жидкость с неоднородной плотностью. Если эта неоднородность возникает благодаря неоднородности температуры, то говорят о термической свободной конвекции. В многокомпонентных жидкостях неоднородность плотности может быть следствием неоднородности состава — концентрационная свободная конвекция (влажный воздух, растворы солей с градиентом «солености»). В системах газ — жидкость причиной конвекции могут быть не массовые силы, а поверхностные — градиент поверхностного натяжения  $\nabla\sigma$ . Этот вид свободноконвективного движения называют капиллярной конвекцией, или конвекцией Марангони. Мы рассматриваем только термогравитационную конвекцию, когда причина неоднородности плотности — неоднородность температуры, а массовые силы — гравитационные.

Рассмотрим криволинейную поверхность (рис. 5.1), для определенности принимаем  $T_c > T_\infty$ . Ось  $x$  направлена по касательной к твердой поверхности, ось  $y$  — по нормали. В любом сечении  $x = \text{idem}$  температура  $T$  уменьшается от  $T_c$  при  $y = 0$  до  $T = T_\infty$  при  $y = \Delta$  (тол-

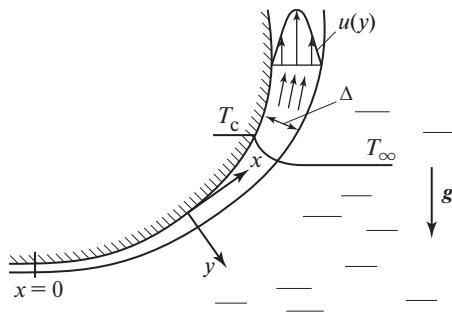


Рис. 5.1. Схема формирования свободноконвективного пограничного слоя

щина температурного пограничного слоя). На каждую жидкую частицу в температурном пограничном слое действует архимедова сила (сила плавучести), возникает подъемное течение внутри пограничного слоя. Так как на стенке действует «прилипание» ( $y = 0, u = 0$ ), а при  $y = \Delta$  исчезает причина подъемного движения, то ясно, что максимальная скорость подъемного течения должна наблюдаться где-то в средней части толщины пограничного слоя. (Имеющиеся опытные данные и численные решения показывают, что в газах и маловязких жидкостях область максимальной скорости свободной конвекции находится на расстоянии  $(0,2 \div 0,3)\Delta$  от стенки.)

Есть основания считать, что в случае свободной конвекции толщины температурного и динамического пограничных слоев примерно совпадают,  $\Delta \approx \delta$  [46]. Действительно, при  $Pr > 1$  эффект вязкости должен проявляться на большем расстоянии от стенки, чем эффект температуропроводности (теплопроводности). Но при  $y = \Delta$  исчезает первопричина движения, так что превышение толщины динамического пограничного слоя в сравнении с температурным может быть связано только с эффектами внутреннего трения. При  $Pr \ll 1$  (жидкие металлы) температурное возмущение от стенки должно проявляться на больших расстояниях от нее. Но в любой точке, где  $T > T_\infty$ , действует архимедова сила, вызывающая подъемное течение. Таким образом, хотя, конечно, при  $Pr \gg 1$  значение  $\delta > \Delta$ , это различие при свободной конвекции не может стать существенным. Численное моделирование [33] показало, что при  $Pr \geq 1$  действительно  $\Delta/\delta \approx 1$ ; при  $Pr \gg 1$  ( $Pr = 100$ ) тепловой пограничный слой заметно тоньше динамического, силы плавучести, возникающие при  $y \leq \Delta$ , приводят в движение изотермическую жидкость во внешней области. Если ориентироваться в дальнейшем на маловязкие жидкости, то можно полагать, что при свободной конвекции выполняется примерное равенство толщин динамического и температурного пограничных слоев.

Поскольку причиной гравитационной свободной конвекции является неоднородность плотности жидкости, представляется естественным отразить это в уравнении сохранения массы, записав его в форме, отвечающей течению сжимаемой жидкости. Вместе с тем, практически всегда при свободной конвекции выполняется условие  $M < 0,3$ , которое при вынужденном течении используется как граница несжимаемых течений в том смысле, что изменением плотности из-за влияния изменения давления можно пренебречь. Буссинеск предложил выход из этого противоречия — учитывать перемен-

ность плотности только в уравнении сохранения импульса, в членах, отражающих эффект массовых сил, и градиента давления.

Установим условия применимости приближения Буссинеска. Для случая двумерного течения, отраженного на рис. 5.1 ( $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ), в стационарной задаче уравнение неразрывности  $\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0$  [см. (2.2а)] имеет вид

$$u \underline{\frac{\partial \rho}{\partial x}} + \rho \underline{\frac{\partial u}{\partial x}} + v \underline{\frac{\partial \rho}{\partial y}} + \rho \underline{\frac{\partial v}{\partial y}} = 0.$$

В этом уравнении подчеркнутые слагаемые соответствуют пространственной неоднородности плотности. Если эти слагаемые несущественны, то остается уравнение неразрывности несжимаемой жидкости, в котором имеются только члены, отражающие пространственную неоднородность скорости. Отношения слагаемых, отражающих эти два эффекта:

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} / \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx v \frac{\partial \rho}{\partial y} / \left( \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (5.1)$$

должны быть одного порядка, иначе уравнение неразрывности теряет смысл.

Для оценки порядка величины этих соотношений перейдем от переменных и их производных к их максимальным значениям и максимальным конечным разностям; принимаем  $u \approx u_0$ ,  $\partial u \approx u_0$ ,  $\partial \rho = \rho_\infty - \rho$ . Тогда порядок отношений (5.1):

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} / \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho}.$$

Используя разложение температурной зависимости плотности в ряд Тейлора, имеем

$$\rho(T) = \rho_\infty + \frac{\partial \rho}{\partial T} \Delta T + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \Delta T^2 + \dots$$

Ограничивааясь линейными членами (малые  $\Delta T$ ), находим

$$\rho_\infty - \rho(T) = -\frac{\partial \rho}{\partial T} \Delta T = \rho \beta \Delta T,$$

где  $\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$  — термический коэффициент объемного расширения.

Максимальной разности температур  $T_c - T_\infty = \Delta T$  отвечает максимальное относительное изменение плотности  $\frac{\rho_\infty - \rho_c}{\rho} = \beta(T_c - T_\infty) = \beta \Delta T$ .

Итак, эффект собственно сжимаемости ничтожно мал в уравнении неразрывности (в сравнении с членами, отражающими пространственную неоднородность скорости), если  $\beta \Delta T \ll 1$ .

В газах при невысоких давлениях  $\beta = 1/T$ , т.е. приближение Буссинеска справедливо при  $\Delta T/T \ll 1$ . В капельных жидкостях  $\beta < 1/T$ , а  $\Delta T$  большими быть не могут, так как в противном случае жидкость закипает. Поэтому для капельных жидкостей приближение Буссинеска выполняется всегда. В газах требуется известная осторожность, так как  $\Delta T$  могут быть значительными. Хотя во многих (в большинстве) практических задачах приближение Буссинеска вполне оправдано.

Особый случай представляет вещество в сверхкритической однозначной области, где  $\beta$  могут быть больше  $1/T$ ; эта область режимных параметров вообще требует очень внимательного отношения к изменению физических свойств с температурой. Это требование, естественно, относится и к возможности применять приближение Буссинеска.

### 5.1.2. Математическое описание свободной конвекции в приближениях Буссинеска и пограничного слоя

Математическое описание составляем для плоского течения, представленного на рис. 5.1;  $\rho = \text{const}$  всюду, кроме членов, отражающих действие массовых сил. Задача стационарная. Скорости свободной конвекции невелики, что позволяет не учитывать работу сил давления и вязкую диссиацию.

Если размер в направлении течения  $l$  (и, следовательно,  $x$ )  $\gg \delta$ , то выполняются условия применимости приближений пограничного слоя. Тогда согласно анализу, проведенному в § 4.1, в уравнении  $x$ -проекции импульса

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

из  $y$ -проекции импульса получаем  $\partial p / \partial y = 0$ ; в уравнении энергии

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (5.2)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underline{\rho g_x}; \quad (5.3)$$

$$\rho u c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \quad (5.4)$$

где  $\vartheta = T - T_\infty$ .

Поскольку  $\partial p / \partial y = 0$ , то  $dp / dx = dp_\infty / dx = \text{idem}$  при  $x = \text{idem}$ . При  $y > \delta$  движения нет, так что для неподвижной жидкости (5.3) принимает вид

$$-\frac{dp_\infty}{dx} + \rho_\infty g_x = 0.$$

Следовательно, сумма подчеркнутых членов в (5.3)

$$-\frac{dp}{dx} + \rho g_x = -\rho_\infty g_x + \rho g_x = -g_x(\rho_\infty - \rho).$$

Выше показано, что  $\rho_\infty - \rho \approx \rho \beta \vartheta$ . Значит, уравнение (5.3) можно представить как

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g_x \beta \vartheta + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5.3a)$$

Итак, (5.2), (5.3a), (5.4) — система уравнений свободной конвекции в приближениях пограничного слоя и Буссинеска. Слагаемое  $-g_x \beta \vartheta$  представляет «источник движения» при свободной конвекции. Так как поле температур определяет само возникновение движения, то в задачах свободной конвекции никогда нельзя уравнения движения решать независимо от уравнения энергии.

### 5.1.3. Максимальная скорость свободной конвекции. Оценка толщины свободноконвективного пограничного слоя

Максимальная скорость течения в свободноконвективном пограничном слое определяется условием  $\partial u / \partial y = 0$  в (5.3а). Для оценки этой величины «сверху» не будем учитывать вязкость. При таком подходе, конечно, действительная скорость течения будет ниже, чем получаемая из предельной оценки. Итак, из (5.3а) имеем

$$U_0 \frac{dU_0}{dx} = -\vartheta \beta g_x.$$

При  $\vartheta = T - T_\infty > 0$  течение подъемное  $g_x < 0$ , и, наоборот, при  $T - T_\infty < 0$  течение опускное,  $g_x > 0$ , т.е.  $-\vartheta g_x > 0$ . Полагая, что  $\partial \vartheta / \partial x = 0$ , интегрируем

$$\frac{1}{2} U_0^2 = |g_x| \cdot |\vartheta| \beta x.$$

(Константа интегрирования равна нулю из условия  $x = 0, U_0 = 0$ .)

Принимая, что в средней части толщины пограничного слоя  $\vartheta \approx \vartheta_c / 2$  ( $\vartheta_c = T_c - T_\infty = \Delta T_c$ ), получаем окончательно

$$U_0 = \sqrt{\beta x \Delta T_c g_x} \quad (5.5)$$

— максимальная скорость свободной конвекции;  $\Delta T_c$  и  $g_x$  берутся по модулю. Эта скорость соответствует свободной конвекции невязкой жидкости.

Максимальная скорость свободной конвекции определяет естественный масштаб скорости при анализе математического описания методами теории подобия. Для поверхности протяженностью  $l$  в направлении течения  $U_0 = \sqrt{g_x / \beta \Delta T_c}$ ,  $\tilde{u} = u/U_0$ ,  $\tilde{v} = v/U_0$ ,  $\theta = \vartheta / \Delta T_c$ ,  $\tilde{x} = x/l$ ,  $\tilde{y} = y/l$ . Используя эти обозначения, приведем уравнения (5.3а) и (5.4) к безразмерному виду:

$$\frac{\rho U_0^2}{l} \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) = -\Delta T_c \theta g_x \rho \beta + \frac{\mu U_0}{l^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

Используя определение  $U_0$ , получаем (учитывая, что  $-\Delta T_c g_x > 0$ )

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \theta + \frac{\mu}{\rho U_0 l} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}. \quad (5.36)$$

Для уравнения энергии имеем

$$\frac{\rho c_p U_0}{l} \left( \tilde{u} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{\lambda}{l^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2},$$

или

$$\tilde{u} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{y}} = \frac{a}{U_0 l} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2}. \quad (5.4a)$$

Таким образом, получено специфическое число Рейнольдса ( $\text{Re}_{c.k}$ ) для свободной конвекции:

$$\frac{\rho U_0 l}{\mu} = \text{Re}_{c.k} = \frac{\rho l \sqrt{g_x \beta \Delta T_c l}}{\mu}.$$

Легко убедиться, что квадрат этого числа дает введенное в гл. 3 число Грасгофа, т.е.

$$\text{Re}_{c.k}^2 = \text{Gr}_l;$$

$$\text{Gr}_l = \frac{f_i f_g}{f_\mu^2} = \frac{g_x \beta \Delta T_c l^3}{v^2}.$$

Безразмерный комплекс в уравнении (5.4а) дает число Пекле свободной конвекции

$$\frac{U_0 l}{a} = \text{Pe}_{c.k} = \text{Re}_{c.k} \text{Pr} = \text{Gr}_l^{1/2} \text{Pr}.$$

Таким образом, использование понятия максимальной скорости свободной конвекции ведет к новой трактовке числа Грасгофа как квадрата специфического числа Рейнольдса  $\text{Re}_{c.k}$ .

Из уравнений (5.3б) и (5.4а) следуют оценки толщины пограничного слоя при свободной конвекции. Все слагаемые этих безразмерных уравнений имеют одинаковый порядок — порядок единицы. Величины  $\partial^2 \tilde{u} / \partial \tilde{y}^2$  и  $\partial^2 \theta / \partial \tilde{y}^2$  имеют порядок  $l^2 / \delta^2$  и  $l^2 / \Delta^2$  соответственно. Таким образом, переходя от  $l$  к текущей продольной координате  $x$ , имеем из (5.3б)

$$\frac{1}{\text{Gr}_x^{1/2}} \frac{x^2}{\delta^2} = \text{const} = O(1), \quad \delta = C_0 x \text{Gr}_x^{-1/4}.$$

Можно также воспользоваться аналогией с пограничным слоем при вынужденном обтекании пластины (вместо  $U_\infty$  используем  $U_0$ ):

$$\delta \sim x \text{Re}_x^{-1/2} = x \text{Gr}_x^{-1/4}, \quad \text{если } \text{Re}_x = \text{Re}_{\text{с.к.}}$$

Из (5.4а) аналогично

$$\frac{1}{\text{Gr}_x^{1/2}} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{x^2}{\Delta^2} = \text{const} = O(1);$$

$$\Delta = C_1 x \text{Gr}_x^{-1/4} \text{Pr}^{-1/2}.$$

Выше на основе качественных рассуждений было показано, что при свободной конвекции  $\delta \approx \Delta$ . Исходя из этих оценок и полученных в настоящем пункте соотношений, можно предположить, что

$$\delta \approx \Delta = C x \text{Gr}_x^{-1/4} f(\text{Pr}), \quad (5.6)$$

где  $f(\text{Pr})$  не должна сильно отличаться от единицы. Ясно, что  $\delta \approx \Delta \sim x^{1/4}$ .

## 5.2. Теплообмен при свободной конвекции у вертикальной плоскости

### 5.2.1. Постановка задачи

У нагретой вертикальной плоскости ( $T_c > T_\infty$ ), очевидно, наблюдается подъемное течение в пограничном слое (рис. 5.2, а); у охлаждаемой плоскости ( $T_c < T_\infty$ ) — опускное течение в пограничном слое (рис. 5.2, б). В первом случае  $g_x = -g$ ,  $\vartheta = T - T_\infty > 0$ , т.е. в уравнении (5.3а) произведение  $(-g_x)\vartheta > 0$ ; во втором случае  $g_x = g$ ,  $\vartheta = T - T_\infty < 0$ , так что также  $(-g_x)\vartheta > 0$ . При использовании в (5.3а) модулей  $\vartheta$  и  $g_x$  для подъемного и опускного течения получается одинаковое выражение со знаком «плюс» перед первым слагаемым в правой части (5.3а) или (5.3б). Таким образом, математическое описание свободной конвекции у вертикальной плоскости имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (5.2)$$

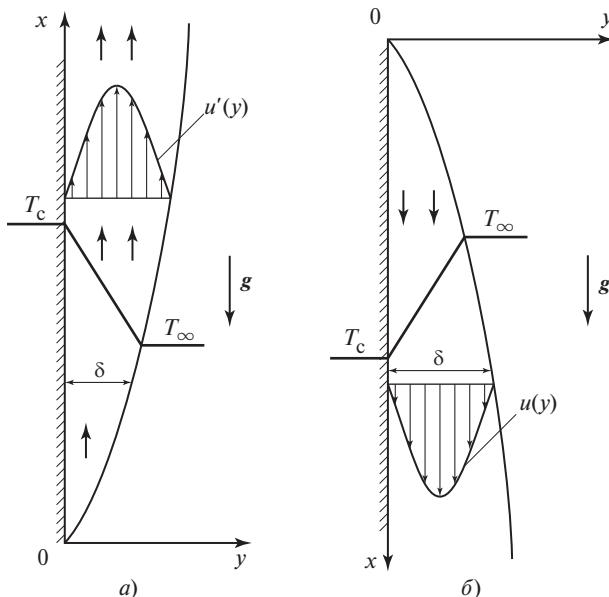


Рис. 5.2. Свободная конвекция у вертикальной плоскости при подъемном (а) и опускном (б) течении

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \beta \vartheta g + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (5.3b)$$

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}. \quad (5.4b)$$

Границные условия:

$$y = 0: u = v = 0, \vartheta = \vartheta_c = |T_c - T_\infty|; y = \infty: u = v = 0, \vartheta = 0.$$

В 1930 г. эта задача была исследована Польгаузеном на основе опытных измерений Шмидта и Бекмана [45]. При использовании функции тока, определяемой соотношениями  $u = \partial \psi / \partial y$ ,  $v = -\partial \psi / \partial x$ , превращающими (5.2) в тождество, была получена система двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализ проводился с

использованием автомодельной переменной  $\eta = y/\delta = \frac{y}{x} \left( \frac{\text{Gr}_x}{4} \right)^{1/4}$ . Для

фиксированного числа Прандтля  $\text{Pr} = 0,733$  было получено расчетное уравнение для теплоотдачи:

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\alpha x}{\lambda} = 0,39 \text{Ra}_x^{1/4}. \quad (5.7)$$

Напомним, что  $\text{Ra}_x = \text{Gr}_x \cdot \text{Pr}$ .

В 1953 г. в работе [69] осуществлено численное решение этой задачи для произвольных чисел  $\text{Pr}$ , аппроксимированное как

$$\text{Nu}_x = \text{Ra}_x^{1/4} f_1(\text{Pr}). \quad (5.8)$$

В последующем вид функции  $f_1(\text{Pr})$  уточнялся на основе более аккуратных численных решений (см. [33]).

Ниже дается приближенный метод, позволяющий объяснить структуру различных выражений для  $f_1(\text{Pr})$ .

### 5.2.2. Приближенное аналитическое решение

В приближении пограничного слоя в уравнениях (5.3в) и (5.4б) сохранены члены одного порядка. Для получения структуры выражений для толщины пограничного слоя  $\delta$  и коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  заменим эти уравнения алгебраическими аналогами, как это уже делалось в п. 4.2.1. Будем использовать максимальные конечные разности вместо дифференциалов, полагая  $\delta x \sim x$ ,  $\delta y \sim \delta$ ,  $\delta u \sim u$ ,  $\delta \vartheta \sim \vartheta_c = \Delta T$ . При этом, поскольку оба конвективных члена в уравнениях (5.3в) и (5.4б) одного порядка, левые их части заменим только одним слагаемым, соответствующим конвективному переносу импульса и энергии в направлении течения. Тогда из уравнения (5.3в) имеем

$$u^2/x = C_1 g \beta \vartheta_c - C_2 v u / \delta^2, \quad (\text{a})$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — неизвестные константы порядка единицы. Знак перед вторым слагаемым имеет как физическое объяснение (различное направление массовых и вязкостных сил), так и формальное математическое:  $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$  для выпуклого профиля скорости.

Из уравнения (5.4б) получаем

$$u \frac{\vartheta_c}{x} = C_3 \alpha \frac{\vartheta_c}{\delta^2}. \quad (6)$$

Неизвестная константа  $C_3$  также должна быть порядка единицы. Теперь решается система алгебраических уравнений (а) и (б). Из (б) получаем

$$u = C_3 \frac{\alpha x}{\delta^2}.$$

Подстановка этого значения  $u$  в (а) дает (с заменой  $\vartheta_c = \Delta T$ )

$$C_3^2 \frac{a^2 x}{\delta^4} = C_1 g \beta \Delta T - C_2 C_3 \frac{\nu a x}{\delta^4}.$$

Несложные алгебраические преобразования позволяют получить выражение для толщины свободноконвективного пограничного слоя:

$$\delta = Cx Ra_x^{-1/4} \sqrt[4]{\frac{1 + C_0 \text{Pr}}{\text{Pr}}}. \quad (5.9)$$

Новые числовые константы  $C$  и  $C_0$  представляют собой комбинацию первоначально введенных  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и, следовательно, тоже не должны сильно отличаться от единицы.

Если сравнить этот результат с (5.6), то с учетом  $Ra_x \equiv Gr_x \text{Pr}$  ясно, что

$$f(\text{Pr}) = \sqrt[4]{\frac{1 + C_0 \text{Pr}}{\text{Pr}^2}}.$$

Теперь можно получить структуру выражения для КТО:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\vartheta_c} \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = C_4 \frac{\lambda}{\delta}.$$

Подставляя сюда (5.9), находим

$$Nu_x \equiv \frac{\alpha x}{\lambda} = C' Ra_x^{1/4} \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{1 + C_0 \text{Pr}}}. \quad (5.10)$$

Именно в такой форме были аппроксимированы результаты численного исследования в работе [69]. Позднее (1970 г.) более точную аппроксимацию предложил Ид (Ede) (см. [33]):

$$Nu_x = 0,75 Ra_x^{1/4} \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{2,5(1 + 2\text{Pr}^{1/2} + 2\text{Pr})}}. \quad (5.11)$$

Это — наиболее точная формула для ламинарной свободной конвекции на вертикальной поверхности. Как и предполагалось, все числовые константы имеют порядок единицы. Добавление в знаменателе подкоренного выражения слагаемого с  $\text{Pr}^{1/2}$  улучшает точность аппроксимации в сравнении с [69].

Из (5.11) следуют две асимптоты:

при  $\text{Pr} \rightarrow \infty$  (практически  $\text{Pr} \gg 1$ )

$$\text{Nu}_x = 0,503 \text{Ra}_x^{1/4}; \quad (5.11\alpha)$$

при  $\text{Pr} \ll 1$

$$\text{Nu}_x = 0,60 \text{Gr}_x^{1/4} \text{Pr}^{1/2} \equiv 0,60 \left( \frac{g \beta \Delta T_c x^3}{a^2} \right)^{1/4}. \quad (5.11\beta)$$

Как и ранее (п. 4.2.4), для жидких металлов ( $\text{Pr} \ll 1$ ) теплоотдача не зависит от вязкости.

При  $\text{Pr} = 0,733$  из (5.11) следует  $\text{Nu}_x = 0,386 \text{Ra}_x^{1/4}$ , что отличается от (5.7) на 1 %. Выражения (5.10), (5.11) и все следующие из них соотношения предсказывают уменьшение  $\alpha$  в направлении течения по закону  $\alpha \sim x^{-1/4}$ .

В диапазоне  $\text{Pr} = 0,7 \div \infty$  зависимость (5.11) может быть аппроксимирована с погрешностью менее 13 % степенной формулой

$$\text{Nu}_x = 0,45 \text{Ra}_x^{1/4}. \quad (5.12)$$

Эта простая зависимость давно известна как результат аппроксимации опытных данных. Следует отметить, что сегодня результаты численных исследований ламинарной свободной конвекции объективно более надежны, чем данные физических экспериментов, поскольку из-за малой интенсивности теплоотдачи при свободной конвекции погрешность опытных исследований достаточно велика.

Средний КТО для пластины высотой  $l$ :

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) dx = \frac{4}{3} \alpha_{x=l}.$$

Из (5.11) и (5.12) получают соответственно

$$\overline{\text{Nu}} \equiv \frac{\bar{\alpha} l}{\lambda} = \text{Ra}_l^{1/4} \sqrt[4]{\frac{\text{Pr}}{2,5(1 + 2\text{Pr}^{1/2} + 2\text{Pr})}}; \quad (5.11\beta)$$

$$\overline{\text{Nu}} = 0,60 \text{Ra}_l^{1/4}. \quad (5.12a)$$

Все полученные соотношения справедливы, пока сохраняется ламинарное течение и остаются в силе условия применимости приближений Буссинеска и пограничного слоя. Последнее требование означает, что  $\delta \ll x$ ; с учетом (5.9) оно устанавливает нижнюю границу применимости полученных соотношений:  $Ra_x^{-1/4} \gg 1$ . Практически все формулы (5.10)–(5.12) применимы при  $Ra_x \geq 10^4$ .

Потеря устойчивости ламинарного течения в свободноконвективном пограничном слое происходит при  $Ra_x \approx 10^8$ , а развитое турбулентное течение устанавливается при  $Ra_x = 3 \cdot 10^9$ . Таким образом, в реальных условиях переходная зона охватывает достаточно большую длину. Обычно принимают, что (5.11), (5.12) и следующие из них частные случаи и соотношения для  $\alpha$  можно использовать при

$$10^4 \leq Ra_x \leq 10^9.$$

Изложенный выше анализ выполнен для изотермической поверхности, так что  $\Delta T = T_c - T_\infty = \text{const}$ . В случае  $q_c = \text{const}$ , поскольку закономерности процесса должны сохраняться, имеем

$$q_c \equiv \alpha \Delta T = C x^{-1/4} \Delta T^{1/4} \Delta T,$$

так что  $\Delta T \sim x^{1/5}$ . При  $T_\infty = \text{idem}$  температурный напор  $\Delta T = T_c - T_\infty$  растет как  $x^{1/5}$  из-за увеличения толщины погранслоя,  $\alpha \sim x^{-1/5}$ . В [33] приводится полученное в 1976 г. соотношение такой же структуры, как (5.11):

$$Nu_x = (Gr_x^* Pr)^{1/5} \sqrt[5]{\frac{Pr}{4 + 9Pr^{1/2} + 10Pr}}. \quad (5.13)$$

Более простая степенная зависимость Влита и Росса [Vliet, Ross (1975 г.)] имеет вид

$$Nu_x = 0,60(Gr_x^* Pr)^{1/5}. \quad (5.13a)$$

Обе формулы применимы при  $10^5 \leq Gr_x^* Pr \leq 10^{13}$ .

Модифицированное число Грасгофа  $Gr_x^*$  получается из  $Gr_x$  заменой неизвестного  $\Delta T$  на эквивалентную по размерности величину

$$qx/\lambda, \text{ так что } Gr_x^* = \frac{g\beta qx^4}{\lambda v^2}.$$

Во всех уравнениях настоящего параграфа теплофизические свойства должны выбираться при средней температуре пограничного слоя  $\bar{T} = \frac{1}{2}(T_c + T_\infty)$ .

### 5.2.3. Турбулентная свободная конвекция на вертикальной плоскости

При теоретическом описании турбулентной свободной конвекции на основе осредненных уравнений в математическом описании появляются осредненные трети моменты пульсаций, содержащие пульсацию плотности  $\rho'$ :

$$\overline{\rho' u'^2}, \overline{\rho' u' v'}, \overline{\rho' u' \vartheta'}, \overline{\rho' v' \vartheta'} \text{ и т.д.}$$

Анализ [34] показывает, что эти трети моменты пульсаций много меньше, чем вторые:  $\overline{u'^2}, \overline{u' v'}, \overline{v' \vartheta'}$ ; это позволяет проводить теоретические исследования таким же путем, как для вынужденного течения и теплообмена в пограничном слое. Проблема замыкания решается надлежащим выбором аппроксимации для  $\varepsilon_t$  и  $Pr_t$ . Итогом численного исследования для заданных  $Ra$ ,  $Pr$  является конкретное значение  $Nu$ ; фактически каждое такое решение — это единичный численный эксперимент. Такой эксперимент дополняет физический эксперимент, хотя следует сказать, что при турбулентной свободной конвекции к настоящему времени больше информации получено из физических экспериментов.

В опытах по теплообмену при турбулентной свободной конвекции выявлено, что  $\alpha \neq \alpha(x)$  при  $Re_x > 10^9$ . Если полагать, что уравнение подобия при турбулентном течении в погранслое имеет ту же общую форму, что и при ламинарном, т.е.  $Nu_x = CRa_x^m$ , то условию независимости  $\alpha$  от  $x$  отвечает  $m = 1/3$ . Из-за большого разброса опытных данных различные авторы предлагают значение константы в широком диапазоне:  $C = 0,10 \div 0,17$ .

Для практических расчетов можно принять  $C = 0,13$ , т.е.

$$Nu_x = 0,13 Ra_x^{1/3}. \quad (5.14)$$

Формула справедлива при  $10^9 \leq Ra_x \leq 10^{13}$ .

Верхний предел определяется недостатком опытных данных при больших числах  $Ra_x$ . При анализе послеаварийного охлаждения корпуса ядерного реактора возникает потребность рассчитывать КТО при  $Ra_x$  вплоть до  $10^{15}$ . Небольшое число не очень надежных опытных данных указывает, что при  $Ra_x > 10^{12}$  число  $Nu_x \sim Ra_x^{0,4}$ . В настоящее время больше оснований использовать экстраполяцию (5.14) в область высоких  $Ra_x$ .

При  $q_c = \text{const}$ , когда определяющее число подобия  $Gr_x^* = \frac{g\beta q_c x^4}{\lambda v^2}$ ,

независимость  $\alpha$  от  $x$  достигается, если  $m = 1/4$ . Согласно Влиту и Ресси (Vliet, Ross)

$$Nu_x = 0,17(Gr_x^* Pr)^{1/4} \quad (5.14a)$$

при  $10^{13} \leq Gr_x^* Pr \leq 10^{17}$ .

#### 5.2.4. Заключительные замечания

На рис. 5.3, *a* схематически представлены развитие пограничного слоя и характер изменения коэффициента теплоотдачи при свободной конвекции на протяженной вертикальной плоскости. Рис. 5.3, *b* дает примерный характер изменения опытных значений КТО по высоте обогреваемой стенки, там же показаны расчетные зависимости (5.12) и (5.14).

Для инженерных расчетов при  $Ra_x = 10^4 \div 10^8$  вполне приемлемо использовать (5.12). При  $Ra_x = 10^9$  расчет по зависимостям для ламинарного и турбулентного течения дает разрыв ( $Nu_x = 80$  и 130). В ответственных расчетах при  $Ra_x = 10^8 \div 10^9$  лучше проводить интерполяцию между  $\alpha_{\text{лам}}$  при  $Ra_x = 10^8$  и  $\alpha_{\text{турб}}$  при  $Ra_x = 10^9$ .

В целом при исследованиях теплообмена при свободной конвекции обычно наблюдается значительный разброс опытных точек, поскольку коэффициенты теплоотдачи низкие и любые случайные эффекты влияют очень заметно. Это особенно справедливо для области перехода от ламинарного течения в пограничном слое к турбулентному.

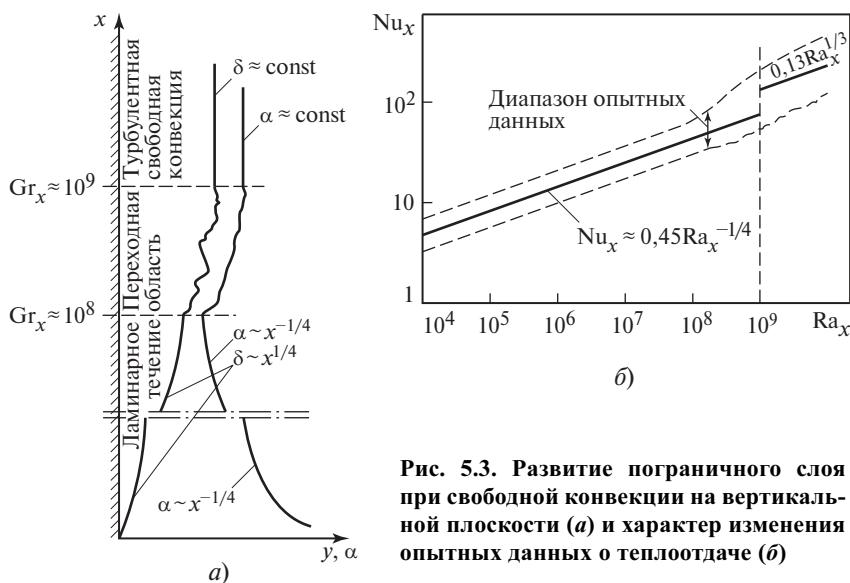


Рис. 5.3. Развитие пограничного слоя при свободной конвекции на вертикальной плоскости (а) и характер изменения опытных данных о теплоотдаче (б)

В расчете по всем формулам § 5.2, включая формулы (5.14) и (5.14а) для турбулентной свободной конвекции, физические свойства жидкости берутся при определяющей температуре  $T_{\text{опр}} = (T_{\infty} + T_c)/2$ .

### 5.3. Свободная конвекция у поверхности цилиндров и сфер

В этом параграфе речь пойдет о горизонтальных цилиндрах. Свободная конвекция на поверхности вертикального цилиндра практически всегда может рассчитываться по соотношениям для свободной конвекции на вертикальной плоскости, рассмотренным в предыдущем параграфе. Это вполне справедливо, пока кривизна поверхности не сильно влияет на профили температуры и скорости в пограничном слое, практически — при  $\delta \ll D$ . Для оценок возможности применения формул § 5.2 при расчете теплоотдачи на поверхности вертикальных труб обычно используют условие  $Re_D \geq 81$  (при этом для расчета КТО определяющее число подобия —  $Ra_x$ ).

Если плоская пластина или ось цилиндра наклонены к горизонту под углом  $\psi$ , то  $|g_x| = g \sin \psi$ . Так как ускорение  $g$  входит в расчет-

ные формулы для  $\alpha$  в степени 1/4 или 1/3, то при  $\psi \geq 45^\circ$  влияние угла наклона невелико. В расчетах пользуются соотношениями § 5.2 при замене  $g$  в  $\text{Ra}_x$  на  $g \sin \psi$ .

### 5.3.1. Горизонтальные цилиндры большого диаметра

На горизонтальном цилиндре при  $T_c > T_\infty$  свободноконвективный пограничный слой формируется от нижней образующей, при этом при  $x = 0$  значение  $\delta = \delta_0 \neq 0$  (рис. 5.4). Ось  $x$  направлена вдоль периметра трубы по течению жидкости, т.е.  $x = \varphi D/2$ . В любой точке периметра ось  $x$  направлена по касательной, ось  $y$  — по нормали к поверхности. При  $T_c < T_\infty$  течение опускное, тогда начало координат помещается на верхней образующей.

Понятие «цилиндр большого диаметра» означает, что в анализе можно использовать приближение пограничного слоя, т.е.  $\delta \ll D$ . Практически это выполняется при  $\text{Ra}_D \geq 10^4$ . Но даже в этом случае в области  $\varphi > 140^\circ$  приближение пограничного слоя становится неприменимым, так как область течения становится обширной, формируется «факел» («перо» — plume). В общем случае эта область не является зоной отрыва, но ясно, что здесь модель пограничного слоя становится неприменимой.

В области пограничного слоя в теоретическом анализе отличие от свободной конвекции на вертикальной плоскости в том, что теперь

$$g_x = -g \sin \varphi = -g \sin(2x/D).$$

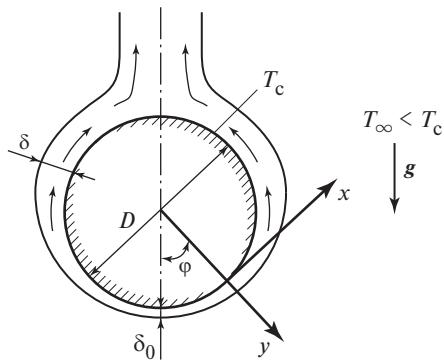


Рис. 5.4. Свободная конвекция у поверхности горизонтального цилиндра

Следовательно,  $g_x = f(x)$ . В области факела к этому добавляется то, что надо рассматривать полные уравнения Навье—Стокса и энергии (для плоской задачи). Для ламинарного течения получены численные решения как для области пограничного слоя, так и для области факела.

В инженерных приложениях используют обычно средний коэффициент теплоотдачи:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \alpha_{\varphi} d\varphi = \frac{2}{\pi D} \int_0^{\pi D/2} \alpha_x dx.$$

Общая форма расчетного уравнения такая же, как для вертикальной плоскости (5.8):

$$Nu_D = Ra_D^{1/4} \varphi(Pr). \quad (5.8a)$$

Точное (численное) решение Мерка и Принса (Merk, Prince)дается в [33] (табл. 5.1).

Таблица 5.1. Значения  $\varphi(Pr)$  согласно [33]

Pr	0,7	1,0	10	100	$\infty$
$\varphi(Pr)$	0,436	0,456	0,520	0,523	0,523

Приближенно можно использовать среднее значение  $\varphi(Pr)$ :

$$Nu_D = 0,48 Ra_D^{1/4}.$$

На практике чаще применяют более удобную (для запоминания) зависимость:

$$Nu_D = 0,50 Ra_D^{1/4}. \quad (5.15)$$

Формула справедлива при  $10^4 \leq Ra_x \leq 10^8$ . Структура формулы показывает, что на основной части поверхности действуют закономерности ламинарного пограничного слоя.

В диапазоне  $Ra_D = 10^8 \div 10^{12}$

$$Nu_D = 0,13 Ra_D^{1/3}, \quad (5.16)$$

т.е. зависимость, фактически совпадающая с формулой (5.14) для теплообмена при турбулентной свободной конвекции на вертикальной плоскости. Согласно (5.16)  $\alpha$  не зависит от  $D$ .

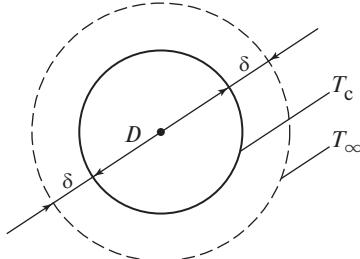
Во всех приведенных формулах [(5.8а), (5.15), (5.16)]  $\text{Nu}_D = \bar{\alpha}D/\lambda$ ; определяющая температура для выбора теплофизических свойств:  $T_{\text{опр}} = (T_c + T_\infty)/2$ .

### 5.3.2. Горизонтальные цилиндры малого диаметра

При  $\text{Ra}_D < 10^4$  не пригодны приближения пограничного слоя. Течение здесь заведомо ламинарное, что позволяет с успехом использовать численные решения. Есть в этой области параметров и результаты опытных исследований.

Результаты численных исследований аппроксимируются аналитическими формулами, структура которых основана на методе, предложенном еще Лэнгмюром (I. Langmuir, 1912 г.). Рассматривается предельный случай очень малых  $\text{Ra}_D$  (малые диаметры  $D$ ). Свободноконвективное течение очень вялое, так что перенос тепла определяется в основном теплопроводностью. Тогда рассматривается модельная задача стационарной передачи тепла от поверхности цилиндра диаметром  $D$  с температурой  $T_c$  к поверхности цилиндра диаметром  $D + 2\delta$  с температурой  $T_\infty$  (рис. 5.5);  $\delta$  — толщина пограничного слоя. Используя известное решение для передачи тепла через цилиндрическую прослойку ( $R = R_0$ ,  $T = T_c$ ;  $R = R_0 + \delta$ ,  $T = T_\infty$ ), имеем

$$q = \frac{\lambda \Delta T}{R_0 \ln \frac{R_0 + \delta}{R_0}} = \frac{2\lambda \Delta T}{D \ln \left(1 + \frac{\delta}{R_0}\right)} ; \Delta T = T_c - T_\infty.$$



**Рис. 5.5. Схема переноса тепла теплопроводностью у поверхности цилиндра малого диаметра**

Поскольку  $q/\Delta T = \alpha$ , то

$$\text{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda} = \frac{2}{\ln\left(1 + \frac{\delta}{R_0}\right)}. \quad (5.17)$$

Этот результат можно считать строгим, но он ничего не дает, так как  $\delta$  неизвестна. Лэнгмюр использовал предположение о том, что (5.17) сохраняет силу и при  $\text{Ra}_D \gg 1$ , когда  $\delta/R_0 \ll 1$ . В этом случае

$$\ln\left(1 + \frac{\delta}{R_0}\right) \approx \frac{\delta}{R_0} = \frac{2\delta}{D}, \quad \text{Nu} = \text{Nu}_D \text{ определяется по (5.15). Тогда}$$

$$0,50\text{Ra}_D^{1/4} = 2D/(2\delta); \quad \delta/R_0 = 4/\text{Ra}_D^{1/4}.$$

Из (5.17) следует

$$\text{Nu}_D = \frac{2}{\ln\left(1 + \frac{4}{\text{Ra}_D^{1/4}}\right)}. \quad (5.17a)$$

Эта формула обеспечивает правильную асимптоту для  $\text{Ra}_D \gg 1$ . При  $\text{Ra}_D = 10^8$  получается совпадение с расчетом по (5.15) с погрешностью 2 %.

В [33] приводятся результаты японских авторов (Fujii T., Fujii M., Matsunaga T. Numerical Heat Transfer. 1979. V. 2. P. 329—344), предложивших аппроксимацию своего численного решения в виде

$$\text{Nu}_D = \frac{2}{\ln\left(1 + \frac{4,065}{F(\text{Pr})\text{Ra}_D^m}\right)}. \quad (5.18)$$

В этой аппроксимации не только структура, но и коэффициенты близки к формуле Лэнгмюра (5.17a). Функция  $F(\text{Pr})$  определяется так же, как в случае свободной конвекции на вертикальной стенке [формула (5.11в)]:

$$F(\text{Pr}) = (2\text{Pr})^{1/4}(5 + 10\text{Pr}^{1/2} + 10\text{Pr})^{-1/4};$$

показатель степени  $m$

$$m = 1/4 + 1/(10 + 4\text{Ra}_D^{1/8})^*. \quad *$$

---

\* В монографии [33] в этом выражении допущена опечатка, ведущая к неверной зависимости при  $\text{Ra} \gg 1$ .

Формула (5.18) с приведенными выше значениями  $F(\text{Pr})$  и  $t$  согласно оценке ее авторов дает нижний предел опытных значений КТО при ламинарной конвекции на поверхности горизонтального цилиндра в широком интервале чисел  $\text{Ra}$ . В табл. 5.2 это показано для  $\text{Ra}_D = 10^{-8} \div 10^8$ . Помимо теоретических уравнений, в ней приводятся эмпирические степенные формулы, расчет по которым можно рассматривать как характеристику опытных значений КТО:

$$\text{Nu}_D = 0,85 \text{Ra}_D^{0,188} \text{ при } 10^2 \leq \text{Ra}_D \leq 10^4; \quad (5.19\text{a})$$

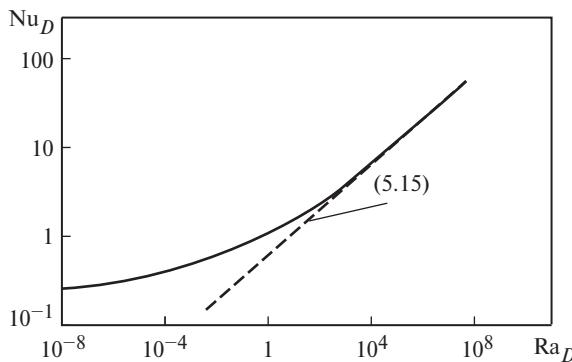
$$\text{Nu}_D = 1,02 \text{Ra}_D^{0,148} \text{ при } 10^{-2} \leq \text{Ra}_D \leq 10^2; \quad (5.19\text{б})$$

$$\text{Nu}_D = 0,675 \text{Ra}_D^{0,058} \text{ при } 10^{-10} \leq \text{Ra}_D \leq 10^{-2}. \quad (5.19\text{в})$$

В первой строке даются результаты расчета по формуле (5.15) для горизонтального цилиндра большого диаметра, применимой лишь при  $\text{Ra}_D = 10^4 \div 10^8$ . В скобках показаны значения  $\text{Nu}_D$ , которые соответствуют расчетам по (5.15) в той области, где ее применять нельзя. При  $\text{Ra}_D = 10^{-8}$  расчетный результат отличается от реальных значений почти в 100 раз. Формула Лэнгмюра (5.17а) в грубом приближении может использоваться во всем диапазоне  $\text{Ra}_D$ . Она не только качественно отражает закономерности процесса, но и неплохо воспроизводит количественные значения  $\text{Nu}_D$ . Формула Фуджии и др. (5.18) действительно пригодна во всем диапазоне чисел Рэлея, хотя

Таблица 5.2. Значения  $\text{Nu}_D$  для цилиндров при расчете по различным формулам

Формула	$\text{Ra}_D$						
	$10^8$	$10^4$	$10^2$	1	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-8}$
(5.15)	50	5,0	—	(0,5)	—	(0,05)	(0,005)
(5.17а)	51	5,94	2,45	1,24	0,77	0,54	0,334
(5.18)	Pr = 1	38,8	4,86	1,91	0,93	0,56	0,39
	Pr = 10	45,0	5,51	2,10	0,99	0,58	0,40
(5.19а)	—	4,8	2,42	—	—	—	—
(5.19б)	—	—	2,02	1,02	0,52	—	—
(5.19в)	—	—	—	—	0,52	0,40	0,232



**Рис. 5.6. Характер зависимости безразмерного коэффициента теплоотдачи на поверхности горизонтальных цилиндров от числа Рэлея**

при  $\text{Ra}_D = 10^4 \div 10^8$  следует предпочтеть более простую и проверенную формулу (5.15).

Рисунок 5.6 представляет качественные тенденции зависимости безразмерного коэффициента теплоотдачи ( $\text{Nu}_D$ ) при свободной конвекции на поверхности горизонтальных цилиндров от  $\text{Ra}_D$  в широком диапазоне его изменения. Из графика ясно, что при малых  $\text{Ra}_D$  число  $\text{Nu}_D$  очень слабо изменяется в зависимости от  $\text{Ra}_D$ : согласно табл. 5.2  $\text{Nu}_D$  уменьшается всего в 4 раза при уменьшении  $\text{Ra}_D$  на восемь порядков при  $\text{Ra}_D < 1$ . В пределе получается почти обратная зависимость  $\alpha$  от  $D$ , так как  $\text{Nu}_D \approx \text{const}$ ,  $\alpha \approx (\lambda/D) \cdot \text{const}$ . В области больших  $\text{Ra}_D$  [погранслойное решение, аппроксимируемое формулой (5.15)]  $\alpha \sim D^{-1/4}$ .

### 5.3.3. Свободная конвекция на сферических поверхностях

При анализе свободной конвекции на поверхности сфер рассматривают два асимптотических случая: при  $\text{Ra}_D \ll 1$  процесс определяется теплопроводностью, при  $\text{Ra}_D \gg 1$  — закономерностями течения в ламинарном пограничном слое.

Для сферы с постоянной температурой поверхности  $T_c$ , помещенной в неограниченную среду с температурой «на бесконечности»  $T_\infty$ ,

в случае теплопроводности существует стационарное решение. Действительно, если схему рис. 5.5 отнести к сфере, то

$$q_{R_0} = \frac{\lambda \Delta T}{R_0^2 \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

— тепловой поток по границе сферической поверхности при теплопроводности через шаровой слой толщиной  $R_2 - R_0 = \delta$ . Очевидно, что при  $R_2 \rightarrow \infty$

$$q_c = \frac{\lambda \Delta T}{R_0} \equiv \frac{2\lambda \Delta T}{D}; \quad \alpha = \frac{q_c}{\Delta T};$$

$$\text{Nu}_D \equiv \frac{\alpha D}{\lambda} = 2. \quad (5.20)$$

Это — очень важное соотношение, справедливое для малых сфер, как неподвижных, так и движущихся. Оно определяет минимально возможное число  $\text{Nu}_D$  на поверхности сферы; ясно, что  $\alpha_{\min} = 2\lambda/D$ . Этот результат объясняет высокую интенсивность процессов теплообмена (и массообмена) в случае мелкого диспергирования жидкости или твердого вещества.

Второй асимптотический предел — свободноконвективный пограничный слой,  $\text{Nu} = \text{const } \text{Ra}_D^{1/4}$ . Общее численное решение Рэйси и Холланда [Raithby, Holland (1975)] аппроксимируется формулой [33]

$$\text{Nu}_D = 2,0 + F_1(\text{Pr}) \text{Ra}_D^{1/4};$$

$$F_1(\text{Pr}) = 0,56 \left( \frac{\text{Pr}}{0,846 + \text{Pr}} \right)^{1/4}.$$

В диапазоне  $\text{Pr} = 0,7 \div \infty$   $F_1(\text{Pr}) = 0,457 \div 0,56$ . Обычно используют более простую формулу Амато—Тьена (Amato, Tien) [33]

$$\text{Nu}_D = 2,0 + 0,50 \text{Ra}_D^{1/4}, \quad (5.21)$$

справедливую при  $\text{Re}_D \leq 10^8$ .

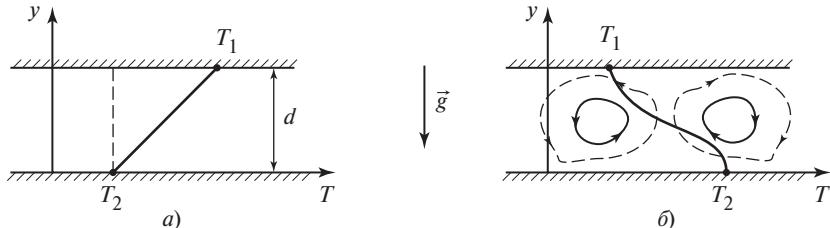
## 5.4. Свободная конвекция на горизонтальной плоскости и в замкнутых объемах

### 5.4.1. Горизонтальные поверхности и прослойки

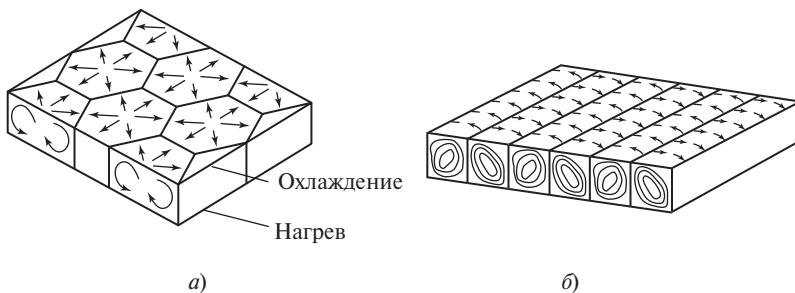
Применительно к горизонтальным поверхностям, как это отмечалось в гл. 4, возможна устойчивая и неустойчивая стратификация жидкости по плотности. При оси  $y$ , направленной вверх, устойчивой стратификации отвечает  $\partial\rho/\partial y < 0$ .

Если рассматривается передача тепла между двумя горизонтальными пластинами с различной температурой (рис. 5.7), то при устойчивой стратификации ( $T_1 > T_2$ ), конвекция не возникает:  $q = \frac{\lambda}{d}(T_1 - T_2)$  — тепло передается теплопроводностью. Это используется при опытном измерении теплопроводности жидкостей и газов (метод плоского слоя).

При  $T_2 > T_1$   $\partial\rho/\partial y > 0$  стратификация неустойчивая; если  $\text{Ra}_d = \frac{g\beta\Delta T d^3}{\nu a} \geq 1700$ , возникает конвекция (Бенара). Это название (конвекция Бенара) широко применяется к свободной конвекции в горизонтальных слоях, хотя Бенар исследовал передачу тепла от нижней обогреваемой поверхности через тонкий слой жидкости со свободной поверхностью. То явление, которое он описал (в 1901 г.) и которое носит его имя, обусловлено действием двух эффектов — неоднородностью плотности в поле массовых сил и градиентом поверхностного натяжения  $\sigma$  на свободной поверхности. Бенар наблюдал правильные гексагональные структуры (рис. 5.8, а): на свободной поверхности течение направлено от центра правильных шестиуголь-



**Рис. 5.7. Передача тепла через горизонтальную прослойку в случае устойчивой (а) и неустойчивой (б) стратификации**



**Рис. 5.8. Свободная конвекция в горизонтальной прослойке:**  
а — в слое жидкости со свободной поверхностью (конвекция Бенара); б — между двумя изотермическими пластинаами

ников к границам вертикальных граней; в объеме в центре гексагональной ячейки жидкость движется вверх, по границам граней течение опускное. Бенар получил визуализацию течения благодаря наличию в воде мелкого порошка (биологического продукта).

В зазоре между двумя изотермическими поверхностями тоже возникают геометрически правильные (когерентные) структуры: в плоском прямоугольном сосуде — цилиндрические валики, (рис. 5.8, б) в круглом сосуде (цилиндр малой высоты) — тороидальные валики.

В практическом плане интерес представляет связь теплового потока, передаваемого через прослойку, с разностью температур. Принято эту связь записывать в форме соотношения для теплопередачи через плоскую стенку с введением некоторого эффективного коэффициента теплопроводности жидкости:  $\lambda_{\text{эфф}} = k_\lambda \lambda$ , так что применительно к конфигурации рис. 5.7, б

$$q_{21} = \frac{\lambda}{d}(T_2 - T_1)k_\lambda; \quad (5.22)$$

$$k_\lambda = 0,18 \text{ Ra}_d^{1/4}. \quad (5.23)$$

Формула (5.23), строго говоря, пригодна для горизонтальных прослоек при ламинарной свободной конвекции, при  $1700 \leq \text{Ra}_d \leq 10^6$ .

Однако соотношение (5.22) для  $q$  с коэффициентом конвекции, рассчитанным по (5.23), приближенно используется для прослойки любой конфигурации и ориентации в пространстве: вертикальные плоские прослойки, цилиндрические при любой пространственной

ориентации оси цилиндра, сферические прослойки. Как указывается в [27], формула (5.23) может применяться в диапазоне  $10^3 \leq Ra_d \leq 10^{10}$ . При  $Ra_d = 10^3$  коэффициент конвекции  $k_\lambda = 1,01$ , при  $Ra_d \leq 10^3$  следует принять  $k_\lambda = 1$  («чистая» теплопроводность). При  $Ra_d > 10^{10}$  расчет теплопередачи по формулам (5.22) и (5.23) вести уже нельзя; надо рассматривать свободную конвекцию в замкнутом объеме.

Бывают ситуации, когда необходимо рассчитывать свободную конвекцию от горизонтальной поверхности, находящейся фактически в неограниченном объеме жидкости или газа: лист металла после термообработки, рабочий участок для исследования теплообмена при кипении и т.д. В этом случае  $\partial\rho/\partial y > 0$ , стратификация неустойчивая. Для этой ситуации рекомендуются формулы Мак-Адамса (McAdams):

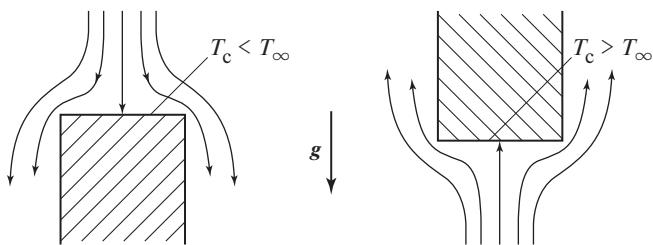
$$Nu_l = 0,54 Ra_l^{1/4} \quad \text{при } 1 \cdot 10^5 \leq Ra_l \leq 1 \cdot 10^7; \quad (5.24)$$

$$Nu_l = 0,14 Ra_l^{1/3} \quad \text{при } 10^7 \leq Ra_l \leq 3 \cdot 10^{10}. \quad (5.24a)$$

Обращает на себя внимание очень узкий диапазон чисел  $Ra_l$ , отвечающих ламинарной свободной конвекции, когда  $Nu_l \sim Ra_l^{1/4}$ : уже при  $Ra_l = 10^7$  наступает режим теплообмена, соответствующий турбулентному течению в пограничном слое. При турбулентном режиме, как и в рассмотренных ранее задачах (вертикальная плоскость, горизонтальный цилиндр) коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  не зависит от линейного размера. Определяющий линейный масштаб в числах  $Nu_l$  и  $Ra_l$  рассчитывается по формуле, аналогичной той, по которой определяют гидравлический диаметр:  $l = 4F/\Pi$ , где  $F$  — площадь;  $\Pi$  — периметр.

Горизонтальная поверхность ограниченных размеров вызывает развитие свободной конвекции даже при устойчивой стратификации, что схематически показано на рис. 5.9. В таких случаях течение сохраняется ламинарным даже при очень высоких числах  $Ra_l$ . Расчетная формула Мак-Адамса

$$Nu_l = 0,27 Ra_l^{1/4} \quad \text{при } 3 \cdot 10^5 \leq Ra_l \leq 3 \cdot 10^{10}.$$



**Рис. 5.9. Свободная конвекция на горизонтальной поверхности ограниченных размеров при устойчивой стратификации**

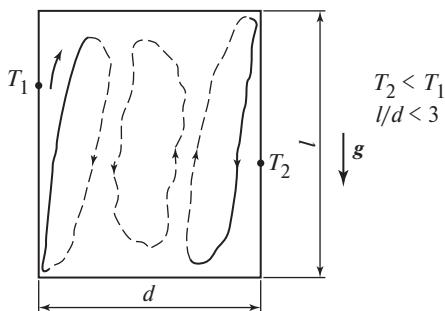
Верхняя граница обусловлена достигнутыми в опытах предельными значениями  $\text{Ra}_l$ .

#### 5.4.2. Свободная конвекция в замкнутых объемах

Задача о распределении температур в замкнутом объеме жидкости, включающем в себя тепловыделяющие, адиабатные и теплоизолирующие (охлаждаемые) твердые поверхности, встречается в технике достаточно часто. Она актуальна для охлаждения электротехнических устройств, радиоэлектронной аппаратуры, персональных компьютеров, элементов конструкций ракет на старте, хранения отработавших тепловыделяющих сборок (ТВС) и т.д. Вероятно, практических задач, в которых необходимо рассчитывать тепловые режимы в замкнутых объемах, больше, чем тех случаев, когда задачи свободной конвекции можно рассматривать в приближении пограничного слоя. При этом многообразие геометрических особенностей самого замкнутого объема и распределения в нем тепловыделяющих, адиабатных и охлаждаемых поверхностей практически исключает возможность рассмотрения каких-либо типовых конфигураций. В случае конструирования устройств с жесткими требованиями к предельным температурам отдельных элементов задача должна моделироваться либо физически, либо численно.

Вместе с тем некоторые общие рекомендации могут быть сформулированы.

1. Одна из типичных (часто рассматриваемых) конфигураций — емкость в виде прямоугольного параллелепипеда с двумя (противоположными) изотермическими и остальными адиабатическими стенками (рис. 5.10). При  $l/d < 3$  (емкость малой высоты) на изотермических поверхностях возникают два независимых свободноконвективных пограничных слоя. Расчет КТО в такой конфигурации



**Рис. 5.10. Свободноконвективное движение в замкнутом объеме**

проводят по формулам для вертикальной плоскости; принимается  $T_\infty = (T_1 + T_2)/2$ .

При  $l/d > 3$  в емкости возникает замкнутый циркуляционный контур. В этом случае общая форма уравнения подобия принимает вид

$$\text{Nu} = CRa^m (l/d)^n.$$

Универсальных формул, естественно, нет. При необходимости рассчитать конкретную конфигурацию можно рекомендовать осуществить среди опубликованных работ поиск близких по условиям к рассматриваемой задаче. Большое число таких задач анализируется в [33].

2. Для приближенных оценок можно использовать метод последовательного расчета теплоотдачи к поверхностям отдельных элементов конструкции, полагая, что каждый из них находится в неограниченном пространстве. Используя формулы § 5.2 и 5.3 для вертикальных и горизонтальных плоскостей, горизонтальных цилиндров, сфер и делая определенные предположения о средней температуре в объеме  $\bar{T}$ , можно получить в результате приближение для характерных температур твердых поверхностей. При этом, конечно, очень важно попытаться составить общий тепловой баланс, в котором обычно самое трудное — рассчитать отвод тепла от поверхностей, ограничивающих объем, в окружающую среду; мощности тепловыделяющих элементов конструкции, как правило, известны. Тепловой баланс — единственная реальная основа для оценки  $\bar{T}$  и последующих оценок температур стенок элементов объема  $T_c$ . Если оценки покажут большой запас до предельно допустимых температур, то ими можно ограничиться. В противном случае необходимо либо численно решать систему уравнений Навье—Стокса и энергии, либо ставить модельный физический эксперимент.

Ясно, что в тех случаях, когда оценки предсказывают температуры выше допустимых, необходимы конструкторские решения, включающие либо принудительное охлаждение, либо использование кипящей (испаряемой) жидкости.

3. В ряде случаев при плотной упаковке в замкнутом объеме тепловыделяющих и адиабатных элементов успешно используется модель свободной конвекции Дарси. Дарси эмпирически установил линейный закон, связывающий плотность потока массы при вынужденном движении через пористую среду с градиентом давлений:

$$\rho \bar{u} = \rho \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} \text{ или } \rho \bar{u} = \frac{k}{v} \frac{dp}{dx},$$

где  $k$  — проницаемость,  $\text{м}^2$ . (Обычно в реальных задачах  $k = 10^{-10} \div 10^{-14} \text{ м}^2$ .)

Определяя  $dp/dx$  при свободной конвекции через  $\beta \Delta T \rho g$ , можно получить характерную скорость свободной конвекции в пористой среде и соответствующие, специфические для пористых сред числа Gr и Ra. Таким путем получают уравнения подобия для конвекции Дарси, в которых, конечно, используется определенная опытная информация.

Модель течения Дарси применяется и при численном моделировании, в частности в расчетах температурного режима в хранилищах отработанного ядерного топлива.

## Контрольные вопросы к главе 5

1. Какие виды свободной конвекции встречаются в природе и используются в технике?
2. Как соотносятся толщины динамического и температурного пограничных слоев при термогравитационной свободной конвекции?
3. В чем суть и практическая значимость приближения Буссинеска для свободной конвекции?
4. Как получена система уравнений свободноконвективного пограничного слоя? Каким путем из уравнения импульса исключен (в явном виде) градиент продольного давления?
5. Какой смысл имеет максимальная скорость свободной конвекции, как выводится формула для расчета этой величины?
6. Какие оценки для толщин динамического и температурного пограничного слоя следуют из уравнений движения и энергии свободноконвективного пограничного слоя?
7. При каких условиях уравнения свободноконвективного пограничного слоя на вертикальной плоскости идентичны для подъемного и опускного течения?

8. Какими методами проводились и проводятся теоретические исследования теплообмена при свободной конвекции?
9. В чем сущность приближенного метода анализа теплообмена при свободной конвекции на вертикальной плоскости? Сравните полученное приближенным методом уравнение (5.10) и «точное» уравнение (5.11).
10. Как изменяется расчетное уравнение (5.11) в предельных случаях больших и малых чисел Прандтля? Какую точность обеспечивает степенная формула (5.12)?
11. Чем объясняются пределы применимости уравнений (5.11) и (5.12)?
12. По какому закону изменяется температурный напор при свободной конвекции в условиях  $q_c = \text{const}$ ? Как строится уравнение подобия при этих граничных условиях?
13. Какие дополнительные сложности возникают при численном моделировании турбулентной свободной конвекции? Каким уравнением подобия описывается теплообмен при турбулентной свободной конвекции на вертикальной плоскости?
14. Чем обусловлен большой разброс опытных данных о КТО при свободной конвекции на вертикальной плоскости в диапазоне чисел  $\text{Ra} = 10^8 \div 10^9$ ? Как в этой области параметров целесообразно производить расчеты?
15. По каким соотношениям рассчитывают КТО при свободной конвекции на поверхности вертикальных (и слабо наклоненных) труб?
16. Что означает термин горизонтальные цилиндры большого диаметра применительно к свободной конвекции?
17. Как рассчитывается средний КТО на поверхности горизонтальных цилиндров при  $\text{Ra} = 10^4 \div 10^8$  и  $\text{Ra} = 10^8 \div 10^{12}$ ? Какой режим течения в пограничном слое преобладает в этих двух диапазонах режимных параметров?
18. Какие предположения делаются при обосновании формулы (5.17а) для свободной конвекции на поверхности горизонтальных цилиндров малого диаметра?
19. По каким уравнениям следует рассчитывать КТО при свободной конвекции на поверхности горизонтальных цилиндров при  $\text{Ra} < 10^4$ ?
20. Как рассчитывается КТО на поверхности сфер? Чем объясняется наличие предельного минимального числа Nu?
21. Какими механизмами обеспечивается передача тепла через горизонтальную прослойку при устойчивой и неустойчивой стратификации?
22. Что является причиной гексагональных структур в слое жидкости при конвекции Бенара? Какие когерентные структуры возникают в прослойках между твердыми поверхностями?
23. Что такое коэффициент конвекции, как он рассчитывается?
24. Как возникает свободная конвекция на горизонтальных поверхностях ограниченного размера при устойчивой стратификации? Каковы существенные различия в развитии свободной конвекции на горизонтальной поверхности при устойчивой и неустойчивой стратификации?
25. Какими общими правилами следует руководствоваться при приближенном (оценочном) расчете свободной конвекции в замкнутых объемах?
26. Что такое свободная конвекция Дарси?

# Глава 6

## ТЕПЛООБМЕН ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ В КАНАЛАХ

---

### 6.1. Постановка задачи

#### 6.1.1. Содержание анализа

Канал (труба) — наиболее распространенный элемент теплообменных устройств. Массовое применение трубы имеют в теплообменниках; хотя в последние годы все более широкое применение находят пластинчатые и компактные пластинчато-ребристые теплообменники, кожухотрубчатые теплообменники различных типов пока остаются наиболее употребимыми. Канал (не обязательно круглый) обычно присутствует и в устройствах термостабилизации различных энерговыделяющих установок.

К теплообмену в трубах полностью относятся те общие положения о содержании задач конвективного теплообмена, которые изложены в п. 1.1.2. И при конструктивном, и при поверочном расчете теплообменника, как и при проектировании систем охлаждения энергонапряженных элементов промышленного или научного оборудования, обязательным этапом является расчет коэффициента теплоотдачи (КТО). В тех редких случаях, когда существует теоретическое решение задачи конвективного теплообмена, т.е. определено поле температур в жидкости, КТО рассчитывается по формуле (1.4). Обычно КТО в каналах относят к локальной разности температуры стенки и среднемассовой температуре жидкости в данном сечении  $\bar{T}_j$ . В некоторых случаях оказывается удобнее в качестве температуры отнесения использовать температуру жидкости на входе в канал.

Но во всех типах задач конвективного теплообмена в каналах всегда используются соотношения теплового баланса, подробно рассмотренные в п. 1.4.1. Напомним, что тепловой баланс для канала связывает среднемассовую энталпию в данном сечении  $\bar{h}(x)$  с плотностью теплового потока на стенке и расходом жидкости. Без уравнения баланса невозможно рассчитать ни температуру стенки охлаждающих каналов в устройствах термостабилизации, ни выходные температуры теплоносителей в теплообменниках.

### 6.1.2. Математическое описание для круглой трубы

Круглая труба используется в теплообменниках, видимо, чаще, чем другие типы каналов. Цилиндрическая система координат  $\{r, x, \varphi\}$  — это естественный выбор для труб. Чаще всего задача считается осесимметричной:  $u_\varphi = 0$ ;  $\partial u_r / \partial \varphi = \partial u_x / \partial \varphi = 0$ ;  $\partial \vartheta / \partial \varphi = 0$  ( $\vartheta = T - T_c$ ). Результаты, полученные в осесимметричном приближении, используются иногда и в тех случаях, когда фактически осевой симметрии нет. Пример — экранные трубы в топках котельных установок. Эффект одностороннего обогрева сглаживается теплопроводностью стенки трубы, выравнивающей температуру  $T_c$  по периметру.

В канальных течениях практически всегда выполняется условие несжимаемости ( $M < 0,3$ ). Довольно редко возникает необходимость учета работы сил давления и вязкой диссиляции в уравнении энергии и массовых сил в уравнениях сохранения импульса.

Переменность теплофизических свойств обычно рассматривается лишь в численных исследованиях. Инженерные соотношения для теплоотдачи обычно строятся сначала в предположении постоянных свойств, а влияние переменности теплофизических свойств учитывается введением поправок. Таким же путем (т.е. введением поправок) нередко учитывают влияние на средние характеристики теплообмена пульсаций расхода или температуры стенки. Переходные нестационарные процессы требуют, конечно, специального анализа. Но практически стационарные задачи теплообмена встречаются чаще.

С учетом сказанного рассматриваем стационарную осесимметричную задачу о теплообмене в круглой трубе жидкости с постоянными физическими свойствами. Не учитываем работу сил давления, массовые силы и вязкую диссиляцию;  $u_x = u$ ;  $u_r = v$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0; \quad (6.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right); \quad (6.2)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right); \quad (6.3)$$

$$\rho c_p u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \lambda \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \right). \quad (6.4)$$

Обычно в трубах  $l \gg d$ , т.е. сам термин «труба» подразумевает, что ее длина велика в сравнении с диаметром; следовательно, можно принимать  $x \gg r$ . В предположении, что  $u = O(\bar{u}) = O(l)$ , из (6.1) следует, что  $v = O(r) \ll 1$ . Используя этот вывод, оцениваем порядок величин в (6.2)–(6.4). В (6.2) левая часть порядка единицы. Так как течение в трубе обусловлено градиентом давлений, то, очевидно,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = O(1), \quad \frac{\partial p}{\rho} = O(1). \quad \text{Из двух «вязкостных» членов } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll$$

$\ll \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$ , что позволяет первое слагаемое в скобках уравнения (6.2) опустить. Соизмеримость инерционных, вязкостных членов и градиента давлений требует, чтобы  $\mu/\rho = v$  была величиной  $O(r^2)$ , т.е. очень малой.

В  $r$ -проекции импульса конвективные члены  $O(r)$ , вязкостные  $O(r)$  и  $O(1/r)$ . С учетом того, что  $\mu/\rho = v = O(r^2)$ , получается, что максимальные по величине вязкостные члены также порядка  $r$ , как и слагаемые левой части. Наибольший член уравнения (6.3) — это  $\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = O(1/r)$ . Так как он на два порядка превосходит остальные слагаемые, то от всего уравнения сохранения  $r$ -проекции импульса остается  $\partial p / \partial r = 0$ . Это значит, что в длинной трубе ( $l \gg d$ ) давление в каждом поперечном сечении можно считать однородным.

Уравнение энергии линейно по  $\vartheta$ , порядок членов здесь зависит от порядка величины компонент скорости и координат. Если не учитывать порядок величины объемной теплоемкости  $\rho c_p$ , то левая часть

имеет порядок единицы. В правой части  $\partial^2 \vartheta / \partial x^2 \ll \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)$ .

Однако здесь необходимо дополнительно сравнить величину слагаемого, отражающего градиент осевой теплопроводности, с осевым конвективным потоком энергии. Имеем

$$\rho c_p u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} / \left( \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right) = O \left( \frac{\bar{u} x}{a} \right);$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}; \quad \frac{\bar{u} x}{a} \equiv \frac{\bar{u} d}{a} \frac{x}{d} = \text{Pe} \frac{x}{d}.$$

При  $\text{Re} \frac{x}{d} \gg 1$  осевой теплопроводностью можно уверенно пренебречь. Это условие всегда выполняется для неметаллических капельных жидкостей и газов уже при  $x/d \approx 1$ . Для жидких металлов, когда  $\text{Pr} = 0,005 \div 0,05$ , при  $\text{Re} = 10^2$  и малых  $x/d$  ( $x/d < 5$ ) осевая теплопроводность сопоставима с осевым конвективным переносом энергии. Этот случай достаточно экзотический. Принимаем таким образом, что первым слагаемым в правой части (6.4) можно пренебречь.

Наконец заметим, что одинаковый порядок конвективных членов уравнения энергии и члена, отражающего молекулярную теплопроводность, обеспечивается при  $a \equiv \lambda/(c_p \rho) \ll 1$  ( $a = O(r^2)$ ). Это условие выполняется даже для жидких металлов.

Таким образом, математическое описание теплообмена в круглой трубе в приближении длинной трубы имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0; \quad (6.1a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right); \quad (6.2a)$$

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right). \quad (6.4a)$$

Последние слагаемые в (6.2a) и (6.4a) имеют смысл производных от  $r \mu \frac{\partial u}{\partial r} = r \tau$  и  $(-rq) = r \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r}$ . В случае турбулентного течения при использовании алгебраических моделей турбулентности

$$\tau = \mu \left( 1 + \frac{\varepsilon_\tau}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial r}, \quad q = -\lambda \left( 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \frac{\varepsilon_\tau}{v} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial r}$$

можно представить (6.2a) и (6.4a) как

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left( 1 + \frac{\varepsilon_\tau}{v} \right) r \frac{\partial u}{\partial r} \right); \quad (6.26)$$

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( 1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \frac{\varepsilon_\tau}{v} \right) r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right]. \quad (6.46)$$

Граничные условия для системы (6.1), (6.2а) и (6.4а) или (6.1), (6.2б), (6.4б) обычно имеют вид:

$$x = 0, 0 \leq r \leq r_0, u = u_0, v = v_0, \vartheta = \vartheta_0;$$

$$x > 0, r = 0, \frac{\partial u}{\partial r} = 0, v = 0, \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0;$$

$$x > 0, r = r_0, u = v = 0, \vartheta = 0 (T = T_c) \text{ или } q_c = -\lambda(\partial \vartheta / \partial r)_{r=r_0}.$$

Здесь  $r_0$  — радиус трубы.

## 6.2. Общие закономерности стабилизированного течения и теплообмена

### 6.2.1. Гидродинамическая и тепловая (температураная) стабилизация

*Гидродинамическая стабилизация.* В пределах начального гидродинамического участка, при  $x \leq l_{н.г}$   $u = u(x, r)$ , скорость  $v \neq 0$ . При  $x > l_{н.г}$  скорость  $u = u(r)$ ,  $\partial u / \partial x = 0$ . Из (6.1) с учетом того, что при  $r = r_0$  (на стенке)  $v = 0$ , получаем  $v = 0$ . Тогда в (6.2а) и (6.2б) обращается в нуль левая часть, уравнение принимает вид

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau).$$

Так как две функции двух независимых переменных равны между собой при произвольных значениях аргументов, то это возможно лишь в том случае, когда они равны const. Отсюда получаются известные соотношения гидродинамически стабилизированного течения:

$$\tau r = C_1 \frac{r^2}{2} + C_2; \quad r = 0, \quad \tau = 0, \quad C_2 = 0;$$

$$r = r_0, \quad \tau = \tau_c, \quad \tau_c = C_1 \frac{r_0}{2}, \quad C_1 = \frac{2\tau_c}{r_0}, \quad \frac{\tau}{\tau_c} = \frac{r}{r_0}.$$

Таким образом, при стабилизированном течении в круглой трубе устанавливается линейный профиль касательных напряжений

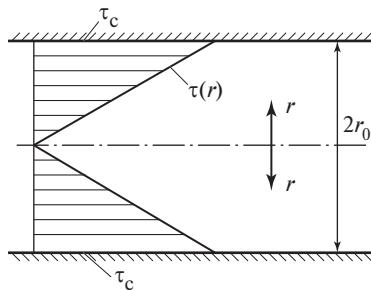


Рис. 6.1. Профиль касательного напряжения при гидродинамически стабилизированном течении в круглой трубе

(рис. 6.1). Вспоминая определение коэффициентов гидравлического сопротивления

$$\tau_c = \frac{C_f}{2} \rho \bar{u}^2 \equiv \frac{\xi}{8} \rho \bar{u}^2,$$

имеем далее

$$\frac{dp}{dx} = C_1 = \frac{4\tau_c}{d}, \quad \Delta p = 4\tau_c \frac{l}{d} = \frac{\xi l}{2d} \rho \bar{u}^2$$

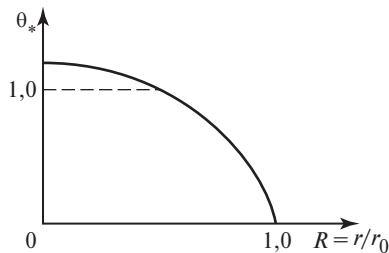
— закон Дарси—Вейсбаха.

*Температурная стабилизация.* Условия гидродинамической стабилизации можно представить в форме

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u - u_c}{\bar{u} - u_c} \right) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u}{\bar{u}} \right) = 0.$$

Эта формальная операция помогает понять известную аналогию в определениях гидродинамической и температурной стабилизации. Абсолютное значение скорости влияет на гидродинамический процесс, поскольку компоненты скорости непосредственно входят в уравнения сохранения импульса и энергии. На перенос энергии абсолютное значение температуры непосредственно не влияет, температура в уравнениях сохранения присутствует только под знаком производной. Температурная стабилизация связана с неизменностью по длине канала безразмерного профиля температуры:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T - T_c}{\bar{T} - T_c} \right) \equiv \frac{\partial \theta_*}{\partial x} = 0. \quad (6.5)$$



**Рис. 6.2. Стабилизированный профиль температуры в круглой трубе**

Это означает, что за пределами начального термического участка при  $x > l_{\text{н.т}}$   $\theta_* = \theta_*(R)$ , причем этот безразмерный профиль температуры остается неизменным по длине (здесь  $R = r/r_0$ ).

Поскольку КТО в трубе

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_c - \bar{T}} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \frac{\lambda}{r_0} \left( \frac{\partial \theta_*}{\partial R} \right)_{R=1},$$

то при  $x > l_{\text{н.т}}$   $(\partial \theta_*/\partial R)_{R=1} = \text{const}$ , следовательно,  $\alpha = \alpha_\infty = \text{const}$ .

Ясно, что на оси трубы при  $R = 0$ :  $|T - T_c| > |\bar{T} - T_c|$ , т.е.  $\theta_*(0) > 1$  (рис. 6.2). [Аналогично, скорость на оси трубы выше, чем среднемас-сная:  $u(0) > \bar{u}$ ,  $u(0)/\bar{u} > 1$ .]

Безразмерный коэффициент теплоотдачи определяется как

$$\text{Nu} \equiv \frac{\alpha d}{\lambda} = 2 \left( \frac{\partial \theta_*}{\partial R} \right)_{R=1}.$$

При  $x > l_{\text{н.т}}$

$$\text{Nu} = \text{Nu}_\infty = \text{const}.$$

### 6.2.2. Влияние вида граничных условий на стабилизированный теплообмен

Условие (6.5) с учетом того, что  $|\bar{T} - T_c| \neq 0$ , ведет к соотношению

$$\frac{\partial T}{\partial x}(\bar{T} - T_c) - \frac{dT_c}{dx}(\bar{T} - T_c) - \frac{d\bar{T}}{dx}(T - T_c) + \frac{dT_c}{dx}(T - T_c) = 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT_c}{dx} + \frac{d\bar{T}}{dx} \frac{T - T_c}{\bar{T} - T_c} - \frac{dT_c}{dx} \frac{T - T_c}{\bar{T} - T_c}. \quad (6.5a)$$

*Границные условия первого рода,  $T_c = \text{const}$ :*

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{d\bar{T}}{dx} \frac{T - T_c}{\bar{T} - T_c}. \quad (6.5b)$$

При стабилизированном теплообмене  $\alpha = \alpha_\infty = \text{const}$ ,  $q_c \equiv \alpha_\infty (T_c - \bar{T})$ .

Соотношение теплового баланса (1.25) при  $c_p = \text{const}$

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{4q_c}{\rho \bar{u} c_p d} \equiv -\frac{4\alpha_\infty (\bar{T} - T_c)}{\rho c_p \bar{u} d}$$

позволяет записать:

$$\frac{d(\bar{T} - T_c)}{\bar{T} - T_c} = -\frac{4\alpha_\infty}{\rho c_p \bar{u} d} dx.$$

Принимая за  $x = 0$ , например,  $x = x_0 = l_{\text{н.т}}$  (при этом  $\bar{T} = \bar{T}_0$ ), находим

$$\bar{T} - T_c = (\bar{T}_0 - T_c) \exp\left(-\frac{4\alpha_\infty(x - x_0)}{\rho c_p \bar{u} d}\right). \quad (6.6)$$

При  $x \rightarrow \infty$   $\bar{T} - T_c \rightarrow 0$ ,  $q_c \rightarrow 0$ , но  $\alpha_\infty = q_c / (T_c - \bar{T}) = \text{const}$ .

Согласно (6.5б) скорость изменения вдоль канала частной производной  $\partial T / \partial x$  пропорциональна  $\theta_* = (T - T_c) / (\bar{T} - T_c)$ . На оси  $\theta_* > 1$ , т.е. скорость приближения локальной температуры к температуре стенки здесь выше, чем скорость изменения среднемассовой температуры. У стенки, напротив, скорость изменения  $\partial T / \partial x < d\bar{T} / dx$ . Но при этом сами значения температуры жидкости у стенки ближе к  $T_c$ , чем на оси трубы (рис. 6.3, а).

Так как при  $T_c = \text{const}$  среднемассовая температура жидкости изменяется по экспоненциальному закону, при расчете средней (на некотором участке длины) теплоотдачи нельзя пользоваться среднегарифметическим значением  $\Delta T$ .

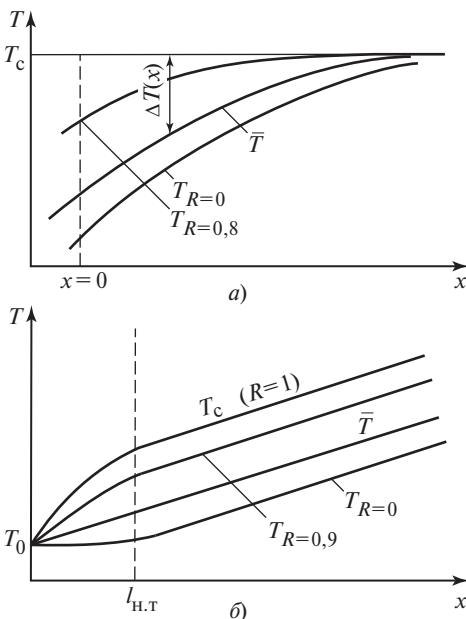


Рис. 6.3. Изменение температуры жидкости по длине трубы в условиях  $T_c = \text{const}$  (а) и  $q_c = \text{const}$  (б)

Среднелогарифмический температурный напор, определяющий при  $\alpha_\infty = \text{const}$  количество тепла, переданное жидкости, записывается как

$$\overline{\Delta T_{\log}} = \overline{T_c - \bar{T}} = \frac{\Delta T_{\text{вх}} - \Delta T_{\text{вых}}}{\ln \frac{\Delta T_{\text{вх}}}{\Delta T_{\text{вых}}}},$$

где  $\Delta T_{\text{вх}} = T_c - \bar{T}_0$ ,  $\Delta T_{\text{вых}} = T_c - \bar{T}_{\text{вых}}$ .

Ясно, что при  $T_c = \text{const}$   $\Delta T_{\text{вх}} - \Delta T_{\text{вых}} = \bar{T}_{\text{вых}} - \bar{T}_{\text{вх}}$ .

*Границные условия второго рода*  $q_c = \text{const}$ . В этом случае при  $\alpha = \alpha_\infty = \text{const}$  получается  $T_c - \bar{T} = \text{const}$ ,  $\frac{dT_c}{dx} = \frac{d\bar{T}}{dx}$ .

Из (6.5а) следует, что

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{dT_c}{dx} \quad \text{при } x > l_{\text{н.т.}} \quad (6.7)$$

При  $q_c = \text{const}$

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{4q_c}{\rho \bar{u} c_p d}.$$

При  $x > l_{\text{н.т}}$  все кривые изменения температуры по длине эквидистантны (рис. 6.3, б).

*Теплопередача через стенку.* В задачах теплопроводности рассматривают три типа граничных условий. Для конвекции при строгом подходе речь может идти только о задании температуры на поверхности теплообмена (граничные условия первого рода) или теплового потока (граничные условия второго рода). Если реализуется теплопередача через стенку, т.е. на поверхности, отделенной стенкой толщиной  $\delta$  от рассматриваемой поверхности теплообмена, также осуществляется конвективный теплообмен, то это — типичный пример сопряженной задачи. Строгое решение в этом случае включает в себя решение дифференциальных уравнений сохранения для внутренней жидкости, для внешней жидкости и уравнения теплопроводности для твердой стенки. На границах этих областей задаются условия сопряжения (рис. 6.4):

$$r = r_0; \quad T_1 = T_{c1}; \quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = -\lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial r};$$

$$r = r_0 + \delta; \quad T_2 = T_{c2}; \quad -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = -\lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial r}$$

(здесь индексы 1, 2, «с» относятся соответственно к внутренней жидкости, к наружной жидкости и к стенке).

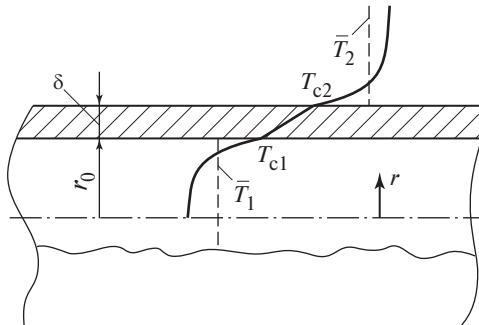


Рис. 6.4. Схема теплопередачи через стенку трубы

Кроме того, для внутренней жидкости используется условие симметрии на оси:  $r = 0, \partial T_1 / \partial r = 0$ ; для внешней жидкости также может быть сформулировано то или иное дополнительное граничное условие в зависимости от конкретной геометрии. Третьим граничным условием для обеих жидкостей и для стенки являются условия при  $x = 0$ .

Итогом решения такой задачи должны стать поля температуры в обеих жидкостях и в стенке. В подавляющем большинстве практических ситуаций такой сложный анализ не используется. Для инженерных приложений обычно достаточно рассчитать  $\alpha_1, \alpha_2$ , коэффициент теплопередачи  $k$  и затем найти  $q_c = k \overline{\Delta T}$ , где  $\overline{\Delta T} = \overline{\Delta T_{\log}}$ .

Для расчета  $\overline{\Delta T_{\log}}$  рассматривают тепловой баланс для элемента поверхности теплообмена (разделительную стенку)  $dF$ . Этот анализ ведет к зависимости от  $x$  локального  $\Delta T = \bar{T}_1 - \bar{T}_2$ , где  $\bar{T}_1, \bar{T}_2$  — среднемассовые температуры жидкостей при данном  $x$ . Конкретный вид этой зависимости — функция направления течения теплоносителей и соотношения так называемых водяных эквивалентов. В расчетах теплообменников рассматриваются три базовые схемы течения: прямоток, противоток, перекрестный ток. При этом исходную зависимость  $\Delta T(x)$  получают для прямотока и противотока, а для перекрестного тока используют поправки к этим двум зависимостям.

Определение водяных эквивалентов следует из общего теплового баланса:

$$G_1 c_{p1} (T'_1 - T''_1) = G_2 c_{p2} (T''_2 - T'_2).$$

Здесь  $G_1 c_{p1} = W_1, G_2 c_{p2} = W_2$  — водяные эквиваленты первого и второго теплоносителей,  $\text{Вт}/\text{К}$ . Сам термин — следствие старой (технической) системы единиц, в которой  $c_p = 1 \text{ ккал}/(\text{кг} \cdot \text{град})$  для воды, т.е. для воды  $G c_p = W = G$ .

На рис. 6.5 показан характер изменения среднемассовой температуры теплоносителей по длине прямоточного (рис. 6.5, *а*) и противоточного (рис. 6.5, *б*) теплообменника. Длину  $x$  отсчитываем от входа «горячего» (охлаждаемого) теплоносителя;  $x = l$  соответствует выходу этого теплоносителя из теплообменника. Нижние индексы 1 и 2 при температурах соответствуют «горячему» и «холодному» теплоносителю, верхние — входу и выходу теплоносителя.

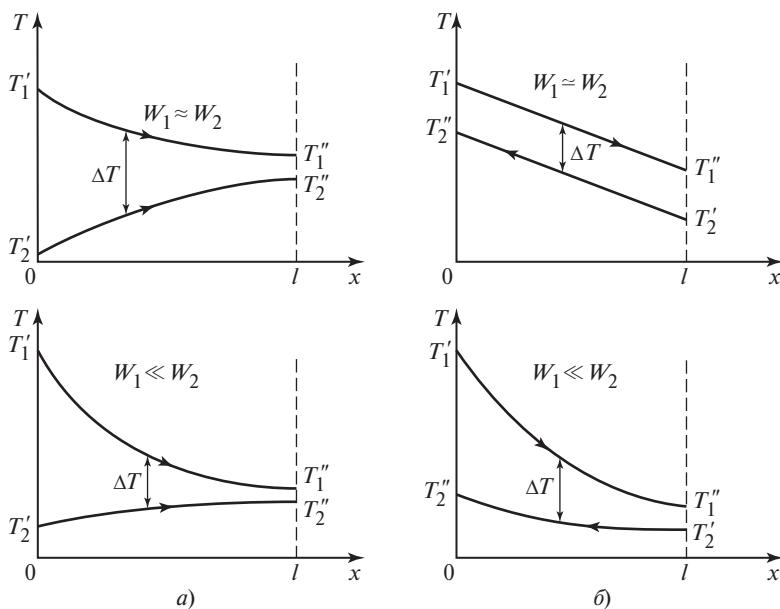


Рис. 6.5. Изменение средней температуры теплоносителей по длине теплообменника при прямотоке (а) и противотоке (б)

Обозначая полное изменение среднемассовой температуры теплоносителя в теплообменнике как  $\delta T_1 = T_1' - T_1''$  и  $\delta T_2 = T_2'' - T_2'$ , имеем

$$W_1 \delta T_1 = W_2 \delta T_2.$$

Ясно, что при  $W_2 \gg W_1$  при обеих схемах для теплоносителя с индексом 1 условия теплообмена близки к условию  $T_c = \text{const}$ , так как  $\delta T_2 \ll \delta T_1$ . При  $W_1 = W_2$  в случае противотока строго выполняется условие  $q_c = \text{const}$  по всей длине. В общем случае, следовательно, при теплопередаче через стенку при расчете КТО в трубе граничные условия будут промежуточными. При турбулентном течении жидкости в трубе влияние вида граничного условия на теплообмен обнаруживается лишь для  $\text{Pr} \ll 1$  (жидкие металлы). Для неметаллических капельных жидкостей и газов коэффициент теплоотдачи от вида граничных условий не зависит.

При ламинарном течении жидкости в трубе КТО при  $q_c = \text{const}$  примерно на 20 % выше, чем при  $T_c = \text{const}$ . Ясно, что, проанализи-

ровав соотношение  $W_1$  и  $W_2$ , всегда можно при расчете теплообмена выбрать расчетную формулу, наилучшим образом соответствующую конкретной задаче.

### 6.3. Обобщенные (интегральные) количественные характеристики стабилизированного теплообмена в круглой трубе при $q_c = \text{const}$

Условие  $q_c = \text{const}$  с хорошей точностью реализуется во многих теплообменных устройствах (активная зона ядерного реактора, топка котла, охлаждение различных энерговыделяющих объектов, противоточные теплообменники с примерным равенством водяных эквивалентов). Это условие чаще всего используется в лабораторных исследованиях теплообмена.

При стабилизированном течении выполняются следующие условия:  $\partial u / \partial x = 0$ ,  $v = 0$ ,  $\tau = \frac{\tau_c}{r_0} r$ , при  $q_c = \text{const}$   $\partial T / \partial x = d\bar{T} / dx = dT_c / dx$ . В нижеследующем анализе будет использована модель турбулентности с включением в уравнения «турбулентной вязкости» и турбулентного числа Прандтля ( $\varepsilon_\tau$ ,  $Pr_T$ ).

#### 6.3.1. Профили скорости, теплового потока, температуры

*Профиль скорости.* Используя алгебраическую модель турбулентности с турбулентной вязкостью и линейный профиль  $\tau$ , имеем

$$\tau = \frac{\tau_c}{r_0} r = -\mu \left( 1 + \frac{\varepsilon_\tau}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Знак «минус» введен, чтобы получать «естественные» результаты при интегрировании с учетом того, что поток импульса противоположен градиенту скорости. В трубе  $\partial u / \partial r < 0$ , при этой записи  $\tau > 0$ .

Интегрируя по  $r$ , получаем ( $\mu = \text{const}$ )

$$u = C_1 - \frac{\tau_c}{r_0 \mu} \int_0^r \frac{r dr}{1 + \frac{\varepsilon_\tau}{v}}.$$

При  $r = r_0$  скорость  $u = 0$ , так что

$$C_1 = \frac{\tau_c}{r_0 \mu} \int_0^{r_0} \frac{r \, dr}{1 + \frac{\varepsilon_\tau}{\nu}}.$$

$$\text{Так как } \int_0^{r_0} \frac{r}{r} = \int_0^{r_0} + \int_{r_0}^r, \text{ то } u = \frac{\tau_c}{r_0 \mu} \int_{r_0}^r \frac{r \, dr}{1 + \frac{\varepsilon_\tau}{\nu}}.$$

Определение среднемассовой скорости позволяет получить безразмерный профиль скорости, не зависящий от  $\tau_c$ :

$$\bar{u} = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} u 2\pi r \, dr = \frac{2}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} ur \, dr = 2 \int_0^1 u R \, dR, \quad R = r/r_0;$$

$$\bar{u} = 2 \frac{\tau_c}{r_0 \mu} \int_0^1 \left( \int_{r_0}^r \frac{r \, dr}{1 + \frac{\varepsilon_\tau}{\nu}} \right) R \, dR.$$

Переходя к безразмерному радиусу в выражении для  $u$ , находим окончательно:

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{\int_R^1 \frac{R \, dR}{1 + \varepsilon_\tau / \nu}}{2 \int_0^1 \left( \int_R^1 \frac{R \, dR}{1 + \varepsilon_\tau / \nu} \right) R \, dR}. \quad (6.8)$$

*Профиль теплового потока.* Из уравнения (6.4а) или (6.4б) и определения теплового потока при турбулентном течении согласно алгебраической модели

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \left( 1 + \frac{\Pr}{\Pr_T} \frac{\varepsilon_\tau}{\nu} \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rq).$$

$$\text{Из теплового баланса } \frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{4q_c}{\rho c_p \bar{u} d}.$$

Тогда

$$\frac{2q_c}{r_0} \frac{u}{\bar{u}} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rq);$$

$$-rq = \frac{2q_c}{r_0} \int_0^r \frac{u}{\bar{u}} r \, dr + C_2; C_2 = 0 \text{ из условия } r = 0, q = 0.$$

В итоге

$$\frac{q}{q_c} = -\frac{2}{r_0} \int_0^r \frac{u}{\bar{u}} r \, dr \equiv -\frac{2}{R} \int_0^R \frac{u}{\bar{u}} R \, dR. \quad (6.9)$$

*Поле температуры.* Используя выражение для теплового потока при турбулентном течении и последний результат (6.9), находим

$$q = -\lambda \left( 1 + \frac{\Pr_{\tau} \varepsilon_{\tau}}{\Pr_T v} \right) \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{2q_c}{R} \int_0^R \frac{u}{\bar{u}} R \, dR.$$

Интегрируя по  $r$ , получаем

$$T = C_0 + \frac{2q_c}{\lambda} \int_0^r \frac{\int_0^R \frac{u}{\bar{u}} R \, dR}{\left( 1 + \frac{\Pr_{\tau} \varepsilon_{\tau}}{\Pr_T v} \right) R} \, dr = C_0 + \frac{2q_c r_0}{\lambda} \int_0^R \frac{\int_0^R \frac{u}{\bar{u}} R \, dR}{\left( 1 + \frac{\Pr_{\tau} \varepsilon_{\tau}}{\Pr_T v} \right) R} \, dR.$$

Константа находится из условия  $T = T_c$  при  $r = r_0$  ( $R = 1$ ). Вообще при  $q_c = \text{const}$  температура  $T_c$  заранее не известна. Но при  $x > l_{\text{н.т}}$  плотность теплового потока  $q_c = \alpha(T_c - \bar{T})$ ,  $\alpha = \alpha_{\infty} = \text{const}$ ,  $dT_c/dx = d\bar{T}/dx$ , что позволяет считать  $T_c$  заданной. Для  $R = 1$

$$T_c = C_0 + \frac{2q_c r_0}{\lambda} \int_0^1 \frac{\int_0^R \frac{u}{\bar{u}} R \, dR}{\left( 1 + \frac{\Pr_{\tau} \varepsilon_{\tau}}{\Pr_T v} \right) R} \, dR.$$

Вычитая из этого выражения предыдущее и имея в виду, что

$$\int_0^R = \int_0^0 + \int_0^R, \text{ находим}$$

$$T_c - T = \frac{q_c d}{\lambda} \int_R^1 \frac{\int_0^R \frac{u}{\bar{u}} R \, dR}{\left(1 + \frac{\Pr \varepsilon_\tau}{\Pr_T v}\right) R} \, dR. \quad (6.10)$$

### 6.3.2. Общее выражение для коэффициента теплоотдачи (интеграл Лайона)

Имея (6.10), для нахождения коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  достаточно осреднить это выражение по сечению. Естественно,  $T_c$  от  $R$  не зависит:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} T \frac{u}{\bar{u}} 2\pi r \, dr = 2 \int_0^1 T \frac{u}{\bar{u}} R \, dR; \\ T_c - \bar{T} &= \frac{2q_c d}{\lambda} \int_0^1 \left[ \int_R^1 \frac{\int_0^R \frac{u}{\bar{u}} R \, dR}{\left(1 + \frac{\Pr \varepsilon_\tau}{\Pr_T v}\right) R} \, dR \right] \frac{u}{\bar{u}} R \, dR. \end{aligned}$$

$$\text{Ясно, что } \frac{(T_c - \bar{T})\lambda}{q_c d} \equiv \frac{\lambda}{\alpha_\infty d} = \frac{1}{\text{Nu}_\infty}.$$

Интеграл в правой части вычисляется по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f dg &= fg \Big|_0^1 - \int_0^1 g \, df; \\ f &= \int_0^1 \frac{\int_0^R \frac{u}{\bar{u}} R \, dR}{\left(1 + \frac{\Pr \varepsilon_\tau}{\Pr_T v}\right) R} \, dR; \quad df = - \frac{\int_0^R \frac{u}{\bar{u}} R \, dR}{\left(1 + \frac{\Pr \varepsilon_\tau}{\Pr_T v}\right) R} \, dR; \end{aligned}$$

$$dg = \frac{u}{\bar{u}} R dR; \quad g = \int_0^R \frac{u}{\bar{u}} R dR$$

С учетом выражений для  $f$  и  $g$  ясно, что  $\left. fg \right|_0^1 = 0$ , так как при  $R = 0$  значение  $g = 0$ , а при  $R = 1 f = 0$ . Тогда

$$\frac{1}{Nu_\infty} = 2 \int_0^1 \frac{\left( \int_0^R \frac{u}{\bar{u}} R dR \right)^2}{\left( 1 + \frac{Pr}{Pr_T} \frac{\varepsilon_\tau}{v} \right) R} dR. \quad (6.11)$$

Этот результат известен как интеграл Лайона (Lyon, 1950 г.), определяющий безразмерный коэффициент теплоотдачи при стабилизированном теплообмене при  $q_c = \text{const}$ ; получен для турбулентного течения. Для ламинарного течения выражения для  $Nu_\infty$  были получены ранее. Но, имея набор соотношений этого параграфа, нет смысла воспроизводить классические решения для ламинарного течения в трубе. Все необходимые результаты получаются из (6.8)—(6.11), если в них положить  $\varepsilon_\tau/v = 0$ .

## 6.4. Стабилизированный теплообмен при ламинарном течении в каналах

### 6.4.1. Круглые трубы

Из (6.8) при  $\varepsilon_\tau = 0$ :

$$\frac{u}{\bar{u}} = \int_R^1 R dR / \left( 2 \int_0^1 \left( \int_R^1 R dR \right) R dR \right) = 2(1 - R^2).$$

Классический профиль скорости Пуазейля получается естественно. Из (6.9)

$$\frac{q}{q_c} = -\frac{2}{R} \int_R^1 (1 - R^2) R dR = -2R + R^3.$$

(Знак «минус» отражает, что тепловой поток направлен от стенки к центру.)

Для скалярного значения  $q$

$$|q/q_c| = 2R - R^3. \quad (6.12)$$

Зависимость (6.12), очевидно, имеет экстремум (максимум):

$$\partial q / \partial r = 0 \text{ дает: } 2 - 3R_*^2 = 0; R_* = \sqrt{2/3} \approx 0,82.$$

Этому значению отвечает  $q_*/q_c \approx 1,1$ .

Вблизи стенки плотность теплового потока  $q$  возрастает, достигая максимума при  $r = 0,82r_0$ ; далее  $q$  монотонно уменьшается до нуля при  $r = 0$ . Увеличение  $q$  в сравнении с  $q_c$  объясняется уменьшением площади поверхности с уменьшением  $r$ . В случае теплопроводности

$\frac{q}{q_c} = \frac{r_0}{r} = \frac{1}{R}$  ( $Q = q2\pi rl = \text{idem}$ ). Для стационарной теплопроводности при  $r = 0$  необходимо иметь  $q_0 = \infty$ . В случае конвекции тепло, передаваемое от стенки теплопроводностью, уносится в осевом направлении конвективным потоком массы. При ламинарном течении вблизи стенки эффект уменьшения площади оказывается сильнее, чем влияние конвективного потока энергии.

Профиль температуры находится из (6.10):

$$T_c - T = \frac{2q_c r_0}{\lambda} \int_{R}^{1} \frac{\int_0^1 2(1-R^2)R \, dR}{R} \, dR;$$

$$\theta_1 = \frac{(T_c - T)\lambda}{q_c d} = \int_{R}^{1} \left( R - \frac{R^3}{2} \right) \, dR = \frac{3}{8} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^4}{8}. \quad (6.13)$$

При ламинарном течении в круглой трубе в условиях стабилизированного теплообмена устанавливается не меняющийся по длине универсальный профиль температуры (6.13); он не зависит от конкретных значений  $Re$  (при  $Re < 2300$ ),  $q_c$ ,  $\lambda$ ,  $d$  (рис. 6.6).

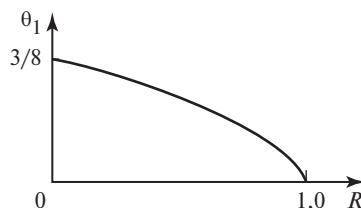


Рис. 6.6. Профиль безразмерной температуры при стабилизированном теплообмене при ламинарном течении в круглой трубе при  $q_c = \text{const}$

Наконец, из интеграла Лайона (6.11) имеем:

$$\frac{1}{\text{Nu}_{\infty}} = 2 \int_0^1 \frac{\left( \int_0^R \frac{u}{\bar{u}} R \, dR \right)^2}{R} \, dR = 2 \int_0^1 \frac{\left( R^2 - \frac{R^4}{2} \right)^2}{R} \, dR = 2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{32} \right) = \frac{11}{48}.$$

Итак, результат, который в гл. 1 дан без вывода, получил обоснование:

$$\text{Nu}_{\infty}^{(q)} = \frac{48}{11} \approx 4,364. \quad (6.14)$$

Для стабилизированного теплообменника при  $T_c = \text{const}$  число  $\text{Nu}_{\infty}^{(T)} = 3,66$ . Это будет получено из решения задачи Гретца—Нуссельста.

#### 6.4.2. Призматические каналы

Каналы квадратного, прямоугольного или треугольного сечения используются в пластинчатых компактных теплообменниках, хотя в них, как правило, режим течения турбулентный. Все более широкое применение так называемых мини- и микроканалов вызывает рост интереса к ламинарному течению и теплообмену в каналах некруглого сечения. Типичная конфигурация, используемая для охлаждения электронных устройств, — система параллельных прямоугольных (или трапециевидных) каналов, т.е. канавок, закрытых сверху пластиной, типичный размер сечения  $200 \times 200$  мкм (или чуть больший, до  $250 \times 250$  мкм).

Такая геометрическая форма усложняет в общем случае математическое описание в сравнении с течением в круглой трубе. Даже в случае установившегося течения:  $u_x = u_x(y, z)$ ,  $u_y = u_z = 0$ , в уравнении сохранения импульса остаются в правой части вторые производные по  $y$  и  $z$ :

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right),$$

а в уравнении энергии в левой части (как и в случае круглого канала) сохраняется член с производной  $\partial T / \partial x$ , а в правой — вторые производные по  $y$  и  $z$ :

$$\rho c_p u_x \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Теоретическое решение такой задачи возможно получить только численными методами. Выявлено заметное влияние застойных угловых зон. При  $d\rho/dx = idem$  в канале квадратного сечения расход составляет 0,88 расхода в круглом канале  $G_0$ , а в треугольном канале —  $0,73G_0$ .

Условие  $T_c = \text{const}$  в призматических каналах в опытах не может быть реализовано (из-за перетечек тепла по периметру). Теоретические расчеты дают нулевой коэффициент теплоотдачи ( $\alpha = 0$ ) в углах канала квадратного сечения (при  $y = b/2$ ); в середине грани  $\alpha = 1,5\bar{\alpha}$  (рис. 6.7, а).

Условие  $q_c = \text{const}$  может исследоваться и расчетно, и экспериментально. Здесь также интенсивность теплообмена максимальна в центре граней квадратного канала и минимальна в углах. При этом возникают объективные трудности в выборе определения локального КТО  $\alpha(y)$ . «Естественное» определение

$$\alpha(y) = \frac{q_c}{T_c(y) - \bar{T}_j}$$

может приводить к абсурду. При движении от угла сечения к центру  $\alpha(y)$  растет и формально может пройти через бесконечность при  $T_c(y) = \bar{T}_j$ , а затем изменить знак (рис. 6.7, б). При этом условие  $q_c = \text{const}$  (например, электрообогрев) гарантирует, что в любой точке периметра один и тот же тепловой поток передается жидкости. (Фактически из-за конечной теплопроводности стенки некоторая неравномерность теплового потока по периметру возникать может; так как

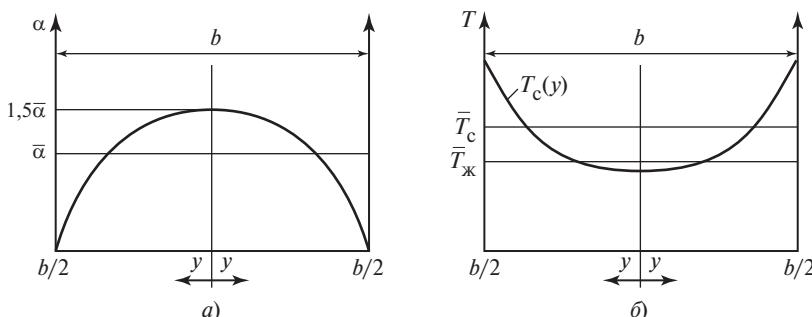


Рис. 6.7. Распределение локального коэффициента теплоотдачи в канале квадратного сечения со стороной  $b$  при  $T_c = \text{const}$  (а) и расчетные профили температуры при  $q_c = \text{const}$  (б)

в углах  $T_c > \bar{T}_c$ , то возникает тепловой поток в стенке из углов к центру; в итоге можно ожидать, что  $q_c(y)$  в центре несколько больше, чем в углах).

В рассматриваемой ситуации локальный коэффициент теплоотдачи можно отнести ко входной температуре жидкости, или, при наличии теоретического решения, просто обходиться без использования КТО. В целом приведенные соображения могут быть важны при нагревании термоочувствительной (термолабильной) жидкости, так как в углах каналов из-за высокой локальной температуры может наступить ее термическое разложение.

Если опасности химического разложения не существует, достаточно знать средние значения КТО, которые рассчитываются по обычному соотношению

$$\bar{\alpha} = \frac{q_c}{T_c - \bar{T}}.$$

Для среднего КТО при стабилизированном теплообмене в каналах различного поперечного сечения результаты расчетов отражены в табл. 6.1. Видно, что с увеличением влияния застойных зон значение  $\alpha_\infty$  заметно снижается: для квадратного канала на  $\sim 20\%$ , а для треугольного на  $\sim 33\%$  в сравнении с круглой трубой. При этом при

Таблица 6.1. Средние значения безразмерного КТО при ламинарном стабилизированном течении в круглых и призматических каналах

Форма сечения	$b/h$	$Nu_\infty^{(q)}$	$Nu_\infty^{(T)}$
	—	4,364	3,657
	1	3,63	2,98
	2	4,11	3,39
	4	5,35	4,44
	8	6,60	5,35
	$\infty$	8,235	7,54
	—	3,0	2,35

$T_c = \text{const}$  снижение средней теплоотдачи несколько сильнее, чем при  $q_c = \text{const}$ .

В каналах прямоугольного сечения результат зависит от «спектрального соотношения»  $b/h$ . С его ростом роль угловых зон снижается, так что  $\alpha_\infty$  становится даже больше, чем в круглом канале. Следует отметить, что для предельного случая плоского канала  $b \gg h$  (формально  $b/h \rightarrow \infty$ ) число  $Nu_\infty$  почти вдвое превосходит  $Nu_\infty$  для круглого канала. При этом число Нуссельта рассчитывается по гидравлическому диаметру:  $Nu = \alpha d_\Gamma / \lambda$ ,  $d_\Gamma = \frac{4f}{\Pi} = \frac{4bh}{2(b+h)} = \frac{2bh}{b+h}$ ; при  $b/h \rightarrow \infty$   $d_\Gamma = 2h$ .

В ряде изданий для плоского канала принимают  $d_\Gamma = h$ . В этом случае, естественно,  $Nu$  вдвое ниже, чем табличное значение. (Такое определение  $d_\Gamma$  нелогично, так как не обеспечивает непрерывный характер изменения  $Nu_\infty$  при увеличении  $b/h$ .)

## 6.5. Стабилизированный теплообмен при турбулентном течении в круглой трубе

### 6.5.1. Качественный анализ профилей скорости, теплового потока и температуры

Количественно точные профили на основе соотношений § 6.3 могут быть построены при использовании определенных функций для  $\varepsilon_\tau/v$  и  $Pr_T$ ; при этом каждому числу  $Re$  будет соответствовать свой индивидуальный профиль скорости, теплового потока и температуры. Качественные тенденции могут быть проанализированы без использования конкретной информации о  $\varepsilon_\tau/v$  и  $Pr_T$ .

*Профиль скорости.* Все возможные профили осредненной скорости турбулентного течения в круглой трубе находятся в области, ограниченной профилем скорости для ламинарного течения и гипотетическим профилем, относящимся к условию  $Re = \infty$ . Для ламинарного стабилизированного течения ( $Re_d \leq 2300$ )

$$u/\bar{u} = 2(1 - R^2); \text{ на оси } (R = 0) u_0 = 2\bar{u}.$$

Графически удобно сравнивать безразмерные профили  $u/u_0$ , так как все они имеют одинаковое начало  $u/u_0 = 0$  при  $R = 1$  ( $y/r_0 = 0$ ) и одинаковый конец  $u/u_0 = 1$  при  $R = 0$  ( $y/r_0 = 1$ ).

Итак, при  $Re \leq 2300$

$$u/u_0 = 1 - R^2. \quad (6.15)$$

При  $\mu \rightarrow 0$ ,  $Re \rightarrow \infty$   $u/u_0 = 1$  — однородная скорость во всем сечении. Все возможные профили стабилизированной скорости располагаются между параболой (6.15) и верхней рамкой (рис. 6.8).

При турбулентном течении из-за интенсивного переноса импульса в радиальном направлении в большей части сечения канала устанавливается почти однородная скорость; ее основное изменение происходит непосредственно у стенки, главным образом, в пределах вязкого подслоя  $\delta_\mu$ . Говорят, что профиль скорости при турбулентном течении становится заполненным.

Толщина вязкого подслоя по порядку величины — это  $\delta_\mu \approx 10(v/v_*)$ , динамическая скорость (friction velocity)  $v_* = \sqrt{\tau_c/\rho}$ . Так как в трубе  $\tau_c = (\xi/8)\rho\bar{u}^2$ , то  $v_* = \bar{u}\sqrt{\xi/8}$ . Ясно, что относительная толщина вязкого подслоя быстро убывает с ростом числа Re. Действительно,

$$\frac{\delta_\mu}{d} \approx 10 \frac{v}{\bar{u}d\sqrt{\xi/8}} = \frac{10}{Re\sqrt{\xi/8}}.$$

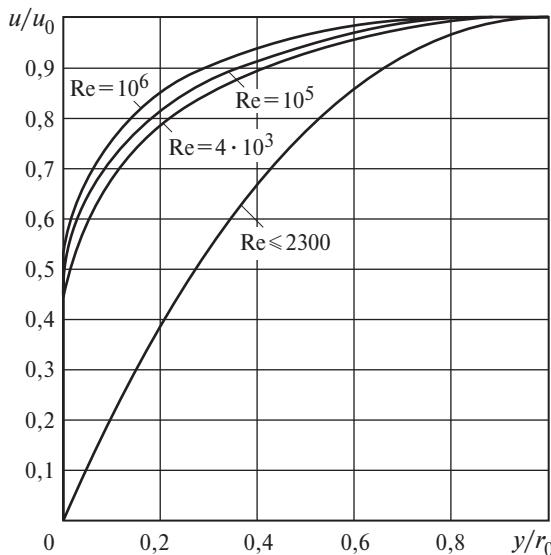


Рис. 6.8. Профили безразмерной скорости в круглой трубе

При турбулентном течении  $\xi$  — слабая функция  $\text{Re}$  [ $\xi = 0,184 \cdot \text{Re}^{-0,2}$  при  $\text{Re} = O(10^5)$ ; для  $\text{Re} = 10^5$   $\delta_\mu/d = 10^{-4}/\sqrt{\xi/8} \approx 2,1 \cdot 10^{-3}$  ( $0,42\% r_0$ )].

Эта тенденция хорошо проявляется при использовании эмпирических степенных профилей скорости, удобных в инженерных расчетах:

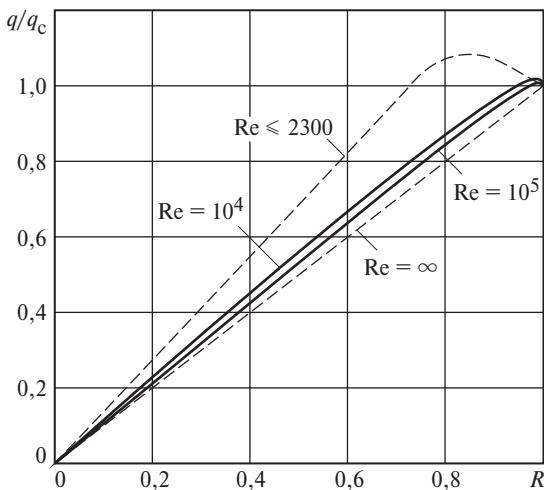
$$u/u_0 = (y/r_0)^n,$$

где  $n$  — малая степень, уменьшающаяся с ростом  $\text{Re}$  от  $n = 1/6$  при  $\text{Re} = 2300 \div 10 \cdot 10^3$  до  $n = 1/10$  при  $\text{Re} = 3,2 \cdot 10^6$ . Эти результаты получены на основе опытов Никурадзе [45] ( $\text{Re} = 4,0 \cdot 10^3 \div 3,2 \cdot 10^6$ ). Данные табл. 6.2 показывают, что даже при небольших «турбулентных» числах  $\text{Re}$  скорость почти однородная в центре сечения канала, а  $\bar{u}/u_0 = 0,79$  (при ламинарном течении  $\bar{u}/u_0 = 0,5$ ). Конечно, толщина вязкого подслоя не совпадает с областью основного изменения скорости, последняя заметно больше, но качественно законы уменьшения этих областей с ростом  $\text{Re}$  совпадают. [При  $\text{Re} = 10^5$  на границе вязкого подслоя ( $y^+ = 10$ ) скорость  $u_\delta = 10v_* = 10\bar{u}\sqrt{\xi/8} \approx 0,48\bar{u} = 0,40u_0$ , т.е. на расстоянии  $0,4\% r_0$  от стенки скорость вырастает уже до  $40\% u_0$ .] На рис. 6.8 кривые, отвечающие турбулентному течению, построены в соответствии с экспериментами Никурадзе [45]; при этом масштаб рисунка не позволяет изобразить те части профилей скорости, которые относятся к вязкому подслою.

*Профиль теплового потока.* Как было показано в п. 6.4.1, при  $\text{Re} \leq 2300$  отношение  $q/q_c = 2R - R^3$ . Кривая на рис. 6.9 имеет макси-

Таблица 6.2. Степенная аппроксимация профиля скорости

Диапазон чисел $\text{Re}$	$n$	$u/u_0$			$\bar{u}/u_0$
		$y/r_0 = 0,5$	$y/r_0 = 0,2$	$y/r_0 = 0,1$	
~3000—10 000	1/6	0,891	0,765	0,681	0,791
~30 000—300 000	1/7	0,906	0,795	0,720	0,817
~1 000 000	1/9	0,926	0,836	0,774	0,852
~3 000 000	1/10	0,933	0,851	0,794	0,865



**Рис. 6.9. Профили относительной плотности теплового потока при турбулентном течении в трубе**

мум при  $R = 0,82$  ( $q_{\max}/q_c \approx 1,1$ ). В другом пределе при  $Re = \infty$   $u/u_0 = 1$ , так что

$$\frac{q}{q_c} = \frac{2}{R} \int_0^R R \, dR = R$$

— линейный закон изменения  $q$ .

Действительные профили относительной плотности теплового потока располагаются между этими двумя предельными (рис. 6.9).

При ламинарном течении у стенки влияние увеличения плотности теплового потока из-за уменьшения площади поверхности, через которую он проходит, сильнее, чем влияние конвективного потока энергии в осевом направлении. По этой причине зависимость относительного теплового потока от радиуса имеет максимум.

При турбулентном течении максимум не столь выражен и приходится на область течения непосредственно у стенки. При высоких  $Re$  этот максимум практически вырождается. В этом случае  $\Delta_\lambda/r_0 \ll 1$ , так что область с молекулярным переносом тепла может рассматриваться как плоский слой, в пределах которого  $q \approx \text{const} = q_c$ .

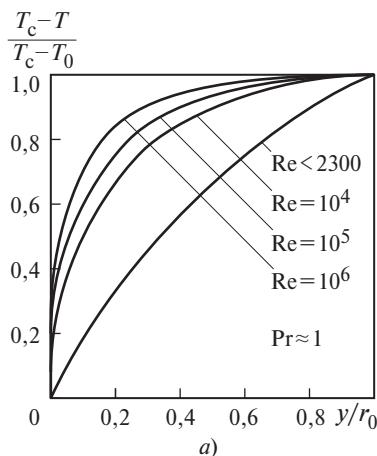
*Профиль температуры.* Если профили  $u/u_0$ ,  $q/q_c$  зависят только от гидродинамических параметров, фактически от  $Re$ , то профиль

температуры зависит как от гидродинамических параметров ( $\text{Pr}_T$ ,  $\varepsilon_\tau/v$ ,  $u/u_0$ ), так и от теплофизических свойств — от числа  $\text{Pr}$ . Логично эти влияния проанализировать отдельно. При  $\text{Pr} \approx 1$  профили температуры и скорости должны быть аналогичны. Профиль безразмерной температуры будем представлять в форме  $(T_c - T)/(T_c - T_0)$ , что по существу аналогично профилю  $u/u_0$ .

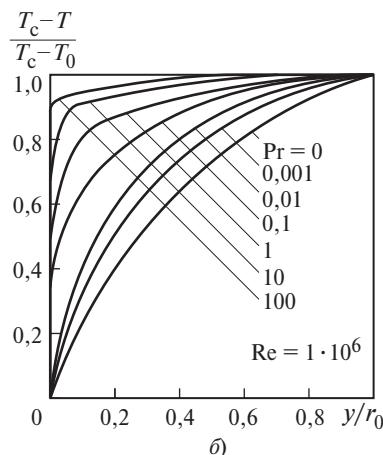
В координатах рис. 6.10 возможные профили температур при  $\text{Pr} = 1$ , как и при любом другом  $\text{Pr}$ , ограничены снизу и справа профилем (6.13) для ламинарного стабилизированного течения и теплообмена:

$$\theta_1 = \frac{(T_c - T)\lambda}{q_c d} = \frac{3}{8} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^4}{8}.$$

При  $R = 0$  температура  $\theta_1 = 3/8$ , следовательно,  $\frac{T_c - T}{T_c - T_0} = 1 - \frac{4}{3}R^2 + \frac{R^4}{3}$  (рис. 6.10, а). Для предела, относящегося к  $\text{Re} \rightarrow \infty$ ,



а)



б)

**Рис. 6.10. Зависимость профиля безразмерной температуры от  $\text{Re}$  при  $\text{Pr} \approx 1$  (а) и от  $\text{Pr}$  при развитом турбулентном течении (б)**

\* Строго говоря,  $\text{Pr}_T$  зависит и от теплофизических свойств жидкости.

необходимо знать  $\varepsilon_\tau/v$ . Но для качественного отображения в виде зависимостей  $(T_c - T)/(T_c - T_0)$  от  $y/r_0$  достаточно понимать, что эти зависимости практически должны повторять кривые  $u/u_0$  при одинаковых числах  $Re$ . Действительно, в турбулентном ядре действует аналогия Рейнольдса, у стенки  $\delta_\mu = \Delta_\lambda$ , так как  $Pr = 1$ . Таким образом, при развитой турбулентности в неметаллических жидкостях и газах основное изменение температуры происходит в непосредственной близости к стенке; существенная часть этого изменения приходится на теплопроводный подслой  $\Delta_\lambda$ , толщина которого при  $Pr = 1$  примерно совпадает с толщиной вязкого подслоя  $\delta_\mu$ . Как и в случае профилей скорости, масштаб рис. 6.10, *a* не позволяет воспроизвести профили безразмерной температуры в пределах теплопроводного подслоя, поскольку его толщина меньше толщины линии на рисунке.

Теоретический анализ позволяет подробно исследовать влияние числа  $Pr$  на температурный профиль. При этом здесь возможно рассматривать даже чисто теоретический случай  $Pr = 0$ . Для  $Re = \infty$  ( $u/u_0 = 1$ ) из (6.10) следует

$$\theta_1 = \frac{(T_c - T)\lambda}{q_c d} = \int_{R=0}^{\frac{1}{2}} \frac{R}{1-R} dR = \frac{1}{4}(1 - R^2).$$

При  $R = 0$  получается  $\theta_1 = 1/4$ , т.е.  $(T_c - T)/(T_c - T_0) = 1 - R^2$ . Таким образом, при выполнении одновременно двух асимптотических пределов  $Pr \rightarrow 0$ ,  $Re \rightarrow \infty$  профиль безразмерной температуры совпадает с профилем безразмерной скорости для ламинарного течения. Кривая, соответствующая этому профилю, ограничивает снизу и справа все реальные профили температуры на рис. 6.10, *b*.

На этом рисунке представлены расчетные профили безразмерной температуры при развитой турбулентности ( $Re = 1 \cdot 10^6$ ) согласно [31]. Из предыдущего анализа ясно, что в этом случае при  $Pr = 1$  профиль температуры примерно совпадает с профилем скорости, построенным по «закону 1/9».

Увеличение  $Pr$  означает уменьшение толщины  $\Delta_\lambda$ , т.е. уменьшение толщины той пристеночной области, где происходит основное изменение температуры. Увеличение  $Pr$  влияет на форму профиля температуры качественно так же, как рост  $Re$  на форму профиля скорости — смешает кривые влево и вверх. Количественно эти изменения на графике не очень заметны. Более наглядно влияние числа  $Pr$  на профиль

температуры при малых  $\text{Pr}$ . При  $\text{Pr} = 0,001 \div 0,01$  (жидкие металлы) роль молекулярной теплопроводности сохраняется при любых числах  $\text{Re}$ . При этом, например, при  $\text{Pr} = 1 \cdot 10^{-2}$  температурный профиль намного ближе к предельному профилю для  $\text{Pr} = 0$ , чем к профилям, характерным для  $\text{Pr} \approx 1$ .

### 6.5.2. Результаты теоретического исследования теплообмена

Количественные расчеты интеграла Лайона (6.11) требуют обращения к конкретным моделям турбулентности, чтобы иметь зависимости  $\text{Pr}_t, \varepsilon_\tau/v$  от координат и режимных параметров. Наиболее полные исследования в этой области выполнены в коллективе сотрудников МЭИ и ИВТАН под руководством Б.С. Петухова (1950—1970-е годы).

Во всех расчетах принималось, что  $\text{Pr}_t = \text{const} = 0,89 \div 1,00$ . Для турбулентной вязкости  $\varepsilon_\tau/v$  использовался профиль Райхардта, основанный на сочетании некоторых модельных представлений и опытных измерений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\tau/v &= 0,4[y^+ - 11\text{th}(y^+/11)] && \text{при } y^+ \leq 50, \\ \varepsilon_\tau/v &= 0,133y^+(0,5 + R^2)(1 + R) && \text{при } y^+ \geq 50. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

В этих соотношениях

$$y^+ = \frac{yv_*}{v}; v_* = \sqrt{\frac{\tau_c}{\rho}} = \bar{u} \sqrt{\frac{\xi}{8}}; \xi = (1,82 \lg \text{Re} - 1,64)^{-2}; R = r/r_0.$$

Профиль Райхардта дает непрерывную зависимость турбулентной вязкости для всей области течения — от  $y = 0$  до оси трубы. При  $y^+ = 11$  относительное значение турбулентной вязкости  $\varepsilon_\tau/v \approx 1$ , что почти совпадает с профилем Прандтля. У стенки закон затухания  $\varepsilon_\tau$  очень близок закону Ван Дрийста (4.30). При  $y^+ = 50$  значение  $\varepsilon_\tau/v = 16$ , т.е.  $\varepsilon_\tau/v \gg 1$ .

Нужно иметь в виду, что с ростом  $\text{Re}$  убывает линейный масштаб турбулентности, что проявляется, в частности, в том, что расстояние от стенки до оси выражается тем большим безразмерным числом,

чем больше число  $\text{Re}$ . Действительно, безразмерный радиус  $r_0^+ \equiv \frac{r_0 v_*}{\nu} = \frac{d\bar{u}\sqrt{\xi/8}}{2\nu} = \frac{\text{Re}}{2} \sqrt{\xi/8}$ . При  $\text{Re} = 10^4$  радиус  $r_0^+ \approx 320$ , при  $\text{Re} = 10^5$   $r_0^+ \approx 2400$ , при  $\text{Re} = 10^6$   $r_0^+ \approx 19\,000$  и т.д. Это означает, в частности, что с ростом  $\text{Re}$  уменьшается доля сечения трубы, в пределах которой существен молекулярный перенос импульса, а следовательно, и энергии, если  $\text{Pr} \geq 1$ . Координате  $y^+ = 50$  при  $\text{Re} = 10^4$  соответствует  $y \approx 0,155r_0$ , а при  $\text{Re} = 10^5$   $y \approx 0,021r_0$ .

Из этих комментариев следует, что типичный график зависимости турбулентной вязкости от безразмерного расстояния от стенки, представленный на рис. 6.11, не может быть универсальным для любых чисел  $\text{Re}$ ; он передает лишь характер зависимости (6.16).

Расчеты теплоотдачи по (6.11) с использованием оговоренных выше условий были выполнены в широком диапазоне чисел  $\text{Re}$  и  $\text{Pr}$ . Часть результатов отражена в табл. 6.3.

Прежде всего, из данных таблицы видно различное влияние  $\text{Re}$  на  $\text{Nu}_\infty$  в разных диапазонах чисел  $\text{Pr}$ . При  $\text{Pr} = 1 \cdot 10^{-3}$  увеличение  $\text{Re}$  в 500 раз ведет к росту  $\text{Nu}$  примерно в 4 раза, причем в диапазоне  $\text{Re} = 10^4 \div 10^5$  число  $\text{Nu}$  почти не изменяется (7 и 7,3). Теоретический предел  $\text{Pr} = 0$  вообще дает  $\text{Nu}_\infty = \text{const} = 7 \pm 10\%$ . Уже при  $\text{Pr} = 0,1$  в том же диапазоне изменения  $\text{Re}$  число  $\text{Nu}$  возрастает в 28 раз.

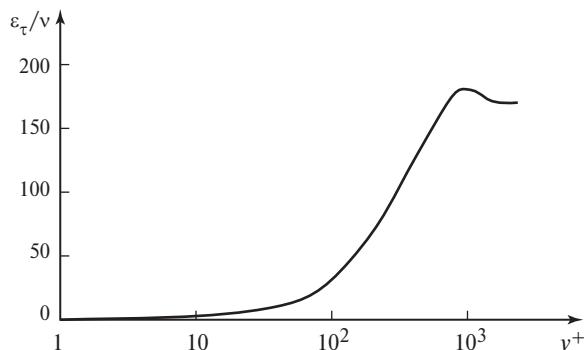


Рис. 6.11. Типичное распределение турбулентной вязкости по сечению трубы [согласно (6.16)]

Таблица 6.3. Расчетные значения числа  $Nu_{\infty}^{(q)}$  при турбулентном течении в круглой трубе при различных  $Re$  и  $Pr$

Pr	Re			
	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$
$10^{-3}$	7,0	7,3	13,5	30
$10^{-1}$	10	44	170	280
1	36,5	230	1450	5600
10	100	726	7000	22 000
$10^3$	490	3800	30 000	133 000

Для обычных неметаллических жидкостей зависимость  $Nu$  ( $Re$ ) намного более сильная, что означает абсолютное преобладание турбулентного переноса: при  $Pr = 1$  число  $Nu$  возрастает в 153 раза, а при  $Pr = 10$  — в 220 раз при увеличении  $Re$  от  $10^4$  до  $5 \cdot 10^6$ ; при  $Pr = 10^3$  — в 270 раз.

Такой характер влияния  $Re$  на интенсивность теплоотдачи в различных диапазонах чисел Прандтля предполагает, что зависимость для КТО целесообразно строить раздельно для жидких металлов ( $Pr \ll 1$ ) и неметаллических жидкостей и газов.

### 6.5.3. Расчетные уравнения для теплоотдачи

*Жидкие металлы* ( $Pr \leq 0,05$ ). Предшествующий анализ особенностей теплообмена жидких металлов в ламинарном пограничном слое на пластине и при свободной конвекции показал, что коэффициент теплоотдачи не зависит от вязкости. В случае турбулентного течения в трубе это может быть описано уравнением подобия, если в качестве определяющего критерия подобия используется  $Pe \equiv RePr = \bar{u}d/a$ .

Расчет на основе интеграла Лайона для  $q_c = \text{const}$  дает

$$Nu_{\infty}^{(q)} = 7,0 + 0,025 Pe^{0,8}. \quad (6.17)$$

В ряде опытных исследований, в частности в работах ФЭИ (г. Обнинск), получали лучшее согласие с опытными данными при использовании уравнения

$$Nu = 5,0 + 0,025 Pe^{0,8}.$$

Такой вид расчетного уравнения больше отвечает, вообще говоря, условию  $T_c = \text{const}$ . Но опыты проводились при электрообогреве. Причина расхождений, скорее всего, в неучтенном влиянии загрязнений стенки. (Щелочные металлы химически активны)\*.

Важно иметь в виду, что при больших числах  $\text{Pe}$  различие двух формул становится несущественным; при  $\text{Pe} > 5000$  оно не более 7 %.

*Неметаллические жидкости и газы.* В 1958 г. в статье Б.С. Петухова и В.В. Кириллова была впервые предложена следующая формула для расчета теплоотдачи при стабилизированном турбулентном течении жидкостей при  $\text{Pr} \geq 0,7$ :

$$\text{Nu} = \frac{\text{Re Pr} \frac{\xi}{8}}{1,07 + 12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8} (\text{Pr}^{2/3} - 1)}}. \quad (6.18)$$

Эта формула была результатом расчетов на основе интеграла Лайона и обобщения опытных данных; она обеспечивает приближенный переход к соотношению аналогии Рейнольдса (4.35) при  $\text{Pr} = 1$  и верно отражает тенденции влияния на интенсивность теплообмена числа Прандтля при  $\text{Pr} \neq 1$ .

Выражение такой же структуры было получено аналитически в § 4.6 на основе модификации аналогии Рейнольдса для теплообмена в турбулентном пограничном слое:

$$\text{St} = \frac{C_f/2}{1 + 12 \sqrt{C_f/2} (\text{Pr}^{2/3} - 1)}. \quad (4.39)$$

Для круглой трубы безразмерный КТО удобно выражать через число Нуссельта,  $\text{Nu} = \text{StRePr}$ , а коэффициент гидравлического сопротивления как  $C_f/2 = \xi/8$ . Соотношение (4.39) получено в предположении, что за пределами вязкого подслоя  $\delta_\mu$  и теплопроводного подслоя  $\Delta_\lambda$  справедлива аналогия Рейнольдса, согласно которой эффективный поперечный поток массы (рейнольдсов поток) переносит одновременно импульс и энергию. В пределах соответствующих подслоев преобладает молекулярный перенос; толщина теплопроводного подслоя  $\Delta_\lambda = \delta_\mu \text{Pr}^{-1/3}$ , безразмерная толщина вязкого подслоя  $\delta_\mu^+ \equiv \delta_\mu / v = 12$ .

\* Метод кафедры ИТФ МЭИ (Л.Г. Генин, В.Г. Свиридов) дает более точные результаты, когда  $T_c$  измеряется зондом, расположенным внутри канала, в жидкости.

Поскольку теплообмен при турбулентном течении в трубе определяется в основном механизмами, действующими в пределах пристеночной турбулентной области, то результаты, полученные для пограничного слоя, применимы для трубы. При этом в трубе при  $R \geq 0,8$  касательное напряжение  $\tau \approx \tau_c = \text{const}$  (с погрешностью < 20 %); на внешней границе пристеночной турбулентной области скорость с хорошей точностью равна  $\bar{u}$ .

Соотношения вида (6.18) и (4.39) верно отражают главные физические закономерности переноса в пристеночной турбулентной области. После работ 1958 г. уравнение (6.18) уточнялось в коллективе Б.С. Петухова (В.Н. Попов, В.А. Курганов). По-видимому, наиболее удобное практически и ясное физически уравнение было получено в 1970 г.:

$$\text{Nu} = \frac{\text{Re Pr} \frac{\xi}{8}}{1 + 900/\text{Re} + 12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8} (\text{Pr}^{2/3} - 1)}}. \quad (6.19)$$

Коэффициент гидравлического сопротивления рассчитывается по формуле Филоненко (4.29а):

$$\xi = (1,82 \lg \text{Re} - 1,64)^{-2}.$$

В уравнении (6.19) вместо физически нестрогого числа 1,07 в знаменателе формулы (6.18) используется сумма  $1 + 900/\text{Re}$ ; этот прием, с одной стороны, позволяет отразить наблюдающееся в опытах отклонение от аналогии Рейнольдса при малых числах  $\text{Re}$ , а с другой — обеспечивает строгий выход на отношение аналогии Рейнольдса при  $\text{Pr} = 1$  и  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . (Практически уже при  $\text{Re} = 2 \cdot 10^4$  и  $\text{Pr} = 1$  число  $\text{Nu} = \text{Re} \frac{\xi}{8}$ , т.е.  $\text{St} = C_f/2$ , с погрешностью менее 4,5 %.)

Уравнение (6.19) отличается от эмпирических степенных зависимостей не только физической обоснованностью, но и следующей из нее универсальностью в широчайшем диапазоне изменения чисел  $\text{Re}$  и  $\text{Pr}$ . Авторы (6.19) определили диапазон его применимости как

$$5 \cdot 10^3 \leq \text{Re} \leq 5 \cdot 10^6;$$

$$0,7 \leq \text{Pr} \leq 200.$$

В настоящее время после публикации работы [74] есть основания утверждать, что (6.19) может использоваться при  $\text{Pr} \geq 0,1$ . В [74] представлены опытные данные о теплообмене при турбулентном

течении газовых смесей типа  $H_2$  —  $Xe$ ,  $H_2$  —  $Ar$  и  $He$  —  $Xe$ ,  $He$  —  $Ar$ , для которых  $Pr = 0,17 \div 0,7$ . Выяснилось, что большинство эмпирических формул, в том числе формула Диттуса—Белтера (1.34), дают сильно отличающиеся от измеренных расчетные значения КТО. При  $Re = 8 \cdot 10^4$  отличия расчетов по этой формуле от измеренных значений доходят до 100 %. Формула (6.19) в варианте В.Н. Попова, когда знаменатель имеет вид

$$1 + 3,4\xi + (11,7 + 1,8Pr^{-1/3})\sqrt{\xi/8}(Pr^{2/3} - 1),$$

согласуется с измерениями превосходно. (При этом все варианты формулы Б.С. Петухова с сотрудниками отличаются друг от друга не более чем на 20 %.) С учетом этой публикации логично утверждать, что формула (6.19) пригодна для любых неметаллических жидкостей и газов в диапазоне  $Pr = 0,1 \div 200$ .

В п. 1.4.4 отмечалось, что многие эмпирические степенные формулы получаются из (6.19) как частные случаи. В частности, при  $Pr = 1$ ,  $Re > 4 \cdot 10^4$ , когда справедлив «закон 1/5» для коэффициента гидравлического сопротивления  $\xi = 0,184 \cdot Re^{-0,2}$ , из (6.19) следует

$$Nu = 0,023 Re^{0,8},$$

что точно совпадает с формулой Диттуса—Белтера.

При  $Pr \gg 1$ ,  $Re > 2 \cdot 10^4$  из (6.19) можно получить

$$Nu = \frac{Re Pr \frac{\xi}{8}}{\sqrt{\frac{\xi}{8} Pr^{2/3}}} = \sqrt{\frac{\xi}{8}} Re Pr^{1/3} = 0,0119 Re^{0,9} Pr^{1/3},$$

если использовать для  $\xi$  «закон одной пятой». В.М. Кэйс [19] для  $Pr \geq 20$  дает эмпирическую формулу

$$Nu = 0,0118 Re^{0,9} Pr^{0,33},$$

что удивительно близко к уравнению, следующему из (6.19).

Ясно, что при больших числах  $Pr$  основную роль в переносе энергии играет механизм аналогии Рейнольдса. Формула (6.19) отражает, таким образом, все реальные изменения в перераспределении ролей молекулярного и турбулентного переноса энергии во всем указанном диапазоне  $Re$  и  $Pr$ . Чтобы отразить те же закономерности степенными формулами, их надо иметь, как минимум, три. При этом в ряде зарубежных публикаций периодически предлагаются новые степенные формулы, отличающиеся от формулы Диттуса—Белтера более силь-

ной зависимостью  $Nu$  от  $Re$ , например, для некоторых фреонов с  $Re^{0,84}$  или  $Re^{0,87}$ .

В середине 1970-х годов Гнилински (Gnielinski) на базе формулы (6.18) предложил соотношение для низких чисел Рейнольдса ( $Re = 2300 \div 5000$ ):

$$Nu = \frac{(Re - 1000)Pr \frac{\xi}{8}}{1 + 12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8}}(Pr^{2/3} - 1)}. \quad (6.18a)$$

Поскольку эта формула была опубликована в англоязычном журнале, за рубежом на нее ссылаются чаще, чем на оригинальную. Недавнее исследование [54] показало, что формула (6.18a) хорошо согласуется с надежными опытными данными лишь при  $Re \geq 3100$ . Но в этом случае и формула (6.19) дает значения  $Nu$ , мало отличающиеся от рассчитанных по формуле Гнилински.

## 6.6. Теплообмен в начальном термическом участке при ламинарном течении в круглой трубе

### 6.6.1. Постановка задачи

Классические задачи, решенные в начале XX в., вновь стали актуальными в последние годы из-за широкого применения субмиллиметровых каналов в системах охлаждения микроэлектроники. В настоящем параграфе рассматривается теплообмен в условиях завершившейся гидродинамической стабилизации. В лабораторном эксперименте это достигается установкой участка гидродинамической стабилизации перед участком теплообмена. В технике при  $Pr \gg 1$  этот режим обеспечивается естественным образом на большей части участка теплообмена.

Само понятие «теплообмен в начальном термическом участке» применительно к ламинарному течению предполагает, что стабилизованный профиль скорости (парабола Пузейля)  $u/\bar{u} = 2(1 - R^2)$ , где  $R = r/r_0$ , сформировался до начала участка теплообмена. В предположении о постоянстве физических свойств это означает, что гидродинамическая задача уже решена; для описания теплообмена при  $x \geq 0$  (рис. 6.12) необходимо решать только уравнение энергии. При этом конвективный перенос существует только в направлении течения, радиальная скорость при стабилизированном течении равна нулю ( $v = 0$ ).

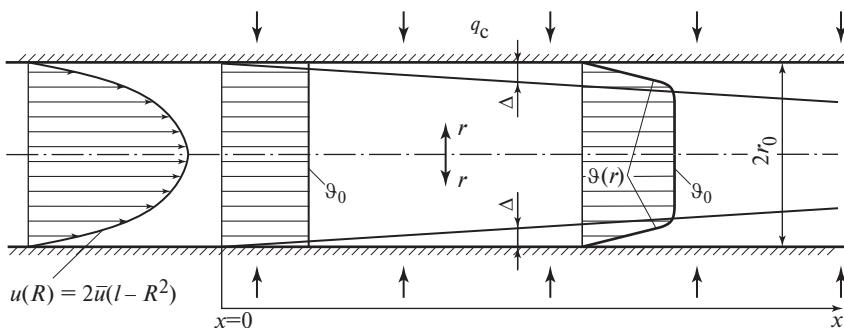


Рис. 6.12. Схема формирования температурного пограничного слоя при стабилизированном ламинарном течении в круглой трубе

Для качественного представления процесса формирования температурного пограничного слоя на рис. 6.12 использована избыточная температура

$$\vartheta = |T - T_c|.$$

В начале участка теплообмена в ядре сечения канала сохраняется невозмущенная начальная температура  $T_0$ , т.е.  $\vartheta = \vartheta_0 = |T_0 - T_c|$ .

Итак, математическое описание задачи включает в себя уравнение энергии в форме

$$2\bar{u}(1 - R^2) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (6.20)$$

и граничные условия:

$$x = 0, 0 \leq r < r_0: T = T_0 (\vartheta = \vartheta_0);$$

$$x > 0, r = 0: \partial T / \partial r = 0;$$

$$x > 0, r = r_0: T = T_c (\vartheta = 0) \text{ или } q_c = -\lambda (\partial T / \partial r)_{r=r_0}.$$

### 6.6.2. Приближенное решение Левека для $T_c = \text{const}$

Рассматриваемое в этом пункте решение было опубликовано в 1920-х годах, когда уже было известно более общее классическое решение Гретца—Нуссельта. Смысл рассматриваемого подхода — получение простого аналитического решения, что оказалось возможным для малых расстояний от начала участка теплообмена, когда толщина температурного пограничного слоя много меньше радиуса трубы. Тогда уравнение (6.20) можно преобразовать, считая течение

аналогичным течению у плоской пластины. Вводится координата  $y$ , отсчитанная от стенки, т.е.  $y = r_0 - r$ , причем  $y \ll r_0$ . Тогда, учитывая, что при  $\Delta \ll r_0$ ;  $r = r_0 - y$ ;  $1 - R^2 \approx 2y/r_0 = 4y/d$ ;

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{(r_0 - y)} \frac{\partial}{\partial y} \left( (r_0 - y) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \approx \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

получаем из (6.20):

$$\frac{8\bar{u}}{ad} y \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (6.20a)$$

Границные условия:

$$y = 0, \quad T = T_c;$$

$$y = \infty, \quad T = T_0.$$

Второе граничное условие не должно вызывать недоумений: задача рассматривается как плоская, при любом  $y > \Delta$  температура жидкости однородна и равна  $T_0$ .

Следует отметить, что в п. 4.2.4 для теплообмена с изотермической пластиной при  $Pr \gg 1$  было получено идентичное уравнение энергии (4.3г), в которое вместо комплекса  $8\bar{u}/d$  входит  $\tau_c/\mu$ . При известном решении гидродинамической задачи в этом случае  $\bar{u}$  и  $\tau_c$  — известные величины. Так что рассматриваемое ниже решение уравнения (6.20а) может быть отнесено к уравнению (4.3г).

Для решения Левек использовал автомодельную переменную  $\eta = y/\Delta$ . Чтобы получить структуру выражения для толщины температурного пограничного слоя  $\Delta$ , используем уравнение (6.20а). Оно линейно по температуре; заменяя дифференциалы конечными разностями, получаем:

$$\frac{8\bar{u}\Delta}{adx} \sim \frac{1}{\Delta^2}; \quad \Delta = C_0 \left( \frac{adx}{8\bar{u}} \right)^{1/3}; \quad \eta = y \left( \frac{8\bar{u}}{9adx} \right)^{1/3};$$

$C_0$  принята равной  $9^{1/3}$  из соображений технических удобств в последующих преобразованиях.

Далее переменные в (6.20а) выражаются в безразмерных координатах:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{3} \frac{\eta}{x} \frac{dT}{d\eta}; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \left( \frac{8\bar{u}}{9adx} \right)^{2/3} \frac{d^2 T}{d\eta^2}.$$

Здесь учтено, что  $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{3x} \left( \frac{8\bar{u}}{9adx} \right)^{1/3} = -\frac{1}{3x} \eta$ . Имеем далее

$$-\frac{1}{3} \frac{8\bar{u}}{9adx} y \eta \frac{dT}{d\eta} = \left( \frac{8\bar{u}}{9adx} \right)^{2/3} \frac{d^2 T}{d\eta^2}.$$

Отсюда

$$-3\eta^2 \frac{dT}{d\eta} = \frac{d^2 T}{d\eta^2}, \text{ или } d\left(\frac{dT}{d\eta}\right) / \left(\frac{dT}{d\eta}\right) = -3\eta^2 d\eta.$$

Границные условия:  $\eta = 0, T = T_c; \eta = \infty, T = T_0$ .

Интегрируя дважды полученное уравнение, находим

$$\frac{dT}{d\eta} = Ae^{-\eta^3}; \quad T = A \int_0^\eta e^{-\eta^3} d\eta + A_1.$$

Из первого граничного условия (на стенке)

$$A_1 = T_c.$$

Из условия на  $\infty$ :

$$T_0 - T_c = A \int_0^\infty e^{-\eta^3} d\eta = A \cdot 0,893.$$

(Определенный интеграл рассчитывается с использованием Г-функций.)

Таким образом, поле температур в пограничном слое определяется соотношением

$$\frac{T - T_c}{T_0 - T_c} = \frac{1}{0,893} \int_0^\eta e^{-\eta^3} d\eta.$$

Коэффициент теплоотдачи, который из-за малости  $\Delta$  может быть отнесен к разности температур  $T_c - T_0 \approx T_c - \bar{T}$ :

$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_c - T_0} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\lambda}{T_c - T_0} \left( \frac{dT}{d\eta} \right)_{\eta=0} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{0,893} \left( \frac{8}{9} \frac{\bar{u}}{adx} \right)^{1/3}.$$

Так как

$$\frac{\bar{u}}{adx} \equiv \frac{\bar{u}dd}{a x d^3} = Gz \frac{1}{d^3}; \quad Gz \equiv Pe \frac{d}{x}, \quad Nu = \frac{\alpha d}{\lambda},$$

то получаем для безразмерного коэффициента теплоотдачи

$$Nu = 1,077 Gz^{1/3} \equiv 1,077 \left( \frac{1}{Pe} \frac{x}{d} \right)^{-1/3}. \quad (6.21)$$

В п. 1.4.3 говорилось, что величина, обратная числу Гретца, называется приведенной длиной.

Аналитическое решение (6.21) справедливо при малых  $\Delta$ , что

отвечает малым значениям  $\left( \frac{1}{Pe} \frac{x}{d} \right)$ . Далее мы увидим, что это решение по структуре повторяет аппроксимацию решения Гретца—Нуссельта.

### 6.6.3. Задача Гретца—Нуссельта для $T_c = \text{const}$

Впервые решение было осуществлено Гретцем в 1885 г., в 1910 г. задачу (независимо) решил Нуссельт. Теперь рассматривается задача (6.20) без ограничений в отношении длины участка теплообмена. Математическое описание переводится в безразмерную форму с использованием следующих обозначений:

$$R = r/r_0; \quad X = \frac{2}{Pe} \frac{x}{d}; \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c},$$

$$(1 - R^2) \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right). \quad (6.206)$$

Безразмерные граничные условия:

$$X = 0, \quad 0 \leq R < 1: \quad \theta = 1;$$

$$X > 0, \quad R = 0: \quad \frac{\partial \theta}{\partial R} = 0;$$

$$X > 0, \quad R = 1: \quad \theta = 0.$$

Задача решается методом разделения переменных. Принимается

$$\theta(X, R) = \varphi(X)\psi(R). \quad (6.22)$$

Подстановка этого произведения в (6.20б) дает

$$\frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dX} = \frac{1}{(1 - R^2)\psi R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{d\Psi}{dR} \right) = -\varepsilon^2.$$

Так как две функции независимых переменных при произвольных значениях аргументов равны между собой, то они равны const. Const заведомо меньше нуля, так как  $\theta = 0 \div 1$  — ограниченная функция, а при положительном значении const  $\phi(X)$  неограниченно растет.

Таким образом, (6.20б) превращается в два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения. Решение первого из них

$$\frac{d\phi}{dX} = -\varepsilon^2 \phi$$

дает экспоненту:

$$\phi = A \exp(-\varepsilon^2 X), \quad (6.23)$$

где  $A$  — неизвестная пока константа.

Второе уравнение можно представить в виде зависимости от  $\varepsilon R$ :

$$\frac{1}{(\varepsilon R)} \frac{1}{\psi} \frac{d}{d(\varepsilon R)} \left( (\varepsilon R) \frac{d\Psi}{d(\varepsilon R)} \right) = - \left( 1 - \frac{(\varepsilon R)^2}{\varepsilon^2} \right). \quad (6.24)$$

Это — известное в математической физике уравнение Штурма—Лиувилля на собственные значения. Решение ищется в виде бесконечного ряда по  $\varepsilon R$ :

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\varepsilon R)^n. \quad (6.25)$$

Подстановка этого выражения в (6.24) позволяет установить, что нечетные члены ряда равны нулю, а для четных членов получается рекуррентная формула для коэффициентов  $b_{2n}$ . (Более детально это решение изложено, например, в [31].)

Так как при  $R = 1$  безразмерная температура  $\theta = 0$ , следовательно,  $\psi(1) = 0$ , то (6.25) при известных значениях  $b_{2n}$  — это бесконечное алгебраическое уравнение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} \varepsilon^{2n} = 0.$$

Оно имеет  $n$  корней  $\varepsilon_n$  — это собственные значения задачи Штурма—Лиувилля. Они рассчитаны, их первые 11 значений даются в табл. 6.4. Каждому собственному значению  $\varepsilon_n$  в соответ-

Таблица 6.3. Собственные функции в задаче о теплообмене в круглой трубе  
при  $T_c = \text{const}$

$R$	$\Psi_0$	$\Psi_1$	$\Psi_2$	$\Psi_3$	$\Psi_4$	$\Psi_5$
0,00	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,05	0,995437	0,972330	0,930100	0,870010	0,793849	0,703873
0,10	0,981845	0,891809	0,735450	0,531081	0,302289	0,074881
0,15	0,959508	0,765605	0,457288	0,113107	-0,182711	-0,363825
0,20	0,928893	0,604700	0,152473	-0,233032	-0,402601	-0,321220
0,25	0,890624	0,422610	-0,120551	-0,399123	-0,293281	0,031179
0,30	0,845468	0,233857	-0,315213	-0,359141	0,000543	0,289820
0,35	0,794305	0,052427	-0,406111	-0,169042	0,249748	0,225292
0,40	0,738094	-0,109593	-0,392085	0,067932	0,299074	-0,047658
0,45	0,677849	-0,243018	-0,293054	0,249851	0,148448	-0,246238
0,50	0,614599	-0,342141	-0,142342	0,315072	-0,079733	-0,205318
0,55	0,549358	-0,404823	0,022792	0,257030	-0,240575	0,006836
0,60	0,483097	-0,432182	0,169685	0,114169	-0,255230	0,197497
0,65	0,416713	-0,427945	0,275939	-0,054726	-0,137917	0,228895
0,70	0,351010	-0,397629	0,331488	-0,196043	0,036100	0,103721
0,75	0,286674	-0,347648	0,337426	-0,277578	0,184826	-0,077192
0,80	0,224264	-0,284494	0,302723	-0,292241	0,259184	-0,208931
0,85	0,164196	-0,214056	0,240158	-0,252003	0,252738	-0,244089
0,90	0,106741	-0,141133	0,162625	-0,177621	0,188173	-0,195217
0,95	0,052019	-0,069144	0,030461	-0,089163	0,096296	-0,102344
1,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

ствии с (6.25) отвечает собственная функция  $\psi_n(R)$ . В табл. 6.3 даны шесть первых собственных функций. Комбинация каждой собственной функции с решением (6.23) образует частное решение исходной задачи:

$$\theta_n = A_n \psi_n(R) \exp(-\varepsilon_n^2 X),$$

а общее решение — это бесконечный ряд:

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(R) \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d}\right). \quad (6.26)$$

Таблица 6.4. Собственные значения и постоянные задачи о теплообмене в круглой трубе при  $T_c = \text{const}$

$n$	$\varepsilon_n$	$\varepsilon_n^2$	$A_n$	$B_n$
0	2,7043644	7,3135868	+1,4764354	0,74877450
1	6,6790314	44,609460	-0,8061239	0,54382795
2	10,673380	113,92104	+0,5887621	0,4628610
3	14,671078	215,24053	-0,4758504	0,4154184
4	18,669872	348,56412	+0,4050218	0,38291915
5	22,669143	513,89004	-0,3557565	0,35868555
6	26,668662	711,21753	+0,3191690	0,33962210
7	30,668323	940,54604	-0,2907358	0,32406215
8	34,667074	1201,8754	+0,2678911	0,31101395
9	38,667883	1495,2052	-0,2490625	0,29984400
10	42,667734	1820,5355	+0,2332277	0,29012455

Коэффициенты  $A_n$  определяются из граничных условий на входе:  $\theta = 1$  при  $X = 0$  (вместе с условием ортогональности собственных функций); эти коэффициенты приводятся в табл. 6.4. Функции  $\psi_n(R)$  — это периодические функции, качественно похожие на члены рядов Фурье. На графике рис. 6.13 представлены первые три собственные функции. Анализ табличных данных показывает, что с ростом  $n$  значения  $\psi_n$  изменяют знак на меньшей длине:  $\psi_0$  — монотонная функция,  $\psi_1$  — один раз изменяет знак на отрезке  $0 \div 1$ ,  $\psi_2$  — два раза,  $\psi_3$  — три раза и т.д. Чем сложнее вид зависимости  $\theta(R)$ , тем больше членов ряда необходимо для ее описания.

Ряд (6.26) достаточно быстро сходится с ростом  $X$ . При этом экспонента стремится к нулю тем быстрее, чем больше номер члена ряда  $n$  из-за роста  $\varepsilon_n^2$  с увеличением  $n$ . При  $X > 0,11$  изменение температуры по сечению монотонное, и для ее описания достаточно одного члена ряда:

$$\theta_0 = A_0 \psi_0(R) \exp\left(-2\varepsilon_0^2 \frac{1}{\text{Pe} d} x\right). \quad (6.26a)$$

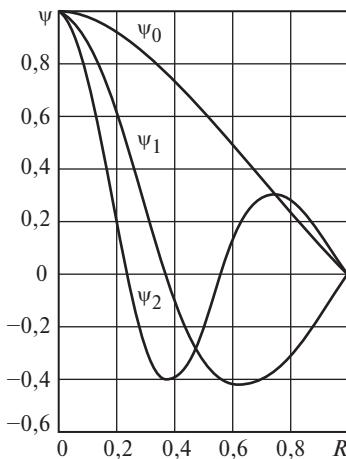


Рис. 6.13. Первые три собственные функции задачи Штурма—Лиувилля

Графики  $\theta(R)$  при различных  $X$  и  $\theta(X)$  для заданных  $R$  физически достаточно содержательны. Ясно, что при  $X = 0$  безразмерная температура  $\theta = 1$ , что отвечает верхней границе рис. 6.14, *a*.

При конечных  $X$  начинается теплообмен, температурное возмущение затрагивает первоначально лишь тонкий слой жидкости у стенки. На графике рис. 6.14, *a* отрезок между невозмущенным значением температуры (там, где  $\theta = 1$ ) и границей канала  $R = 1$  соответствует безразмерной толщине температурного пограничного слоя  $\Delta/r_0$ . С ростом  $X$  эта толщина растет; при  $\Delta/r_0 = 1$  температурное возмущение охватывает все сечение трубы. Ясно, что для аппроксимации профиля температуры с невозмущенной температурой в ядре требуется тем больше членов ряда, чем больше доля сечения с такой температурой. При  $X = 1 \cdot 10^{-4}$ , например, шести собственных функций табл. 6.3, вообще говоря, недостаточно для точного воспроизведения условия  $\theta = 1$  в ядре: расчеты ведут к нефизическим колебаниям  $\theta_{\text{расч}} = 0,98 \div 1,02$ . Для монотонных профилей  $\theta$  вполне достаточно одной собственной функции  $\psi_0(R)$  (при  $X > 0,11$ ).

Те же тенденции отражает рис. 6.14, *b*. Условию  $\theta = 0$  при  $R = 1$  отвечает на нем ось абсцисс: при  $R = 0; 0,1; 0,2$  и других  $R < 1$  имеются участки профилей с  $\theta = 1$ , т.е. с исходной температурой жидкости в ядре канала.

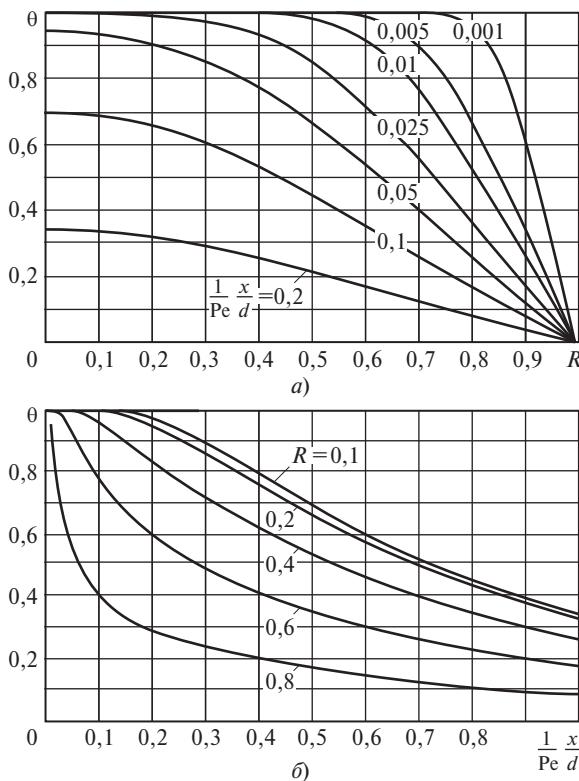


Рис. 6.14. Поле безразмерной температуры в различных поперечных сечениях трубы (а) и по длине канала при различных расстояниях от оси (б) при  $T_c = \text{const}$

Локальный коэффициент теплоотдачи

$$\alpha(x) = -\frac{\lambda}{T_c - \bar{T}(x)} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \frac{\lambda}{r_0 (T_c - \bar{T}(x))} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=1}.$$

Для его расчета надо знать производную  $(\partial \theta / \partial R)_{R=1}$  и среднемассовую температуру жидкости  $\bar{\theta}(x) = (\bar{T}(x) - T_c) / (T_0 - T_c)$ . Обе величины не зависят от  $r$ , следовательно, собственные функции  $\psi_n(R)$  в определение этих параметров не входят, но при их расчете по (6.26) появляются новые коэффициенты  $B_n$ , представленные в табл. 6.4.

Итоговое соотношение для безразмерного коэффициента теплоотдачи имеет вид

$$\text{Nu} = \frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d}\right)}{2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\varepsilon_n^2} \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d}\right)}. \quad (6.27)$$

С использованием этого выражения и данных табл. 6.3 и 6.4 не составляет труда построить график  $\text{Nu}\left(\frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d}\right)$ . Оба ряда в (6.27) быстро сходятся. Если  $l_{\text{h.t}}$  определять из условия  $\frac{\text{Nu}(l_{\text{h.t}})}{\text{Nu}_{\infty}} = 1,01$ , то  $\frac{1}{\text{Pe}} \frac{l_{\text{h.t}}}{d} = 0,055$ , что соответствует  $X = 0,11$ , при котором профиль температур описывается одним членом ряда. При  $x > l_{\text{h.t}} = 0,055 \text{Pe}d$

$$\text{Nu} = \text{Nu}_{\infty}^{(T_c)} = \frac{\varepsilon_0^2}{2} \approx \frac{7,314}{2} = 3,657.$$

График  $\text{Nu}^{(T_c)} = f\left(\frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d}\right)$  при  $\frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} \leq 0,01$  (рис. 6.15) хорошо аппроксимируется степенной зависимостью

$$\text{Nu} = 1,03 \text{Gz}^{1/3} \equiv 1,03 \left(\frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d}\right)^{-1/3}. \quad (6.28)$$

Формула Левека (6.21) совпадает с этой аппроксимацией точного решения с погрешностью  $\sim 4\%$ .

В диапазоне  $\frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} = 0,01 \div 0,055$  при строгом расчете надо пользоваться рядом (6.27). Приближенно можно использовать здесь (6.28), но учитывать, что число Nu не может быть меньше  $\text{Nu}_{\infty}^{(T_c)} = 3,657$ .

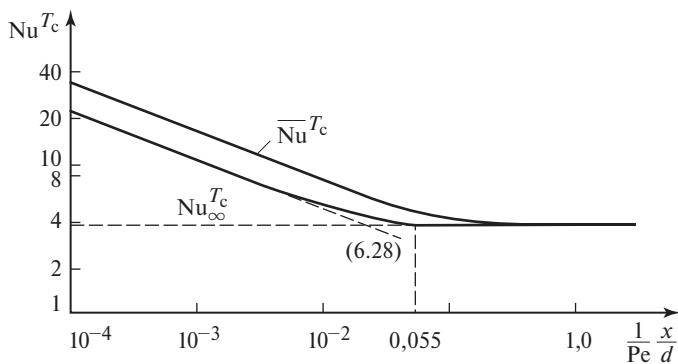


Рис. 6.15. Изменение безразмерного коэффициента теплоотдачи по длине трубы при ламинарном течении при  $T_c = \text{const}$

Такой подход означает замену действительной плавной зависимости на рис. 6.15 ломаной линией, состоящей из отрезка зависимости (6.28) и линии  $\overline{\text{Nu}} = \text{Nu}_{\infty}^{(T_c)} \approx 3,66$ . Погрешность такого приема не более 13 %.

Так как  $\alpha(x) = C_0 x^{-1/3}$ , то средний КТО

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) \, dx = \frac{3}{2} \alpha_{x=l}.$$

Следовательно,

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{\bar{\alpha} l}{\lambda} = 1,55 \left( \frac{1}{\text{Pe} d} l \right)^{-1/3}. \quad (6.28a)$$

Если по-прежнему считать, что стабилизации отвечает условие  $\overline{\text{Nu}}_{\text{н.т.}} / \text{Nu}_{\infty} = 1,01$ , то длина начального термического участка для среднего теплообмена в 25 раз превышает  $l_{\text{н.т.}}$  для локального КТО.

Для жидкостей с числом  $\text{Pr} > 1$  типичные теплообменные устройства обычно короче, чем  $l_{\text{н.т.}}$ . К примеру, при  $\text{Pr} = 10$ ,  $\text{Re} = 500$ ,  $\text{Pe} = 5 \cdot 10^3$  длина начального термического участка  $l_{\text{н.т.}} = 5,5 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^3 d = 275d$ . Это — большая длина (даже для локального КТО). В субмиллиметровом канале с  $d = 0,2$  мм  $l_{\text{н.т.}} = 55$  мм — типичная для таких каналов полная длина.

#### 6.6.4. Теплообмен в начальном термическом участке при $q_c = \text{const}$

Задача в целом решается аналогично задаче Гретца—Нуссельта. Уравнение (6.20б) остается в силе и для  $q_c = \text{const}$ , но так как теперь температура  $T_c$  неизвестна, то изменяются граничные условия и выражение для безразмерной температуры:

$$\theta = \frac{(T - T_0)\lambda}{q_c d}.$$

Переменные  $X = \frac{2}{\text{Pe}} \frac{x}{d}$ ,  $R = r/r_0$  остаются те же.

Границные условия:

$$X = 0, 0 \leq R < 1: \theta = 0;$$

$$X > 0, R = 0: \quad \partial\theta/\partial R = 0;$$

$$X > 0, R = 1: \quad \partial\theta/\partial R = 1/2.$$

Последнее условие получается из

$$q_c = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial R} \right)_{R=1} \frac{1}{r_0} = -\frac{\lambda}{r_0} \left( \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)_{R=1} \frac{q_c d}{\lambda}.$$

Для этой задачи уже получено частное решение (6.13) для  $x > l_{\text{h.t.}}$ :

$$\theta_1 = \frac{(T_c - T)\lambda}{q_c d} = \frac{3}{8} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^4}{8},$$

а для теплоотдачи — соотношение (6.14):

$$\text{Nu}_{\infty}^{(q_c)} \equiv \frac{\alpha_{\infty} d}{\lambda} = \frac{48}{11}.$$

Следовательно, задача сводится к отысканию еще одного частного решения, справедливого только при  $x \leq l_{\text{h.t.}}$ .

Профилью  $\theta_1$  надо поставить в соответствие профиль  $\theta$ , в который входит температура  $T_0$ , а не  $T_c$ . При стабилизированном течении

$$T_c - \bar{T} \equiv \frac{q_c}{\alpha_{\infty}} = \frac{11 d q_c}{48 \lambda}; \quad \bar{T} = T_0 + \frac{4 q_c x}{\rho c_p \bar{u} d}.$$

Из этих двух соотношений имеем:

$$T_c - T_0 - \frac{4q_c x}{\rho c_p \bar{u} d} = \frac{11 q_c d}{48 \lambda}; \quad \frac{(T_c - T_0) \lambda}{q_c d} = \frac{11}{48} + \frac{4x a}{\bar{u} d d}.$$

Отсюда частное решение для стабилизированного теплообмена:

$$\begin{aligned} \theta'_1 &= \frac{(T - T_0) \lambda}{q_c d} = \frac{11}{48} + \frac{4}{Pe} \frac{x}{d} - \frac{3}{8} + \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{8} = \\ &= \frac{4}{Pe} \frac{x}{d} + \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{8} - \frac{7}{48}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Второе частное решение (6.20a) собственно для начального участка обозначим как  $\theta_2 = \theta - \theta'_1$ . С учетом выражений для  $\theta$  и  $\theta'_1$  первое и третье граничные условия для  $\theta_2$  принимают вид:

$$\text{при } X = 0, 0 \leq R < 1 \quad \theta_2 = \frac{7}{48} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^4}{8};$$

$$\text{при } X > 0, R = 1 \quad (\partial \theta_2 / \partial R)_R = 1 = 0.$$

Далее решение полностью повторяет процедуру решения задачи Гретца—Нуссельта. Решение ищется в виде произведения двух функций  $\theta_2(X, R) = \varphi(X)\psi(R)$ ; для  $\varphi$  решение получается в виде  $A \exp(-\varepsilon^2 X)$ , для  $\psi$  — в виде бесконечного ряда из собственных функций. Полное решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{(T - T_0) \lambda}{q_c d} = \frac{4}{Pe} \frac{x}{d} - \frac{7}{48} + \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{8} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(R) \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{Pe} \frac{x}{d}\right). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Коэффициенты  $A_n$ , собственные значения  $\varepsilon_n^2$  и собственные функции  $\psi_n(R)$  также рассчитаны и табулированы. Несмотря на совпадающие обозначения, они, конечно, другие, чем в задаче Гретца—Нуссельта. Важно, что бесконечный ряд в (6.30) сходится к нулю при больших  $X$ . Практически уже при  $X = 0,14$  безразмерная температура

$\theta = \theta'_1$ , так как  $\sum_{n=1}^{\infty} = 0$ . Следовательно, при  $q_c = \text{const}$   $l_{\text{н.т}} = 0,07 Pe d$ .

Развитие профиля температуры по длине качественно идет так же, как и при  $T_c = \text{const}$ , но теперь температура по длине растет (формально — неограниченно) во всех точках сечения канала (рис. 6.16). При  $X = 0$  температура жидкости на входе однородная:  $T = T_0$ ,  $\theta = 0$ . При малых  $X$  область с невозмущенной температурой в центре сохраняется, суживаясь по длине. Здесь также из графика (рис. 6.16, *a*) можно определить  $\Delta/r_0$  при малых  $X$ , как расстояние между  $R = 1$  и  $R$ , отвечающим границе не возмущенной по температуре области. График рис. 6.16, *б* практически повторяет в безразмерном виде рис. 6.3, *б*. Из этих рисунков следует, что при  $x > l_{\text{H.T.}}$  во всех точках сечения трубы темп возрастания температуры по длине одинаков.

Для нахождения КТО из (6.30) можно сразу найти  $T_c = T_{R=1}$ :

$$\frac{(T_c - T_0)\lambda}{q_c d} = \frac{4}{\text{Pe}} \frac{x}{d} - \frac{7}{48} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(1) \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d}\right).$$

Из теплового баланса

$$T_0 = \bar{T} - \frac{4q_c x}{\rho c_p \bar{u} d}, \quad \frac{(T_0 - \bar{T})\lambda}{q_c d} = -\frac{4}{\text{Pe}} \frac{x}{d}.$$

Складывая с предыдущим уравнением, находим окончательно:

$$\frac{(T_c - \bar{T})\lambda}{q_c d} = \frac{1}{\text{Nu}} = \frac{11}{48} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(1) \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d}\right). \quad (6.31)$$

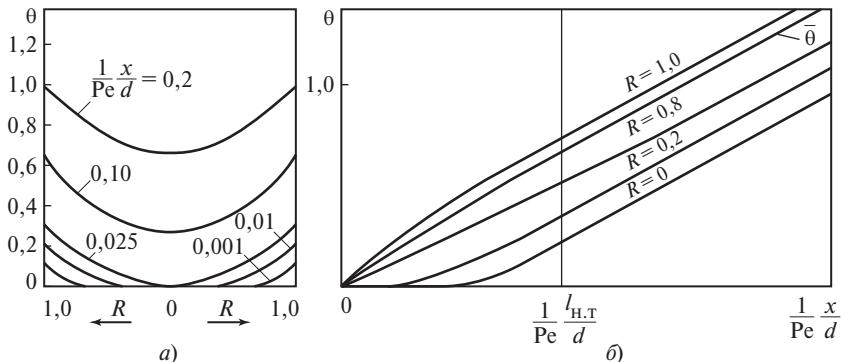


Рис. 6.16. Качественное представление профиля безразмерной температуры в различных поперечных сечениях трубы (*а*) и по длине канала при различных расстояниях от оси (*б*) при  $q_c = \text{const}$

Ряд сходится быстро, обращаясь в нуль уже при  $X = \frac{2}{\text{Pe}} \frac{x}{d} = 0,14$ , так что  $\text{Nu}_{\infty}^{(q_c)} = 48/11$ . При малых  $X$  ( $\leq 1 \cdot 10^{-3}$ ) решение (6.31) хорошо аппроксимируется степенной зависимостью (1.30а)

$$\text{Nu} = 1,31 \left( \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} \right)^{-1/3}.$$

Существует достаточно точная ( $\pm 4\%$ ) универсальная аппроксимация решения (6.31):

$$\text{Nu} = 4,36 + 1,31 \left( \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} \right)^{-1/3} \exp \left( -13 \sqrt{\frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d}} \right). \quad (6.32)$$

## 6.7. Теплообмен в начальном гидродинамическом участке при ламинарном течении в круглой трубе

Если в канале одновременно формируются динамический и температурный пограничные слои, т.е. одновременно формируются профили скорости и температуры, то говорят о теплообмене в начальном гидродинамическом участке. В технических устройствах, в частности в теплообменниках, процесс идет именно таким образом.

В изотермических условиях длина начального гидродинамического участка

$$l_{\text{н.г}} = 0,065 \text{Re} \cdot d.$$

Длина начального термического участка при полностью сформированном профиле скорости, как показано в предыдущем параграфе, составляет

$$l_{\text{н.т}} = 0,055 \text{Pe} \cdot d \text{ при } T_c = \text{const};$$

$$l_{\text{н.т}} = 0,070 \text{Pe} \cdot d \text{ при } q_c = \text{const}.$$

Конечно, эти соотношения могут несколько измениться в условиях, когда профили скорости и температуры формируются одновременно. Однако приближенно можно использовать эти формулы для оценки соотношения длин начального термического и начального гидродинамического участков. Так как константы примерно одинаковы, то

$$l_{\text{н.т}} / l_{\text{н.г}} = \text{Pr}.$$

Это соотношение практически очень важно. При  $\text{Pr} \gg 1$  длина  $l_{\text{n.t}} \gg l_{\text{n.g}}$ . Это значит, что для вязких жидкостей, для которых наиболее характерно ламинарное течение, формирование профиля скорости завершается на малой части длины начального термического участка. Следовательно, на большей части  $l_{\text{n.t}}$  теплообмен протекает в условиях, когда профиль Пуазеля сформирован, т.е. в тех условиях, которые определяют теплообмен в начальном термическом участке. Соотношения § 6.6 можно уверенно применять к расчету теплообмена на начальном гидродинамическом участке, если  $\text{Pr} \gg 1$ .

Второй предельный случай:  $\text{Pr} \ll 1$  (жидкие металлы) с практической точки зрения менее актуален. Для него, тем не менее, существует предельное решение — теплообмен при так называемом стержневом режиме течения. Так как  $l_{\text{n.t}} \ll l_{\text{n.g}}$ , то динамический пограничный слой в пределах термического начального участка чрезвычайно тонок,  $\delta \ll r_0$ . Полагая  $u = U_0 = \bar{u}$  в пределах начального термического участка, решают уравнение энергии, имеющее вид

$$\rho c_p \bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right).$$

Оно с математической точки зрения аналогично задаче об охлаждении (нагревании) бесконечного цилиндра. Поле температур и зависимость для КТО выражаются через функции Бесселя.

Важный и наиболее сложный для анализа случай — это  $\text{Pr} \approx 1$ . Профили скорости и температуры формируются примерно с одинаковой скоростью. Вблизи входа (практически при  $x/d \leq 1 \cdot 10^{-3} \text{Re}$ ) вполне можно использовать аналогию с теплообменом при ламинарном обтекании плоской пластины. Пока  $\delta \approx \Delta \ll r_0$ , эта аналогия оправдана, причем характерная скорость (аналог  $U_\infty$ ) близка к  $U_0 = \bar{u}$ , температура в ядре равна  $T_0$ , профиль избыточной температуры  $\vartheta = |T - T_c|$  выглядит аналогично профилю скорости.

$$\text{При } T_c = \text{const}: \text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0,332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}.$$

Во вводной части курса (п. 1.4.3) было показано, как это уравнение для изотермической плоской пластины преобразуется для трубы.

Для каналов  $\text{Nu}_x \frac{d}{d} = \text{Nu} \frac{x}{d}; \text{Re}_x = \text{Re} \frac{x}{d}$ . Поскольку для ламинарного течения в круглой трубе после завершения гидродинамической ста-

билизации определяющее число подобия — это  $\text{Pe} = \text{Re}\text{Pr}$ , то обсуждаемая формула представляется как

$$\text{Nu} = 0,332 \text{Pe}^{1/2} \left( \frac{x}{d} \right)^{-1/2} \text{Pr}^{-1/6} \equiv 0,332 \left( \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} \right)^{-1/2} \text{Pr}^{-1/6}. \quad (1.29a)$$

При  $q_c = \text{const}$  получается аналогичная формула с числовым множителем 0,47:

$$\text{Nu} = 0,47 \left( \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} \right)^{-1/2} \text{Pr}^{-1/6}. \quad (1.29b)$$

На графике рис. 6.17 нижняя наклонная кривая отвечает теплообмену в начальном термическом участке (например, при  $\text{Pr} \gg 1$ ). В условиях, пока идет формирование профиля скорости, когда, в частности, конечна радиальная скорость,  $v \neq 0$ , КТО выше. При этом ясно, что с ростом  $\text{Pr}$  быстрее происходит переход на зависимость для теплообмена в начальном термическом участке.

Зависимости (1.29a) и (1.29b) хорошо отражают физические закономерности процесса, но они применимы лишь на малых расстояниях от входа ( $x/d < 0,001\text{Re}$ ). Для практических расчетов получены формулы в виде поправок к зависимостям § 6.6 (6.28) и (6.32) для начального термического участка:

$$\text{Nu}_{\text{H,T}}^{(T_c)} = \text{Nu}_{\text{H,T}}^{(T_c)} \varepsilon^{(T_c)}, \quad \text{Nu}_{\text{H,T}}^{(q_c)} = \text{Nu}_{\text{H,T}}^{(q_c)} \varepsilon^{(q_c)};$$

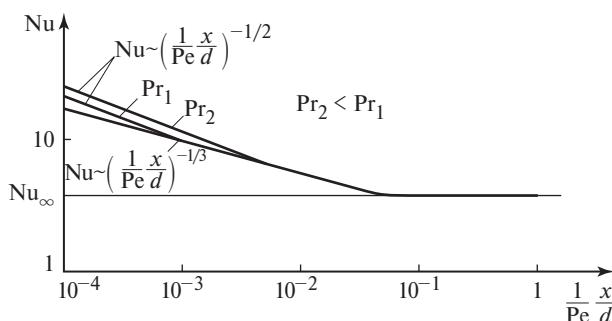


Рис. 6.17. Характер изменения безразмерного коэффициента теплоотдачи в начальном гидродинамическом участке круглой трубы при ламинарном течении

$$\varepsilon^{(T_c)} = 0,60 \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{x}{d} \right)^{-1/7} \left( 1 + \frac{1}{\text{Re}} \frac{x}{d} \right);$$

$$\varepsilon^{(q_c)} = 0,35 \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{x}{d} \right)^{-1/6} \left[ 1 + 2,85 \left( 1 + \frac{1}{\text{Re}} \frac{x}{d} \right)^{0,42} \right].$$

Эти формулы справедливы при  $x/d \leq 0,065\text{Re}$ ;  $\text{Nu}_{\text{H.T}}^{(T_c)}$  и  $\text{Nu}_{\text{H.T}}^{(q_c)}$  рассчитываются по (6.28) и (6.32) соответственно.

Легко убедиться, что при малых  $\left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{x}{d} \right)$  эти поправки в сочетании с (6.28) и (6.32) дают (1.29а) и (1.29б).

## 6.8. Начальные участки при турбулентном течении в трубах

Поскольку перенос импульса и энергии в турбулентном потоке намного интенсивнее, чем при ламинарном течении, формирование установившихся профилей скорости и температуры в трубах при турбулентном течении происходит на достаточно короткой длине. С практической точки зрения роль начальных участков при турбулентном течении не столь велика, как при ламинарном. Однако о количественных эффектах можно судить лишь на основе целенаправленных экспериментальных и теоретических (численных) исследований.

### 6.8.1. Начальный термический участок

При турбулентном течении понятие «теплообмен в начальном термическом участке» так же, как и при ламинарном, предполагает, что участку теплообмена предшествует адиабатный участок гидродинамической стабилизации. Но в отличие от ламинарного течения, где при любых  $\text{Re} < 2300$  стабилизированному течению отвечает универсальный параболический профиль скорости, при турбулентном течении каждому конкретному числу  $\text{Re} > 2300$  отвечает свой стабилизованный профиль скорости. Численные исследования с использованием определенных соотношений для  $\varepsilon_\tau/v$  и  $\text{Pr}_T$  позволяют сравнивать закономерности теплообмена в начальном термическом участке в широком диапазоне чисел  $\text{Pr}$ . Результаты таких исследований пуб-

ликовались в 1960—1980-е годы; на рис. 6.18 представлены типичные результаты расчетов для развитого турбулентного течения ( $Re = 3 \cdot 10^5$ ) в гладкой трубе согласно [34].

Для неметаллических жидкостей и газов ( $Pr \geq 0,7$ ) длина начального термического участка достаточно мала. Она слабо зависит от числа  $Re$  и вида граничных условий. При  $Pr \geq 10$  практически при любых  $Re$  отношение  $Nu/Nu_\infty \leq 1,05$  уже при  $x/d = 5$ . Для газов ( $Pr = 0,72$ ) длина начального термического участка больше, но и здесь практически всегда при  $x/d > 10$  отличие числа  $Nu$  от стабилизированного значения находится на уровне погрешности экспериментальных измерений (6—7 %). При  $x/d = 5$  это отличие более заметно (около 15 %) и несколько растет с ростом  $Re$ .

Заметно сильнее эффект начального участка проявляется для жидких металлов: при  $x/d = 5$  числа  $Nu$  для жидкости с  $Pr = 0,02$  отличается от  $Nu_\infty$  примерно на 30 %. Здесь заметнее эффект вида граничных условий: если для газов и капельных жидкостей кривые для  $T_c = \text{const}$  и  $q_c = \text{const}$  сливаются, то для жидкого металла влияние начального участка сильнее проявляется при постоянной температуре стенки (см. рис. 6.18). Но и для жидких металлов при  $x/d = 14$  число  $Nu$  отличается от  $Nu_\infty$  примерно на 10 %.

Расчетные исследования в целом подтверждаются экспериментами. В 80-е годы Л.А. Сукомел (кафедра ИТФ МЭИ) тщательно исследовала теплообмен в начальном термическом участке при турбулентном течении воды при  $Re = 5 \cdot 10^3 \div 35 \cdot 10^3$ ,  $Pr = 5 \div 7$ . В опытах различие чисел  $Nu$  и  $Nu_\infty$  можно уловить лишь тогда, когда оно

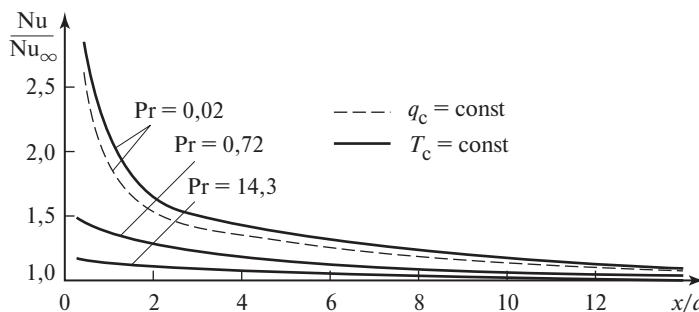


Рис. 6.18. Результаты численных исследований теплоотдачи в начальном термическом участке круглой трубы при турбулентном течении,  $Re = 3 \cdot 10^5$  [34]

более 5 %. Из условия  $Nu_{h.t.}/Nu_\infty = 1,05$  опытные данные аппроксимированы как  $l_{h.t.} = \frac{19 \cdot 10^3}{Re^{0,95}} d$ . Практически это означает, что в указанных экспериментах  $l_{h.t.}/d < 5$ .

Надежное расчетное соотношение для КТО в начальном термическом участке при турбулентном течении в круглой трубе предложено Б.С. Петуховым и В.А. Кургановым (оно обобщает результаты как измерений, так и расчетов):

$$\frac{Nu}{Nu_\infty} = 1 + 0,416 Pr^{-0,4} \left( \frac{x}{d} \right)^{-0,25} \left( 1 + \frac{3600}{Re \sqrt{x/d}} \right) \exp \left( -0,17 \frac{x}{d} \right). \quad (6.33)$$

Формула справедлива при  $Re = 4 \cdot 10^3 \div 5 \cdot 10^6$ ,  $Pr = 0,5 \div 100$ . Число  $Nu_\infty$  рассчитывается по формуле (6.19) для стабилизированного теплообмена. Таблица 6.5 дает представление об отличиях  $Nu$  от  $Nu_\infty$  при разных числах  $Pr$  и  $Re = 10^4$ . (По формуле Л.А. Сукомел при  $Pr = 7$ ,  $Re = 10^4$  длина  $l_{h.t.} = 3d$ , что близко к тому, что дает (6.33) из условия  $Nu/Nu_\infty = 1,05$ .) Все выше сформулированные качественные закономерности табл. 6.5 иллюстрирует наглядно; в частности, видно, что при  $x/d \geq 10$  эффект начального термического участка снижается до уровня ошибки экспериментальных измерений.

Таблица 6.5. Значения  $Nu/Nu_\infty$  на начальном термическом участке круглой трубы при  $Re = 10^4$

Pr	$x/d$		
	2	5	10
0,7	1,36	1,16	1,055
1,0	1,31	1,14	1,05
5	1,16	1,07	1,025
10	1,12	1,055	1,02

### 6.8.2. Начальный гидродинамический участок

В системах охлаждения и в теплообменниках жидкость обычно поступает в канал из коллектора или приемной камеры. При этом на входной кромке происходит отрыв потока, поскольку линии тока на входе направлены к центру канала (рис. 6.19) — это так называемый

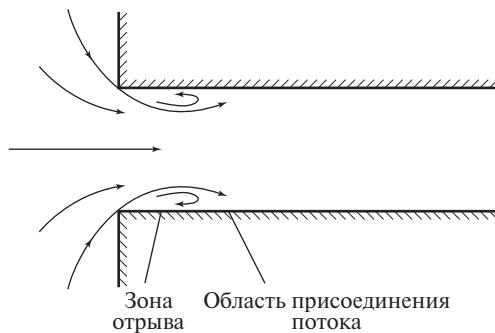


Рис. 6.19. Схема течения жидкости при входе в трубу с острой кромкой

вход с острой кромкой. Можно предполагать, что в застойной зоне сразу после отрыва теплообмен должен быть менее интенсивным даже в сравнении со стабилизированным режимом, хотя надежные измерения локального КТО на длине порядка одного калибра ( $\approx d$ ) произвести очень трудно. В зоне присоединения (при  $x \approx d$ ), напротив, КТО максимален. Далее на очень коротком отрезке длины канала из-за высокой интенсивности турбулентного переноса достигается стабилизированный теплообмен. Эксперименты показывают, что длина начального (гидродинамического и теплового) участка обычно составляет чуть более 10 калибров. В ЭНИИ им. Г.М. Кржижановского (С.С. Филимонов и Б.А. Хрусталев) проведены широкие по числам  $Re$  опытные исследования с водой ( $Re$  — до  $8 \cdot 10^4$ ), результаты которых обобщены эмпирической формулой

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_\infty} = 1 + 1,2 \left( \frac{x}{d} \right)^{-1}. \quad (6.34)$$

Согласно этой формуле при  $x/d \geq 20$  отличие  $\text{Nu}$  от  $\text{Nu}_\infty$  не более 6 %. Но и при  $x/d = 10$  отличие лишь 12 %. Эти (и другие) исследования фактически показывают, что в обычных теплообменниках, когда  $l/d = O(100)$  при расчете среднего КТО поправку на начальный участок при турбулентном течении жидкости можно не вводить.

Случай с плавным входом непосредственного прикладного значения не имеет, но представляет интерес для понимания физических закономерностей процесса. Обычно для создания на входе в прямую трубу однородного профиля скорости используют специально рассчитанный и испытанный профиль суживающегося входного уст-

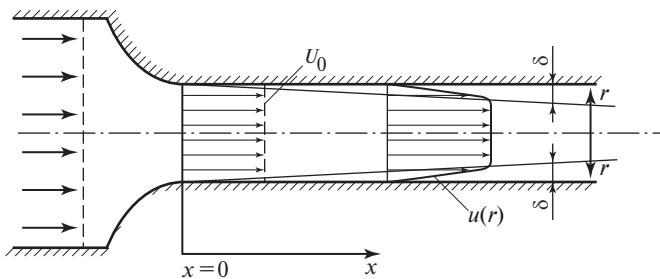


Рис. 6.20. Схема развития течения на входе в трубу с плавным входом (через сопло Витошинского)

ройства — сопло Витошинского (рис. 6.20). В конфузорном канале турбулентность подавляется, так что на входе в прямой канал обеспечивается ламинарный режим течения, даже при больших  $Re = \bar{u}d/v$ . На входе в прямой канал ( $x = 0$ ) обеспечивается в рассматриваемом случае практически однородная скорость,  $u = U_0$ .

При малых  $x$  на внутренней поверхности трубы формируется динамический пограничный слой, толщина которого  $\delta$  растет по тому же примерно закону, который характерен для обтекания плоской пластины:

$$\delta = 5xRe_x^{-1/2}, \text{ т.е. } \delta = 5x\left(Re\frac{x}{d}\right)^{-1/2},$$

так как  $Re_x = Re\frac{x}{d}$ .

В ядре потока, которое суживается по мере роста толщины пограничного слоя, сохраняется однородная скорость, значение которой, естественно, возрастает при неизменной среднемассовой скорости.

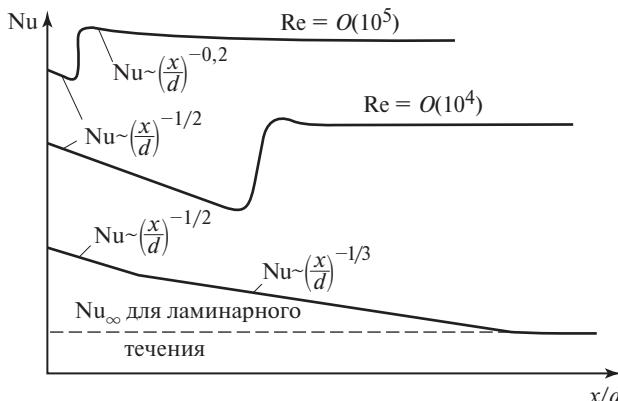
Если принять, что ламинарный режим в пограничном слое теряет устойчивость при  $Re_x \approx 3 \cdot 10^5$ , или  $Re\frac{x}{d} \approx 3 \cdot 10^5$ , то при  $Re=10^4$  ламинарный пограничный слой сохраняется до  $x/d \leq 30$ . При  $x = 30d$  толщина пограничного слоя  $\delta = 150d(3 \cdot 10^5)^{-1/2} \approx 0,275d = 0,55r_0$ . Поскольку при турбулентном переходе толщина пограничного слоя возрастает, можно ожидать, что в этом случае турбулентный переход очень быстро приведет к установлению стабилизированного турбулентного течения и теплообмена в канале.

При  $\text{Re} = 10^5$  турбулентный переход произойдет при  $x = 3d$ , когда  $\delta \approx 0,055r_0$ . В этом случае толщина пограничного слоя даже после турбулентного перехода, вероятно, составляет малую часть радиуса трубы. Это значит, что теплообмен в ламинарном пограничном слое сменится теплообменом в турбулентном погранслое и лишь заметно ниже по течению установится стабилизированный теплообмен в трубе.

С учетом сказанного на рис. 6.21 приведены три типа качественно различных зависимостей безразмерного коэффициента теплоотдачи от относительного расстояния от входа в канал.

Нижняя кривая воспроизводит зависимость рис. 6.17 для теплообмена при ламинарном течении при некотором фиксированном значении числа Прандтля. Здесь наблюдается теплообмен в ламинарном пограничном слое, когда  $\alpha \sim x^{-1/2}$ ; при  $\text{Pr} > 1$  режим теплообмена в ламинарном пограничном слое сменяется режимом теплообмена в начальном термическом участке трубы с законом  $\alpha \sim x^{-1/3}$ . Чем больше число  $\text{Pr}$ , тем раньше происходит переход от условий теплообмена в погранслое к условиям теплообмена в начальном термическом участке круглой трубы. Наконец, при большой длине наступит стабилизированный теплообмен ( $\text{Nu} = \text{Nu}_\infty$ , т.е. 4,36 или 3,66).

При  $\text{Re} = O(10^4)$  сначала на относительно большой длине (около  $30d$ ) наблюдается теплообмен в ламинарном пограничном слое с законом  $\alpha \sim x^{-1/2}$ . Переход к турбулентному режиму практически



**Рис. 6.21. Характер изменения безразмерного коэффициента теплоотдачи при плавном входе в круглую трубу при различных режимах течения**

сразу приводит к выходу на число  $Nu_\infty$ , отвечающее стабилизированному теплообмену при турбулентном течении в трубе.

Наконец, при  $Re = O(10^5)$  существует возможность наблюдать сначала ( $x \leq 3d$ ) теплообмен в ламинарном пограничном слое, затем резкое возрастание КТО из-за турбулентного перехода, после чего наступает режим теплообмена в турбулентном пограничном слое «на пластине», с законом  $\alpha \sim x^{-0,2}$ . После смыкания турбулентных погранслоев, развивающихся на противоположных стенках канала, установится стабилизированный теплообмен в трубе.

Принципиальных трудностей в расчете теплообмена на каждом из этих участков нет, хотя практический интерес это, скорее всего, может представлять только при  $Re < 2300$ , когда указанная смена режимов может происходить не при использовании специального сопла Витошинского, а в обычном прямом канале.

## **6.9. Влияние переменности теплофизических свойств на теплообмен и гидравлическое сопротивление при течении в трубах**

### **6.9.1. Общие положения**

До сих пор практически во всех рассмотренных задачах принималось, что изменением теплофизических свойств жидкости в процессе теплоотдачи можно пренебречь. Правда, для поперечного обтекания одиночного цилиндра, пучков труб и теплообмена в турбулентном пограничном слое поправка на переменность теплофизических свойств в расчетных уравнениях вводилась.

В реальном процессе теплообмена теплофизические свойства могут изменяться достаточно заметно. Например, у воды вязкость изменяется с  $1 \cdot 10^{-3}$  до  $3,5 \cdot 10^{-4}$  кг/(м · с) (почти втрое) при росте температуры от 20 до 80 °С. Ясно, что при этом в случае  $\rho \bar{u} = \text{idem}$  число Re возрастет втрое, а локальный КТО приблизительно в 2,3 раза (при турбулентном течении). Правда, для нагрева воды на 60 К при типичных значениях массовой скорости и теплового потока требуется канал большой длины (500—1000  $l/d$ ), так что в одном ходе теплообменника такого изменения средней температуры воды обычно не достигается. Но и при вдвое меньшем нагреве — до 50 К вязкость уменьшится до  $5,4 \cdot 10^{-4}$  кг/(м · с), КТО при турбулентном течении вырастет на 65 %. Для более вязких капельных жидкостей изменение вязкости по длине теплообменника может быть более значительным.

Однако рассмотренный случай может не вызвать никаких трудностей в расчетах теплообменника, поскольку КТО рассчитывают по локальным свойствам жидкости как  $\alpha = q/[T_c(x) - \bar{T}(x)]$ . Когда говорят о влиянии переменности теплофизических свойств жидкости на теплообмен, имеют в виду, что эти свойства изменяются поперек потока, т.е. в трубе в радиальном направлении. Очевидно, радиальный градиент температуры тем больше, чем больше  $q_c$ , так что актуальность рассматриваемой проблемы возрастает с увеличением  $q_c$ .

В теоретическом анализе в случае ламинарного течения учет переменности теплофизических свойств создает — при сегодняшнем уровне развития вычислительной техники и использования численных методов — только технические трудности. При изменяющихся с температурой вязкости и теплопроводности в правой части уравнений  $x$ -про-

екции импульса (6.2а) и энергии (6.4а) вместо  $\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$  и  $\frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$

необходимо писать соответственно  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$  и  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$ .

Численные решения задачи в такой постановке сегодня вполне по силам студентам; соответствующие программы включены в коммерческие компьютерные коды.

В случае турбулентного течения проблема усложняется и, можно сказать, приобретает принципиальный характер. При использовании любых полуэмпирических моделей турбулентности в математическое описание входит эмпирическая информация; для однопараметрических алгебраических моделей — зависимости  $\varepsilon_\tau/v$  и  $Pr_T$  от координаты и режимных параметров. Эти зависимости получены на основе измерений в «простых» условиях; для турбулентной вязкости  $\varepsilon_\tau/v$  — чаще всего в изотермических потоках. Перенос таких зависимостей на совершенно иные условия не гарантирует успеха. Разработка более сложных моделей турбулентного переноса в ряде случаев позволяет описать опытные данные по теплообмену, однако эти модели проверяются в основном по интегральным характеристикам ( $\xi, \alpha$ ), что в общем случае оставляет сомнения в адекватности моделей действительному процессу.

Инженерные методы расчета теплообмена при переменных свойствах теплоносителя основаны на уравнениях, полученных в предположении, что свойства постоянны. К этим уравнениям вводятся

эмпирические поправки на переменность теплофизических свойств. Такой приближенный метод в целом себя оправдывает. Именно этот метод рассматривается ниже.

В отношении влияния переменности теплофизических свойств на теплообмен и гидравлическое сопротивление целесообразно раздельно анализировать капельные жидкости и газы. В капельных жидкостях возможный диапазон изменения температуры поперек потока относительно невелик. Сама область жидкого состояния — от  $T_{\text{т.т}}$  до  $T_{\text{кр}}$  у некоторых веществ достаточно узкая, а практически в условиях теплообмена в канале эта область ограничена сверху не критической  $T_{\text{кр}}$ , а температурой насыщения  $T_s(p)$ . Только у жидких металлов температурный диапазон жидкого состояния весьма велик, но для этих веществ сама проблема не актуальна: из-за высокой теплопроводности больших радиальных градиентов температуры не бывает. Для неметаллических жидкостей в относительно узком диапазоне изменения температуры существенным оказывается только изменение вязкости. Исключение представляет область окологранических давлений. В газах с изменением температуры сильно изменяются  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $c_p$  — все важные для теплообмена свойства.

### 6.9.2. Влияние переменности свойств жидкости на теплообмен и гидравлическое сопротивление

У неметаллических капельных жидкостей динамическая вязкость всегда снижается с ростом температуры,  $\partial\mu/\partial T < 0$ . Самы по себе изменения вязкости могут быть весьма заметными, что отражает табл. 6.6 для ряда технически важных жидкостей. Даже у воды в диапазоне до 100 °C вязкость уменьшается более чем в 6 раз. У «нормально вязких» жидкостей эти изменения еще сильнее (глицерин, масла, мазут); причем у многих жидкостей существует достаточно

Таблица 6.6. Вязкость некоторых жидкостей  $\mu \cdot 10^3$ , Па · с,  
при различных температурах

Жидкость	Temperatura, °C				
	0	20	80	90	100
Вода	1,76	1,0	0,35	0,31	0,279
Пропан	—	0,11	—	0,04	—
Дизельное топливо	—	7,8	1,8	—	1,26
Трансформаторное масло	55,2	21,1	3,24	2,59	1,74

узкий диапазон температур, в котором вязкость изменяется особенно существенно. Абсолютное значение динамического коэффициента вязкости не зависит от того, в каком диапазоне абсолютных температур данное вещество существует в виде жидкости. Например, криожидкости (гелий и водород особенно), область существования которых относится к температурам, при которых остальные вещества находятся в твердом состоянии, имеют вязкость существенно более низкую, чем вода.

На рис. 6.22 показан (качественно) типичный график изменения вязкости с температурой; из этого рисунка ясно, как соотносится вязкость жидкости при среднемассовой температуре  $\bar{T}$  и при температуре поверхности теплообмена  $T_c$ :  $\mu_{ж} = \mu(\bar{T}) > \mu_{c2} = \mu(T_{c2})$  — в условиях нагрева жидкости ( $T_c > \bar{T}$ ); при охлаждении жидкости  $T_c = T_{c1} < \bar{T}$ ,  $\mu_{c1} > \mu_{ж}$ .

Легко показать, что в первом случае из-за переменности вязкости в радиальном направлении интенсивность теплообмена растет, а коэффициент гидравлического сопротивления  $\xi$  снижается в сравнении со случаем постоянных по сечению свойств. При охлаждении жидкости, напротив, КТО снижается,  $\xi$  возрастает в сравнении с гипотетическим случаем постоянных свойств.

При ламинарном стабилизированном течении в изотермических условиях профиль скорости — парабола Пуазейля. При нагреве жидкости у стенки вязкость снижается, что вызывает увеличение скорости у стенки и снижение в центре, поскольку массовый расход жид-

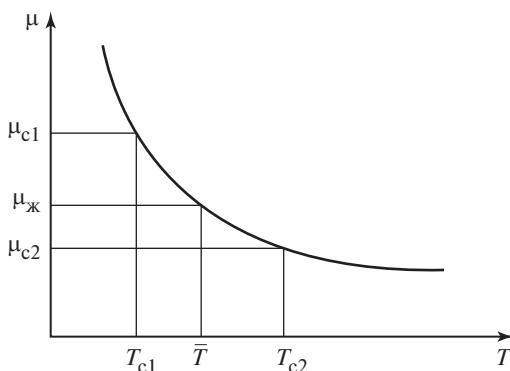


Рис. 6.22. Характер изменения вязкости жидкости с температурой

кости не изменяется. Профиль скорости деформируется, становясь более похожим на профиль при турбулентном течении, КТО возрастает. При  $T_c < \bar{T}$ , напротив, увеличение вязкости жидкости у стенки вызывает снижение скорости в этой области; при  $G = \text{idem}$  в центре скорость возрастает. Такое изменение формы профиля скорости ведет к снижению КТО.

При стабилизированном турбулентном течении в трубе для неметаллической капельной жидкости основное термическое сопротивление теплопереносу сосредоточено в теплопроводном подслое  $\Delta_\lambda$ , т.е.  $\alpha \sim \lambda / \Delta_\lambda$ :

$$\Delta_\lambda = \delta_\mu \text{Pr}^{-1/3}, \quad \text{Pr} = v/a, \quad \delta_\mu = C_0 v / v_* = \frac{C_0 v}{\bar{u} \sqrt{\xi/8}}, \quad \xi \sim \text{Re}^{-(0,2 \div 0,25)},$$

т.е.  $\sqrt{\xi} \sim v^{0,12}$ ,  $\delta_\mu \sim v^{0,88}$ . Их этих соотношений следует, что приблизительно  $\alpha \sim v^{-(0,55 \div 0,58)}$ . Ясно, что уменьшение вязкости жидкости на стенке при  $T_c > \bar{T}$  ведет к росту  $\alpha$ , а увеличение при  $T_c < \bar{T}$  — к снижению  $\alpha$  (в сравнении с условиями постоянных свойств).

Этот качественный анализ показывает, что поправку на влияние переменности свойств жидкости на теплообмен можно для обоих режимов течения вводить в форме

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_{\text{п.с}}} = \left( \frac{\mu_c}{\mu_{\text{ж}}} \right)^n, \quad (6.35)$$

где  $\mu_c = \mu(T_c)$ ;  $\mu_{\text{ж}} = \mu(\bar{T})$ ;  $\text{Nu}_{\text{п.с}}$  рассчитывается по формулам для жидкости с постоянными свойствами (в зависимости от режима течения и вида граничных условий); очевидно,  $n < 0$ .

Графики зависимостей (6.35) при различных режимах течения и разном направлении теплового потока представлены на рис. 6.23. При ламинарном течении (как стабилизированном, так и на входных участках)  $n = -0,14$  при  $T_c = \text{const}$ ,  $n = -1/6$  при  $q_c = \text{const}$ . При турбулентном течении влияние переменных свойств на теплообмен по-разному проявляется для условий нагрева ( $T_c > \bar{T}$ ), когда  $n = -0,11$ , и охлаждения ( $T_c < \bar{T}$ ), когда  $n = -0,25$ . Ясно, что в некоторых случаях, особенно в условиях охлаждения, эффект переменной вязкости может оказаться весьма заметным.

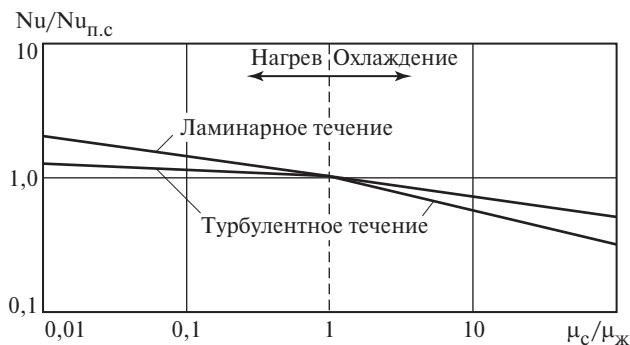


Рис. 6.23. Зависимость безразмерного коэффициента теплоотдачи от изменения вязкости жидкости

Из определения коэффициента гидравлического сопротивления трения:

$$\tau_c = \frac{\xi}{8} \rho \bar{u}^2 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_0}; \quad \xi = \frac{8v}{\bar{u}^2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_0},$$

следует, что  $\xi$  должен расти с ростом вязкости жидкости в пристеночном слое. Производная  $(\partial u / \partial r)_{r=r_0}$  тоже изменяется с изменением  $v$ , но прямой эффект, конечно, сильнее. Поэтому в формуле вида

$$\xi_{п.с} = \left( \frac{\mu_c}{\mu_{ж}} \right)^m \quad (6.36)$$

$m > 0$ . Однако зависимость (6.36) оказывается более сложной, чем (6.35), так как  $m = m(x/d, Re, \mu_c / \mu_{ж})$ , т.е.  $m \neq \text{const}$ . Особенno сложной является зависимость  $\xi$  от изменения вязкости по сечению в случае ламинарного течения. При малых значениях приведенной длины  $\frac{1}{Re} \frac{x}{d}$  большая часть сечения трубы занята жидкостью с однородной температурой, равной  $T_0$  (температура на входе в канал), поэтому влияние переменности вязкости здесь проявляется слабо. Кроме того, в условиях формирования профиля скорости (начальный гидродинамический участок) значения  $\xi_{п.с}$  намного больше тех, которые отвечают стабилизированному течению и определяются формулой  $\xi_{п.с} = 64/Re$ .

По мере приближения к условиям стабилизированного теплообмена влияние переменности вязкости на  $\xi$  становится более заметным.

Для практически наиболее важной области  $\frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} \geq 6 \cdot 10^{-4}$  при постоянной температуре стенки справедливо следующее выражение для  $m$ :

$$m = 2,3 \left( \text{Pe} \frac{d}{l} \right)^{-0,3} \left( \frac{\mu_c}{\mu_{\text{ж}}} \right)^{-0,062}.$$

Это значение  $m$  используется в (6.36), при этом  $\xi_{\text{n.c.}} = 64/\text{Re}$ , число  $\text{Re}$  рассчитывается по  $\mu_{\text{ж}}$ ;  $\xi$  и  $\xi_{\text{n.c.}}$  — это осредненные значения для всей длины канала.

При турбулентном течении, как показали подробные исследования Лафэ (Lafay, 1975 г.) на воде при  $\text{Re} = 10^4 \div 3 \cdot 10^5$ ,  $\mu_c/\mu_{\text{ж}} = 0,3 \div 1,0$ , значение  $m$  тоже не является постоянным. (Эти результаты достаточно подробно изложены в [31].) Но при турбулентном течении практически отсутствует эффект начального участка, т.е.  $m = m(\text{Re}, \mu_c/\mu)$ . Лафэ обобщил свои измерения эмпирическими уравнениями для  $m$ . Для приближенных расчетов обычно используют осредненные значения:  $m = 0,17$  при  $T_c > \bar{T}$  и  $m = 0,24$  при  $T_c < \bar{T}$ .

### 6.9.3. Влияние переменности свойств газов на теплообмен и гидравлическое сопротивление

Температурный диапазон применения газов в различных теплообменных устройствах чрезвычайно широк — от криогенных до 1000—2000 К. В ПГТУ достигнут уровень 1400 °С, в авиационных ГТУ температуры еще выше. Ограничения на температуру газов, используемых в современных технологиях, связаны со стойкостью конструкционных материалов.

При этом с изменением температуры сильно изменяются все важные для переноса импульса и энергии свойства газов. При невысоких давлениях, характерных для работы теплообменников, в качестве уравнения состояния можно приближенно использовать уравнение идеального газа:  $p = \rho R_i T$ , так что в изобарических условиях  $\rho \sim T^{-1}$ .

Теплоемкость газов монотонно (но не очень сильно) растет с увеличением  $T$ . Намного сильнее растут с температурой вязкость  $\mu$  и теплопроводность  $\lambda$ , причем, чем больше атомность газа, тем

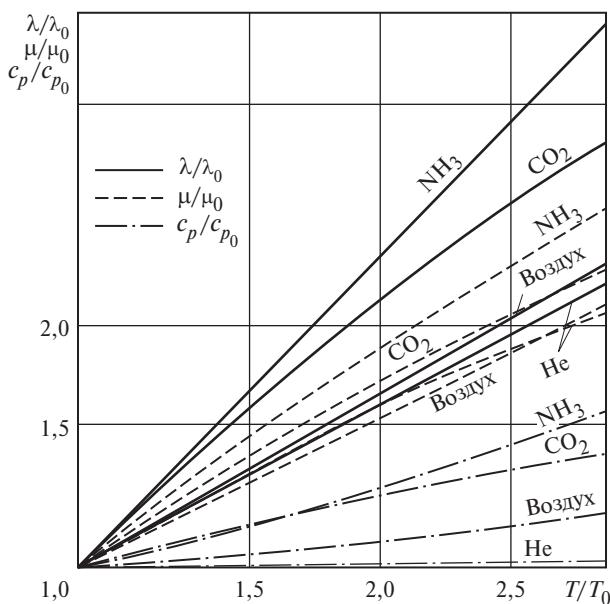


Рис. 6.24. Зависимости свойств газов от температуры

сильнее зависимости свойств от температуры  $T$  (рис. 6.24). Обычно зависимости свойств от (абсолютной) температуры газа неплохо аппроксимируются степенными соотношениями:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n_\lambda}, \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n_\mu}, \quad \frac{c_p}{c_{p0}} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n_c}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{n_\rho}. \quad (6.37)$$

Очевидно, что  $n_\rho = -1$ ;  $n_c = 0,1 \div 0,3$ ,  $n_\mu = n_\lambda = 0,5 \div 1,5$  ( $n_\lambda \approx n_\mu$ ).

В качестве температуры отнесения чаще всего выбирают близкую к комнатной ( $T_0 = 293$ , или 273, или 300 К; на рис. 6.24  $T_0 = 372$  К). Сложный характер влияния температуры  $T$  на все важные для теплообмена и сопротивления свойства делает почти невозможным получение аналитических зависимостей для поправочных соотношений. В то же время вид зависимостей свойств от  $T$  (6.37) подсказывает структуру формул для введения поправок:

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_{\text{n.c}}} = \left( \frac{T_c}{\bar{T}} \right)^n; \quad (6.38)$$

$$\frac{\xi}{\xi_{\text{п.с}}} = \left( \frac{T_c}{\bar{T}} \right)^m. \quad (6.39)$$

Знак (и тем более численные значения)  $n$  и  $m$  предсказать из качественных соображений (по аналогии с капельными жидкостями) почти невозможно. При ламинарном течении оказывается, что из-за взаимной компенсации различных влияний (с ростом температуры растут  $\lambda$  и  $v$ ) переменность свойств газа не оказывается на интенсивности теплоотдачи, т.е.  $n = 0$  при  $Re \leq 2300$  с любым направлением теплового потока  $q$ . Этот вывод сохраняется, пока не станет существенным влияние свободной конвекции.

А влияние переменности свойств на коэффициент гидравлического сопротивления  $\xi$  при ламинарном течении оказывается исключительно сильным. Это обусловлено тем, что в газах с ростом температуры одновременно растет динамическая вязкость  $\mu$  и падает плотность  $\rho$ , т.е. кинематическая вязкость  $v$  возрастает с температурой очень сильно. В итоге:  $m = 1$  при любом направлении  $q$ .

При турбулентном течении в трубах в случае нагрева газа  $n = -0,5$ , что хорошо подтверждается как результатами опытных измерений, так и различными теоретическими моделями. Очевидно, в этом случае эффект увеличения  $v$  (рост  $\delta_\mu$  и подавление турбулентности) намного превосходит влияние роста  $\lambda$ .

При охлаждении газа ( $T_c < \bar{T}$ ) различные эффекты взаимно компенсируются,  $n = 0$ . Это вывод, следующий из немногочисленных опытных измерений (эксперименты с охлаждением более трудны, чем в условиях нагрева), достаточно долго ставился под сомнение авторами расчетных работ, в которых прогнозировалось «симметричное» влияние температурного фактора при охлаждении, т.е. возрастание коэффициента теплоотдачи за счет переменности свойств ( $n < 0$ ). Сегодня в этом споре можно поставить точку:  $n = 0$ , отсутствие влияния переменности свойств на теплообмен при охлаждении газа подтверждается как физическими, так и наиболее надежными численными исследованиями.

Несколько неожиданно влияние переменности свойств на коэффициент трения оказалось при турбулентном течении довольно слабым. Согласно В.М. Кейсу [19]  $m = -0,1$  в (6.39) при любом направлении  $q$ . Отечественные исследования Лельчука и Дилякина (см. [31]) в целом этот вывод подтверждают: у них  $m = -(0,06 \div 0,15)$  для разных газов.

Следует отметить, что при турбулентном течении газа в условиях достаточно высоких плотностей теплового потока  $q$  (большие  $T_c/\bar{T}$ ) изменяются обычные оценки длины начального термического (и гидродинамического) участка. Из-за изменения по длине всех свойств перестройка профилей скорости и температуры затягивается на несколько десятков калибров (до  $x/d = 100$ ). Большой объем опытных исследований В.А. Курганова и др. [31] с весьма различными газами (He, Ar, N<sub>2</sub>, воздух, CO<sub>2</sub>, NH<sub>3</sub>, H<sub>2</sub>O и др.) был выполнен и обобщен довольно громоздкими, но точными и проверенными в независимых работах А.А. Жукаускаса, формулами:

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_0} = \exp \left\{ -K \left[ af_1 \left( \frac{x}{d} \right) + n_\mu f_2 \left( \frac{x}{d} \right) K \right] \right\}, \quad (6.40)$$

где

$$\frac{\text{Nu}_0}{\text{Nu}_\infty} = 1 + 0,416 \text{Pr}^{-0,4} \left( \frac{x}{d} \right)^{-0,25} \left( 1 + \frac{3600}{\text{Re} \sqrt{x/d}} \right) \exp \left( -0,17 \frac{x}{d} \right); \quad (6.33)$$

$$K = \frac{q_c d}{\lambda_{\text{ж}} \bar{T} \text{Nu}_0};$$

$$a = -0,53 n_p - n_\lambda / 3 - n_c / 4;$$

$$f_1 \left( \frac{x}{d} \right) = 1 - \exp \left( -0,1 \frac{x}{d} \right);$$

$$f_2 \left( \frac{x}{d} \right) = \frac{1,25 \left( 0,01 \frac{x}{d} \right)^2}{1 + \left( 0,01 \frac{x}{d} \right)^2}.$$

В этих соотношениях Nu<sub>∞</sub> рассчитывается по формуле (6.19) по свойствам жидкости в данном сечении канала; Nu<sub>0</sub>, как это подчеркнуто номером формулы (6.33), соответствует теплообмену в начальном термическом участке при турбулентном течении в трубе.

Величины  $n_p$ ,  $n_\lambda$ ,  $n_\mu$  — показатели степени в формулах (6.37) зависимостей свойств газов от температуры. Для одноатомных газов

Таблица 6.7. Поправки к расчетным формулам для коэффициентов теплоотдачи и трения на переменность теплофизических свойств

		Жидкости	Газы
Соотношения для поправок		$\frac{Nu}{Nu_{\text{п.с}}} = \left( \frac{\mu_c}{\mu_{\text{ж}}} \right)^n ; \frac{\xi}{\xi_{\text{п.с}}} = \left( \frac{\mu_c}{\mu_{\text{ж}}} \right)^m$	$\frac{Nu}{Nu_{\text{п.с}}} = \left( \frac{T_c}{T_{\text{ж}}} \right)^n ; \frac{\xi}{\xi_{\text{п.с}}} = \left( \frac{T_c}{T_{\text{ж}}} \right)^m$
Значения $n, m$	Ламинарное течение	$n < 0; n = -0,14$ при $T_c = \text{const}$ , $n = -1/6$ при $q_c = \text{const}$ , $m > 0; m = m(x/d, Re, \mu_c/\mu_{\text{ж}})$	$n = 0$ $m = 1$ } при $T_c > T_{\text{ж}}$ и $T_c < T_{\text{ж}}$
	Турбулентное течение	$n < 0; n = -0,11$ при $T_c > T_{\text{ж}}$ , $n = -0,25$ при $T_c < T_{\text{ж}}$ , $m > 0; m = 0,17$ при $T_c > T_{\text{ж}}$ , $m = 0,24$ при $T_c < T_{\text{ж}}$	$n = -0,5$ при $T_c > T_{\text{ж}}$ , $n = 0$ при $T_c < T_{\text{ж}}$ , $m \approx -0,1$ при $T_c > T_{\text{ж}}$ и $T_c < T_{\text{ж}}$

$n_{\mu} = 0,67, a = 0,3$ ; для двухатомных газов  $n_{\mu} = 0,70, a = 0,26$ . Как уже говорилось, во всех случаях принимается  $n_{\rho} = -1$ . Для многоатомных газов сведения об этих величинах даются, например, в [31]. Здесь лишь укажем, что для водяного пара  $n_{\mu} = 1,18, a = 0,013$ , для углекислого газа  $n_{\mu} = 0,77, a = 0,09$ .

В заключение настоящего параграфа приводится сводная таблица (табл. 6.7), включающая основную информацию о методах введения поправок на переменность физических свойств. Фактически этой информации достаточно для приближенных инженерных расчетов; в таблице не даются лишь конкретные формулы для  $t$  при ламинарном течении капельной жидкости.

## 6.10. Влияние свободной конвекции на теплообмен при вынужденном течении в трубах

### 6.10.1. Общие положения

Свободная конвекция возникает как результат действия массовых сил на жидкость с неоднородной плотностью. В изотермических условиях действие массовых сил уравновешивается гидростатическим давлением, которое фактически и создается массовыми силами. В отсутствие вынужденного движения гидростатическому равновесию, т.е. равенству массовых сил и сил давления, соответствует неподвижная жидкость. При вынужденном течении однородной (изотермической) жидкости массовые силы и гидростатическое давление также уравновешены и не влияют на поле скоростей в жидкости.

При неоднородной плотности жидкости указанное равновесие нарушается, возникает свободноконвективное движение. В этом случае уравнение баланса импульса должно включать равенство сил инерции, вязкости, массовых и давления. Естественно, и при вынужденном движении в общем случае необходимо учитывать все эти четыре силы. При этом, если процесс теплообмена при вынужденной конвекции осуществляется в условиях нормальной земной гравитации, эффект свободноконвективного движения присутствует всегда, так как в жидкости поле температуры (и, следовательно, плотности) неоднородно. В общем случае, следовательно, на вынужденное течение всегда накладывается свободноконвективное течение.

В предшествующем анализе (для пограничного слоя, и для течения в трубах) этот эффект не учитывался. Конечно, это делалось, прежде всего, в целях упрощения анализа. Но какая при этом допускается ошибка?

Для ответа на этот вопрос удобно прибегнуть к анализу уравнений подобия, описывающих теплообмен при вынужденном течении жидкости в трубах и при свободной конвекции. При вынужденной конвекции  $Nu = Nu(Re, Pr)$ , при свободной конвекции  $Nu = Nu(Gr, Pr)$ . Ясно, что при оценке относительной роли вынужденной и свободной конвекции  $Pr = idem$ ,  $Re = \rho U_0 d / \mu$ ,  $Gr = g\beta\Delta T d^3 / v^2$  или  $Gr^* = g\beta q_c d^4 / (\lambda v^2)$ . В гл. 5 было показано, что по физическому содержанию  $Gr = Re_{c,k}^2$ , где  $Re_{c,k}$  строится по максимальной скорости свободной конвекции

$$U_0 = \sqrt{g\beta\Delta T d} \quad \text{или} \quad U_0^* = \sqrt{g\beta q_c d^2 / \lambda}.$$

Очевидно, относительная роль механизмов вынужденной и свободной конвекции определяется отношением  $Re / \sqrt{Gr}$  или  $Re^2 / Gr$ . Очевидно также, что возможны три характерных случая:  $Gr/Re^2 \ll 1$ , или  $Gr^*/Re^2 \ll 1$  — эффект свободной конвекции ничтожно мал; это инерционно-вязкостный режим теплообмена. При  $Gr/Re^2 = O(1)$  [или  $Gr^*/Re^2 = O(1)$ ] эффекты свободной конвекции и вынужденного течения соизмеримы; это — вязкостно-гравитационно-инерционный режим теплообмена. Наконец, при  $Gr^*/Re^2 \gg 1$  ( $Gr/Re^2 \gg 1$ ) ничтожную роль играют силы инерции; это — вязкостно-гравитационный режим теплообмена. Для течения в трубах этот режим практического интереса не представляет.

При развитой турбулентности ( $Re \geq 10^4$ ) для достижения соизмеримых эффектов вынужденной и свободной конвекции нужно иметь  $Gr_d \geq 10^9$  или  $Gr_d^* \geq 10^{10}$ , что на практике встречается достаточно редко. Поэтому влияние свободной конвекции ощутимо прежде всего при ламинарном режиме течения или при турбулентном в области относительно низких чисел  $Re$  ( $Re \leq 6000$ ).

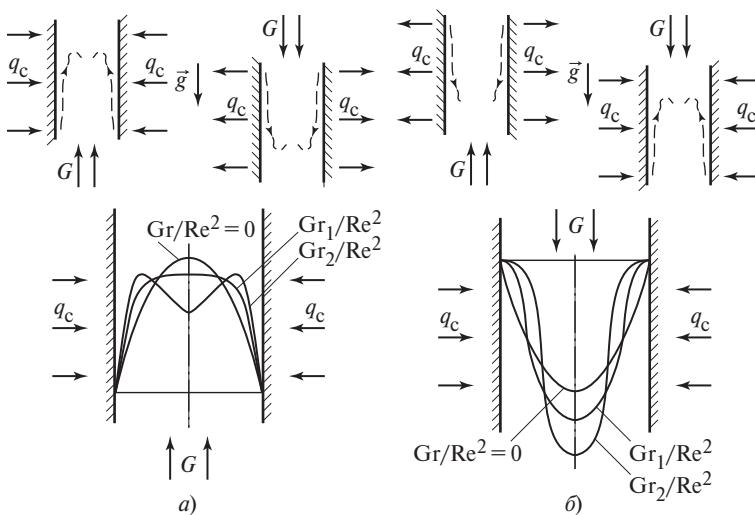
А.Ф. Поляков [31] провел исследования, позволившие установить границу заметного влияния свободной конвекции на теплообмен при вынужденном течении в зависимости от соотношения  $Re$ ,  $Gr^*$  и  $Pr$ . При прочих равных условиях это влияние больше при меньших  $Pr$  (в воздухе при  $Pr = 0,7$  оно наблюдается при меньших  $Gr^*$ , чем в воде при  $Pr = 5$ ).

С учетом сказанного мы ограничиваемся в основном влиянием свободной конвекции на теплообмен при ламинарном режиме течения.

### **6.10.2. Влияние свободной конвекции на теплообмен при ламинарном вынужденном течении в круглой трубе**

Это влияние зависит от ориентации канала в поле тяжести, направления течения и направления теплового потока.

*Сонаправленная свободная и вынужденная конвекция в вертикальном канале.* Такая ситуация возникает при подъемном течении жидкости в условиях обогрева или при опускном — в условиях охлаждения (рис. 6.25, а). Направление свободноконвективного движения на рис. 6.25 показано штриховыми линиями. Ясно, что совпадение направлений вынужденного и свободноконвективного течения наблюдается непосредственно у твердой стенки. В ядре потока свободноконвективное течение может быть направлено против вынужденного течения. Оба эти случая по существу одинаковы, если рассматриваются по отношению к направлению вынужденного течения; нижняя картинка рис. 6.25, а отражает влияние свободной конвекции на форму профиля скорости. При  $G = idem$  за счет свободной конвекции у стенки скорости складываются, а в центральной части вычитаются. При относительно небольших значениях  $Gr/Re^2$  свободная конвекция делает профиль скорости более заполненным, как это показано на рис. 6.25, а, что сопровождается ростом интенсивности теплоотдачи. Дальнейший рост  $q_c$ , т.е. рост  $Gr/Re^2$ , может привести к появлению М-образного профиля. Такие профили скорости имеют



**Рис. 6.25. Условия возникновения и деформация профиля скорости при сопараллельной (а) и встречной (б) свободной конвекции при вынужденном ламинарном течении в вертикальной трубе**

точки перегиба, что снижает устойчивость ламинарного течения. В результате  $Re_{kp} < 2300$ . Теоретические расчеты, выполненные без анализа потери устойчивости, относятся даже к таким соотношениям  $Gr$  и  $Re^2$ , при которых в центре канала может возникнуть возвратное течение. Практически такие режимы не наблюдались из-за их абсолютной неустойчивости.

*Встречная свободная и вынужденная конвекция в вертикальном канале.* Такая ситуация возникает при охлаждении стенки канала при подъемном вынужденном течении или при опускном вынужденном течении в условиях обогрева (рис. 6.25, б). В этих случаях у стенки направления свободной и вынужденной конвекции противоположны, что приводит к торможению жидкости у стенки и к снижению интенсивности теплоотдачи. В центре свободная и вынужденная конвекция направлены одинаково, что приводит к вытягиванию профиля скорости. В экспериментах этот случай удобнее изучать в условиях опускного течения с обогревом, именно для такого сочетания направлений течения и теплового потока дана на рис. 6.25, б схема деформации профиля скорости при встречной свободной и вынужденной конвекции.

Помимо уже отмеченного снижения КТО за счет торможения жидкости у стенки, здесь очень существенно то, что устойчивость ламинарного течения снижается очень быстро с ростом  $\text{Gr}/\text{Re}^2$ . При  $(\partial u / \partial r)_{r=r_0} = 0$  уже появляется точка перегиба на профиле скорости.

Дальнейшее увеличение  $\text{Gr}/\text{Re}^2$  может вызвать встречное течение вблизи стенки. В этом случае на профиле скорости появляется сглаженная вязкостью точка тангенциального разрыва\*, что делает течение абсолютно неустойчивым. В опытах наблюдался турбулентный переход уже при  $\text{Re} = 350 \div 400$ . В результате эксперименты по изучению влияния встречной свободной конвекции на теплообмен проведены при относительно малых значениях  $\text{Gr}/\text{Re}^2$ , так что снижение КТО оказывается количественно не очень значительным. Рост  $\text{Gr}/\text{Re}^2$  ведет к прекращению устойчивого ламинарного режима течения.

Теоретические исследования влияния свободной конвекции на теплообмен при ламинарном течении в вертикальных трубах проводились для условий начального термического участка, когда параболический профиль скорости сформирован до начала участка теплообмена. Выявлено, что при малых значениях приведенной длины

$$X = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d},$$

когда интенсивность теплообмена при вынужденной конвекции высока, эффект свободной конвекции не существует. При стабилизированном теплообмене, когда безразмерный коэффициент теплоотдачи за счет вынужденной конвекции  $\text{Nu}_w = \text{Nu}_\infty = 48/11$  (при  $q_c = \text{const}$ ), влияние свободной конвекции становится значительным.

При сонаправленной свободной и вынужденной конвекции результаты расчетных и опытных исследований описаны с использованием в качестве определяющего числа подобия  $[\text{Gr}^*/(4\text{Re})]^{1/4}$ . Расчетное уравнение [31] имеет вид

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_w} = \left( 1 + \frac{\text{Gr}^*}{B \text{Re}} \right)^{0,27}, \quad (6.41)$$

---

\* Поверхность тангенциального разрыва рассматривается в невязкой жидкости, когда один ее слой скользит с конечной скоростью относительно другого. Такая поверхность неустойчива к бесконечно малым возмущениям [26]. При конечной вязкости жидкости тангенциальный разрыв теряет резкость, изменение скорости происходит в слое конечной толщины. Численные исследования показали, однако, что и в этом случае при любых  $\text{Re}$  имеется диапазон волновых чисел, в котором течение неустойчиво.

где

$$B = 5,40X^{-1} + 312X^{1/4} \text{ при } X \leq 0,07;$$

$$B = 240 \text{ при } X \geq 0,07; X = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d}.$$

На рис. 6.26 показано, что расчетная кривая 1, соответствующая уравнению (6.41), хорошо согласуется с опытными данными. Эти данные получены при  $\text{Re} = 250 \div 2000$ ,  $\text{Gr}^*/\text{Re} \leq 4,5 \cdot 10^4$ ,  $\text{Pr} = 0,7 \div 10$  в условиях, когда теплообмен при вынужденной конвекции выходит на стабилизированный уровень ( $\text{Nu}_w = \text{Nu}_{\infty} = 48/11$ ). В пределах начального термического участка ( $X \leq 0,07$ ) влияние свободной конвекции заметно слабее. Действительно, при  $X = 1 \cdot 10^{-3}$  параметр  $B \approx 5400$ ; следовательно, второе слагаемое в круглых скобках уравнения (6.41) мало в сравнении единицей, т.е.  $\text{Nu} \approx \text{Nu}_w$ . (Последнее при  $q_c = \text{const}$  и малых  $X$  рассчитывается по соотношению  $\text{Nu}_w = 1,31 \left( \frac{1}{\text{Pe}} \frac{x}{d} \right)^{-1/3}$ ).

На рис. 6.26 показано также небольшое число опытных точек, относящихся к встречной свободной конвекции, снижающей интенсивность теплоотдачи.

Выше упоминалось, что при невысоких числах Рейнольдса ( $\text{Re} = 2300 \div 6000$ ) свободная конвекция влияет и на теплообмен при турбулентном течении в трубах. Характер этого влияния совершенно отличен от описанного выше. При сонаправленной свободной и вынужденной конвекции интенсивность теплоотдачи снижается в сравнении с расчетом по уравнениям для вынужденной конвекции,

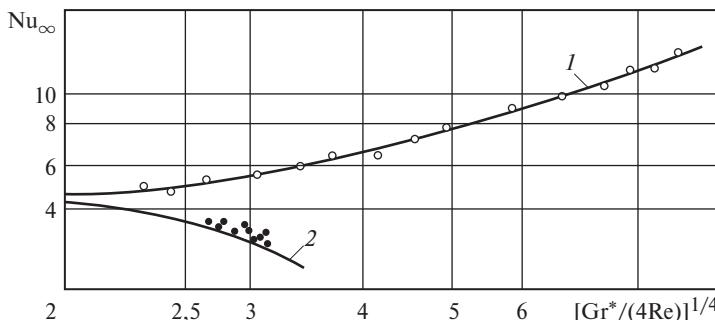


Рис. 6.26. Влияние свободной конвекции на стабилизированный теплообмен при ламинарном течении в вертикальной обогреваемой трубе

а при встречной свободной конвекции, напротив, КТО растет. Качественно это объясняется тем, что в первом случае ускорение потока у стенки подавляет турбулентность, а во втором — торможение потока ведет к ее дополнительной генерации. Надежных количественных соотношений для описания этих явлений не существует.

*Свободная конвекция в горизонтальных трубах.* При течении в горизонтальной трубе свободноконвективное течение развивается в плоскости, перпендикулярной направлению основного течения (к оси канала). В итоге каждая частица жидкости совершает движение по винтовой (спиральной) траектории. При нагреве жидкость поднимается вверх вдоль периметра трубы и опускается в центральной части сечения; возникают два контура циркуляции, взаимодействующих с основным течением, образуя две винтовые траектории движения. Относительно вертикальной оси в сечении существует симметрия линий тока; по отношению к горизонтальной диаметральной плоскости симметрии течения нет (рис. 6.27). Толщина свободноконвективного пограничного слоя растет вдоль периметра снизу вверх. В нижней части периметра скорость осевого течения оказывается выше (см. рис. 6.27). Выше здесь и локальный коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{\text{лок}}$ . В верхней части сечения трубы, напротив, создается малоподвижная зона с низким значением  $\alpha_{\text{лок}}$ , в которой фактически реализуется устойчивая стратификация по плотности. При некоторых соотношениях  $Re$  и  $Gr^*$  возможна ситуация, когда в нижней части периметра трубы  $T_c < \bar{T}$ . Ясно, что в таких условиях  $\alpha_{\text{лок}}$  нельзя определять как  $q_c/(T_{c,\text{лок}} - \bar{T})$ , ибо в таком случае можно получить  $\alpha_{\text{лок}} = \infty$  и  $\alpha_{\text{лок}} < 0$ , хотя условие  $q_c = \text{const}$  означает, что тепловой поток во всех точках периметра направлен к жидкости. Здесь для определения локального коэффициента теплоотдачи либо

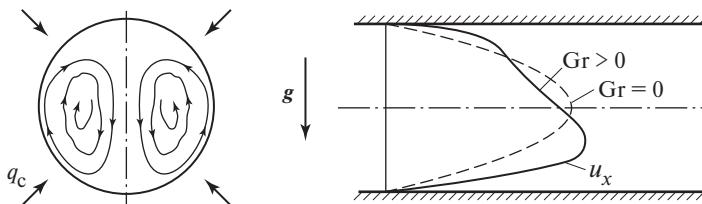


Рис. 6.27. Развитие циркуляции в поперечном сечении обогреваемой горизонтальной трубы и деформация профиля осевой скорости под влиянием свободной конвекции [31]

надо брать в качестве температуры отнесения  $T_0 = T_{(x=0)}$ , либо непосредственно исследовать распределение температуры по периметру трубы.

Для средней и локальной теплоотдачи в горизонтальных трубах на основе обобщения опытных данных разработаны расчетные соотношения [31]. В рассматриваемой ситуации важно корректно рассчитывать локальный КТО и температуру стенки в окрестности верхней образующей трубы, особенно при опасности термического разложения нагреваемой жидкости.

В настоящее время для ламинарного течения такие расчеты могут быть успешно выполнены на основе численного решения уравнений движения и энергии. Правда, для технических приложений ламинарные течения мало актуальны, а в субмиллиметровых каналах, очевидно, должны быть малыми числа  $\text{Gr}_d$  или  $\text{Gr}_d^*$ .

Однако представленный анализ важен в том отношении, что выявленные для ламинарных течений явления образования застойной зоны с низкой теплоотдачей в верхней части сечения трубы характерны и для турбулентных течений при невысоких числах  $\text{Re}$ . Кроме того, А.Ф. Поляковым показано, что винтовое течение в горизонтальной трубе, вызванное свободной конвекцией, обладает повышенной устойчивостью к турбулентному переходу, т.е.  $\text{Re}_{kp} > 2300$  [31].

## 6.11. Теплообмен в однофазной сверхкритической области

Использование веществ при сверхкритических давлениях (СКД) диктуется рядом технологий:

ТЭС на СКД ( $p = 24 \div 26$  МПа,  $T = 545 \div 600$  °C);

перспективные АЭС на СКД (например, реакторы со свинцовым теплоносителем в активной зоне типа БРЕСТ, реакторы на шаровых микротвэлах);

сверхпроводящие электромагнитные системы, охлаждаемые сверхкритическим гелием;

теплонасосные установки (ТНУ) на диокside углерода ( $\text{CO}_2$ ) на верхний уровень температур 80—90 °C (~350—360 K);

при перегонке нефти получают некоторые фракции, находящиеся при СКД.

Вероятно, этот перечень может быть расширен.

В табл. 6.8 только азот представляет собой скорее модельное, чем практически применяемое при СКД вещество; остальные отражены в перечислении технологий, использующих сверхкритические давле-

Таблица 6.8. Критические параметры некоторых веществ

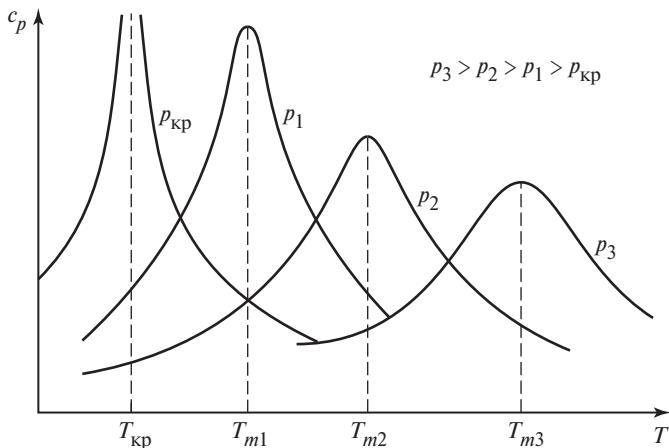
Вещество	$p_{\text{кр}}$ , МПа	$T_{\text{кр}}$ , К
${}^3\text{He}$	0,118	3,35
${}^4\text{He}$	0,229	5,2
$\text{N}_2$	3,4	126,3
$\text{H}_2\text{O}$	22,1	647,3
$\text{CO}_2$	7,38	304,2

ния. Изотоп  ${}^3\text{He}$  — это вещество с самыми низкими значениями критических параметров; с ним связывают возможность реализации реакции управляемого термоядерного синтеза, не требующей использования радиоактивного трития.

Окрестность термодинамической точки любого вещества отличается необычно сильным изменением свойств с температурой. В двухфазной области изобары совпадают с изотермами, так что  $c_p = (\partial Q / \partial T)_p = \infty$ . Вблизи  $(T_{\text{кр}}, p_{\text{кр}})$  изобарная теплоемкость однофазной жидкости и однофазного газа (вдоль линии насыщения) изменяется очень сильно с температурой. При этом абсолютные значения  $c_p$  для обеих фаз вблизи критической точки намного превосходят значения, характерные для более низких давлений  $p$  и температур  $T$ , например при  $p = 21$  МПа для воды  $c_p = 20$  кДж/(кг · К) — в 5 раз больше привычных значений на уровне 4,2 кДж/(кг · К). Похожим образом ведет себя  $c_p$  на линии насыщения для других веществ вблизи критической точки. Для  $\text{CO}_2$  при  $p = 6,7$  МПа ( $T_s = 300$  К)  $c_{p\text{ ж}} = 7,09$  кДж/(кг · К),  $c_{p\text{ г}} = 9,25$  кДж/(кг · К), тогда как при  $T = 270$  К ( $p = 3,2$  МПа)  $c_{p\text{ ж}} = 2,42$  кДж/(кг · К),  $c_{p\text{ г}} = 1,64$  кДж/(кг · К).

В критической точке обычно принимается, что  $c_{p\text{ кр}} = \infty$ . Для воды согласно IF97 (Intern. Formulae, 1997)  $c_{p\text{ кр}} = 1,017 \cdot 10^9$  кДж/(кг · К). При СКД вещество в окрестности  $T_{\text{кр}}$  как бы сохраняет «память» о свойствах в двухфазной области. Сверхкритические изотермы при сверхкритических давлениях имеют точку перегиба. В этой точке изобарная теплоемкость имеет максимум, тем более выраженный, чем ближе соответствующая изобара к критической.

Температура, соответствующая максимуму  $c_p$  на сверхкритической изобаре, называется псевдокритической  $T_m$ . С ростом давления максимум  $c_p$  становится менее выраженным (рис. 6.28).



**Рис. 6.28. Характер изменения изобарной теплоемкости с температурой на сверхкритических изобарах в окрестности псевдокритической температуры**

Следует понимать, что специфические свойства вещества проявляются только вблизи критической точки ( $T_{\text{кр}}, p_{\text{кр}}$ ). Например, вода при  $p = 23 \div 24$  МПа (океанические глубины 2300—2400 м) «ведет себя» как обычная жидкость (если, конечно, не пытаться ее «кипятить»). Гелий при сверхкритических давлениях 0,23—0,25 МПа и комнатной температуре — это обычный газ. Но в окрестности критической точки, а также вблизи псевдокритической температуры  $T_m$  при СКД свойства вещества изменяются очень сильно, как правило, немонотонно.

В критической точке у многих веществ (вода, тяжелая вода  $D_2O$ ,  $SF_6$  и др.) экспериментально обнаружены максимумы теплопроводности и вязкости ( $\lambda, \mu$ ). При СКД эти свойства вблизи  $T_m$  изменяются очень сильно и немонотонно. Важный для теплообмена параметр  $Pr = \mu c_p / \lambda$  по форме зависимости от  $T$  фактически повторяет кривую  $c_p(T)$ .

Очень резко изменяется вблизи  $T_m$  плотность вещества, что вызывает наличие экстремума на зависимости коэффициента объемного расширения от температуры  $\beta(T)$ . Это сильно влияет на роль свободной конвекции при теплообмене при СКД. Описанные закономерности изменения теплофизических свойств веществ с температурой в окрестности псевдокритической температуры отражены на рис. 6.29. Рисунок этот имеет качественный характер; для кривых, естественно, используются индивидуальные масштабы с учетом размерности каждой величины.

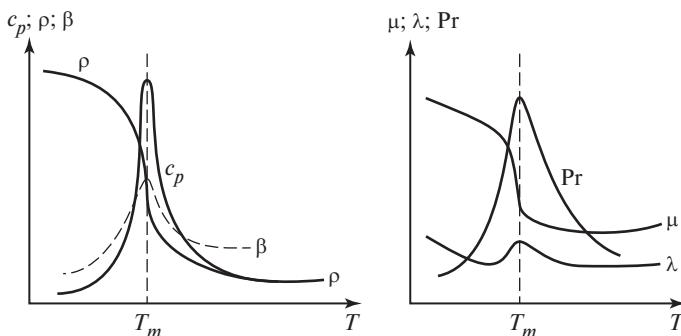


Рис. 6.29. Характер изменения теплофизических свойств с температурой на сверхкритических изобарах в окрестности псевдокритической температуры

Очевидно, что такое сильное изменение свойств вещества при СКД в окрестности  $T_m$  сказывается на закономерностях теплоотдачи. Рассмотренные в § 6.9 и 6.10 рекомендации здесь не пригодны. В частности, намного сильнее проявляется влияние свободной конвекции. (Следует отметить, что при  $p < p_{\text{кр}}$  вблизи критической точки также сказывается переменность свойств. Но в этом случае имеет место обычно кипение или конденсация, как правило, в изобарических условиях. Закономерности теплообмена определяются свойствами фаз на линии насыщения,  $\Delta T$  малы.)

Для понимания качественных особенностей теплообмена при СКД опытные зависимости, отражающие изменение интенсивности теплоотдачи по длине канала удобно представлять в координатах  $\alpha(\bar{h})$ . При фиксированном расходе вещества и несильном изменении свойств с температурой КТО по длине изменяется слабо; эти изменения обусловлены в основном изменением вязкости с температурой. Вблизи  $T_m$  ситуация изменяется очень сильно. Чтобы сравнивать КТО в тех сечениях, где достигается  $\bar{h} = h_m$  ( $h_m$  — энталпия, соответствующая  $T_m$ ), вместо линейной координаты  $x$  вдоль канала используют  $\bar{h}$ . При  $q_c = \text{const}$  в круглом канале

$$\bar{h}(x) = \bar{h}_0 + \frac{4qx}{\bar{u}\rho d}.$$

При фиксированных  $\rho\bar{u}$ ,  $\bar{h}_0$  среднемассовая энталпия  $\bar{h}(x)$  зависит только от  $q_c$  и от  $x$ . На рис. 6.30, а даны три качественно раз-

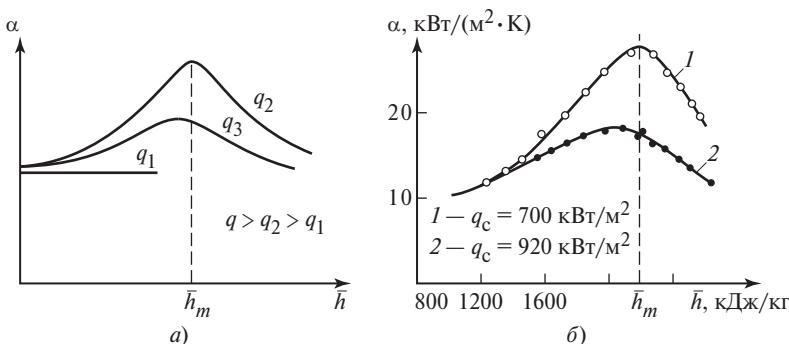


Рис. 6.30. Возможные типы изменения интенсивности теплоотдачи вблизи сечения канала с псевдокритической температурой жидкости (а), опытные зависимости теплоотдачи от плотности теплового потока для воды при давлении 27,3 МПа (б)

личных случая влияния плотности теплового потока на теплообмен. При малом тепловом потоке ( $q_c = q_1$ )  $\alpha$  по длине практически не изменяется, среднемассовая энталпия не достигает на длине рабочего участка значения  $\bar{h} = h_m$ . Это тот случай, когда КТО остается гидродинамическим параметром, когда само использование этого параметра  $\alpha$  действительно оправдано физически. При  $q_2 > q_1$  возможно возрастание  $\alpha$  в сечении с  $\bar{h} = h_m$ . (При  $\rho \bar{u} = \text{idem}$  и одинаковым  $h_0$  указанное сечение соответствует меньшему значению  $x$ .) Рост КТО («улучшенный теплообмен») обусловлен, в первую очередь, ростом числа  $Pr$  при  $\bar{T} = T_m$ . Дальнейший рост  $q$  ( $q = q_3$ ) может привести к снижению  $\alpha$  и даже к появлению режима «ухудшенного теплообмена», что обычно связано с подавлением турбулентности, а также с отрицательным влиянием свободной конвекции. Если по-прежнему  $\rho \bar{u} = \text{idem}$ ,  $h_0 = \text{idem}$ , то ясно, что при возрастании  $q$  до  $q_3$  сечение с  $\bar{h} = h_m$  еще сместится ко входу в канал. Использование вместо длины в качестве абсциссы  $\bar{h}$  позволяет сравнивать  $\alpha$  при достижении одинакового состояния жидкости, отвечающего достижению среднемассовой температурой жидкости значения  $T_m$ .

На рис. 6.30, б приведены первичные опытные данные о теплообмене воды в трубах диаметром  $d = 20$  мм при СКД ( $p = 27,3$  МПа); при одинаковой массовой скорости  $\rho \bar{u} = 1400$  кг/(м<sup>2</sup> · с) существенно

различные значения коэффициентов теплоотдачи получены при  $q_c = q_1 = 700 \text{ кВт}/\text{м}^2$  и  $q_c = q_2 = 920 \text{ кВт}/\text{м}^2$  [31].

С практической точки зрения именно режимы с сильным изменением КТО представляют наибольший интерес, а режимы с «ухудшенным теплообменом» — опасность. Это относится, например, к воде при СКД. Сочетание высоких давлений (23—25 МПа) с локальным повышением  $T_c$  из-за снижения  $\alpha$  может привести к разрушению стенки.

«Ненаучный» термин «режим ухудшенного теплообмена» относится чаще всего к теплообмену при подъемном течении в вертикальном канале. Причина резкого снижения интенсивности теплоотдачи — это ускорение потока у стенки из-за сильного уменьшения плотности и сонаправленной свободной конвекции, что, вероятно, ведет к подавлению турбулентности. При опускном течении в нагреваемом канале, т.е. при встречной свободной конвекции режимы с ухудшенной теплоотдачей не наблюдались, так как в этом случае у стенки генерация турбулентности интенсифицируется.

Теплообмен при СКД в горизонтальных каналах характеризуется очень сильным влиянием свободной конвекции (см. п. 6.10.2). В [31] приводятся сведения о зафиксированных в опытах со сверхкритической водой различиях до 200 К температуры стенки на верхней и нижней образующих трубы диаметром 20 мм.

Важно отметить, что значительные отклонения закономерностей теплообмена от тех, которые характерны для жидкости с примерно постоянными свойствами, возникают только в тех случаях, когда в пределах участка теплообмена достигается условие  $T_c > T_m > \bar{T}$  или  $T_c < T_m < \bar{T}$  (при охлаждении жидкости). Легко понять, что, например, в случае нагрева жидкости, когда  $T_0 < T_m$  при малых  $q_c$ , вполне возможно, что в пределах длины участка теплообмена  $l$  температура  $T_m$  не будет достигнута. Такую ситуацию идеализированно отражают две нижние кривые на рис. 6.31. (Здесь принято, что  $c_p = \text{const}$ .) В этом идеализированном случае при  $\rho\bar{u} = \text{idem}$ ,  $\alpha = \text{const}$ ,  $\Delta T = T_c - \bar{T} = \text{const}$ .

Если  $q_{c2} \gg q_{c1}$ , то при некотором  $x$  сначала  $T_c$  превосходит  $T_m$ , а затем и  $\bar{T} > T_m$ . На участке, где достигаются эти условия, закономерности теплообмена резко изменяются. Кривые  $\bar{T}(x)$  отражают,

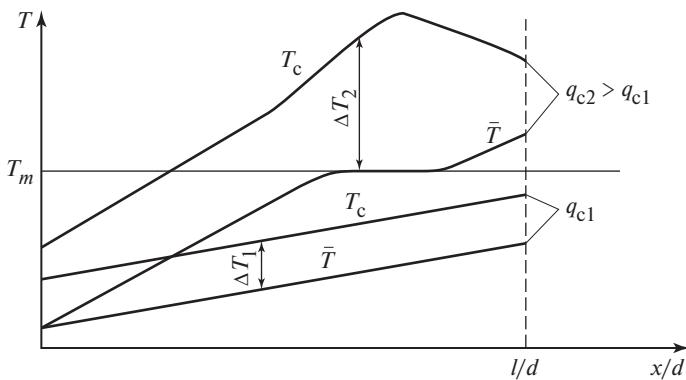


Рис. 6.31. Характер изменения температуры жидкости и стенки канала по длине при различных тепловых потоках

что при  $\bar{T} \rightarrow T_m$  резко возрастает  $c_p$ . Интенсивность теплоотдачи может изменяться по-разному. На рисунке показан случай ухудшения теплообмена и резкого возрастания температуры стенки.

Строгой теории теплообмена при СКД в окрестности  $T_m$  не создано. Имеющиеся расчетные рекомендации опираются на многочисленные опытные исследования. С конца 1950-х до начала 1980-х годов ведущие позиции в исследованиях теплообмена при СКД, причем не только в нашей стране, но и в мире, занимал научный коллектив, который возглавлял Б.С. Петухов (Е.А. Краснощеков, В.С. Протопопов, И.В. Куравьева, В.Н. Попов, А.Ф. Поляков, В.А. Курганов, В.Б. Анкудинов и др.). Их опытные результаты и многие теоретические положения, касающиеся механизмов переноса в условиях сильно изменяющихся свойств вещества, сохраняют ценность и сегодня.

Инженерные расчеты теплообмена при СКД проводятся с использованием поправок к формуле (6.19). Число этих поправок достаточно велико; чаще всего они имеют форму симплексов

$(\mu_c / \mu_{ж})^{n_1}$ ,  $(c_{p,c} / c_{ж})^{n_2}$ ,  $(\lambda_c / \lambda_{ж})^{n_3}$ , а также и более сложную:  $[Gr_* / (Pr^4 Re^2)]^{1/4}$  и т.д.

Поскольку объем уже проведенных экспериментальных (и в меньшей степени — численных) исследований достаточно велик, при решении практических задач обычно есть возможность подобрать конкретный вид расчетного уравнения, полученного при сходных геометрических и режимных условиях.

## 6.12. Интенсификация однофазного конвективного теплообмена

### 6.12.1. Содержание задачи

Теплообменники используются в огромном числе промышленных технологий; на их производство затрачивается большое количество металла. Интенсификация теплообмена — путь к снижению металлоемкости теплообменного оборудования. Мощность (производительность) теплообменника определяется как

$$Q = k \overline{\Delta T_{\log}} F. \quad (6.42)$$

Среднелогарифмическая разность температур в базовой для всех расчетов противоточной схеме

$$\overline{\Delta T_{\log}} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1 / \Delta T_2)},$$

где индексы 1 и 2 относятся к входу и выходу одного из теплоносителей, например «греющего». В (6.42)  $Q$  и  $\overline{\Delta T_{\log}}$  — величины, определяемые содержанием конкретной технологической задачи.

Следовательно, влиять на  $F$  и, значит, на металлоемкость аппарата можно, воздействуя на коэффициент теплопередачи  $k$ , который можно определить как сумму значений, обратных термическим сопротивлениям:

$$k = 1 / \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_{Ti}}, \quad R_{T1} = \frac{1}{\alpha_1}, \quad R_{T2} = \frac{1}{\alpha_2}, \quad R_{Tc} = \delta_c / \lambda_c, \quad R_{T3} = \delta_3 / \lambda_3,$$

где индексы 1 и 2 относятся к двум теплоносителям, индекс «с» — к стенке, индекс «з» — загрязнению ( $R_{T3}$  обычно задается исходя из условий эксплуатации).

Ясно, что  $k \leq 1/R_{T \max}$ . Реально воздействовать на  $k$  можно, изменения прежде всего наибольшее термическое сопротивление. Обычно речь идет о воздействии на коэффициенты теплоотдачи, причем, естественно, на меньший из двух, если они различаются сильно. При  $\alpha_1 \approx \alpha_2$  интенсификации можно добиться, воздействуя на оба КТО одновременно.

«Лобовой» путь — это повышение скорости течения. При турбулентном течении  $\alpha \sim \bar{u}^{0,8-0,9}$ . Но мощность на прокачку  $N_{\text{прок}} = \Delta p \dot{V}$ , где  $\dot{V}$  — объемный расход,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $\Delta p = \frac{l}{d} \frac{\xi}{2} \rho \bar{u}^2 \sim \bar{u}^{1,8}$ . Таким образом,  $N_{\text{прок}} \sim \bar{u}^{2,8}$  (обычно приближенно принимают  $\bar{u}^3$ ).

Механическая (электрическая) энергия дороже, чем тепловая, в несколько раз (по оценкам [20] в 4—10 раз). Ясно, что под интенсификацией теплообмена не имеют в виду путь, связанный с увеличением скорости течения.

Сегодня выработаны оптимальные уровни скоростей в теплообменниках: 3÷30 м/с — для газов, 0,5÷5 м/с — для капельных жидкостей. Они обеспечивают приемлемое сочетание уровня коэффициентов теплоотдачи, расходов на прокачку и предотвращение загрязнений. Конечно, при создании новых технологий скорости теплоносителей выбираются с учетом конкретных условий. Но в любом случае под интенсификацией теплообмена понимают совокупность мер воздействия на структуру течения и (главным образом) на конфигурацию и микроструктуру поверхности теплообмена.

### 6.12.2. Влияние микроструктуры поверхности на гидравлическое сопротивление

Целенаправленное воздействие на микрорельеф поверхности теплообмена должно опираться на понимание механизмов взаимодействия элементов этого рельефа с потоком жидкости или газа. С этой точки зрения, естественно обращение к основным результатам исследований Никурадзе и Шлихтинга [45]. В опытах Никурадзе исследовалось влияние на трение песчаной шероховатости: калиброванные песчинки наклеивались с высокой плотностью на поверхность канала. При ламинарном течении обтекание малых препятствий (малые числа  $Re$ ) происходит безотрывно. Согласно Никурадзе при

$$k_s^+ = \frac{k_s v_*}{v} \leq 5, \text{ где } k_s \text{ — характерная высота песчинки, канал рассматривается как гидравлически гладкий.}$$

Фактически  $k_s^+$  — это локальное число  $Re$ , построенное по динамической скорости. Так как в гидравлически гладком канале выступы расположены в пределах вязкого подслоя, где устанавливается линейный профиль скорости  $u^+ = y^+$ , то

на высоте  $y^+ = k_s^+ = 5$  продольная компонента скорости  $u = 5v_*$ ; таким образом, локальное число  $Re$  на высоте песчинки равно 25, при меньших  $y^+$  число  $Re$  убывает как квадрат  $y^+$ . Можно отметить, что вывод Никурадзе о безотрывном обтекании вполне согласуется с данными о поперечном обтекании цилиндра при  $Re < 60$ .

Так как  $v_* = \bar{u} \sqrt{\xi/8}$ , то ясно, что безразмерная высота  $k_s^+$  зависит не только от абсолютной высоты песчинки, но и от числа  $Re$ . Пре-дельная (размерная) высота песочной шероховатости, отвечающая гидравлически гладким трубам, следует из очевидного соотношения

$$k_{s \text{ пр}} = \frac{5v}{v_*} = \frac{5v}{\bar{u} \sqrt{\xi/8}} \frac{d}{d}, \text{ т.е. } \frac{k_{s \text{ пр}}}{d} = \frac{5}{Re \sqrt{\xi/8}}.$$

В табл. 6.9 даны абсолютные значения высоты песочной шероховатости, при которой сохраняется закон течения в гладком канале для трубы диаметром 20 мм. Ясно, что одна и та же труба будет гидравлически гладкой при одних числах  $Re$ , но может стать «шероховатой» для больших  $Re$ . Для гидравлически гладких труб  $\xi = \xi(Re)$ , при турбулентном течении можно использовать формулу Филоненко (4.29а).

При увеличении безразмерной высоты песчинок  $k_s^+ > 5$  начинается обтекание с отрывом. В застойной зоне за отрывом возникает разрежение, т.е. на каждую песчинку действует сила в направлении потока (сопротивление формы).

При  $k_s^+ > 70$  наступает режим полного проявления шероховатости, коэффициент гидравлического сопротивления  $\xi \neq \xi(Re)$ , а зависит только от относительной высоты шероховатости  $k_s/r_0$ . Таким образом,  $\xi$  определяется полностью микрогеометрией поверхности

Таблица 6.9. Пределная абсолютная высота песочной шероховатости, отвечающая гидравлически гладкой трубе для  $d = 20$  мм

$Re$	$\xi$	$k_{s \text{ пр}}$ для $d = 20$ мм, мкм
$10^4$	0,0316	155
$10^5$	0,0184	23
$10^6$	0,0144	2,4

и диаметром канала; устанавливается чисто квадратичный закон сопротивления:

$$\Delta p = \frac{l}{d} \frac{\xi}{2} \rho \bar{u}^2,$$

$\xi = \text{const}$  для данного канала. Никурадзе обобщил опытные данные соотношением

$$\xi_{\text{шер}} = [1,74 + 2\lg(r_0/k_s)]^{-2}.$$

В диапазоне  $5 \leq k_s^+ \leq 70$  на сопротивление влияют и число Re и высота песчинок:  $\xi = \xi(\text{Re}, k_s/r_0)$ . Для этой области построены nomограммы (рис. 6.32). Расчетные кривые на рисунке построены соответственно: 1 — для ламинарного стабилизированного течения ( $\xi = 64/\text{Re}$ ); 2 — по формуле Блазиуса ( $\xi = 0,316 \text{Re}^{-0,25}$ ); 3 — по формуле Прандтля (4.29):  $\xi = (2 \lg \text{Re} \sqrt{\xi} - 0,8)^{-2}$ . Видно, что в режиме полного проявления шероховатости  $\xi = \text{idem}$  для данной относительной песчаной шероховатости.

Шлихтинг ввел понятие эквивалентной шероховатости  $k_s$ , которая определяется в опытах сравнением измеренных значений  $\xi$  в испытуемых трубах с результатами Никурадзе;  $k_s$  — эквивалентная шероховатость, соответствующая  $k_s$  в режимах с полным проявлением шероховатости.

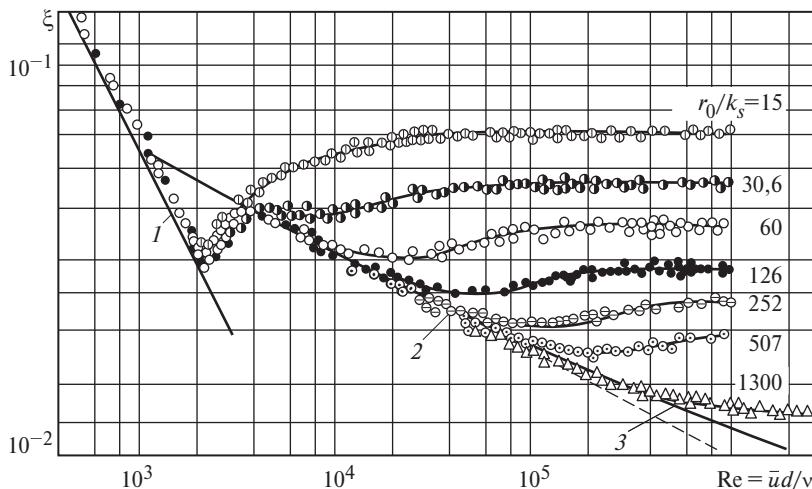
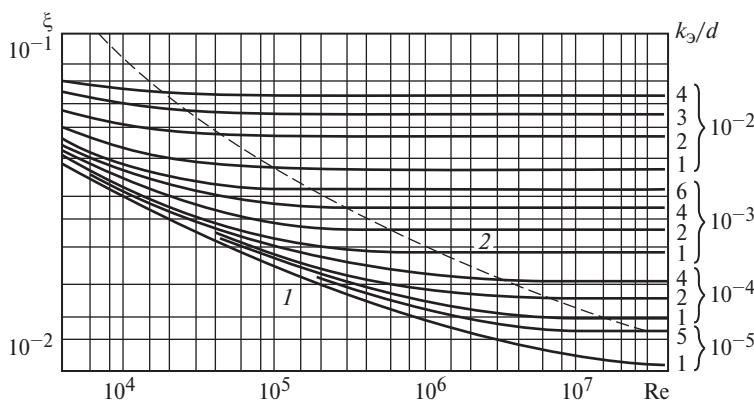


Рис. 6.32. Опытные данные Никурадзе о коэффициенте гидравлического сопротивления при различной относительной высоте шероховатости [45]



**Рис. 6.33. Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса и эквивалентной шероховатости [45]:**

1 — область гидравлически гладких труб; 2 — область полностью выраженной шероховатости

При использовании калиброванной песочной шероховатости в области перехода от режима гладкой трубы к режиму полностью развитой шероховатости зависимость  $\xi(Re)$  на рис. 6.32 немонотонная. Для эквивалентной шероховатости этот переход монотонный, так как на реальной поверхности существует широкий спектр неровностей, при росте  $Re$  сначала на трение влияют наиболее крупные выступы, затем — все более и более мелкие, пока не осуществляется переход на квадратичный закон сопротивления, отвечающий полностью выраженной шероховатости. На рис. 6.33 представлены зависимости  $\xi$  от числа  $Re$  и относительной эквивалентной шероховатости.

В справочниках для новых труб дают абсолютное значение  $k_3$  в зависимости от материала и технологии изготовления. Для стеклянных и цельнотянутых труб из цветных металлов  $k_3 = 1,5$  мкм; для труб из углеродистой стали, бесшовных,  $k_3 = 14$  мкм; для сварных труб из углеродистой стали  $k_3 = 50$  мкм. Сравнение этих значений с данными табл. 6.9 показывает, что в реальных теплообменниках обычно трубы можно считать гидравлически гладкими. Конечно, при эксплуатации отложения могут сильно изменить эти характеристики, но этот эффект в расчетах учесть очень сложно. В целом можно утверждать, что естественная шероховатость на теплообмен при однофазной конвекции не влияет.

### 6.12.3. Принципы и методы интенсификации конвективного однофазного теплообмена

Итак, речь идет об искусственном воздействии на тонкий пристенный слой жидкости, сосредоточивающий в себе основное термическое сопротивление, путем изменения микрографии поверхности. (Иногда говорят о турбулизации пристенного слоя жидкости.) Проблема интенсификации теплообмена актуальна для газов и неметаллических капельных жидкостей, поскольку в жидких металлах из-за их высокой теплопроводности уровень теплоотдачи всегда достаточно высок.

Хотя в рассматриваемой области многое достигается методом проб и ошибок, поиск оптимальных решений основывается на понимании механизмов теплообмена.

Среди используемых методов интенсификации есть «универсальные» в том отношении, что применяются и к капельным жидкостям и к газам, и специфические для каждого из этих двух типов теплоносителей. К универсальным можно отнести закрутку потока, которая достигается несколькими способами: вставленными в канал скрученными лентами, проволочной спиралью на внутренней стенке, скрученными овальными трубами, змеевиками. Во всех случаях достигается более высокая скорость течения, на поток влияют дополнительные массовые силы; последний эффект особенно существен в двухфазных парожидкостных потоках. Другой метод интенсификации, также применяемый как к газовым, так и к жидким теплоносителям, — это создание на поверхности лунок, т.е. углублений со сферической формой поверхности. Интенсификацию теплоотдачи на поверхности с лунками связывают с возникновением над ними смерчеобразных структур. Механизмы переноса в окрестности сферических лунок изучаются достаточно активно как экспериментально, так и с помощью численного моделирования. При некоторых сочетаниях геометрических условий и режимных параметров в ряде работ достигают существенного роста интенсивности теплоотдачи при относительно небольшом увеличении гидравлического сопротивления.

О других методах интенсификации конвективного теплообмена логичнее говорить отдельно применительно к капельным жидкостям и к газам.

*Капельные жидкости.* При  $\text{Pr} > 1$  основное термическое сопротивление сосредоточено в теплопроводном подслое  $\Delta_\lambda = \delta_\mu \text{Pr}^{-1/3}$ ,  $\delta_\mu \approx 10v/v_*$ . Задача интенсификации — воздействовать на вязкий подслой и отчасти на буферный слой. Для капельных жидкостей

чаще всего для этого используют поперечные микроребра. Оптимальная безразмерная высота микроребер  $h^+ = hv_*/v = 10 \div 50$ . Поскольку обычно интенсифицируют теплообмен при относительно небольших числах  $Re$ , то практически микроребра имеют высоту  $h = 0,2 \div 1,0$  мм.

Механизм воздействия на пристенный слой жидкости рассмотрим на примере одиночного поперечного ребра. При отрывном обтекании непосредственно за препятствием возникает застойная зона, где теплообмен даже снижается. Длина застойной зоны обычно примерно равна  $h$  (рис. 6.34). За этой зоной располагается зона присоединения потока, в нее «бьет» струя жидкости. Здесь достигается максимальный уровень интенсификации теплообмена. После этого фактически реализуется теплообмен в начальном участке пограничного слоя с высоким уровнем локального КТО.

Важный вопрос — нахождение оптимума в расстояниях между микроребрами. Принцип «чем чаще, тем лучше» не годится хотя бы потому, что при этом относительная площадь застойных зон будет высокой. При слишком близком расположении ребер можно даже снизить средний КТО, но сильно увеличить  $\Delta p$ . Естественно, другой предел — это почти гладкая стенка. Оптимум определен экспериментально как  $s = (8 \div 10)h$ .

Технологически поперечное микрообрение [ $h = 0,2 \div 1,0$  мм,  $s = (8 \div 10)h$ ] выполняют по-разному: в виде спирали (внутренней или внешней), резьбы с большим шагом, специальной резьбы без подрезания стружки (эта технология освоена в МГТУ им. Н.Э. Баумана (Н.Н. Зубков), накатки.

Накатка — одна из хорошо отработанных технологий интенсификации теплообмена: на наружной поверхности трубы «вдавливаются» кольцевые или спиралевидные канавки; их глубина  $h = 0,2 \div 1$  мм и шаг  $s = (8 \div 10)h$  соответствуют приведенным выше рекомендациям (рис. 6.35). В англоязычной литературе для труб со спиралевидными канавками используется термин «tored tube». При накатке на внутренней поверхности появляются выступы, т.е. теплообмен интенси-

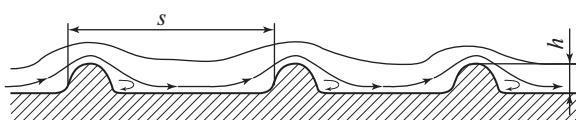


Рис. 6.34. Схема обтекания поперечных микроребер на поверхности теплообмена

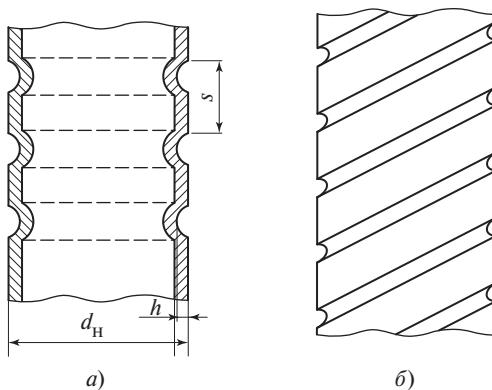
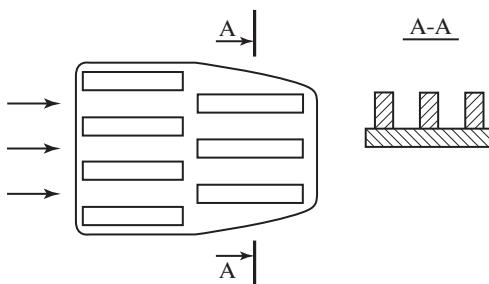


Рис. 6.35. Трубы, обработанные накаткой: с кольцевыми (а) и спиралевидными (б) канавками

фицируется с обеих сторон сразу; механическая прочность не только не снижается, но даже, напротив, возрастает. Накатка обеспечивает склаженные профили ребер и канавок, что весьма важно: острые кромки на элементах шероховатости, не улучшая теплообмен, способствует росту  $\Delta r$ . Качественно так же действуют поперечные ребра высотой, превышающей оптимальную: теплоотдача не интенсифицируется, а гидравлическое сопротивление растет очень резко.

**Газы.** В газах  $Pr \leq 1$ , термическое сопротивление рассредоточено не только на теплопроводный подслой (на него может приходиться лишь 25 % общего термического сопротивления), но и на буферный слой. Низкие значения теплопроводности и плотности ( $\lambda$  и  $\rho$ ) определяют низкий уровень интенсивности теплоотдачи в газах. По этим двум причинам в газах так воздействуют на поверхность, чтобы не только снизить термическое сопротивление, но и увеличить поверхность теплообмена. Рационально сконструированное оребрение — это, во-первых, способ увеличить поверхность теплоотдачи  $F$ , а во-вторых, способ повысить локальный КТО. С точки зрения собственно интенсификации безразмерная высота ребер  $h^+$  должна быть более 70; обычно для газов размерная высота  $h \geq 2$  мм.

В этом случае поперечные ребра обычно неэффективны, так как ведут к сильному росту  $\Delta r$  и к большой площади застойных зон с низкой интенсивностью теплообмена. Обычно используются продольные ребра. При этом достаточно эффективным оказывается создание условий теплообмена на начальном участке: вместо длинных (на всю длину канала) ребер их секционируют, причем каждую секцию раз-



**Рис. 6.36. Схема размещения коротких продольных ребер на поверхности теплообмена**

мещают со сдвигом по отношению к предыдущей (рис. 6.36). В этом случае на каждой новой секции реализуется теплообмен в начальном участке.

В пластинчато-ребристых теплообменниках каналы для газов образуют гофрированные пластины (гофры), которые также делают секционированными со сдвигом последующих секций относительно предыдущих, чтобы обеспечить условия теплообмена в начальном участке.

Во всех рассмотренных случаях рост интенсивности теплоотдачи сопровождается увеличением потерь давления и, следовательно, расходов на прокачку. В общем случае интенсификация всегда требует технико-экономического анализа. Нельзя для оценки эффективности интенсификации сопоставлять относительный рост КТО и коэффициента гидравлического сопротивления. В условиях турбулентного течения результат такого сопоставления предопределен числом  $Pr$ : при  $Pr > 1$  это соотношение больше 1, а при  $Pr < 1$  — меньше единицы. В этом случае заведомо окажется «неэффективной» интенсификация теплообмена к газам, в то время как именно в газах она особенно актуальна. К сожалению, этот «лобовой» метод оценки до сих пор встречается в публикациях.

Более содержательным представляется сравнение безразмерных коэффициентов теплоотдачи при наличии интенсификации и без нее, т.е.  $Nu_{\text{инт}}$  и  $Nu_0$  при одинаковой мощности на прокачку. В этом случае, однако, анализ должен быть достаточно детальным, в частности необходимо учитывать, что интенсификация позволяет добиваться той же тепловой мощности аппарата при меньших размерах, что, в свою очередь, может означать снижение мощности на прокачку  $N_{\text{прок}}$  (если речь идет о сокращении длины теплообменника).

Наконец, важно подчеркнуть, что обычно наибольший эффект от интенсификации теплообмена достигается при относительно небольших числах  $Re$ , практически  $Re = 1500 \div 5000$ . При  $Re < 2300$  интенсификация может вызвать более ранний переход к турбулентному течению. Область неустановившегося, переходного по существу течения весьма благоприятна с точки зрения интенсификации теплообмена, так как здесь не выполняется аналогия Рейнольдса, причем прирост интенсивности теплообмена часто превосходит рост гидравлического сопротивления.

### Контрольные вопросы к главе 6

1. При каких допущениях обычно рассматривается математическое описание теплообмена в круглой трубе? К каким упрощениям приводит приближение длинной трубы?
2. В каких случаях при анализе теплообмена в трубе необходимо учитывать эффект осевой теплопроводности?
3. Что является условием гидродинамической стабилизации при течении в трубах? Как упрощается математическое описание для стабилизированного течения?
4. Как выражается условие стабилизации теплообмена в канале и как оно зависит от вида граничных условий?
5. Как изменяется температура жидкости при стабилизированном теплообмене в случае изотермической стенки? Как в этом случае рассчитывается средняя по длине плотность теплового потока?
6. Как изменяется по длине трубы температура жидкости при  $q_c = \text{const}$ ?
7. От каких параметров зависит фактически вид граничных условий для теплообмена в трубе при теплопередаче через стенку? Что такое водяной эквивалент?
8. На основе каких исходных уравнений рассчитывается стабилизованный профиль скорости в круглой трубе?
9. Какая особенность стабилизированного теплообмена в трубе при  $q_c = \text{const}$  позволяет связать частную производную температуры по осевой координате с тепловым потоком на стенке при выводе выражения для профиля теплового потока?
10. Почему при выводе профиля температуры при стабилизированном теплообмене при  $q_c = \text{const}$  возможно использование граничного условия для температуры на стенке?
11. С помощью каких технических приемов на основе уравнения (6.10) для профиля температуры в трубе получается выражение для стабилизированного КТО (интеграл Лайона)?
12. Каким путем на основе уравнений (6.8)–(6.11) получаются соотношения для профилей скорости, теплового потока и температуры, а также значение  $Nu_\infty$  для стабилизированного теплообмена при ламинарном течении?

13. Чем отличаются ламинарное течение и теплообмен в призматических каналах от аналогичных процессов в круглых трубах?
14. Чем различаются стабилизированные профили скорости в трубе при ламинарном и турбулентном режимах течения? Как и почему изменяется профиль скорости при турбулентном режиме с ростом  $Re$ ?
15. С чем связана немонотонность профиля безразмерного теплового потока в трубе?
16. Какие тенденции обнаруживает стабилизированный профиль температуры в круглой трубе при изменении числа  $Re$  и числа  $Pr$ ?
17. Как (и почему) изменяется характер зависимости стабилизированного КТО (числа  $Nu$ ) от  $Re$  в различных диапазонах числа  $Pr$ ?
18. Как строится расчетное уравнение для стабилизированного КТО при турбулентном течении жидких металлов?
19. Почему расчетное уравнение для стабилизированного КТО при турбулентном течении газов и неметаллических жидкостей в трубах имеет ту же структуру, что и уравнение (4.39) для теплообмена в турбулентном пограничном слое?
20. Какие предельные переходы демонстрируют универсальность уравнения Петухова с сотрудниками (6.19) в сравнении со степенными эмпирическими формулами?
21. К чему сводится математическое описание задачи о теплообмене в начальном термическом участке при ламинарном течении в круглой трубе?
22. Для каких условий применимо решение Левека задачи о теплообмене в круглой трубе? Каковы его достоинства по отношению к классической задаче Гретца—Нуссельта?
23. Каким методом решалась задача Гретца—Нуссельта? Какой вид имеет зависимость безразмерной температуры от продольной координаты и как строится решение для нахождения ее распределения по радиальной координате?
24. Какие закономерности отражают расчетные радиальные профили безразмерной температуры при различных значениях приведенной длины? Как по этим профилям можно определить безразмерную толщину температурного пограничного слоя?
25. В каком виде решение Гретца—Нуссельта представляет безразмерный КТО? Как на основе этого решения получают степенную формулу?
26. Чем решение задачи о теплообмене в начальном термическом участке при ламинарном течении в круглой трубе при условии  $q_c = \text{const}$  отличается от решения задачи Гретца—Нуссельта? В каком отношении эти решения аналогичны?
27. Как соотносятся длины начального гидродинамического и начальных термических участков при ламинарном течении в круглой трубе? В каком случае теплообмен в начальном гидродинамическом участке может рассчитываться по формулам для начального термического участка?
28. Каковы закономерности одновременного формирования профилей скорости и температуры при ламинарном течении в круглой трубе при  $Pr = O(1)$ ? Как в этом случае рассчитывается теплообмен?
29. Как изменяется КТО в начальном термическом участке трубы при турбулентном течении при различных числах Прандтля?

30. Почему значение начальных участков при турбулентном течении в практических расчетах теплообмена не так велико, как при ламинарном? Как рассчитывают теплообмен в начальном гидродинамическом участке при турбулентном течении при входе «с острой кромкой»?
31. Как учитывается переменность теплофизических свойств жидкости при теоретическом анализе теплообмена? Какие трудности вызывает это в случае турбулентного течения?
32. Как вводятся поправки на переменность теплофизических свойств капельных жидкостей и газов в инженерных расчетах?
33. Почему изменение вязкости жидкости с температурой по-разному влияет на теплообмен и трение при разном направлении теплового потока на стенке?
34. Почему влияние переменности свойств газов на теплообмен и трение учитывается с помощью «температурного фактора»? Влияет ли переменность свойств газа на теплообмен при его охлаждении?
35. Как влияет переменность свойств газов на длину начального участка при турбулентном течении в обогреваемой трубе и как это отражено в расчетном уравнении (6.40) для теплоотдачи?
36. Почему для оценки влияния свободной конвекции на теплообмен при вынужденном течении в трубах используется критерий  $Gr/Re^2$  или  $Gr^*/Re^2$ ? В каких случаях это влияние существенно?
37. Как влияют на теплообмен при ламинарном течении в вертикальной трубе сонаправленная и встречная свободная конвекция?
38. С чем связан ранний (при малых  $Re$ ) переход к турбулентному течению в вертикальном канале при встречной свободной конвекции?
39. Почему при турбулентном течении в вертикальном канале при небольших числах Рейнольдса влияние свободной конвекции качественно противоположно тому, что наблюдается при ламинарном вынужденном течении?
40. Как изменяется ламинарное течение в горизонтальном канале под воздействием свободной конвекции? Как это сказывается на локальном теплообмене и среднем по периметру трубы?
41. Какое практическое применение имеют теплоносители сверхкритического давления?
42. Как изменяются теплофизические свойства вещества с температурой на сверхкритических изобарах? Как определяется псевдокритическая температура?
43. Почему влияние сильной переменности теплофизических свойств при СКД в окрестности псевдокритической температуры может вести как к росту интенсивности теплообмена, так и к падению в зависимости от плотности теплового потока, ориентации канала и направления течения?
44. Почему повышение скорости течения теплоносителей не рассматривается обычно как способ интенсификации теплоотдачи?
45. Какие режимы обтекания поверхности выявлены в опытах Никурадзе при течении в трубах в зависимости от высоты песочной шероховатости?
46. Что такое эквивалентная шероховатость? Влияет ли на интенсивность однофазной конвекции естественная шероховатость труб, используемых в теплообменниках?

- 
47. Какие методы воздействия на поток теплоносителя используются для интенсификации теплоотдачи как жидкостей, так и газов?
  48. Какие типы и характерные масштабы микроструктурированных поверхностей используются для интенсификации теплоотдачи в капельных жидкостях?
  49. Какие способы интенсификации теплоотдачи целесообразны для газов?
  50. Какие технико-экономические оценки необходимы при выборе оптимальных методов интенсификации теплоотдачи? В каком диапазоне чисел Рейнольдса достигается обычно максимальное увеличение интенсивности теплоотдачи?

# Часть 2

## ТЕПЛООБМЕН ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

### Глава 7

#### ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ ДВУХФАЗНЫХ СИСТЕМ

##### **7.1. Предмет, методы анализа и модели двухфазных систем**

До сих пор (в ч. 1) рассматривался теплообмен в однофазных системах, когда вещество находится в одном агрегатном состоянии. Для конвективного теплообмена это — жидкость или газ. В пределах одной фазы, которая занимает всю область анализа, свойства если и изменяются, то непрерывным образом.

Природные явления и техника дают огромное число примеров многофазных систем. При строгом подходе даже привычно воспринимаемые как однофазные атмосферный воздух или вода в океане являются многофазными. В воздухе присутствуют твердые частички, капли воды, в океанской воде — пузырьки газа, песчинки, капли нефтепродуктов. Конечно, в большинстве практических задач столь малые, как в этих примерах, примеси другой фазы не мешают рассматривать эти системы как однофазные. Но в ситуациях типа катастрофической утечки нефти из скважин в Мексиканском заливе (2010 г.), при анализе взаимодействия поверхности летательного аппарата с дождевыми каплями необходимость анализа многофазных систем не вызывает сомнений. В промышленных технологиях многофазные системы встречаются, видимо, чаще, чем однофазные. Большая часть производимой в мире электроэнергии вырабатывается на тепловых и атомных электростанциях с использованием в качестве базового цикла Ренкина с генерацией и последующей конденсацией водяного пара; добыча и транспорт нефти и газа в большинстве случаев сопряжены с движением систем, содержащих три и даже четыре различные фазы (жидкие нефть и вода, газ, твердая фаза в случае

выпадения парафинов или наличия песка); процессы дистилляции, ректификации, выпарки, реализуемые в химической технологии, холодильной и криогенной технике, в пищевых производствах, основаны на использовании двух- или трехфазных систем. В настоящем издании предметом анализа будут в основном *двуфазные газожидкостные системы*.

На рис. 7.1, *а* и *б* изображены типичные элементы двухфазных систем. Здесь показано движение газовых (или паровых) пузырьков в потоке жидкости (рис. 7.1, *а*) и расслоенный газожидкостный поток (рис. 7.1, *б*). При анализе такого рода гетерофазных систем принимаются следующие предположения:

1. Каждая фаза является сплошной средой. Она занимает макроскопические объемы пространства. Это справедливо и в тех случаях, когда размер области, занятой фазой, весьма мал с обыденной точки зрения (к примеру, капли микронных размеров), но выполняется условие  $Kn \ll 1$ .

2. Межфазные границы интерпретируются как геометрические поверхности. При переходе через границу свойства (плотность, внутренняя энергия, энталпия и т.п.) изменяются скачком.

В общем случае в системе может происходить обмен массой, импульсом и энергией как между отдельными фазами, так и внутри каждой из фаз. Под механикой гетерофазных систем понимают не только движение и динамическое взаимодействие фаз, но также и взаимосвязанные процессы массо- и энергообмена.

В пределах каждой отдельной фазы справедливы выведенные в гл. 2 обычные для описания сплошной среды дифференциальные уравнения, отражающие фундаментальные законы сохранения массы, импульса и энергии. Далее их будем просто именовать *уравнениями сохранения*. На межфазных поверхностях обязаны выполняться определенные граничные условия, отражающие эффекты вза-

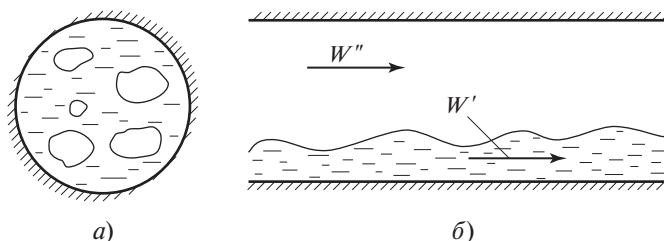


Рис. 7.1. Примеры объектов анализа механики гетерофазных систем

имодействия фаз на границах. Эти условия кратко будем именовать *условиями совместности*.

В двухфазных газожидкостных системах действительная межфазная граница представляет собой тонкий переходный слой толщиной порядка межмолекулярных расстояний в жидкости ( $\sim 10^{-9}$  м). Малость этого размера в сравнении с характерными размерами типичных для технических приложений систем оправдывает интерпретацию границ раздела как геометрических поверхностей. Однако в некоторых случаях в анализе условий взаимодействия фаз на их общей границе необходимо учитывать реальные свойства этой границы как тонкого переходного слоя.

Совокупность систем уравнений сохранения для каждой из фаз и условий совместности составляет математическое описание (теоретическую основу) механики гетерофазных систем. Естественно, в условия совместности здесь включены и обычные граничные условия на границах областей анализа.

Для простых систем на основе математического описания может быть получено аналитическое решение. В большинстве практических задач получение таких решений сопряжено с непреодолимыми математическими трудностями. В этом случае математическое описание является основой для приближенного анализа с использованием упрощенных моделей или для построения эмпирических уравнений на базе методов теории подобия двухфазных потоков.

В общем случае положение и форма межфазных границ в газожидкостных системах не могут быть определены заранее. Этим двухфазные системы принципиально отличаются от гомогенных, для которых границы области протекания процесса, как правило, бывают известны (твердые ограничивающие поверхности), и на них задаются граничные условия — условия однозначности математического описания процесса. В двухфазных газожидкостных системах эволюция межфазных границ могла бы быть определена только в процессе решения задачи. Это означает, что в исходном математическом описании условия совместности должны быть записаны для границ раздела неизвестной формы. В настоящее время имеются лишь единичные примеры численного решения задач механики газожидкостных систем в такой строгой постановке, когда форма межфазной границы не задается, а определяется в процессе решения. При этом речь идет о достаточно простых задачах типа роста одиночного парового пузырька на твердой обогреваемой поверхности в первоначально неподвижной жидкости.

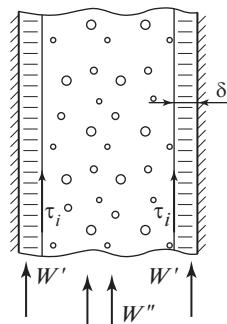
Известный специалист в области механики многофазных систем американский ученый Т. Теофанос (T. Theofanous) подчеркивал, что межфазная поверхность представляет «дополнительную нелинейность», которая заставляет рассматривать двухфазные системы комплексно, во всей их сложности. Это практически исключает применение прямого численного моделирования (DNS) для анализа двухфазных систем в реальных технических устройствах, хотя для исследования частных задач такое моделирование используется успешно. В этой ситуации для решения прикладных задач механики газожидкостных систем, естественно, вводят различные упрощающие модели. Строго говоря, разработка моделей — это основной метод научного исследования. Даже широко используемые и ставшие совершенно «естественными» модели, такие, например, как модель сплошной среды, в действительности являются приближением к реальности, справедливым в определенных условиях. Но, конечно, известные сегодня модели двухфазных потоков намного более грубые, области их применимости довольно узкие.

Простейшая и, очевидно, исторически первая модель двухфазного потока — *гомогенная*. Ее суть в замене реальной многофазной среды некоторой гипотетической с эффективными свойствами — плотностью и вязкостью смеси ( $\rho_{\text{см}}$ ,  $\mu_{\text{см}}$ ) и параметрами — скоростью смеси  $W_{\text{см}}$ , давлением, температурой. К такой гомогенной среде применяют обычные уравнения сохранения (как к однофазной жидкости). Чаще всего гомогенную модель используют в одномерном (гидравлическом) приближении, когда параметры двухфазного потока усредняются по сечению канала, и прежде всего в гидродинамических расчетах. Качественно ясно (и подтверждено экспериментами), что гомогенная модель тем ближе к реальности, чем тоньше диспергированы и лучше перемешаны фазы. Такие условия достигаются при высоких приведенных давлениях, когда плотности фаз ( $\rho'$  и  $\rho''$ ) различаются не очень сильно, и высоких скоростях течения. При низких приведенных давлениях, когда отношение  $\rho'/\rho''$  имеет порядок  $10^3$  или выше, гомогенная модель совершенно неудовлетворительна.

*Модель раздельного течения* представляет собой нечастый случай, когда реальная картина газожидкостного течения воспроизводится в модели достаточно точно. Взаимодействие газового (парового) потока со стекающей пленкой жидкости, расслоенные течения в горизонтальных каналах (см. рис. 7.1, б), кольцевые двухфазные потоки, в которых преобладающая часть жидкости течет в виде тонкой пленки по стенке, а в ядре потока движется газ, увлекающий

**Рис. 7.2. Схема восходящего дисперсно-кольцевого двухфазного потока**

жидкую пленку за счет межфазного трения  $\tau_i$  (рис. 7.2), — это те задачи, для которых модель раздельного течения вполне уместна. В рамках обсуждаемой модели уравнения сохранения записываются отдельно для газовой и жидкой фаз, причем форма границы раздела предполагается известной (плоской или цилиндрической). Реальная картина и в этих видах течений, как правило, много сложнее той, что принимается в модели (в ней обычно не учитывают наличие жидких капель в потоке газа, волны на межфазной поверхности), но модель раздельного течения здесь, конечно, много ближе к реальности, чем гомогенная.



Широкое применение вычислительной техники в проектных расчетах сделало чрезвычайно популярной модель *многоскоростного континуума*. Согласно этой модели каждая фаза заполняет собой всю область анализа, т.е. весь объем, занятый многофазной смесью, в соответствии со своей объемной долей ( $\varepsilon^i$ ). Для каждой фазы определяются плотность ( $\rho^i$ ), отнесенная к полному объему смеси, скорость и другие параметры. Для каждой фазы, а в необходимых случаях и для смеси в целом, составляются уравнения сохранения. В результате решения в каждой точке объема, занятого смесью, состоящей из  $N$  фаз, определяют  $N$  плотностей,  $N$  скоростей и т.д. [30]. Отсюда следуют используемые в этой области исследований термины типа: двухскоростная двухжидкостная модель, трехжидкостная двухтемпературная модель и т.п. При таком подходе основные трудности расчета переносятся на моделирование межфазного обмена массой, импульсом и энергией.

Для такого моделирования требуется вводить гипотезы о форме и площади межфазных границ и закономерностях переноса через эти границы. Реалистичность этих гипотез зависит как от параметров моделируемого процесса, так и от наличия опытной информации о реальной структуре двухфазного потока. В целом можно говорить, как и в случае гомогенной модели, о том, что модель многоскоростного континуума (или взаимопроникающих континуумов) оказывается ближе к реальности при тонкой фрагментации фаз. К примеру, в неравновесном парокапельном потоке при малом диаметре капель

действительная скорость и температура жидкости внутри капель отличаются от скорости и температуры перегретого пара. То, что результаты расчета относятся к одной точке пространства, в данном случае некритично из-за малого размера капель. Иная ситуация складывается, когда модель взаимопроникающих континуумов применяется к анализу потоков кольцевой или снарядной структуры. Ясно, что в таком случае «размазывание» каждой фазы по всему объему делает модель совершенно неподходящей на объект; если согласие результатов расчетов по модели с экспериментом и достигается, то лишь подбором интенсивности межфазного обмена массой, импульсом, энергией. В уравнениях сохранения эффекты межфазного взаимодействия отражаются источниками членами, которые часто именуются замыкающими соотношениями. Объективно именно эти члены уравнений сохранения несут основную информацию о физических закономерностях моделируемого процесса, но из-за сложности самих явлений и отсутствия надежной информации о реальной структуре потока они же выступают в качестве подгоночных параметров при численном моделировании.

Тем не менее, во многих случаях модель многоскоростного континуума не имеет реальной альтернативы при решении практических задач. Поскольку модель удовлетворяет уравнениям сохранения, при удачном выборе замыкающих соотношений расчеты обеспечивают удовлетворительное согласие с измерениями таких интегральных характеристик процесса, как перепад давлений, температура стенки обогреваемого канала.

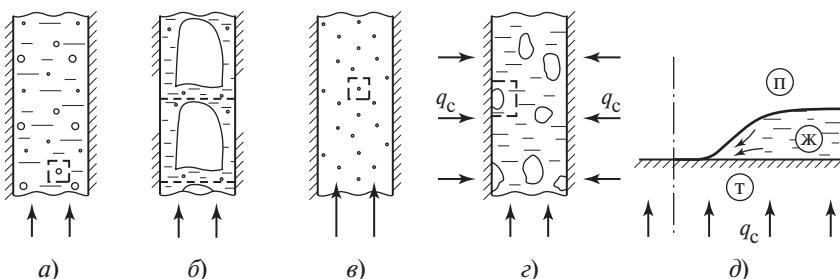
Перечисленные модели не исчерпывают многообразия подходов к исследованию двухфазных систем. В последние годы заметные результаты достигнуты Л.И. Зайчиком с сотрудниками [11] в численном моделировании взаимодействия дискретных частиц (паровые пузырьки или капли) с несущей фазой и между собой. Пока эти результаты относятся к случаю относительно низкой объемной доли дискретной фазы в потоке, но представляется важным, что в этих исследованиях реально удается выйти за рамки чисто эмпирических методов.

Следует отметить, что даже простейшие модели двухфазных систем имеют преимущества перед чисто эмпирическими методами расчета, которые нередко применяются при проектировании технических устройств, эти системы использующих. В рамках принятых допущений модель отражает действительные закономерности явления, причем для самой модели очень важна информация о так называемых элементарных процессах, совокупность которых и опреде-

ляет поведение сложной системы. Применительно к газожидкостным системам такими процессами являются эволюция парового пузырька и капли в несущей среде, взаимодействие дискретных частиц при столкновении, перенос тепла и импульса на границе твердой стенки с жидкостью и паром, включая линию раздела трех контактирующих фаз, и ряд других подобных явлений.

Установление закономерностей этих процессов входит в содержание *метода контрольной ячейки*, направленного на анализ такой структуры рассматриваемой двухфазной системы, которая моделирует существенные характеристики всей системы. На рис. 7.3 показано несколько примеров контрольных ячеек, используемых при анализе газожидкостных систем: паровой пузырек в потоке жидкости (рис. 7.3, а), паровой снаряд (рис. 7.3, б), жидкую каплю в потоке пара (рис. 7.3, в), паровой пузырек, растущий на обогреваемой стенке (рис. 7.3, г), область контакта трех фаз (паровой, жидкой, твердой) на обогреваемой стенке (рис. 7.3, д). Контрольная ячейка включает в себя обычно дискретную частицу и окружающую ее несущую фазу; в случаях, показанных на рис. 7.3, б, г и д, в состав ячейки включена и стенка канала. В пределах контрольной ячейки форма межфазной поверхности обычно идеализируется, что делает возможным получать строгие решения. При этом используется тот подход к анализу, который в принципиальных чертых сформулирован в начале настоящего параграфа. В ряде случаев на основе описания процессов в контрольной ячейке удается построить приближенную модель системы в целом; таким путем могут быть получены реалистичные соотношения для источников членов уравнений сохранения в модели многоскоростного континуума.

В любом случае без знания фундаментальных закономерностей «элементарных» процессов невозможно построение надежных моде-



**Рис. 7.3. Примеры контрольных ячеек, используемых при анализе парожидкостных потоков**

лей двухфазных систем для инженерных расчетов. Последующие разделы книги посвящены анализу этих закономерностей.

## 7.2. Универсальные условия совместности

### 7.2.1. Вывод в общей форме

Условия совместности определяют, в какой мере поля скорости, давления, температуры, состава бинарной смеси испытывают влияние процессов в соседней фазе, отделенной межфазной границей. Универсальные условия совместности определяют потоки свойства среды через границу раздела; будучи следствием общих законов сохранения, они справедливы для любых процессов на межфазных границах, что и объясняет их название.

Рассмотрим участок поверхности раздела двух фаз в некоторый момент времени (рис. 7.4, а). Пусть скорость движения поверхности относительно системы координат  $\{x_k\}$  в произвольной точке  $M$  на межфазной поверхности составляет  $C$ . Эта система координат, неподвижная, например, по отношению к стенкам сосуда, называется лабораторной, или системой отсчета наблюдателя. Если теперь поместить в точку  $M$  начало новой координатной системы  $\{n, \tau\}$ , которая движется со скоростью  $C$ , то в этой новой системе отсчета точка  $M$  оказывается неподвижной (рис. 7.4, б). Такая система координат, «привязанная» к данной точке поверхности раздела фаз, называется собственной системой отсчета. При этом одну из ее осей целесообразно направить по нормали к поверхности — ось  $n$ , другие оси ( $\tau_1, \tau_2$ ) — расположить в плоскости, касательной к поверхности. На рис. 7.4, б изображен плоский случай, которому соответствуют оси  $n$  и  $\tau$ .

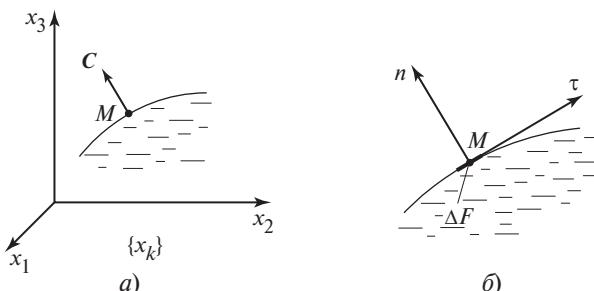


Рис. 7.4. Граница раздела в лабораторной (а) и собственной (б) системах отсчета

**Рис. 7.5. Контрольный объем в окрестности точки  $M$  на поверхности раздела фаз**

Бесконечно малый элемент межфазной поверхности в окрестности точки  $M$  всегда может рассматриваться с достаточной точностью как плоский (см. рис. 7.4, б) при любой плавной форме очертания

границы (без изломов). Построим в собственной системе отсчета вокруг точки  $M$  контрольный эйлеров объем  $\Delta V = \Delta F(h' + h'')$ , который состоит из малых объемов соприкасающихся фаз  $\Delta F \cdot h'$  и  $\Delta F \cdot h''$  и содержит элемент межфазной поверхности площадью  $\Delta F$  (рис. 7.5).

Запишем для этого объема общее соотношение законов сохранения в интегральной форме (2.1):

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_F J_k dF_k = \int_{\Delta V} \dot{N}_A dV.$$

Если теперь устремить  $h'$  и  $h''$  к нулю, т.е. стягивать контрольный объем к площадке  $\Delta F$ , то первый интеграл левой части уравнения сохранения устремится к нулю:

$$\lim_{\substack{h'' \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \int_{\Delta V} \frac{\partial A}{\partial t} dV = 0.$$

Второй интеграл при тех же условиях

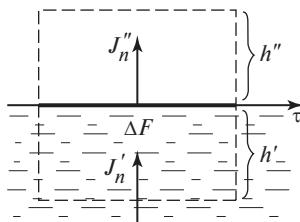
$$\lim_{\substack{h'' \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \int_F J_k dF_k = \Delta F(J_n'' - J_n'),$$

т.е. при  $h'' \rightarrow 0$ ,  $h' \rightarrow 0$ , остается конечным; при этом поток свойства через площадку  $\Delta F$  определяют, естественно, нормальные к поверхности компоненты векторов  $J$ .

Наконец, интеграл правой части:

$$\lim_{\substack{h'' \rightarrow 0 \\ h' \rightarrow 0}} \int_{\Delta V} \dot{N}_A dV = \lim_{h'' \rightarrow 0} \Delta F \cdot h'' \dot{N}_A'' + \lim_{h' \rightarrow 0} \Delta F \cdot h' \dot{N}_A' + \Delta F \dot{N}_F$$

при  $h' \rightarrow 0$ ,  $h'' \rightarrow 0$  стремится к значению  $\Delta F \dot{N}_F$ . Здесь  $\dot{N}_F$  есть поверхностьная плотность возникновения свойства  $A$  на границе раздела фаз,



которая может быть отлична от нуля. С точки зрения формальной математики определенный интеграл должен обращаться в нуль при стремлении к нулю области интегрирования. Но, как говорилось в предыдущем параграфе, межфазная поверхность — это тонкий переходный слой; ее аппроксимация геометрической поверхностью из соображений удобства математического описания оправдана, поскольку толщина переходного слоя мала по отношению к характерным масштабам области анализа. При этой аппроксимации, однако, нельзя терять информацию о действительных свойствах этого переходного слоя, в частности о возможности производства в нем переносимого через границу раздела свойства.

Таким образом, при стягивании объема  $\Delta F(h'' + h')$  к плоской поверхности  $\Delta F$  из общего соотношения законов сохранения получаем

$$J_n'' - J_n' = \dot{N}_F. \quad (7.1)$$

Это соотношение есть общая форма записи универсальных условий совместности на границе раздела фаз: *разность нормальных проекций потоков свойства A по обе стороны межфазной границы равна поверхностной плотности возникновения свойства A на границе.*

Подчеркнем, что соотношение (7.1) справедливо в собственной системе отсчета, в которой должны записываться потоки  $J_n$  свойства  $A$ . Из вывода непосредственно следует, что универсальные условия совместности суть просто специфическая форма записи общих законов сохранения применительно к межфазной поверхности (или, иначе, к поверхности сильного разрыва).

Для сокращенной записи разности одноименных величин по обе стороны границы раздела фаз (поверхности разрыва) будем использовать далее символ «прямые скобки»:

$$[J_n] = J_n'' - J_n';$$

$$[T] = T''(0) - T'(0);$$

$$[u_n] = u_n''(0) - u_n'(0) \text{ и т.д.}$$

После введения этого сокращения общая форма записи универсальных условий совместности принимает вид

$$[J_n] = \dot{N}_F. \quad (7.1a)$$

### 7.2.2. Развернутая запись универсальных условий совместности

Для записи универсальных условий совместности в развернутом виде нужно лишь конкретизировать величины  $J_n$  и  $\dot{N}_F$ . Сделаем это сначала для однокомпонентных систем.

*Поток массы.* Масса вещества не может возникать (исчезать) на поверхности. Поэтому  $\dot{N}_F = 0$ ,  $J_n = \rho \tilde{u}_n$ . Здесь  $\tilde{u}_n$  есть нормальная проекция скорости данной фазы, причем сама скорость определена в собственной системе отсчета (на что указывает индекс «тильда»). Иначе говоря,  $\tilde{u}_n$  есть скорость частиц данной фазы по нормали к элементу межфазной границы при наблюдении этого движения из системы координат, «привязанной» к границе. Имеем, таким образом,

$$[\rho \tilde{u}_n] = 0. \quad (7.2)$$

Это соотношение определяет материальный баланс на границе раздела фаз. Из него следует, что поток массы, пересекающий границу,

$$\dot{m} = \rho'' \tilde{u}_n'' = \rho' \tilde{u}_n'. \quad (7.2a)$$

*Поток импульса.* В собственной системе координат  $\{n, \tau_1, \tau_2\}$  компоненты тензора плотности потока импульса имеют вид:

$\Pi_{nn}$  — перенос вдоль нормали к поверхности нормальной проекции импульса;

$\Pi_{n\tau_1}$  — перенос вдоль нормали к поверхности касательной ( $\tau_1$ ) проекции импульса;

$\Pi_{n\tau_2}$  — перенос вдоль нормали к поверхности касательной ( $\tau_2$ ) проекции импульса;

$\Pi_{\tau_1\tau_1}, \Pi_{\tau_2\tau_2}, \Pi_{\tau_2\tau_1}$  — не дают вклада в перенос импульса вдоль нормали ( $n$ ) к поверхности.

Таким образом, необходимо рассматривать перенос нормальной  $\Pi_{nn}$  и касательных  $\Pi_{n\tau}$  компонент импульса через поверхность (символом  $\Pi_{n\tau}$  будем в дальнейшем обозначать тензор потока любой из касательных компонент импульса).

На межфазной границе, разделяющей две жидкости или жидкую и паровую фазы, действует поверхностное натяжение. Оно обуслов-

лено тем, что молекулы поверхностного слоя отличаются от объемных молекул в соседних фазах различными условиями взаимодействия с соседними молекулами в двух полупространствах. Это особенно ясно для границы жидкость—пар (газ), так как в этом случае межмолекулярные расстояния в соседних фазах могут различаться на порядки величины. В результате поверхность раздела обладает избыточной свободной энергией (энергией Гельмгольца поверхности), образование новой поверхности раздела требует совершения термодинамической работы. Равновесию газожидкостной системы отвечает минимальная площадь поверхности раздела. В условиях гидростатики в сосудах большой протяженности этому требованию соответствует горизонтальная плоская поверхность раздела всюду, кроме малой окрестности ограничивающих твердых стенок; для малых дискретных объемов, т.е. паровых пузырьков в жидкости или капель в паре, минимальную площадь имеет сферическая поверхность раздела (если не учитывать искажающего влияния гравитационных массовых сил; в невесомости обеспечивается строгая сферичность). В результате действия избыточной свободной энергии при наличии кривизны межфазной границы на ней возникает скачок давлений (его называют лапласовским), который следует рассматривать как поверхностную плотность возникновения нормальной компоненты импульса  $\dot{N}_F = 2\sigma H$ , где  $H$  — средняя кривизна поверхности;  $\sigma$  — удельная избыточная энергия поверхности раздела, которая для границы жидкость—пар совпадает с коэффициентом поверхностного натяжения.

Средняя кривизна определяется через радиусы кривизны двух главных нормальных сечений поверхности в данной точке:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Итак, для нормальной компоненты импульса

$$[\Pi_{nn}] = 2\sigma H. \quad (7.3)$$

Для касательных компонент  $\dot{N}_F = 0$  (если  $\sigma$  не изменяется вдоль поверхности):

$$[\Pi_{n\tau}] = 0. \quad (7.4)$$

Развернутые выражения потоков  $\Pi_{nn}$ ,  $\Pi_{n\tau}$  в собственной системе отсчета имеют вид

$$\Pi_{nn} = \rho \tilde{u}_n \tilde{u}_n + p - \tau_{nn};$$

$$\Pi_{n\tau} = \rho \tilde{u}_n \tilde{u}_\tau - \tau_{n\tau}.$$

Используя эти выражения и имея в виду равенство (7.2а), можно записать вместо (7.3) и (7.4) соответственно:

$$\dot{m}[\tilde{u}_n] + [p] - [\tau_{nn}] = 2\sigma H; \quad (7.3a)$$

$$\dot{m}[\tilde{u}_\tau] - [\tau_{n\tau}] = 0. \quad (7.4a)$$

*Поток энергии.* Если в системе отсутствует лучистый или иной внешний подвод энергии к границе раздела фаз, то следует считать, что поверхностная плотность возникновения энергии равна нулю  $\dot{N}_F = 0^*$ ;  $J_n = E_n$  — нормальная компонента плотности потока энергии. Следовательно, в лаконичной форме универсальное условие совместности для потока энергии имеет вид

$$[E_n] = 0. \quad (7.5)$$

Развернутое выражение для потока  $E_n$  в собственной системе отсчета

$$E_n = \rho \tilde{u}_n \tilde{h}_* - \tilde{u}_i \tau_{ni} + q_n,$$

где  $\tilde{h}_* = h + \frac{\tilde{u}^2}{2}$  — полная энталпия единицы массы; во втором слагаемом правой части предполагается суммирование по  $i = n, \tau$ . С учетом этого выражения и равенства (7.2а) условие (7.5) принимает вид

$$\dot{m}[\tilde{h}_*] - [\tilde{u}_i \tau_{ni}] + [q_n] = 0. \quad (7.5a)$$

Совокупность соотношений (7.2) — (7.5а) представляет собой исключительные универсальные условия совместности на межфазной поверхности (поверхности разрыва) в однокомпонентных двухфазных системах.

В бинарной двухфазной системе уравнения (7.2) — (7.5а) справедливы (с учетом анализа, содержащегося в § 2.5). При этом в выражении для полного потока энергии  $E_n$  плотность теплового потока  $q_n$

---

\* Изменение избыточной свободной энергии поверхности раздела фаз ( $d\sigma/dt$ ) во всех практически важных случаях может не учитываться.

должна быть заменена молекулярным потоком энергии  $\dot{e}_n$  по соотношению (2.24) (см. § 2.5). Кроме указанных уравнений, для бинарной системы необходимо записать уравнение сохранения массы компонента на границе раздела, т.е. еще одно универсальное условие совместности. Для компонента  $a$  имеем:

$$[J_n^a] = 0, \quad (7.6)$$

где  $J_n^a = \rho^a \tilde{u}_n + j_n^a$  — поток компонента  $a$  через межфазную поверхность. Соотношение (7.6) означает, что вещество  $a$  не возникает (исчезает) на поверхности раздела фаз (поверхности разрыва). Имея в виду определение массовой доли компонента в смеси (см. п. 2.5.1) и соотношение (7.2а), развернутое выражение универсального условия совместности (7.6) можно представить как

$$\dot{m}[C^a] + [j_n^a] = 0. \quad (7.6a)$$

Таким образом, в общем случае, включающем бинарные смеси, совокупность соотношений (7.2)—(7.6а) представляет собой универсальные условия совместности на межфазных поверхностях.

### 7.2.3. Универсальные условия совместности для частных случаев

*Условия на скачках уплотнения и фронте ударной волны.* В газодинамике эффектами вязкости и теплопроводности обычно пренебрегают, так что  $q_n = 0$ ,  $\tau_{ni} = 0$ ; естественно, на границе двух газовых фаз различных параметров нет поверхностного натяжения ( $\sigma = 0$ ).

Универсальные условия совместности для потока массы (7.2) и (7.2а), естественно, сохраняются:

$$[\rho \tilde{u}_n] = 0, \quad \rho'' \tilde{u}_n'' = \rho' \tilde{u}_n' = \dot{m}.$$

Для нормальной компоненты потока импульса имеем

$$[\rho \tilde{u}_n^2 + p] = 0; \quad (7.36)$$

для касательной компоненты потока импульса

$$\rho'' \tilde{u}_n'' \tilde{u}_\tau'' - \rho' \tilde{u}_n' \tilde{u}_\tau' = \dot{m}[\tilde{u}_\tau] = 0. \quad (7.46)$$

Отсюда следует, что  $[\tilde{u}_\tau] = 0$ , т.е. касательная компонента скорости не изменяется при переходе через скачок уплотнения.

Для потока энергии с учетом того, что  $\dot{m} \neq 0$ , получаем

$$\left[ h + \frac{\tilde{u}^2}{2} \right] = 0. \quad (7.56)$$

Таким образом, при переходе через границу сильного разрыва полная энталпия потока сохраняется неизменной.

Набор полученных для этого частного случая уравнений — это так называемые условия Ренкина—Гюгонио (Rankine—Hugoniot), лежащие в основе газодинамики разрывных течений (ударные волны, скачки уплотнения и т.д.).

*Фазовые переходы умеренной интенсивности.* Это значит, что скорости фаз  $|\tilde{u}| \ll C_{3B}$ , где  $C_{3B}$  — скорость звука в паре. Следует отметить, что это условие удовлетворяется в большинстве практических ситуаций.

В рассматриваемом случае фазы считаются вязкими и теплопроводными. Универсальные условия совместности (7.2)–(7.4a) сохраняются в прежнем виде:

$$[\rho \tilde{u}_n] = 0; \quad \dot{m}[\tilde{u}_n] + [p] - [\tau_{nn}] = 2\sigma H; \quad \dot{m}[\tilde{u}_\tau] - [\tau_{n\tau}] = 0.$$

В вязкой среде обычно выполняется дополнительное кинематическое условие отсутствия «скольжения» фаз на границе раздела (этот вопрос подробнее будет обсуждаться в п. 7.4.2):

$$[\tilde{u}_\tau] = 0.$$

Отсюда имеем

$$[\tau_{n\tau}] = 0,$$

что означает равенство касательных вязких напряжений по обе стороны границы.

Условие относительно низкой интенсивности фазовых переходов оказывается только на выражении для потока энергии. Уравнение энергетического баланса принимает следующий вид:

$$\dot{m}[h] + [q_n] = 0,$$

причем здесь  $[h] = h_{LG}$  — теплота фазового перехода (испарения) ( $h_{LG} = h_s'' - h_s'$ ), которая предполагается существенно большей по

сравнению со слагаемым  $\tilde{u}^2/2$ , т.е.  $\tilde{u}^2/2 \ll h_{LG}$ . Это и дает основание пренебречь изменением кинетической энергии при фазовом переходе в уравнении энергетического баланса. Как квадратичная по  $\tilde{u}$  величина, слагаемое  $(\tilde{u}_i \tau_{ni})$  также может быть исключено из баланса энергии. Таким образом, в данном, очень важном для практики случае универсальное условие совместности для потока энергии может быть записано как

$$\dot{m}h_{LG} = q'_n - q''_n. \quad (7.5b)$$

Здесь верхние индексы ' и '' относятся соответственно к жидкости и пару. В процессах конденсации пара, испарения, пузырькового и переходного кипения жидкости чаще всего пар находится в состоянии насыщения, таким образом, обычно можно считать, что

$$q''_n = -\lambda'' \left( \frac{\partial T''}{\partial n} \right)_{n=0} = 0.$$

Тогда (7.5b) упрощается до

$$\dot{m}h_{LG} = q'_n. \quad (7.5c)$$

Именно это выражение используется как уравнение энергетического баланса на границе раздела жидкость—пар в большинстве инженерных задач.

*Поверхность раздела фаз непроницаема* ( $\dot{m} = 0$ ), обе фазы — вязкие и теплопроводные, скорости фаз намного меньше скорости звука. Это приводит к дальнейшим упрощениям:

$$[p] - [\tau_{nn}] = 2\sigma H;$$

$$[\tilde{u}_\tau] = 0;$$

$$[\tau_{n\tau}] = 0;$$

$$[q_n] = 0.$$

Последнее условие означает, что поток тепла теплопроводностью при переходе через поверхность раздела фаз не изменяется.

Если фазы неподвижны и теплообмен отсутствует, то  $\tau_{nn} = \tau_{n\tau} = 0$ ;  $u_\tau = 0$ ;  $q_n = 0$ . Тогда из вышеприведенных соотношений остается лишь первое, которое принимает вид

$$[p] = 2\sigma H.$$

Это — известная формула Лапласа для скачка давлений на искривленной поверхности газ — жидкость; при этом давление со стороны вогнутой части поверхности раздела всегда больше, чем со стороны выпуклой.

### 7.3. Универсальные условия совместности в системе отсчета наблюдателя

В предыдущем параграфе при выводе универсальных условий совместности использовалась собственная система отсчета, связанная с границей раздела фаз. При этом принималось, что скорость границы в заданной точке известна. В настоящем параграфе будет показано, что эта скорость требует специального определения, и будет указан способ записи универсальных условий совместности в лабораторной системе отсчета.

#### 7.3.1. Скорость движения границы раздела фаз

При феноменологическом подходе граница раздела фаз рассматривается как геометрическая поверхность, разделяющая области с резко отличными свойствами (фазы). Такого рода поверхности называют поверхностями сильных разрывов [35]. В общем случае межфазная граница проницаема для вещества (фазовые переходы), импульса (относительное движение фаз) и энергии (теплообмен и фазовые переходы). При описании условий межфазного взаимодействия важное значение имеет понятие скорости движения поверхности раздела фаз в пространстве.

Если через движущуюся поверхность раздела фаз происходит перенос вещества (фазовые переходы), то понятию скорости движения поверхности нельзя поставить в соответствие скорость каких-либо материальных частиц той или иной фазы. На рис. 7.6 в виде примеров показаны качественные схемы движения фронта кристаллизации жидкости (рис. 7.6, а) и фронта испарения (рис. 7.6, б). Во втором случае предполагается, что нижняя и боковые стенки сосуда адиабатны, тепло к свободной поверхности жидкости подводится сверху за счет излучения ( $q_{\text{н}}$ ).

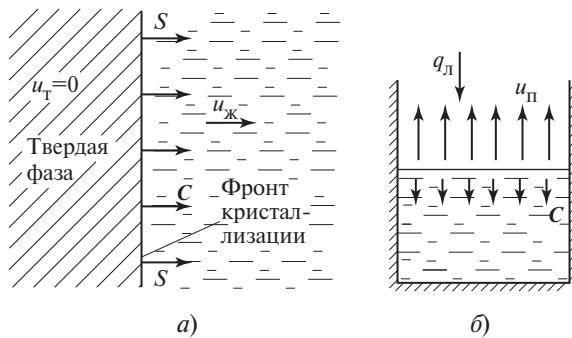


Рис. 7.6. Схема движения в пространстве:

а — фронта кристаллизации жидкости; б — фронта испарения

Скорость движения границы ( $C$ ) в обоих случаях не совпадает со скоростями фаз у границы. В случае, показанном на рис. 7.6, а, твердая фаза неподвижна ( $u_T = 0$ ), в жидкости может иметь место свободная конвекция, но  $u_{ж} \neq C$ . В случае, приведенном на рис. 7.6, б, неподвижна жидккая фаза ( $u_{ж} = 0$ ), образующийся пар поднимается вверх ( $u_п > 0$ ), поверхность раздела перемещается вниз ( $C < 0$ ).

В общем случае скорость перемещения границы (поверхности разрыва) в некоторой точке  $M$  в системе координат  $\{x_k\}$  определяется соотношением (рис. 7.7):

$$C = \mathbf{n}^\circ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \mathbf{n}^\circ \frac{\partial n}{\partial t} \quad \text{или} \quad C = |C| \mathbf{n}^\circ. \quad (7.7)$$

Здесь  $\mathbf{n}^\circ$  — единичный вектор нормали, проведенный из данной точки поверхности в сторону перемещения границы;  $\Delta n = MN$  — расстояние вдоль нормали между исходной точкой  $M$  и новым положением границы;  $|C|$  — модуль вектора  $C$ .

Выведем соотношение для  $C$  при условии, что уравнение поверхности раздела фаз (поверхности разрыва) задано в аналитической форме. Уравнение поверхности имеет вид

$$\Phi_S[t, \mathbf{r}(t)] = 0, \quad (7.8)$$

где  $\mathbf{r}(t)$  — радиус-вектор, проведенный из начала координат к данной точке поверхности. Дифференцируя уравнение (7.8), находим

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_S}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0.$$

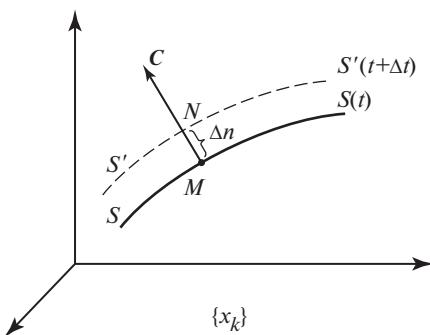


Рис. 7.7. К определению скорости движения границы раздела фаз

Отсюда

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \Phi_S}{\partial t}\right) / \left(\frac{\partial \Phi_S}{\partial \mathbf{r}}\right).$$

Имея в виду соотношение (7.7), скорость поверхности  $\mathbf{C}$  определяют как  $\partial \mathbf{r} / \partial t$ , если приращение радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  происходит вдоль нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности (см. рис. 7.7). Тогда производная

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \Phi_S}{\partial \mathbf{n}} = \operatorname{grad} \Phi_S \equiv \nabla \Phi_S.$$

Следовательно,

$$\mathbf{C} = -\frac{\partial \Phi_S / \partial t}{\nabla \Phi_S} = -\frac{\partial \Phi_S / \partial t}{(\nabla \Phi_S)^2} \nabla \Phi_S. \quad (7.9)$$

Модуль скорости границы  $|C| = \sqrt{C^2}$ , т.е.

$$|C| = \sqrt{\frac{\frac{\partial \Phi_S}{\partial t}}{(\nabla \Phi_S)^2}}. \quad (7.9a)$$

Единичный вектор  $\mathbf{n}^\circ$ , определяющий направление скорости, находится из выражения

$$\mathbf{n}^\circ = \mathbf{C} / |C|.$$

Соотношения (7.9) и (7.9а) правомерны при рассмотрении движения границы в любой системе координат: как декартовой, так и криволинейной ортогональной (например, сферической). Ниже эти соотношения даны для декартовой системы координат и приведены примеры их использования.

В декартовой системе координат

$$\nabla \Phi_S = \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \mathbf{i}_k;$$

$$(\nabla \Phi_S)^2 = \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k}.$$

Соотношения (7.9) и (7.9а) принимают вид

$$\mathbf{C} = - \frac{\frac{\partial \Phi_S / \partial t}{\sqrt{\frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k}}}}{\left| \sqrt{\frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k}} \right|} \frac{\partial \Phi_S / \partial x_k}{\left| \sqrt{\frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k}} \right|} \mathbf{i}_k;$$

$$|\mathbf{C}| = \left| \frac{\frac{\partial \Phi_S / \partial t}{\sqrt{\frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k}}}}{\left| \sqrt{\frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k}} \right|} \right|.$$

**Пример 1.** Найти выражение для скорости движения поверхности раздела фаз, показанной на рис. 7.8.

Величина  $h(t, x_1)$  есть известная функция времени и координаты  $x_1$ . Например, если по поверхности распространяется прогрессивная

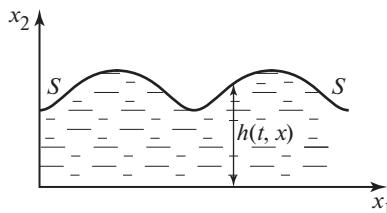


Рис. 7.8. Волновое движение границы раздела фаз

волна, то  $h = h_0 + a \sin(kx - \omega t)$ , где  $k$  — волновое число,  $\omega$  — круговая частота.

Уравнение поверхности

$$\Phi_S = h(t, x_1) - x_2 = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t};$$

$$\nabla \Phi_S = \frac{\partial h}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2;$$

$$(\nabla \Phi_S)^2 = 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^2.$$

Следовательно,

$$\mathbf{C} = \frac{\frac{\partial h / \partial t}{1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^2} \left( \mathbf{i}_2 - \frac{\partial h}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 \right)}{1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^2};$$

$$|\mathbf{C}| = \sqrt{\frac{\partial h / \partial t}{1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^2}}.$$

Заметим, что при анализе волновых движений часто используется приближение малых волн, согласно которому амплитуда волны много меньше длины волны. В этом случае квадратичные относительно  $\partial h$  члены опускаются как величины высокого порядка малости и получается очень простое выражение для скорости границы:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial h}{\partial t} \mathbf{i}_2.$$

**Пример 2.** Сферический паровой пузырек в жидкости изменяет свой объем (за счет фазового перехода). Известна зависимость  $R_S(t)$ . Найти скорость движения границы (рис. 7.9).

Уравнение границы

$$\Phi_S = R_S(t) - r = 0.$$

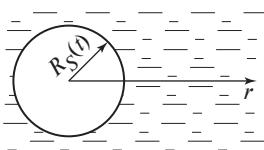


Рис. 7.9. Схема роста парового пузырька в объеме жидкости

Находим

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial t} = \frac{dR_S}{dt}; \quad \nabla \Phi_S = -i_r;$$

$$\mathbf{C} = \frac{dR_S}{dt} i_r;$$

$$|C| = \left| \frac{dR_S}{dt} \right|.$$

Этот результат, конечно, можно было получить сразу из физических соображений ввиду его простоты.

### 7.3.2. Запись универсальных условий совместности в лабораторной системе отсчета

В приложениях универсальные условия совместности удобно записывать не в собственной, а в лабораторной системе координат, в которой поверхность сама движется со скоростью  $\mathbf{C}$ . С учетом того что согласно определению (7.7) скорость границы нормальна поверхности раздела, переход от собственной системы отсчета к системе отсчета наблюдателя достаточно прост. При раскрытии соотношений (7.2)–(7.6) следует всюду вместо скоростей писать их выражения в лабораторной системе координат:

$$\tilde{u}_n = u_n - C, \quad \tilde{u}_\tau = u_\tau. \quad (7.10)$$

Таким образом, например, соотношение (7.2) приобретает вид

$$[\rho(u_n - C)] = 0, \quad \text{или} \quad \rho''(u_n'' - C) = \rho'(u_n' - C).$$

С учетом (7.10) остальные величины, входящие в (7.3)–(7.5), запишутся как

$$\Pi_{nn} = \rho(u_n - C)^2 + p - \tau_{nn};$$

$$\Pi_{n\tau} = \rho(u_n - C)u_\tau - \tau_{n\tau};$$

$$E_n = \rho(u_n - C)h_* - \{u_\tau\tau_{n\tau} + (u_n - C)\tau_{nn}\} + q_n,$$

где

$$h_* = h + \frac{(u_n - C)^2}{2} + \frac{u_\tau^2}{2}.$$

При расшифровке этих соотношений задача сводится к выражению в лабораторной системе координат составляющих скорости  $u_n$  и  $u_\tau$ , теплового потока  $q_n$  и компонент тензора вязких напряжений  $\tau_{nn}$  и  $\tau_{n\tau}$ . Ниже такая процедура иллюстрируется на примере двумерной задачи.

Пусть в системе координат  $\{x_1, x_2\}$  известна скорость межфазной поверхности  $C$  (рис. 7.10) в данной точке  $M$ . Это означает, что заданы компоненты скорости  $C_1$  и  $C_2$ , а следовательно, могут быть легко определены уравнения единичной нормали  $n^\circ$  и единичной касательной  $\tau^\circ$  к поверхности в рассматриваемой точке.

Выражение для  $n^\circ$ :

$$n^\circ = \alpha i_1 + \beta i_2,$$

где

$$\alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}; \quad \beta = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

— направляющие косинусы нормали  $n^\circ$ .

Из условий  $n^\circ \tau^\circ = 0$ ;  $|n^\circ| = |\tau^\circ| = 1$  находится выражение для единичного вектора касательной:

$$\tau^\circ = \beta i_1 - \alpha i_2.$$

Теперь не представляет сложностей выразить  $\tilde{u}_n$ ,  $\tilde{u}_\tau$ ,  $q_n$ ,  $\tau_{nn}$ ,  $\tau_{n\tau}$  в системе  $\{x_1, x_2\}$ . Нормальная и касательная к поверхности компоненты вектора скорости:

$$u_n = (\mathbf{u} \cdot n^\circ) = \alpha u_1 + \beta u_2,$$

$$u_\tau = (\mathbf{u} \cdot \tau^\circ) = \beta u_1 - \alpha u_2.$$

Из определения потока теплоты (энергии) как вектора имеем

$$q_n = (\mathbf{q} \cdot n^\circ) = \alpha q_1 + \beta q_2.$$

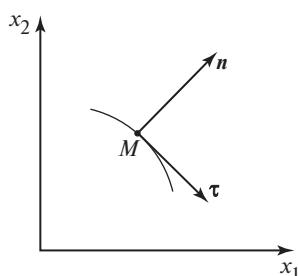


Рис. 7.10. Граница раздела фаз в системе координат  $\{x_1, x_2\}$

По определению тензора\*,

$$\tau_{nn} = \alpha^2 \tau_{11} + 2\alpha\beta\tau_{12} + \beta^2 \tau_{22};$$

$$\tau_{n\tau} = \alpha\beta\tau_{11} + (\beta^2 - \alpha^2)\tau_{12} - \alpha\beta\tau_{22}.$$

Следовательно, все величины в собственной системе координат  $\{n, \tau\}$  теперь выражены через соответствующие величины в лабораторной системе отсчета  $\{x_1, x_2\}$ . В частности, скорость фазы относительно границы

$$\tilde{u}_n = u_n - C = \alpha u_1 + \beta u_2 - C.$$

Поэтому поток вещества через поверхность раздела фаз

$$\dot{m} = \rho'' \{(\alpha u_1'' + \beta u_2'') - C\} = \rho' \{(\alpha u_1' + \beta u_2') - C\}.$$

Аналогично могут быть записаны другие величины, входящие в условия совместности (7.3)–(7.5).

В заключение рассмотрим совсем простой пример записи универсальных условий совместности в лабораторной системе отсчета для сферически симметричной задачи. Пусть сферический объем фазы 1 постоянной плотности вследствие фазового перехода изменяется в объеме фазы 2 с известной скоростью границы  $C$  (рис. 7.11). Найти взаимосвязь между скоростью фазы 2 на границе и скоростью  $C$ .

В условиях неизменной плотности внутренней фазы (фаза 1 — пар или жидкость) ее скорость в таких задачах равна нулю:  $u^{(1)} = 0$ .

Условие материального баланса

$$\rho^{(1)}(u_R^{(1)} - C) = \rho^{(2)}(u_R^{(2)} - C)$$

с учетом  $u^{(1)} = 0$  приводит к соотношению

$$u_R^{(2)} = C \left( 1 - \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}} \right),$$

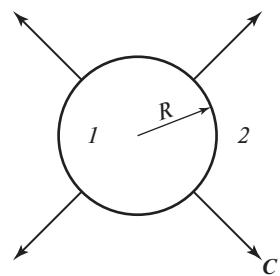
\* В системе координат  $\{y_k\}$  компоненты тензора  $\tau_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_l} \frac{\partial y_j}{\partial x_m} \tau_{lm}$ , где  $\tau_{lm}$  — компоненты тензора в системе  $\{x_k\}$ . Производные  $\partial y_i / \partial x_k$  зависят от взаимного расположения координат («новых»  $\{y_k\}$  и «старых»  $\{x_k\}$ ). В нашем случае координатам  $\{y_k\}$  соответствуют координаты  $\{n, \tau\}$ , а производные  $\partial y_i / \partial x_k$  находятся из соотношений:

$$dn = \alpha dx_1 + \beta dx_2;$$

$$d\tau = \beta dx_1 - \alpha dx_2.$$

**Рис. 7.11. Рост сферического объема фазы 1  
внутри фазы 2**

которое представляет собой решение для обоих возможных случаев. Нижний индекс  $R$  в этих соотношениях указывает, что скорость фазы рассматривается на границе сферического объема; он равносителен индексу  $n$  в общей записи условий совместности.



Для парового пузырька  $(\rho^{(1)} = \rho'', \rho^{(2)} = \rho', u_R^{(2)} = u_R')$

$$u_R' = C \left( 1 - \frac{\rho''}{\rho'} \right),$$

т.е. скорость жидкости совпадает по направлению со скоростью границы  $C$  и лишь немного меньше ее количественно, поскольку  $\rho' >> \rho''$ .

Для капли жидкости (при конденсации или испарении) скорость пара противоположна по направлению скорости границы  $C$  и существенно больше ее по значению:

$$u_R'' = -C \frac{\rho' - \rho''}{\rho''}.$$

С учетом рассмотренного в предыдущем пункте этого параграфа примера 2 модуль скорости границы  $C = \left| \frac{dR}{dt} \right| \equiv |\dot{R}|$ .

## 7.4. Специальные условия совместности

### 7.4.1. Общие положения

Универсальные условия совместности, приведенные выше, представляют собой по существу приложение общих фундаментальных законов сохранения к поверхностям разрыва. Поэтому они одинаково справедливы для самых различных классов физических задач: фазовые переходы, газодинамические поверхности разрыва, фронт горения или детонации и т.д. Однако для однозначной формулировки прикладных задач определенного класса (в частности, задач фазовых переходов, тепло- и массообмена в двухфазных системах) этих условий недостаточно. Для замыкания описания необходимо внести еще дополнительные или *специальные условия совместности*. Эти усло-

вия призваны учесть физические особенности данного класса задач. Применительно к задачам тепло- и массообмена в газожидкостных системах специальные условия совместности определяют на межфазных границах касательные компоненты скорости  $u_\tau(0)$ , температуры контактирующих фаз  $T'(0)$ ,  $T''(0)$  и, в случае бинарной смеси, ее состав в соприкасающихся фазах.

В большинстве прикладных задач принимается, что соприкасающиеся фазы находятся в состоянии локального термодинамического равновесия. Это (квазиравновесное) приближение будет рассмотрено в конце настоящего параграфа. Вместе с тем, известно, что само понятие «равновесный процесс» — это удобное модельное представление, тогда как реальные процессы переноса импульса, энергии, массы компонента в смеси, протекающие при конечных градиентах потенциала переноса (скорость, температура, состав смеси), всегда являются необратимыми, т.е. неравновесными. Не обратимость реальных процессов проявляется в возникновении специфических *неравновесных эффектов* на межфазных границах: наличие конечной скорости скольжения фаз, скачка температуры, отличие состава фаз от равновесного для смесей.

Общие физические оценки показывают, что неравновесные эффекты должны, в первую очередь, проявляться в газовой (паровой) фазе у межфазной границы. В конденсированных фазах (жидкость, твердое тело) отклонения от условий локального термодинамического равновесия наступают, по-видимому, при существенно более высоких интенсивностях процессов переноса, чем те, которые встречаются в технике.

Теоретические расчеты неравновесных эффектов у межфазной границы в газовой фазе базируются на молекулярно-кинетической теории. Основным исходным соотношением анализа является кинетическое уравнение Больцмана. Не ставя целью излагать сколь-либо подробно теорию этих эффектов (которая сейчас является самостоятельным разделом теоретической физики и достаточно сложна), укажем лишь на принципиальную сторону кинетического подхода. Для этого приведем упрощенную форму основного кинетического уравнения, так называемое релаксационное кинетическое уравнение, которое сохраняет все основные черты более строгого уравнения Больцмана.

Будем рассматривать одномерный стационарный процесс переноса (вдоль оси  $x_1$  на рис. 7.12) в газовой фазе вблизи межфазной границы

**Рис. 7.12. Схема одномерного переноса в окрестности фазовой границы**

$S-S$ . Для этого случая релаксационное кинетическое уравнение имеет вид

$$C_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{\tau} (f_{eq} - f),$$

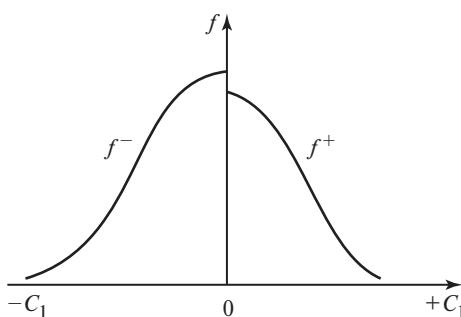
где  $C_1$  — скорость движения молекул в проекции на ось  $x_1$ ;  $f$  — функция распределения молекул по скоростям;  $f_{eq}$  — локально-равновесная функция распределения молекул по скоростям;  $\tau$  — время релаксации, имеющее порядок величины среднего времени свободного пробега молекул между столкновениями.

При наличии переноса тепла, импульса или массы вдоль оси  $x_1$  действительная функция распределения  $f$  у поверхности изменяется вдоль координаты  $x_1$ . Это обусловлено тем, что при наличии процессов переноса функция распределения на поверхности (т.е. при  $x_1 \rightarrow +0$ ) неравновесна, причем эта неравновесность имеет специфические черты, обусловленные механизмом обменных процессов на межфазной поверхности.

Качественный характер неравновесности вблизи границы конденсированной фазы может быть объяснен с помощью следующих соображений. При передаче тепла от газа к стенке имеется различие в спектрах молекул, летящих из объема к стенке и движущихся после отражения стенкой в направлении объема газа. Падающий спектр ( $C_1 < 0$ ) содержит более быстрые («горячие») молекулы по сравнению с отраженным ( $C_1 > 0$ ). Функция распределения  $f$  может быть подразделена на две части  $f^+, f^-$ , отвечающие отраженным и падающим молекулам, причем  $f^+ \neq f^-$ . Таким образом, распределение молекул по скоростям носит как бы разрывный характер (т.е. различно для  $C_1 > 0$  и  $C_1 < 0$ ). Условно эта разрывность показана на рис. 7.13.

Аналогичное положение возникает при переносе импульса и вещества. При переносе касательной составляющей импульса в падающем и отраженном спектрах молекул содержится разный «запас» касательной составляющей импульса газа. В процессе переноса массы (конденсация, испарение) падающий и отраженный спектры молекул переносят разную плотность вещества (их разность и опре-





**Рис. 7.13. Примерный вид функции распределения в окрестности границы раздела фаз**

деляет результирующий поток вещества). Таким образом, состояние газа (пара) на поверхности неравновесно и эта неравновесность усиливается по мере повышения интенсивности процессов переноса. По мере удаления от поверхности разрывный характер в распределении молекул постепенно утрачивается за счет «перемешивания» молекул вследствие их столкновений. Такой процесс, строго говоря, носит асимптотический характер, т.е. перестроение функции распределения происходит плавно с затухающей интенсивностью по мере удаления от поверхности. Основное изменение, однако, приходится на весьма тонкий слой у поверхности, эффективная толщина которого имеет порядок средней длины пробега молекул. Этот слой называется слоем Кнудсена. В плотных газах и парах, характеризующихся малыми числами Кнудсена

$$\text{Kn} = \frac{l_{\text{мол}}}{L} \ll 1, \quad (7.11)$$

где  $l_{\text{мол}}$  — длина свободного пробега молекул;  $L$  — линейный масштаб области, охваченной процессами переноса в газовой фазе (толщина пограничного слоя Прандтля, поперечное сечение канала и т.д.), толщина слоя Кнудсена совершенно ничтожна по сравнению с макроскопическими геометрическими масштабами задачи (их отношение имеет порядок числа Kn). Однако анализ процессов в слое Кнудсена дает возможность найти уточненные (в сравнении с гипотезой о локальном термодинамическом равновесии) макроскопические граничные условия на межфазной поверхности.

За пределами слоя Кнудсена действительная функция распределения  $f$  также, в общем случае, не совпадает с локально равновесной

$f_{eq}$ , однако здесь характер неравновесности иной. Функция распределения не носит более разрывного характера, и ее отличие от равновесной связано с переменностью осредненных (макроскопических) характеристик газа в пространстве (градиенты температур, скорости газа и т.д.). В этой области правомерны феноменологические законы переноса тепла (закон Фурье), импульса (закон вязкого трения Ньютона) и вещества (закон диффузии Фика). В слое Кнудсена эти законы не выполняются. Таким образом, схема пристенной области, условно изображенная на рис. 7.14, включает слой Кнудсена (I), к которому примыкает область сплошной среды (II). В ней выполняются уравнения Навье—Стокса. Часто эта область называется навье-стоксовой областью.

Заметим, что сильное неравенство (7.11) означает лишь то, что в навье-стоксовой области справедлива модель сплошной среды, но никак не отменяет необходимость при строгом анализе учитывать специфику переноса в слое Кнудсена.

В большинстве реальных ситуаций интенсивность процессов переноса по сравнению с интенсивностью молекулярного перемешивания и молекулярными обменными процессами оказывается невысокой. Для этих условий отклонения функции распределения от локально-равновесной оказываются также небольшими:

$$f - f_{eq} \ll f_{eq},$$

и тогда можно в теоретическом анализе использовать только первые степени отклонения от равновесия (и опускать более высокие степени как бесконечно малые величины). Такая операция называется

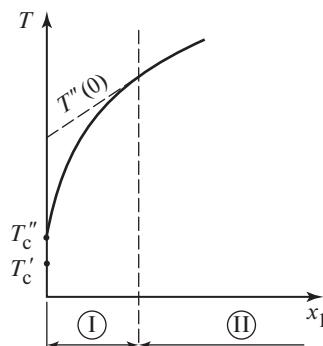


Рис. 7.14. Поле температур в слое Кнудсена и в навье-стоксовой области

линеаризацией, а основанная на ней неравновесная теория — линейной теорией.

Прежде чем переходить к рассмотрению результатов линейной теории неравновесных эффектов на межфазных границах, целесообразно остановиться на следующем моменте. Для практических приложений детальное описание полей температуры, скорости и т.д. в слое Кнудсена не представляет интереса из-за весьма малых размеров этого слоя. Поэтому результаты теоретического описания обычно представляют в специфической форме. Содержание этого приема рассмотрим на примере передачи тепла через непроницаемую поверхность. На рис. 7.14 схематически показано полученное теоретически действительное распределение температуры газа у поверхности, включая слой Кнудсена. Штриховой линией обозначена экстраполяция температурного поля из внешней (навье-стоксовой) области к поверхности. Соответственно имеются действительный температурный скачок на поверхности  $\Delta T_c = T''_c - T'_c$  и экстраполированный (или фиктивный) скачок температур  $\Delta T = T''(0) - T'_c$ . Здесь  $T''_c$  — действительная температура газа на поверхности;  $T''(0)$  — экстраполированное значение температуры газа на поверхности (фиктивная величина).

Для практики достаточно знать значение экстраполированного скачка температур  $T''(0) - T'_c$ , ибо по нему может быть построено правильное распределение температур во всем объеме газа (за исключением несущественного в приложениях тонкого слоя Кнудсена) на основе обычных уравнений сплошной среды. Поэтому для приложений важны значения экстраполированных параметров газа на поверхности. Действительные значения представляют лишь теоретический интерес.\* В последующем изложении, посвященном некоторым результатам линейной теории, под параметрами газа на поверхности понимаются именно экстраполированные величины.

#### 7.4.2. Результаты линейной теории для некоторых задач гидродинамики и теплообмена в однокомпонентной среде

*Перенос импульса через непроницаемую поверхность.* При движении газового потока вдоль непроницаемой поверхности раздела фаз через поверхность осуществляется перенос касательной составляю-

---

\* Часто в литературе (в основном, в прикладных руководствах и пособиях) об истинных параметрах и скачках вообще не упоминается.

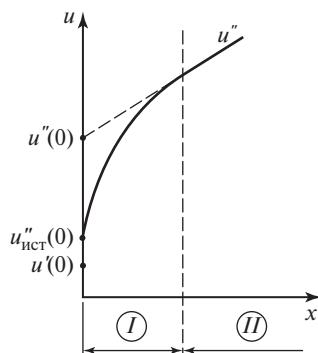


Рис. 7.15. Истинный и экстраполированный профили скорости

щей импульса, обусловленный вязкостью газа и вызывающий касательные напряжения трения на поверхности. Универсальные условия совместности позволяют заключить (п. 7.2.3), что касательная компонента скорости на границе раздела одинакова в обеих соприкасающихся фазах (т.е. при обтекании газом неподвижной поверхности равна нулю) только при нулевом значении касательного напряжения. Такая ситуация характерна для газодинамики, где можно обоснованно пренебречь вязкостью (скакки уплотнения, ударные волны). В общем случае так называемое условие прилипания при обтекании поверхности является приближенным допущением.

Кинетическое описание процесса показывает, что в действительности скорость газа на обтекаемой поверхности, с которой связана выбранная для анализа система координат, не равна нулю (рис. 7.15).

Линейная теория приводит к выводу, что скорость газа на поверхности  $u''(0)$ , называемая скоростью скольжения, пропорциональна касательному напряжению на поверхности  $\tau_c$ . Для рассматриваемых условий существенно, насколько полно происходит потеря продольной составляющей импульса после столкновения и отражения молекул от поверхности. Этот эффект характеризуется коэффициентом аккомодации продольной составляющей импульса. Существующие экспериментальные данные показывают, что этот коэффициент близок к единице (полное торможение падающего потока после столкновения и отражения молекул от поверхности). Поэтому итоговое соотношение линейной кинетической теории приведем для этого частного случая. Оно имеет вид

$$\tilde{u}(0) = \tilde{\tau}, \quad (7.12)$$

где  $\tilde{u}(0) = u''(0)/C_{\text{тепл}}$  — безразмерная скорость скольжения;  $C_{\text{тепл}} = \sqrt{2R_i T}$  — наиболее вероятная тепловая скорость движения молекул газа (которая имеет порядок скорости звука в газе);  $R_i$  — газовая постоянная;  $\tilde{\tau} = \frac{\tau_c}{p''} = \frac{\tau_c}{\rho'' \frac{C_{\text{тепл}}^2}{2}}$  — безразмерное касательное напряжение;  $p'' = \rho'' R_i T$  — давление газа. Использование здесь и далее в настоящем параграфе уравнения состояния идеального газа вполне оправдано, поскольку интересующие нас неравновесные эффекты характерны для относительно низких давлений.

В соотношении (7.12) безразмерная величина  $\tilde{\tau} = \tau_c/p''$  имеет смысл параметра неравновесности. Из этого соотношения следует, что выводы квазиравновесного приближения  $u''(0) = 0$  будут выполняться тем точнее, чем меньше параметр неравновесности.

При фиксированном значении  $\tau_c$  скорость скольжения растет по мере снижения давления в системе. При умеренных скоростях и атмосферном давлении квазиравновесное приближение обычно оказывается оправданным. При внешнем обтекании тела высокоскоростным потоком газа (аэродинамика) роль скорости скольжения зависит от скорости потока (числа Маха). Это можно показать путем следующих оценок. При внешнем обтекании тела касательное напряжение можно выразить через коэффициент сопротивления трения  $C_f$ :

$$\tau_c = \frac{C_f}{2} \rho'' U_\infty''^2.$$

После подстановки этого выражения в соотношение (7.12) и учета того, что  $U_\infty''/C_{\text{тепл}} \approx M_\infty$ , находим:

$$\frac{u''(0)}{U_\infty''} \approx C_f M_\infty.$$

Таким образом, по мере роста числа Маха значение  $u''(0)/U_\infty''$  увеличивается. При турбулентном течении газа, когда  $C_f$  изменяется в относительно узких пределах, абсолютные давления несущественны. Приведенные соображения показывают, что эффекты сколь-

жения имеют существенное значение при полетах скоростных самолетов и космических аппаратов.

В последнем случае из-за высокой разреженности атмосферы (аномально высокая кинематическая вязкость  $\nu = \mu/\rho''$ ) режим обтекания поверхности космического объекта может оказаться ламинарным даже при очень высоких скоростях движения. Тогда эффект скольжения увеличивается со снижением давления, поскольку при ламинарном течении  $C_f \sim (\rho'')^{-1/2}$ .

Любопытно, что в последние годы в связи с исследованием течения в наноканалах, где скольжение на обтекаемой поверхности возникает при весьма низких скоростях течения, обратились к оригинальным работам Навье. Выяснилось, что автор уравнений движения вязкой жидкости рассматривал возможность использования в качестве граничного условия для касательной компоненты скорости на обтекаемой границе наряду с условием прилипания наличие конечной скорости скольжения, пропорциональной касательному напряжению на стенке. Уравнение (7.12), как легко понять, соответствует этому виду граничных условий.

*Перенос тепла через непроницаемую поверхность раздела фаз.* При отсутствии переноса массы (непроницаемая граница) вблизи поверхности раздела фаз перенос тепла осуществляется теплопроводностью. Неравновесная линейная кинетическая теория для таких условий приводит к заключению, что температура газа на поверхности  $T''(0)$  не равна температуре конденсированной фазы на поверхности  $T'(0)$ . Скачок температур  $T''(0) - T'(0)$  оказывается пропорциональным тепловому потоку у поверхности в газовой фазе:

$$q = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n \rightarrow 0} .$$

Итоговое соотношение кинетической теории для скачка температур содержит также коэффициент энергетической аккомодации  $\alpha$ , который характеризует эффективность энергообмена при соударении и отражении молекул газа от поверхности конденсированной фазы. Этот коэффициент был введен Кнудсеном (1911), и его определение имеет вид

$$\alpha = \frac{E_{\text{отр}} - E_{\text{пад}}}{E_c - E_{\text{пад}}} .$$

Здесь  $E_{\text{пад}}$  — энергия падающего на поверхность потока молекул;  $E_{\text{отр}}$  — энергия отраженного от поверхности потока молекул;  $E_c$  — энергия отраженного потока в случае, если газ находится в равновесии с поверхностью (со стенкой) и имеет температуру поверхности.

Значения  $\alpha$  могут изменяться в пределах от 0 до 1. При  $\alpha = 1$  имеет место наиболее полный обмен энергией. Коэффициент энергетической аккомодации должен зависеть от рода газа, материала и состояния поверхности. Опытные данные показывают, что в обычных условиях  $\alpha \approx 0,9 \div 1$ .

Итоговое соотношение линейной кинетической теории имеет вид

$$\theta(0) = -\sqrt{\pi} \frac{1 - 0,41\alpha}{\alpha} \tilde{q}. \quad (7.13)$$

Здесь  $\theta(0) = \frac{T''(0) - T'(0)}{T}$  — безразмерный температурный скачок

на поверхности;  $\tilde{q} = \frac{q}{q_*} = \frac{q}{p'' \sqrt{2R_i T}}$  — безразмерный тепловой

поток на поверхности.

В качестве характерной температуры  $T$ , входящей в безразмерные параметры  $\theta$  и  $\tilde{q}$ , можно брать любую из температур фаз, т.е.  $T \approx T'(0) \approx T''(0)$ , так как в рамках допущения линейной теории  $\theta(0) \ll 1$ . Положительное значение потока тепла  $q$  в соотношении (7.13) имеет при передаче тепла от поверхности к газу. При  $\alpha = 1$  из соотношения (7.13) следует, что

$$\theta(0) = -1,05 \tilde{q}. \quad (7.13a)$$

Целесообразность записи приведенных соотношений в безразмерной форме видна из следующих соображений. Масштабная величина для потока тепла  $q_*$  пропорциональна величине одностороннего потока энергии, переносимого через единичную контрольную поверхность за счет теплового движения молекул газа. Это заключение становится понятным, если записать  $q_*$  в форме

$$q_* = p'' C_{\text{тепл}} = R_i \rho'' C_{\text{тепл}} T,$$

где  $C_{\text{тепл}} = \sqrt{2R_i T}$  — наиболее вероятная тепловая скорость движения молекул газа;  $R_i$  — газовая постоянная. Поэтому отношение

$$\tilde{q} = q / q_*$$

имеет смысл параметра неравновесности в процессе передачи тепла в газе.

При фиксированном значении потока тепла  $q$  скачок температур  $T''(0) - T'(0)$  растет по мере снижения давления газа, так как при этом падает значение  $q_*$ . Поэтому при обработке результатов экспериментального измерения теплопроводности разреженных газов требуется учет этого скачка, что было показано В.В. Махровым, исследовавшим теплопроводность паров металлов. Обычно при атмосферном давлении скачок температур в большинстве практических задач несуществен.

При обтекании поверхности газовым потоком высокой скорости (аэродинамика) роль скачка температур на поверхности зависит от скорости обтекания (числа Маха), что легко показать, проведя следующие оценки.

При внешнем обтекании высокоскоростным потоком выражение для теплового потока можно выразить через число Стантона:

$$q = St \rho'' U''_{\infty} (h''_c - h''_{\infty}),$$

где  $h''_c - h''_{\infty}$  — разность полных энталпий (энталпий торможения) газа на стенке и в невозмущенном потоке. Используя это выражение и учитывая, что отношение

$$\frac{U''_{\infty}}{C_{\text{тепл}}} \approx M_{\infty},$$

где  $M_{\infty}$  — число Маха, а газовая постоянная  $R_i$  по порядку величины близка теплоемкости газа  $c_p''$ , находим, что

$$\frac{c_p'' [T''(0) - T'(0)]}{h''_c - h''_{\infty}} \approx St M_{\infty}. \quad (7.14)$$

Из проведенной оценки видно, что роль скачка температур возрастает по мере увеличения числа  $M_{\infty}$ . Абсолютные давления в этой ситуации несущественны. Более детальные оценки для воздуха приводят к появлению в правой части (7.14) числового множителя, чуть меньшего 3. Поскольку в этом случае  $St \approx C_f/2$ , то при турбулентном течении правая часть (7.14) составляет примерно  $0,01 M_{\infty}$ . Отсюда ясно, что при несжимаемых течениях газа ( $M_{\infty} \leq 0,3$ ) скачок температур в задачах теплообмена пренебрежимо мал.

*Фазовые переходы в однокомпонентных системах.* Кинетический анализ показывает, что при испарении и конденсации на межфазной поверхности возникает скачок температур, т.е.  $[T] \neq 0$ ,  $T'(0) \neq T''(0)$ .

Для рассмотрения результатов кинетического описания вводятся следующие величины:

$T'(0)$  — температура поверхности конденсированной фазы;

$T''(0)$  — экстраполированное значение температуры пара на поверхности раздела фаз;

$p_{s0}$  — давление насыщения, отвечающее температуре поверхности конденсированной фазы, т.е.  $p_{s0} = p_s\{T'(0)\}$ . Это — расчетная величина, отличная от актуального давления в системе;

$p''_\infty$  — актуальное давление пара вблизи поверхности (за пределами слоя Кнудсена);

$\dot{m}$  — поток вещества, пересекающий единичную площадку поверхности раздела фаз;

$q$  — поток тепла, пересекающий единичную площадку поверхности раздела фаз (положительные значения  $\dot{m}$  и  $q$  отвечают потокам, направленным в паровую fazу);

$\beta$  — коэффициент конденсации (испарения), показывающий, какая часть молекул пара, достигающих поверхности раздела фаз, конденсируется. Этот коэффициент (имеющий смысл коэффициента материальной аккомодации) лежит в пределах 0—1 и определяется экспериментально.

Основные результаты линейной теории сводятся к следующему:

1) давление в пределах слоя Кнудсена однородно и равно  $p''_\infty$ , так что конденсированная фаза находится под тем же давлением, что и пар (без учета поверхностного натяжения на искривленной границе).

2) если  $T_s$  — расчетная температура насыщения при актуальном давлении  $p''_\infty$  в паровой fazе, то оказывается, что ни  $T'(0)$ , ни  $T''(0)$  не равны  $T_s$ ;

3) на поверхности раздела фаз существует скачок температур  $[T] = T''(0) - T'(0)$ , пропорциональный потоку вещества  $\dot{m}$  (если влияние теплового потока несущественно).

Кроме этого, характеристикой процесса является разность давлений  $p''_\infty - p_{s0}$ , которая специфична для задач фазовых переходов. Неверно было бы эту разность именовать «скачком давления» (хотя, к сожалению, в литературе такие толкования встречаются довольно

часто). Величина  $p''_{\infty} - p_{s0}$  представляет собой просто разность между действительным давлением в системе и расчетным значением давления насыщения  $p_{s0}$ , определяемым по температуре поверхности конденсированной фазы  $T'(0)$ .

Для записи количественных соотношений линейной теории целесообразно использовать безразмерные величины:

$$\tilde{q} = \frac{q}{q_*} = \frac{q}{p''_{\infty} \sqrt{2R_i T}} \text{ — безразмерный тепловой поток;}$$

$$\tilde{\dot{m}} = \frac{\dot{m}}{\rho'' \sqrt{2R_i T}} = \frac{\dot{m}}{\rho'' C_{\text{тепл}}} = \frac{u''}{C_{\text{тепл}}} \text{ — безразмерный поток массы;}$$

$$\theta(0) = \frac{T''(0) - T'(0)}{T} \text{ — безразмерный скачок температур;}$$

$$\tilde{\Delta p} = \frac{p''_{\infty} - p_{s0}}{p} \text{ — безразмерная разность давлений.}$$

С учетом этих обозначений итоги кинетического анализа имеют вид:

$$\theta(0) = -0,45 \tilde{\dot{m}} - 1,05 \tilde{q}; \quad (7.15)$$

$$\tilde{\Delta p} = -2\sqrt{\pi} \frac{1 - 0,4\beta}{\beta} \tilde{\dot{m}} - 0,44 \tilde{q}. \quad (7.16)$$

При отсутствии потока массы ( $\tilde{\dot{m}} = 0$ ) соотношение (7.15) переходит в соотношение (7.13а) для температурного скачка на непроницаемой поверхности (в предположении  $\alpha = 1$ , которое принято в анализе). Второе соотношение (7.16) при том же условии  $\tilde{\dot{m}} = 0$  устанавливает характерную величину  $\Delta p$  в двухфазных однокомпонентных системах при наличии потока тепла и отсутствии потока массы. Этот случай представляет интерес при анализе пленочного кипения сильно недогретой жидкости, особенно при высоком значении теплопроводности жидкости.

В системах, где безразмерный поток тепла  $\tilde{q}$  существенно меньше потока массы  $\tilde{\dot{m}}$  (обычные условия фазового перехода конечной интенсивности, когда отсутствуют значительные перегревы пара вдали от поверхности), соотношения (7.15) и (7.16) принимают вид:

$$\theta(0) = -0,45 \tilde{\dot{m}}; \quad (7.15a)$$

$$\tilde{\Delta}p = -2\sqrt{\pi} \frac{1-0,4\beta}{\beta} \tilde{m}. \quad (7.16a)$$

Эти соотношения содержат интересные данные о термодинамическом состоянии пара у поверхности в процессах испарения и конденсации. Они касаются вопроса о том, какие знаки и величины отклонений  $T''(0) - T_s$  и  $T'(0) - T_s$  имеют место в реальных процессах.

Для ответа на эти вопросы величина  $p''_\infty - p_{s0}$  заменяется с помощью уравнения Клапейрона—Клаузиуса на соответствующую разность температур  $T_s - T'(0)$ :

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_s = \frac{h_{LG}\rho''\rho'}{T(\rho' - \rho'')} \approx \frac{h_{LG}\rho''}{T} = \frac{h_{LG}p''_\infty}{R_i T^2};$$

$$p''_\infty - p_{s0} \approx \left(\frac{dp}{dT}\right)_s \{T_s - T'(0)\} = \frac{h_{LG}}{R_i T} \frac{T_s - T'(0)}{T} p''_\infty.$$

Тогда соотношение (7.16а) принимает вид

$$\frac{T_s - T'(0)}{T} = -2\sqrt{\pi} \frac{1-0,4\beta}{\beta} \frac{R_i T}{h_{LG}} \tilde{m}. \quad (7.17)$$

Из (7.15а) и (7.17) находим

$$\frac{T_s - T''(0)}{T} = \left(0,45 - 2\sqrt{\pi} \frac{1-0,4\beta}{\beta} \frac{R_i T}{h_{LG}}\right) \tilde{m}. \quad (7.18)$$

Из соотношения (7.17) следует, что при испарении ( $\tilde{m} > 0$ ) значение  $T'(0) > T_s$ , при конденсации ( $\tilde{m} < 0$ ) значение  $T'(0) < T_s$ . Иначе говоря, процесс испарения имеет место, когда температура поверхности конденсированной фазы выше, а конденсация — когда эта температура ниже, чем температура насыщения при актуальном давлении в системе. Это заключение достаточно естественно и привычно. Из соотношения (7.18) ясно, что в тех же процессах знак разности  $T_s - T''(0)$ , а значит, и температура пара  $T''(0)$  на поверхности зависят от знака выражения в скобках в (7.18). Для приближенной оценки этой величины можно привлечь известное физико-химическое эмпирическое правило Трутонса:  $h_{LG}/(R_i T) \approx 10$  (при нормальных усло-

виях). Тогда оказывается, что в зависимости от численного значения коэффициента конденсации  $\beta$  ответы могут быть разного знака. При  $\beta = 1$  (что согласно существующим представлениям имеет место для ряда чистых веществ при невысоких давлениях) получаем

$$0,45 - 2\sqrt{\pi} \cdot 0,6 \cdot 0,1 = 0,24 > 0.$$

Это значит, что при  $\beta = 1$  в процессе испарения ( $\tilde{m} > 0$ ) образуется переохлажденный пар  $T''(0) < T_s$ . При конденсации и  $\beta = 1$  пар на поверхности оказывается перегретым  $T''(0) > T_s$ .

По мере снижения  $\beta$  различие температур уменьшается, становится равным нулю при  $\beta \approx 0,5$  и далее меняет знак. Так, при  $\beta = 0,3$  в случае испарения  $T''(0) > T_s$ , в случае конденсации  $T''(0) < T_s$ .

Необычные на первый взгляд заключения, приведенные выше, являются результатом теоретического анализа. Эти новые эффекты экспериментального подтверждения пока не получили из-за трудностей эксперимента.

На рис. 7.16 показано взаимное расположение температур  $T'(0)$ ,  $T''(0)$  и  $T_s$  в процессах испарения и конденсации при разных  $\beta$ , отвечающее приведенному выше анализу.

Соотношения (7.15а) и (7.16а) показывают, что параметром неравновесности при фазовых переходах является введенная выше величина  $\tilde{m}$ . Изложенные в настоящем параграфе результаты получены

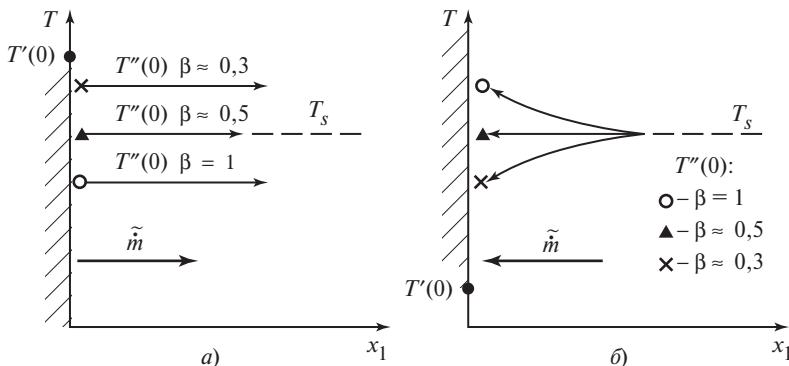


Рис. 7.16. Значения температуры в паровой и конденсированной фазах при испарении (а) и конденсации (б) при различных коэффициентах конденсации

в рамках линейной теории Д.А. Лабунцовым (1967, 1969 гг.), когда  $\tilde{\dot{m}} \ll 1$ . С учетом более поздних результатов (Д.А. Лабунцов, А.П. Крюков), которые относятся и к фазовым переходам высокой интенсивности, приведенные выше соотношения линейной теории можно использовать при  $\tilde{\dot{m}} \leq 0,05$ . При больших значениях параметра неравновесности анализ может проводиться только численными методами. Краткое изложение результатов этих исследований дано в [21], детальное — в оригинальных работах названных авторов. Здесь укажем только, что теоретический анализ ведет к выводу о существовании предельной скорости испарения (при неограниченном подводе энергии к поверхности)  $\tilde{\dot{m}}_{\text{lim}} = 0,82$ . Это значит, что 18 % эмитируемых молекул возвращаются в конденсированную фазу. При конденсации таких ограничений не возникает, т.е. возможна конденсация при  $|\tilde{\dot{m}}| > 1$ .

Очень важен вопрос о практической значимости неравновесных эффектов. Рассчитаем в качестве примера скачок температур на поверхности воды при атмосферном давлении, если плотность теплового потока  $q = 1 \text{ МВт}/\text{м}^2$ . Используя формулу (7.5г), найдем  $\dot{m} = q/h_{LG} = 10^6/(2,26 \cdot 10^6) \approx 0,44 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ . При плотности пара  $\rho'' \approx 0,59 \text{ кг}/\text{м}^3$  и скорости теплового движения молекул  $C_{\text{тепл}} \approx 590 \text{ м}/\text{с}$  находим  $\tilde{\dot{m}} \approx 1,3 \cdot 10^{-3}$ . Формула (7.15а) дает для модуля безразмерного скачка температур  $\theta \approx 5,85 \cdot 10^{-4}$ . При  $T_S = 373 \text{ К}$  получаем для размеженного скачка  $T'(0) - T''(0) \approx 0,22 \text{ К}$ . Это — величина, в принципе измеряемая, хотя практически измерить разность температур непосредственно на границе раздела фаз при интенсивном испарении пока не удавалось. Применительно к техническим приложениям нужно сопоставить рассчитанный скачок температур с температурным перепадом  $\Delta T$  между обогреваемой стенкой и температурой насыщения жидкости. При заданном тепловом потоке наблюдается развитое пузырьковое кипение воды, типичное значение  $\Delta T = 22 \div 24 \text{ К}$ . Таким образом, учет скачка температур в этом случае дает поправку на уровне 1 % к перепаду температур при кипении. Такая поправка на порядок меньше, чем обычный разброс опытных точек при кипении.

Есть здесь и более тонкий методический момент. В реальном процессе тепловой поток подводится к жидкости от твердой стенки; пло-

щадь той поверхности, на которой осуществляется переход жидкость—пар при кипении, определить невозможно. В гл. 9 будет показано, что в процессе кипения на твердой стенке есть очень малые участки с огромной локальной плотностью теплового потока; для таких участков в теоретическом анализе учитывают неравновесные эффекты на межфазных границах. Можно также вообразить, что вода покрывает твердую поверхность очень тонкой пленкой постоянной толщины  $\delta$ , тепло отводится за счет испарения со свободной поверхности пленки (без кипения). Чтобы отвести таким путем от стенки тепловой поток  $q = 10^6 \text{ Вт}/\text{м}^2$  при  $\Delta T = 22 \text{ К}$ , пленка должна иметь толщину  $\delta$  около 15 мкм. В таком (практически едва ли реализуемом) процессе поверхность фазового перехода определена, на ней должен существовать рассчитанный скачок температур. Но и в этом случае его значение на два порядка меньше, чем перепад температур при передаче теплопроводностью через слой воды толщиной  $\delta$ .

Иная ситуация реализуется при испарении и конденсации жидких щелочных металлов. Теплопроводность жидкости в этом случае почти в 100 раз выше, чем у воды, так что скачок температур на межфазной поверхности становится сопоставимым с характерными  $\Delta T$  в процессах теплообмена.

В большинстве случаев можно приближенно установить в качестве нижней границы, начиная с которой неравновесные эффекты следует учитывать в инженерных расчетах, значение  $\tilde{m} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ . При меньших значениях параметра неравновесности можно при формулировке специальных условий совместности для фазовых переходов в однокомпонентной среде использовать квазиравновесное приближение.

#### 7.4.3. Специальные условия совместности в квазиравновесном приближении

Содержание квазиравновесной схемы основано на гипотезе о том, что характеристики соприкасающихся фаз взаимосвязаны условиями термодинамического равновесия. Как ясно из предыдущего изложения, эта схема, безусловно, является приближением, так как процессы фазовых переходов, тепло- и массообмена, для которых она применяется, неравновесны. Неравновесные эффекты всегда присущи процессам переноса на границе пара (газа) с поверхностью конденсированной фазы, но при малых значениях соответствующих параметров неравновесности ими можно пренебречь в большинстве прикладных задач. Название «квазиравновесная» отражает приближенный характер рассматриваемой модели. Содержание квазиравновесной схемы рассматривается далее для ряда конкретных процессов.

На *непроницаемой поверхности* специальные условия совместности сводятся к следующему:

$$[T] = 0,$$

$$[u_\tau] = 0,$$

т.е. на границе раздела фаз отсутствуют скачок температур и скачок касательных компонент скорости.

*Фазовые переходы в однокомпонентных системах* (проницаемая поверхность). В этом случае сохраняются условия отсутствия скачков температур и касательных компонент скорости:

$$[T] = 0,$$

$$[u_\tau] = 0.$$

Кроме того, появляется дополнительное условие:

$$T''(0) = T'(0) = T_s(p''),$$

где  $T_s$  — температура насыщения при давлении в паровой фазе.

Таким образом, при фазовых переходах в однокомпонентных средах температуры фаз на границе одинаковы и равны температуре насыщения при актуальном давлении в паровой фазе. (Малой поправкой Томсона, отражающей изменение равновесной температуры с кривизной, во многих приложениях можно пренебречь.)

*Фазовые переходы в бинарной системе, полупроницаемая поверхность.* В этом случае один из компонентов фазы (например, воздух) не растворим в жидкости (вода). При этом специальные условия совместности, помимо уже привычных требований:

$$[T] = 0, \text{ т.е. } T'(0) = T''(0),$$

$$[u_\tau] = 0,$$

включают в себя соотношение

$$C''^a(0) = C_s''^a(p, T).$$

Это значит, что концентрация активного компонента в парогазовой фазе равна равновесной при температуре поверхности и давлении в системе. (Иначе, парциальное давление активного компонента на поверхности равно давлению насыщения вещества при температуре поверхности).

Зависимости равновесной концентрации  $C_s''^a$  от температуры типа представленной на рис. 7.17 для некоторых бинарных систем приводятся в справочниках; приближенно они могут быть получены

**Рис. 7.17. Примерный вид зависимости равновесной концентрации компонента  $a$  в бинарной смеси от температуры**

расчетами, если известна  $pT$ -диаграмма для чистого активного компонента.

Найдем, к примеру, равновесную концентрацию водяного пара в атмосферном воздухе с температурой  $T''_{\infty} = 25^{\circ}\text{C}$  на границе с поверхностью водяной капли, имеющей температуру  $18^{\circ}\text{C}$ . При этой температуре по таблицам термодинамических параметров воды и водяного пара определим плотность насыщенного пара  $\rho_s^{''a} \approx 0,0154 \text{ кг}/\text{м}^3$  (соответствующее давление насыщения  $p_s^{''} = 2,06 \text{ кПа}$ ). Плотность сухого воздуха при давлении 100 кПа и температуре  $25^{\circ}\text{C}$   $\rho^{''b} = 1,17 \text{ кг}/\text{м}^3$ . В рассматриваемых условиях смесь газов можно считать идеальной, так что искомая равновесная концентрация

$$C_s^{''a} = \frac{\rho_s^{''a}}{\rho_s^{''a} + \rho^{''b}} \approx 0,0116.$$

Если концентрация водяного пара в воздухе вдали от поверхности капли  $C_{\infty}^{''a} < C_s^{''a}$ , то капля будет испаряться, а при  $C_{\infty}^{''a} > C_s^{''a}$  пар из воздуха будет конденсироваться на поверхности капли.

*Фазовые переходы в бинарной системе, проницаемая поверхность.* В этом случае оба компонента взаиморастворимы в обеих фазах. Специальные условия совместности:

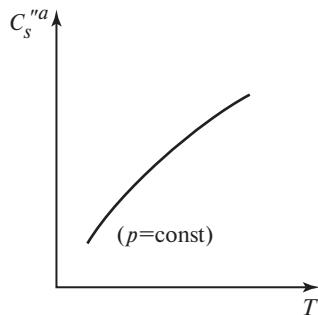
$$[T] = 0;$$

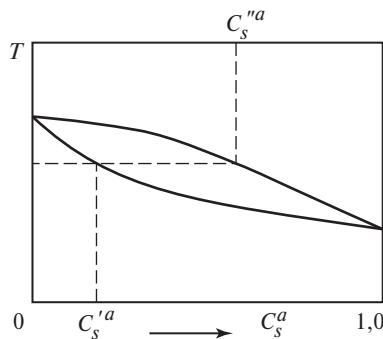
$$[u_{\tau}] = 0;$$

$$C^a(0) = C_s^{''a}(p, T);$$

$$C^{''a}(0) = C_s^{''a}(p, T).$$

Таким образом, для бинарных смесей с проницаемой границей накладываются определенные ограничения на массовую долю каж-





**Рис. 7.18. Примерный вид диаграммы фазового равновесия для бинарной смеси взаиморастворимых компонентов**

дого из компонентов по обе стороны границы: эти массовые доли равны равновесным при давлении в системе и температуре поверхности раздела фаз. Из рис. 7.18 ясно, что в общем случае равновесные концентрации рассматриваемого компонента  $a$  не одинаковы в жидкой и паровой фазах при фиксированных температуре и давлении.

Использование соотношений, вытекающих из квазиравновесной схемы, позволяет составить замкнутое описание процессов. Рассматриваемая схема тем более оправдана, чем меньше степень неравновесности реальных процессов.

## 7.5. Качественные характеристики двухфазных потоков в каналах

В настоящем параграфе вводятся основные определения, используемые при анализе парожидкостных течений в трубах. Как будет ясно из дальнейшего изложения, во всех этих определениях используется одномерное (гидравлическое) приближение.

### 7.5.1. Паросодержание

Пусть в некотором канале движется газожидкостная смесь с общим массовым расходом  $G$  кг/с, причем  $G = G' + G''$ , где  $G''$  — массовый расход газовой фазы;  $G'$  — массовый расход жидкой фазы. (Здесь, как и ранее, будем использовать для величин, относящихся к жидкой фазе индекс ' $'$ , к паровой — индекс ' $''$ '). Отношение  $G''/G = x$  — массовое расходное газосодержание (паросодержание),  $G'/G = 1 - x$  — массовое расходное влагосодержание.

Объемные расходы фаз  $\dot{V}'' = G''/\rho''$  и  $\dot{V}' = G'/\rho'$  в сумме дают объемный расход смеси  $\dot{V} = \dot{V}'' + \dot{V}'$ , м<sup>3</sup>/с. (Здесь  $\rho'$  и  $\rho''$  — плотности жидкости и пара.) Поделив эту сумму почленно на  $\dot{V}$ , получим

$$1 = \beta + (1 - \beta),$$

где  $\dot{V}''/\dot{V} = \beta$  — объемное расходное газо(паро)содержание.

Очевидны соотношения:

$$\frac{G''}{G'} = \frac{x}{1-x}; \quad \frac{\dot{V}''}{\dot{V}'} = \frac{\beta}{1-\beta};$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{\rho''}{\rho'}.$$
(7.19)

Диапазон изменения величин  $x$  и  $\beta$ , как ясно из их определения, одинаков:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

На границах этого интервала объемные и массовые расходные паросодержания совпадают, но из-за условия  $\rho' \gg \rho''$  внутри интервала они различаются весьма существенно. На рис. 7.19 показана связь  $\beta(x)$  для пароводяных потоков. Очевидно, что при  $p = p_{\text{кр}}$  фазы не различимы, поток становится однофазным, формально при этом  $x \equiv \beta$  во всем интервале. По мере снижения давления одним и тем же значениям  $x$  соответствуют все большие значения  $\beta$ . Для примера, водовоздушная смесь при  $p = 0,1$  МПа и комнатной температуре при  $x = 0,1$  имеет  $\beta = 0,988$ , в чем легко убедиться, подставив в формулу (7.19) значения  $x = 0,1$ ,  $\rho' = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho'' \approx 1,2$  кг/м<sup>3</sup>. Даже при  $x = 0,01$  в этом случае объемная доля газа в расходе смеси весьма велика:  $\beta \approx 0,89$ .

В равновесных парожидкостных потоках массовое паросодержание определяет энталпию смеси

$$h_{\text{cm}} = h_s''x + h_s'(1-x),$$

где  $h_s''$  и  $h_s'$  — энталпия пара и жидкости на линии насыщения.

Поскольку  $h_s'' - h_s' = h_{LG}$ , то

$$x_6 = (h_{\text{cm}} - h_s')/h_{LG}. \quad (7.20)$$

Такое определение массового расходного паросодержания удобно использовать для потоков в условиях теплообмена со стенками канала, так как значение  $h_{\text{cm}}$  легко находится из энергетического

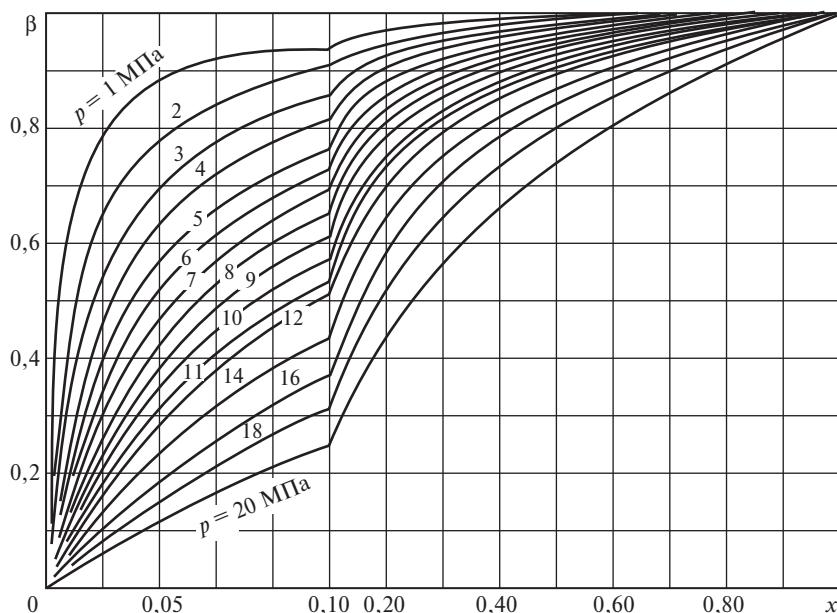


Рис. 7.19. Связь объемного  $\beta$  и массового  $x$  расходных паросодержаний для воды при различных давлениях  $p$

баланса. Определение (7.20) применяют и в случае неравновесных потоков. Тогда величина  $x = x_{\bar{b}}$ , вычисляемая по этой формуле, не выражает массовую долю пара в расходе смеси, а представляет собой относительную энталпию потока. В этом случае (для неравновесных потоков) мы будем использовать нижний индекс « $\bar{b}$ » (балансовое). В отличие от массового расходного паросодержания  $x$ , относительная энталпия потока  $x_{\bar{b}}$  может быть как меньше нуля, что отвечает условиям кипения в канале недогретой до температуры насыщения жидкости ( $h_{cm} < h'_s$ ), так и больше единицы, что характерно для перегретого пара с капельками жидкости.

Если каким-либо способом обнаружено, что в полном сечении канала  $s$  часть  $s''$  приходится на газовую фазу, а часть  $s'$  — на жидкую (рис. 7.20), то очевидно, что

$$s'' + s' = s.$$

При этом в реальном процессе в фиксированном сечении канала относительные доли  $s''$  и  $s'$  могут меняться, так что здесь имеются в виду их осредненные за некоторое время наблюдения значения.

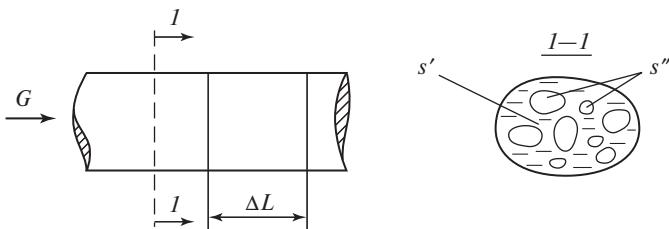


Рис. 7.20. К определению истинного объемного паросодержания

Отношение  $s''/s = \varphi$  — истинное объемное паро(газо)содержание. Так же как и расходные характеристики,  $\varphi$  изменяется от 0 до 1. Но в отличие от расходных характеристик, которые могут быть либо заданы заранее, либо определены из граничных условий, истинное объемное паросодержание является функцией самого процесса и заранее задано быть не может. Расчет  $\varphi$  — одна из важнейших задач анализа двухфазных потоков. Хотя  $\varphi$  определено как отношение площадей, легко показать, что оно характеризует долю мгновенного объема газа в некотором выделенном объеме канала. Очевидно, что объем смеси, соответствующий длине канала  $\Delta L$  (см. рис. 7.20), равен  $V = s\Delta L^*$ . Если длина  $\Delta L$  достаточно мала, то можно полагать, что  $s'' = \text{const}$  и  $s' = \text{const}$  внутри рассматриваемого участка. Тогда объемы газа и жидкости будут соответственно

$$V'' = s''\Delta L, \quad V' = s'\Delta L.$$

А истинное объемное паросодержание

$$\varphi = s''/s = V''/V,$$

т.е. равно отношению мгновенных объемов пара и смеси.

### 7.5.2. Скорости, плотность смеси

Определим скорости фаз и смеси. Истинная скорость фазы есть отношение объемного расхода фазы к площади сечения, занимаемого этой фазой:

$$\left. \begin{aligned} W'' &= \dot{V''}/s'' = \dot{V''}/(s\varphi); \\ W' &= \dot{V'}/s' = \dot{V'}/[s(1 - \varphi)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

\* Обозначения объемов отличаются от обозначений объемных расходов отсутствием точки над буквой  $V$ .

Отношение  $W''/W' = \phi$  называется фактором или коэффициентом скольжения. Используя (7.21) и определения  $\beta$  и  $\phi$ , получаем

$$\phi = W''/W' = [\beta/(1 - \beta)]/[\phi/(1 - \phi)]. \quad (7.22)$$

Из (7.22) ясно, что при  $\beta > \phi$  значение  $\phi > 1$  (т.е. газ движется быстрее), а при  $\beta < \phi$  значение  $\phi < 1$  (быстрее движется жидкость).

Величины  $W''$  и  $W'$  — это физически реальные характеристики процесса, аналогичные среднемассовой скорости в однофазном потоке. В анализе двухфазных потоков используют, кроме того, некоторые, служебные по своей сути, величины, лишенные, в строгом смысле слова, физического содержания. Это — так называемые приведенные величины. Приведенная скорость фазы определяется как отношение объемного расхода фазы к полному сечению канала:

$$\left. \begin{aligned} W_0'' &= \dot{V}''/s = W''\phi; \\ W_0' &= \dot{V}'/s = W'(1 - \phi). \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Ясно, что приведенная скорость пара особенно сильно отличается от соответствующей истинной при  $\phi \rightarrow 0$ , а приведенная скорость жидкости — при  $\phi \rightarrow 1$ .

Сумма приведенных скоростей фаз — это скорость смеси (т.е. отношение объемного расхода смеси к площади сечения канала):

$$W_{cm} = W_0'' + W_0' = \dot{V}/s. \quad (7.24)$$

Приведенная скорость смеси, или скорость циркуляции, — это отношение массового расхода смеси к произведению плотности жидкости на площадь сечения канала:

$$W_0 = G/(\rho's). \quad (7.25)$$

В парогенерирующем канале скорость циркуляции — это та реальная скорость, с которой на вход подается однофазная жидкость. В технической и научной литературе широко используется понятие *массовой скорости смеси*,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ :

$$W_0\rho' = G/s,$$

представляющей собой плотность потока массы смеси. Для каналов постоянного сечения с непроницаемыми стенками величины  $W_0\rho'$  и  $W_0$  по длине канала не изменяются независимо от наличия или отсутствия теплообмена с окружающей средой. Совершенно по-дру-

гому ведет себя скорость смеси. Действительно, из определения  $W_{\text{см}}$  и  $W_0$  следует

$$W_{\text{см}} \equiv (G''/\rho'' + G'/\rho')/s = W_0[1 + x(\rho' - \rho'')/\rho''], \quad (7.26)$$

или

$$\begin{aligned} W_{\text{см}} &\equiv [G_{\text{см}}/(\rho's)] [\dot{V}\rho' / (\dot{V}''\rho'' + \dot{V}'\rho')] = \\ &= W_0/[1 - \beta(\rho' - \rho'')/\rho']. \end{aligned} \quad (7.26a)$$

В парогенерирующем канале за счет подвода тепла расходное паросодержание непрерывно растет по длине и, следовательно, увеличивается скорость смеси. При полном испарении жидкости  $x = \beta = 1$ , тогда из (7.26) и (7.26а) следует, что

$$W_{\text{см}} = W_0\rho'/\rho''.$$

Для воды при атмосферном давлении скорость смеси при полном ее испарении возрастает приблизительно в 1600 раз, для азота при том же давлении — примерно в 160 раз в сравнении со скоростью однофазной жидкости на входе в канал. Ясно, что при некоторых значениях скорости циркуляции формальная оценка скорости смеси в парогенерирующем канале по формуле (7.26) или (7.26а) может дать значение, превышающее скорость звука в паре. Практически это означает, что в таком канале произойдет «запирание» потока, поскольку в прямом канале невозможен переход потока через скорость звука. В случае конденсации пара в трубе скорость смеси, естественно, уменьшается в соответствии с теми же соотношениями (7.26) и (7.26а).

В отсутствие скольжения фаз, т.е. при  $\phi = 1$ , расходное и истинное объемные паросодержания одинаковы. При этом согласно (7.23) и (7.24)

$$W_{\text{см}} = W'' = W'.$$

Отсюда ясно, что скорость смеси в известной мере отражает реальный уровень скоростей фаз в канале.

Введем понятие «плотность смеси». Мгновенная плотность смеси может рассматриваться как «истинная» среднеобъемная величина:

$$\rho_\phi = (V''\rho'' + V'\rho')/V = \phi\rho'' + (1 - \phi)\rho' \quad (7.27)$$

(здесь  $V$  — без точки, т.е. имеются в виду объемы, а не объемные расходы).

Расходная плотность смеси:

$$\rho_\beta = (\dot{V}''\rho'' + \dot{V}'\rho')/\dot{V} = \beta\rho'' + (1 - \beta)\rho'. \quad (7.27a)$$

Заметим, что следующие из приведенных формул выражения

$$\rho_\phi = \rho' - \phi\Delta\rho; \quad \rho_\beta = \rho' - \beta\Delta\rho$$

наглядно показывают, как плотность смеси уменьшается в сравнении с плотностью жидкости при росте объемного паросодержания (здесь  $\Delta\rho = \rho' - \rho''$ ). Очевидно, что в отсутствие скольжения фаз, когда  $\beta = \phi$ , формулы (7.27) и (7.27а) совпадают. Поскольку отсутствие скольжения — главный признак гомогенной смеси, расходную плотность называют также гомогенной. Эта величина может сильно отличаться от истинной плотности смеси при значительном скольжении фаз и в этом отношении является такой же условной величиной, как приведенные скорости фаз.

Из введенных выше количественных характеристик расходные паросодержания ( $x, \beta$ ), приведенные скорости фаз ( $W_0'', W_0'$ ), скорости смеси и циркуляции ( $W_{cm}, W_0$ ), расходная плотность смеси  $\rho_\beta$  обычно могут рассматриваться как известные, заданные. Они определяются по известным значениям расходов, свойств фаз, теплового потока на стенке, геометрических параметров канала. «Истинные» параметры двухфазного потока ( $\phi, W', W'', \rho_\phi$ ) являются функциями процесса и выступают обычно как цель анализа. Несложно убедиться, что знание любого из пяти истинных параметров достаточно для расчета остальных четырех. Например, используя (7.19) и (7.22), можно получить часто применяемую связь истинного объемного паросодержания с массовым расходным и фактором скольжения

$$\phi = \frac{x\rho'}{x\rho' + \phi\rho''(1-x)} \equiv \frac{xv''}{xv'' + \phi v'(1-x)}. \quad (7.28)$$

(В этой формуле  $v'$  и  $v''$  — удельные объемы жидкости и пара соответственно.)

Наконец, необходимо иметь в виду, что определенные в этом пункте величины основаны на одномерном приближении, когда рассматривается изменение параметров только вдоль потока.

### 7.5.3. Гомогенная модель для трения

Введенные выше количественные характеристики позволяют конкретизировать содержание гомогенной модели, используемой при расчете сопротивления трения в двухфазном потоке. Как говорилось в § 7.1, гомогенная модель реальную двухфазную среду заменяет однородной с эффективными свойствами: плотностью согласно

(7.27а) и скоростью согласно (7.26) или (7.26а). Из этих определений легко убедиться, что массовая скорость двухфазного потока

$$\rho' W_0 = \rho_\beta W_{\text{см}}.$$

В модели принимается, что трение в двухфазном потоке определяется так же, как и в однофазном, но через параметры смеси. В однофазном потоке, массовый расход которого такой же, как в рассматриваемом двухфазном:

$$\tau_0 = \frac{\xi_0}{8} \rho' W_0^2. \quad (7.29)$$

В двухфазном потоке

$$\tau_{\text{см}} = \frac{\xi_{\text{см}}}{8} \rho_\beta W_{\text{см}}^2. \quad (7.30)$$

С учетом двух выражений для массовой скорости из (7.29) и (7.30) следует

$$\tau_{\text{см}} = \tau_0 \frac{\xi_{\text{см}}}{\xi_0} \frac{W_{\text{см}}}{W_0}.$$

Коэффициент гидравлического сопротивления  $\xi_{\text{см}}$  обычно рассчитывают по формулам, разработанным для однофазных течений, основываясь на числе Рейнольдса смеси:

$$Re_{\text{см}} = \frac{\rho_\beta W_{\text{см}} d_r}{\mu_{\text{см}}},$$

где  $d_r$  — гидравлический диаметр.

Существуют различные эмпирические формулы для расчета вязкости смеси  $\mu_{\text{см}}$ . Поскольку какого-либо теоретического или надежного экспериментального обоснования эти формулы не имеют, для рассматриваемых в настоящем параграфе гомогенных потоков логично принять, что вязкость смеси равна вязкости жидкости ( $\mu_{\text{см}} = \mu'$ ), если на стенке, где градиент скорости максимальный, сохраняется жидкость. Такая ситуация всегда наблюдается при конденсации пара в трубах и в докризисных режимах в парогенерирующих каналах. Тогда

$$Re_{\text{см}} = \frac{\rho' W_0 d_r}{\mu'} = Re'$$

и, следовательно, коэффициент гидравлического сопротивления смеси  $\xi_{\text{см}}$  совпадает со значением  $\xi_0$ , отвечающим течению однофазной жидкости с массовым расходом смеси  $G_{\text{см}}$ . Поэтому с учетом (7.26) или (7.26а) имеем

$$\frac{\tau_{\text{см}}}{\tau_0} = 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho''} x = \frac{1}{1 - \Delta\rho\beta/\rho'} . \quad (7.31)$$

Опыты показывают, что расчет по гомогенной модели дает удовлетворительное согласование с измеренными значениями перепадов давлений при высоких скоростях смеси, что является естественным, так как при этом двухфазная смесь действительно представляет собой достаточно однородную структуру. Точность расчета по гомогенной модели еще более возрастает, если двухфазная смесь находится под высоким приведенным давлением ( $p_{\text{пр}} = p/p_{\text{кр}}$ ); такие условия характерны для теплообменного оборудования ТЭС и АЭС.

### Контрольные вопросы к главе 7

1. В каких промышленных технологиях имеют дело с многофазными системами?
2. Что включает в себя математическое описание газожидкостных систем?
3. Что представляют собой межфазные границы и как они интерпретируются при математическом описании?
4. С чем связаны принципиальные трудности строгого моделирования газожидкостных систем и какие альтернативные подходы используются на практике?
5. В чем существо гомогенной модели двухфазной системы и в каких случаях гомогенное приближение дает хорошие результаты?
6. Для каких парожидкостных систем подходит модель раздельного течения и в чем ее основные положения?
7. Что такое модель многоскоростного континуума (взаимопроникающих континуумов), чем обусловлено ее широкое использование, каковы объективные ограничения ее применимости?
8. В чем существо метода контрольной ячейки и как он используется в анализе двухфазных систем?
9. Каково физическое содержание общего выражения (7.1) универсальных условий совместности?
10. Что отражает слагаемое  $\dot{N}_F$  в уравнении (7.1) или (7.1а)?
11. В какой системе отсчета формулируются универсальные условия совместности для потоков массы, импульса, энергии, массы компонента смеси?
12. Что является причиной производства нормальной компоненты импульса на границе раздела фаз?
13. К чему сводятся универсальные условия совместности в газодинамике (условия Ренкина—Гюгонио)?

14. Как записывается универсальное условие совместности для потока энергии на межфазной границе жидкость—пар при фазовых превращениях умеренной интенсивности?
15. Почему скорость границы раздела фаз требует специального определения? Как она выражается, если уравнение границы задано аналитически?
16. Как с помощью уравнения (7.9) выразить скорость границы для двумерной волны?
17. Как преобразуются универсальные условия совместности при переходе от собственной системы отсчета к системе отсчета наблюдателя?
18. Какие параметры соприкасающихся фаз на их общей границе определяют в процессах тепломассообмена специальные условия совместности?
19. Каким образом качественный анализ поведения функции распределения молекул в газе у межфазной границы позволяет объяснить возникновение неравновесных эффектов?
20. Что такое слой Кнудсена на межфазной границе? Каким образом должен проводиться анализ процессов переноса в пределах этого слоя?
21. Какого вида неравновесность существует при обтекании газом твердой поверхности? При каких условиях она существенна?
22. В каких случаях при теплообмене газа с твердой поверхностью возникают заметные скачки температуры на межфазной границе?
23. Какие выводы относительно состояния жидкости и пара у границы раздела следуют из линейной теории фазовых переходов?
24. Как могут соотноситься температуры жидкости и пара на границе раздела между собой и с температурой насыщения при давлении пара в процессах испарения и конденсации в зависимости от значения коэффициента испарения (конденсации)?
25. Как строятся безразмерные параметры неравновесности, определяющие неравновесные эффекты на межфазной границе?
26. Когда специальные условия совместности на межфазной границе можно записывать в квазиравновесном приближении? Что оно означает?
27. Как формулируются квазиравновесные специальные условия совместности для бинарных смесей на проницаемой и полупроницаемой границе раздела?
28. Как соотносятся массовое и объемное расходные паросодержания при низких приведенных давлениях?
29. В каких случаях массовое расходное паросодержание и относительная энталпия потока — одна и та же величина?
30. Почему истинное и расходное объемные паросодержания в общем случае не совпадают? Что означает их равенство?
31. Как определяются скорость смеси и скорость циркуляции, как они взаимосвязаны?
32. Как изменяются по длине парогенерирующего канала  $x$ ,  $\beta$ ,  $\varphi$ ,  $W_{cm}$ ? В каких случаях возникает «запирание» потока?
33. Как зависит трение двухфазного потока от массового паросодержания согласно гомогенной модели?

# Глава 8

## ТЕПЛООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ

---

### 8.1. Общие положения

#### 8.1.1. Определения. Классификация

В общем случае конденсация — это переход пара в конденсированное состояние, который может происходить при температурах ниже критической:  $T < T_{\text{кр}}$ . В технических приложениях обычно переход пар — жидкость называют конденсацией, а пар — твердое тело — десублимацией.

Собственно конденсация возможна, следовательно, в диапазоне температур от тройной точки до критической:  $T_{\text{т.т}} < T < T_{\text{кр}}$  (рис. 8.1, а). На рис. 8.1, б дается схематическая классификация процессов конденсации. Объемная конденсация возникает в переохлажденном (пересыщенном) паре (Π); самый распространенный и технически важный пример — это ступени влажного пара в паровых турбинах; в физических экспериментах используется камера Вильсона с пересыщенным паром для определения треков «элементарных» частиц. Поверхностная конденсация может протекать на твердой (Т) охлаждаемой поверхности или на поверхности жидкости (Ж) (обычно — жидких капель или струй). Последний тип — смесительная конденсация —

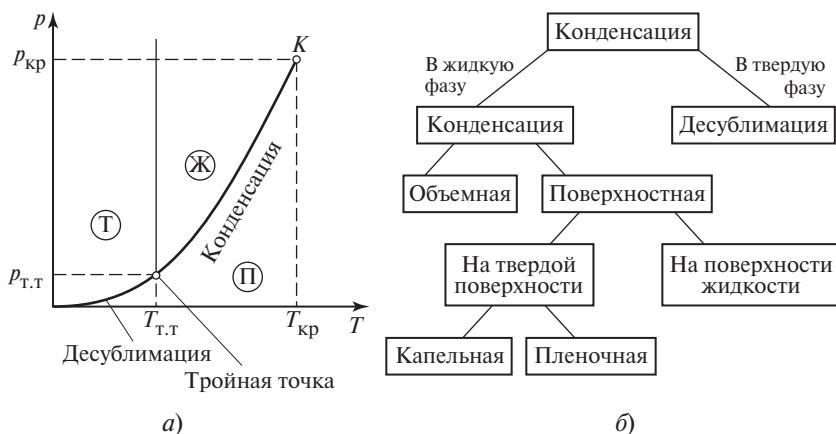


Рис. 8.1. Область реализации (а) и классификация (б) процессов конденсации

вообще процесс очень эффективный, не требующий разделительной теплопередающей поверхности; но в технике он используется относительно редко, так как сопряжен или с потерей конденсата, или с высочайшими требованиями к чистоте охлаждающей жидкости.

Таким образом, наиболее распространенный в технике тип конденсации — это поверхностная конденсация на твердой охлаждаемой стенке; различию двух типов этого процесса посвящен следующий пункт.

### 8.1.2. Пленочная и капельная конденсация

На твердой поверхности конденсат может образовывать пленку — пленочная конденсация (рис. 8.2, *a*) или отдельные капельки — капельная конденсация (рис. 8.2, *б*). Капельную конденсацию впервые описал Шмидт (1930 г.). Очень мелкие капли жидкости возникают, вырастают до некоторого предельного размера (зависящего от свойств жидкости и поверхности, а также от ориентации поверхности в пространстве) и скатываются. Диаметр капель обычно  $d_k < 100$  мкм. Скатывающаяся капля увлекает за собой другие капли, в результате поверхность очищается для возникновения новых капель. Между каплями существует чрезвычайно тонкая пленка жидкости. Схема на рис. 8.2, *б*, конечно, весьма условна в сравнении с реальной картиной, отраженной на фотографии (рис. 8.2, *в*).

Причина различий в типе поверхностной конденсации — разная смачиваемость охлаждаемых поверхностей. На границе раздела трех фаз в условиях равновесия устанавливается определенный угол между плоскостями, касательными к поверхностям раздела жидкость (Ж) —

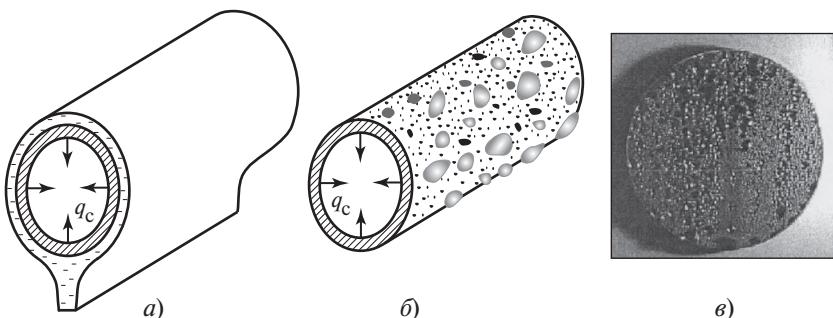
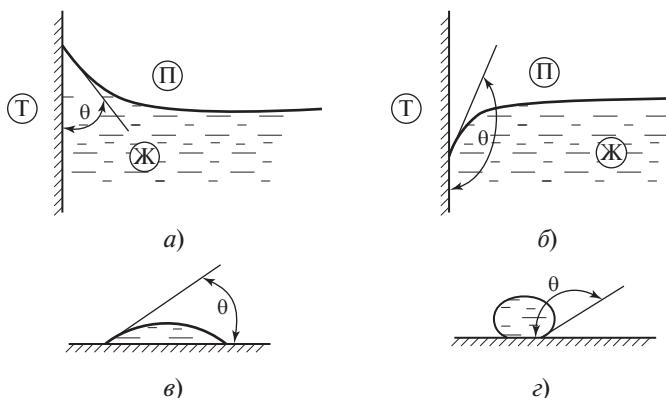


Рис. 8.2. Качественные схемы пленочной (*а*) и капельной (*б*) конденсации, а также фотография поверхности диска, на которой происходит капельная конденсация (J. Rose. Chem. Engng Res. Des. 2004. V. 82(A4). P. 419—429)



**Рис. 8.3. К определению смачиваемости: краевой угол смачивания на гидрофильной (а) и гидрофобной (б) вертикальной плоскости; капля на смачиваемой (в) и несмачиваемой (г) горизонтальной поверхности**

твердое тело (Т) и жидкость — пар (П) (рис. 8.3, а и б). Этот угол получил название краевой угол смачивания  $\theta$ ; по договоренности его отсчитывают в жидкую фазу. Значение краевого угла смачивания зависит от соотношения удельных свободных энергий на соответствующих межфазных границах и определяется как

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{\text{т.п}} - \sigma_{\text{т.ж}}}{\sigma}.$$

Это соотношение вошло в историю науки как формула Юнга (см. подробнее [24]). Входящие в него величины  $\sigma_{\text{т.п}}$ ,  $\sigma_{\text{т.ж}}$ ,  $\sigma$  — это удельные свободные энергии на границах раздела соответственно: твердое тело — пар, твердое тело — жидкость и жидкость — пар (без индекса). Принято считать поверхность (по отношению к данной жидкости) смачиваемой (гидрофильной), если  $\theta < \pi/2$ ; при  $\theta > \pi/2$  поверхность считается несмачиваемой (гидрофобной)\*; условие  $\theta = \pi/2$  — это нейтральная смачиваемость. Как показано на рис. 8.3, а, у гидрофильной поверхности жидкость поднимается по отношению к горизонтальной поверхности вдали от стенки; несмачивающая

\* Строго говоря, термины «гидрофильная», «гидрофобная» характеризуют смачиваемость по отношению к воде; для иной жидкости ранее использовали термины «лиофильная» и «лиофобная». В настоящее время такое различие не подчеркивается (аналогично сегодня никто не воспринимает гидромеханику как науку, относящуюся только к воде).

жидкость, напротив, опускается вдоль стенки, образуя выпуклый мениск (см. рис. 8.3, б).

Хорошо смачивают конструкционные металлы криожидкости, спирты, хладоны, щелочные металлы; при этом гелий смачивает абсолютно ( $\theta = 0$ ) все известные материалы. Хорошо известный пример гидрофобной поверхности — это стекло по отношению к ртути. Вода смачивает поверхности обычных конструкционных материалов ( $\theta < 85^\circ$ ); не смачивает парафин и фторопласт. На рис. 8.3, в и г показана форма капли на гидрофильной и гидрофобной горизонтальной поверхности соответственно.

Устойчивая капельная конденсация происходит на гидрофобных поверхностях. Высокие коэффициенты теплообмена при капельной конденсации стимулировали интенсивные поиски способов поддержания гидрофобности поверхности конденсации по отношению к воде. Конденсаторы водяного пара, являющиеся обязательным элементом тепловой схемы ТЭС и АЭС, — это огромные металлоемкие теплообменные аппараты, так что организация в них процесса капельной конденсации сулит ощутимые экономические выгоды. В 1950—1970-е годы много таких исследований проводилось как в СССР, так и в ряде других стран. Проблема долговременного поддержания гидрофобности (она исчезает из-за адсорбции промежуточных примесных молекул на поверхности) привела к известной паузе в этих исследованиях. Но в последнее время интерес к этой проблеме снова растет. В 1988 г. Zhang (Китай) получил патент на поверхность с гидрофобным покрытием. В конце 1990-х годов сообщалось о работающем в КНР промышленном конденсаторе с использованием капельной конденсации водяного пара, в котором длительное время поддерживается коэффициент теплопередачи  $k \approx 6 \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  [ясно, что для этого надо иметь коэффициенты теплоотдачи с обеих сторон более  $12 \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ].

Чтобы оценить реально достижимый уровень коэффициентов теплоотдачи при капельной конденсации, приведем эмпирическую формулу для водяного пара:

$$\alpha = (T \text{ } ^\circ\text{C})^{0,8} (5 + 0,3\Delta T) \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}),$$

где  $(T \text{ } ^\circ\text{C})$  — температура насыщения в градусах Цельсия. К примеру, при  $T = 32 \text{ } ^\circ\text{C}$  коэффициент теплоотдачи  $\alpha > 80 \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

Очень интересны с научной точки зрения и могут оказаться перспективными практические исследования «псевдокапельной конденсации», наблюдаемой при конденсации смесей паров бинарных жид-

костей. Например, добавка к водяному пару 0,05—1,0 % этианола ведет к росту коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  при конденсации в 2—8 раз в сравнении со стандартной пленочной конденсацией (см. [68]). Причина — возможный распад пленки конденсата. Если на поверхности пленки конденсата бинарной смеси возникают волны (а это, как будет показано ниже, происходит практически всегда), то появляется градиент температуры и, как следствие, градиент состава смеси. В результате на поверхности пленки создается градиент поверхностного натяжения  $\nabla\sigma$ , направленный в рассматриваемом примере в область с большей температурой. Возникающее капиллярное движение может привести к распаду пленки на капли. Явление это очень сложное для анализа, поскольку вместе с вызывающим распад пленки градиентом состава жидкости здесь действуют (в противоположном направлении) градиент температуры на поверхности пленки и градиент кривизны межфазной поверхности. Пока в этой области исследований идет накопление опытной информации; обоснованной количественной теории не создано.

Хотя успехи в исследованиях капельной конденсации вселяют сегодня известный оптимизм относительно перспектив ее широкого практического использования, в промышленных конденсаторах — а это огромное количество аппаратов (конденсаторы ТЭС и АЭС, холодильные установки, разнообразные технологические установки, процессы дистилляции и ректификации и т.д.) — реализуется пленочная конденсация. Этому типу поверхностной конденсации и посвящена настоящая глава.

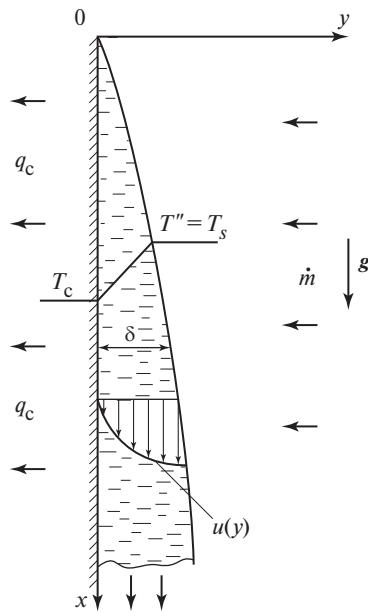
## 8.2. Теплообмен при пленочной конденсации неподвижного пара на вертикальной плоскости

### 8.2.1. Постановка задачи

Вынесенная в заголовок параграфа задача была решена В. Нуссельтом в 1916 г. и относится к классическим. Рассматривается конденсация на вертикальной охлаждаемой пластине (рис. 8.4); образующаяся в результате конденсации жидкая пленка стекает под действием силы тяжести по пластине вниз. Задача двумерная, ось  $x$  направлена вдоль твердой поверхности по течению конденсата, ось  $y$  — по нормали к поверхности пластины; размер в глубь чертежа не ограничен.

Анализ проводился Нуссельтом при следующих допущениях.

1. Охлаждаемая поверхность изотермична,  $T_c = \text{const}$ .



**Рис. 8.4. Схема процесса конденсации пара на вертикальной плоскости**

2. Пар сухой насыщенный, т.е.  $T'' = T_s$ , степень сухости (балансовое паросодержание потока)  $x_6 = 1$ .

3. Не учитывается переохлаждение конденсата,  $T' = T_s$ . В действительности, как это ясно из схемы на рис. 8.4,  $T_c < T_s$ , так что средняя температура конденсата в произвольном сечении ниже температуры насыщения.

4. Термофизические свойства жидкости ( $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ) считаются постоянными.

5. Течение пленки конденсата ламинарное, поверхность пленки гладкая (плоская). Далее будет показано, что здесь фактически вводятся два разных допущения.

6. Пар неподвижен относительно поверхности пленки.

7. Не учитывается конвективный перенос импульса.

8. Не учитывается конвективный перенос энергии.

Экспериментальные наблюдения (и общие физические оценки) показывают, что толщина пленки  $\delta$  много меньше не только общей высоты поверхности  $H$ , но и практически любого расстояния  $x$  от ее

верхней кромки, т.е.  $\delta \ll x$ . Это значит, что для описания ламинарного режима течения пленки и теплообмена всегда правомерно использовать приближения теории пограничного слоя.

Для пленки, стекающей вдоль вертикальной охлаждаемой плоскости, уравнения неразрывности, движения и энергии имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (8.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g_x; \quad (8.2)$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (8.3)$$

Здесь  $u$  и  $v$  — проекции вектора скорости на направления осей  $x$  и  $y$ , соответственно;  $g_x = g$  — проекция вектора ускорения силы тяжести на направление течения пленки, т.е. ось  $x$ . (В соответствии с приближениями пограничного слоя уравнение проекции  $u$  импульса вырождается до  $\partial p / \partial y = 0$ .)

Поскольку гравитационные пленки используются во многих технологиях, их гидродинамика исследована достаточно широко и всесторонне. В адиабатических условиях жидкость подается через входное устройство; в зависимости от его конструкции движение пленки на начальном гидродинамическом участке  $x_h$  может быть либо ускоренным, либо замедленным. Теоретические оценки показывают, что длина начального гидродинамического участка определяется соотношением

$$x_h = 0,2 \text{Re}_{\text{пл}} \delta. \quad (8.4)$$

С учетом реальных для ламинарного течения значений  $\text{Re}_{\text{пл}}$  и  $\delta$  (они будут определены ниже) протяженность участка  $x_h$  невелика. Для гидродинамически стабилизированного стационарного движения жидкости в пленке уравнение движения [с учетом (8.1)] допускает дальнейшие существенные упрощения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad v = 0.$$

Это означает, что в стабилизированном течении допущение 7 о возможности не учитывать конвективный перенос импульса выполняется строго. В нашей задаче расход жидкости в пленке создается за счет конденсации пара, так что при строгом подходе  $\partial u / \partial x \neq 0$ .

Однако оценки для задачи о конденсации показывают, что эффекты ускорения течения по длине пленки ничтожны, уравнение (8.2) может анализироваться без инерционных членов (левой части).

Допущение 8, справедливость которого будет проанализирована в дальнейшем, сводит уравнение энергии (8.3) к одномерному стационарному уравнению теплопроводности:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (8.3a)$$

Поскольку для его решения не требуется информация о профиле скорости, порядок решения задачи о теплообмене при конденсации отличается от традиционного для задач конвективного теплообмена. Процедура решения разбивается на три этапа:

1) из решения задачи теплопроводности находится связь коэффициента теплоотдачи с толщиной пленки;

2) решается уравнение движения, находится профиль скорости жидкости в пленке, что позволяет найти зависимость массового расхода жидкости от толщины пленки;

3) на основе соотношений материального и энергетического балансов определяется взаимозависимость массового расхода жидкости в пленке и теплового потока, что позволяет получить уравнение, выражающее коэффициент теплоотдачи через заданные параметры задачи.

### 8.2.2. Решение задачи

1) Уравнение (8.3a) должно быть проинтегрировано при следующих очевидных граничных условиях:

$$y = 0, T = T_c;$$

$$y = \delta, T = T_s.$$

Двукратное интегрирование при этих граничных условиях дает линейный профиль температуры в пленке:

$$T = T_c + \frac{y \Delta T}{\delta}; \quad \Delta T = T_s - T_c.$$

Тепловой поток через пленку

$$q = \lambda \Delta T / \delta = \alpha \Delta T.$$

Таким образом, при условии, что конвективный перенос энергии в ламинарной пленке может не учитываться, получается простая связь коэффициента теплоотдачи и толщины пленки:

$$\alpha = \lambda / \delta. \quad (8.5)$$

(Во вводной части курса, п. 1.2.2, мы приводили этот случай как наиболее наглядный пример того, что коэффициент теплоотдачи — это гидродинамический параметр.)

2) *Гидродинамическая задача.* С учетом обсуждения в предыдущем пункте уравнение (8.2) упрощается:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g. \quad (8.2a)$$

Границные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = 0 \quad u = 0, \\ \text{при } y = \delta_0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{array} \right\}$$

Последнее условие основано на допущении 6 (о неподвижности пара) и означает отсутствие касательного напряжения [ $\tau_\delta = \mu(\partial u / \partial y)|_{y=\delta} = 0$ ] на свободной границе пленки.

За пределами пленки, в паре справедливо уравнение гидростатики

$$\frac{dp''}{dx} = \rho'' g.$$

С учетом приближений пограничного слоя  $\partial p / \partial y = 0$ ,  $dp'' / dx = dp / dx$ . Тогда (8.2a) можно записать как

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g \Delta \rho, \quad (8.2b)$$

где  $\Delta \rho = \rho - \rho''$ . (Во многих учебниках плотностью пара пренебрегают, полагая  $\Delta \rho \approx \rho$ ; это упрощение оправдано при низких давлениях.)

Первое интегрирование уравнения (8.2b) дает:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C_1 - \frac{g \Delta \rho}{\mu} y.$$

Используя второе из граничных условий, находим

$$C_1 = g \Delta \rho \delta / \mu.$$

После повторного интегрирования и использования граничного условия на стенке имеем следующее уравнение для профиля скорости в поперечном сечении пленки:

$$u = \frac{g\Delta\rho}{\mu} \left( \delta y - \frac{1}{2} y^2 \right). \quad (8.6)$$

Таким образом, при свободном гравитационном стекании пленки профиль скорости жидкости параболический.

Средняя скорость жидкости в пленке

$$\bar{u} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta u \, dy = \frac{1}{3} \frac{g\Delta\rho\delta^2}{\mu}. \quad (8.7)$$

Объемный расход жидкости на единицу ширины пленки (иногда называемый также объемной «плотностью орошения»),  $\text{м}^2/\text{с}$ :

$$\Gamma = \bar{u}\delta = \frac{1}{3} \frac{g\Delta\rho\delta^3}{\mu}.$$

Массовый расход жидкости на единицу ширины пленки (массовая «плотность орошения»),  $\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ :

$$G_l = \Gamma\rho = \frac{1}{3} \frac{g\Delta\rho\delta^3}{\nu}. \quad (8.8)$$

Полезно отметить, что из двух последних соотношений следуют выражения, связывающие толщину пленки с расходом жидкости:

$$\delta = \left( \frac{3\Gamma\mu}{g\Delta\rho} \right)^{1/3} = \left( \frac{3G_l\nu}{g\Delta\rho} \right)^{1/3}. \quad (8.9)$$

Ясно, что толщина пленки пропорциональна корню кубическому из расхода жидкости, т.е. возрастает относительно слабо при увеличении расхода.

Число Рейнольдса для пленки является не только критерием, определяющим режим течения, но и характеристикой расхода жидкости. Оно определяется через среднюю скорость движения жидкости в пленке  $\bar{u}$  и эквивалентный гидравлический диаметр пленки  $d_\Gamma = 4\delta$ :

$$\text{Re}_{\text{пл}} = 4 \frac{\bar{u}\delta}{\nu}.$$

С учетом определений объемного и массового расходов жидкости в пленке для расчета числа Рейнольдса не требуется непосредственного раздельного нахождения средней скорости и средней толщины пленки:

$$\text{Re}_{\text{пл}} = \frac{4}{3} \frac{g \Delta \rho \delta_0^3}{\mu v} = \frac{4 \Gamma}{v} = \frac{4 G_l}{\mu}. \quad (8.10)$$

3) *Энергетический и материальный баланс, коэффициент теплоотдачи.* Связь толщины пленки и расхода дает уравнение (8.8). В процессе конденсации расход жидкости заранее неизвестен, он сам определяется интенсивностью конденсации. Универсальное условие совместности для потока энергии в случае умеренной интенсивности фазового перехода (7.5г) дает

$$\dot{m} h_{LG} = q = \frac{\lambda \Delta T}{\delta}. \quad (8.11)$$

Уравнение материального баланса связывает прирост массового потока жидкости с плотностью потока массы конденсирующегося пара  $\dot{m}$ . Для пленки шириной  $l$  на участке  $dx$  приращение полного расхода жидкости:

$$dG = \dot{m} l dx.$$

Для массового расхода на единицу ширины пленки

$$dG_l = \dot{m} dx.$$

С учетом (8.11)

$$dG_l = \frac{q}{h_{LG}} dx = \frac{\lambda \Delta T}{h_{LG}} \frac{dx}{\delta}.$$

Теперь, используя этот результат и соотношение (8.8), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно толщины пленки:

$$g \Delta \rho \delta^3 d\delta / v = \lambda \Delta T dx / h_{LG}.$$

Его интегрирование при граничном условии  $x = 0, \delta = 0$  приводит к соотношению

$$\delta = \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{\lambda \Delta T v x}{h_{LG} g \Delta \rho}}. \quad (8.12)$$

Таким образом, при конденсации толщина пленки растет по длине по закону  $\delta \sim x^{1/4}$ . Формула (8.12) отражает, что толщина пленки возрастает с увеличением кинематической вязкости  $v$ ; параметр  $\lambda\Delta T/h_{LG}$  характеризует плотность потока массы конденсирующегося пара, с ростом которого толщина пленки увеличивается; наконец, величина  $g\Delta\rho$  определяет действие массовых сил, влияющих на скорость течения в пленке.

С учетом (8.5) локальный коэффициент теплоотдачи при конденсации:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} 4 \sqrt{\frac{\lambda^3 h_{LG} g \Delta \rho}{\Delta T v x}}. \quad (8.13)$$

Естественно, по мере увеличения толщины пленки локальный КТО уменьшается по закону  $\alpha(x) \sim x^{-1/4}$ . Средний коэффициент теплоотдачи для поверхности высотой  $H$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{H} \int_0^H \alpha(x) dx = \frac{4}{3} \alpha_{x=H}.$$

С учетом (8.13) имеем

$$\bar{\alpha} = 0,943 4 \sqrt{\frac{\lambda^3 h_{LG} g \Delta \rho}{\Delta T v H}}. \quad (8.13a)$$

Формулы (8.13) и (8.13а) — это классические результаты Нуссельта. Последующие теоретические и экспериментальные исследования позволили оценить корректность допущений, при которых они были получены. В § 8.4 дается достаточно подробный анализ всех допущений. Сейчас оценим только, насколько количественно подтверждается одно из главных предположений анализа, из которого следуют и исходное математическое описание, и допущение о пре-небрежимой роли конвективного переноса импульса и энергии — о том, что пленка конденсата очень тонкая.

Рассчитаем параметры процесса при конденсации водяного пара при атмосферном давлении на поверхности высотой  $H = 0,5$  м с температурой  $T_c = 80$  °C. Округленно:  $T_s = 100$  °C,  $\lambda \approx 0,68$  Вт/(м · K),  $v \approx 2,8 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с,  $h_{LG} \approx 2,26 \cdot 10^6$  Дж/кг,  $\Delta\rho \approx 957$  кг/м<sup>3</sup>,  $g \approx 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Подставляя эти величины в (8.12), получаем в нижней точке поверхности (при  $x = H = 0,5$  м)  $\delta \approx 1,37 \cdot 10^{-4}$  м. Локальный коэффициент

теплоотдачи в этой точке  $\alpha \approx 4960 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ; средний КТО  $\bar{\alpha} \approx 6600 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

Средняя скорость  $\bar{u} \approx 0,22 \text{ м/с}$  по формуле (8.7) при  $x = H$ ; по (8.10) число  $Re_{\text{пл}} \approx 430$ . Если бы расход жидкости, сформировавшийся на всей поверхности конденсации, подавался в адиабатных условиях через некоторое входное устройство в верхней точке поверхности, то длина гидродинамического начального участка  $x_n$  согласно формуле (8.4) составила бы менее 12 мм. Заметим в заключение, что средняя по высоте поверхности плотность теплового потока в рассмотренном примере ( $132 \text{ кВт}/\text{м}^2$ ) является достаточно высокой для реальных процессов конденсации пара.

### 8.3. Конденсация пара на наклонных и криволинейных поверхностях

#### 8.3.1. Конденсация на наклонной плоскости

Очевидно, что при конденсации пара на плоскости, наклоненной к горизонту под углом  $\varphi < \pi/2$  (рис. 8.5), единственное отличие от рассмотренной в предыдущем параграфе задачи состоит в том, что теперь  $g_x = g \sin \varphi$ . Следовательно, во всех выражениях в анализе п. 8.2.2, включающих множитель  $g$ , его необходимо заменять на  $g \sin \varphi$ . В частности, соотношение (8.8) теперь запишется как

$$G_l = \frac{1}{3} \frac{g \Delta \rho \delta^3 \sin \varphi}{v}. \quad (8.8a)$$

Итоговое соотношение для локального коэффициента теплоотдачи имеет вид

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 g \Delta \rho h_{LG} \sin \varphi}{v \Delta T x}}.$$

Следовательно,  $\alpha_\varphi = \alpha_{\pi/2} \sqrt[4]{\sin \varphi}$ .

Ясно, что при небольших отклонениях от прямого угла снижение коэффициента теплоотдачи не очень значительно: при  $\varphi = 45^\circ$   $\alpha_\varphi \approx 0,91 \alpha_{\pi/2}$ ; при  $\varphi = 30^\circ$   $\alpha_\varphi \approx 0,84 \alpha_{\pi/2}$ . Конечно, дальнейшее снижение  $\varphi$  будет вести к быстрому падению КТО.

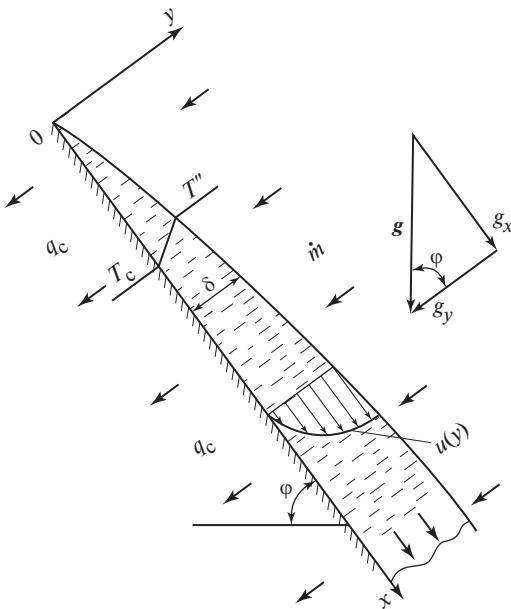


Рис. 8.5. Конденсация пара на наклонной плоскости

Предел  $\phi = 0$  — это совсем другая задача. В этом случае исчезают силы, вызывающие течение пленки конденсата. Следовательно, если такой процесс организовать (конденсация на дне охлаждаемого снизу сосуда), то при  $T_c = \text{const}$  получается нестационарная задача с непрерывным ростом  $\delta$ , снижением  $\alpha$  и интенсивности конденсации.

### 8.3.2. Конденсация на поверхности горизонтального цилиндра

Теплообмен на поверхности вертикального цилиндра (или при небольшом отклонении от вертикальности) можно рассматривать так же, как это сделано в классической задаче Нуссельта для вертикальной плоскости (§ 8.2). Малость толщины пленки конденсата  $\delta$  в сравнении с диаметром цилиндра  $D$  обеспечивает отсутствие заметного влияния кривизны поверхности конденсатной пленки на процесс. Фактически экспериментальные исследования теплоотдачи при конденсации на вертикальной поверхности проводятся, как правило, на наружной поверхности труб.

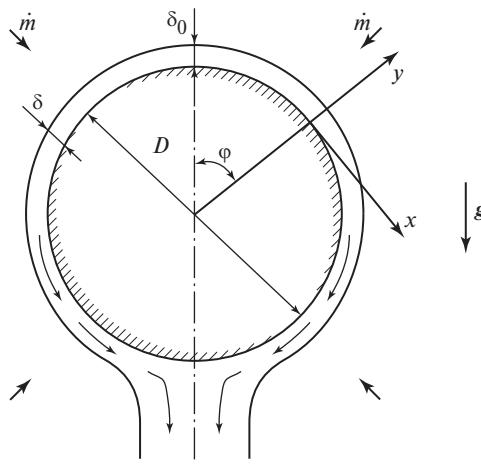
Конденсация на поверхности горизонтального цилиндра отличается от конденсации на плоскости. Рассматриваем процесс в ортогональной криволинейной системе координат: ось  $x$  направлена вдоль периметра, начало координат помещается на верхней образующей, ось  $y$  при любом  $x$  направлена по нормали к поверхности, т.е. по радиусу цилиндра (рис. 8.6).

Главное отличие этой задачи от конденсации на наклонной плоскости состоит в том, что проекция гравитационного ускорения на направление течения  $g_x = g \sin \varphi$  — теперь функция  $x$ , так как  $\varphi = 2x/D$ , т.е.  $g_x = f(x)$ .

Вместе с тем, в реальных задачах  $\delta \ll D$ , что позволяет сохранить при анализе весь набор допущений к предыдущей задаче Нуссельта. В частности, допущение 8 о пренебрежимой малости конвективного переноса энергии по-прежнему дает

$$\alpha = \lambda / \delta. \quad (8.5)$$

Как и первый этап решения, ведущий к (8.5), сохраняется полностью и содержание решения гидродинамической задачи. Фактически анализ проводится для произвольного, но фиксированного значения  $x$ , так что  $u = u(y)$  и зависимость  $g_x$  от продольной координаты никак



**Рис. 8.6. Схема процесса конденсации пара на поверхности горизонтального цилиндра**

не сказывается. В итоге получаем, как и для наклонной плоскости, для массового расхода жидкости на единицу ширины пленки

$$G_l = \frac{1}{3} \frac{g\Delta\rho\delta^3 \sin\varphi}{v}. \quad (8.8a)$$

Но теперь не только  $\delta$ , но и  $\sin\varphi$  зависят от  $x$ .

Третий этап решения включает интегрирование по  $x$ , поэтому здесь решение совсем другое. Балансовое соотношение

$$dG_l = \dot{m} dx = \frac{\lambda\Delta T}{\delta h_{LG}} dx$$

теперь выглядит так:

$$\frac{1}{3} \frac{g\Delta\rho}{v} d\left[\delta^3 \sin\left(\frac{2x}{D}\right)\right] = \frac{\lambda\Delta T}{\delta h_{LG}} dx. \quad (8.14)$$

Именно это уравнение подлежит решению. В малой окрестности точки  $x = 0$  толщина пленки  $\delta = \delta_0$ , причем, очевидно,  $\delta(0) \neq 0$ .

Для бесконечно малого участка длиной  $dx$

$$\sin(2dx/D) \approx 2dx/D, \quad \delta = \delta_0,$$

т.е. из (8.14) следует

$$\frac{2}{3} \frac{g\Delta\rho\delta_0^3}{v} \frac{dx}{D} = \frac{\lambda\Delta T}{\delta_0 h_{LG}} dx,$$

откуда

$$\delta_0 = \sqrt[4]{\frac{3\lambda\Delta T v D}{2g\Delta\rho h_{LG}}}. \quad (8.15)$$

Коэффициент теплоотдачи в точке  $x = 0$

$$\alpha_0 = \frac{\lambda}{\delta_0} = \sqrt[4]{\frac{2\lambda^3 g\Delta\rho h_{LG}}{3v\Delta TD}}. \quad (8.16)$$

Оказывается, что формулы для толщины пленки и КТО на верхней образующей цилиндра идентичны соответствующим формулам для теплообмена при конденсации на вертикальной плоскости. Отличия — только в значениях числовых множителей и замены  $x$  на  $D$ .

Теперь уравнение (8.14) можно преобразовать к безразмерной форме, используя для безразмерной толщины пленки обозначение  $\Delta = \delta/\delta_0$ . Очевидно, (8.14) можно представить как

$$\frac{D}{2} \left( \frac{2}{3} \frac{g \Delta \rho h_{LG}}{\nu \lambda \Delta T D} \right) d(\Delta^3 \sin \phi) = \frac{dx}{\delta}.$$

Так как множитель в первых круглых скобках равен  $1/\delta_0^4$ ;  $\frac{2}{D} dx = \frac{2x}{D}$ , то получаем

$$d(\Delta^3 \sin \phi) = \frac{d\phi}{\Delta},$$

$$\Delta^3 \sin \phi = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\Delta}. \quad (8.17)$$

Это уравнение Нуссельт решил методом планиметрирования (фактически — численным методом). Итог решения — табличная зависимость  $\Delta$  от  $\phi$ . Фрагмент этого решения представлен в табл. 8.1.

Как следует из анализа табличных данных, примерно треть поверхности цилиндра ( $\phi \leq 60^\circ$ ) характеризуется практически постоянным значением толщины пленки. Любопытно, что в окрестности верхней образующей толщина пленки даже немного уменьшается. Здесь, при малых  $\phi$  значение  $\sin \phi \approx 2x/D$ , так что  $g_x \sim x$ ; в этом случае по мере роста  $x$  прирост массовых сил, определяющих течение конденсата, опережает влияние прироста расхода конденсата.

В целом можно констатировать, что на всей верхней половине поверхности цилиндра значение  $\delta$  изменяется слабо. Но на нижней части периметра трубы толщина пленки увеличивается с ростом  $\phi$  очень быстро, что означает существенно меньший вклад этой части поверхности в среднюю теплоотдачу.

Легко видеть, что в силу (8.5) безразмерный коэффициент теплоотдачи имеет в логарифмических координатах зависимость от  $\phi$ , зеркальную по отношению к зависимости  $\Delta(\phi)$ . Вводя безразмерный

Таблица 8.1. Зависимость безразмерной толщины пленки от угловой координаты

$\phi$ , град	0	5	10	20	40	60	90	120	150	180
$\Delta$	1,00	0,99	1,00	1,00	1,02	1,06	1,14	1,30	1,66	$\infty$

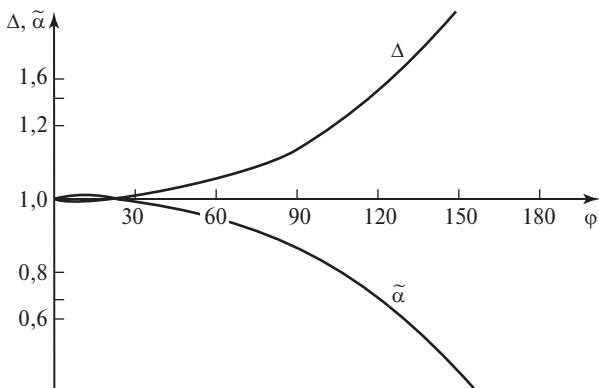


Рис. 8.7. Изменение безразмерной толщины пленки и безразмерного коэффициента теплоотдачи по периметру горизонтальной трубы

КТО как  $\tilde{\alpha} = \alpha / \alpha_0 = \frac{\lambda}{\delta} \frac{\delta_0}{\lambda} = \frac{1}{\Delta}$ , получаем (рис. 8.7) зеркально симметричные графики  $\Delta(\varphi)$  и  $\tilde{\alpha}(\varphi)$  (с логарифмическим масштабом по ординате).

Средний по периметру трубы коэффициент теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \alpha \, d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\lambda}{\delta} \frac{\delta_0}{\lambda} \, d\varphi = \frac{\alpha_0}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Ясно, что, имея результаты интегрирования (8.17), несложно рассчитать  $\bar{\alpha}$ . Современные расчеты дают

$$\bar{\alpha} = 0,728 \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 g \Delta \rho h_{LG}}{v \Delta T D}}. \quad (8.18)$$

Нуссельт (почти 100 лет назад) получил численный множитель 0,725. Заметим, что для  $\alpha_0$  согласно формуле (8.16) числовой множитель равен 0,91.

Сопоставляя (8.18) с формулой (8.13а) для средней теплоотдачи на вертикальной поверхности высотой  $H$ , можно показать, что при  $H \approx 2,85D \left( \left( \frac{0,943}{0,728} \right)^4 \approx 2,85 \right)$  средняя теплоотдача на вертикальном и горизонтальном цилиндрах одинаковая, но при больших  $H$  эффективнее располагать трубу (поверхность конденсации) горизонтально.

## 8.4. Современная методика расчета теплообмена при конденсации неподвижного пара

### 8.4.1. Анализ допущений Нуссельта

Работа по анализу реалистичности допущений Нуссельта началась практически сразу после публикации статей Нуссельта. В 1930—1960-е годы здесь безусловными лидерами были отечественные ученые (Г.Н. Кружилин, К.Д. Воскресенский, Д.А. Лабунцов). Ниже дается анализ допущений в той последовательности, в которой они перечислены в п. 8.2.1.

1. Фактически допущение об изотермичности поверхности ( $T_c = \text{const}$ ) — это не допущение, а условие анализа. Вопрос стоит так: сохраняется ли точность формул (8.13), (8.13а) и (8.18), если на охлаждаемой поверхности поддерживается другой вид граничных условий (например,  $q_c = \text{const}$ ). В этом случае речь, прежде всего, должна идти о применимости формул (8.13а) и (8.18) для  $\bar{\Delta T} = T_s - \bar{T}_c$ . Так как локальный коэффициент теплоотдачи зависит от  $T_s - T_c$ , то здесь необходимо иметь в виду, что истинное значение среднего КТО  $\langle\alpha\rangle = \langle q / \Delta T \rangle$ , являющегося результатом осреднения локальных КТО, в общем случае не совпадает с  $\bar{\alpha} = \bar{q} / \bar{\Delta T}$ . В эксперименте определяют именно  $\bar{\alpha}$ .

В 1965 г. Д.А. Лабунцов [21] показал, что при конденсации на плоской поверхности  $\bar{\alpha} = \frac{\bar{q}}{T_s - \bar{T}_c}$  точно соответствует  $\langle\alpha\rangle$ . Это зна-

чит, что (8.13а) может применяться при использовании  $\bar{\Delta T}$ . При конденсации на криволинейной поверхности  $\langle\alpha\rangle \neq \bar{\alpha}$ . Для конденсации на поверхности горизонтальной круглой трубы при  $q_c = \text{const}$  получено точное аналитическое решение:

$$\bar{\alpha}_q = 0,693 \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 g \Delta \rho h_{LG}}{v \bar{\Delta T D}}} \quad (8.18a)$$

Это на 5 % меньше, чем по (8.18) для  $T_c = \text{const}$ . По-видимому, это единственный случай в теории конвективного теплообмена, когда  $\alpha$  при  $q_c = \text{const}$  ниже, чем  $\alpha$  при  $T_c = \text{const}$ .

В целом, анализ Д.А. Лабунцова показал, что в типичных инженерных задачах влияние неизотермичности поверхности конденса-

ции количественно не очень большое, что позволяет использовать формулы (8.13а) и (8.18) для  $\overline{\Delta T}$ .

2. Как и в предыдущем случае, допущение о том, что пар сухой насыщенный ( $T'' = T_s$ ,  $x_6 = 1$ ), — это не приближение, а просто условие анализа. Оно не только может строго выполняться в эксперименте, но и соответствовать условиям эксплуатации реального теплообменного оборудования. Вопрос стоит так: что будет, если эти условия не выполняются?

Конденсация влажного пара ( $x_6 < 1,0$ ) — это реальность для конденсаторов ТЭС, АЭС. Капли жидкости, присутствующие в паре, участвуют в создании расхода конденсата, но в уравнении энергетического баланса на межфазной границе не вносят вклада, связанного с фазовым превращением. Фактически на поверхности пленки надо записать  $\dot{m}h_{LG}x_6 = q_c \equiv \lambda\Delta T/\delta$ , где  $\dot{m}$  — полный массовый расход влажного пара. Очевидно, в итоговом соотношении для КТО также вместо  $h_{LG}$  будет присутствовать  $h_{LG}x_6$ . Так как  $\alpha \sim h_{LG}x_6^{1/4}$ , то влияние конечной влажности пара несильно оказывается на коэффициенте теплоотдачи. Например, при  $x_6 = 0,8$  значение  $\alpha_{вл} \approx 0,95\alpha_{сух}$ .

В случае конденсации перегретого пара ( $T'' > T_s$ ) на поверхности пленки конденсата универсальное условие совместности имеет вид

$$\dot{m}h_{LG} = q'(0) - q''(0),$$

$$\text{где } q'(0) = -\lambda' \left( \frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{y=\delta} = \frac{\lambda\Delta T}{\delta}; \quad q''(0) = -\lambda'' \left( \frac{\partial T''}{\partial y} \right)_{y=\delta}.$$

Если КТО отнесен, как обычно, к  $T_s$ , т.е.  $\alpha = q_c/(T_s - T_c)$ , то учет перегрева пара обеспечивается добавкой к  $h_{LG}$  энталпии перегрева пара:

$$q'(0) = \frac{\lambda\Delta T}{\delta} = \dot{m}(h_{LG} + c_p''\Delta T_{\text{пер}}'') = \dot{m}h_{LG} \left( 1 + \frac{c_p''\Delta T_{\text{пер}}''}{h_{LG}} \right),$$

$$\text{где } \Delta T_{\text{пер}}'' = T'' - T_s.$$

Обычно добавка невелика. Вызывает сомнения подход, предполагающий, что по пути движения пара вдоль охлаждаемой поверхности сначала «снимается» перегрев пара, а потом начинается конденсация.

Физически ясно, что при  $T_c < T_s$  конденсация начнется независимо от абсолютной температуры пара в данном сечении канала.

3. То, что в задаче не учитывается переохлаждение конденсата, как уже говорилось, заведомо является приближением. Теперь, имея решение для профиля температуры в пленке, погрешность, вносимую этим допущением, можно оценить количественно. Средняя температура конденсата  $\bar{T}' = (T_s + T_c)/2$ , т.е. конденсат переохлажден на  $\Delta T/2$ . Это означает, что при данном  $x$  к охлаждающему теплоносителю отводится тепловой поток

$$q_c = \dot{m} \left( h_{LG} + \frac{c_p \Delta T}{2} \right) = \dot{m} h_{LG} \left( 1 + \frac{c_p \Delta T}{2 h_{LG}} \right).$$

Можно видеть, что относительная поправка на переохлаждение конденсата обычно существенно меньше единицы. Для воды при

$$\frac{c_p \Delta T}{2 h_{LG}} \approx \frac{4,2 \cdot 10^3 \Delta T}{2 \cdot 2,26 \cdot 10^6} < 1 \cdot 10^{-3} \Delta T, \text{ так что}$$

при  $\Delta T = 10$  К эта поправка менее 1 %.

4. Анализ влияния переменности свойств на результаты расчета теплообмена проводили К.Д. Воскресенский, Д.А. Лабунцов. Поскольку задача имеет строгое решение, Лабунцову удалось выражение для поправки на переменность свойств получить аналитически в форме

$$\varepsilon_T = \left[ \frac{\mu_s}{\mu_c} \left( \frac{\lambda_c}{\lambda_s} \right)^3 \right]^{1/8}. \quad (8.19)$$

При реальных  $\Delta T$  изменения  $\rho$  и  $c_p$  ничтожны. Так как для капельных жидкостей  $\partial \mu / \partial T < 0$ , то при конденсации всегда вязкость при температуре насыщения меньше вязкости при температуре стенки, т.е.  $\mu_s < \mu_c$ . Теплопроводность жидкости изменяется относительно слабо, так что обычно  $\varepsilon_T < 1$ . В реальных задачах снижение КТО за счет увеличения вязкости на стенке не превышает, как правило, 10 %.

5. Допущение о ламинарном режиме течения и гладкой поверхности пленки, как отмечалось, фактически содержит в себе два разных допущения.

Для изотермических течений гравитационной пленки ламинарный режим сохраняется до  $Re_{pl}^{kp} = 1600$ . Есть публикации, в которых

сообщается о более раннем переходе к турбулентному режиму в пленке при конденсации. Здесь необходима осторожность, так как при визуальных наблюдениях за турбулентный переход может быть принята развитая волнистость пленки. Но качественно можно ожидать, что устойчивость ламинарного течения снижается при конденсации (в сравнении с изотермическими условиями) из-за отрицательного влияния переменности вязкости на форму профиля скорости. В гл. 4 для обтекания плоской пластины, когда  $dp/dx = 0$ , было показано, что

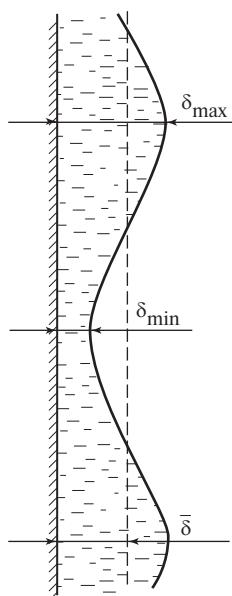
$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -\operatorname{sign}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

При конденсации  $\partial\mu/\partial y < 0$ , т.е.  $(\partial^2 u/\partial y^2)_{y=0} > 0$ , что предполагает наличие точки перегиба на профиле скорости. Но в пленке конденсата действуют массовые силы, так что непосредственно анализ устойчивости течения у плоской пластины здесь не применим. Речь идет о качественном анализе возможного негативного влияния переменности вязкости на устойчивость ламинарного течения.

С учетом известной неопределенности в имеющейся информации можно приближенно принимать, что ламинарный режим течения сохраняется в пленке до  $Re_{\text{пл}} \leq 1600$ .

Допущение о том, что поверхность пленки плоская (гладкая), связано с вопросом об устойчивости пленки к малым возмущениям. Работы П.Л. Капицы и С.П. Капицы [14, 15] показали, что в действительности поверхность пленки волнистая. Позднее (в 1950-е годы) было теоретически установлено, что гравитационная пленка на вертикальной плоскости неустойчива при любых числах  $Re_{\text{пл}}$ . В экспериментах [15] ( $Re_{\text{пл}} \leq 400$ ) выявлено, что при волновом движении средняя скорость  $U_0$  на 7 % выше  $\bar{u}$  по Нуссельту. Это значит, что средняя толщина пленки при неизменном расходе составляет примерно  $0,93\delta_{\text{пл}}$ .

Для процесса теплообмена существенно, что термическое сопротивление волновой пленки ниже, чем гладкой, при  $\bar{\delta}_{\text{в}} = \delta_{\text{пл}}$ . Дело в том, что отклонение толщины пленки от среднего уровня несимметрично воздействует на термическое сопротивление. Это легко понять из простой схемы на рис. 8.8. Если, например, амплитуда волны  $0,5\bar{\delta}_{\text{в}}$ ,



**Рис. 8.8. Схематическое представление волновой пленки конденсата**

то  $\delta_{\min} = 0,5\bar{\delta}_B$ ,  $\delta_{\max} = 1,5\bar{\delta}_B$ . Соответствующие значения КТО:

$$\alpha_{\max} = \frac{\lambda}{\delta_{\min}} = 2\bar{\alpha}_{\text{пл}}; \quad \alpha_{\min} = \frac{\lambda}{\delta_{\max}} = \frac{2}{3}\bar{\alpha}_{\text{пл}}.$$

Ясно, что прирост  $\alpha_{\max}$  намного заметнее, чем снижение  $\alpha_{\min}$  в сравнении со значением коэффициента теплоотдачи при плоской поверхности пленки.

Для известной формы волны (при ее аналитической аппроксимации) несложно получить численное значение  $\bar{\alpha}_B$ . Для синусоидальных волн в работах П.Л. Капицы получено

$$\bar{\alpha}_B \approx 1,13\bar{\alpha}_{\text{пл}} \text{ при } \bar{\delta}_B = \delta_{\text{пл}}, \text{ т.е. только за счет}$$

изменения формы поверхности пленки. (В [24] приводятся примеры таких расчетов для двух типов плоских волн.) Суммарный эффект за счет уменьшения средней толщины пленки при одинаковом расходе и за счет несимметричного влияния выступов и впадин на термическое сопротивление был определен как  $\varepsilon_w = 1,07 \cdot 1,13 = 1,21$ .

В середине 1950-х годов Д.А. Лабунцов [21] уточнил этот анализ. Он учел, что степень развития волнового течения различна при разных числах  $Re_{\text{пл}}$ ; в итоге поправка к формуле Нуссельта на волновой характер движения имеет вид

$$\varepsilon_w = (Re_{\text{пл}}/4)^{0,04}. \quad (8.20)$$

Результаты расчета по этой формуле для четырех значений  $Re_{\text{пл}}$  даны в табл. 8.2. Таблица показывает, что  $\varepsilon_w = 1,20$  примерно отвечает условиям экспериментов П.Л. Капицы и С.П. Капицы.

**Таблица 8.2. Поправка к формуле Нуссельта на волновое движение пленки**

$Re_{\text{пл}}$	4	100	400	1600
$\varepsilon_w$	1,00	1,14	1,20	1,27

Последующие исследования показали, что на вертикальной поверхности до  $Re_{пл} = 10 \div 20$  существует гладкая пленка. Видимое противоречие с теорией связано с тем, что к неустойчивости приводят длинные волны. Поскольку каждое возмущение сносится потоком, требуется определенная длина участка течения, чтобы волны сформировались и стали доступны наблюдению. Это подтверждается тем, что на относительно коротких рабочих участках гладкая поверхность наблюдается до  $Re_{пл} \leq 20$ , а на более длинных — только до  $Re_{пл} \leq 10$ .

Схематически изменение характера течения пленки конденсата по мере роста расхода жидкости, т.е. на разных отметках по высоте поверхности конденсации, показано на рис. 8.9. Увеличение  $Re_{пл}$  приводит к появлению сначала двумерных (плоских) волн ( $20 \leq Re_{пл} \leq 80$ ), которые затем становятся трехмерными. Но течение сохраняется ламинарным до  $Re_{пл} \approx 1600$ . Дальнейшее увеличение расхода конденсата в пленке ведет к смене режима течения на турбулентный.

6. Допущение о неподвижности пара относительно поверхности пленки — это условие, при котором проводится анализ. Оно вполне реалистично. Но важно понять, как влияет на интенсивность теплоотдачи движение пара относительно пленки конденсата.

Решение (8.6) гидродинамической задачи

$$u = \frac{g\Delta\rho}{\mu} (\delta y - y^2/2)$$

позволяет получить

$$\tau_c = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \delta g \Delta \rho,$$

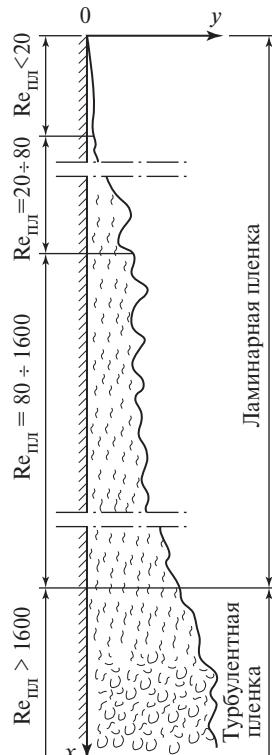


Рис. 8.9. Качественная картина изменения характера течения пленки конденсата по высоте пластины

т.е. действие массовых сил на элемент объема жидкой пленки уравновешивается «вязким» трением на стенке. Действительно, для участка  $dx$  пленки шириной  $l$  (рис. 8.10) баланс сил:

$$\tau_c/l dx = g\Delta\rho/\delta dx, \text{ т.е. } \tau_c = g\Delta\rho\delta.$$

Движение пара вдоль поверхности добавляет в баланс сил величину  $\tau_i/l dx$ . При спутном течении пара и жидкости касательное напряжение на межфазной поверхности  $\tau_i > 0$  (в направлении течения пленки) получаем  $\tau_c - \tau_i = g\Delta\rho\delta$ ; пленка становится тоньше. При встречном движении  $\tau_c + \tau_i = g\Delta\rho\delta$  толщина пленки  $\delta$  растет.

Относительная роль трения на межфазной поверхности определяется отношением  $\tau_i = \frac{C_i}{2}\rho''(U'' - u'_\delta)^2$  к массовым силам  $g\Delta\rho\delta$ . Эффект трения со стороны пара заметен лишь при скорости пара  $U'' \gg u'_\delta$  — скорости на поверхности пленки. Поэтому этот эффект можно оценить с помощью числа Фруда

$$Fr'' = \frac{C_i \rho'' U''^2}{2g\Delta\rho\delta}.$$

При  $Fr'' \ll 1$ , практически уже при  $Fr'' < 0,2$ , пар можно считать неподвижным.

Несложно убедиться, что влияние трения со стороны пара становится заметным лишь при достаточно высоких его скоростях. Напри-

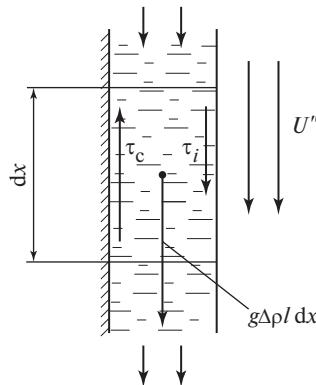


Рис. 8.10. Баланс сил для участка пленки конденсата

мер, для воды при атмосферном давлении:  $\rho'' = 0,59 \text{ кг/м}^3$ ,  $\Delta\rho \approx 957 \text{ кг/м}^3$ ,  $C_i \approx 0,005$  при турбулентном течении пара; тогда при  $\delta \approx 0,1 \text{ мм}$  имеем

$$\text{Fr}'' = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,59 \cdot U''^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 957 \cdot 10^{-4}} = 0,2, \quad U'' \approx 12,4 \text{ м/с.}$$

В конденсаторах ТЭС и АЭС давление пара  $p'' \approx 5 \text{ кПа}$ ,  $\rho'' \approx 0,035 \text{ кг/м}^3$ , т.е. почти в 17 раз меньше, чем при атмосферном давлении. При сохранении остальных условий оценки скорость пара должна быть примерно 50 м/с, чтобы влиять на теплообмен при конденсации. Фактические скорости пара, поступающего в конденсатор, могут быть даже выше (до 100 м/с). При этом следует иметь в виду, что действительные значения  $C_i$  обычно выше, чем принятые в примере значение  $5 \cdot 10^{-3}$ , характерное для гладкой поверхности. Однако расход пара (и скорость его течения) падает по мере движения через пучок труб; кроме того, на интенсивность теплообмена очень сильно влияют неконденсируемые газы. Как будет показано в § 8.7, применительно к условиям конденсаторов ТЭС и АЭС прямой эффект трения на поверхности пленки конденсата невелик. При высоких приведенных давлениях, характерных, к примеру, для подогревателей высокого давления (ПВД) на ТЭС, можно ожидать, что влияние скорости пара на теплообмен при конденсации станет заметным; но количественных результатов, относящихся не к одиночной трубе, а к пучкам труб, до настоящего времени не получено.

7. При постановке задачи уже было сказано, что при установившемся течении пленки конвективные члены уравнения движения обращаются в нуль. При конденсации  $\partial u / \partial x \neq 0$ , но практически влияние инерционных членов уравнения (8.2) на течение конденсата может не учитываться.

8. Пренебрежение конвективным переносом энергии анализировалось еще в 1930-е годы Г.Н. Кружилиным. При сохранении основного конвективного члена, отражающего перенос в направлении течения, уравнение энергии (8.3) принимает вид

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.$$

Проведем оценку величин в этом уравнении методами, которыми мы неоднократно пользовались в предыдущих главах, но с учетом результатов решения Нуссельта. Принимаем

$$u = O(\bar{u}) = \frac{1}{3} \frac{g \Delta \rho \delta^2}{\mu}; \quad \partial x = O(x); \quad \partial y = O(\delta); \quad \partial T \approx \partial^2 T = O(\Delta T).$$

Тогда отношение конвективного переноса энергии к молекулярному определяется как

$$\frac{\rho c_p g \Delta \rho \delta^2 \delta^2}{3 \mu x \lambda} = \frac{4 \lambda x v \Delta T c_p g \Delta \rho}{3 v x \lambda g \Delta \rho h_{LG}} = \frac{4 c_p \Delta T}{3 h_{LG}}.$$

При оценке роли переохлаждения конденсата было показано, что обычно этот эффект составляет единицы процентов. Как установлено в специальных исследованиях, даже при огромном (нереальном для практических процессов конденсации) значении  $c_p \Delta T / h_{LG} = 0,2$  учет конвективного переноса энергии лишь на 5 % изменяет КТО.

Таким образом, анализ показывает, что идеализация процесса на основе допущений Нуссельта несильно влияет на результат. В данном случае вполне можно говорить об удивительно удачном аналитическом решении.

#### 8.4.2. Практические рекомендации по расчету

Итак, в большинстве практических случаев, когда конденсация идет в условиях невысокой скорости движения пара (в частности, в межтрубном пространстве кожухотрубчатых теплообменников), к формулам Нуссельта (8.13а) и (8.18) для среднего коэффициента теплоотдачи необходимы лишь две поправки (8.19) и (8.20). Следовательно, в практических расчетах принимают

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{Nu} \varepsilon_T \varepsilon_w. \quad (8.21)$$

Здесь  $\bar{\alpha}_{Nu}$  вычисляется по (8.13а) или (8.18) в зависимости от геометрии области конденсации;  $\varepsilon_T$  в соответствии с формулой (8.19) легко рассчитывается при заданных  $T_s$  и  $T_c$ . (При заданном  $q_c$  температура стенки  $T_c$  заранее не задана, так что требуются несложные итерации.) Методы учета (при необходимости) влияния на теплоотдачу перегрева пара или его конечной влажности ( $x_6 < 1$ ) указаны в п. 8.4.1.

Расчет поправки на волновой характер движения пленки требует знания числа  $Re_{\text{пл}}$ , которое при конденсации является не заданным параметром, а функцией процесса. Действительно,  $Re_{\text{пл}} = 4G_l/\mu$ , массовый расход формируется за счет самого процесса конденсации. Как было показано в § 8.2,

$$dG_l = \dot{m} dx \equiv \frac{q}{h_{LG}} dx \equiv \alpha \Delta T \frac{dx}{h_{LG}}.$$

Следовательно, на расстоянии  $x = H$  от верхней точки поверхности конденсации

$$G_l = \int_0^H \frac{\Delta T \alpha}{h_{LG}} dx \equiv \frac{\bar{\alpha} \Delta T H}{h_{LG}}, \text{ так как } \bar{\alpha} \equiv \frac{1}{H} \int_0^H \alpha dx.$$

Это означает, что число  $Re_{\text{пл}}$  при конденсации — искомый параметр, содержащий  $\bar{\alpha}$ :

$$Re_{\text{пл}} = \frac{4\bar{\alpha} \Delta T H}{h_{LG} \mu}. \quad (8.10a)$$

Чтобы воспользоваться формулой (8.21), необходима итерационная процедура. Сначала по (8.13а) рассчитывают  $\bar{\alpha}_{\text{Nu}}$ , с учетом (8.21) получают первое приближение для коэффициента теплоотдачи:  $\bar{\alpha}_I = \bar{\alpha}_{\text{Nu}} \varepsilon_T$ . Используя его в (8.10а), вычисляют  $Re_{\text{пл}} I$  и затем  $\varepsilon_w$  по (8.20). После этого находят коэффициент теплоотдачи во втором приближении  $\bar{\alpha}_{II} = \bar{\alpha}_I \varepsilon_w$ . Потом процедуру повторяют. С учетом слабой зависимости  $\varepsilon_w(Re_{\text{пл}})$  двух итераций обычно хватает.

Существует метод безитерационного расчета  $\bar{\alpha}$ , предложенный Д.А. Лабунцовым. В 1940-е годы немецкие ученые предложили для расчета теплообмена при конденсации определяющее число подобия

$$Z = \frac{\lambda \Delta T H}{l_g h_{LG} \mu}, \quad (8.22)$$

которое получается из  $Re_{\text{пл}}$  заменой  $4\bar{\alpha}$  на эквивалентную по размерности величину  $\lambda/l_g$ . Линейный масштаб  $l_g$  был введен в гл. 3 как

$$l_g = 3 \sqrt[3]{\frac{v^2 \rho'}{g \Delta \rho}}. \quad (3.9a)$$

Он определяется условием соизмеримости произведения сил  $f_i f_g$  и квадрата сил вязкости  $f_\mu^2$ , т.е.

$$Ar \equiv \frac{g\Delta\rho l^3}{v^2 \rho'} = 1.$$

В расчетную практику критерий  $Z$  был введен Д.А. Лабунцовым [21], который назвал его приведенной поверхностью конденсации. Формула Нуссельта (8.13а) может быть преобразована как

$$Re_{пл} = \frac{4\Delta TH}{h_{LG}\mu} \alpha \equiv 4 \cdot 0,943 \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 g\Delta\rho h_{LG}}{v\Delta TH}} \left( \frac{\Delta T^4 H^4 \rho'}{h_{LG}^4 \mu^4 \rho'} \right)^{1/4} = 3,77 Z^{3/4}.$$

Следовательно, выражение

$$Re_{пл} = 3,77 Z^{3/4}$$

— это эквивалент (8.13а).

Вводя теперь поправку  $\varepsilon_w = (Re_{пл}/4)^{0,04}$ , получаем

$$Re_{пл} = 3,80 Z^{0,78},$$

а с учетом  $\varepsilon_T$  окончательно

$$Re_{пл} = 3,80 Z^{0,78} \varepsilon_T. \quad (8.21a)$$

Эта формула, очевидно, эквивалентна размерной формуле (8.21), но она позволяет рассчитывать средний коэффициент теплоотдачи без итераций, причем поправка на волновое движение в ней уже учтена.

Заметим, что при конденсации на поверхности горизонтального цилиндра волновая структура обычно развивается не успевает. По оценкам Д.А. Лабунцова, при  $D \leq 20b = 20\sqrt{\sigma/(g\Delta\rho)}$  можно рассчитывать КТО по (8.18), вводя лишь поправку на переменность свойств  $\varepsilon_T$ . [Здесь в качестве линейного масштаба использована капиллярная постоянная  $b$ , определяемая формулой (3.10)].

Важно отметить, что границе перехода к турбулентному течению в пленке конденсата  $Re_{пл}^{kp} = 1600$  отвечает  $Z_{kp} = 2300$ . Таким образом, формула (8.21а) справедлива при  $Z \leq 2300$ .

## 8.5. Теплообмен при турбулентном течении пленки конденсата

Рассматривается теплообмен при конденсации в условиях большого массового расхода жидкости в пленке, когда  $\text{Re}_{\text{пл}}^{\text{kp}} > 1600$ .

В реальных условиях, как это ясно из схемы на рис. 8.9, турбулентный режим течения формируется на достаточно протяженной по высоте поверхности конденсации в нижней ее части. Теоретический анализ этой задачи выполнил Д.А. Лабунцов. Из восьми допущений п. 8.2.1 в случае турбулентного течения, очевидно, не может использоваться допущение 5, прямо относящее задачу Нуссельта к ламинарным течениям, а также допущения 7 и 8, поскольку турбулентный перенос импульса и энергии по существу является конвективным.

Оставляя в силе остальные допущения § 8.2, для теплового потока в пленке конденсата можно записать

$$q = -\lambda \left( 1 + \frac{\varepsilon_q}{a} \right) \frac{\partial T}{\partial y} \equiv -\lambda \left( 1 + \frac{\text{Pr}_T \varepsilon_\tau}{\text{Pr}_T v} \right) \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Далее, полагая  $q = \text{idem}$  по толщине пленки, интегрируем это уравнение:

$$-\int_{T_c}^{T_s} dT = -\Delta T = \frac{q}{\lambda} \int_0^\delta \frac{dy}{1 + \frac{\text{Pr}_T \varepsilon_\tau}{\text{Pr}_T v}}.$$

Знак «минус» связан с тем, что в выбранной системе координат (см. рис. 8.4)  $q < 0$ . Переходя к скалярным величинам и учитывая, что  $q/\Delta T = \alpha$ , имеем

$$\alpha = \frac{\lambda}{\int_0^\delta \frac{dy}{1 + \frac{\text{Pr}_T \varepsilon_\tau}{\text{Pr}_T v}}} \quad (8.23)$$

Ясно, что при  $\varepsilon_\tau = 0$  (8.23) переходит в (8.4):  $\alpha = \lambda/\delta$ . В дальнейшем анализе принималось, что  $\text{Pr}_T = \varepsilon_\tau/\varepsilon_q = 1$ . Для безразмерной турбулентной вязкости  $\varepsilon_\tau/v$  Д.А. Лабунцов использовал две различные полуэмпирические методики. Кроме того, в анализе использованы

очевидное уравнение баланса импульса  $\tau_c = g\Delta\rho\bar{\delta}$  и алгебраическая формула  $\tau_c = \mu \left( 1 + \frac{\varepsilon_\tau}{v} \right) \frac{\partial u}{\partial y}$ . Вместе с соотношениями материального и энергетического баланса  $dG_l = \dot{m} dx = \frac{q}{h_{LG}} dx$  это дает возможность рассчитать коэффициент теплоотдачи по (8.23).

Аппроксимация результатов расчетов приводит к уравнению для локального коэффициента теплоотдачи:

$$Nu \equiv \frac{\alpha l_g}{\lambda} = 0,023 Re_{пл}^{0,25} Pr^{0,5}. \quad (8.24)$$

Линейный масштаб в числе  $Nu$   $l_g = \sqrt[3]{v^2 \rho' / (g\Delta\rho)}$ . Число Рейнольдса пленки  $Re_{пл} = 4\bar{\alpha}\Delta TH / (h_{LG}\mu)$  характеризует расход жидкости в пленке при локальном значении  $x = H$ ; этот расход формируется на всем предшествующем данному сечению участке длины, включающем режимы ламинарного течения пленки при  $Re_{пл} < 1600$  и турбулентного при  $Re_{пл} > 1600$ . Формула (8.24) прошла прямую проверку на экспериментах, выполненных в ВТИ (Всероссийский — тогда Всесоюзный — теплотехнический институт). Интересно, что в этих экспериментах, чтобы обеспечить расходы жидкости, отвечающие турбулентному течению пленки конденсата на установке относительно небольшой высоты, осуществляли частичную рециркуляцию конденсата. Таким образом, согласно (8.24) локальный коэффициент теплоотдачи при турбулентном течении пленки растет как корень четвертой степени из расхода конденсата  $G_l$ .

Для бесконечно малого участка  $dH$  на основе (8.24) можно записать:

$$\alpha \frac{4\Delta T dH}{h_{LG}\mu} = 0,092 Re_{пл}^{0,25} Pr^{0,5} \frac{\lambda}{l_g} \frac{\Delta T dH}{h_{LG}\mu}.$$

Выражение в левой части этого уравнения можно интерпретировать как безразмерное приращение  $Re_{пл}$ , т.е.

$$dRe_{пл} = \frac{4\alpha\Delta T dH}{h_{LG}\mu},$$

а в правой части, очевидно,

$$\frac{\lambda \Delta T}{l_g h_{LG} \mu} dH = dZ.$$

Получено, таким образом, обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dRe_{пл}}{Re_{пл}^{0,25}} = 0,092 Pr^{0,5} dZ.$$

Его интегрирование от  $Z = 2300$  до текущего с учетом того, что границе турбулентного течения отвечает  $Re_{пл} = 1600$ , дает

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \left( Re_{пл}^{3/4} - 1600^{3/4} \right) &= 0,092 Pr^{0,5} (Z - 2300) \equiv \\ &\equiv 0,092 \cdot 2300 Pr^{0,5} \left( \frac{Z}{2300} - 1 \right). \end{aligned}$$

После несложных преобразований получаем

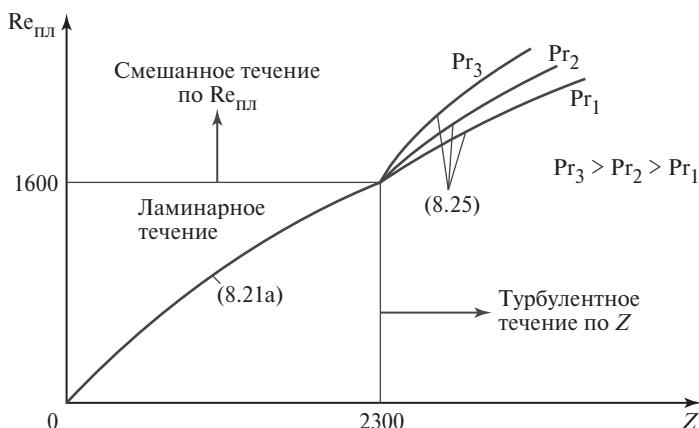
$$Re_{пл}^{3/4} = 1600^{3/4} + 0,069 \cdot 2300 \cdot Pr^{0,5} \left( \frac{Z}{2300} - 1 \right).$$

И окончательно

$$Re_{пл} = 1600 \left( 1 + 0,0625 Pr^{0,5} \left( \frac{Z}{2300} - 1 \right) \right)^{4/3}. \quad (8.25)$$

Формула (8.25) определяет средний коэффициент теплоотдачи при  $Z > 2300$ , т.е. и само число  $Re_{пл}$ , и следующее из него  $\bar{\alpha}$  отражают теплообмен на всем участке длины от 0 до  $H$ , в пределах которого есть участки ламинарного и турбулентного течения конденсата. В этом смысле при  $Z > 2300$  ( $Re_{пл} > 1600$ ) число  $Re_{пл}$  соответствует смешанному режиму течения конденсата.

При  $Z < 2300$  справедлива формула (8.21a); в этом случае  $\alpha$  не зависит от  $c_p$ , что в задаче Нуссельта предопределено пренебрежением конвективным переносом энергии. При  $Z > 2300$  течение конденсата турбулентное, но  $Re_{пл}$  отражает средний КТО на всей длине. Как уже говорилось, в этом случае по  $Re_{пл}$  режим течения смешанный; средний коэффициент теплоотдачи  $\bar{\alpha}$  расслаивается по числу  $Pr$ , как это показано на рис. 8.11 [аналогично локальному  $\alpha$  в соответствии с формулой (8.24)].



**Рис. 8.11. Характер изменения средней теплоотдачи при конденсации пара при различных режимах течения**

Формула (8.25) подтверждена результатами опытов, в том числе и относительно недавних. Следует иметь в виду, что непосредственно в зоне турбулентного перехода локальная интенсивность теплоотдачи может снизиться из-за увеличения толщины пленки. Но дальнейший рост  $G_l$  ведет к увеличению коэффициента теплоотдачи.

## 8.6. Теплообмен при конденсации пара, движущегося внутри труб

### 8.6.1. Общие положения

Конденсаторы, в которых пар конденсируется в межтрубном пространстве, — это обычно самые крупные кожухотрубчатые теплообменники среди многообразного теплообменного оборудования ТЭС и АЭС. Видимо, с этим связано, что исторически интерес к конденсации эффективно неподвижного пара (т.е. такого процесса, в котором влиянием скорости движения пара можно пренебречь) был преобладающим. Этому способствовали также теоретические результаты В. Нуссельта и последующих исследователей, развивавших и уточнявших его анализ. Как упоминалось в п. 8.4.2, в конденсаторах ТЭС и АЭС плотность пара  $\rho'' \approx 0,035 \text{ кг}/\text{м}^3$ , т.е. удельный объем  $v'' \approx 30 \text{ м}^3/\text{кг}$ , что практически исключает организацию конденсации в трубах из-за чрезвычайно высоких скоростей течения. В целом, когда конденсация реализуется при низких приведенных

давлениях, естественно осуществлять ее в больших объемах, применительно к кожухотрубчатым теплообменникам — в межтрубном пространстве. В этом случае большие проходные сечения для пара обычно позволяют рассматривать его как эффективно неподвижный.

Технологии, в которых конденсация пара осуществляется внутри охлаждаемых каналов, конечно, не могут конкурировать с конденсаторами ТЭС и АЭС по тепловой мощности  $Q$  и по металлоемкости, но весьма разнообразны: холодильные установки, тепловые насосы (ТНУ), ребойлеры, паропреобразователи и др. В большинстве случаев конденсация в трубах осуществляется при относительно высоких приведенных давлениях; как правило, интенсивность теплоотдачи в этом случае выше, чем при конденсации неподвижного пара, кроме того, здесь проще достигается герметичность соответствующего контура.

Главная особенность конденсации внутри труб — непрерывное изменение структуры парожидкостного потока по длине. В рассмотренных ранее задачах по длине изменяется лишь расход жидкости  $G_l$ , условия со стороны пара принимаются по длине неизменными.

При конденсации в трубах паросодержание по длине изменяется от  $x = 1,0$  на входе до  $x = 0$  на выходе в случае полной конденсации. (Это крайне редко достигается в пределах одного прямого канала, который для этого должен быть слишком длинным.) При этом непрерывно падает скорость смеси  $W_{\text{см}}$ , растет доля жидкости в сечении канала ( $1 - \phi$ ). В земных условиях структура двухфазной смеси сильно зависит от ориентации канала (и направления течения). Поэтому качественный анализ конденсации в трубах проводится отдельно для вертикальных и горизонтальных каналов.

*A. Вертикальные каналы.* В вертикальных каналах в штатных условиях работы теплообменного аппарата естественной является подача пара сверху (рис. 8.12). При этом в зависимости от соотношения расхода пара на входе в канал  $G = G''(0)$  и теплового потока  $q$  (а также давления системы) могут возникать следующие ситуации:

ламинарное течение пара и жидкости;

турбулентное течение пара, ламинарное течение жидкости;

турбулентное течение пара, турбулентное течение жидкости.

В первом случае обычно оказывается возможным воспользоваться классическим решением Нуссельта о конденсации неподвижного пара, т.е. средний коэффициент теплоотдачи рассчитывать по (8.21а).

Во втором случае весьма вероятно, что на входе в канал  $\text{Fr}'' > 0,2$ , трение со стороны пара интенсифицирует теплообмен (см. п. 8.4.1). Здесь может быть использована модель кольцевого течения, которая

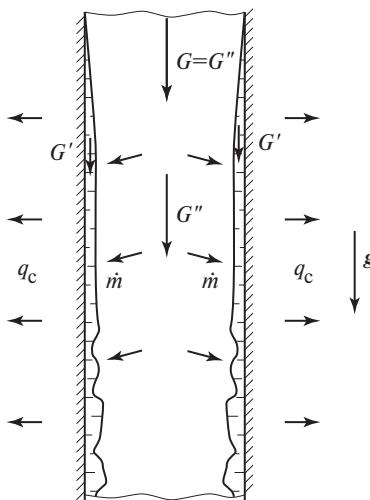


Рис. 8.12. Схема конденсации пара в вертикальной трубе

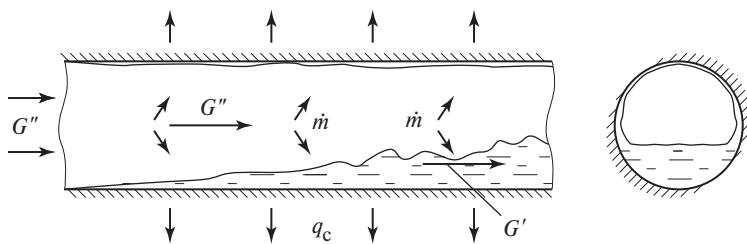
позволяет рассчитать трение на межфазной поверхности  $\tau_i$ . Тогда выражение для толщины жидкой пленки будет учитывать эффект гравитации ( $\delta\Delta\rho g$ ) и эффект трения. Главная трудность — это определение коэффициента трения на поверхности пленки конденсата  $C_i$ . По-видимому, физически наиболее обоснованной является здесь модель Уоллиса (Wallis), согласно которой трение на межфазной поверхности зависит от относительной толщины пленки:

$$C_i = C_f \left( 1 + 240 \frac{\delta}{d} \right),$$

где  $C_f$  — коэффициент трения при турбулентном течении пара в гладком канале (см. [24, 30]). Для его расчета можно воспользоваться, например, формулой Блазиуса:

$$C_f \equiv \frac{\xi}{4} = \frac{0,079}{Re_{\pi}^{0,25}},$$

где число Рейнольдса пара приближенно можно вычислить по приведенной скорости пара и диаметру канала:  $Re_{\pi} = \frac{\rho'' W_0'' d}{\mu''}$ . (Более детально модель кольцевого двухфазного потока представлена в [24].)



**Рис. 8.13. Схематическое представление изменения структуры парожидкостного потока при конденсации в горизонтальной трубе**

Необходимо помнить, что по длине скорость  $W_0''$  уменьшается, т.е. уменьшаются  $Re_p$  и  $Fr''$ . Это означает, что в некоторых случаях при ламинарном течении пленки и турбулентном течении пара теплообмен также можно рассчитывать по формуле (8.21а) для неподвижного пара.

В третьем случае предполагается преобладание инерционных сил над силами вязкости и, как правило, над массовыми. Тогда теплообмен практически не зависит от ориентации канала; для него существует приближенная расчетная модель, которая рассмотрена в п. 8.6.2.

**Б. Горизонтальные каналы.** В горизонтальных каналах массовые силы перпендикулярны направлению двухфазного потока. Действие массовых сил заставляет жидкость в конденсатной пленке стекать по периметру в нижнюю часть трубы (рис. 8.13). В верхней части трубы пленка тонкая, интенсивность теплоотдачи высокая, в нижней — толщина пленки больше, КТО много ниже.

Делались неоднократные попытки построить модель теплообмена при конденсации в горизонтальной трубе, в том числе с использованием численных методов. Физически ясных и удобных для практики расчетных формул пока не создано. Только в случае турбулентного течения смеси на всей длине участка конденсации удается предложить простую и достаточно аргументированную методику расчета теплоотдачи.

## 8.6.2. Конденсация в охлаждаемых каналах при турбулентном течении смеси

Рассматривается случай, когда турбулентный режим течения сохраняется даже при полной конденсации пара, т.е. при  $Re_0 = \rho' W_0 d / \mu' \geq 2300$ . Поскольку  $\rho' W_0 = \rho_\beta W_{cm}$  (см. п. 7.5.3),  $\mu'' \ll \mu'$ , то

указанное условие гарантирует сохранение турбулентного режима течения на всей длине канала. Задача была впервые решена Л.Д. Бойко и Г.Н. Кружилиным и подкреплена проведенными ими, а в последующем и многими другими, экспериментальными исследованиями.

Эта задача ориентирована на относительно высокие приведенные давления, что в сочетании с большими значениями  $W_{\text{cm}}$  оправдывает использование гомогенной модели для трения (см. п. 7.5.3):

$$\tau_{\text{cm}} = \tau_0 \left( 1 + x \frac{\Delta \rho}{\rho''} \right),$$

где  $\tau_{\text{cm}} = \xi_{\text{cm}} \rho_{\beta} W_{\text{cm}}^2 / 8$ ;  $\tau_0 = \xi_0 \rho' W_0^2 / 8$ ;  $\xi_{\text{cm}} = \xi_0 = f(\text{Re})_0$ ;  $x$  — массовое расходное паросодержание.

При турбулентном течении за пределами вязкого подслоя справедлива аналогия Рейнольдса для переноса импульса и энергии. Для капельных неметаллических жидкостей при  $\text{Pr} > 1$  основное термическое сопротивление сосредоточено в теплопроводном подслое, так что

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{\Delta \lambda} \sim \frac{\lambda \text{Pr}^{1/3} v_*}{v}; \quad v_* = \sqrt{\tau_c / \rho}.$$

Принципиально важным в рассматриваемой модели является вывод о том, что коэффициент теплоотдачи пропорционален корню из касательного напряжения на стенке:  $\alpha \sim \sqrt{\tau_c}$ .

Принимая, что эта связь сохраняется и в двухфазном потоке, Бойко и Кружилин получили

$$\frac{\alpha_{\text{cm}}}{\alpha_0} = \sqrt{\frac{\tau_{\text{cm}}}{\tau_0}} = \left( 1 + x \frac{\Delta \rho}{\rho''} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, для коэффициента теплоотдачи при конденсации пара в условиях развитого турбулентного течения смеси имеем

$$\alpha_{\text{cm}} = \alpha_0 \left( 1 + x \frac{\Delta \rho}{\rho''} \right)^{1/2}. \quad (8.26)$$

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_0$  при однофазном течении жидкости со скоростью, равной скорости циркуляции  $W_0$ , рассчитывается по формуле Б.С. Петухова и его сотрудников (6.19):

$$\text{Nu}_0 = \frac{\text{Re}_0 \text{Pr} \frac{\xi}{8}}{1 + \frac{900}{\text{Re}_0} + 12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8}} \left( \text{Pr}^{2/3} - 1 \right)}.$$

Следует отметить, что при конденсации  $dp/dx > 0$  давление по длине восстанавливается, что снижает устойчивость ламинарного течения. По этой причине можно приближенно использовать (8.26) с формулой Б.С. Петухова и его сотрудников до  $\text{Re}_0 \geq 1500$ .

Согласно (8.26) максимальный коэффициент теплоотдачи соответствует входу в канал:  $x = 1,0$ ,  $\alpha_{\text{cm}} = \alpha_0 (\rho'/\rho'')^{1/2}$ ; например, для воды при  $p = 0,6$  МПа  $\rho' = 910$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho'' = 3,17$  кг/м<sup>3</sup>,  $(\rho'/\rho'')^{1/2} \approx 17$ , при  $\alpha_0 = 3$  кВт/(м<sup>2</sup> · К) получен  $\alpha_{\text{cm}} = 51$  кВт/(м<sup>2</sup> · К). По мере уменьшения  $x$  коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{\text{cm}}$  падает (рис. 8.14). Обычно на типичной длине теплообменника  $l = 2 \div 4$  м массовое расходное паросодержание  $x$  снижается на 0,20—0,30, т.е. для полной конденсации требуется иметь три-четыре хода. Это обстоятельство успешно используется для поддержания высокого уровня интенсивности теплоотдачи во всем теплообменнике. Проходное сечение для

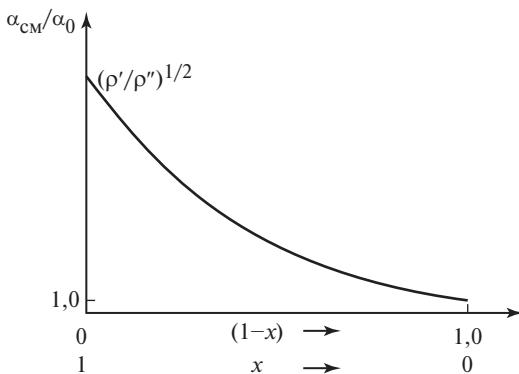


Рис. 8.14. Характер изменения коэффициента теплоотдачи при внутритрубной конденсации по длине трубы

конденсирующегося пара определяется как  $N_i \pi d^2 / 4$ , где  $N_i$  — число труб в  $i$ -м ходе,  $d$  — внутренний диаметр трубы. Уменьшая число труб в каждом последующем ходе, можно повышать  $\alpha_0$  (за счет роста скорости смеси) и таким путем компенсировать падение КТО со снижением паросодержания. Используя эту идею, в ЗАО НПВП «Турбокон» создали паропреобразователь с коэффициентом теплопередачи, превышающим 10 кВт/(м<sup>2</sup> · К).

В расчетах при изменении на длине канала паросодержания от  $x_1$  до  $x_2$  обычно используют среднеарифметическое значение

$$\bar{\alpha}_{12} = \alpha_0 \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + x_1 \frac{\Delta \rho}{\rho''} \right)^{1/2} + \left( 1 + x_2 \frac{\Delta \rho}{\rho''} \right)^{1/2} \right]. \quad (8.27)$$

Строго говоря, имея (8.26), несложно получить средненеинтегральное значение  $\bar{\alpha}_{12}$ . Но, учитывая приближенность подхода и достаточно небольшие изменения паросодержания в пределах одного расчетного участка, можно рекомендовать простое уравнение (8.27). Для рассмотренного выше примера [вода, 0,6 МПа,  $(\rho'/\rho'')^{1/2} \approx 17$ ] при  $x = 1$  имеем  $(1 + \Delta \rho \Delta / \rho'')^{1/2} \approx 17$ , а при  $x = 0,75$  получаем  $(1 + \Delta \rho \Delta / \rho'')^{1/2} \approx 14,7$ , так что среднее значение  $\bar{\alpha}_{12}$  отличается от крайних менее чем на 10 %.

## 8.7. Конденсация пара в промышленных аппаратах и методы ее интенсификации

### 8.7.1. Конденсация на пучках горизонтальных труб

Конденсаторы ТЭС и АЭС, как уже указывалось, — наиболее габаритные и металлоемкие теплообменные аппараты на станции. Типичный конденсатор блока средней мощности (300 МВт) — кожухотрубчатый теплообменник, содержащий 20 тыс. горизонтальных труб диаметром 18/16 мм, длиной 10—12 м.

При конденсации на пучке труб (независимо от компоновки пучка) конденсат, образующийся на верхних рядах труб, перетекает на ниже расположенные трубы. Средний КТО на одиночной трубе

$$\bar{\alpha} = 0,728 \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 g \Delta \rho h_{LG}}{v \Delta T D}} \varepsilon_T. \quad (8.186)$$

Важно отметить, что в этом случае, как и при конденсации на вертикальной плоскости, коэффициент теплоотдачи зависит от длины,

**Рис. 8.15. Схема конденсации на поверхности вертикального ряда горизонтальных труб**

которую проходит жидкость в пленке конденсата по закону  $\bar{\alpha} \sim H^{-1/4}$  или  $\bar{\alpha} \sim (\pi D)^{-1/4}$ . В пучке для труб, расположенных в одном вертикальном ряду (рис. 8.15), протяженность поверхности конденсации в направлении течения равна  $N(\pi D/2)$ , где  $N$  — число труб в ряду от верхней до текущей. В случае вертикальной поверхности участок длиной  $N(\pi D/2)$  можно представить как  $N$  плоских участков. Согласно (8.13а) отношение среднего коэффициента теплоотдачи для всей рассматриваемой плоской поверхности к среднему КТО на первом по ходу (верхнем) участке равно  $N^{-1/4}$ . Следовательно, при сохранении ламинарного режима течения с гладкой пленкой в вертикальном ряду труб средний КТО для всего пучка из  $N$  труб тоже определяется как

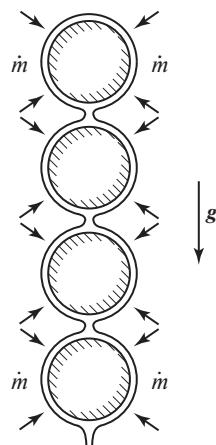
$$\bar{\alpha}_N = \bar{\alpha}_I N^{-1/4}. \quad (8.28)$$

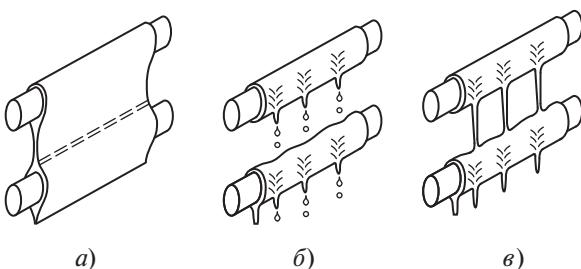
Здесь  $\bar{\alpha}_I$  — средний КТО в верхнем ряду, рассчитываемый согласно (8.18б), индекс  $N$  — номер ряда при отсчете сверху. При  $N = 16 = 2^4$  значение  $\bar{\alpha}_{16} = \frac{1}{2} \bar{\alpha}_I$ . Можно показать, что средний КТО в любом следующем за верхним горизонтальном ряду труб ( $i = N$ ) рассчитывается в этом случае как

$$\bar{\alpha}_{i=N} = \bar{\alpha}_I \left( N^{3/4} - (N-1)^{3/4} \right).$$

Ясно, что средний КТО на трубах любого ряда меньше, чем средний на пучке предшествующих труб.

Зависимость (8.28) предложил М. Якоб, строго следуя модели Нуссельта. Эксперименты показали, что фактически  $\bar{\alpha}_N$  уменьшается с номером ряда медленнее. Дело в том, что конденсат с вышележащих труб перетекает струями, каплями, которые возмущают пленку и повышают интенсивность теплоотдачи (рис. 8.16). Отразить этот эффект теоретически едва ли возможно. Предложены эмпирические формулы, из которых, видимо, наиболее надежная — это





**Рис. 8.16. Упрощенная (а) и действительная (б, в) картина стекания пленки конденсата в пучке горизонтальных труб**

формула Керна (1958 г.), сохраняющая структуру формулы Якоба, но с меньшим значением показателя степени:

$$\bar{\alpha}_N = \bar{\alpha}_I N^{-1/6}. \quad (8.28a)$$

В этой формуле по-прежнему  $\bar{\alpha}_N$  — средний КТО для вертикального ряда пучка из  $N$  труб.

Другой вопрос, возникающий при анализе теплоотдачи при конденсации пара в промышленном конденсаторе, — это влияние скорости пара. Из последней ступени паровой турбины пар поступает в верхнюю часть конденсатора при давлении около 5 кПа с весьма высокой скоростью — 50—70 м/с (и даже выше). При таком сочетании параметров трение со стороны потока пара влияет на течение пленки. Этот вопрос в 1950—1960-е годы достаточно подробно исследовался в ВТИ. Подытоживая результаты опытных исследований, Л.Д. Берман [3] подчеркивал, что для пучков горизонтальных труб нельзя получить однозначную зависимость среднего КТО со стороны пара «от осредненной тем или иным путем, а тем более от начальной скорости пара». Увеличение толщины пленки конденсата при его течении сверху вниз не только увеличивает термическое сопротивление, но и вызывает возмущения, даже турбулизацию. «Условия еще больше усложняются при содержании в паре даже весьма малой примеси неконденсирующегося газа».

Поскольку давление в межтрубном пространстве намного ниже атмосферного, а поверхность кожуха конденсатора огромная, неизбежны присосы воздуха из атмосферы. Если в паре есть даже небольшая доля воздуха, то по мере конденсации эта доля растет, так как воздух не конденсируется. Она максимальна в нижней части корпуса

конденсатора, где процесс конденсации пара должен завершаться. При определенных условиях (в отсутствие заметного макроскопического движения паровоздушной смеси) поступление пара к поверхности конденсации в основном определяется диффузией, т.е. процессом малой интенсивности. Известны опыты по конденсации неподвижного водяного пара, в которых наличие 1 % воздуха в паре приводило к двукратному снижению КТО. Конечно, в движущемся паре этот эффект не столь драматичен, но влияние неконденсирующихся газов на интенсивность конденсации всегда ощутимо и всегда отрицательно.

Очевидно, скорость пара больше влияет не на теплообмен по описанному в § 8.4 механизму, а на предотвращение накопления воздуха в конденсаторе. Для снижения этого отрицательного эффекта в конденсаторе осуществляют управление потоками пара; с помощью металлических листов исходный поток разделяется на несколько, причем так, что в некоторые зоны нижней части объема конденсатора обеспечивается подача пара с высокой скоростью. Это не позволяет воздуху скапливаться. Кроме того, с помощью эжекторов идет непрерывная откачка паровоздушной смеси, чтобы поддерживать заданный уровень разрежения и снижать возможную объемную долю воздуха. Отсос обычно осуществляется из нижней части объема конденсатора.

### 8.7.2. Методы интенсификации теплообмена при конденсации

Теплообмен при конденсации — процесс сам по себе весьма интенсивный, особенно когда речь идет о конденсации водяного пара (см. табл. 1.1 во вводной части курса). Проблема интенсификации теплообмена актуальна применительно к конденсации неподвижного пара неводных жидкостей. Коэффициент теплоотдачи согласно формулам (8.13а) и (8.18) зависит очень сильно от теплопроводности жидкости ( $\alpha \sim \lambda^{3/4}$ ). Если  $\lambda_{\text{воды}} \approx 0,65 \div 0,68 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ , то у углеводородов, хладонов, фторуглеродов  $\lambda \approx 0,06 \div 0,15 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ . Поэтому естественно, что типичный уровень коэффициентов теплоотдачи у этих веществ различается значительно: если при конденсации водяного пара  $\alpha = 3 \div 10 \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ , то для хладонов обычный уровень  $\alpha = 0,5 \div 1,5 \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

Основной путь интенсификации теплоотдачи при конденсации — микрооребрение. При этом оптимальный выбор размеров и формы

ребер при конденсации не только увеличивает площадь поверхности, но и влияет на механизм процесса. Для ребер простой геометрии, представленной на рис. 8.17, когда высота, ширина ребра и шаг между ребрами  $h, t, p \ll D$ , увеличение площади оребренной поверхности по сравнению с исходной гладкой (коэффициент оребрения) приближенно оценивается как

$$k_{\text{оп}} = \frac{F_{\text{оп}}}{F_{\text{гл}}} \approx 1 + \frac{2h}{p}.$$

Количество тепла, передаваемого оребренной поверхностью в сравнении с гладкой, т.е. эффективность оребрения  $\eta_{\text{оп}} = Q_{\text{оп}}/Q_{\text{гл}}$ , обычно меньше, чем коэффициент оребрения. При расчетах эффективности оребрения принято считать, что средний уровень интенсивности теплоотдачи на оребренной поверхности такой же, как на базовой гладкой; тогда при  $\alpha = \text{idem}$  эффективность оребрения  $\eta_{\text{оп}} \leq k_{\text{оп}}$ , причем равенство возможно лишь при  $\lambda_p = \infty$  (бесконечно теплопроводное ребро). В реальной ситуации поверхность ребер неизотермична; в случае конденсации средняя температура поверхности ребра  $\bar{T}_p > T_0$ , где  $T_0$  — температура в основании ребра.

При конденсации удается добиваться того, чтобы  $\eta_{\text{оп}} > k_{\text{оп}}$ , хотя неизотермичность ребра, конечно, присутствует. Достигается указанный эффект за счет повышения среднего коэффициента теплоотдачи при конденсации в сравнении с гладкой поверхностью. Поверхность конденсации делается волнистой. Для вертикальной трубы это показано на рис. 8.18. Форма пленки конденсата в целом повторяет форму

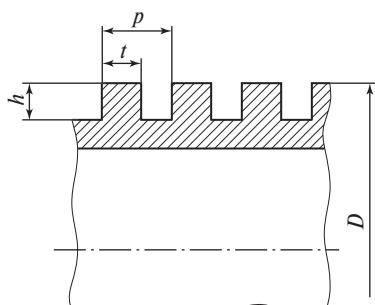
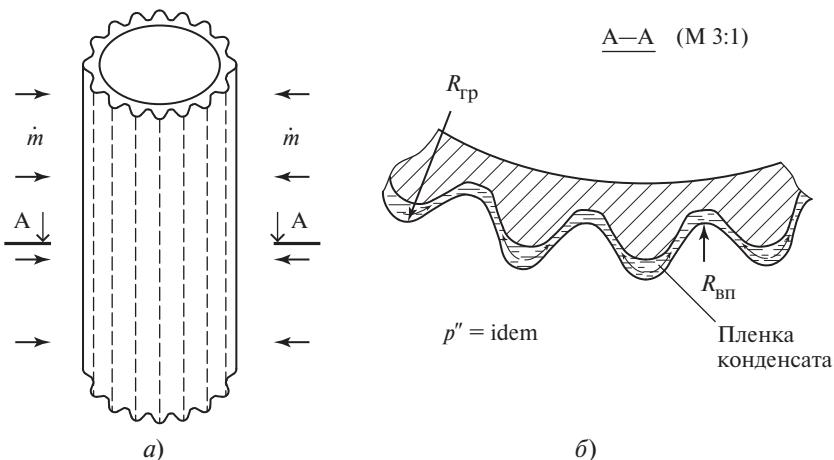


Рис. 8.17. Участок оребренной трубы



**Рис. 8.18. Схема конденсации пара на волнистой поверхности вертикальной трубы (а) и форма поверхности жидкой пленки в горизонтальном сечении трубы (б)**

оребренной поверхности. На искривленной поверхности жидкость—пар возникает лапласовский скачок давлений:

$$p_1 - p_2 = 2\sigma H = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Для рассматриваемого случая кривизна существует только в горизонтальной плоскости:  $2H = 1/R_1$ ; вторая кривизна  $1/R_2 = 0$ . Большее давление всегда наблюдается со стороны вогнутости поверхности раздела. В паре давление однородно:  $p'' = \text{idem}$ ; на гребнях волн  $p' > p''$ , во впадинах  $p' < p''$ , т.е.

$$p'_{\text{гр}} - p'' = \frac{\sigma}{R_{\text{гр}}}, \quad p'' - p'_{\text{вп}} = \frac{\sigma}{R_{\text{вп}}},$$

откуда

$$p'_{\text{гр}} - p'_{\text{вп}} = \sigma \left( \frac{1}{R_{\text{гр}}} + \frac{1}{R_{\text{вп}}} \right) > 0.$$

Таким образом, в направлении, практически перпендикулярном основному течению конденсата, в пленке существует градиент давле-

ния, заставляющий жидкость перетекать с гребней во впадины. Это означает, что на гребнях поддерживается очень высокая интенсивность конденсации, намного превосходящая по влиянию на общую теплоотдачу эффект снижения интенсивности конденсации во впадинах. В некоторых экспериментах — при определенном сочетании геометрических размеров, теплофизических свойств жидкости и плотности теплового потока — удается добиться  $\eta_{op} \approx 2k_{op}$ , а в сравнении с гладкой поверхностью  $\eta_{op}$  может достичь 5—8.

Естественно, таким же образом влияет на процесс микрооребрение на горизонтальных трубах. С практической точки зрения важно, чтобы выбранные геометрические размеры микрооребренной поверхности давали эффект не только в опытах на отдельном рабочем участке, но и в теплообменнике. Речь идет о том, чтобы при конденсации на пучках горизонтальных труб поддерживать высокую эффективность оребрения при больших расходах конденсата. Ясно, что в условиях, когда межреберное пространство затапливается полностью, может «пропасть» благоприятный эффект кривизны поверхности жидкости, так как затопленными окажутся даже вершины ребер. Для одиночных труб экспериментально показано, что межреберное пространство ( $p - t$ ) должно быть больше в тех случаях, когда поверхностное натяжение жидкости большое. Для воды это  $\sim 1,5$  мм, для хладонов  $\sim 0,5$  мм.

Но для пучков труб рекомендации могут быть скорректированы. В этом отношении показательна работа [65], в которой на одиночной трубе с накаткой (roped tube) ( $h = 1$  мм,  $p = 8$  мм) было получено увеличение теплоотдачи при конденсации на  $\sim 25\%$ , а в пучке с 25 трубами в вертикальном ряду средний КТО вырос лишь на 10 % в сравнении с пучком из гладких труб. Но неожиданно большой эффект дала навивка на трубы проволоки диаметром 1 мм, которая размещалась в канавках. В том же 25-трубном вертикальном ряду средний коэффициент теплоотдачи вырос на 80 % в сравнении с пучком гладких труб.

В целом, в поисках оптимальных способов интенсификации теплоотдачи многое остается «эвристическим», случайным. Трудно строить адекватные количественные модели процесса для поверхности сложной геометрии и расчетом предсказывать результаты того или иного метода воздействия на микроструктуру поверхности конденсации.

## Контрольные вопросы к главе 8

1. В каком диапазоне температур возможна конденсация пара в жидкую фазу? В каких технологических процессах имеют дело с объемной конденсацией?
2. При каких условиях на твердой поверхности происходит пленочная конденсация, а при каких — капельная? Какой процесс интенсивнее? Что такое псевдокапельная конденсация?
3. При каких допущениях решалась задача Нуссельта о конденсации на вертикальной плоскости?
4. К какому виду на основе принятых допущений упрощаются при решении задачи Нуссельта уравнения импульса (8.2) и энергии (8.3)?
5. Что является итогом решения уравнения энергии и уравнения импульса в задаче о конденсации на вертикальной плоскости?
6. На основе каких соотношений находится в задаче Нуссельта связь толщины пленки с тепловым потоком на стенке и с температурным напором?
7. Что изменяется в задаче Нуссельта при переходе от вертикальной плоскости к наклонной? Можно ли соотношения для конденсации на плоскости использовать для расчета конденсации на поверхности вертикального (или слабо наклонного) цилиндра?
8. В какой части решение задачи о конденсации на вертикальной плоскости остается справедливым для конденсации на поверхности горизонтального цилиндра? В чем основное различие этих двух задач?
9. Как определяются толщина пленки конденсата и локальный КТО на верхней образующей горизонтального цилиндра?
10. Как изменяется толщина пленки конденсата по периметру горизонтального цилиндра?
11. Чем отличаются формулы для среднего КТО на вертикальной плоскости и на горизонтальной трубе? Как следует ориентировать одиночную трубу большой длины, чтобы обеспечить больший расход конденсируемого пара?
12. В каких случаях при конденсации на неизотермической поверхности средний КТО останется неизменным, а в каких изменится, если в формулах (8.13а) и (8.18) использовать средний температурный напор?
13. Какие поправки следует ввести в формулы (8.13а) и (8.18), чтобы при необходимости учесть наличие капель в паре или переохлаждение конденсата? Насколько они существенны?
14. Как развиваются волны на поверхности пленки при конденсации на вертикальной стенке? Какое влияние они оказывают на теплообмен, как оно учитывается в расчетах?
15. Как влияет на теплообмен при конденсации трение со стороны движущегося пара?
16. Насколько оправданы допущения Нуссельта о пренебрежении конвективным переносом импульса и энергии?
17. Какие поправки практически необходимы к формулам Нуссельта для КТО при конденсации? Почему введение поправки на волновое движение требует итераций?

18. Какое число подобия может рассматриваться как определяющий критерий подобия при конденсации? Как строится безытерационная формула, учитывающая влияние волн на КТО при конденсации?
19. При каких условиях течение конденсата становится турбулентным? Каким путем Д.А. Лабунцов получил уравнение подобия для расчета локального КТО при турбулентном течении пленки?
20. Как выводится уравнение для расчета среднего КТО при смешанном течении пленки конденсата на протяженной поверхности?
21. В каких случаях реализуется на практике внутритрубная конденсация пара? Чем этот процесс отличается от конденсации практически неподвижного пара?
22. Какие сочетания режимов течения пара и конденсата наблюдаются при конденсации в вертикальных каналах и как в каждом случае следует рассчитывать КТО?
23. Какие структуры двухфазного потока возникают при конденсации в горизонтальных трубах? Как изменяется в этом случае локальный КТО по периметру трубы?
24. Как обосновывается уравнение Бойко—Кружилина для теплообмена при конденсации пара в трубе при турбулентном течении парожидкостной смеси?
25. Как изменяется КТО при конденсации пара по длине канала согласно формуле Бойко—Кружилина? Каким способом удается поддерживать высокий уровень КТО в многоходовом конденсаторе?
26. Как изменяется интенсивность теплоотдачи при конденсации на наружной поверхности в пучках труб по высоте пучка? Как рассчитывается средний КТО в вертикальном ряду труб?
27. Какими мерами предотвращают накопление воздуха в конденсаторах ТЭС и АЭС?
28. Какими способами интенсифицируют теплообмен при конденсации? Как удается добиваться эффективности оребрения, превышающей коэффициент оребрения?

# Глава 9

## ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ

### 9.1. Зарождение паровой фазы

#### 9.1.1. Общие положения

В отличие от испарения, кипение связано с образованием межфазной поверхности под уровнем жидкости. Так как межфазная поверхность обладает избыточной свободной энергией (энергия Гельмгольца поверхности раздела), то ее образование требует совершения работы. Практически это значит, что такая поверхность под уровнем может возникнуть только в метастабильной (перегретой по отношению к температуре насыщения  $T_s$ ) жидкости. Кипение возможно при  $T_{\text{т.т}} < T_{\text{ж}} < T_{\text{кр}}$ , т.е. в диапазоне температур, при котором вещество находится в жидком состоянии (см. рис. 8.1).

По отношению к равновесному состоянию [точка  $A$  на кривой насыщения  $p_s(T_s)$ ] (рис. 9.1) метастабильное состояние (в точке  $B$ ) может быть достигнуто двумя типичными способами:

изобарическим перегревом (линия  $AB$ ) до температуры  $T = T_\infty > T_s$ ;

изотермическим сбросом давления (линия  $CB$ ).

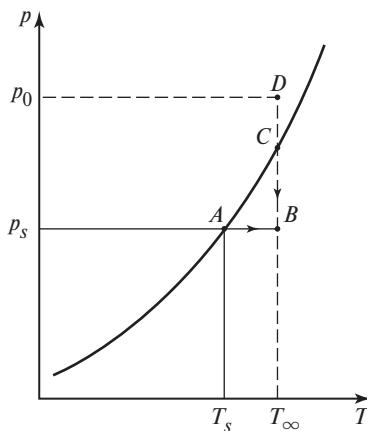


Рис. 9.1. Типичные способы достижения метастабильного состояния жидкости

Первый способ осуществляется в обычно реализуемом кипении, причем в этом случае перегревается тонкий слой жидкости у обогреваемой твердой поверхности. Второй случай в технике чаще всего связан с аварийным процессом разгерметизации сосудов под давлением. Это актуально для космических полетов и особенно для атомной энергетики. Одна из проектных аварий — авария с потерей теплоносителя (loss of coolant accident — LOCA). В этих случаях исходное состояние обычно — это некоторая точка  $D$  с исходным рабочим давлением  $p_0 > p_s(T_\infty)$  (состояние в точке  $C$ ).

У этого способа парообразования появились и технические приложения — струйные принтеры, мелкое диспергирование метастабильной воды для впрыска в ПГТУ и устройства пожаротушения.

### 9.1.2. Образование паровой фазы в объеме однородно перегретой жидкости

Рассмотрим условия равновесия парового объема с окружающим объемом метастабильной жидкости. Поскольку равновесию отвечает минимальная энергия системы, а межфазная поверхность обладает избыточной свободной энергией, то равновесный объем должен иметь минимальную поверхность, т.е. быть сферическим (рис. 9.2).

С учетом сказанного при давлении  $p' = p_\infty$  жидкость должна быть перегрета, т.е.

$$T_\infty = T_s(p_\infty) + \Delta T.$$

В условиях равновесия  $T'' = T_\infty$ ; в равновесном пузырьке

$$p'' = p_s(T'') \equiv p_s(T_\infty) = p_\infty + \Delta p.$$

С другой стороны, согласно формуле Лапласа

$$\Delta p = p'' - p' = \frac{2\sigma}{R_*},$$

где  $R_*$  — радиус равновесного парового пузырька.

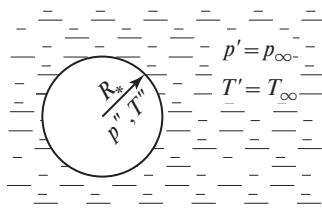


Рис. 9.2. Равновесный пузырек в перегретой жидкости

Уравнение кривой насыщения  $p_s(T_s)$  подчиняется закону Клапей-рона—Клаузиуса:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_s = \frac{s'' - s'}{v'' - v'} = \frac{h_{LG}}{T_s(v'' - v')} \approx \frac{h_{LG}}{T_s v''} = \frac{h_{LG} \rho''}{T_s},$$

так как  $v'' \gg v'$ ;  $v = 1/\rho$  — удельный объем.

Для относительно малых перегревов жидкости справедливо

$$\Delta p \equiv p'' - p_\infty \approx \Delta T \left(\frac{dp}{dT}\right)_s = \frac{h_{LG} \rho'' \Delta T}{T_s}.$$

Используя этот результат в формуле Лапласа, имеем для радиуса равновесного парового пузырька в перегретой жидкости:

$$R_* = \frac{2\sigma T_s}{h_{LG} \rho'' \Delta T}. \quad (9.1)$$

Большую информацию о процессе дает анализ изменения термодинамического потенциала системы при возникновении в метастабильной жидкости парового объема  $V$  с поверхностью  $F$ . Термодинамический потенциал (энергия Гиббса) системы

$$\Phi = H - TS = U + pV - TS;$$

для удельных величин

$$\varphi = h - Ts = u + Pv - Ts.$$

При возникновении парового объема изменение энергии Гиббса системы

$$\Delta\Phi = V\rho''\Delta\varphi + \sigma F, \quad (9.2)$$

где  $\sigma$  — удельная свободная энергия поверхности (поверхностное натяжение);  $\sigma F$  — энергия вновь созданной поверхности, причем  $\sigma F > 0$  всегда;  $\Delta\varphi = \varphi'' - \varphi'$  — разность удельных потенциалов Гиббса для возникшего пара и исходной метастабильной жидкости. Очевидно,

$$\varphi'(T_s + \Delta T, p_\infty) \approx \varphi'_s + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial T}\right)_p \Delta T + \dots;$$

$$\varphi''(T_s + \Delta T, p_\infty) \approx \varphi''_s + \left(\frac{\partial\varphi''}{\partial T}\right)_p \Delta T + \dots$$

Следовательно,

$$\Delta\varphi = \varphi''(T_\infty, p_\infty) - \varphi'(T_\infty, p_\infty) = \Delta T \left[ \left( \frac{\partial \varphi''}{\partial T} \right)_p - \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial T} \right)_p \right],$$

так как на линии насыщения  $\varphi''(T_s, p_\infty) = \varphi'(T_s, p_\infty)$ .

Из приведенного выше определения удельного потенциала Гиббса с учетом первого закона термодинамики следует

$$d\varphi = v \, dp - s \, dT, \text{ так что } \left( \frac{\partial \varphi}{\partial T} \right)_p = -s.$$

Тогда

$$\Delta\varphi = -(s'' - s')\Delta T \equiv -\frac{h_{LG}\Delta T}{T_s}.$$

Таким образом, (9.2) принимает вид

$$\Delta\Phi = -V \frac{h_{LG}\Delta T \rho''}{T_s} + F\sigma.$$

Первое слагаемое в этом выражении отрицательно; это значит, что возникновение паровой фазы в метастабильной жидкости «термодинамически выгодно», так как

$$\varphi''(T_s + \Delta T, p_\infty) < \varphi'(T_s + \Delta T, p_\infty).$$

Таким образом, первое слагаемое в (9.2) количественно характеризует метастабильность системы («глубину захода» в метастабильную область).

Так как паровой объем, возникший в метастабильной жидкости, должен быть сферическим, то  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ,  $F = 4\pi R^2$ . Тогда

$$\Delta\Phi = -\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{h_{LG}\rho''\Delta T}{T_s} + 4\pi R^2 \sigma. \quad (9.2a)$$

Каждому значению  $R$  отвечает свое значение  $\Delta\Phi$ , т.е. существует формальная непрерывная зависимость  $\Delta\Phi(R)$ , которую можно исследовать на экстремум:

$$\frac{d(\Delta\Phi)}{dR} = 0; \quad -4\pi R_*^2 \frac{h_{LG}\rho''\Delta T}{T_s} + 8\pi R_* \sigma = 0.$$

Отсюда снова получаем выражение (9.1).

Подставляя (9.1) в выражение для  $\Delta\Phi$  (9.2а), находим

$$\Delta\Phi_* = \frac{16}{3}\pi \frac{\sigma^3 T_s^2}{(h_{LG}\rho''\Delta T)^2}. \quad (9.3)$$

Зависимость (9.2а) представлена на рис. 9.3. Восходящая часть зависимости  $\Delta\Phi(R)$  не может быть реализована в реальном непрерывном процессе, так как естественные процессы не могут протекать с приращением термодинамического потенциала. Любой паровой объем с характерным размером  $R < R_*$  должен исчезнуть, «схлопнуться». Только пузырьки с  $R > R_*$  могут быть (гипотетически) наблюдаемы в эксперименте, причем они должны быстро расти.

Отсюда понятны различные эпитеты, которые определяют величину  $R_*$  — «равновесный», «критический», «минимальный» радиус парового пузырька (зародыша). Фактически это скорее физическая абстракция, чем реально наблюдаемый объект, так как бесконечно малое изменение размера пузырька с радиусом  $R = R_*$  ведет либо к его исчезновению, либо к росту.

Формула (9.3) справедлива для малых перегревов жидкости, когда в разложении  $\phi(T)$  можно ограничиться линейными членами. Более общим является выражение

$$\Delta\Phi_* = \frac{16}{3} \frac{\sigma^3}{(\Delta\phi)^2 \rho''^2}.$$

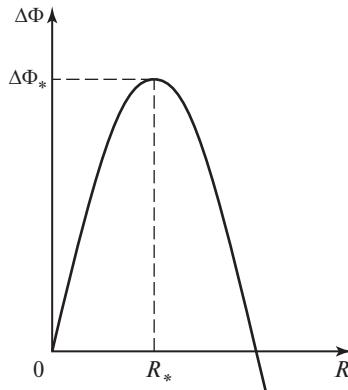


Рис. 9.3. Зависимость изменения потенциала Гиббса при возникновении парового зародыша от его размера

Из сказанного ясно, что для реального появления паровой фазы в метастабильной жидкости паровой объем критического размера  $R_*$  должен возникнуть «сразу», скачком. По Гиббсу, это может произойти посредством флуктуации плотности, в результате которой в конечном объеме собирается сразу необходимое число молекул с характерной скоростью теплового движения, отвечающей насыщенному пару. Вероятность этого события пропорциональна  $\exp [-\Delta\Phi_*/(k_B T)]$ . Безразмерный комплекс  $\Delta\Phi_*/(k_B T) = G$  — число Гиббса;  $k_B$  — постоянная Больцмана.

Число паровых зародышей, возникающих в единице объема в единицу времени:

$$J = N_v B_1 \exp(-G), \quad (9.4)$$

где  $N_v = O(10^{28})$  — число молекул в единице объема,  $\text{м}^{-3}$ . Кинетический множитель  $B_1$  характеризует скорость перехода паровым зародышем порогового значения  $R_*$ ; его значение имеет порядок  $10^{10}—10^{11} \text{ с}^{-1}$ .

Парообразование в объеме однородно перегретой чистой (т.е. лишенной готовых зародышей новой фазы) жидкости носит название *гомогенная нуклеация*. Уравнение (9.4) показывает, что гомогенная нуклеация носит пороговый характер. Действительно, рассмотрим в качестве примера условия парообразования в перегретой воде при давлении  $p = 0,1 \text{ МПа}$ ,  $\Delta T = 10 \text{ К}$ . Согласно (9.1)

$$R_* = \frac{2\sigma T_s}{h_{LG}\rho''\Delta T} \approx \frac{2 \cdot 5,9 \cdot 10^{-2} \cdot 373}{2,26 \cdot 10^6 \cdot 0,59 \cdot 10} \approx 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Объем равновесного зародыша пара

$$V_* = \frac{4}{3}\pi R_*^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3,3 \cdot 10^{-18} \approx 1,5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^3.$$

Если ориентироваться на приведенное выше значение  $N_v$ , то в критическом объеме  $V_*$  парового зародыша содержится примерно  $1,5 \cdot 10^{12}$  молекул; другими словами, столько «газоподобных» (термин известного советского физика И. Френкеля [43]) молекул должны одновременно «собраться» в одном месте внутри объема перегретой жидкости. Несложно понять на качественном уровне и убедиться расчетом по (9.4), что событие это совершенно невероятное.

Только при больших  $\Delta T$  (большой метастабильности) уравнение (9.4) дает конечное число возникших паровых зародышей, т.е. число  $G$  уменьшается до значений, при которых вероятность соответствующей флуктуации плотности становится конечной. Практически необходимо, чтобы значение  $G$  снизилось примерно до 50. Тогда  $J \approx \approx 10^{18} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ , т.е. процесс парообразования в объеме станет массовым. Важно, что в окрестности порогового значения  $\Delta T$  увеличение его всего на 1 К дает увеличение  $J$  на шесть—девять порядков. Легко видеть, что уменьшение  $\Delta T$  на 2 К ведет к снижению  $J$  до значений, практически не регистрируемых в опытах. Это обстоятельство и позволяет экспериментально определять температуру гомогенной нуклеации с достаточно высокой точностью.

Эта температура близка к имеющей ясный термодинамический смысл температуре спинодали  $T_{\text{сп}} = T_{\text{lim}}$ ; ее другое название — температура предельного перегрева жидкости (граница абсолютной неустойчивости жидкого состояния вещества). Теория гомогенной нуклеации разрабатывалась в первой половине XX в., в первую очередь, специалистами немецкой и отечественной научных школ (Volmer, Doering, Зельдович, Френкель). В относительно недавнее время (1960—1980-е годы) академик В.П. Скрипов (см. [37, 38, 42]) создал в СССР научное направление по экспериментальному и теоретическому исследованию метастабильных состояний, остающееся и сегодня основным содержанием деятельности института теплофизики УрО РАН (Уральского отделения Российской академии наук).

В экспериментах достичь  $T_{\text{lim}}$  возможно только при условии исключения парообразования на готовых центрах. В работах уральских ученых созданы и успешно используются несколько методов определения температуры предельного перегрева жидкости: импульсный нагрев [за время  $O(1 \text{ мкс})$ ]; всплытие капли испытуемой жидкости в мензурке с «материнской» жидкостью, в которой поддерживается положительный вертикальный градиент температуры, создание отрицательного (растягивающего) давления — трубка Бергло и др.

Для большинства исследованных жидкостей установлено вполне удовлетворительное согласие результатов измерения  $T_{\text{lim}}$  с теорией. Для воды, которая является не только самой важной для человека жидкостью, но и, видимо, наиболее сложной, различие расчетного и измеренного значений  $T_{\text{lim}}$  наибольшее. Расчеты дают для атмосферного давления  $T_{\text{lim}} \approx 310 \div 312 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , т.е. предельный перегрев  $\Delta T_{\text{lim}} = 210 \div 212 \text{ K}$ , тогда как в экспериментах вскипание происходит при перегревах, примерно на 20 K меньших. (Но при этом в струйных

принтерах, где практически успешно используется эффект гомогенной нуклеации, при конструировании закладывается перегрев поверхности микронагревателя, отвечающий расчетному значению  $T_{\text{lim}}$ ).

В технических устройствах парообразование реализуется на обогреваемой твердой поверхности (гетерогенное вскипание); оно происходит при небольших перегревах относительно температуры насыщения. Почему?

### 9.1.3. Парообразование на твердой стенке (при кипении)

Зарождение парового зародыша в метастабильной жидкости на твердой стенке отличается от парообразования в объеме тем, что часть новой поверхности раздела  $F$  (вновь созданной) приходится на контакт пар—стенка (площадь  $F_c$  на рис. 9.4). Таким образом, полное приращение свободной энергии (энергии Гельмгольца) поверхности

$$(F - F_c)\sigma + (\sigma_{\text{т.п}} - \sigma_{\text{т.ж}})F_c = \sigma F \left[ 1 - \frac{F_c}{F} (1 - \cos \theta) \right].$$

Здесь использована формула Юнга, согласно которой  $\sigma_{\text{т.п}} - \sigma_{\text{т.ж}} = \sigma \cos \theta$ . Изменение термодинамического потенциала (энергии Гиббса) метастабильной жидкости при возникновении на твердой стенке парового зародыша запишется, следовательно, как

$$\Delta\Phi = V\rho''\Delta\varphi + \sigma F \left[ 1 - \frac{F_c}{F} (1 - \cos \theta) \right]. \quad (9.5)$$

Отличие этого уравнения от аналогичного соотношения (9.2) для возникновения парового зародыша в объеме метастабильной жидкости состоит в наличии множителя в квадратных скобках, отражающего влияние на парообразование твердой стенки. При этом уравне-

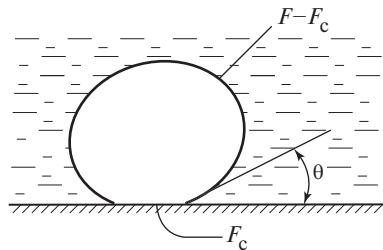


Рис. 9.4. Паровой зародыш на твердой стенке

ние (9.5) позволяет качественно объяснить все наблюдаемые в опытах эффекты.

*Влияние смачиваемости.* При  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = 1$  (абсолютная смачиваемость) выражение (9.5) переходит в (9.2). В этом случае стенка не дает преимущества для появления паровых зародышей в сравнении с объемом жидкости.

Гипотетический случай (поскольку, в отличие от абсолютной смачиваемости, абсолютная несмачиваемость практически не реализуема)  $\theta = \pi$ ,  $\cos \theta = -1$  ведет к выводу о возможности зарождения паровой фазы без конечного перегрева  $\Delta T$ . Действительно, легко представить большой по площади плоский паровой слой, у которого  $F_c/F = 1/2$ , так что выражение в квадратных скобках обращается в нуль, т.е. энергетический барьер образования паровой фазы исчезает. Качественно эта тенденция полностью подтверждена в опытах.

В 1955 г. были опубликованы данные (Аверин, Кружилин) о начале кипения воды при атмосферном давлении на поверхности из нержавеющей стали: на чистой поверхности кипение начиналось при  $\Delta T_{h,k} = 5 \div 7$  К, а, когда поверхность обогреваемой трубы покрывалась тонким слоем турбинного масла,  $\Delta T_{h,k}$  снижался до 1—2 К. В экспериментах МЭИ (1968—1976 гг.) по кипению воды при доатмосферных давлениях (1—5 кПа) на чистой металлической поверхности закипание требовало огромных перегревов стенки ( $\Delta T_{h,k} = 30 \div 50$  К); перфорированная пленка из фторопласта, плотно прижатая к обогреваемой поверхности, снижала  $\Delta T_{h,k}$  до 5—8 К.

Недавние эксперименты американских исследователей [56] оказались уникальными, поскольку в них впервые в стационарных условиях кипение на обогреваемой твердой поверхности начиналось только при достижении температуры предельного перегрева жидкости. Исследовалось кипение фторуглерода  $C_6F_{14}$  (торговая марка FC72) на силиконовых микронагревателях  $0,27 \times 0,27$  мм, смачиваемость поверхности этой жидкостью абсолютная. В экспериментах небольшими ступеньками увеличивали плотность теплового потока на нагревателях, на каждом уровне нагрузки делалась 20-минутная выдержка для достижения стационарного состояния. Последний стационарный режим без кипения зафиксирован при  $T_c = 135,7$  °C. Следующее увеличение нагрузки с ростом температуры поверхности на 0,3 К приводило к бурному вскипанию; после чего наступало новое стационарное состояние уже при развитом кипении с температурой стенки  $T_c$  примерно на 40 К ниже. Температура поверхности, при

которой происходило закипание, точно соответствовала  $T_{\text{lim}} = 136^\circ\text{C}$ , температура нормального кипения фторуглерода марки FC72  $T_s = 56^\circ\text{C}$ .

Вместе с тем этот случай, по-видимому, единственный, когда без иных мер, предотвращающих более раннее парообразование, на абсолютно смачиваемой поверхности удалось достичь температуры поверхности, равной температуре предельного перегрева жидкости. Жидкий гелий, как упоминалось в предыдущей главе, смачивает абсолютно любую твердую поверхность. Тем не менее, гелий при атмосферном давлении на металлических поверхностях закипает при  $\Delta T = T_c - T_s \approx 0,02\text{ K}$ , тогда как  $\Delta T_{\text{lim}} = 0,53\text{ K}$ . (Заметим, что температура нормального кипения гелия  $T_s \approx 4,2\text{ K}$ , а критическая  $T_{\text{кр}} = 5,2\text{ K}$ .) Качественное объяснение такого расхождения теоретических предположений, основанных на термодинамическом соотношении (9.5), и результатов измерений может быть следующим. Равновесный паровой зародыш очень мал: для гелия  $R_* \approx 10 \div 100\text{ нм}$ ; это означает, что для возникновения зародыша при средней абсолютной смачиваемости  $\theta = 0$  достаточно иметь микроскопические участки с пониженной смачиваемостью. К сожалению, пока наши знания свойств поверхности не позволяют количественно объяснить и предсказать происхождение таких участков. Поэтому сегодня нам доступно только качественное [на основе уравнения (9.5)] объяснение влияния смачиваемости поверхности на парообразование.

*Влияние микрошероховатости.* Из (9.5) следует, что при любой конечной смачиваемости ( $\theta > 0$ ) выражение в квадратных скобках меньше 1, причем оно уменьшается с ростом  $F_c/F$ . Из рис. 9.5 видно, что при фиксированном угле  $\theta$  отношение  $F_c/F$  растет при переходе от выступа поверхности к плоскости и далее — к впадине. Вместе с тем, и расчеты, и эксперимент доказывают, что главным является эффект смачиваемости. Выше говорилось, что при  $\theta = 0$  множитель в квадратных скобках в (9.5) равен единице при любых  $F_c/F$ . Опыты

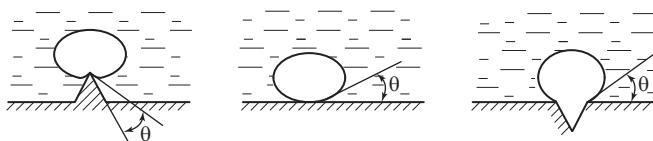


Рис. 9.5. Зарождение парового пузырька на элементах микрошероховатости стенки

Корти и Фауста (Corty, Foust, 1954 г.) показали, что начало кипения на полированных поверхностях может произойти даже при меньших  $\Delta T$ , чем на шероховатых. Но при начавшемся кипении при  $q = \text{idem}$  температура  $\Delta T_{\text{шер}} < \Delta T_{\text{гл}}$ ; при этом на шероховатой стенке наблюдается гистерезис кривой кипения, т.е. различные зависимости  $q(\Delta T)$ , где  $\Delta T = T_c - T_s$ , при подъеме и снижении  $q$  (рис. 9.6, а). Корти и Фауст, видимо, первыми дали объяснение этому явлению: поверхностные микропадины способны удерживать некоторый объем пара  $V_{\text{ост}}$  после отрыва пузырька, как это схематически показано на рис. 9.6, б. Для начальной активации центра парообразования требуется больший перегрев  $\Delta T_{\text{н.к.}}$ , а для поддержания впадин в активном состоянии перегрев требуется меньший.

Есть много экспериментальных фактов, подтверждающих адекватность этой модели реальности:

наличие фиксированных центров кипения (при небольших плотностях теплового потока  $q$ ), от которых поднимаются цепочки пузырьков, что можно наблюдать не только с помощью скоростной съемки, но и непосредственно;

эксперименты, в которых при сканировании обнаружили отложение накипи вокруг микропадин на полированной поверхности после длительного кипения дистиллированной воды (атмосферное давление,  $q \approx 150 \text{ кВт/м}^2$ );

прямые наблюдения за действием одиночной впадины в виде малого стеклянного капилляра;

многократные наблюдения гистерезиса кривой кипения.

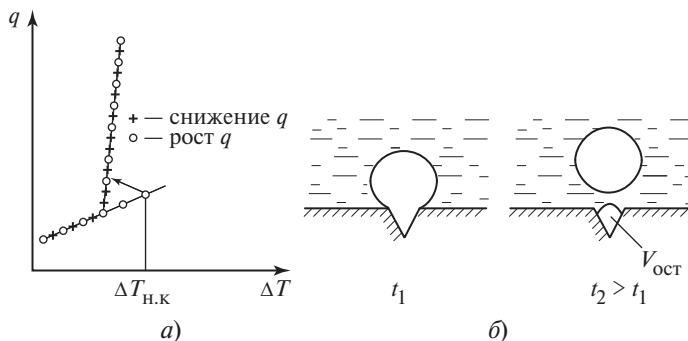
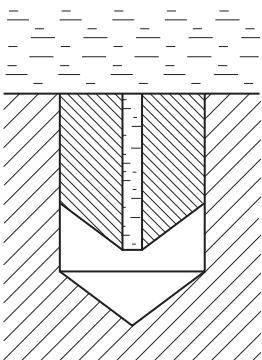


Рис. 9.6. Гистерезис кривой кипения (а) и схема действия активной впадины на обогреваемой стенке (б)



**Рис. 9.7. Конструкция грибовидной микровпадины**

Но самым убедительным является то, что искусственная шероховатость, обеспечивающая условия удержания паровых объемов во впадинах, очень сильно снижает температуру  $\Delta T_{\text{н.к}}$  и увеличивает плотность центров парообразования на поверхности  $n_F$ , м<sup>-2</sup>.

По-видимому, первыми эффективность так называемых *re-entrant cavities* (впадины с повторным входом) исследовали Марто и Розеноу (Marto, Rohsenow, 1966 г.). Кипение натрия на гладких и любых шероховатых поверхностях требует очень больших значений температуры  $\Delta T_{\text{н.к}}$  (около 100 К). Специально созданная грибовидная впадина (*mushroom shaped cavity*) обеспечила стабильное кипение при низких  $\Delta T_{\text{н.к}}$  (примерно 10 К). Конструкция такой впадины показана на рис. 9.7. В стенке нагревателя высверливалось глухое отверстие диаметром 1 мм; в него вставлялась втулка с отверстием диаметром около 0,1 мм — получается «перевернутый гриб». Чтобы жидкость могла войти во внутреннюю полость впадины, кривизна межфазной поверхности должна изменить знак, т.е. пройти через бесконечность. Конечно, при большом давлении такую впадину смыть несложно, но в обычных условиях кипения в ней постоянно сохраняется паровой объем, т.е. сохраняется межфазная поверхность, для создания которой и требуется обычно значительный перегрев стенки и прилегающей жидкости.

Первоначально казалось, что столь сложная конструкция активной впадины для поддержания кипения долго останется академическим результатом. Однако в последующие годы разработаны промышленные технологии, с помощью которых на поверхности создается множество впадин с повторным входом. Один из способов, разработанный и освоенный в МГТУ им. Н.Э. Баумана, основан на использовании специального типа резьбы — без подрезания стружки; прохождение обрабатываемой поверхности в двух направлениях (левая и правая резьба) создает множество резервуарных (грибовидных) впадин. За рубежом существуют коммерческие технологии получения поверхностей, предназначенных для интенсификации кипения (поверхности EXEL, GEWA и др.).

Первоначально казалось, что столь сложная конструкция активной впадины для поддержания кипения долго останется академическим результатом. Однако в последующие годы разработаны промышленные технологии, с помощью которых на поверхности создается множество впадин с повторным входом. Один из способов, разработанный и освоенный в МГТУ им. Н.Э. Баумана, основан на использовании специального типа резьбы — без подрезания стружки; прохождение обрабатываемой поверхности в двух направлениях (левая и правая резьба) создает множество резервуарных (грибовидных) впадин. За рубежом существуют коммерческие технологии получения поверхностей, предназначенных для интенсификации кипения (поверхности EXEL, GEWA и др.).

*Влияние режимных параметров.* При кипении в условиях свободного движения (pool boiling) для данного вещества в качестве режимных параметров задаются плотность теплового потока  $q$  и давление  $p$  ( $p_{\text{т.т}} < p < p_{\text{кр}}$ ). При заданном  $p$  постепенный рост  $q$  ведет к росту температуры  $T_c$ ; при  $\Delta T = T_c - T_s = \Delta T_{\text{н.к}}$  начинается кипение. Дальнейший рост теплового потока  $q$  ведет к повышению  $\Delta T$ , что согласно (9.1) уменьшает радиус  $R_*$  и увеличивает плотность центров парообразования  $n_F$ .

Изменение давления  $p$  сказывается, прежде всего, на плотности пара  $\rho''$  (при  $p \ll p_{\text{кр}}$   $\rho'' \sim p$ ). При высоких приведенных давлениях ( $p/p_{\text{кр}}$ ) радиусы  $R_*$  очень малы ( $10^{-8}—10^{-7}$  м). Для начала кипения достаточны очень низкие  $\Delta T$  (см. выше пример для гелия, для которого атмосферное давление соответствует  $p/p_{\text{кр}} \approx 0,45$ ). При начавшемся кипении очень высока плотность  $n_F$  потенциальных центров кипения, т.е. микровпадин с размером, меньшим  $R_*$ , очень много. При длительном наблюдении обнаружено, что при высоких  $p/p_{\text{кр}}$  одновременно действует только часть этих потенциально активных центров, примерно 10 % общего числа центров, бывших активными в какой-то момент.

Снижение давления не просто увеличивает  $R_*$  и снижает  $n_F$ , но в некотором диапазоне  $p/p_{\text{кр}}$  ведет к качественным изменениям процесса парообразования. Крупные впадины (с радиусом устья  $R > 10$  мкм) не способны удерживать пар после отрыва пузырька, благодаря чему при некотором давлении на поверхности нагрева исчезают фиксированные активные центры парообразования (эксперименты В.И. Деева, 1965 г.). Толчок к его исследованиям с водой при доатмосферных давлениях дали эксперименты по кипению щелочных металлов. Расчетные значения  $R_*$  для них составляют десятки микрометров даже при высоких  $\Delta T$ ; стабильного пузырькового кипения при относительно низких  $q$  добиться не удается. Процесс сопровождается длительными (минутными) паузами в генерации пузырей. В эти отрезки времени жидкий металл перегревается во всем объеме. Затем где-то (не обязательно даже на поверхности нагрева) возникает паровой пузырь, растущий очень быстро; наблюдаются значительные пульсации давления, температура стенки  $T_c$  пульсирует с амплитудой в десятки кельвинов. Снижение  $T_c$  после вскипания снова ведет к паузе в парообразовании. В опытах с водой, спиртами при давлении ниже атмосферного все эти явления зафиксированы.

рованы визуально, в том числе с помощью скоростной киносъемки. Эксперименты МЭИ показали эффективность гидрофобных покрытий для снижения температуры  $\Delta T_{\text{н.к}}$  и стабилизации парообразования, а также для многократного роста КТО.

*Влияние растворенных газов.* Если в жидкости присутствует растворенный газ, то давление в паровом зародыше  $p'' = p_{\text{г}} + p_{\text{п}}$ . Так как растворимость газов снижается с ростом температуры, а при  $T' = T_s$  растворимость газов равна нулю, то ясно, что еще до наступления состояния насыщения жидкость может стать метастабильной, в том смысле что содержание газа может превышать предел растворимости. Газовые (парогазовые) пузырьки образуются легко, еще в процессе нагрева жидкости. Это можно наблюдать на поверхности электрического нагревателя в стеклянном стакане: крупные, медленно растущие пузырьки — это парогазовые пузыри. Их появление — это не кипение, а предвестник кипения.

Ясно, что в процессе кипения газ удаляется. Эксперименты ИВТ РАН (Ю.А. Зейгарник, В.Д. Литвинов) показали, что насыщение натрия аргоном стабилизирует процесс парообразования лишь на короткое время (около 20 мин). При начале кипения обычных (нормально кипящих) жидкостей (1—2 ч как минимум) идет процесс старения (aging) поверхности, плотность центров парообразования  $n_F$  и коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  уменьшаются. При высоких давлениях старение может продолжаться до 20 ч (работы Д.А. Лабунцова с сотрудниками).

Итак, из изложенного ясно, что качественно закономерности парообразования находят объяснение и их понимание позволяет (в некоторых пределах) управлять этим процессом. Но количественной теории, объясняющей, каким именно образом возникают на обогреваемой твердой поверхности участки с пониженной смачиваемостью, не существует. Пока, в частности, нет ответа на вопросы, почему гелий закипает (давление  $p = 0,1$  МПа) при  $\Delta T = 0,02$  К, а не при  $\Delta T_{\text{lim}} = 0,53$  К или почему вода на «nanoнагревателе» закипает лишь при  $\Delta T = 20 \div 24$  К (эксперименты Theofanous et al.).

## 9.2. Рост паровых пузырьков в объеме равномерно перегретой жидкости

### 9.2.1. Предельные схемы роста

Если в перегретой (относительно температуры насыщения  $T_s$ ) жидкости возникает паровой пузырек, радиус которого  $R$  превосходит критический размер  $R_*$ , то такой пузырек начинает расти в объ-

еме за счет испарения жидкости внутрь пузырька. Критический (равновесный) радиус парового пузырька отвечает состоянию неустойчивого равновесия пузырька с окружающей перегретой жидкостью: температура пара  $T''$  равна температуре жидкости  $T_\infty$ , давление в паре  $p'' = p_s(T_\infty)$  и отличается от давления в жидкости на лапласовский скачок. С точки зрения термодинамики никаких ограничений на скорость роста пузырька не накладывается.

Скорость увеличения объема пузырька при  $R > R_*$  лимитируется сопротивлением расталкиваемой жидкости (динамические эффекты) и интенсивностью испарения жидкости на межфазной поверхности (энергетические эффекты). В свою очередь, динамические эффекты обусловлены инерцией жидкости и ее вязкостью, а энергетические — условиями подвода тепла к межфазной поверхности и кинетикой процесса испарения. Все перечисленные эффекты действуют при росте парового пузырька одновременно, однако в практических задачах лишь некоторые или даже один из них могут стать преобладающими. Поэтому удобно рассмотреть четыре предельные схемы роста парового пузырька, каждая из которых соответствует лишь одному из упомянутых физических эффектов:

динамическая инерционная схема;

динамическая вязкая схема;

энергетическая тепловая схема;

энергетическая молекулярно-кинетическая схема.

Эта классификация впервые была предложена Д.А. Лабунцовым [21]. Реальная скорость роста парового пузырька всегда будет меньше (или в пределе равна) наименьшей из величин, определяемых предельными схемами, что делает введенную классификацию практически весьма полезной.

Динамическая вязкая схема отвечает случаю, когда перепад давлений пара в пузырьке [ $p'' = p_s(T_\infty)$ ] и в жидкости ( $p_\infty$ ) в любой момент времени уравновешивается нормальной компонентой тензора вязких напряжений в жидкости на границе пузырька:

$$p'' - p_\infty = -2\mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)_{r=R} = 4\mu \dot{R}/R,$$

где  $\dot{R} \equiv dR/dt$ ,  $u_r = \dot{R} \frac{R^2}{r^2}$ , что будет обосновано ниже [формула (9.6)]. Эта предельная схема могла бы определять скорость роста

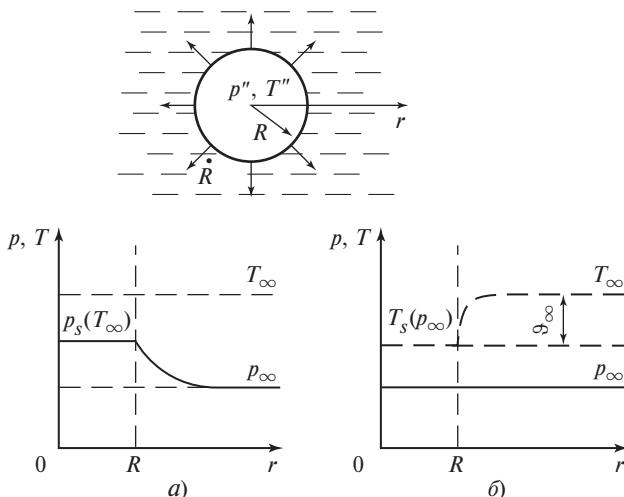
парового пузырька в очень вязкой жидкости и при малых значениях радиуса пузырька. Оценки показывают, что в практических задачах эффекты вязкости играют пренебрежимо малую роль в процессе роста пузырька.

Молекулярно-кинетическая схема роста может стать определяющей только при крайне низких значениях коэффициента испарения — конденсации  $\beta$  (см. п. 7.4.2), тогда как при типичных для чистых жидкостей значениях  $\beta \approx 1$  роль кинетических эффектов в процессе роста пузырька незначительна.

Практически важными являются динамическая инерционная и энергетическая тепловая предельные схемы роста парового пузырька, которые и рассматриваются ниже.

### 9.2.2. Динамическая инерционная схема роста парового пузырька

Эта схема предполагает, что подвод тепла к границе раздела фаз ничем не ограничен и внутри пузырька поддерживается постоянное давление  $p'' = p_s(T_\infty)$ , где  $p_s(T_\infty)$  — давление насыщения при температуре жидкости  $T_\infty$  вдали от пузырька (рис. 9.8, а). При этом темпе-



**Рис. 9.8. Предельные схемы роста паровых пузырьков в перегретой жидкости:**

*а* — динамическая инерционная; *б* — тепловая энергетическая

ратура  $T_\infty$  поддерживается всюду постоянной как в жидкости, так и в паровом пузырьке. Таким образом, в соответствии с динамической инерционной схемой рост пузырька обусловлен постоянным перепадом давлений  $\Delta p = p'' - p_\infty$ ; сопротивление росту оказывает инерция приводимой в движение жидкости.

Поле скоростей при сферически симметричном расширении паровой полости находится из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости, которое в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) = 0,$$

а его интеграл (в случае непроницаемой поверхности пузырька)

$$r^2 u = C(t) = R^2 u_R \approx R^2 \dot{R}.$$

Здесь постоянная интегрирования  $C(t)$  определена через радиус и скорость изменения радиуса оболочки. При непроницаемой поверхности пузырька  $u_R = \dot{R}$  точно; в п. 7.3.2 показано, что для проницаемой границы  $u_R = \dot{R} \left(1 - \frac{\rho''}{\rho'}\right)$ . В практических важных случаях

$$\rho' \gg \rho'', \quad \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} \approx 1.$$

Таким образом, распределение радиальной скорости в жидкости:

$$u(r, t) = \dot{R} \frac{r^2}{R^2}. \quad (9.6)$$

При этом на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) жидкость остается неподвижной.

В отсутствие вязкой диссипации изменение кинетической энергии жидкости равно работе сил давления по увеличению объема растущего пузырька. Имея поле скорости в жидкости (9.6), несложно рассчитать кинетическую энергию движения жидкости во всем объеме. Общее выражение для кинетической энергии жидкости

$$E = \rho' \int_R^\infty \frac{u^2}{2} 4\pi r^2 dr.$$

Подставляя в это соотношение выражение для скорости  $u$  по формуле (9.6) и выполняя интегрирование, находим

$$E = 2\pi\rho'R^3\dot{R}^2. \quad (9.7)$$

Приращение кинетической энергии  $dE$  при увеличении объема пузырька на  $dV$  равно работе сил избыточного давления  $(p'' - p_\infty)$ , т.е. имеем

$$dE = (p'' - p_\infty) dV, \quad (9.8)$$

где  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Соотношение (9.8) представляет собой энергетическую интерпретацию известного уравнения Рэлея (см., например, [24]):

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_R - p_\infty}{\rho'}, \quad (9.9)$$

$$\text{где } \ddot{R} = \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d\dot{R}}{dt}.$$

Нетрудно убедиться, что оба соотношения (9.8) и (9.9) тождественны.

В рамках предельной инерционной схемы роста, когда  $\Delta p = p'' - p_\infty = \text{const}$ , уравнение (9.8) интегрируется элементарно при начальном условии:  $t = 0, R = R_*, E = 0$ . Имеем

$$E = \Delta p(V - V_*),$$

$$\text{где } V_* = \frac{4}{3}\pi R_*^3.$$

С учетом (9.7) получаем

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{3\rho'}} \left(1 - \frac{R_*^3}{R^3}\right)^{1/2}.$$

Поскольку критический радиус пузырька  $R_*$  очень мал (в типичных условиях порядка  $10^{-6}$  м), то второе слагаемое в круглых скобках очень быстро после начала роста становится ничтожно малым; практически принимают, что пузырек растет из точки, т.е. начальный объем его равен нулю. Тогда итоговое соотношение динамической инерционной схемы принимает вид

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{3\rho'}}. \quad (9.10)$$

Если не пренебрегать различием скорости границы пузырька и скорости жидкости у границы, то скорость роста пузырька согласно инерционной динамической схеме выражается формулой

$$\dot{R} = \frac{\rho'}{\rho' - \rho''} \sqrt{\frac{2\Delta p}{3\rho'}}. \quad (9.10a)$$

Таким образом, при поддержании постоянного перепада давлений обеспечивается постоянная скорость роста пузырька,  $\dot{R} = \text{const}$ , радиус его увеличивается пропорционально времени:

$$R = \dot{R}t.$$

Используемое в инерционной динамической схеме условие однородности температуры во всей рассматриваемой области, включая паровой пузырек, означает фактически, что жидкость характеризуется бесконечно большой теплопроводностью: только при этом условии она может оставаться изотермичной при высокой интенсивности отвода тепла на межфазной поверхности. Ясно, что в реальном процессе это условие не выполняется. Численные эксперименты показывают, однако, что очень короткий (менее  $10^{-3}$  с) период роста пузырька приближенно описывается законом (9.10). Для жидких металлов этот отрезок времени, очевидно, должен быть несколько большим.

### 9.2.3. Тепловая энергетическая схема роста

Тепловая энергетическая схема роста (рис. 9.8, б) основана на предположении, что скорость роста пузырька полностью определяется интенсивностью подвода тепла из перегретой жидкости к границе пузырька. Теоретический анализ строится на следующих упрощающих предпосылках:

1) давление пара в пузырьке и во всех точках объема жидкости одинаково и равно  $p_\infty$ ;

2) отсутствует движение центра пузырька относительно массива жидкости.

Первое предположение означает, что не учитываются поверхностное натяжение и силы инерции в жидкости. Оно оправдано, если радиус пузырька  $R$  существенно больше критического радиуса зародыша  $R_*$ , а скорость и ускорение радиального движения слоев жидкости на поверхности умеренные. Температура пара в пузырьке равна температуре насыщения  $T_s(p_\infty)$  при давлении в окружающей

жидкости. Такую же температуру имеет жидкость на границе пузырька. Поток тепловой энергии к границе пузырька, обусловленный температурным напором  $\vartheta_\infty = \Delta T = T_\infty - T_s$ , определяет интенсивность испарения жидкости внутрь пузырька.

Схема процесса и обозначения величин показаны на рис. 9.8, б, где также представлена качественная картина поля температур в жидкости около поверхности растущего пузырька. Проблема сводится к теоретическому расчету этого поля температур. При известном поле температур можно найти плотность теплового потока на границе раздела фаз и, следовательно, скорость роста пузырька.

При умеренной интенсивности фазовых переходов универсальное условие совместности для потока энергии (7.5г) позволяет записать:

$$\begin{aligned} \dot{m}h_{LG} &= -q'_R; \quad \dot{m} = \rho''(u''_R - \dot{R}) = -\rho''\dot{R}; \\ \dot{R} &= \frac{q'_R}{\rho''h_{LG}}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Ввиду постоянной плотности пара в пузырьке движение пара в нем отсутствует, т.е.  $u''_R = 0$ ; знак «минус» перед плотностью теплового потока  $q'_R$  показывает, что тепловой поток направлен из жидкости к поверхности пузырька, т.е. противоположно оси  $r$ . Задача сводится, следовательно, к отысканию зависимости для  $q'_R$ , что требует решения уравнения энергии для жидкости. Для жидкости с постоянными свойствами в сферически симметричной постановке это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{a}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right), \quad (9.12)$$

где  $a$  — температуропроводность жидкости;  $\vartheta = T - T_s$ ;  $u$  — радиальная скорость жидкости.

Границные условия:

$$\left. \begin{array}{l} r=R(t), \quad \vartheta=0; \\ r \rightarrow \infty, \quad \vartheta \rightarrow \vartheta_\infty. \end{array} \right\} \quad (9.13)$$

Точное решение рассматриваемой задачи было впервые получено Скривеном (Scriven, 1959 г.) [71]. Оно достаточно полно, с коррекцией, устраняющей погрешности оригинальной работы в записи

условия энергетического баланса на границе раздела фаз, изложено в [24]. Итоговое аналитическое соотношение, полученное в решении Скривена, устанавливает в неявной форме связь «модуля» роста пузырька  $m_0$  с параметрами задачи:

$$m_0 = f(\text{Ja}, \gamma). \quad (9.14)$$

Безразмерный модуль роста пузырька определяется как  $\text{Ja} = R/\sqrt{at}$ ; эта величина — основная искомая характеристика процесса для энергетической схемы роста. Число Якоба (M. Jakob)

$$\text{Ja} = \frac{c_p \rho' \Delta T}{h_{LG} \rho''} \quad (9.15)$$

— это безразмерный параметр, представляющий собой отношение избыточной энтальпии перегрева единицы объема жидкости к теплоте фазового перехода, приходящейся на единицу объема пара; другой безразмерный параметр задачи  $\gamma = (\rho' - \rho'')/\rho'$ . По условиям задачи эти два параметра — известные величины.

Функция (9.14) в решении Скривена — это определенный интеграл, который в общем случае не выражается через элементарные функции и может быть найден лишь численно. Результаты численного решения представлены в работе [71] в виде таблицы, которая воспроизведена в [24]. Фактически эта таблица отражает зависимость модуля роста ( $m_0$ ) только от числа Якоба ( $\text{Ja}$ ), так как параметр  $\gamma$  в [71] принимался равным единице. При давлениях, далеких от критического, это допущение вполне оправдано (обычно уже при  $p < 0,5 p_{kp}$  отношение плотностей  $(\rho''/\rho' < 0,1)$ ; при условии  $c_p \Delta T / h_{LG} < 0,1$  [или, что то же,  $\text{Ja} < 0,1(\rho'/\rho'')$ ] различие значений  $m_0$  при  $\text{Ja} = \text{idem}$  для разных  $\gamma$  не превышает 3 %.

Анализ решения Скривена показывает, что оно имеет две асимптоты, каждая из которых может быть получена из анализа некоторой предельной задачи. Ниже рассматриваются эти предельные задачи.

*Быстрый рост пузырька,  $\text{Ja} \gg 1$ .* В этом случае плотность теплового потока в (9.11) определяется на основе аналогии с задачей о нестационарном охлаждении полуограниченного тела. Для полуограниченного массива, на плоской границе которого в момент времени  $t = 0$  скачком изменилась температура на  $\Delta T$ , имеется точное аналитическое решение:

$$q = \frac{\lambda \Delta T}{\sqrt{\pi at}}.$$

(К этой задаче мы обращались в п. 4.2.4.) Если использовать это выражение в качестве первого приближения в (9.11) вместо  $q'_R$ , то с учетом определения числа Якоба получим

$$\dot{R} \equiv \frac{dR}{dt} = \frac{\lambda \Delta T}{\rho'' h_{LG} \sqrt{\pi a t}} = \frac{Ja}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a}{t}}.$$

Проинтегрировав это уравнение при обычно используемом начальном условии  $t = 0, R = 0$  (пузырек растет «из точки»), получим

$$R = \frac{2}{\sqrt{\pi}} Ja \sqrt{at}. \quad (9.16)$$

Эта, исторически первая, формула для скорости роста парового пузырька была получена еще в 1930-е годы (Fritz, Ende). Почти двадцать лет спустя (в 1954 г.) был осуществлен более строгий анализ, учитывающий, что граница охлаждаемого массива жидкости — сфера, но сохраняющий предположение о высокой скорости роста ( $Ja \gg 1$ ), при котором основное изменение температуры жидкости происходит в очень тонком слое на поверхности пузырька. Итогом этого анализа стало соотношение, названное по имени его авторов формулой Плессета—Цвика (Plessset, Zwick):

$$R = 2 \sqrt{\frac{3}{\pi}} Ja \sqrt{at}. \quad (9.17)$$

Эта формула широко применяется при анализе кипения; ее отличие от (9.16) состоит только в наличии множителя  $\sqrt{3}$ , что свидетельствует об использовании качественно одинаковых представлений о механизме процесса. Ниже будет показано, что неравенство  $Ja \gg 1$  имеет естественные ограничения «сверху», поскольку при очень высоких скоростях роста нарушается условие применимости энергетической тепловой схемы  $p'' = \text{const}$ .

*Квазистатическое приближение,  $Ja \ll 1$ .* При очень малых скоростях роста пузырька температурное поле в окружающей жидкости в каждый момент времени приближенно совпадает с распределением температур в соответствующей стационарной задаче. (Этот предельный случай рассматривался в гл. 5 применительно к свободной конвекции на поверхности сферы малого диаметра.) Тепловой поток к поверхности сферы с температурой  $T_s$ , помещенной в неограниченную среду с температурой  $T_\infty$ , выражается как

$$q'_R = \lambda \Delta T / R.$$

Использование этого соотношения в (9.11) после интегрирования при начальном условии  $t = 0$ ,  $R = 0$  дает

$$R = \sqrt{\frac{2\lambda\Delta T t}{\rho''h_{LG}}}. \quad (9.18)$$

Принципиально важно, что в квазистатическом пределе теплоемкость жидкости не влияет на закон роста пузырька. Это обстоятельство невольно маскируется, когда формулу (9.18) записывают с использованием числа Яакова (9.15), что легко достигается домножением числителя и знаменателя подкоренного выражения в (9.18) на объемную теплоемкость  $\rho'c_p$ . Тогда получают

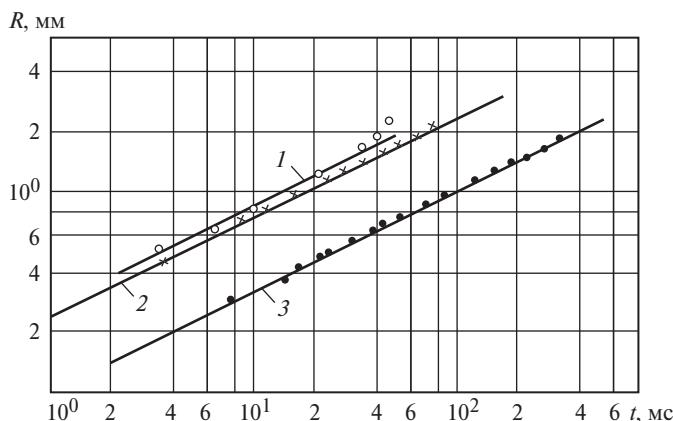
$$R = \sqrt{2Ja \cdot at}. \quad (9.18a)$$

Табличные данные [71] при  $\gamma = 1$  с погрешностью менее 2 % во всей области изменения чисел Яакова (от 0 до  $\infty$ ) были аппроксимированы Д.А. Лабунцовым следующей интерполяционной формулой:

$$R = 2\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} Ja \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6Ja}\right)^{2/3} + \frac{\pi}{6Ja}\right]^{1/2} \sqrt{at}. \quad (9.19)$$

Это соотношение может рассматриваться как итоговое решение задачи, правомерное в рамках предельной энергетической схемы. Оно дает асимптоты (9.17) и (9.18a) и предсказывает увеличение радиуса пузырька пропорционально  $\sqrt{t}$ . Выход на асимптоту (9.17) происходит практически уже при  $Ja > 10$  (при  $Ja = 10$  выражение в квадратных скобках (9.19) равно 1,06, т.е. асимптота дает значение текущего радиуса пузырька, лишь на 6 % меньшее, чем точное решение). Выход на другую асимптоту происходит при очень малых числах Яакова, даже при  $Ja = 0,01$  формула (9.18a) дает погрешность 8,5 % точного решения. Заметим, что практически условие  $Ja \ll 1$  относится к весьма высоким приведенным давлениям.

Существующие экспериментальные данные о скоростях роста пузырьков в объеме перегретой жидкости относятся в основном к низким приведенным давлениям, абсолютное давление в опытах чаще всего было близко к атмосферному. Эти данные хорошо согласуются с теоретическим решением. На рис. 9.9 представлены опытные данные работы [58], где изучался рост паровых пузырьков в воде, этаноле и изопропаноле. Перегрев жидкости создавался резким сбросом давления. Как следует из рис. 9.9, превосходное согласие опытных результатов с расчетной зависимостью Скривена наблюдается



**Рис. 9.9. Кривые роста паровых пузырьков в объеме перегретой жидкости:**  
1, 2, 3 — расчет по формуле (9.19), соответственно, для воды ( $Ja = 10,95$ ),  
воды ( $Ja = 8,78$ ) и этанола ( $Ja = 5,4$ ); точки — опытные данные работы [58]

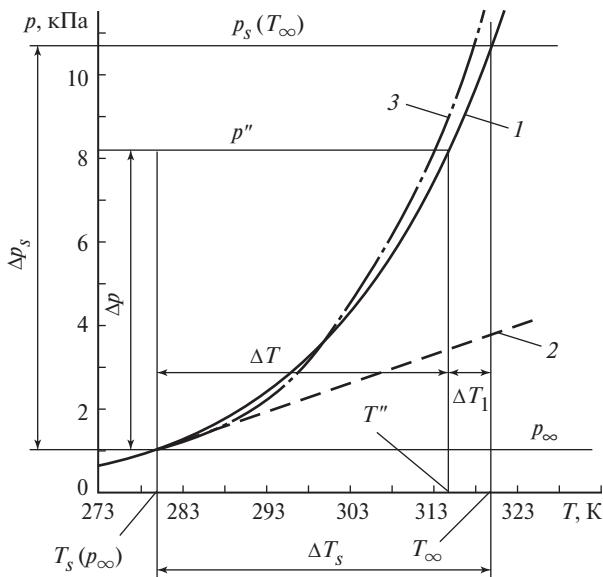
лось в тех экспериментах, где пузырьки росли в условиях невесомости (падающая система), т.е. в отсутствие их перемещения в массиве жидкости. Опытные данные по росту пузырьков в условиях нормальной гравитации хорошо согласуются с зависимостью (9.19) до времен роста 30—40 мс, после чего их всплытие в перегретой жидкости обусловливает, во-первых, заметное отклонение от сферической формы, а во-вторых, увеличение скорости роста. Наблюдения за ростом пузырьков в невесомости позволили авторам работы [58] получить уникальные результаты в том отношении, что удалось зафиксировать времена роста до 0,4—0,5 с, тогда как обычно и при объемном вскипании, и при кипении на поверхности время роста пузырьков, доступное наблюдению, не превышает 0,1—0,15 с.

#### 9.2.4. Рост пузырька при больших числах Якоба

При больших перегревах жидкости, т.е. при больших числах  $Ja$ , скорость роста пузырька возрастает настолько, что давление жидкости у его границы (и практически равное ему давление пара в пузырьке) становятся более высокими, чем  $p_\infty$ . Это означает, что температура пара  $T'' > T_s(p_\infty)$ , а действительный перепад температур  $\Delta T_1 = T_\infty - T''$  оказывается меньше значения  $\Delta T_s$ , используемого в расчетах согласно энергетической схеме роста. Уже при  $Ja > 100$  рас-

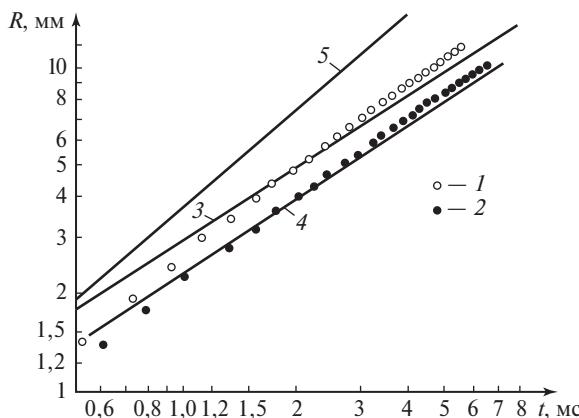
чет по уравнению (9.19) заметно завышает скорость роста пузырька в сравнении с более строгими решениями и опытными наблюдениями, а при  $Ja \geq 200$  учет инерционных эффектов в анализе роста паровых пузырьков становится необходимым. Например, в воде при  $p_\infty = 20$  кПа и перегреве  $\Delta T_s = 15$  К ( $Ja = 200$ ) расчет по (9.19) дает  $R = 4,9$  мм при  $t = 1$  мс, что почти в 1,5 раза превышает результат расчета по соотношению (9.10) инерционной схемы ( $R = 3,5$  мм при  $t = 1$  мс). Очевидно, погрешность расчета по энергетической схеме в этом случае недопустимо велика, так как реальная скорость роста пузырька никогда не может превосходить минимальную из рассчитанных по каждой из предельных схем роста.

На рис. 9.10 показаны значения температур и давлений в перегретой жидкости и паре в некоторый произвольный момент роста пузырька в условиях одновременного влияния энергетических и инерционных эффектов. Вдали от пузырька (на бесконечности) жидкость существенно перегрета по отношению к температуре насыщения при актуальном давлении жидкости  $p_\infty$ . Однако в условиях боль-



**Рис. 9.10. Параметры перегретой жидкости и пара в растущем пузырьке:**  
1 — участок кривой насыщения для воды; 2, 3 — ее аппроксимация соответственно линейной и квадратичной зависимостями

ших чисел Якоба этот перегрев  $\Delta T_s = T_\infty - T_s(p_\infty)$ , используемый как параметр в энергетической схеме роста, выступает лишь как предельное расчетное значение, не достигаемое при экспериментальном исследовании процесса. Действительный перегрев  $\Delta T_1 = T_\infty - T''$ , который следует теперь использовать в граничных условиях для уравнения энергии, всегда меньше  $\Delta T_s$ . Температура  $T''$  и давление  $p''$  в пузырьке связаны как параметры на линии насыщения (кривая 1 на рис. 9.10 — это действительная линия насыщения для воды при низких давлениях). Эти параметры в отличие от тех, что принимаются в предельных схемах роста, непрерывно изменяются (уменьшаются) по мере увеличения объема пузырька. Давление пара  $p''$  всегда меньше, чем его предельное расчетное значение  $p_s(T_\infty)$ , но на начальной стадии роста пузырька (практически при  $t < 1$  мс для условий  $Ja > 500$ ) это различие еще не слишком велико, тогда как на этой стадии  $\Delta T_1 \ll \Delta T_s$ . Это означает, что ранняя стадия роста пузырька управлется главным образом динамическими эффектами. При этом действительная скорость роста, конечно, ниже, чем рассчитанная по (9.10), но отличие еще не приобретает качественного характера (рис. 9.11). В то же время расчет по соотношению энергетической схемы (9.19) может завышать скорость роста в десятки раз.



**Рис. 9.11. Кривые роста паровых пузырьков в объеме перегретого хладона R-113:**

1, 2 — экспериментальные точки [75] соответственно  $p_\infty = 1,9$  кПа,  $9_\infty = 59,4$  К ( $Ja = 3195$ ) и  $p_\infty = 8,5$  кПа,  $9_\infty = 34,1$  К ( $Ja = 430$ ); 3, 4 — расчетные кривые по (9.20) соответственно для 1,9 и 8,5 кПа; 5 — расчетная кривая по (9.10) для  $p_\infty = 1,9$  кПа,  $9_\infty = 59,4$  К

Теоретический анализ задачи о росте парового пузырька, учитывающий инерционные динамические эффекты (при сохранении вполне оправданных допущений о пренебрежимо малой роли вязкости жидкости и эффектов молекулярной кинетики испарения), должен включать в себя уравнение (9.6) для поля скорости в жидкости, уравнение Рэлея (9.9), определяющее давление пара  $p''$  в пузырьке в процессе его роста, и уравнение энергии в окружающей пузырек жидкости (9.12). При этом в последнем из перечисленных уравнений температура  $\vartheta = T' - T''$ , т.е. отсчитывается от температуры пара, изменяющейся в процессе роста пузырька.

Сама эта температура определяется как температура насыщения при текущем давлении в пузырьке, т.е.  $T'' = T_s(p'')$ . Поскольку в условие совместности (энергетического баланса) на границе пузырька (7.5г) входит плотность пара, то математическое описание должно включать уравнение состояния пара. При численном решении рассматриваемой задачи зависимость температуры и плотности насыщенного пара от давления задается соответствующими таблицами. Каждое такое решение представляет собой единичный численный эксперимент, в котором для заданных значений  $T_\infty, p_\infty$  для данной жидкости получается зависимость  $R(t)$  — кривая роста пузырька. Закономерности роста паровых пузырьков обычно не являются непосредственной целью анализа в прикладных задачах, поэтому вполне оправдано построение приближенных аналитических уравнений, описывающих рост пузырька в рассматриваемых условиях. При этом зависимости температуры и плотности пара от давления должны, естественно, задаваться аналитически.

Если для плотности пара при больших числах Я, т.е. при низких давлениях, вполне уместно использовать уравнение состояния идеального газа, то обычно применяемая линейная зависимость перепада давлений вдоль кривой насыщения от разности температур при больших  $\Delta T$  дает недопустимо большую погрешность. На рис. 9.10 изображен участок кривой насыщения воды при низких давлениях ( $p_s < 14$  кПа). Касательная 2 к кривой насыщения в точке, отвечающей  $p_s = 1$  кПа, построена в соответствии с формулой Клапейрона—Клаузиуса. Ясно, что при больших  $\Delta T$  перепады давления, рассчитанные по этой линейной зависимости, значительно отличаются от действительных. Например, при  $\Delta T = 40$  К расчетное значение  $p''$  почти втрое ниже действительного давления насыщенного пара.

В [47] кривая насыщения для области низких давлений аппроксимировалась квадратичной зависимостью

$$\Delta p = 1,4 \frac{h_{LG}^2 \rho'' \Delta T^2}{R_i T_s^3},$$

где  $R_i$  — газовая постоянная.

Эта зависимость вполне удовлетворительно воспроизводит ход реальных кривых насыщения различных жидкостей. Как видно из рис. 9.10, кривая 3 для воды, построенная в соответствии с этой формулой, согласуется с действительной кривой насыщения с погрешностью менее 10 % (по  $\Delta p$ ).

С использованием ряда упрощений в математическом описании задачи в [47] для предельного случая очень больших чисел Яакова ( $Ja > 500$ ) было получено приближенное аналитическое решение:

$$R = \frac{4}{3} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/4} G \left( \frac{\lambda c_p}{\rho''} \right)^{1/4} \frac{R_i^{3/4} T_s^{5/4}}{h_{LG}} t^{3/4}, \quad (9.20)$$

где

$$G = \left( \frac{\Delta T_1 (1/\Delta T + 1/T_s)}{(1 + p_\infty / \Delta p) \sqrt{1,4}} \right)^{1/2}; \quad \Delta T = \Delta T_s - \Delta T_1.$$

Прямые расчеты для многих режимов роста паровых пузырьков в различных жидкостях при  $Ja > 500$  показывают, что безразмерный параметр  $G$  слабо изменяется за время роста. Это означает, что формула (9.20) предсказывает промежуточный закон изменения радиуса пузырька во времени  $R \sim t^{3/4}$  в сравнении с  $R \sim t$  для инерционной схемы роста и  $R \sim t^{1/2}$  для энергетической. Предельный характер соотношения (9.20) проявляется в этом случае в отсутствии влияния перегрева жидкости  $\Delta T_s$  на скорость роста, что достигается лишь при весьма больших числах Яакова.

Сопоставление расчетов по (9.20) при  $G = 1$  с опытными исследованиями [75] роста паровых пузырьков в объеме перегретого хладона R-113 (перегрев создавался путем сброса давления) показало, что хорошее соответствие опытных и расчетных кривых роста пузырьков наблюдается уже при  $Ja > 300$ . На рис. 9.11 точки 1 относятся к росту паровых пузырьков при рекордно высоком перегреве жидкости в объеме:  $\vartheta_\infty = 59,4$  К;  $Ja = 3195$ . Энергетическая схема роста для этих условий предсказывает фантастически высокую скорость роста: уже

при  $t = 1$  мс согласно (9.19)  $R = 44$  мм. Формула (9.10) инерционной схемы намного лучше соответствует результатам этих измерений (кривая 5 на рис. 9.11), хотя во времени расхождение быстро нарастает, поскольку теплопроводность жидкости отнюдь не бесконечна. Точки 2 на рис. 9.11 отвечают существенно более высокому давлению ( $p_\infty = 8,5$  кПа) и почти на порядок меньшему числу Якоба ( $Ja = 430$ ), чем точки 1. Согласно энергетической схеме в этом случае при  $t = 1$  мс радиус пузырька  $R = 5,9$  мм, т.е. по-прежнему расчетная скорость роста намного выше опытной. Уравнение (9.20) при  $G = 1$  достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными (кривые 3 и 4 на рис. 9.11) и верно отражает относительно слабую зависимость скорости роста пузырька от числа Якоба при  $Ja > 300$ .

### 9.3. Динамика паровых пузырьков при кипении

#### 9.3.1. Основные результаты опытных наблюдений

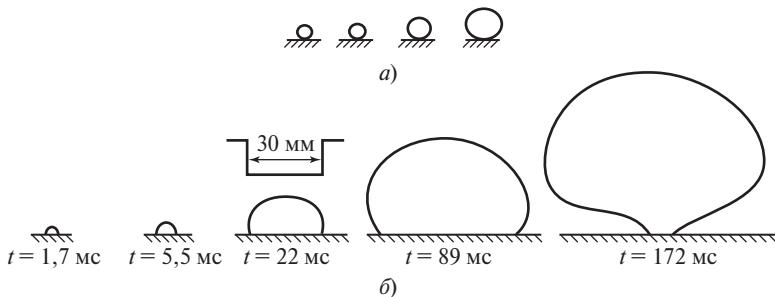
При кипении жидкостей на твердой поверхности нагрева рост паровых пузырьков происходит в условиях существенно неоднородного температурного поля, причем паровой объем имеет границу не только с жидкой фазой, но и с твердой стенкой. Поэтому теоретический анализ закономерностей роста паровых пузырьков при кипении связан с большими трудностями, которые на сегодняшний день не преодолены. Вместе с тем понимание механизма роста пузырьков и последующего их отрыва от твердой поверхности очень важно для создания теории кипения в целом. Это обуславливает значительный интерес к теоретическому и экспериментальному (с помощью скоростной киносъемки) исследованию динамики паровых пузырьков при кипении. Имеющиеся в настоящее время в распоряжении исследователей опытные данные охватывают широкую область давлений (от 0,01 до 100 бар, т.е. от 1 кПа до 10 МПа) и весьма разнообразные жидкости (вода, спирты, углеводороды, хладоны, криогенные жидкости).

Анализ экспериментальных наблюдений позволяет сделать достаточно надежные качественные выводы и служит обоснованием теоретических моделей. При этом необходимо подчеркнуть, что все закономерности роста и отрыва паровых пузырьков проявляются лишь статистически. Кинематографические исследования показывают, что даже в одном эксперименте при фиксированных давлениях над уровнем жидкости и средней температуре стенки  $T_c$  скорости роста пузырьков могут отличаться вдвое от среднего значения. Это означает, что применительно к росту паровых пузырьков при кипе-

нии имеет смысл говорить лишь о приближенных моделях, отражающих влияние основных механизмов процесса и описывающих количественные взаимосвязи для некоторых средних условий.

Кинематографические исследования показывают, что существуют весьма сильные различия в поведении пузырьков при высоких и низких приведенных давлениях. В области высоких давлений пузырьки на поверхности растут относительно медленно, при этом их форма практически в течение всего периода роста близка к сферической (точнее, пузырек имеет вид усеченной сферы). Перед отрывом диаметр пузырька составляет несколько десятых долей миллиметра. Так, по данным [21] при давлениях 30—100 бар паровой пузырек за время 0,2—0,3 с вырастает до своего предотрывного размера, равного 0,2—0,3 мм. Последовательные стадии роста парового пузырька при высоких давлениях схематически показаны на рис. 9.12, а.

При низких давлениях и больших перегревах стенки паровой пузырек растет очень быстро. Это обусловливает возникновение в окружающей жидкости неоднородного поля давлений, которое, в свою очередь, деформирует, сплющивает паровой пузырек, как бы «прижимая» его к поверхности нагрева. На рис. 9.12, б представлены последовательные стадии роста парового пузырька при кипении воды при давлении 0,02 бар (2 кПа) и числе  $Ja = 3450^*$ . Этот рисунок воспроизводит очертание границы пузырька, как оно выглядело на кадрах кинопленки, полученной с помощью скоростной киносъемки.



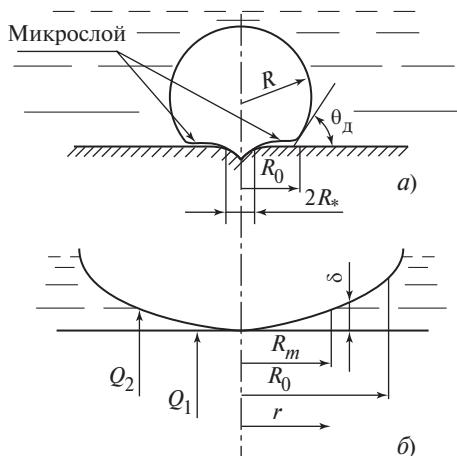
**Рис. 9.12. Рост парового пузырька при кипении на твердой поверхности:**  
**а** — схема для высоких давлений; **б** — фрагменты кинограммы роста пузырька при кипении воды ( $p = 2 \text{ кПа}$ ,  $Ja = 3450$ ), на третьем кадре показана масштабная рамка

\* В случае роста парового пузырька на твердой поверхности входящая в число  $Ja$  величина  $\vartheta_\infty$  равна  $\Delta T = T_c - T_s$ , где  $T_c$  — температура поверхности нагрева.

Из рисунка видно, что в начальный период роста форма пузырька почти в точности соответствует полусфере; в последующие моменты времени пузыrek напоминает усеченную сферу, причем по мере приближения к моменту отрыва от сферы «отрезается» все меньшая и меньшая часть. При низких давлениях пузырьки достигают перед отрывом прямо-таки огромных размеров (100—150 мм в диаметре).

Для механизма роста парового пузырька весьма важно то, что в центральной части его основания всегда существует область прямого контакта пара с твердой поверхностью («сухое пятно»). Это обусловлено тем, что центрами парообразования служат обычно впадины на обогреваемой поверхности, заполненные паром. Характерный размер таких впадин по порядку величины близок к равновесному радиусу парового зародыша  $R_*$ , определенному в соответствии с формулой (9.1). В типичных условиях  $R_*$  составляет единицы или (при высоких приведенных давлениях) десятые доли микрометра. Следовательно, за исключением очень короткого начального периода роста пузырька, сухое пятно составляет лишь доли процента площади проекции пузырька на обогреваемую поверхность. Пространство между поверхностью пузырька и твердой стенкой заполнено тонким слоем жидкости — *микрослоем*. При феноменологическом подходе принимают, что толщина микрослоя растет от нулевого значения на линии контакта трех фаз (твердой, жидкой и парообразной) до некоторого конечного значения у внешней границы основания пузырька. Такое представление отражено на схеме рис. 9.13, а.

В действительности в окрестности линии контакта трех фаз (границной линии) существует слой адсорбированных молекул — неиспаряющаяся часть мениска жидкой пленки толщиной порядка межмолекулярных расстояний в жидкости ( $10^{-9}$  м). По мере утолщения слоя жидкости с удалением от границной линии силы адсорбции, препятствующие испарению, ослабевают, начинается испарение с поверхности пленки. Так как радиус сухого пятна  $R_*$  и протяженность в радиальном направлении адсорбированной пленки ничтожно малы в сравнении с радиусом основания пузырька  $R_0$ , при создании приближенной модели можно принять, что микрослой жидкости в основании пузырька образует коническую поверхность. Сечение микрослоя произвольной плоскостью, проходящей через ось симметрии пузырька, изображено на рис. 9.13, б. Пока микрослой тонок, тепло для испарения жидкости с его поверхности отбирается непосредственно от твердой стенки, так как запасы тепла в перегретой жидкости, содержащейся в тонком микрослое, слишком малы. Этот



**Рис. 9.13.** Схема растущего на твердой стенке парового пузырька (*а*) и расчетная модель подвода тепла к поверхности пузырька через микрослой от стенки и от перегретой жидкости (*б*)

вывод подтверждается опытными измерениями быстрого падения температуры обогреваемой поверхности в начальный момент роста пузырька (обычно в течение 1—3 мс). Такие измерения, проводившиеся при использовании в качестве поверхности нагрева тонких пластин с относительно низкой теплопроводностью, послужили основанием для гипотезы о существовании под растущим пузырьком испаряющегося микрослоя жидкости. В дальнейшем существование микрослоя под пузырьком, растущим на прозрачной поверхности нагрева, было подтверждено прямыми оптическими исследованиями (лазерная интерферометрия).

Измерения температуры в объеме жидкости показали, что перегретая жидкость покрывает ближайшую к обогреваемой твердой стенке часть сферической поверхности (купола) растущего пузырька. Эта перегретая жидкость, по-видимому, вытесняется пузырьком из температурного пограничного слоя на стенке, и ее избыточная энталпия также влияет на рост парового пузырька при кипении.

### 9.3.2. Приближенная модель роста парового пузырька на обогреваемой стенке

Описанные опытные наблюдения позволяют использовать в модели форму пузырька, представленную на рис. 9.13. Будем считать, что пузырек в процессе роста сохраняет форму усеченной

сферы, причем очертания пузырька в любой момент времени геометрически подобны. Это означает, что все геометрические характеристики пузырька могут быть представлены как величины пропорциональные радиусу эквивалентной по объему сферы:

$$R_3 = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} V},$$

где  $V$  — объем пузырька.

Толщина жидкого микрослоя в основании пузырька предполагается пропорциональной расстоянию от оси симметрии, т.е.

$$\delta = k_1 r,$$

где  $k_1$  — числовой множитель ( $k_1 \ll 1$ ).

Обогреваемую твердую стенку будем считать изотермической, что вполне реалистично в случае высокой теплопроводности материала. Локальная плотность теплового потока от стенки выражается как

$$q_c = \frac{\lambda \Delta T}{\delta} = \frac{\lambda \Delta T}{k_1 r}.$$

Будем считать, что на участке  $0 < r < R_m$  (см. рис. 9.13, б) избыточная энталпия жидкости не влияет на интенсивность испарения с поверхности микрослоя; тогда поток тепла от обогреваемой стенки к межфазной поверхности рассчитывается как

$$Q_1 = \int_0^{R_m} \frac{\lambda \Delta T}{k_1 r} 2\pi r \, dr = \frac{2\pi}{k_1} \lambda \Delta T R_m. \quad (9.21)$$

Имея в виду допущение о сохранении формы пузырька в процессе роста, можно записать  $R_m = k_2 R_3$ , а выражение (9.21) представить в виде

$$Q_1 = \beta_1 \lambda \Delta T R_3, \quad (9.21a)$$

где коэффициент  $\beta_1$  отражает по существу «степень незнания» действительной формы микрослоя и растущего пузырька.

Когда микрослой становится «толстым», избыточная энталпия перегретой жидкости также служит источником для испарения жидкости на межфазной поверхности. В качестве условной границы «тонкого» и «толстого» участков микрослоя можно принять толщину пленки  $\delta_m = \sqrt{at}$ , где  $t$  — время от начала роста пузырька. Для неметаллических жидкостей  $\delta_m$  — величина порядка  $10^{-5}$  м. В реальном процессе, конечно, никакой фиксированной границы между «тепло-

проводной» (тонкой) и «теплоемкой» (толстой) частями микрослоя не существует, перераспределение источников тепла на испарение жидкости происходит постепенно. В используемой нами приближенной модели такая граница устанавливается соотношением  $\delta_m = k_1 R_m$ .

Выражение для теплового потока от перегретой жидкости к межфазной поверхности должно быть аналогично (по структуре) уравнению, следующему из асимптоты решения Скривена при числе  $\text{Ja} \gg 1$ , т.е. из формулы Плессета—Цвика (9.17). Несложно убедиться, используя (9.11), что формуле (9.17) отвечает плотность теплового потока

$$q'_R = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\lambda \Delta T}{\sqrt{at}}.$$

Тепловой поток от перегретой жидкости для пузырька, растущего на стенке, может быть представлен в виде

$$Q_2 = \frac{\gamma_1 \lambda \Delta T R_3^2}{\sqrt{at}}. \quad (9.22)$$

Неизвестный заранее числовой множитель  $\gamma_1$  отражает, во-первых, то, что перегретая жидкость покрывает лишь часть поверхности пузырька (точнее, поверхности  $4\pi R_3^2$  эквивалентной по объему сферы), а во-вторых, то, что перегрев жидкости в среднем меньше, чем перегрев стенки  $\Delta T$ , используемый в (9.22). Для пузырька в виде усеченной сферы (см. рис. 9.13, *a*) представляется обоснованным допущение о том, что перегретая жидкость покрывает часть поверхности пузырька, примерно равную его основанию  $\pi R_0^2$ . В этом случае коэффициент  $\gamma_1$  выражается как функция наблюдаемого (динамического) краевого угла  $\theta_d$ .

В произвольный момент времени для пузырька справедливо уравнение энергетического баланса

$$\rho'' h_{LG} \frac{dV}{dt} = Q_1 + Q_2,$$

которое с учетом (9.21a) и (9.22) записывается как

$$R_3^2 \frac{dR_3}{dt} = \frac{\beta \lambda \Delta T R_3}{\rho'' h_{LG}} + \frac{\gamma \lambda \Delta T R_3^2}{\rho'' h_{LG} \sqrt{at}}, \quad (9.23)$$

где  $\beta = \beta_1/(4\pi)$ ,  $\gamma = \gamma_1/(4\pi)$ . Вводя число Якоба  $Ja$ , имеем

$$R_3 \frac{dR_3}{dt} = \beta Ja \cdot a + \gamma Ja R_3 \sqrt{a/t}. \quad (9.23a)$$

Дифференциальное уравнение (9.23а) при начальном условии  $t = 0$ ,  $R_3 = 0$  решается с помощью подстановки  $R_3 = Y\sqrt{t}$ . Поскольку физический смысл имеет только положительный корень получающегося квадратного уравнения относительно  $Y$ , находим

$$R_3 = \left( \gamma Ja + \sqrt{\gamma^2 Ja^2 + 2\beta Ja} \right) \sqrt{at}. \quad (9.24)$$

При постоянных  $\gamma$  и  $\beta$  полученное уравнение имеет две асимптоты. Первая из них при  $Ja \ll 1$

$$R_3 = \sqrt{2\beta Ja \cdot at} = \sqrt{\frac{2\beta \lambda \Delta T t}{h_{LG} \rho''}} \quad (9.25)$$

отвечает случаю, когда подвод тепла от перегретой жидкости пренебрежимо мал (теплоемкость жидкости не влияет на закон роста). Эта формула была получена Д.А. Лабунцовым в 1963 г. (см. [21]); она справедлива для области высоких приведенных давлений при  $\beta = 6$ .

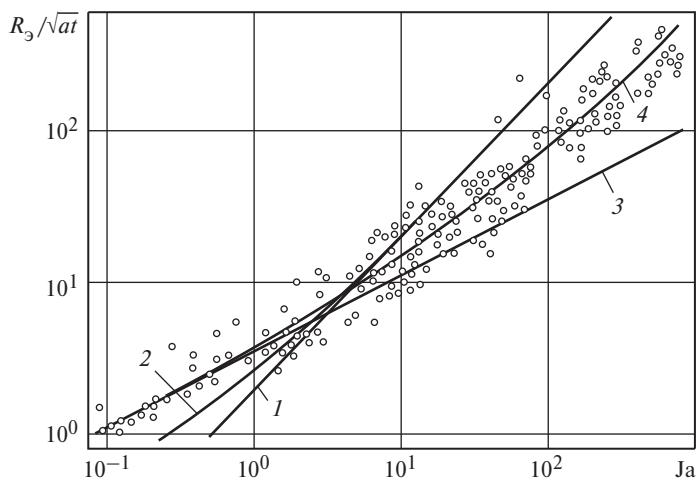
Вторая асимптота относится к низким приведенным давлениям, когда  $Ja \gg 1$ :

$$R_3 = 2\gamma Ja \sqrt{at}. \quad (9.26)$$

В этом случае подвод тепла от перегретой жидкости становится преобладающим. Выражение (9.26) отличается от формулы Плессета—Цвика лишь коэффициентом  $\gamma$ , который по смыслу анализа должен быть меньше единицы [меньше множителя  $\sqrt{3/\pi}$  в формуле (9.17)]. Согласие с опытными данными обеспечивается при  $\gamma = 0,3$ .

Таким образом, формула (9.24) при  $\beta = 6$ ,  $\gamma = 0,3$  позволяет удовлетворительно описать опытные кривые роста паровых пузырьков при кипении различных жидкостей в широком диапазоне изменения давлений (при числах  $Ja = 0,1 \div 500$ ).

Результаты сравнения представлены на рис. 9.14, где отражены практически все известные опытные данные о росте паровых пузырьков при кипении одиннадцати различных жидкостей (вода, метанол, этанол, толуол, бензол, четыреххлористый углерод, *n*-пен-



**Рис. 9.14. Сопоставление опытных данных о скорости роста паровых пузырьков при кипении с расчетными зависимостями:**

1 — (9.17); 2 — (9.19); 3 — (9.25); 4 — (9.24). (Каждая точка на рисунке отражает либо кривую роста индивидуального пузырька, либо результат статистической обработки нескольких кривых роста при  $\text{Ja} = \text{idem}$ )

тан, азот, кислород, водород, гелий) в диапазоне давлений 0,005—10 МПа. Зависимости (9.17) и (9.19) для роста пузырьков в объеме перегретой жидкости (кривые 1 и 2 на рис. 9.14), конечно, не должны описывать опытные данные о росте пузырьков на стенке. Эти кривые пересекают массив опытных точек в том диапазоне чисел Якоба, который соответствует для большинства исследованных жидкостей атмосферному давлению. Это случайное совпадение послужило некоторым авторам основанием рекомендовать формулу Плессета—Цвика для описания роста паровых пузырьков при кипении. Кривая 4 на рис. 9.14, построенная по уравнению (9.24), хорошо отражает характер изменения безразмерного модуля роста пузырька  $R_3 / \sqrt{at}$  в зависимости от числа Якоба. При  $\text{Ja} < 1$  эта кривая практически совпадает с кривой 3, отвечающей формуле (9.25).

Следует отметить, что отклонение опытных точек на рис. 9.14 связано не только со статистическим разбросом, характерным для кипения, но и с использованным в анализе допущением об изотермичности обогреваемой стенки. В действительности, как говорилось выше, интенсивное испарение микрослоя в его тонкой части вызывает падение температуры стенки тем более заметное, чем меньше

коэффициент тепловой активности стенки  $\sqrt{(\rho c \lambda)_c}$  и меньше ее толщина. Анализ роста пузырьков с учетом этих эффектов существенно сложнее, чем изложенная приближенная модель; он дается в монографии [2].

При наиболее низких давлениях энергетическая схема роста, приводящая к (9.24), дает сильно завышенную в сравнении с экспериментами расчетную скорость роста пузырька. В этих условиях учет инерционных эффектов может быть осуществлен по методике, описанной в п. 9.2.4. Уже при  $Ja > 300$  преобладает подвод тепла к межфазной поверхности от перегретой жидкости [в соответствии с соотношением (9.22)]. Следовательно, уравнение для расчета скорости роста паровых пузырьков на стенке в рассматриваемых условиях должно отличаться от формулы (9.20) лишь числовым коэффициентом, меньшим единицы. Действительно, соотношение

$$R = 0,5 \left( \frac{\lambda c_p}{\rho''} \right)^{1/4} \frac{R_i^{3/4} T_s^{5/4}}{h_{LG}} t^{3/4} \quad (9.27)$$

хорошо согласуется с имеющимися опытными данными о росте паровых пузырьков при  $Ja \geq 500$ .

### 9.3.3. Условия отрыва паровых пузырьков от твердой поверхности

Размер пузырька в момент отрыва от твердой поверхности — важный параметр для понимания механизма кипения. В настоящее время накоплена обширная опытная информация о предотрывных диаметрах паровых пузырьков при кипении различных жидкостей. (Часть этой информации получена в тех экспериментальных исследованиях динамики паровых пузырьков, результаты которых отражены на рис. 9.14.) Но, несмотря на это, а также на кажущуюся простоту объекта исследования (индивидуальный паровой пузырек, растущий на твердой обогреваемой стенке), в теоретическом плане проблема отрыва пузырька весьма сложна и, к сожалению, изрядно запутана.

Поскольку даже при высоких приведенных давлениях остается справедливым сильное неравенство  $\rho'' \ll \rho'$ , то паровой пузырек, в известном смысле, это «пустота» в жидкости. (Не даром в английском языке истинное объемное паросодержание газожидкостных потоков обозначается термином «void fraction» — «доля пустоты».) Кроме того, в реальных условиях скорость расширения объема  $\dot{R}$  намного меньше скорости звука в паре; это означает, что давление

пара в пузырьке в любой момент роста можно считать однородным. Следовательно, давление на границе пузырька со стороны жидкости связано с давлением пара  $p''$  формулой Лапласа:

$$p'_R = p'' - 2\sigma H(z), \quad (9.28)$$

где  $z$  — расстояние от стенки;  $H(z)$  — кривизна поверхности пузырька в предположении ее осесимметричности. Форма поверхности пузырька изменяется во времени и могла бы быть рассчитана только как результат решения задачи о динамике жидкости, удовлетворяющего условию (9.28) на границе области, заранее не определенной. Обычно в задачах о движении жидкости со свободной поверхностью форма межфазной поверхности известна или задается на основе опытных наблюдений. В рассматриваемом случае такое решение многократно усложняется и достичимо лишь численными методами.

Первые результаты численного исследования динамики парового пузырька в такой строгой постановке были опубликованы недавно. Эти результаты включают, в частности, очертания границы пузырька в некоторые фиксированные моменты времени. Так как никаких резких изменений эти очертания не претерпевают, вопрос в том, какое из них следует относить к моменту отрыва, является, в известной мере, предметом соглашения. Наиболее естественно принимать за момент отрыва потерю прямого контакта пара с твердой стенкой, т.е. образование замкнутой поверхности пузырька *в жидкости*. (На схеме рис. 9.12, а этому требованию отвечает правая картинка, а последний из кинокадров, приведенных на рис. 9.12, б, относится к моменту близкому к отрыву, но здесь малая часть поверхности пузырька еще сохраняет прямой контакт со стенкой).

Следует отметить, что даже при использовании ряда сильных допущений, заметно ограничивающих общность полученных численных решений, затраты машинного времени в таких исследованиях весьма велики. Поскольку информация об условиях отрыва паровых пузырьков в инженерных приложениях не используется непосредственно, а служит для построения моделей пузырькового кипения, то строгое численное моделирование эволюции пузырька останется, вероятно, в обозримой перспективе областью фундаментальных исследований, направленных на более глубокое понимание механизма кипения. В практическом плане интерес представляют аналитические соотношения, связывающие размер пузырька («эквивалентный» радиус или диаметр) в момент отрыва с режимными параметрами процесса и свойствами жидкости. С учетом сказанного ясно, что такие соотношения принципиально могут быть лишь приближенными.

При построении приближенных моделей необходимо учитывать несколько важных особенностей анализируемой задачи. Прежде всего, паровой пузыrek на стенке, несмотря на внешнее сходство, вовсе не аналогичен воздушному шару, привязанному за нитку ко дну сосуда с водой (хотя такая аналогия и кажется естественной). По существу, у пузырька нет каких-либо механических связей с твердой стенкой, кроме поверхностного натяжения на линии контакта трех фаз. Ясно, что роль поверхностного натяжения совершенно ничтожна в случае крупных пузырьков, характерных для низких приведенных давлений (больше числа Яакоба). Кроме того, поверхность пузырька легко изменяет свою форму; локальный импульс давления (например, за счет турбулентных пульсаций), действующий на участок поверхности пузырька, не передается центру масс пузырька, но может изменить его форму. В экспериментах наблюдали, как расположенный в жидкости вблизи стенки термопарный зонд свободно «входит» в паровой пузыrek, не влияя на его эволюцию (фактически пузыrek растет, «не замечая» малого в сравнении с его размером твердого препятствия). Ясно, что в случае с воздушным шариком ситуация совершенно иная.

Уже из этих качественных соображений можно заключить, что применительно к пузырьку в жидкости едва ли корректно использовать заимствованное из механики твердого (недеформируемого) тела понятие силы, приложенной к центру масс. К тому же баланс сил согласно классическому принципу Даламбера справедлив в любой момент эволюции пузырька и не может служить условием отрыва. Другими словами, баланс сил — это уравнение сохранения импульса в проекции на одно из направлений; в системе отсчета с началом в центре масс пузырька оно выполняется, пока пузыrek существует. Несмотря на непрекращающиеся попытки уточнять (и усложнять) соотношения, выражющие существенные для динамики пузырька силы, такой подход в лучшем случае может рассматриваться лишь как один из приближенных методов, аналогичный анализу размерностей.

Действительная эволюция пузырька определяется полем скоростей и давлений в окружающей жидкости, причем распределение давления на межфазной поверхности подчиняется уравнению (9.28). При высоких давлениях, когда скорость изменения размера пузырька ничтожна ( $Ja < 1$ ), доминирующую роль в распределении давлений в окружающей пузыrek жидкости играют массовые силы. Здесь естественно обратиться к задачам гидростатики газожидкостных систем, в которых анализируется возникновение неустойчивости осесимметричных равновесных поверхностей раздела при достижении опреде-

ленного (критического) объема парового пузырька [28]. При  $\text{Ja} \gg 1$  распределение давления в окрестности растущего пузырька обусловлено не только гидростатикой, но и движением «расталкиваемой» пузырьком жидкости. В этих условиях модель, позволяющая рассчитывать размер пузырька в момент отрыва, должна объяснять, почему начиная с некоторого этапа эволюции пузырька уравнение (9.28) продолжает выполняться лишь при отделении парового объема от стенки. Таким образом, естественно в первую очередь рассмотреть указанные два предельных случая: отрыв пузырьков при  $\text{Ja} < 1$  (гидростатическое приближение) и  $\text{Ja} \gg 1$  («инерционная схема отрыва»).

*Отрыв паровых пузырьков от поверхности при малых скоростях роста.* При очень медленном увеличении объема парового пузырька ( $\text{Ja} < 1$ ) форма его поверхности в любой стадии роста определяется уравнением гидростатического равновесия (см. [28]). Отрыв от твердой поверхности медленно растущего парового пузырька в принципе может моделироваться двумя конкретными задачами гидростатики; в обеих задачах предельный (предотрывной) размер пузырька определяется не нарушением баланса сил, а потерей устойчивости межфазной поверхности. Первая из них — задача о пузырьке на гладкой горизонтальной поверхности — дает для предотрывного размера пузырька соотношение, широко известное как формула Фритца:

$$D_0 = 2R_0 = 0,0207\theta \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}, \quad (9.29)$$

где краевой угол  $\theta$  измеряется градусах. Вторая из упомянутых выше задач определяет предотрывной объем газового пузырька в жидкости на срезе капилляра. Есть веские основания считать, что именно эта задача гидростатики наилучшим образом может моделировать условия отрыва медленно растущих паровых пузырьков при кипении.

Действительно, анализ кинограмм процесса кипения при высоких давлениях показывает, что шероховатость поверхности нагрева не позволяет основанию пузырька «расползаться» по мере его роста. При этом получается, что пузырек как бы «выдувается» из впадины на поверхности нагрева. Поэтому для оценки предотрывного диаметра парового пузырька при кипении в области высоких давлений (медленно растущие пузырьки) можно рекомендовать формулу [28]

$$D_0 = 3 \sqrt{\frac{6d_k \sigma}{g(\rho' - \rho'')}}. \quad (9.30)$$

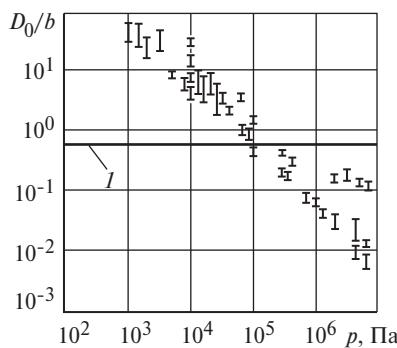
Аналогом капилляра в данном случае служит устье поверхностной впадины, т.е. величина  $d_k$  в формуле (9.30) соответствует характерному размеру шероховатости твердой стенки. При значениях  $d_k = 1 \div 10$  мкм соотношение (9.30) дает для воды при высоких давлениях  $D_0 \approx 0,3 \div 0,6$  мм, что удовлетворительно согласуется с опытными данными, полученными на поверхностях нагрева, имеющих характерные размеры микронеровностей порядка нескольких микрометров.

Такое использование формулы (9.30) было обосновано в конце 60-х годов (см. [23]). Позднее были выполнены эксперименты, в которых изучался отрыв паровых пузырьков при кипении воды и этанола на искусственных впадинах с точно измеренным размером  $d_k$  [72]. Оказалось, что при давлении 0,2—3,7 МПа формула (9.30) с очень высокой точностью согласуется с опытными данными для этанола и вполне удовлетворительно для воды.

Что касается формулы Фритца, то, будучи безусловно точной, в рамках гидростатической задачи она совершенно не применима к расчету предотрывных размеров паровых пузырьков при кипении. В области низких давлений это вполне естественно, ибо подход с позиций гидростатики в принципе не пригоден к анализу условий отрыва быстро растущих паровых пузырьков. Об этом можно было и не говорить, если бы не появлялись публикации, в которых формула (9.29) по-прежнему именуется «формулой Фритца для отрывного диаметра парового пузырька при кипении», и при этом даже не оговаривается диапазон применимости этой формулы.

На рис. 9.15 убедительно показано, что в весьма широком диапазоне давлений и для весьма различных жидкостей формула (9.29) не обнаруживает даже качественного соответствия результатам опытов. Из рисунка видно, что расчет по формуле Фритца (кривая I) дает значения  $D_0$ , которые в области самых низких давлений (порядка 1 кПа) почти на два порядка меньше, чем полученные в опытах, а при наиболее высоких давлениях (1,0—10,0 МПа) на порядок и более превосходят те, что наблюдались в экспериментах. Несоответствие формулы (9.29) опытным данным в условиях медленного (квазистатического) роста паровых пузырьков обусловлено, по-видимому, выше отмеченным влиянием шероховатости любой реальной поверхности нагрева. С ростом давления уменьшается капиллярная посто-

$$\text{янная } b = \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}, \text{ определяющая линейный масштаб любой}$$



**Рис. 9.15. Отрывные диаметры паровых пузырей при кипении при различных давлениях (I — диапазон опытных данных); кривая 1 — по формуле**

$$(9.29) \text{ при } \theta = 30^\circ, b = \sqrt{\frac{\sigma}{g(p' - p'')}}$$

равновесной двухфазной системы в задачах гидростатики. В силу этого при наиболее высоких давлениях характерный размер шероховатости поверхности нагрева становится соизмеримым с размером паровых пузырьков, в результате чего здесь уже не проходит приближение гладкой стенки, на основании которого можно было бы использовать в анализе формулу Фритца.

*Отрыв паровых пузырьков при кипении в области низких приведенных давлений.* Как показано в п. 9.2.4, при быстром расширении сферической паровой полости давление в ней, а значит, и давление на границе пузырька со стороны жидкости заметно превосходит давление  $p_\infty$  вдали от межфазной границы. При кипении на горизонтальной твердой стенке расширение парового пузырька не обладает сферической симметрией, пузыrek, особенно в начальный период роста, отталкивает жидкость от стенки. В результате жидкость как бы «прижимает» пузырек к обогреваемой поверхности. В целом прослеживается тенденция: чем больше скорость роста пузырька, тем дольше он удерживается у стенки и тем больших размеров достигает перед отрывом.

Естественно, все сказанное выше о равенстве давления пара в пузырьке и давления жидкости во всех точках его поверхности остается в силе (с точностью до ничтожного для рассматриваемых крупных пузырьков скачка давлений). Однако само это давление превышает гидростатическое давление жидкости на той же глубине, но вдали от растущего пузырька. Так как скорость роста

парового пузырька на стенке, определяемая для различных диапазонов числа Яакоба формулами (9.24) или (9.27), уменьшается во времени, то уменьшается и избыточное давление в жидкости, вызываемое расширением пузырька. Можно ожидать, что пузырек начнет отходить от стенки, когда скорость его роста сравняется с установившейся скоростью всплытия пузырька в спокойной жидкости  $U_\infty$ . Действительно, при стационарном всплытии крупных пузырей давление жидкости на поверхности пузыря одинаково (см. [24]), причем в лобовой точке оно выше, чем на той же глубине далеко в стороне от всплывающего пузыря. Если скорость роста парового пузыря на стенке снижается до  $U_\infty$ , то достигаются те же условия, какие существуют при стационарном всплытии пузыря, когда его форма и скорость всплытия не зависят от глубины (если конечно, давление столба жидкости много меньше давления над уровнем жидкости).

Таким образом, при

$$\dot{R} = U_\infty \quad (9.31)$$

для поддержания равенства давлений на свободной поверхности жидкости, которая в рассматриваемом случае есть замкнутая поверхность парового объема, пузырь должен отрываться от стенки.

Приведенные рассуждения справедливы только для крупных пузырей, так как только здесь ничтожны эффекты поверхностного натяжения. Следовательно, условие (9.31) относится к случаю, когда закон роста определяется формулой (9.27), а величина  $U_\infty$  согласно [24] — формулой  $U_\infty = 1,05 \sqrt{g R_0}$ .

Записывая (9.27) в виде

$$R = A t^{3/4}, \quad (9.27a)$$

находим для момента отрыва с учетом (9.31)

$$\dot{R}_0 = \frac{3}{4} A t_0^{-1/4} = 1,05 \sqrt{g R_0}.$$

Выразив из последнего уравнения время роста до отрыва  $t_0$  и используя его в (9.27a), находим

$$R_0 = \frac{A^{8/5}}{(1,4)^{6/5} g^{3/5}},$$

или, раскрывая значение  $A$  согласно (9.27),

$$R_0 = 0,22 \left( \frac{\lambda c_p}{\rho''} \right)^{2/5} \frac{R_i^{6/5} T_s^2}{h_{LG}^{8/5} g^{3/5}}. \quad (9.32)$$

В работах [25, 78] приводится сравнение расчета по (9.32) с опытными значениями  $R_0$  при кипении различных жидкостей (вода, спирты, четыреххлористый углерод, кислород) и давлениях  $p \leq 20$  кПа. Хотя при выводе этого соотношения используется формула (9.27), справедливая при  $Ja > 500$ , разумное согласие опытных и рассчитанных по (9.32) значений эквивалентного радиуса парового пузырька в момент отрыва обнаруживается до  $Ja \approx 175$ , а для кислорода — даже до  $Ja \approx 34$ . Важно отметить, что при выводе формулы (9.32) не потребовалось как-либо корректировать числовую константу.

*Использование модели сферического пузырька в приближенном анализе условий отрыва.* Следует отметить, что инерционные силы в жидкости, приводимой в движение растущим пузырьком, оказываются существенными для условий отрыва парового пузырька даже при относительно небольших числах Яакова ( $Ja = 3 \div 30$ ). Благодаря их влиянию можно объяснить, в частности, почему паровой пузырек отрывается от поверхности нагрева в условиях микрогравитации [практически в невесомости, когда актуальное ускорение массовых сил составляет  $(10^{-4} \div 10^{-5})g$ ] или — в земных условиях — в направлении, противоположном силе тяжести, вниз от поверхности цилиндрического нагревания. Для такого объяснения используем модель сферического пузырька. С учетом сказанного выше априорное задание формы газовой полости делает анализ приближенным. Однако постулирование не изменяемой во времени формы пузырька позволяет использовать достаточно простые методы механики твердого тела, в частности понятие силы, приложенной к центру масс. Степень приближенности такого подхода зависит от того, насколько принимаемая в модели форма близка к наблюдаемой в опытах. Это отступление от требований строгого анализа никоим образом не распространяется на принцип Даламбера: баланс сил, приложенных к пузырьку заданной формы, остается справедливым в любой момент времени и не может использоваться как условие отрыва.

Известно, что при стационарном движении в невязкой жидкости сфера не испытывает сопротивления (парадокс Даламбера). Однако в случае ускоренного движения сила сопротивления возникает. Качественно это объясняется тем, что ускоренно движущееся тело вовле-

кает в движение (тоже ускоренное) определенную массу жидкости. В результате ускоренно движущееся тело как бы увеличивает своюю массу, так что второй закон Ньютона записывается для него в виде

$$F = (m + m_*) \frac{du}{dt}, \quad (9.33)$$

где  $m$  — собственная масса тела;  $m_*$  — так называемая присоединенная масса жидкости, вовлекаемой в движение;  $F$  — сила, вызывающая ускоренное движение. В классической гидромеханике (см., например, [5, 26, 35]) значения  $m_*$  рассчитаны для тел различной формы. Для сферы

$$m_* = \frac{2\pi}{3} \rho' R^3, \quad (9.34)$$

т.е. присоединенная масса составляет половину массы жидкости, вытесняемой сферой. (Детальное обоснование соотношений (9.33) и (9.34) см. в [23].) Если движущееся тело — это газовая полость со сферической оболочкой, то его собственная масса  $m \ll m_*$ , так как  $\rho'' \ll \rho'$ . В этом случае динамику ускоренного движения определяет в основном присоединенная масса. Ясно, что качественно такая ситуация складывается при росте парового пузырька: инерционное сопротивление расталкиваемой жидкости может быть объяснено с использованием понятия присоединенной массы.

В [23] рассмотрена модельная задача о всплытии в невязкой жидкости сферического газового пузырька, расширяющегося по закону

$$R = A_1 t^n, \quad (9.35)$$

где  $A_1$  и  $n$  — некоторые константы. Пузырек возникает на некотором уровне  $h = 0$  в момент времени  $t = 0$ ; с течением времени газовый пузырек всплывает за счет гравитационных сил, так что высота его центра будет изменяться по некоторому закону  $h = h(t)$ , а скорость всплытия пузырька  $u = dh/dt$ . Схема подъема расширяющегося пузырька показана на рис. 9.16, *a*.

Принцип Даламбера для такого пузырька  $F_c + F_g = 0$ , где массовая сила (сила плавучести)

$$F_g = \frac{4}{3} \pi R^3 g (\rho' - \rho'')$$

и направлена в положительном направлении оси  $h$ . Сила сопротивления  $F_c$  связана с ускоренным движением пузырька, но при этом

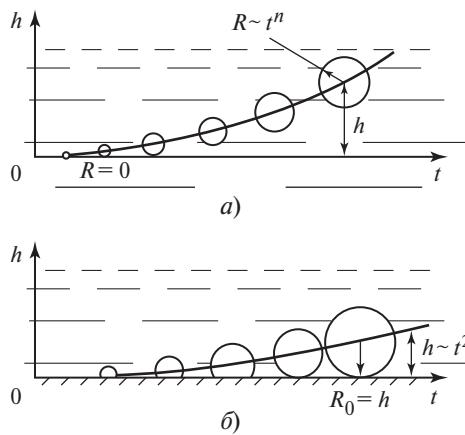


Рис. 9.16. Схема подъема растущего пузырька в объеме жидкости (а) и на твердой поверхности (б)

нужно иметь в виду, что радиус пузырька изменяется во времени и, следовательно, присоединенная масса пузырька  $m_* = m_*(t)$ . Собственной массой газового пузырька пренебрегаем.

Тогда для растущего пузырька

$$F_c = \frac{d(m_* u)}{dt} = -\frac{2}{3}\pi\rho' \frac{d(R^3 u)}{dt}. \quad (9.36)$$

Из этих соотношений с учетом закона (9.35) получаем

$$\frac{d}{dt}(t^{3n} u) = 2g \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} t^{3n}.$$

При низких давлениях  $\rho' \gg \rho''$ , так что  $(\rho' - \rho'')/\rho' \approx 1$ . Интегрируя последнее уравнение при начальном условии  $t = 0, R = 0, h = 0$ , имеем

$$u = \frac{dh}{dt} = \frac{2}{3n+1} g t.$$

Повторное интегрирование при том же начальном условии дает окончательно

$$h = \frac{1}{3n+1} g t^2. \quad (9.37)$$

Заметим, что этот результат может быть получен и более строго, путем нахождения поля потенциала скорости в жидкости, окружающей расширяющуюся по закону (9.35) сферическую полость, на поверхности которой выполняется условие  $p'_R = \text{idem}$ .

Таким образом, высота центра растущего в объеме жидкости парового пузырька (окруженного оболочкой, обеспечивающей его сферичность) увеличивается во времени по квадратичному закону, что отражено на рис. 9.16, *a*.

Анализ кинограмм роста паровых пузырьков при вакуумном кипении (типа изображенной на рис. 9.12, *б*) позволяет приближенно заменить реальную картину схемой на рис. 9.16, *б*. Согласно этой схеме пузырек растет, меняя свою форму от полусферической на начальной стадии до идеальной сферической в момент отрыва. Тогда анализ, проведенный для всплытия в объеме жидкости расширяющейся сферической полости, можно использовать для нахождения условия отрыва парового пузырька от твердой поверхности. При этом условие отрыва принимает простой вид  $h = R_0$ , т.е. радиус пузырька в момент отрыва выражается соотношением

$$R_0 = \frac{1}{3n+1}gt_0^2, \quad (9.37a)$$

где  $t_0$  — время роста пузырька от зарождения до отрыва. В [24] показано, что формула (9.37а) хорошо согласуется с опытными данными, если в ней использовать значения  $n$ , определяемые по опытным кривым роста пузырей.

Схема, приведенная на рис. 9.16, *б*, и кинематическое условие отрыва  $h = R_0$  означают, что скорость подъема центра пузырька непосредственно в момент отрыва совпадает со скоростью роста пузырька. Следовательно, это кинематическое условие, приводящее к формуле (9.37а), равносильно ранее использованному другому (тоже кинематическому) условию отрыва (9.31). Правда, в последнем случае скорость всплытия принималась постоянной, отвечающей объему пузырька в момент отрыва.

В действительности обе схемы отрыва идеализируют реальный процесс, поскольку всплытие пузырька начинается фактически сразу после его зарождения, как это следует из анализа схемы на рис. 9.16, *а*. По мере отхода пузырька от обогреваемой стенки уменьшается площадь его поверхности, соприкасающейся с тепловым пограничным слоем на стенке. В результате с увеличением объема пузырька уменьшаются энергетические ресурсы для его роста: показатель степени  $n$

в зависимости вида (9.35) уменьшается в сравнении со значениями  $n = 1/2$  или  $n = 3/4$ , определяемыми уравнениями (9.24) и (9.27) соответственно. Это особенно заметно для крупных пузырьков, время пребывания которых у обогреваемой стенки составляет 100—200 мс, что на порядок превышает типичное время роста паровых пузырьков при кипении воды и ряда других жидкостей при давлениях, близких к атмосферному. Такие крупные пузырьки перед отрывом почти перестают увеличивать свой объем ( $n \approx 0$ ). Последний из кинокадров на рис. 9.12, б наглядно объясняет причину этого: здесь поверхность пузырька практически не имеет контакта с перегретой жидкостью на обогреваемой стенке. Поскольку такое изменение закона роста пузырька характерно для наиболее низких давлений ( $\text{Ja} > 200$ ), то использование при выводе формулы (9.32) кинематического условия (9.31) в этом диапазоне параметров находит разумное обоснование. При меньших числах Яакова влияние изменения закона роста пузырька во времени не столь значительно, что дает аргументы в пользу другого кинематического условия отрыва.

Для качественного объяснения вероятной причины отрыва пузырька в условиях невесомости или в направлении против силы тяжести воспользуемся формулой (9.36), приняв в ней [с учетом (9.35)]

$$u = \dot{R} = A_1 n t^{n-1},$$

что оправдано для малого промежутка времени перед отрывом. В этом случае

$$F_c = -\frac{2}{3}\pi\rho' \frac{d}{dt} \left( A_1^4 n t^{4n-1} \right) = -\frac{2\pi}{3} n (4n-1) A_1^4 t^{4n-2} \rho'.$$

Отсюда ясно, что при  $n > 0,25$   $F_c < 0$ , т.е. инерционная сила со стороны жидкости направлена к поверхности нагрева и препятствует отрыву, а при  $n < 0,25$   $F_c > 0$ , так что эта сила направлена от поверхности и стремится оторвать пузырек от стенки. Качественно это объясняется просто: при сильном падении скорости роста (при  $n = 1/4$   $\dot{R} \sim t^{-3/4}$ ) первоначально приведенная в движение растущим пузырьком жидкость увлекает его за собой. Этот эффект будет, очевидно, более сильным, если показатель степени  $n$  в (9.35) уменьшается во времени по мере истощения энергетических ресурсов роста пузырька.

Видимо, это и наблюдали в экспериментах на космической станции в условиях практической невесомости, когда отсутствуют привычные в земных условиях массовые силы, обеспечивающие всплы-

тие пузырька в жидкости. Интересно, что оторвавшиеся пузырьки в этих экспериментах в случае насыщенной жидкости останавливались на некотором расстоянии от обогреваемой стенки, где образовывались большие скопления пара.

Еще более удивительное, на первый взгляд, явление наблюдалось в земных условиях при кипении на поверхности нагрева в виде горизонтально расположенной тонкой проволоки. Киносъемка фиксировала, что пузырьки, растущие на нижней образующей, сначала «отскакивали» от нагревателя вниз и лишь затем естественным образом всплывали. Очевидно, когда размер пузырька существенно превышал диаметр нагревателя, доля поверхности, покрытой перегретой жидкостью, уменьшалась, скорость роста пузырька резко снижалась, и его увлекала от обогреваемой стенки вниз предварительно приведенная в движение жидкость.

Необходимо подчеркнуть, что описанные явления имеют пока лишь качественное объяснение, поскольку надежно описать трехмерную картину течения и теплообмена в окрестности тонкопроволочного нагревателя в настоящее время вряд ли возможно и численными методами.

Укажем, наконец, что формула (9.37а) позволяет получить реалистичное уравнение, связывающее размер пузырька в момент отрыва с реальными параметрами и свойствами жидкости и пара. Записав формулу (9.24) для момента отрыва в виде

$$R_0 = A_2 \sqrt{at_0}, \quad (9.24a)$$

где  $A_2 = 0,3Ja + \sqrt{0,09Ja^2 + 12Ja}$ , и исключив время  $t_0$  из уравнений (9.24а) и (9.37а), найдем

$$R_0 \approx 1,36A_2^{4/3} \left( \frac{a^2}{g} \right)^{1/3}. \quad (9.38)$$

Эта формула дает разумные значения  $R_0$  при «умеренных» значениях числа Якова:  $Ja = 3 \div 100$ . Тем не менее, формулу (9.38) следует воспринимать как инструмент для приближенной оценки в указанном выше диапазоне чисел Якова. Более обоснованными и надежными следует считать соотношения (9.30) и (9.32) для предельных случаев  $Ja < 1$  и  $Ja \gg 1$  соответственно. В промежуточной области чисел Якова получить физически обоснованное аналитическое уравнение для расчета  $D_0$  (или  $R_0$ ) намного сложнее, так как на распреде-

ление давления на межфазной границе и на эволюцию паровой полости влияют одновременно силы инерции, массовая сила (гравитация) и поверхностное натяжение. В [2] дается приближенное интерполяционное соотношение для  $R_0$ , пригодное в широком диапазоне чисел Яакова.

#### 9.4. Качественный анализ теплоотдачи при кипении

Для кипения характерна очень сильная зависимость плотности теплового потока  $q$  от перегрева стенки относительно температуры насыщения; это кардинально отличает теплообмен при кипении от однофазной конвекции и от конденсации. Зависимость  $q(\Delta T)$  называют кривой кипения или кривой Нукияма по имени японского исследователя, впервые описавшего эту зависимость в 1934 г. Типичная кривая кипения со схематическим изображением механизма теплообмена при различных сочетаниях плотности теплового потока и перегрева стенки  $\Delta T = T_c - T_s$  представлена на рис. 9.17. Пусть жидкость в обогреваемом сосуде находится при температуре насыщения

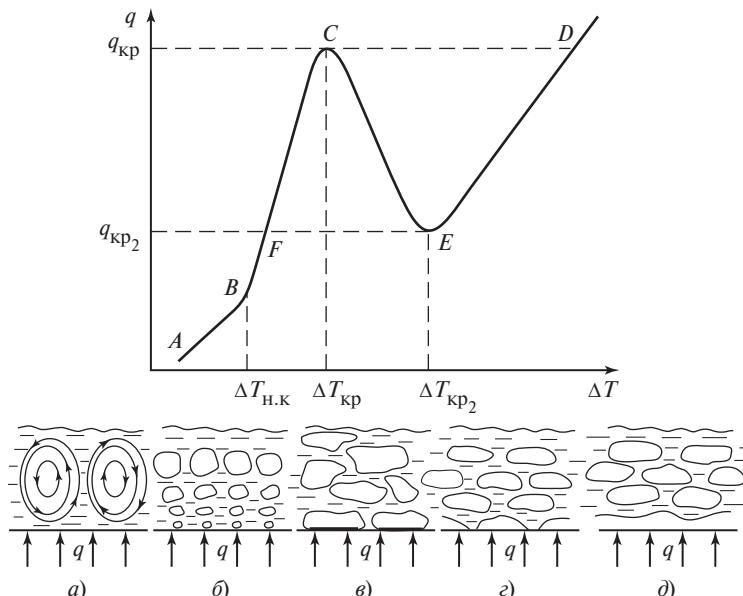


Рис. 9.17. Типичная кривая кипения и схема различных механизмов теплообмена

$T_s$ , отвечающей давлению  $p_s$  над ее уровнем. Обогреваемая поверхность, например, в виде обращенной вверх пластины с адиабатной нижней поверхностью размещена под уровнем жидкости. Дополнительное гидростатическое давление столба жидкости над нагревателем обычно составляет ничтожную долю от  $p_s$ . По обеим координатным осям используется логарифмический масштаб.

Пока перегрев стенки относительно  $T_s$  не достигнет значения  $\Delta T_{\text{н.к}}$  (начало кипения), достаточного для образования паровых пузырьков, тепло от обогреваемой поверхности отводится свободной конвекцией (рис. 9.17, *a*), а от жидкости — за счет испарения с ее свободной поверхности. В случае турбулентного свободно-конвективного движения зависимость  $q(\Delta T)$  имеет вид  $q \sim \Delta T^{4/3}$  (участок *AB* на рис. 9.17).

После начала кипения зависимость  $q(\Delta T)$  резко увеличивает крутизну: для технических поверхностей нагрева на участке *BC*  $q \sim \Delta T^3$ . Структура двухфазной смеси по мере увеличения плотности теплового потока изменяется очень значительно. При относительно малых  $q$  наблюдаются вертикальные цепочки паровых пузырьков, последовательно отрывающихся от достаточно стабильных центров парообразования на стенке (рис. 9.17, *б*). Именно в таком режиме индивидуальных пузырьков обычно проводят кинематографическое исследование кипения и получают опытную информацию о динамике роста и отрыва паровых пузырьков. При увеличении плотности теплового потока начинается слияние соседних паровых пузырьков как в вертикальном, так и в боковом направлениях. В результате формируется режим сросшихся пузырей, или паровых конгломератов, возникающих и отрывающихся от стенки (рис. 9.17, *в*). При визуальном наблюдении и при киносъемке в таком режиме довольно трудно идентифицировать области, занятые паром и жидкостью, так как картина меняется очень быстро, межфазная поверхность отличается нерегулярностью формы и подвержена пульсациям. Однако наличие на обогреваемой твердой поверхности под паровыми конгломератами жидкой пленки фиксируется в экспериментах весьма убедительно как прямыми, так и косвенными методами. (На рис. 9.17, *в* эта пленка изображена в виде зачерненной полоски.) Толщина пленки по имеющимся прямым измерениям в случае кипения воды, этанола и метанола при атмосферном давлении лежит в пределах  $2 \cdot 10^{-5}$ — $3 \cdot 10^{-4}$  м. Пленка имеет множество разрывов («паровых ножек»), т.е. очень малых по площади сухих пятен, которые, очевидно, представ-

ляют собой центры парообразования, сохранившиеся после слияния выросших на них паровых пузырьков.

Несмотря на внешнюю непохожесть картины процесса в режимах индивидуальных и сросшихся пузырей, взаимозависимость плотности теплового потока и перегрева стенки остается практически неизменной вдоль всего участка  $BC$  кривой кипения, что позволяет объединять их общим названием — *пузырьковое кипение*. Принципиальной особенностью этого вида кипения является то, что на всем его протяжении абсолютно преобладающая часть твердой поверхности нагрева покрыта жидкостью. Суммарная доля площади сухих пятен (центров парообразования) даже при самых больших тепловых потоках не превосходит 10 %.

Если кривая кипения в эксперименте исследуется при электрическом обогреве твердой поверхности, т.е. в условиях непосредственного управления плотностью теплового потока, то при достижении некоторого предельного значения  $q = q_{kp}$  (точка  $C$  на рис. 9.17) пузырьковый режим кипения обрывается катастрофически резко. Фактически, непрерывная кривая  $q(\Delta T)$  есть результат аппроксимации дискретных опытных точек, каждая из которых получается при достижении стационарного состояния после ступенчатого изменения тепловой нагрузки. Малое увеличение  $q$  в окрестности  $q_{kp}$  (обычно 2—3 % предыдущего значения) приводит к лавинообразному росту площади сухих пятен и образованию сплошной паровой пленки на обогреваемой поверхности.

Новое стационарное состояние (точка  $D$  на рис. 9.17) устанавливается в режиме пленочного кипения, а сам процесс перехода от пузырькового кипения к пленочному называют *кризисом кипения*. В пленочном режиме температура стенки превышает температуру спинодали, что исключает возможность ее прямого контакта с жидкостью; тепло передается к межфазной поверхности через паровую пленку путем теплопроводности и однофазной конвекции в паре, а также излучением. Паровая пленка гидродинамически неустойчива (по Тейлору), на ее поверхности периодически формируются и затем вслываются к свободному уровню жидкости паровые пузыри (рис. 9.17,  $\delta$ ). Коэффициенты теплоотдачи при пленочном кипении в 10—50 раз ниже, чем при тех же тепловых потоках при пузырьковом. Если для жидкостей с низкой температурой нормального кипения (криожидкости, легкие углеводороды, многие хладоны) при переходе к пленочному кипению температура стенки не достигает уровня, опасного относительно потери механической прочности, то для воды и многих других высококипящих жидкостей такой переход

обычно приводит к термическому разрушению обогреваемой поверхности. В англоязычной литературе для обозначения понятия «кризис пузырькового кипения» иногда используется термин «burnout» («пережог»).

Пленочное кипение наблюдается в стационарном режиме при тепловых нагрузках, как превышающих, так и существенно более низких, чем тепловой поток в точке  $D$ . При снижении  $q$  этот режим сохраняется до тех пор, пока температура обогреваемой поверхности, в общем случае подверженная колебаниям при колебаниях толщины паровой пленки, не снизится до температуры предельного перегрева жидкости. Если такое снижение происходит, то паровая пленка быстро разрушается, наблюдается возврат к режиму пузырькового кипения (переход  $EF$ ). Этот переход также происходит достаточно быстро (скорость его зависит главным образом от теплоемкости опытного образца, служащего поверхностью кипения), так что переход от пленочного кипения к пузырьковому тоже называют *кризисом*, но уже пленочного кипения. Соответствующий этому кризису тепловой поток называют «вторым критическим» или минимальным тепловым потоком пленочного кипения  $q_{kp2}$ .

В случаях, когда в эксперименте управляют температурой стенки (обогрев циркулирующей жидкостью через стенку трубы или конденсирующимся паром, а также электрообогрев в сочетании с конвективным охлаждением при использовании достаточно сложной системы автоматического регулирования), удается в стационарном режиме исследовать процесс *переходного кипения*. Этому процессу отвечает «неестественная» отрицательная зависимость  $q(\Delta T)$ , когда с ростом перегрева стенки тепловой поток снижается (участок  $CE$  на рис. 9.17). В переходном кипении температура стенки не превышает температуру спинодали, так что термодинамически контакт жидкости со стенкой возможен. Но из-за чрезвычайно высокого перегрева жидкость при таких контактах мгновенно вскипает и образующийся пар снова «отталкивает» ее от стенки. Схема рис. 9.17,  $g$  отражает наличие точек контакта жидкости с «горячей» твердой поверхностью. (При переходном кипении криожидкостей поверхность нагрева, с обыденной точки зрения, весьма холодная — ее температура не выше 130 К при переходном кипении азота.)

Вдоль участка  $CE$  по мере роста  $\Delta T$  уменьшается характерное время периодических контактов жидкости со стенкой; при достижении стенкой температуры предельного перегрева жидкости это время снижается до нуля и наступает режим пленочного кипения.

При закалке металлических изделий (или заготовок), в экспериментах, имитирующих послеаварийное охлаждение твэлов ядерного реактора, или в экспериментах, специально поставленных для исследования теплообмена при кипении в условиях нестационарного охлаждения, кривая кипения «проходится» справа налево. При этом качественно воспроизводятся все характерные зоны:  $DE$ ,  $EC$ ,  $CB$ ,  $BA$ ; количественные отличия от результатов стационарных исследований заметны прежде всего в окрестности точки кризиса пузырькового кипения  $C$ : в условиях нестационарного охлаждения  $q_{kp}$  обычно ниже.

## 9.5. Теплообмен при пленочном и переходном кипении

Анализ количественных методов расчета теплообмена при различных режимах кипения проведем, двигаясь по кривой кипения справа налево, от пленочного кипения к переходному и только затем — к пузырьковому. Конечно, последний в этом перечне, пузырьковый режим кипения, наиболее важен практически, ему посвящено — без преувеличения — огромное число экспериментальных и теоретических исследований (тысячи работ). Это отражает как прикладную востребованность этого процесса, так и отсутствие общепризнанной его теории. Пленочное кипение, напротив, является единственным видом кипения, для которого в некоторых предельных ситуациях, когда межфазную поверхность жидкость—пар можно считать непрерывной, существует возможность получить аналитическое решение. В этом отношении выбранный порядок рассмотрения режимов теплообмена при кипении можно считать путем «от простого к сложному», хотя, как будет ясно из дальнейшего, нерешенные вопросы есть и в пленочном кипении, а переходное кипение до настоящего времени остается просто наименее исследованным режимом кипения.

### 9.5.1. Пленочное кипение при ламинарном течении пара

В простейшей постановке проблему пленочного кипения для случая ламинарного течения пара в пленке решил в 1950 г. Бромли (L.A. Bromley). Фактически его теоретический анализ воспроизводит решение задачи Нуссельта для конденсации пара на вертикальной плоскости. Сохраняются все допущения задачи Нуссельта, кроме двух.

Во-первых, изменяются граничные условия при  $y = \delta$ . В задаче Нуссельта принималось, что пар неподвижен по отношению к поверх-

ности пленки, т.е.  $\tau_i = 0$ ,  $\partial u / \partial y = 0$  при  $y = \delta$ , т.е. жидкость не увлекается движущимся паром. При пленочном кипении естественно принять, что пар движется в плоской щели между твердой стенкой и неподвижной жидкостью (рис. 9.18, а). Это означает:  $u = 0$  при  $y = 0$  и  $y = \delta$ . При таких граничных условиях решение задачи (8.26), рассмотренной в предыдущей главе, тоже дает параболический профиль скорости, но с другими коэффициентами; средняя скорость пара в пленке

$$\bar{u} = \frac{1}{12} \frac{g \Delta \rho \delta^2}{\mu''}.$$

(В задаче Нуссельта коэффициент равен  $1/3$ .)

Во-вторых, необходимо учитывать перегрев пара по отношению к температуре  $T_s$  из-за больших перегревов (для воды  $\Delta T > 200$  К). Вводится «эффективная» теплота парообразования

$$h_{LG}^* = h_{LG} + \frac{1}{2} c_p'' \Delta T. \quad (9.39)$$

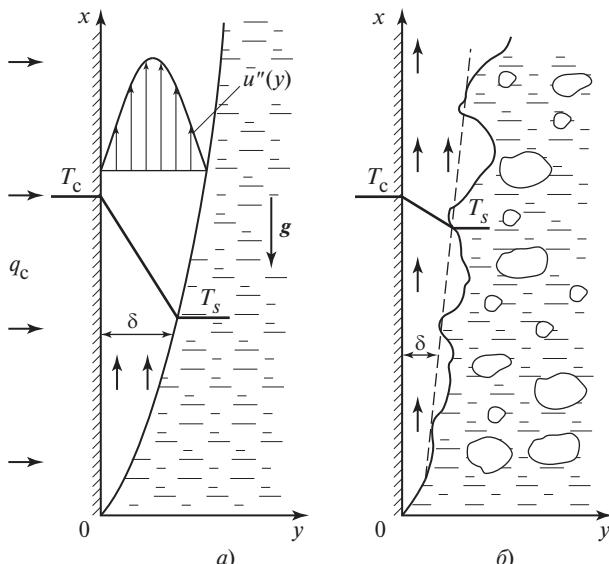


Рис. 9.18. Схема процесса пленочного кипения у вертикальной плоскости согласно модели Бромли (а), Лабунцова и Гомелаури (б)

В остальном решение повторяет анализ Нуссельта. В итоге для вертикальной плоскости локальный КТО

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{\lambda''^3 g \Delta \rho h_{LG}^*}{v'' \Delta T x}}.$$

Средний коэффициент теплоотдачи на поверхности высотой  $H$

$$\bar{\alpha} = \frac{2}{3} \sqrt[4]{\frac{\lambda''^3 g \Delta T h_{LG}^*}{v'' \Delta T H}}. \quad (9.40)$$

Сохраняя, в основном, методологию решения Нуссельта, Бромли получил соотношение и для теплоотдачи при пленочном кипении насыщенной жидкости на поверхности горизонтальной трубы:

$$\bar{\alpha} = 0,62 \sqrt[4]{\frac{\lambda''^3 g \Delta \rho h_{LG}^*}{v'' \Delta T D}}. \quad (9.41)$$

Ясно, что эта формула по структуре повторяет формулу (8.18) для теплоотдачи при конденсации пара на поверхности горизонтального цилиндра; изменения касаются только введения эффективной теплоты парообразования и естественной замены переносных свойств жидкости на свойства пара. Отличие числовых коэффициентов обусловлено различием граничных условий на поверхности пленки. Формула (9.41) неплохо согласуется с результатами измерений в случае больших в сравнении с капиллярной постоянной ( $D > b$ ) цилиндров, тогда как (9.40) дает заниженные (иногда — более чем вдвое) значения КТО в сравнении с опытами.

Очевидная причина — неустойчивость поверхности паровой пленки. При этом, поскольку  $v'' >> v'$ , толщина паровой пленки и скорость пара в ней заметно больше, чем соответствующие параметры в пленке конденсата. Кинематографические исследования пленочного кипения на вертикальной поверхности показывают, что уже на небольшой высоте от нижней точки (30—50 мм) межфазная поверхность становится сильно возмущенной, с гребней волн отрываются паровые пузырьки, так что параллельно потоку пара возникает двухфазный парожидкостный поток (рис. 9.18, б). В работе [2] на основе известных визуальных наблюдений за процессом и обнаруживаемой в опытах практической независимости КТО от линейной координаты и температурного напора делается вывод об отсутствии ламинарного режима течения в паровой пленке, по крайней мере, при  $x > 20$  мм.

Этот вывод излишне категоричен, во-первых, поскольку есть прямые измерения, например [55], в которых на высоте более 100 мм (вода, атмосферное давление) зафиксировано падение коэффициента теплоотдачи, и зависимость его от температурного напора в соответствии с формулой (9.40) (при этом численное значение среднего КТО в опытах было вдвое выше). Во-вторых, простая аналогия с обтеканием плоской пластины предполагает наличие участка ламинарного течения, пока не достигается критическое число Рейнольдса, построенное по расстоянию от начала пластины. Конечно, возмущения на поверхности пар—жидкость снижают устойчивость ламинарного течения в пленке, но едва ли исключают его полностью.

Можно предположить, что на протяженной поверхности на участке ламинарного течения пара устанавливается регулярная волновая структура, когда в пределах длины волны толщина пленки растет, а на ее гребне «избыток» пара уходит из пленки в жидкость в виде пузырей. В этом случае средний КТО должен определяться по (9.40) не по всей высоте  $H$ , а на участке, равном характерной длине волны на межфазной поверхности. Использование такого подхода позволяет вполне удовлетворительно описать опытные результаты [55]. Вместе с тем, обычно при пленочном кипении на вертикальной поверхности роль участка с ламинарным течением пара в пленке весьма мала, так что практические расчеты среднего коэффициента теплоотдачи следует проводить, исходя из предположения о турбулентном режиме течения.

### **9.5.2. Пленочное кипение при турбулентном течении пара**

Специальных исследований по определению условий турбулентного перехода в паровой пленке, по-видимому, не проводилось. По косвенным данным, а также исходя из аналогии с течением в жидких пленках, можно принять, что  $Re_{\text{пл}}^{\text{kp}} \approx 1 \cdot 10^3$ . Число Рейнольдса рассчитывается по средней скорости пара и гидравлическому диаметру, который в данном случае определяется как

$$d_r = \frac{4f}{\Pi} = \frac{4\delta_0 \Delta l}{2\Delta l} = 2\delta_0,$$

где  $\delta_0$  и  $\Delta l$  — средняя толщина и ширина пленки соответственно. Таким образом,  $Re_{\text{пл}} = 2\bar{u}\delta_0/v''$ .

Произведение  $\bar{u}\delta_0$  можно найти из баланса энергии и массы (без учета возможной проницаемости межфазной поверхности). На поверхности высотой  $H$  тепловой поток, идущий на фазовый переход и перегрев пара,  $Q = qH\Delta l$ . При  $x = H$  массовый расход пара  $G = \bar{u}\delta_0\Delta l\rho''$ ,  $Q = Gh_{LG}^*$ . Таким образом,

$$qH\Delta l = \bar{u}\delta_0\Delta l\rho''h_{LG}^*; \quad \bar{u}\delta_0 = \frac{qH}{\rho''h_{LG}^*}; \quad Re_{пл} = \frac{2qH}{\rho''h_{LG}^*v''}.$$

(Вместо  $H$  можно использовать текущее значение  $x$ .)

Расчетную формулу для КТО при  $Re_{пл} > 10^3$  можно получить, опираясь на аналогию с турбулентной свободной конвекцией. Это было впервые осуществлено Д.А. Лабунцовым (1963 г.). Как показано в гл. 5, при турбулентной свободной конвекции на вертикальной плоскости высотой  $H$

$$Nu \equiv \frac{\alpha H}{\lambda''} = 0,13(Gr Pr)^{1/3} = 0,13 \left( \frac{g\beta\Delta TH^3}{v''^2} \frac{v''}{a''} \right)^{1/3}.$$

При пленочном кипении аналогом числа Грасгофа является число Архимеда  $Ar = \frac{gH^3}{v''^2} \frac{\Delta\rho}{\rho''}$ . Производя соответствующую замену в предыдущем уравнении и имея в виду, что  $a'' = \lambda''/(\rho''c_p'')$ , получаем с точностью до неизвестной константы:

$$\alpha_{пл} = \text{const} \left( \frac{\lambda''^3 g \Delta\rho \rho'' c_p''}{v''^2 \rho'' \lambda''} \right)^{1/3} = \text{const} \sqrt[3]{\frac{\lambda''^2 g \Delta\rho c_p''}{v''}}. \quad (9.42)$$

В работе [22] уравнение такой структуры было получено на основе достаточно подробной модели процесса; схема течения отражена на рис. 9.18, б. В модели принято, что трение на возмущенной поверхности пар—жидкость намного больше, чем на обогреваемой стенке, и именно оно определяет скорость течения пара, уравновешивая подъемные архимедовы силы. Важные предположения о постоянстве коэффициента трения на межфазной границе и практической независимости интенсивности теплоотдачи от числа Рейнольдса пленки подтверждены не только оценками и согласием итоговой формулы с результатами измерений, но и прямым анализом опытных данных для различных жидкостей в диапазоне  $Re_{пл} = 800 \div 20\,000$ .

При пленочном кипении температура пара в пленке изменяется очень значительно, так что переменность свойств должна приниматься во внимание в расчетах. При кипении криогенных жидкостей из-за низкого значения  $T_s$  температурный фактор  $T_s/T_c$  (см. п. 6.9.3) в опытах находится в диапазоне 0,5—0,2. Ясно, что, например, плотность пара у горячей стенки может быть в 2—5 раз меньше, чем у межфазной поверхности. То, что рост кинематической вязкости пара с температурой частично компенсируется ростом его теплопроводности, служит обоснованием учета влияния переменности свойств на теплообмен удачного выбора определяющей температуры [2]. В формуле (9.41) свойства выбираются по средней температуре пара в пленке  $\bar{T} = (T_s + T_c)/2$ ; формула (9.42) при такой же определяющей температуре неплохо согласуется с результатами опытов при значении  $\text{const} = 0,25$ . Тем не менее, более обоснованным представляется подход Д.А. Лабунцова и А.В. Гомелаури [22], предложивших использовать формулу (9.42) в виде

$$\alpha_{\text{пл}} = 0,32 \sqrt{\frac{\lambda''^2 g \Delta \rho c_p''}{v''}} \left( \frac{T_s}{T_c} \right)^{1/2}. \quad (9.43)$$

При этом все свойства пара берутся на линии насыщения (при  $T_s$ ), а температурный фактор вводится в виде, традиционном для расчетов теплообмена газов.

В целом пленочное кипение насыщенной жидкости характеризуется низкой интенсивностью теплоотдачи; типичные значения КТО составляют 100—400 Вт/(м<sup>2</sup> · К). При высоких приведенных давлениях интенсивность теплоотдачи, естественно, растет из-за увеличения плотности пара, но редко превосходит 1000 Вт/(м<sup>2</sup> · К).

Совершенно другой уровень коэффициентов теплоотдачи наблюдается при пленочном кипении жидкости при больших ее недогревах до температуры  $T_s$ . Этот процесс давно используется в процессах закалки металлов. Технологи объективно мало озабочены механизмами теплообмена, поэтому в соответствующей специальной литературе даже не ставится под сомнение, что процесс закалки идет при пузырьковом кипении — так высока его интенсивность. Между тем, основная (по времени) часть этого процесса протекает в условиях, когда температура поверхности металла существенно превышает не только температуру предельного перегрева  $T_{\text{lim}}$ , но и критическую температуру воды, что исключает возможность прямого контакта

жидкости со стенкой и, следовательно, возможность пузырькового кипения. Выполненные в конце 1980-х годов первые теплофизические исследования пленочного кипения недогретой воды при охлаждении медных шаров (Д. Кенинг, Д. Хьюитт и их аспиранты, Великобритания) показали, что при недогревах воды, превышающих 22 К, интенсивность теплоотдачи при пленочном кипении превышает уровень, характерный для кипения в насыщенной жидкости, в 20—40 раз. Авторы назвали этот высокоинтенсивный процесс микропузырьковым кипением, основываясь на кинематографических наблюдениях за процессом. Механизм этого явления остается неясным до сих пор.

### 9.5.3. Теплообмен при переходном кипении

Переходное кипение — наименее изученный режим. Еще в 1955 г. на основе результатов скоростной киносъемки делался вывод об отсутствии контактов жидкость — стенка в этом процессе. В 1970—1980-е годы было не только установлено экспериментально наличие этих контактов, но и измерена их длительность. Сложность экспериментальных исследований переходного кипения в стационарном режиме связана с «неестественной» зависимостью  $q \sim \Delta T^n$ , где  $n = -(1 \div 2)$ , при которой случайное снижение температуры стенки требует при регулировании не увеличения, а снижения подводимой тепловой нагрузки (и наоборот). Обычный путь экспериментальных исследований обсуждаемого процесса — обогрев конденсирующимся паром. Другой метод, реализованный немецкими специалистами (Н. Auracher и др.), потребовал создания специальной конструкции рабочего участка, предусматривающей сочетание его электрообогрева с охлаждением однофазным теплоносителем, прокачиваемым через каналы рабочего участка; естественно, в опытах использовалась довольно сложная система автоматизированного управления.

Общепризнанных теоретических моделей переходного кипения нет. Показательно, что в расчетных кодах в обоснование безопасности АЭС теплообмен в переходном режиме рассчитывается по эмпирической методике, сводящейся к тому, что опытные точки, отвечающие тепловым потокам  $q_{kp1}$  и  $q_{kp2}$  в координатах  $(q, \Delta T)$ , соединяют прямой в логарифмических координатах.

Для практически важного диапазона низких приведенных давлений, когда  $Ja = \rho' c_p \Delta T / (h_{LG} \rho'') \geq 200$ , приближенная модель была разработана в МЭИ [49, 53]. Рассматривается достаточно протяженная горизонтальная поверхность, обращенная вверх. Принимается, что отношение площадей контакта стенка—жидкость и стенка—пар на

всей поверхности нагрева равно отношению соответствующих длительностей контакта в произвольной точке поверхности, т.е.  $S'/S'' = t_{ж}/t_{п}$  (эргодичность процесса).

В момент контакта порции жидкости со стенкой, благодаря высокому ее перегреву, за очень короткое время (практически мгновенно) перегревается тонкий слой жидкости на стенке, активируются многочисленные поверхностные впадины и образуются паровые зародыши с размерами  $R_* = 2\sigma/\Delta p$ ,  $\Delta p = p'' - p_\infty$ ,  $p'' = p_s(T_c)$ . Высокие перегревы предопределяют малый размер жизнеспособного парового зародыша, большую плотность возникающих центров парообразования и очень быстрый начальный рост пузырьков. Совокупность перечисленных условий ведет к тому, что пузырьки смыкаются, «зашемляя» на поверхности нагрева жидкую пленку толщиной  $\delta \approx O(R_*)$ . Схема этого процесса представлена на рис. 9.19. Расстояние между соседними центрами парообразования  $l$  зависит от их поверхностной плотности. Оценки показывают, что все перечисленные события успевают завершиться за время не более  $1 \cdot 10^{-6}$  с.

Образовавшийся паровой объем растет за счет испарения тонкой защемленной пленки жидкости. Высокие числа Якова предопределяют рост пузырька по закону (9.27):

$$R = 0,5 \left( \frac{\lambda c_p}{\rho_s''} \right)^{1/4} \frac{R_i^{3/4} T_s^{5/4}}{h_{LG}} t^{3/4}.$$

Этот рост продолжается, пока не испарится вся пленка. Материальный баланс для полусферического пузырька и жидкой пленки:

$$\frac{2}{3}\pi\rho''R_0^3 = \pi R_0^2 \rho' \delta_0.$$

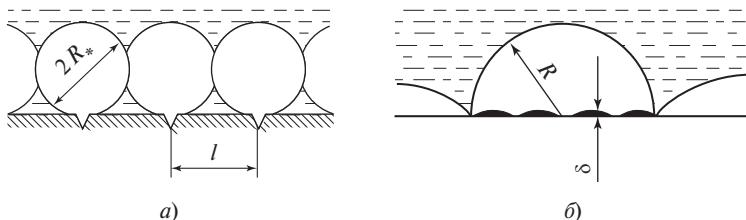


Рис. 9.19. Схема образования паровых зародышей и защемленной жидкой пленки в момент контакта жидкости со стенкой (а); схема роста парового пузырька за счет испарения защемленной пленки (б)

Так как  $\delta_0 \approx R_*$ , то  $R_0 = R_* \frac{\rho'}{\rho''}$  — размер пузырька в момент завершения испарения пленки. Используя этот результат, закон роста (9.27) и обоснованное в п. 9.2.4 выражение для перепада давлений вдоль кривой насыщения

$$\Delta p = 1,4 \frac{h_{LG}^2 \Delta T^2 \rho''}{R_i T_s^3},$$

рассчитываем  $t_{ж}$  — время контакта жидкость—стенка. С точностью до числового множителя имеем

$$t_{ж} = C_4 \left( \frac{\rho' \sigma}{h_{LG}} \right)^{4/3} \left( \frac{T_s}{\rho''} \right)^{7/3} \left( \frac{R_i}{\lambda c_p} \right)^{1/3} \frac{1}{\Delta T^{8/3}}. \quad (9.44)$$

Сильная зависимость времени контакта жидкости со стенкой от ее перегрева:  $t_{ж} \sim \Delta T^{-8/3}$ , представляется совершенно естественной и оказалась в хорошем согласии с имеющейся опытной информацией.

Высокая скорость роста парового пузырька на этапе испарения жидкой пленки обусловливает то, что на протяжении всего этого этапа и по его завершении давление в пузырьке превышает давление в жидкости на бесконечности,  $p'' > p_\infty$ . Это означает, во-первых, что пузырек активно «расталкивает» жидкость и потому «прижимается» ею к стенке, а во-вторых, что после полного испарения жидкой пленки происходит адиабатическое расширение пузырька, препятствующее доступу жидкости к стенке. Таким образом, пока скорость расширения пузырька не сравняется со скоростью всплытия крупных пузырей в жидкости (см. п. 9.3.3), пузырек остается у стенки, т.е. в рассматриваемой области поверхности сохраняется контакт пар—стенка. Закон роста пузырька при адиабатическом расширении ( $R \sim t^{2/5}$ ) обоснован аналогией с ростом объема газовой полости при подводном взрыве. Используя условие отрыва (9.31), т.е.  $\dot{R} = U_\infty$ , и приводимую в п. 9.3.3 формулу для скорости всплытия крупных пузырей  $U_\infty = 1,05 \sqrt{g R_0}$ , можно определить время контакта пар—стенка  $t_{п}$ .

Поскольку интенсивность отвода тепла от стенки во время контакта ее с жидкостью на порядки выше, чем при контакте с паром,

теплоотводом к пару можно пренебречь, т.е. принять, что в течение времени  $t_{\text{п}}$  стенка практически не охлаждается. Тогда для среднего теплового потока получаем

$$\bar{q} = \frac{q_{\text{ж}} t_{\text{ж}}}{t_{\text{п}} + t_{\text{ж}}} = \frac{q_{\text{ж}} t_{\text{ж}} / t_{\text{п}}}{1 + (t_{\text{ж}} / t_{\text{п}})}. \quad (9.45)$$

Тепловой поток за время контакта жидкости со стенкой находится из очевидного соотношения

$$q_{\text{ж}} = \delta \rho' h_{LG} / t_{\text{ж}}. \quad (9.46)$$

При известном значении  $t_{\text{п}}$  важный в анализе параметр — отношение времен контакта определяется соотношением

$$\frac{t_{\text{ж}}}{t_{\text{п}}} = 500 \frac{(\rho' \sigma T_s)^{25/24} g^{5/8}}{(\lambda c_p h_{LG})^{5/12} \rho''^{5/3} R_i^{5/24} \Delta T^{25/12}}, \quad (9.47)$$

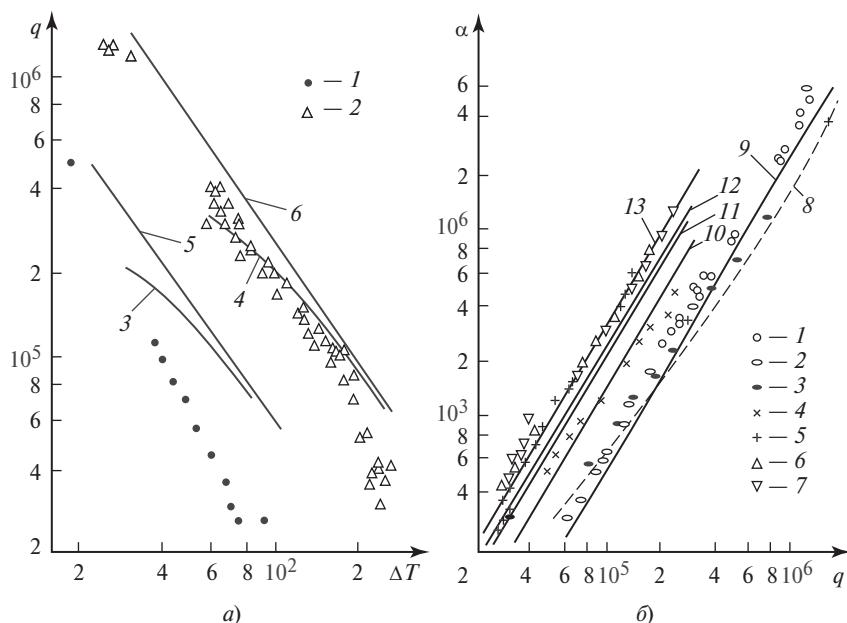
в котором числовой множитель в рамках модели оценивался по порядку величины и окончательно подбирался по опытным данным.

Соотношения (9.44)–(9.47) позволяют получить итоговое расчетное уравнение для теплоотдачи при переходном кипении, которое содержит лишь один эмпирический множитель:

$$q = 32 \frac{(\sigma \rho')^{17/24} R_i^{11/24} T_s^{41/24} g^{5/8}}{(h_{LG} c_p)^{1/12} \rho''^{1/3} \Delta T^{17/12} (1 + t_{\text{ж}} / t_{\text{п}})}. \quad (9.48)$$

Фактически при сравнении с опытными данными в большинстве случаев принималось, что  $t_{\text{ж}} \ll t_{\text{п}}$ ,  $1 + t_{\text{ж}} / t_{\text{п}} \approx 1$ , так что числовой множитель, входящий в соотношение (9.47), в итоговом уравнении (9.48) не использовался.

Уравнение (9.48) проверено на большом массиве опытных данных как авторов модели, так и литературных. На рис. 9.20 представлено сопоставление результатов расчетов по этому уравнению с экспериментальными данными отечественных и зарубежных исследователей. На рис. 9.20, а показано, как влияет на результаты расчетов множитель  $(1 + t_{\text{ж}} / t_{\text{п}})$ : кривые 5 и 6 для переходного кипения метанола и воды соответственно построены для  $(1 + t_{\text{ж}} / t_{\text{п}}) = 1$ , а кривые 3 и 4 — с использованием (9.47). Ясно, что влияние указанного множителя становится заметным при приближении к максимуму ( $q = q_{\text{кр}}$ ) на кривой кипения. В целом можно говорить, что уравнение (9.48) не только



**Рис. 9.20. Сравнение расчетной зависимости (9.48) с опытными данными:**  
 а — опытные данные о кипении метанола (1) и воды (2) при атмосферном давлении, кривые 3 и 4 — расчет по (9.48) и (9.47), 5 и 6 — по (9.48) при  $(1 + t_{ж}/t_{п}) = 1$ ; б — опытные данные о переходном кипении воды (1—3), метанола (4), хладонов R-113, R-114 при различных давлениях (5—7), кривые 9—13 — расчет по (9.48) при  $(1 + t_{ж}/t_{п}) = 1$

качественно отражает падение теплового потока с ростом перегрева стенки (по закону  $q \sim \Delta T^{-17/12}$ ), но и неплохо количественно согласуется с результатами измерений. Другая часть рис. 9.20 подтверждает это более наглядно. На рис. 9.20, б сравнение расчетных кривых с опытными данными проведено в координатах  $(\alpha, q)$ , впервые использованных для переходного кипения профессором Г. Аурахером. Помимо данных для воды и метанола, здесь представлены результаты экспериментов с хладонами R-113 и R-114 при различных давлениях; штриховая кривая 8 отражает расчет по эмпирическому соотношению Э.К. Калинина и других для переходного кипения воды. Из этого рисунка хорошо видно, что КТО при переходном кипении очень сильно зависит от плотности теплового потока; уравнение (9.48) определяет эту зависимость как  $\alpha \sim q^{29/17}$ .

## 9.6. Теплообмен при пузырьковом кипении

### 9.6.1. Качественные закономерности процесса

Пузырьковое кипение — основной используемый в технике режим кипения. Тепловая и атомная энергетика, химические, пищевые, микробиологические технологии, охлаждение (термостабилизация) различных напряженных в тепловом отношении элементов оборудования — это далеко не исчерпывающий перечень практических применений пузырькового кипения. Активное изучение закономерностей процесса началось в середине 1930-х годов, но главные результаты получены после окончания Второй мировой войны, т.е. после 1945 г.

За 60 с лишним лет опубликовано огромное число экспериментальных и теоретических работ. Показательно, что библиографический список книги Е.И. Несиса [29], вышедшей из печати почти 40 лет назад и посвященной в основном физике кипения при свободном движении жидкостей, содержит 1049 наименований. Поскольку пузырьковое кипение до сих пор остается объектом интенсивных исследований, не будет преувеличением сказать, что результаты этих исследований отражены в публикациях, число которых составляет многие тысячи.

Такое внимание к проблеме связано не только (и не столько) с ее практической важностью, но и с отсутствием общепризнанной теории процесса. Во многих случаях новые технологии заставляют использовать ранее не исследованные жидкости или применять хорошо известные при новом сочетании режимных параметров, геометрии и свойств нагреваемой поверхности. Это стимулирует новые опытные исследования; в последние 10—15 лет, например, интенсивно исследуется кипение диоксида углерода в связи с открывшейся перспективой его использования в системах кондиционирования, в холодильных и теплонасосных установках. Многочисленные работы проводятся в поисках эффективных способов интенсификации теплообмена при кипении (что актуально, прежде всего, для малотеплопроводных жидкостей при небольших тепловых потоках).

Наряду с прикладными работами продолжаются фундаментальные исследования пузырькового кипения, причем в первую очередь экспериментальные, направленные на изучение взаимосвязанных явлений, определяющих возникновение и рост паровых пузырьков. Влияние микрогометрии, смачиваемости и теплофизических свойств обогреваемой стенки на парообразование, связь зарождения и роста паровых пузырьков с изменением поля температуры в стенке, рас-

пределение пара и жидкости в непосредственной близости от твердой поверхности, структура и количественные характеристики тонкой жидкой пленки под паровыми пузырьками — все это и составляет по существу процесс пузырькового кипения. В истории становления современных взглядов на пузырьковое кипение останутся такие принципиальной важности исследования, как работа [66], в которой впервые введено и обосновано понятие «микрослой» жидкости в основании парового пузырька. В настоящее время подобного типа исследования проводятся с использованием современных методов измерений и обработки их результатов.

Очевидно, к 1998 г. можно отнести первые удачные попытки прямого численного моделирования (DNS — direct numerical simulation) некоторых важных для пузырькового кипения процессов. В отличие от однофазных течений, прямое численное моделирование двухфазных систем встречает практически непреодолимые препятствия. В § 7.1 упоминалась точка зрения известного специалиста в области моделирования многофазных течений и теплообмена профессора Теофаноса (T.G. Theofanous), который подчеркивал, что межфазная поверхность представляет собой «дополнительную нелинейность» и заставляет рассматривать двухфазные системы во всей их сложности, как целое. Строго говоря, замкнутое математическое описание процесса пузырькового кипения практически не реализуемо. В распоряжении исследователей нет какого-либо аналога уравнений Навье—Стокса, чтобы описать мгновенные поля скорости в жидкой и паровой фазах и положение поверхности раздела в произвольный момент времени.

Поэтому сегодня и в обозримой перспективе прямое численное моделирование кипения возможно лишь в отношении некоторых «элементарных» процессов. Уже достигнутые результаты представляют гигантский шаг в теоретическом осмыслении пузырькового кипения. Качественно новым этапом следует считать моделирование роста и последующего отрыва индивидуального парового пузырька на обогреваемой плоской поверхности в неоднородном температурном поле без предварительного задания формы межфазной границы. Помимо всего прочего, результаты этих исследований ясно показали, что нет никакой необходимости вводить в анализ какие-либо силы, приложенные к центру масс пузырька, чтобы предсказать условия его отрыва от стенки. Отделение пузырька от обогреваемой стенки — это естественный этап эволюции его поверхности, определяемой полем давлений в окружающей жидкости, которое, в свою очередь,

зависит от поля скоростей и массовых сил в жидкости и в паре и от поверхностного натяжения на межфазной границе.

Для понимания закономерностей теплоотдачи при кипении исключительно важен анализ условий теплообмена в ближайшей окрестности линии контакта трех фаз в основании парового пузырька (см. п. 9.3.1). Применительно к кипению такой анализ первоначально был осуществлен в рамках приближенной модели [48]. Работа [73] была первым успешным численным моделированием теплообмена в так называемой «микрообласти» («micro-region»), т.е. в тонкой жидкой пленке у границы центра парообразования на обогреваемой стенке. В этой работе для заданных режимных параметров и свойств жидкости были получены профиль пленки и распределение плотности теплового потока в окрестности контактной линии. Позднее один из авторов [73] П. Стефан (P. Stephan) показал, что расчетное значение максимального теплового потока в этой области может достигать  $60 \text{ МВт}/\text{м}^2$  даже при кипении низкотеплопроводных органических жидкостей; это примерно на три порядка выше среднего теплового потока на стенке, для которого выполнялось моделирование. Согласно расчетам ширина зоны интенсивного испарения вдоль периметра сухого пятна составляет около  $0,4 \text{ мкм}$ , максимальный тепловой поток приходится примерно на середину этой зоны. Такие исследования дают теоретическое объяснение опытным наблюдениям, показавшим наличие стоков тепла огромной интенсивности в начальный период роста парового пузырька на твердой стенке и связавшим это явление с наличием микрослоя жидкости под пузырьком.

Однако, несмотря на впечатляющие результаты подобных теоретических исследований, они практически не влияют сегодня на инженерные расчеты теплообмена, которые проводятся с использованием эмпирических формул, нередко содержащих размерные константы. Отсутствие замкнутого математического описания процесса означает невозможность однозначного выбора определяющих теплоотдачу при кипении критериев подобия и построения обоснованного безразмерного расчетного уравнения. В § 3.5 упоминалось об одной из последних по времени попыток обосновать уравнение подобия для теплоотдачи при кипении методами теории размерностей, и было показано, что эту попытку нельзя считать удачной. По-настоящему объективных критериев для оценки достоинств и недостатков обобщенных уравнений (в отсутствие замкнутого математического описания процесса) не существует. Дело осложняется тем, что между различными теплофизическими свойствами веществ существуют взаи-

мосвязи, поэтому во многих случаях совершенно различные уравнения подобия успешно описывают одни и те же опытные результаты. При этом универсального уравнения подобия не создано, и оснований надеяться на его появление нет.

При анализе любого сложного процесса совершенно естественно обращение к результатам, полученным ранее для хорошо изученных явлений. Это полностью относится к большинству предложенных методов моделирования теплообмена при пузырьковом кипении. Фактически все безразмерные уравнения теплоотдачи при кипении построены по аналогии с однофазной конвекцией. В качестве основного определяющего числа подобия предлагается обычно модифицированное число Рейнольдса или Пекле, в которых в качестве характерной скорости используется (чаще всего) средняя скорость парообразования:

$$W_0'' = \frac{q}{h_{LG} \rho''}. \quad (9.49)$$

Реже за характерную скорость принимают скорость роста парового пузырька. Ясно, что других физически значимых скоростей в процессе пузырькового кипения не существует. При однофазной конвекции интенсивность переноса энергии всегда растет с увеличением скорости жидкости. В случае пузырькового кипения обе присущие процессу скорости становятся ничтожно малыми при высоких приведенных давлениях из-за большой плотности пара, тогда как интенсивность теплоотдачи непрерывно увеличивается с ростом давления.

Сказанное хорошо подтверждает табл. 9.1, в которой приведены опытные данные о теплоотдаче при кипении весьма различных по физическим свойствам жидкостей при высоких приведенных давлениях. Во всех случаях в экспериментах изучалось кипение в условиях свободного движения (в «большом объеме»). Первые четыре строки таблицы относятся к кипению воды, этанола, хладона R-134a и диоксида углерода на наружной поверхности горизонтальных труб; в нижней строке даны сведения о кипении гелия на обращенной вверх горизонтальной плоскости. Помимо первичных данных о плотности теплового потока и коэффициенте теплоотдачи для каждого случая рассчитаны средняя скорость парообразования по (9.49) и скорость роста парового пузырька  $dR/dt$  в момент времени  $t = 1$  мс согласно формуле Д.А. Лабунцова (9.25). Видно, что обе характерные скорости имеют порядок сантиметра или нескольких миллиметров в секунду. В последнем столбце приведена та скорость однофазной жидкости, которая необходима, чтобы обеспечить полученные при

пузырьковом кипении значения КТО. Для цилиндров использовалось уравнение А.А. Жукаускаса (4.42) для поперечного обтекания цилиндра при сверхкритических числах Рейнольдса; для гелия сравнение дано с натеканием жидкой струи диаметром 3 мм. Эти расчетные скорости однофазной конвекции на три-четыре порядка превышают действительные скорости, вызываемые процессом пузырькового кипения. Значение  $\Delta_3$ , приведенное в табл. 9.1, — это толщина эквивалентной пленки согласно формуле (1.7). Этот параметр, вполне оправданный при анализе однофазной конвекции, очевидно, теряет смысл для пузырькового кипения. Особенно это справедливо для наиболее высоких приведенных давлений (первые три строки табл. 9.1), где  $\Delta_3$  оказывается меньше, чем средняя высота элементов шероховатости стенки. Заметим, что приводимые в таблице опытные данные для  $\text{CO}_2$  относятся скорее к умеренным, чем к высоким приведенным давлениям.

Таким образом, ясно, что опытные данные о теплообмене при пузырьковом кипении невозможно объяснить, опираясь на аналогию с любым процессом однофазной конвекции. О том же свидетельствуют и многие другие выявленные в экспериментах факты. Сильная зависимость плотности теплового потока от температурного напора  $q \sim \Delta T^3$  объективно лишает физического содержания коэффициент теплоотдачи, что обсуждалось еще во вводной части курса (п. 1.2.2). Поскольку КТО сильно зависит от плотности теплового потока:  $\alpha \sim q^{2/3}$  (или от температурного напора:  $\alpha \sim \Delta T^2$ ), эта величина не может рассматриваться как гидродинамический параметр и является служебной характеристикой для сравнения с интенсивностью других видов теплообмена или при расчетах теплопередачи

Таблица 9.1. Округленные значения КТО при кипении  
и характерные скорости процесса

Жидкость	$p/p_{\text{кр}}$	Нагреватель	$q$ , $\text{kBt}/\text{m}^2$	$\alpha$ , $\text{kBt}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$	$\Delta_3$ , мкм	$W_0''$ , $\text{m}/\text{s}$	$dR/dt$ , $\text{m}/\text{s}$	$U_\infty$ , $\text{m}/\text{s}$
Вода	0,67	Труба, 6 мм	830	315	1,57	0,008	0,0052	90
Этанол	0,78	Труба, 5 мм	350	140	0,79	0,009	0,0046	88
R-134a	0,80	Труба, 25,4 мм	60	160	0,31	0,0013	0,0018	274
Диоксид углерода	0,19	Труба, 16 мм	82	20	7,5	0,007	0,013	10,7
Гелий	0,445	Плоский диск	4	10	1,96	0,0116	0,0083	12,8

через разделяющую стенку в теплообменниках. Что касается собственно гидродинамических эффектов, в том числе таких сильных (в случае однофазной конвекции), как массовая скорость  $\rho W_0$ , поля массовых сил (гравитационного, электрического, магнитного), то их влияние на теплообмен при развитом пузырьковом кипении в большинстве случаев ничтожно. При этом плотность теплового потока определяется перегревом стенки относительно температуры насыщения, т.е. недогрев жидкости до температуры насыщения при развитом кипении не влияет на КТО. Вместе с тем, интенсивность теплоотдачи при кипении ощутимо зависит от таких «слабых» факторов, как смачиваемость, микрогеометрия, теплофизические свойства поверхности нагрева, а также наличие примесей в кипящей жидкости.

Сказанное позволяет утверждать, что пузырьковое кипение принципиально отличается от любого другого типа конвективного теплообмена. Родовой признак этого режима кипения — наличие линий контакта трех фаз на поверхности теплообмена. Огромные локальные плотности теплового потока в окрестности этой линии, о чем говорилось выше, — основная причина чрезвычайно высокой интенсивности переноса тепла при пузырьковом кипении, особенно при высоких приведенных давлениях.

Несмотря на огромный объем опытной информации о процессе и успешный теоретический анализ отдельных его составляющих, общепризнанной методики расчета теплообмена при пузырьковом кипении не существует. Широкое использование кипения во многих технологиях в такой ситуации предопределяет наличие большого числа эмпирических соотношений. При этом безразмерные корреляции в отсутствие замкнутого математического описания объективно не имеют преимуществ перед простыми размерными формулами. Такие формулы получены для определенных веществ, иногда для групп веществ с близкими свойствами, и справедливы в определенном диапазоне давлений.

Типичный пример — формула для теплообмена при пузырьковом кипении воды:

$$\alpha = 3,15 q^{0,7} p^{0,15},$$

в которой тепловой поток  $q$  должен задаваться в ваттах на квадратный метр ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ), давление  $p$  — в барах (1 бар =  $10^5$  Па); тогда коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  получают в ваттах на квадратный метр-kelvin [ $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ]. Формула рекомендуется для довольно узкого диапазона давлений  $p = 1 \div 40$  бар, если иметь в виду, что диапазон существ

вования воды в жидкому состоянию охватывает давления от 0,00061 до 22,12 МПа (0,0061—221,2 бар).

В Германии для инженерных расчетов созданы таблицы\* и построены фактически индивидуализированные соотношения для коэффициента теплоотдачи при кипении конкретных жидкостей. Общая форма расчетного уравнения имеет вид

$$\frac{\alpha}{\alpha_*} = \left( \frac{q}{q_*} \right)^n F_1 \left( \frac{p}{p_{kp}} \right). \quad (9.50)$$

Для каждого вещества выбирается некоторое реперное давление  $p_*$  (в безразмерной форме  $p_*/p_{kp}$ ), при котором существуют надежные опытные данные о КТО. Для фиксированного (реперного) теплового потока  $q_*$  на основе этих данных определяется наиболее вероятное значение  $\alpha_*$ . Набор технически важных жидкостей и указанные реперные значения для каждой из них  $p_*$ ,  $q_*$ ,  $\alpha_*$  представлены в таблице. Эмпирическая функция  $F_1(p/p_{kp})$ , входящая в (9.50), и другая, определяющая значение показателя степени при тепловом потоке в этой формуле:  $n = F_2(p/p_{kp})$ , даются как универсальные для всех жидкостей (или — более точные — для групп однотипных веществ: воды, спиртов, хладонов, углеводородов и т.д.). Таким путем на основе (9.50) можно рассчитать КТО при произвольном значении давления и теплового потока, причем для хорошо исследованных веществ получаются неплохие результаты. Но, к примеру, рекомендации для CO<sub>2</sub> по состоянию на 2005 г. дают плохое согласование с появившимися к этому времени результатами. Ясно, что для любой жидкости, не вошедшей в таблицу, необходимо проводить новые исследования (или разыскивать результаты таких исследований в литературе), чтобы иметь возможность рассчитать теплообмен при ее кипении.

Невозможность точно предсказать интенсивность теплообмена при пузырьковом кипении, основываясь лишь на «первых принципах», объясняет позицию тех исследователей, которые считают нецелесообразными любые попытки построить теорию этого явления. Купер [57] приводит серьезные аргументы в пользу лишь простых эмпирических корреляций для КТО при пузырьковом кипении. Его уравнение, включающее лишь тепловой поток, молекулярную массу

---

\* VDI — Heat Atlas, DOI10.1007/978-3-540-77877-6\_34. Berlin: Heidelberg: Springer — Verlag, 2010.

вещества и приведенное давление (в более полном варианте — еще характерную высоту выступов поверхности шероховатости), стало сегодня достаточно популярным. Справедливости ради следует отметить, что подход Купера во многом напоминает существенно более ранние разработки В.М. Борицанского [4]. Однако такие очень простые расчетные уравнения не гарантируют точности, которая может быть необходима на практике. Например, уравнение работы [57] оказалось в очень плохом согласии с опытными значениями КТО при кипении этиленгликоля. Поучительный пример рассматривается в фундаментальной (более чем 1000-страничной!) монографии [70]. Оказалось, что значения КТО при кипении некоторой жидкости (судя по набору свойств, одного из углеводородов или хладонов), рассчитанные по пяти различным уравнениям, могут отличаться друг от друга в 20 раз [от 1,18 до 23,2  $\text{kBt}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ]. Для сопоставления использовались популярные на Западе уравнения Форстера—Зубера, Розеноу, Купера, а также Бира (Bier) и др.; из уравнений наших соотечественников в этот список попала формула И.Л. Мостинского из статьи, опубликованной в 1963 г. в журнале «Теплоэнергетика». Представив такие результаты, авторы [70] «разводят руками»: никаких общих рекомендаций (по выбору предпочтительного соотношения) дано быть не может.

Означает ли все вышесказанное, что действительное положение столь безнадежно? Представляется, что для отрицательного ответа на такой вопрос есть достаточно оснований. В любом, даже чрезвычайно сложном явлении можно из множества составляющих его взаимодействий выделить главные, принципиально важные. Обычно число таких главных взаимодействий (механизмов) невелико. Конечно, отбор таких «главных» механизмов с неизбежностью будет отражать индивидуальную точку зрения исследователя. Но сегодня специалисту доступны огромное число экспериментальных фактов и результаты теоретических исследований многих механизмов, существенных для процесса. И хотя интерпретация этой информации в отсутствие строгой математической модели процесса может быть неодинаковой, существует реальная возможность постепенно продвигаться к адекватному пониманию механизмов теплообмена при пузырьковом кипении. Именно на таком пути можно построить приближенную модель этого процесса. Впервые такой подход был реализован в 1963 г. Д.А. Лабунцовым (см. [21, с. 104]). Развитием этого направления исследований теплообмена при пузырьковом кипении являются работы [48, 79].

### 9.6.2. Приближенная теория теплообмена при пузырьковом кипении

Из приведенного выше качественного анализа следует, что в достаточно широкой области режимных параметров пузырьковое кипение управляет своими собственными, внутренними механизмами. Убедительным доказательством этого служит то, что зависимость  $q \sim \Delta T^3$  (участок  $BC$  на рис. 9.17) для кипения в условиях свободного движения (или, как говорят, «в большом объеме») сохраняется и при вынужденном движении жидкости. Этот вопрос подробнее будет рассмотрен в следующем параграфе; пока отметим, что независимость интенсивности теплоотдачи при кипении от скорости потока жидкости, как и от других гидродинамических эффектов, наблюдается лишь в условиях, когда на поверхности действует достаточно большое число центров парообразования, т.е. в режиме развитого пузырькового кипения.

Действующие при пузырьковом кипении центры парообразования — это очень малые сухие пятна на обогреваемой твердой поверхности. Характерный размер этих пятен примерно равен радиусу жизнеспособного парового зародыша  $R_*$ , рассмотренного в п. 9.1.2 и определяемого при малых  $\Delta T$  формулой (9.1). Именно благодаря этим сухим пятнам образуются границы контакта трех фаз, в окрестности которых возникают локальные стоки тепла огромной интенсивности. Плотность центров парообразования  $n_F$ , т.е. число сухих пятен на единицу площади поверхности нагрева, — это важнейший параметр для теплообмена при кипении. В отсутствие строгой теории зарождения паровых пузырьков на стенке, исходя из соображений размерности и общих физических представлений, можно принять

$$n_F = C_0 R_*^{-2}. \quad (9.51)$$

Действительно, если микропадины твердой поверхности не имеют каких-либо предпочтительных размеров, т.е. в актуальном для кипения жидкостей диапазоне значений  $R_*$  число впадин любого размера примерно одинаково, то уменьшение  $R_*$  означает увеличение числа поверхностных впадин, которые могут стать центрами парообразования. Эту закономерность и отражает формула (9.51), предложенная Д.А. Лабунцовым (1963 г.) прежде всего применительно к техническим поверхностям нагрева. Числовой множитель  $C_0$  в (9.51) оценивается путем сопоставления с опытными данными как  $C_0 = O(10^{-8} \div 10^{-7})$ .

При равномерном распределении центров парообразования на поверхности (рис. 9.21) среднее расстояние между ними

$$l_* = 1/\sqrt{n_F} = C_0^{-1/2} R_* . \quad (9.52)$$

Так как  $C_0^{-1/2} \sim 10^4 \div 10^3$ , а значение  $R_*$  весьма мало, то суммарная площадь сухих пятен на поверхности вдали от критической тепловой нагрузки ничтожна, что полностью подтверждается опытными наблюдениями. Согласно прямым измерениям при кипении воды и метанола при атмосферном давлении доля поверхности нагрева, соответствующая прямому контакту пар—стенка, не превышает 1—2 % вплоть до тепловых потоков на уровне  $0,9q_{kp}$ . Следовательно, каждый центр парообразования с зоной интенсивного испарения жидкости вдоль ограничивающей его контактной линии может рассматриваться как точечный сток тепла высокой интенсивности. При этом на преобладающей части площади обогреваемой поверхности между центрами парообразования тепло к жидкости передается путем конвекции, также обусловленной процессами парообразования. Обозначая тепловой поток за счет испарения по границам сухих пятен как  $q_1$ , а конвективную часть потока тепла  $q_2$ , можно записать для полного теплового потока при кипении:

$$q = q_1 + q_2, \quad (9.53)$$

причем этот полный тепловой поток может быть отнесен ко всей площади поверхности кипения в силу малой относительной площади сухих пятен.

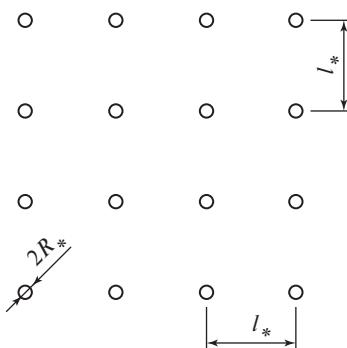


Рис. 9.21. Схематическое изображение равномерного распределения центров парообразования на обогреваемой стенке

Тепловой поток  $q_1$ , очевидно, может быть записан как:

$$q_1 = Q_{c.p} n_F, \quad (9.54)$$

где  $Q_{c.p}$  — мощность теплового стока, приходящегося на одно сухое пятно. Расчетная схема течения жидкости в окрестности сухого пятна представлена на рис. 9.22. В отличие от рис. 9.13, где рассматривался жидкий микрослой с конической поверхностью и исчезающей малой площадью сухого пятна, здесь представлена схема, характерная для режима сросшихся пузырьков. На некотором расстоянии  $R_m$  от центра сухого пятна располагается зона наиболее интенсивного испарения, где толщина пленки  $\delta_m << \delta_0$  — средней толщины «макропленки», так что ее термическое сопротивление  $\delta_m/\lambda$  за счет теплопроводности здесь мало. При этом толщина  $\delta_m$  намного превосходит межмолекулярные расстояния в жидкости, и, следовательно, силы адсорбции здесь уже не препятствуют испарению. Предполагается стационарный процесс, в котором вся приходящая в зону интенсивного испарения жидкость испаряется благодаря подводу тепла от стенки. Сама область испарения имеет конечную ширину в окрестности радиуса  $r = R_m$ . Учитывая малость рассматриваемой области в сравнении с размером парового пузырька, схему на рис. 9.22 и относящийся к ней анализ можно применить и к режиму изолированных пузырьков; в этом случае  $\delta_0$  должна иметь значение порядка толщины эффективного теплопроводного слоя жидкости  $\Delta$ .

Течение жидкости в тонкой пленке в данном случае обусловлено градиентом кривизны ее поверхности (градиентом кривизны мениска). Прямыми измерениями в модельных экспериментах установлено, что при испарении с поверхности мениска жидкой пленки кривизна поверхности в зоне наиболее интенсивного испарения возрастает.

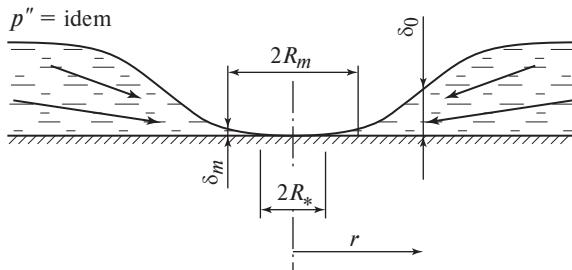


Рис. 9.22. Расчетная схема течения жидкости у границы сухого пятна

Для схемы на рис. 9.22 это означает, что  $dH/dr < 0$ , т.е. кривизна поверхности пленки уменьшается по мере удаления от оси симметрии. Поскольку давление в паре  $p''$  однородно, из формулы Лапласа

$$p'' - p'(r) = 2\sigma H(r)$$

следует, что

$$\frac{dp'}{dr} = -2\sigma \frac{dH}{dr}. \quad (9.55)$$

Следовательно, в жидкости существует градиент давления, вызывающий ее течение к центру исследуемой области.

Задача о течении плоской пленки в радиальном направлении по существу идентична рассмотренной в § 8.2 задаче о движении конденсата в гравитационной пленке. Единственное отличие состоит в замене в уравнении (8.26) градиента давления, равного для гравитационной пленки  $g\Delta r$ , величиной, определяемой формулой (9.55). Массовый расход жидкости на единицу длины периметра в зоне интенсивного испарения ( $2\pi R_m$ ) выражается как

$$G_R = -\frac{2\sigma\delta_m^3}{v} \frac{dH}{dr}. \quad (9.56)$$

После обсуждавшейся выше работы [73] было опубликовано еще несколько численных решений задачи об испарении жидкости в окрестности центра парообразования. Каждое из них — это численный эксперимент для конкретных условий; такие решения, несомненно, важны, поскольку позволяют выявить закономерности (тенденции) процесса при его предельной идеализации. Действительно, толщина пленки в окрестности зоны интенсивного испарения настолько мала ( $10^{-8}$ — $10^{-7}$  м), что любая техническая поверхность не может рассматриваться как гладкая по отношению к тонкой пленке; весьма неопределенным в этих условиях оказывается и краевой угол смачивания, использовавшийся в численных экспериментах. В таком случае представляется оправданным использование приближенного метода физических оценок для определения градиента кривизны мениска в (9.55). Полагая, что  $\delta_m \gg R_*$  и максимальная кривизна мениска имеет порядок  $1/R_*$ , а минимальная —  $1/\delta_m$ , причем такое изменение кривизны происходит на отрезке порядка  $R_m \sim \delta_m$ , получаем для градиента кривизны оценку

$$\frac{dH}{dr} \approx \frac{C_1}{R_* \delta_m}.$$

(Численные константы в оригинальной работе [48] оценивались на каждом шаге анализа, что позволило получить такую оценку и для числовых множителей в итоговой формуле. Здесь эти оценки не приводятся.) Таким образом, (9.56) принимает вид

$$G_R = C'_1 \frac{\sigma \delta_m^2}{\nu R_*}. \quad (9.56a)$$

Если вся жидкость испаряется в узкой кольцевой зоне вблизи окружности радиусом  $R_m$ , то линейная плотность теплового потока у границы этой зоны должна быть  $q_R = G_R h_{LG}$ , а мощность теплового стока на одном сухом пятне

$$Q_{c.p} = 2\pi R_m q_R = 2\pi C'_1 \frac{\sigma \delta_m^2 R_m h_{LG}}{\nu R_*}. \quad (9.57)$$

В то же время для оценки теплового стока  $Q_{c.p}$  можно использовать соотношение (9.21), если принять линейную аппроксимацию профиля мениска на участке интенсивного испарения. Приравнивая (9.21) и (9.57), получаем с точностью до числовой константы выражение для толщины пленки в области интенсивного испарения жидкости:

$$\delta_m = C_2 \sqrt{\frac{\lambda \Delta T \nu R_*}{\sigma h_{LG}}}. \quad (9.58)$$

Теперь, имея в виду уже использовавшееся допущение  $\delta_m \sim R_m$ , из (9.54) и (9.51) с учетом двух последних соотношений находим составляющую теплового потока, обусловленную интенсивным испарением жидкости по границам сухих пятен (центров парообразования):

$$q_1 = C_3 \left( \frac{\lambda \Delta T}{R_*} \right)^{3/2} \left( \frac{\nu}{\sigma h_{LG}} \right)^{1/2}. \quad (9.59)$$

Составляющая  $q_2$  может быть представлена в традиционном для однофазной конвекции виде:

$$q_2 = \lambda \Delta T / \Delta, \quad (9.60)$$

где  $\Delta$  — эффективная толщина теплопроводного слоя жидкости на твердой стенке. В режиме сросшихся пузырей этот слой жидкости

принимает вполне осозаемый вид жидкой пленки толщиной  $\delta_0$  под паровыми конгломератами. (Ее часто называют «макропленкой» в отличие от «микропленки» или «микрослоя» в основании одиночного пузырька.) В режиме одиночных пузырьков теплопроводный слой составляет (для неметаллических жидкостей) некоторую часть толщины динамичного пограничного слоя на стенке, которая обусловлена пристеночным движением жидкости при парообразовании.

Принимая за характерную скорость процесса среднюю скорость парообразования  $W_0''$ , определяемую формулой (9.49), за характерный линейный масштаб расстояние  $l_*$  между центрами парообразования согласно (9.52), можно оценить толщину  $\Delta$  по аналогии с толщиной динамического погранслоя как

$$\Delta = C_4 \sqrt{\frac{l_* v}{W_0''}} = C'_4 \sqrt{\frac{R_* v h_{LG} \rho''}{q}}, \quad (9.61)$$

где  $C'_4 = O(10^1 \div 10^2)$ . Используя этот результат в (9.60), находим

$$q_2 = C_5 \lambda \Delta T \sqrt{\frac{q}{\rho'' v R_* h_{LG}}}, \quad (9.62)$$

где  $C_5 = 1/C'_4$ .

Подстановка (9.59) и (9.62) в выражение для полного теплового потока на поверхности (9.53) превращает его в квадратное уравнение относительно плотности теплового потока  $q$ . При его решении удобно обозначить

$$q_* = \frac{\lambda^2 \Delta T^2}{\rho'' h_{LG} v R_*}; \quad B_0 = \frac{q_1}{q_*} = C'_3 \frac{\rho'' h_{LG}^{1/2} v^{3/2}}{(\sigma \lambda \Delta T R_*)^{1/2}}.$$

\* Если  $q_2 = q$ , а  $R_*$  определяется согласно (9.1), то из (9.62) получается  $q = C'_5 \frac{\lambda^2 \Delta T^3}{v \sigma T_s}$ ,

где  $C'_5$  — константа порядка  $10^{-3}$ . Такое соотношение было впервые получено Д.А. Лабунцовым в 1963 г. [21, с. 104]. При этом эффективная толщина теплопроводного слоя  $\Delta$  находилась из анализа движения жидкости, обусловленного образованием и ростом отдельных пузырьков.

В итоге получим для имеющего физический смысл положительного корня

$$q = \frac{C_5^2}{2} q_* \left( 1 + \frac{2B_0}{C_5^2} + \sqrt{1 + \frac{4B_0}{C_5^2}} \right).$$

Значение  $B_0$ , как можно убедиться, быстро увеличивается с ростом давления. Более детальный анализ с учетом порядка значения констант  $C_5$  и  $C_3$  показывает, что слагаемое  $2B_0/C_5^2$  соизмеримо с единицей при высоких приведенных давлениях. В этом случае обычно перегревы стенки  $\Delta T$  невелики и для расчета  $R_*$  можно воспользоваться формулой (9.1). Тогда

$$B_0 = C_3' \frac{h_{LG}(\rho''v)^{3/2}}{\sigma(\lambda T_s)^{1/2}}. \quad (9.63)$$

При низких приведенных давлениях и больших  $\Delta T$  линейная аппроксимация кривой насыщения дает существенную погрешность. При использовании в разложении зависимости  $\Delta p(\Delta T)$  вдоль кривой насыщения квадратичного члена после несложных упрощений получаем

$$\Delta p = \frac{\rho'' h_{LG} \Delta T}{T_s} \left( 1 + \frac{h_{LG} \Delta T}{2R_i T_s^2} \right), \quad (9.64)$$

где  $R_i$  — газовая постоянная.

При низких давлениях и больших перегревах  $\Delta T$  (например, для воды и этанола при  $p_s = 10$  кПа,  $\Delta T = 25$  К) расчет по линейному соотношению дает значения  $\Delta p$ , почти вдвое меньшие, чем действительные, соответствующие кривым насыщения. Погрешность расчета по формуле (9.64) в этих случаях не превышает 6 %.

Используемый в качестве масштабной величины теплового потока  $q_*$  с учетом (9.64) выразится как

$$q_* = \frac{\lambda^2 \Delta T^3}{2v\sigma T_s} \left( 1 + \frac{h_{LG} \Delta T}{2R_i T_s^2} \right),$$

а итоговое соотношение принимает вид

$$q = 3,43 \cdot 10^{-4} \frac{\lambda^2 \Delta T^3}{\nu \sigma T_s} \left( 1 + \frac{h_{LG} \Delta T}{2 R_i T_s^2} \right) (1 + \sqrt{1 + 800B} + 400B), \quad (9.65)$$

где безразмерный параметр

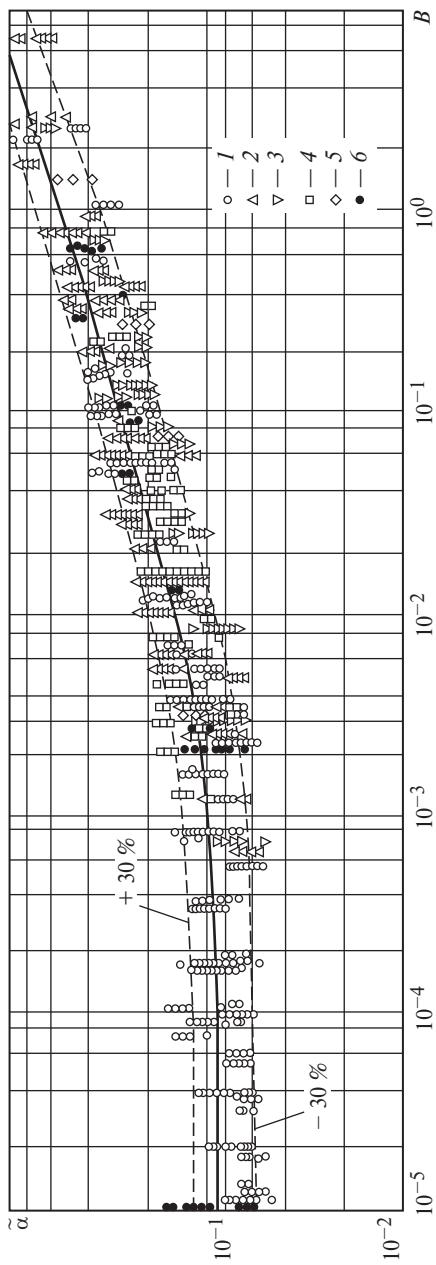
$$B = \frac{h_{LG} (\rho'' \nu)^{3/2}}{\sigma (\lambda T_s)^{1/2}}. \quad (9.63a)$$

В уравнении (9.65) использованы два числовых коэффициента, получающихся при анализе как комбинация констант  $C_5$  и  $C'_3$ ; итоговые константы ( $3,43 \cdot 10^{-4}$  и 400) подобраны на основе сопоставления с большим числом данных о теплообмене при кипении 20 различных жидкостей в широком диапазоне приведенных давлений. Порядок величины этих числовых коэффициентов соответствует предварительным оценкам на основе модели. На рис. 9.23 представлена сопоставление расчета по (9.65) с опытными данными; ордината графика — это безразмерный коэффициент теплоотдачи

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{q^{2/3}} \left( \frac{\nu \sigma T_s}{\lambda^2} \right)^{1/3} \left( 1 + \frac{h_{LG} \Delta T}{2 R_i T_s^2} \right)^{-1/3}.$$

Исходно в [48] для сравнения с расчетом было использовано более 3000 точек; на рис. 9.23 в силу ограниченности технических возможностей воспроизведены, конечно, не все точки. Рисунок, естественно, не может отразить то, что плотность распределения опытных точек относительно расчетного значения уменьшается при больших отклонениях. Поэтому большинство точек на рисунке вблизи расчетной линии фактически отражают несколько, иногда много опытных результатов, тогда как почти каждая точка с большим отклонением от расчетной зависимости, как правило, соответствует одному режиму.

На рис. 9.23 хорошо видно, что при  $B < 10^{-3}$  (область низких приведенных давлений) интенсивность теплоотдачи изменяется очень слабо с изменением этого безразмерного параметра; в области высоких приведенных давлений безразмерный КТО при кипении увеличивается с ростом  $B$  очень заметно. Естественно, при любых давлениях (любых  $B$ ) интенсивность теплоотдачи — сильная функция



**Рис. 9.23. Сравнение результатов расчета по уравнению (9.65) с опытными данными:**  
 1 — вода; 2 — этанол; 3 — бензол; 4 — метан; 5 — хладоны; 6 — азот, этилен

плотности теплового потока; при высоких давлениях  $\alpha \sim q^{2/3}$ , а при низких эта зависимость становится даже более сильной из-за влияния множителя в первых круглых скобках уравнения (9.65). (Это обсуждение интенсивности теплоотдачи никоим образом не отменяет приведенных выше аргументов о служебной роли КТО при пузырьковом кипении; для этого процесса физически обоснованной формой уравнения, характеризующего перенос тепла, является взаимосвязь  $q$  и  $\Delta T$ .)

Как отмечалось ранее, приближенная теория позволяет предсказать значения коэффициентов теплоотдачи при кипении в типичных для технических устройств условиях. Она не учитывает, например, специфику кипения на поверхностях с высокой степенью чистоты обработки, когда наблюдается очень крутая зависимость  $q(\Delta T)$ . При некотором сочетании теплофизических свойств жидкости и материала поверхности нагрева на измеряемый в опытах коэффициент теплоотдачи заметно влияет отношение коэффициентов тепловой активности ( $\chi = \sqrt{\rho c \lambda}$ ) этих веществ. Такой эффект особенно заметен при кипении гелия и (в меньшей степени) других криожидкостей. В монографии [2] приводятся расчетные уравнения для этих случаев.

## 9.7. Теплообмен при кипении жидкости в условиях вынужденного движения

### 9.7.1. Пузырьковое кипение в конвективном потоке

Как указывалось выше (п. 9.6.1), теплообмен при развитом пузырьковом кипении полностью управляет своими внутренними механизмами и не зависит от скорости вынужденного движения. Однако это не означает, что вынужденное движение вообще не влияет на закономерности кипения. Прежде всего, с ростом скорости течения жидкости  $W_0$  возрастает коэффициент теплоотдачи однофазной конвекции  $\alpha_w$  и, следовательно, при неизменной плотности теплового потока  $q$  уменьшается перегрев стенки относительно  $T_s$ . Это приводит к тому, что начало кипения в потоке жидкости происходит при тем больших  $q$ , чем выше скорость жидкости. Эта закономерность хорошо видна на рис. 9.24, на котором представлены сглаженные опытные зависимости  $\alpha(q)$ , полученные одним из авторов [18]. Теплообмен происходил на омыываемой потоком воды плоской пластине при давлении 3,92 бар. Кривая 1 соответствует кипению при свободном движении (в большом объеме). В условиях обтекания

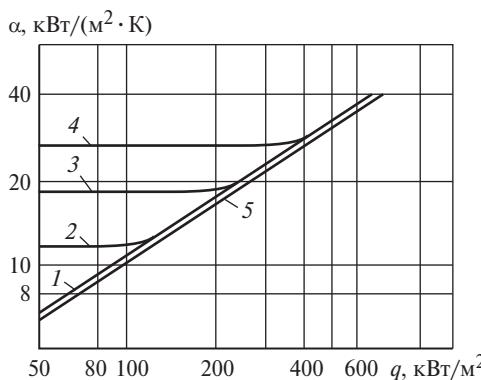


Рис. 9.24. Теплообмен при кипении воды в условиях вынужденного движения на горизонтальной пластине при  $p_s = 0,392 \text{ МПа}$  [18]:

1 —  $W_0 = 0$ ; 2 —  $W_0 = 1,05 \text{ м}/\text{с}$ ; 3 —  $W_0 = 2 \text{ м}/\text{с}$ ; 4 —  $W_0 = 3,1 \text{ м}/\text{с}$ ; 5 — расчет по формуле (9.65)

пластины потоком воды до начала закипания коэффициент теплоотдачи  $\alpha_w$  не зависит от плотности теплового потока и целиком определяется скоростью жидкости (кривые 2—4). С ростом теплового потока при постоянном  $\alpha_w$  повышается температура стенки, и при некотором значении  $q$  начинается кипение. Однако до тех пор, пока интенсивность кипения низка, оно не оказывается на значении  $\alpha = \alpha_w$ . Отклонение кривых 2—4 от горизонтали показывает, что влияние кипения стало заметным. Дальнейшее увеличение  $q$  приводит к тому, что коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  сравнивается со значением  $\alpha_q$ , отвечающим условиям кипения в большом объеме. Чем выше скорость вынужденного движения, тем при больших  $q$  это происходит.

Практически можно пользоваться простым правилом: если  $\alpha_w \geq 2\alpha_q$ , то  $\alpha = \alpha_w$ ; при  $\alpha_q \geq 2\alpha_w$   $\alpha = \alpha_q$ , где  $\alpha$  — действительный коэффициент теплоотдачи при кипении в вынужденном потоке жидкости;  $\alpha_w$  — коэффициент теплоотдачи при однофазной конвекции, определяемый скоростью потока  $W_0$ ;  $\alpha_q$  — коэффициент теплоотдачи при пузырьковом кипении в большом объеме, который может быть рассчитан по формуле (9.65). На рис. 9.24 расчету по (9.65) отвечает кривая 5, которая дает значения  $\alpha_q$ , отличающиеся от опытной кривой 1 менее чем на 8 %, что существенно меньше, чем обычный разброс опытных данных.

В области соизмеримых значений  $\alpha_q$  и  $\alpha_w$  рекомендуется интерполяционная формула

$$\alpha = (\alpha_q^3 + \alpha_w^3)^{1/3}, \quad (9.66)$$

которая учитывает перенос тепла, обусловленный одновременным действием механизмов вынужденной конвекции и кипения. Из (9.66) следует, что при двукратном превышении одного из коэффициентов теплоотдачи в сравнении с другим вклад меньшего в общий коэффициент теплоотдачи составляет всего 4 %.

Описанная методика может быть использована как при внешнем обтекании поверхности (погранслой), так и при течении в трубах. Рисунок 9.24 иллюстрирует течение в пограничном слое, а на рис. 9.25 приводятся опытные данные работы [61] для кипения хладона R-113 ( $C_2F_3Cl_3$ ) в кольцевом канале. Из этого рисунка видно, что при развитом пузырьковом кипении на теплообмен не влияет и недогрев жидкости до температуры насыщения. Коэффициенты теплоотдачи  $\alpha$  и  $\alpha_q$  здесь отнесены к температуре насыщения  $T_s$ .

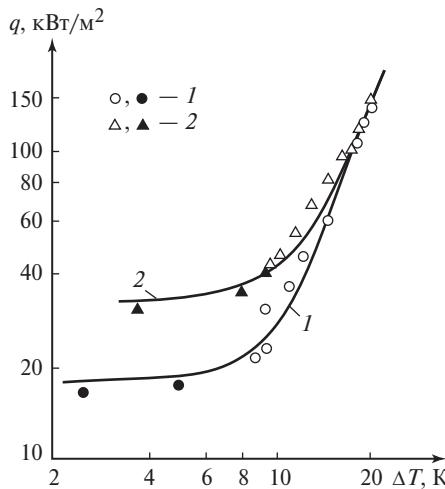


Рис. 9.25. Сравнение опытных данных [61] о кипении хладона R-113 в вертикальном кольцевом канале при давлении  $p_s = 2,19$  бар с расчетом по (9.67) и (9.65):

1 —  $\rho'W_0 = 579$  кг/(м<sup>2</sup> · с); 2 —  $\rho'W_0 = 1102$  кг/(м<sup>2</sup> · с); зачерненные точки относятся к режимам без кипения

В области заметного влияния однофазной конвекции при расчетах необходимо учитывать, что  $\alpha_w$  относится к среднемассовой температуре жидкости  $\bar{T}$ . Этот учет достигается введением очевидной коррекции в формулу (9.66):

$$\alpha = \left[ \alpha_q^3 + \alpha_w^3 \left( 1 + \frac{\Delta T_{\text{нед}}}{\Delta T} \right)^3 \right]^{1/3}, \quad (9.67)$$

где  $\Delta T = T_c - T_s$ ;  $T_{\text{нед}} = T_s - \bar{T}$  — недогрев жидкости до состояния насыщения. Использование (9.67), строго говоря, следует ограничить условием  $\Delta T > \Delta T_{\text{н.к.}}$ , так как до закипания теплообмен полностью определяется однофазной конвекцией, и плотность теплового потока

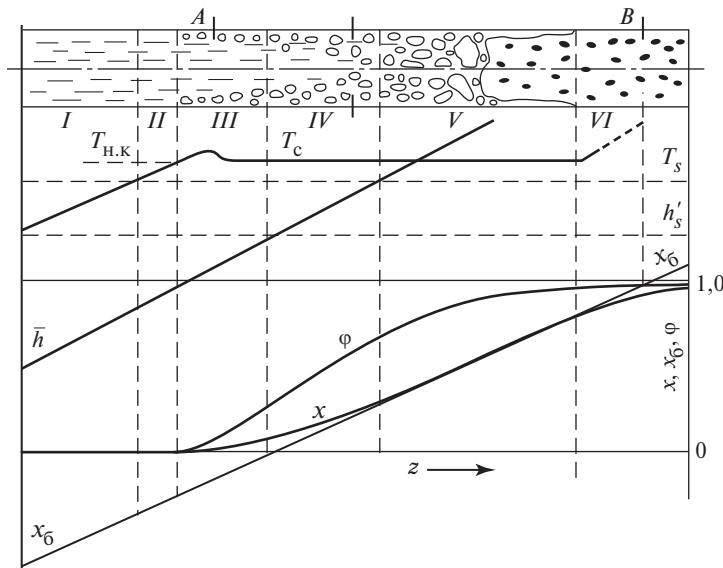
$$q = \alpha_w (T_c - \bar{T}).$$

На рис. 9.25, тем не менее, приводятся опытные точки (зачерненные символы), относящиеся к режимам без кипения. Ясно, что для таких режимов при малых  $\Delta T$  доля теплового потока, переданного за счет кипения  $q_{\text{кип}} = \alpha_q \Delta T$ , становится ничтожно малой в сравнении с передачей тепла вынужденной конвекцией, поскольку в работе [61] недогрев жидкости до  $T_s$  был весьма значителен ( $\Delta T_{\text{нед}} = 30$  К на входе в канал). Так как при неизменном  $\rho' W_0$  значение  $\alpha_w$  практически не изменяется (небольшой его рост связан с уменьшением вязкости жидкости на стенке при повышении температуры), то при  $\Delta T_{\text{нед}} \gg \Delta T$  получается очень слабая зависимость  $q(\Delta T)$  (см. рис. 9.25). В режимах без кипения опытные данные сравниваются с уравнением для теплообмена при однофазной турбулентной конвекции Б.С. Петухова с сотрудниками (6.19); входящий в него коэффициент гидравлического сопротивления рассчитывается по формуле Филоненко (4.29а). Данные, приведенные на рис. 9.25, подтверждают, что при развитом пузырьковом кипении (в данном случае при  $q > 70$  кВт/м<sup>2</sup>) скорость жидкости и ее недогрев перестают влиять на теплоотдачу, температурный режим стенки полностью определяется уравнением (9.65). В области соизмеримого влияния однофазной конвекции и кипения интерполяционная формула (9.67) хорошо согласуется с опытными данными, если соответствующие коэффициенты теплоотдачи рассчитываются по формулам (6.19) и (9.65) соответственно.

Изложенная выше методика расчета теплообмена при кипении в условиях вынужденного движения жидкости может применяться

в тех режимах течения двухфазной смеси, где возможно пузырьковое кипение. В обогреваемых трубах по длине канала непрерывно растет среднемассовая энталпия и, как следствие, изменяются структура (режим течения) двухфазного потока и закономерности теплообмена. Как обсуждалось в § 7.5, в равновесном потоке энталпия двухфазной смеси совпадает с массовым расходным паросодержанием потока. В общем случае поток может быть неравновесным; тогда величина  $x_0$ , определяемая уравнением (7.20), не равна действительному расходному массовому паросодержанию. Ее называют *относительной энталпией потока* или *балансовым расходным паросодержанием*.

Если на вход в обогреваемый канал поступает недогретая до температуры насыщения жидкость ( $x_0 < 0$ ), то по длине канала могут в общем случае наблюдаться следующие характерные области (рис. 9.26)\*.



**Рис. 9.26. Режимы течения и изменение параметров потока по длине обогреваемого канала ( масштаб при изображении разных зон различен)**

\* В действительности, при обычных для парогенерирующих труб параметрах для получения всех областей, представленных на рис. 9.26, требуется огромная длина; при этом протяженность разных зон различается очень сильно. На рисунке дана качественная схема без соблюдения реальных соотношений длин характерных участков.

Область I на рис. 9.26 соответствует однофазному конвективному теплообмену. В этой области при постоянной плотности теплового потока среднемассовая энталпия  $\bar{h}$  растет линейно, что следует из уравнения (1.24а). Если теплоемкость жидкости  $c_p$  можно считать постоянной, что неплохо выполняется при  $p \ll p_{\text{кр}}$ , то также линейно растет в этой области среднемассовая температура жидкости  $\bar{T}$ . Температурный режим стенки канала определяется в этой зоне закономерностями однофазного конвективного теплообмена согласно соотношению

$$T_c = \bar{T} + \frac{q_c}{\alpha_w}, \quad (9.68)$$

где коэффициент теплоотдачи  $\alpha_w$  рассчитывается в зависимости от режима течения по формулам, представленным в гл. 6.

Если изменением теплофизических свойств жидкости, связанным с изменением температуры, можно пренебречь и не учитывать влияние входного участка трубы, то коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  по длине остается постоянным, так что температура стенки  $T_c$  по длине области I изменяется линейно (как и  $\bar{T}$ ). Обычно принимают за нижнюю (в направлении движения) границу этой области сечение, в котором температура стенки достигает температуры насыщения  $T_s$  при локальном давлении жидкости. От этого сечения начинается область II, которая заканчивается в сечении, где действительное паросодержание  $x$  становится отличным от нуля. (В англоязычных источниках его называют сечением, в котором начинается явная генерация пара — «net vapour generation».) В пределах этой области находится сечение, в котором  $T_c = T_{\text{h,k}}$  — температуре начала кипения. Иногда принимается, что сечение с  $T_c = T_{\text{h,k}}$  и сечение с действительным  $x > 0$  совпадают. В любом случае в пределах области II, во-первых, не происходит никаких видимых изменений с потоком (он до конца области остается однофазным), а, во-вторых, среднемассовая температура жидкости  $\bar{T}$  остается меньше, чем  $T_s$ , т.е.  $x_6 < 0$ . Обычно температурный режим стенки и в области II может быть рассчитан по (9.68).

С началом области III начинается собственно двухфазное течение. Нижней границей области III является сечение, в котором среднемассовая энталпия достигает значения энталпии насыщенной жидкости, т.е.  $x_6 = 0$ . Следовательно, в пределах области III двухфазный

поток существенно неравновесный: вблизи стенки всегда существует пар, причем действительное массовое расходное ( $x$ ) и истинное объемное ( $\phi$ ) паросодержание растут по длине, а в ядре сохраняется недогретая жидкость с локальной температурой  $T < T_s$ .

Режим теплообмена в области III — это пузырьковое кипение недогретой жидкости; обычно в этом режиме коэффициент теплоотдачи определяется только плотностью теплового потока, т.е. уравнением (9.65), и практически не зависит от скорости течения смеси. По этой причине температура стенки начиная с некоторого сечения  $A$  остается неизменной. Само сечение  $A$ , расположенное вблизи верхней по течению границы области, характеризуется как раз установлением режима теплообмена, определяемого механизмом пузырькового кипения, при этом иногда наблюдается даже некоторое снижение температуры стенки (что и показано на рис. 9.26).

Граница областей III и IV определяется расчетом на основе энергетического баланса и не отражает каких-либо физических изменений в двухфазном потоке. Область IV заканчивается сечением, в котором температура жидкости во всех точках достигает температуры насыщения  $T_s$ , после чего поток становится термически равновесным. Это сечение приближенно может быть определено прямыми измерениями, расчетом найти его весьма сложно, так как для этого необходимо знать распределение истинного объемного паросодержания по сечению. Во всей области IV, таким образом, поток остается неравновесным, в каждом сечении имеются пар и недогретая жидкость; при этом относительная энталпия потока  $x_b > 0$ .

Область V — это область равновесного течения смеси. В реальных установках протяженность области весьма велика. В ее пределах в принципе возможна последовательная смена всех структур двухфазного потока — пузырьковой, снарядной, эмульсионной и дисперсно-кольцевой, хотя на самом деле многое зависит от скорости смеси, плотности теплового потока и давления. При высоких давлениях и больших скоростях снарядный режим, как правило, не возникает. Область V — единственная, в которой совпадают значения  $x = x_b$ ; коэффициент теплоотдачи здесь практически постоянен, и  $T_c$  также почти не изменяется. Заканчивается область V наступлением новой неравновесности, связанной с возникновением *кризиса кипения*. Этим термином обозначают резкое, при некотором сочетании параметров — катастрофическое, снижение интенсивности теплоотдачи и возрастание температуры стенки, обусловленное потерей непосредственного контакта жидкости и обогреваемой твердой

поверхности. Во всех рассмотренных пяти областях такой контакт сохраняется, причем и непосредственно перед кризисом жидкость покрывает преобладающую часть (как правило, не менее 90 %) внутренней поверхности трубы.

После сечения кризиса начинается область *VI*, в которой двухфазная смесь обычно состоит из перегретого относительно  $T_s$  пара и капель насыщенной жидкости. Неравновесность в некоторых случаях может быть весьма сильной, т.е. перегрев пара относительно температуры насыщения — большой (для пароводяных потоков — несколько сот градусов). Внутри области *VI* может быть расчетом определено сечение *B*, в котором  $x_6 = 1$ ; каких-либо физических изменений переход двухфазного потока через это сечение, естественно, не вызывает. В перегретом паре при  $x_6 > 1$  жидкие капли могут сохраняться довольно долго.

При высоких плотностях теплового потока кризис теплообмена при кипении может возникнуть еще в области *III*, т.е. при  $x_6 < 0$ . Если это не приводит к разрушению стенки канала, то за сечением кризиса возникает двойная неравновесность: в перегретом паре движутся капли недогретой жидкости.

Наконец, следует упомянуть, что при температуре стенки трубы, превышающей температуру предельного перегрева жидкости (температура на спинодали), режимы течения с пленкой пара на стенке могут существовать при наличии сплошного жидкого стержня в ядре потока. Это наблюдается, например, при подаче криожидкости (азота, кислорода, водорода, гелия, сжиженного природного газа) в «теплую» трубу, находящуюся при комнатной температуре; сходная картина возникает в экспериментах, моделирующих послеаварийное охлаждение твэлов ядерного реактора, когда в трубу с температурой около 1000 °C подается вода комнатной температуры (так называемое «повторное смачивание» — rewetting). При малых объемных паросодержаниях в этих случаях возникает стержневой, или обращенный кольцевой режим течения двухфазного потока: жидкий стержень, отделенный от стенки паровой пленкой.

По мере роста паросодержания жидкий стержень теряет сплошность, возникают обращенные пузырьковый, снарядный или эмульсионный режимы. При больших паросодержаниях наблюдается дисперсный режим течения: поток пара с каплями жидкости, но без прямого контакта жидкости со стенкой. Такой режим аналогичен закризисному течению (область *VI* на рис. 9.26).

Из изложенного следует, что пузырьковое кипение в обогреваемом канале может наблюдаться при сочетании параметров, отвечающих  $II-IV$  и частично  $V$  областям на рис. 9.26. Для недогретой жидкости ( $x_0 < 0$ ) пузырьковое кипение ограничено снизу минимально необходимым перегревом стенки ( $T_c - T_s|_{h,k} = \Delta T_{h,k}$ , а сверху — критической тепловой нагрузкой  $q_{kp}$ .

В отсутствие надежной теоретической модели закипания на твердой стенке для определения  $\Delta T_{h,k}$  можно воспользоваться следующей предельной оценкой:

$$\alpha_w(T_{c,h,k} - \bar{T}) = q_{kip}. \quad (9.69)$$

Если  $q_{kip}$  выразить по (9.65), то (9.69) вместе с уравнением теплового баланса (1.26а) дают систему алгебраических уравнений, позволяющих рассчитать  $T_{c,h,k}$ , т.е. температуру стенки, при которой происходит переход от однофазной конвекции к кипению (см. рис. 9.24 и 9.25). При высоких приведенных давлениях в расчетах иногда приближенно принимают, что пузырьковое кипение начинается с того сечения канала, где температура стенки сравнялась с температурой насыщения, т.е. с начала области  $II$  на рис. 9.26. Поскольку при высоких приведенных давлениях ( $p/p_{kp} > 0,2$ ) температурный напор  $\Delta T_{h,k}$  обычно не превосходит 3 К, погрешность такого приближения невелика. Кризису пузырькового кипения недогретой жидкости посвящен § 9.9.

Из-за сильной зависимости КТО при кипении от теплового потока обычно диапазон тепловых потоков, в котором соизмеримо влияние конвекции и кипения на теплообмен, очень узок (это хорошо видно на рис. 9.24 и 9.25). Для оборудования, используемого в энергетике, этот диапазон режимных параметров, как правило, интереса не представляет. Вероятно, по этой причине эффект увеличения конвективной составляющей КТО из-за роста приведенной скорости двухфазного потока редко вводится в расчетные корреляции.

### 9.7.2. Теплообмен при высоких паросодержаниях потока

Следует отметить, что для кипения в каналах, так же как и для кипения в большом объеме, создано огромное число эмпирических соотношений для КТО, что само по себе свидетельствует об отсутствии общепринятой методики расчета. Нередко авторы новых корреляций убедительно показывают, что созданные ранее расчетные уравнения описывают лишь ограниченный массив опытных данных, но, как правило, и эта, новая корреляция в дальнейшем справедливо подвер-

гается аналогичной оценке. В отсутствие строгой теории процесса новые технологии, изменяющие требования к охлаждающим средам или к условиям применения традиционных теплоносителей, стимулируют новые опытные исследования. В последнее десятилетие наблюдается рост интереса к теплообмену двухфазных потоков в каналах малого диаметра. Влияние размера канала на гидродинамику и теплообмен в двухфазных потоках несомненно, поскольку в них существуют внутренние масштабы (размер парового пузырька, диаметр жидкой капли и толщина пленки в дисперсно-кольцевом режиме течения), которые могут стать соизмеримыми с диаметром канала. В однофазных течениях нет оснований ожидать изменения в закономерностях переноса импульса и энергии с уменьшением размера канала, пока остается справедливым приближение сплошной среды.

Кипение в потоке насыщенной жидкости сопровождается ростом массового расходного паросодержания  $x$ , тем более быстрым, чем меньше массовый расход смеси и выше плотность теплового потока (это прямо следует из уравнения теплового баланса (1.24а) для энтальпии смеси). При этом структура двухфазного потока определяется не массовым, а истинным объемным паросодержанием  $\phi$ , которое при данном  $x$  зависит прежде всего от приведенного давления. В § 7.5 было показано, что в водовоздушном потоке при атмосферном давлении значению  $x = 0,01$  соответствует объемное расходное паросодержание  $\beta = 0,89$ ; поскольку плотность водяного пара при атмосферном давлении примерно вдвое меньше, чем плотность воздуха, в пароводяному потоке атмосферного давления тому же  $x$  отвечает  $\beta = 0,94$ . При давлении 7 МПа в пароводяному потоке такое же объемное паросодержание возникает при  $x$  в 44 раза большем ( $x = 0,44$ ). В докризисных режимах теплообмена (для рис. 9.26 во всех областях, кроме VI) при подъемном или горизонтальном течении средняя скорость пара выше скорости жидкости; это значит, что  $\phi < \beta$ . Расчет истинного объемного паросодержания — одна из важных проблем гидродинамики двухфазных систем, не имеющая (как почти все задачи двухфазной гидромеханики) строгого решения; практические рекомендации по расчету зависимости  $\phi = \phi(\beta)$  в адиабатных двухфазных потоках даны, например, в [24]. Важно, что две величины объемного паросодержания всегда одного порядка, обычно их соотношение лежит в пределах  $\phi/\beta = 0,7 \div 1,0$ . Для приближенных оценок можно использовать допущение об отсутствии локального скольжения фаз, когда учитывается только эффект неоднородности скорости и паросодержания по сечению канала (фактор распределения [24]); в этом случае  $\phi \approx 0,89\beta$ .

С точки зрения закономерностей теплообмена различные структуры двухфазного потока можно подразделять прежде всего на квазигомогенную и дисперсно-кольцевую; в горизонтальных каналах возможно расслоенное течение жидкости и пара [24]. Пузырьковое кипение возможно, пока на внутренней поверхности обогреваемой трубы существует слой жидкости, достаточно толстый, чтобы в нем могли возникать паровые зародыши. Этому требованию отвечает квазигомогенная структура, существующая при умеренных и высоких приведенных давлениях примерно до  $\phi \leq 0,75$ . При более высоких истинных объемных паросодержаниях возникает дисперсно-кольцевой режим течения двухфазной смеси, в котором жидккая пленка на стенке может стать столь тонкой, что в ней невозможно достичь перегрева стенки, необходимого для образования паровых пузырьков. В этом случае кипение сменяется режимом испарения с поверхности пленки. Таким образом, неравенство  $\phi \leq 0,75$  можно приближенно рассматривать как границу применимости формул (9.65) и (9.66).

Вместе с тем, нередко этой общей оценки оказывается недостаточно. К примеру, при высокой плотности теплового потока  $q$  даже в тонкой пленке жидкости градиент температуры может быть достаточно большим, чтобы на стенке возникали паровые пузырьки. Попытки создать универсальную модель теплообмена при кипении в каналах и соответствующее, общее для любых сочетаний режимных параметров расчетное уравнение, скорее всего, обречены на неудачу. Рационально ориентироваться на определенные области приведенного давления; причем объективно более простой для анализа является область высоких приведенных давлений. С ростом приведенного давления уменьшается отношение удельных объемов пара и жидкости; применительно к двухфазным течениям исчезает специфика каналов малого диаметра, поскольку упоминавшиеся выше характерные внутренние масштабы оказываются обычно много меньше поперечного размера канала. В обсуждаемом аспекте интерес представляет диоксид углерода, вся область жидкого состояния которого относится к высоким приведенным давлениям, так как в тройной точке  $p_r = p/p_{kp} = 0,07$  (для воды такое приведенное давление соответствует абсолютному давлению около 1,5 МПа). За рубежом теплообмен при кипении диоксида углерода в последние годы исследуется интенсивно, что обусловлено широкими перспективами его применения. В экспериментах, выполненных в основном после 2000 г., обнаружено, что уровень теплоотдачи при кипении в потоке диоксида углерода (как правило, в каналах малого диаметра) определяется плотностью теплового потока и давлением и почти не зависит

от массовой скорости. При этом высокие значения КТО сохраняются в широком диапазоне изменения паросодержания.

С ростом приведенного давления при идентичных значениях скорости и массового расходного паросодержания потока истинное объемное паросодержание уменьшается. Это означает, что расширяется диапазон параметров, при которых теплообмен управляемся механизмами пузырькового кипения. Несложно показать (см., например, [52]), что в условиях экспериментов с диоксидом углерода даже при кольцевой структуре потока доминирующим механизмом теплообмена остается пузырьковое кипение. Теплообмен при кипении  $\text{CO}_2$  как в условиях свободного движения, так и при вынужденном течении в каналах с хорошей точностью рассчитывается по уравнению (9.65). При этом в ряде опубликованных работ было обнаружено, что при достаточно низких плотностях тепловых потоков ( $q < 0,1q_{kp}$ ) КТО кипящего диоксида углерода увеличивается с ростом паросодержания  $x$ , т.е. с ростом скорости смеси. Очевидно, этот эффект обусловлен увеличением конвективной составляющей теплообмена в интерполяционной формуле (9.66).

В двухфазном потоке касательное напряжение на стенке сильно увеличивается с ростом паросодержания; в определенных условиях качественно так же ведет себя интенсивность конвективного теплообмена. Эта аналогия переноса импульса и энергии в гомогенном двухфазном потоке использовалась при анализе теплообмена при конденсации в трубах (§ 8.6). Было показано, что коэффициент теплоотдачи при турбулентном течении смеси пропорционален квадратному корню из касательного напряжения на стенке. Использование соотношения гомогенной модели (7.31) для касательного напряжения ведет к формуле Бойко—Кружилина (8.26). Поскольку гомогенная модель по своему содержанию более всего соответствует высоким приведенным давлениям, естественно использовать ее и в рассматриваемом случае. На основе этих соображений в [52] было впервые предложено конвективную составляющую коэффициента теплоотдачи при кипении в каналах рассчитывать по формуле

$$\alpha_w = \alpha_0 \left( 1 + x \frac{\Delta \rho}{\rho''} \right)^{1/2}, \quad (9.70)$$

где  $\alpha_0$  — КТО при однофазной конвекции при массовой скорости двухфазного потока, который при развитом турбулентном течении вычисляется по формуле (6.19).

Как видно из рис. 9.27, интерполяционная формула (9.66) позволяет успешно описать опытные данные о теплообмене при кипении в турбулентном потоке диоксида углерода, если вклад пузырькового кипения ( $\alpha_q$ ) по-прежнему определяется уравнением (9.65), а конвективная составляющая теплоотдачи ( $\alpha_w$ ) — формулой (9.70). Вклад конвективного механизма в суммарный КТО, как это видно на рис. 9.27, *a*, оказывается значительным при низких тепловых потоках и возрастает с ростом паросодержания, что отражает предложенная методика расчета. При большем тепловом потоке (рис. 9.27, *б*) относительная роль конвективного переноса тепла мала в сравнении с ролью пузырькового кипения, КТО практически не зависит от  $x$ .

В рассмотренных примерах (см. рис. 9.27) пузырьковый режим кипения сохраняется до очень высоких массовых паросодержаний ( $x = 0,7$  или  $0,8$ ), что существенно больше расчетного значения так называемого граничного паросодержания  $x_{\text{тр}}$ , определяющего условия высыхания жидкой пленки. При столь высокой массовой доле пара даже при высоком приведенном давлении ( $p_r \approx 0,54$ ) объемная доля жидкости очень мала и в расходе смеси, и в площине поперечного сечения канала (значению  $x = 0,8$  отвечают  $\beta \approx 0,97$ ,  $\varphi \approx 0,86$ ); эти оценки соответствуют кольцевому режиму течения двухфазной смеси с очень тонкой пленкой жидкости (около 70 мкм). В условиях экспериментов, представленных на рис. 9.27, минимальный радиус парового зародыша  $R_*$  менее 0,1 мкм ( $10^{-7}$  м), а перепад температур при передаче тепла теплопроводностью через пленку толщиной 70 мкм при  $q = 7,2$  и  $20 \text{ кВт}/\text{м}^2$  составляет соответственно 4,8 и 13,3 К. Эти оценки подтверждают, что внутри жидкой пленки с неизбежностью возникает пузырьковое кипение, поскольку передача тепла через пленку теплопроводностью с последующим испарением с ее поверхности требует многократно больших температурных напоров, чем наблюдаемые в опытах ( $0,3$ — $1,5$  К). Таким образом, в области высоких приведенных давлений, практически при  $p_r \geq 0,2$ , интенсивность теплообмена к парожидкостным потокам может рассчитываться по интерполяционной формуле (9.66) с использованием уравнений (6.19) и (9.70) для  $\alpha_w$  и уравнения (9.65) для  $\alpha_q$ . Этот вывод подтвержден сравнением результатов расчетов с опытными данными о кипении в каналах диоксида углерода, азота, некоторых хладонов и воды.

Необходимо указать, что отраженный на рис. 9.27, *а* рост интенсивности теплоотдачи с увеличением массового паросодержания

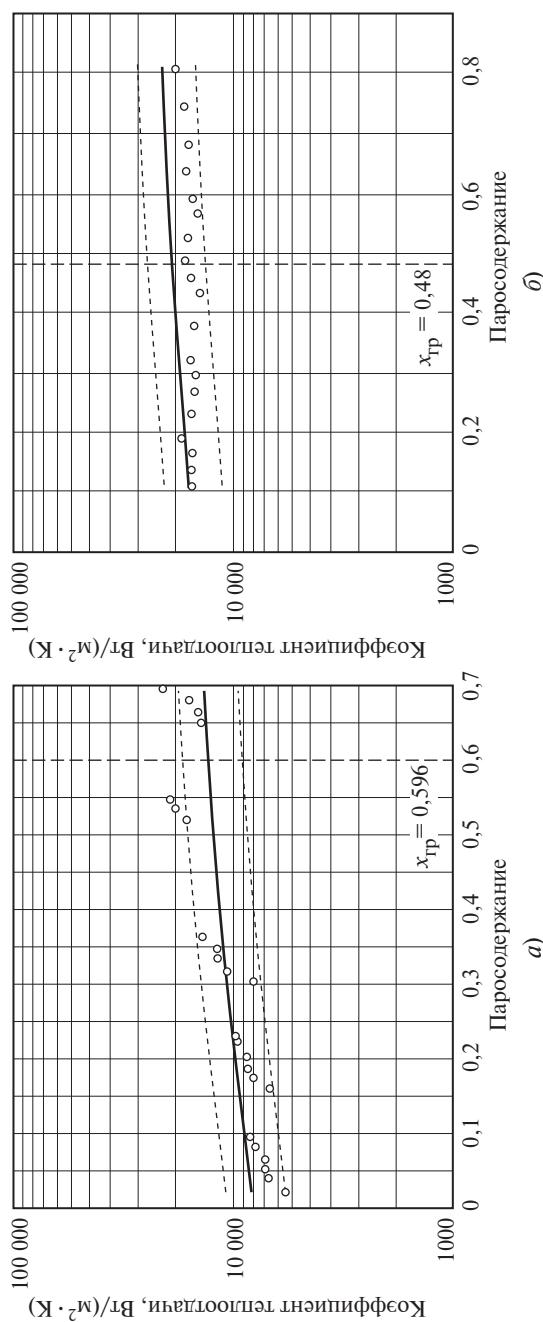


Рис. 9.27. Сравнение расчетных (кривые) и экспериментальных (точки) КТО при кипении  $\text{CO}_2$  (R. Yun et al., 2005),  
 $p = 3965 \text{ kPa}$ ,  $d_r = 2 \text{ мм}:$   
 $a — q = 7,2 \text{ kBT/m}^2$ ,  $p'W_0 = 1000 \text{ kJ/(m}^2 \cdot \text{c)}$ ;  $\delta — q = 20 \text{ kBT/m}^2$ ,  $p'W_0 = 1500 \text{ kJ/(m}^2 \cdot \text{c)}$

потока характерен лишь при высоких приведенных давлениях, достаточно высоких массовых скоростях и низких тепловых потоках. Такое сочетание параметров характерно для систем кондиционирования, холодильных и криогенных установок, некоторых химических и нефтехимических технологий. При росте плотности теплового потока, как было показано, роль конвективного механизма передачи тепла в целом становится несущественной в сравнении с механизмами теплоотдачи при кипении, так что КТО при фиксированном давлении определяется лишь значением  $q$ . Поскольку для оборудования ТЭС и АЭС характерны тепловые потоки, отвечающие развитому пузырьковому кипению, для энергетики область сопоставимого влияния эффектов вынужденной конвекции и кипения большого интереса не представляет (о чем уже говорилось в предыдущем параграфе).

Использование в изложенной методике расчета теплообмена при кипении в каналах гомогенной модели естественным образом ограничивает применимость этой методики высокими приведенными давлениями. Для относительно низких давлений при расчете конвективной составляющей теплового потока при высоких объемных паросодержаниях  $\phi$  следует использовать модель кольцевого потока. При этом подходе термическое сопротивление конвективной теплоотдаче определяется толщиной жидкой пленки в кольцевом двухфазном потоке. Этот метод расчета успешно проверен на опытных данных о кипении аммиака и пропана, а также диоксида углерода в горизонтальных каналах малого диаметра при  $p_r < 0,2$ .

При относительно низких приведенных давлениях, как упоминалось выше, вполне возможен переход от пузырькового кипения к режиму испарения тонкой пленки в дисперсно-кольцевом двухфазном потоке. Поскольку КТО при кипении сильно зависит от приведенного давления, в рассматриваемом случае переход к испарению может привести не к падению, а к увеличению коэффициента теплоотдачи. Для его расчета существуют эмпирические уравнения, применимые в тех условиях, в которых были выполнены соответствующие эксперименты. Следует отметить, что во многих случаях для приложений высокая точность расчета коэффициента теплоотдачи к двухфазному потоку в области достаточно высоких скоростей смеси и паросодержаний не очень критична. При обычных в этих условиях значениях КТО  $\alpha$  и плотности теплового потока  $q$  (соответственно десятки киловатт на квадратный метр-kelvin) и сотни киловатт на квадратный метр) даже двукратная погрешность в расчете коэффициента теплоотдачи означает погрешность в определении температуры

$T_c$  не более 20 К, что во многих практических задачах оказывается допустимым. Критичным здесь является надежное предсказание кризиса кипения, связанного в рассматриваемом случае с высыханием жидкой пленки.

Иная ситуация складывается при течении двухфазной смеси в горизонтальных каналах. При относительно низких скоростях смеси здесь устанавливается расслоенная структура потока, при которой даже в области малых тепловых нагрузок азимутальные градиенты температуры стенки могут оказаться недопустимо большими. Попытки построить физические модели для определения границ между различными структурами горизонтальных двухфазных потоков в условиях теплообмена и на этой основе разработать методы расчета коэффициентов теплоотдачи относятся к самому последнему времени, причем их трудно назвать успешными.

## 9.8. Кризисы кипения в условиях свободного движения

В § 9.4 были рассмотрены два процесса, отвечающих смене режимов кипения: переход от пузырькового кипения к пленочному (кривая  $CD$  на рис. 9.17) и обратный переход (кривая  $EF$  на рис. 9.17). Оба перехода в условиях, когда регулируемым параметром в процессе является плотность теплового потока, имеют явно выраженный кризисный характер: при небольшом увеличении теплового потока в точке  $C$  или небольшом снижении теплового потока  $q$  в точке  $E$  качественно изменяется механизм теплообмена, новое равновесное состояние устанавливается при сильно отличающемся от исходного значении температурного напора. Первый из рассмотренных переходов называют кризисом пузырькового кипения, второй — кризисом пленочного кипения. Практически более важным является определение условий перехода от пузырькового кипения к пленочному; обычно именно этот переход называют кризисом кипения, а соответствующую плотность теплового потока — критическим тепловым потоком  $q_{kp}$ . Развернутое название (кризис пленочного кипения) используют для перехода от пленочного кипения к пузырьковому. Критическая тепловая нагрузка  $q_{kp}$  в большинстве случаев устанавливает допустимый предел безаварийных технологических режимов, поскольку превышение этого значения ведет к пленочному кипению и сопровождается для многих жидкостей, в частности для воды, таким повышением температуры стенки, которое приводит к ее разрушению («burnout»).

### 9.8.1. Гидродинамическая модель кризиса

Для умеренных и высоких приведенных давлений (практически при  $p/p_{kp} \geq 0,005$ ) опытные данные о значении  $q_{kp}$  неплохо описываются соотношением С.С. Кутателадзе, полученным им в 1950 г. [16] на основе качественных соображений о механизме процесса с использованием методов теории подобия (анализа размерностей). Главное предположение Кутателадзе — кризис пузырькового кипения возникает, когда средняя скорость парообразования на стенке [формула (9.49)] достигает некоторого предельного значения:

$$W''_{kp} = q_{kp} / (\rho'' h_{LG}). \quad (9.71)$$

Принимается, следовательно, что все тепло, отводимое от нагреваемой стенки, идет на парообразование. Причиной кризиса считается «оттеснение» жидкости от стенки образующимся паром при  $W'' > W''_{kp}$ . Поскольку никакие другие эффекты, например, связанные с закономерностями теплообмена между кипящей жидкостью и стенкой, не рассматриваются, эта модель кризиса получила название *гидродинамической*.

В модели принимается, что вязкости жидкости и пара несущественны, а линейный размер поверхности парообразования значительно превышает внутренние масштабы пузырькового кипения (кипение на неограниченно протяженной горизонтальной стенке). Последнее означает, что искомая зависимость для  $W''_{kp}$  не должна содержать какого-либо линейного масштаба.

В отсутствие сил вязкости процесс определяется тремя силами:

силой инерции пара  $f_i \sim \rho'' W''^2 l$ ;

массовыми силами (архимедовыми)  $f_g \sim g \Delta \rho l$ ;

силами поверхностного натяжения  $f_\sigma \sim \sigma / l$ .

Эти силы дают два критерия подобия:

$$We = \frac{f_i}{f_\sigma} = \frac{\rho'' W''^2 l}{\sigma} \text{ — число Вебера;}$$

$$Bo = \frac{f_g}{f_\sigma} = \frac{g \Delta \rho l^2}{\sigma} \text{ — число Бонда.}$$

В стационарных условиях между этими числами подобия должна существовать функциональная связь, в которую не входит линейный размер  $l$ . Положив

$$We^2 \sim Bo,$$

находим искомое выражение для критической скорости парообразования:

$$W_{kp}'' \sim \sqrt[4]{\frac{g\Delta\rho\sigma}{(\rho'')^2}}. \quad (9.72)$$

С учетом (9.71) получается известная формула С.С. Кутателадзе

$$q_{kp} = kh_{LG}(\rho'')^{1/2} \sqrt[4]{\sigma g(\rho' - \rho'')}, \quad (9.73)$$

где безразмерный коэффициент  $k \approx 0,14$ . За рубежом часто называют этот параметр числом Кутателадзе:

$$k = Ku = \frac{W_{kp}'' \sqrt{\rho''}}{\sqrt[4]{\sigma g \Delta \rho}} = \frac{q_{kp}}{h_{LG} \sqrt{\rho''} \sqrt[4]{\sigma g \Delta \rho}}.$$

Завершая работу [16], С.С. Кутателадзе писал, что предложенная теория — это «первое приближенное решение», что «необходимо дальнейшее ее развитие как в отношении гидродинамической стороны процесса, так и учета других факторов, в том числе и влияния состояния поверхности нагрева». В дальнейшем, однако, какие-либо сомнения исчезли. В [17], например, читаем: «В настоящее время формулу автора можно считать полностью подтвержденной огромным экспериментальным материалом». Действительно, опыты подтвердили, что в диапазоне ускорений массовых сил от земного ( $g = g_0$ ) до  $g = 2500g_0$  прослеживается зависимость  $q_{kp} \sim g^{1/4}$ ; опытные данные на многих жидкостях при атмосферном и повышенных давлениях в целом воспроизводят следующую из (9.73) зависимость  $q_{kp}$  от давления.

Следует отметить, что дискуссии относительно гидродинамической теории кризиса в 50-е годы с неизбежностью велись в плоскости «верю — не верю», т.е. уподоблялись спорам теологов, поскольку соотношение (9.73) не опирается на какую-либо конкретную модель процесса. Положение изменилось после публикации работы [81], автор которой Н. Зубер представил модель, которая не только теоретически обосновала формулу (9.73), но и определила значение входя-

щей в нее числовые константы  $k$ . В модели рассматривается уже сформировавшаяся паровая пленка на горизонтальной, обращенной вверх поверхности нагрева. Паровая пленка неустойчива по Тейлору (см. [24]); характерные длины волн этой неустойчивости определяют, согласно модели, размер квадратной решетки, в узлах которой формируются паровые струи. Приняв, что предельная (критическая) скорость пара определяется условием неустойчивости Гельмгольца [24], и сделав (мало обоснованное) допущение о диаметре паровых струй, Зубер пришел к уравнению

$$q_{kp} = k \sqrt{(\rho' + \rho'')/\rho'} h_{LG} \rho''^{1/2} (\sigma g \Delta \rho)^{1/4}. \quad (9.73a)$$

Константа  $k$  с учетом двух значений длины волны неустойчивости Тейлора лежит в диапазоне 0,119—0,157. Ясно, что формула (9.73а)— это лишь теоретическое обоснование соотношения Кутателадзе (9.73), поскольку множитель  $\sqrt{(\rho' + \rho'')/\rho'}$  заметно отличается от единицы только при околокритических давлениях.

Публикация работы [81] сделала гидродинамическую теорию открытой для серьезной аргументированной критики. Эта критика касалась, прежде всего, неспособности теории отразить влияние свойств поверхности нагрева и других «негидродинамических» факторов. Д.А. Лабунцов в 1961 г. (см. [21]) откликнулся на работу Зубера, указав, в частности, что модель описывает устойчивость уже сформировавшейся паровой пленки, а не условия прекращения пузырькового кипения. Заметим, что основоположник гидродинамической модели С.С. Кутателадзе принципиально рассматривал кризис как совершенно особое явление, не связанное непосредственно с предшествующим ему режимом пузырькового кипения [64]. Такой подход представляется противоречащим общим закономерностям (диалектике) развития естественных процессов: гидродинамическая теория, определяющая верхнюю по плотности теплового потока границу пузырькового кипения, не связывает прекращение этого режима с его механизмами.

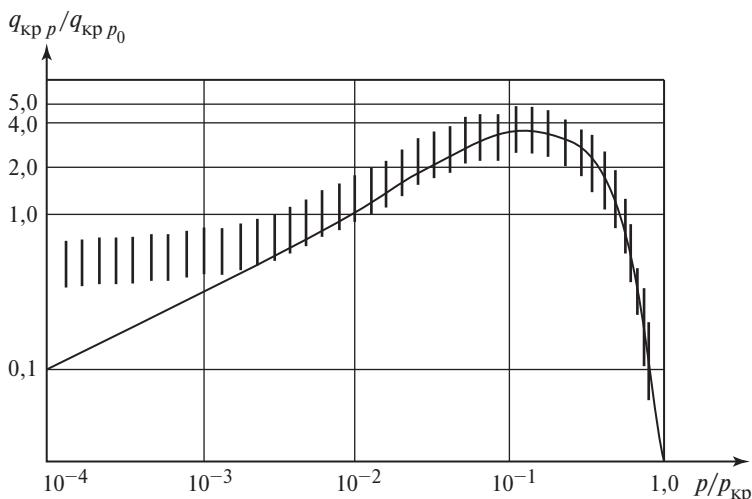
После публикации работ [16] и [81] накоплено немало опытных фактов, ставящих под сомнение не только детальные представления модели Зубера, но и само уравнение (9.73). Прямые измерения истинного объемного паросодержания показали, что перед наступлением кризиса кипения ( $q = 0,8 \div 0,9 q_{kp}$ ) на расстояниях 0,3—0,5 мм от обогреваемой поверхности значения этого параметра составляют  $\varphi = 0,85 \div 0,92$ . Ясно, что в предкризисных режимах кипения при столь высоких истинных объемных паросодержаниях нераспавшиеся

жидкие струи существовать не могут; жидкость в этом случае существует лишь в форме капель. Крупные жидкые капли (размером порядка капиллярной постоянной) характеризуются скоростью падения, определяемой формулой (9.72) при значении  $\text{const} \approx 1,5 \div 1,6$ . Можно ожидать, что гидродинамический кризис кипения возможен лишь при превышении средней скоростью парообразования скорости падения крупных капель. В этом случае «критерий устойчивости»  $k$  в формуле (9.73) должен быть на порядок больше, чем обычно принимаемое значение  $k = 0,14 \div 0,16$ .

Гидродинамическая модель [16] действительно может определять предельный тепловой поток на стенке в условиях, когда другие факторы не вызывают наступление кризиса при намного меньших тепловых потоках. Такие условия возникают, если на расстояниях от твердой стенки, достаточных для того, чтобы можно было не учитывать влияние вязкости, достигается критическая (с точки зрения неустойчивости Гельмгольца) скорость относительного движения жидкости и пара. Кризисы кипения в каналах с заглушенным концом — типичный пример реализации именно гидродинамического кризиса. Согласно [62] в этом случае критическая скорость течения пара может быть определена по (9.72) при  $\text{const} \approx 2,3 \div 2,4$ . Таким образом, с учетом сказанного выше о предельной скорости падения капель формула (9.73) при  $k \approx 1,5$  или несколько большем значении этой константы дает действительную верхнюю гидродинамическую границу плотности теплового потока на горизонтальной плоскости.

Модельные эксперименты работы [63], в которой изучалась гидродинамика пристенного слоя при вдуве воздуха через мелкоячеистую сетку в воду, показали, что и в этом случае как при горизонтальной, так и при вертикальной ориентации поверхности образуются не струи, а крупные пузыри газа типа описанных в § 9.4 (см. рис. 9.17, в). При этом, как пишут авторы [63], при значительном превышении скоростью газа критического значения, определяемого формулой (9.72) при  $\text{const} = 0,16$  [ $k = 0,16$  в (9.73)], никаких изменений в структуре пристенной области не происходило. В работе делается вывод о том, что критический тепловой поток при объемном кипении, вероятно, не представляет собой «явления, обусловленного неустойчивостью или каким-либо другим предельным условием удаления пара».

Тем не менее, простота формулы (9.73) и удовлетворительное согласие с огромным массивом опытных данных при умеренных и высоких давлениях сделали ее наиболее употребимой в расчетной практике. На рис. 9.28 представлен примерный вид зависимости  $q_{\text{кр}}$



**Рис. 9.28. Примерный вид зависимости относительной плотности критического теплового потока от приведенного давления;  $p_0 = 0,01p_{kp}$**

от давления согласно формуле (9.73). Рисунок построен в безразмерных координатах

$$\frac{q_{kp\,p}}{q_{kp\,p_0}} = f\left(\frac{p}{q_{kp}}\right),$$

где  $q_{kp\,p_0}$  — значение критической плотности теплового потока (КТП) при давлении  $p_0 = 0,01p_{kp}$ ;  $q_{kp\,p}$  — КТП при давлении  $p$ . Вертикальная штриховка показывает примерное расположение в этих координатах опытных данных. Для воды  $p_0 \approx 0,22$  МПа; из рисунка видно, что при давлениях, меньших примерно 0,03 МПа, опытные значения КТП при кипении воды лежат выше расчетной кривой. В области низких приведенных давлений ( $p/p_{kp} < 0,002$ ) средняя скорость парообразования в момент кризиса кипения, а следовательно, и само значение  $q_{kp}$  в несколько раз (иногда на порядок величины) превосходит значение, определяемое формулой (9.73). Это давно установлено для жидких металлов, а затем и для неметаллических жидкостей. Детальный анализ развития представлений о механизмах кризиса кипения жидкостей в условиях свободного движения дается в [50, 51].

### 9.8.2. Кризис как результат роста площади сухих пятен

Наиболее естественным объяснением возникновения кризиса кипения представляется слияние и рост площади сухих пятен на обогреваемой стенке. При пузырьковом кипении, как это показано в п. 9.6.2, сухие пятна — это центры парообразования, их наличие — родовой признак этого режима кипения. Характерный размер центра парообразования по порядку величины близок к радиусу жизнеспособного зародыша  $R_* = 2\sigma/\Delta p$ , для малых перегревов стенки он определяется формулой (9.1). Так как для не слишком низких давлений значения  $R_*$  не превосходят 10 мкм (при высоких давлениях  $p_s$  радиус  $R_* \approx 0,1$  мкм), а расстояние между соседними центрами составляет  $(10^3 \div 10^4)R_*$ , то суммарная площадь сухих пятен при пузырьковом кипении ничтожна — доли процента общей площади обогреваемой поверхности. Однако огромная локальная плотность теплового потока у границы сухого пятна, обнаруженная физическими и численными экспериментами, дает единственное физически реалистичное объяснение чрезвычайно высокой интенсивности теплоотдачи при пузырьковом кипении в области больших тепловых нагрузок.

В то же время наличие сухих пятен несет в себе и возможность прекращения пузырькового кипения. Рост плотности центров парообразования при увеличении теплового потока, с одной стороны, сопровождается ростом интенсивности теплоотдачи, а с другой — увеличением суммарной площади сухих пятен. В окрестности критической плотности теплового потока плотность центров парообразования становится настолько высокой, что соседние сухие пятна сливаются, так что их размер становится существенно большим, чем  $R_*$ . (При кипении воды и метанола при атмосферном давлении согласно прямым измерениям доля сухих пятен при  $q \approx q_{kp}$  составляет около 10 % общей площади поверхности нагрева.)

Схематическое изображение течения жидкости в «макропленке» у границы сухого пятна, представленное на рис. 9.22, может быть отнесено и к условиям перед кризисом кипения, если заменить на нем диаметр сухого пятна  $2R_*$  на  $l_{c,p} \gg 2R_*$ . Соотношения (9.55) для градиента давления в жидкой пленке и (9.56) для массового потока жидкости на единицу длины периметра сухого пятна сохраняют свой общий вид. Как и при анализе теплообмена, принимается, что градиент капиллярного давления обеспечивает приток жидкости в зону

интенсивного испарения. Поскольку вблизи кризиса радиус сухого пятна  $l_{\text{с.п}}/2 = R_0 \gg \delta_0$  (средней толщины макропленки), то градиент кривизны мениска  $dH/dr$  определяется лишь одним линейным масштабом задачи —  $\delta_0$ , т.е.  $|dH/dr| \sim 1/\delta_0^2$ . (Этот вывод можно обосновать, приняв, что кривизна поверхности уменьшается от значения  $H_0 \approx 1/\delta_0$  в зоне интенсивного испарения до нуля на плоской поверхности макропленки при возрастании радиальной координаты на  $\Delta r \approx \delta_0$ .)

Рассматривая центростремительное течение ламинарной жидкой пленки под действием градиента капиллярного давления и полагая, что вся подтекающая жидкость испаряется у границы сухого пятна, можно (как и в п. 9.6.2) получить выражение для линейной плотности теплового потока в зоне интенсивного испарения

$$q_l \sim \frac{h_{LG}\sigma}{v} \delta_0,$$

где  $v$  — кинематическая вязкость жидкости. Поверхностная плотность теплового потока, приходящаяся на одно сухое пятно радиусом  $R_0 = l_{\text{с.п}}/2$ , определяется как

$$q_{\text{с.п}} \sim \frac{h_{LG}\sigma}{v} \frac{\delta_0}{l_{\text{с.п}}}.$$
 (9.74)

Нетрудно убедиться, используя соотношение (9.57), что при развитом пузырьковом кипении вдали от кризиса плотность теплового потока, приходящегося на одно сухое пятно, выражается аналогичным соотношением, но размер сухого пятна  $l_{\text{с.п}} \approx 2R_*$ . Ясно, что вдали от кризиса  $q_{\text{с.п}} \gg q$ , где  $q$  — средняя плотность теплового потока на стенке. При росте размера сухого пятна в области высоких тепловых нагрузок значение  $q_{\text{с.п}}$  уменьшается, т.е.  $q_{\text{с.п}}$  и  $q$  сближаются при приближении к кризису.

Принимается, что непосредственно перед кризисом размер сухого пятна пропорционален диаметру парового конгломерата в момент его отрыва от стенки, т.е.  $l_{\text{с.п}} \sim D_0$ , так как площадь сухого пятна тем больше, чем дальше находится паровой конгломерат у стенки.

Средняя толщина макропленки определяется [как и в анализе конвективной компоненты теплового потока, см. (9.61)] по аналогии с толщиной динамического погранслоя на пластине

$$\delta_0 \sim \sqrt{v l_* / W_0},$$

где  $l_*$  и  $W_0$  — характерные значения длины и скорости. За линейный масштаб принимается среднее расстояние между сухими пятнами. Характерная скорость в области высоких приведенных давлений ( $p/p_{\text{кр}} \geq 0,05$ ) определяется формулой (9.49). При низких приведенных давлениях ( $p/p_{\text{кр}} \leq 0,001$ ) пузырьки сохраняют «свою индивидуальность» даже при околокритических тепловых нагрузках, так что в этой области давлений за характерную скорость  $W_0$  принимается осредненная по ансамблю одновременно растущих пузырьков скорость роста  $\dot{\bar{R}}$ .

Однако в обоих предельных по давлению случаях  $W_0$  увеличивается, а  $\delta_0$  уменьшается с ростом средней тепловой нагрузки  $q$  на стенке. Очевидно, что при фиксированном размере сухого пятна условие

$$q = q_{\text{с.п}}$$

определяет предельное значение средней тепловой нагрузки. При  $q > q_{\text{с.п}}$  нарушается баланс притока и испарения жидкости у границы сухого пятна, площадь сухих пятен возрастает, наступает кризис. Таким образом, общее выражение для КТП имеет вид

$$q_{\text{кр}} = k_0 \frac{h_{LG} \sigma}{v} \frac{\delta_0}{D_0}. \quad (9.75)$$

В таком виде формула для КТП по своей простоте и ясности сопоставима с соотношениями гидродинамической теории (9.73) или (9.73а). Вывод выражений для  $\delta_0$  и  $D_0$  дается отдельно для предельных случаев высоких ( $p/p_{\text{кр}} \geq 0,05$ ) и низких ( $p/p_{\text{кр}} \leq 0,001$ ) приведенных давлений. При высоких давлениях в условиях большой плотности центров парообразования испарение жидкости у границ сухих пятен является доминирующим механизмом отвода тепла от стенки. При низких давлениях, напротив, низкая плотность центров парообразования делает основным механизмом теплообмена перенос тепла через жидкую макропленку со средней толщиной  $\delta_0$ . Числовые константы в итоговых выражениях для КТП при высоких и низких приведенных давлениях подбирались на основе сравнения с соответствующими опытными данными. Детали вывода можно восстановить, обратившись к работам [50, 51] и более ранним публикациям автора, на которые там даются ссылки.

Таким образом, при давлениях  $p/p_{\text{кр}} \geq 0,05$  КТП рассчитывается по уравнению

$$q_{\text{кр.в}} = 0,06 h_{LG} \rho''^{0,6} \sigma^{0,4} (g \Delta \rho / \mu)^{0,2}. \quad (9.76)$$

Для низких приведенных давлений ( $p/p_{\text{кр}} \leq 0,001$ ) уравнение имеет вид

$$q_{\text{кр.н}} = 0,5 \frac{h_{LG}^{81/55} \sigma^{9/11} (\rho'')^{13/110} \lambda^{7/110} g^{21/55} f(\text{Pr})}{v^{1/2} c_p^{3/10} R_i^{79/110} T_s^{21/22}}. \quad (9.77)$$

Безразмерная функция числа Прандтля для неметаллических жидкостей

$$f(\text{Pr}) = \left( \frac{\text{Pr}^{9/8}}{1 + 2\text{Pr}^{1/4} + 0,6\text{Pr}^{19/24}} \right)^{4/11}; \quad (9.78)$$

для жидких металлов

$$f(\text{Pr}) = 0,5. \quad (9.78a)$$

При произвольном давлении КТП рассчитывается по интерполяционной формуле

$$q_{\text{кр}} = (q_{\text{кр.в}}^3 + q_{\text{кр.н}}^3)^{1/3}. \quad (9.79)$$

Методика расчета КТП, определяемая уравнениями (9.76)–(9.79), успешно проверена на большом массиве опытных данных во всем диапазоне приведенных давлений, охваченных экспериментами. С практической точки зрения эта методика имеет неоспоримые преимущества в точности в сравнении с расчетом по (9.73) при низких приведенных давлениях. Как показано на рис. 9.28, при  $p/p_{\text{кр}} \leq 0,003$  формула Кутателадзе не отражает реальный характер зависимости  $q_{\text{кр}}$  от давления. В [50, 51] приводятся примеры хорошего согласия расчетов по (9.76)–(9.79) с опытными данными о критических тепловых потоках при кипении различных жидкостей при низких давлениях, в том числе в полях массовых сил со значениями  $g$  до  $26g_0$ .

Анализ доступных опытных данных показывает, что для неметаллических жидкостей их подавляющее большинство относится к той области давлений, где в интерполяционной формуле (9.79) доминирует составляющая  $q_{\text{кр.в}}$ , отвечающая пределу высоких давлений. Уравнение (9.76) для расчета этой величины не сильно отличается от (9.73) и по характеру влияния основных параметров на КТП, и по

простоте. Принципиальным является учет в (9.76) влияния вязкости на плотность теплового потока  $q_{\text{кр}}$ ; при этом формула предсказывает очень слабую зависимость  $q_{\text{кр.в}}$  от величины  $\Delta\rho/\mu$ , которая только вблизи критического давления заметно отличается от обратного значения кинематической вязкости жидкости на линии насыщения. В [51] проведен анализ изменения величины  $(\Delta\rho/\mu)^{0,2}$  на линии насыщения для 20 жидкостей, представляющих основные классы веществ, для которых имеются опытные данные о  $q_{\text{кр}}$ . Показано, что в диапазоне  $p/p_{\text{кр}} = 0,03 \div 0,9$  для всех жидкостей, кроме гелия, значение  $(\Delta\rho/\mu)^{0,2}$  изменяется очень слабо, с максимальным отклонением 16,5 % от среднего значения  $21,5 \text{c}^{0,2} \cdot \text{m}^{-0,4}$ . Это отклонение существенно меньше, чем обычный разброс опытных данных о  $q_{\text{кр}}$ . Для гелия обсуждаемое значение превосходит среднее значение на 36—50 %. Интересно, что при кипении гелия при атмосферном давлении, где параметр  $(\Delta\rho/\mu)^{0,2}$  приблизительно на 49 % превосходит среднее значение, согласно [6] среднее по опытным данным значение  $q_{\text{кр}} \approx 10 \text{kVt/m}^2$  на те же 49 % превосходит рассчитанное по формуле (9.73) при  $k = 0,14$ . Расчет по (9.76) дает  $q_{\text{кр.в}} \approx q_{\text{кр}} = 8,5 \text{kVt/m}^2$ , что отличается от среднего по опытным данным на 17,5 %.

Этот анализ показывает, что весьма вероятной причиной видимого отсутствия влияния вязкости на КТП являются относительно небольшие различия в значениях кинематической вязкости различных жидкостей на линии насыщения при умеренных и высоких приведенных давлениях. Это позволяет действительный эффект вязкости отразить (скрыть) в числовом константе  $k$ .

В практических расчетах при  $p/p_{\text{кр}} > 0,003$  для всех неметаллических жидкостей, кроме гелия, наряду с физически более обоснованной методикой (9.76)—(9.79), можно пользоваться и формулой (9.73).

### 9.8.3. Кризис пленочного кипения

В работе [81] кризис пленочного кипения, так же как и рассмотренный выше кризис пузырькового кипения, рассматривается как явление гидродинамическое. При этом причиной кризиса пленочного кипения считается возникновение неустойчивости Тейлора. Практически этот тип неустойчивости возникает на горизонтальной поверхности раздела фаз в «перевернутой системе», т.е. в условиях, когда фаза с большей плотностью находится над фазой с меньшей плотно-

стью. Очевидно, что при пленочном кипении на обращенной вверх горизонтальной плоскости система неустойчива по Тейлору при любых тепловых потоках; следовательно, предложенную Зубером модель кризиса пленочного кипения невозможно признать обоснованной. На это указал Д.А. Лабунцов еще в 1961 г. [21]. Говорить об этом приходится из-за живучести заблуждений в науке, особенно если они «освящены» авторитетом.

Сегодня можно считать доказанным, что кризис пленочного кипения носит термодинамический характер. Значение  $q_{kp2} = q_{min}$  соответствует снижению температуры стенки до температуры предельного перегрева жидкости  $T_{lim}$  (температура спинодали  $T_{sp}$ , см. п. 9.1.2). Пока температура поверхности  $T_c$  выше  $T_{lim}$ , контакт жидкость—стенка невозможен, сохраняется пленочное кипение. Когда температура стенки снижается до  $T_{lim}$ , появляется возможность контакта жидкости со стенкой; поскольку абсолютные значения тепловых потоков в окрестности второго кризиса достаточно высоки (см. рис. 9.17), контакт жидкости со стенкой ведет к быстрому охлаждению твердой поверхности, новое стационарное состояние достигается на участке пузырькового кипения. Следовательно, для поверхностей из высокотеплопроводных материалов критический тепловой поток, отвечающий переходу  $EF$  на рис. 9.17, может быть рассчитан как

$$q_{min} = \alpha_{пл}(T_{п.п} - T_s), \quad (9.80)$$

где  $\alpha_{пл}$  — коэффициент теплоотдачи при пленочном кипении, определяемый по рекомендациям § 9.5. Температура предельного перегрева может быть рассчитана, например, по формуле

$$T_{п.п} = T_{kp}(0,87 + 0,13p/p_{kp}). \quad (9.81)$$

Более строгая методика предложена С.Ю. Снытиным (см. [2]):

$$T_{lim} = [b_1 + (1 - b_1)p/p_{kp}]T_{kp}; \quad (9.81a)$$

$$b_1 = 0,916 - 0,015A + 0,00038A^2,$$

где критерий Филипова  $A = 100p_*/p_{kp}$  при  $T_{kp}/T_s(p_*) = 1,6$ .

Термодинамическая модель кризиса пленочного кипения объясняет, по меньшей мере, качественно все основные опытные факты, в частности влияние теплофизических свойств материала стенки на  $q_{kp2}$  и  $\Delta T_{kp2}$ . Поскольку поверхность паровой пленки при пленочном кипении на обращенной вверх поверхности нагрева всегда неустой-

чива, на ней возникают волны, что предполагает возможность мгновенного касания жидкостью стенки. Температура на границе двух приведенных в контакт тел с различными температурами зависит от соотношения их тепловых активностей  $\chi = \sqrt{\rho c \lambda}$ . Для тел с высокой теплопроводностью касание жидкости почти не изменяет температуру их поверхности; к примеру, перегрев медной пластины относительно температуры насыщения в момент касания воды уменьшится лишь примерно на 4 %. Для поверхностей с низкой теплопроводностью падение температуры поверхности при контакте с жидкостью существенно больше, перегрев поверхности из нержавеющей стали при соприкосновении с водой снижается на 20—25 %. Это может создать зону охлаждения, которая распространяется по поверхности и обеспечивает в итоге переход от пленочного кипения к пузырковому при более высоких значениях  $q_{kp2}$  и  $\Delta T_{kp2}$ , чем в случае высокотеплопроводных тел. Этот качественный анализ полностью подтвержден экспериментами: со снижением отношения  $\chi_c/\chi_j$ , где индексы относятся соответственно к стенке и к жидкости, кризис пленочного кипения происходит при больших  $q_{kp2}$  и  $\Delta T_{kp2}$ , т.е. раньше при движении вдоль кривой  $DE$  на рис. 9.17.

Особенно отчетливо этот эффект проявляется при нанесении на поверхность нагрева низкотеплопроводных покрытий. Такие эксперименты проводились с криожидкостями (в основном, с азотом). Тонкая пленка фторопласта (тэфлона) на металлической поверхности сильно увеличивает параметры кризиса пленочного кипения.

## 9.9. Кризис теплообмена при кипении жидкостей в каналах

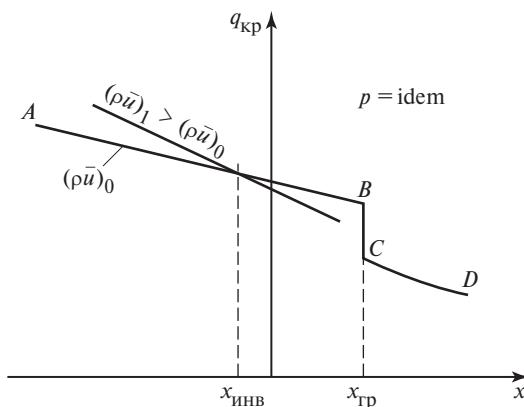
### 9.9.1. Общие закономерности

Как и при кипении в условиях свободного движения (в большом объеме), при кипении в каналах значение критической плотности теплового потока  $q_{kp}$  в большинстве случаев определяет верхнюю границу безаварийной эксплуатации оборудования по тепловой нагрузке. Несмотря на огромное количество экспериментальных и теоретических работ, посвященных кризису кипения в каналах, сегодня отсутствует не только законченная теория процесса, но и (по некоторым аспектам) даже единство в качественных представлениях о его механизме. Пожалуй, сегодня можно лишь констатировать намечающееся согласие различных исследователей в том, что невозможно создать некую универсальную модель кризиса кипения

в каналах, способную описывать развитие процесса при любом сочетании параметров [12].

При этом в упоминаемых работах речь идет о кризисах кипения недогретой жидкости, т.е. о режимах, при которых относительная энталпия потока в месте кризиса  $x_{kp} < 0$ . Достаточно взглянуть на общий вид зависимости  $q_{kp}(x)$  в широком диапазоне  $x$  [9], чтобы понять очевидную невозможность построения общей теории кризиса кипения в каналах. Представленная на рис. 9.29 зависимость содержит, как минимум, три различные по доминирующему процессу области. Участок  $AB$  соответствует кризису пузырькового кипения (кризис первого рода), имеющему общие черты с кризисом кипения в условиях свободного движения (большой объем). Участок  $BC$  согласно [9] отвечает постоянному значению критического (граничного) паросодержания  $x_{gr}$  и обусловлен высыханием тонкой жидкой пленки в дисперсно-кольцевом режиме двухфазного течения. Это — кризис второго рода, для которого согласно [9] плотность теплового потока не может служить определяющим параметром. Наконец, участок  $CD$  соответствует «кризису орошения», который управляемся, вероятно, плотностью массового потока жидких капель из ядра на стенку.

Из нескольких расчетных соотношений, предложенных для расчета критического (граничного) паросодержания для предсказания



**Рис. 9.29. Общий вид зависимости критического теплового потока при кипении в трубах от относительной энталпии потока [9]**

условий высыхания жидкой пленки, привлекает простотой формула В.В. Сергеева [36]:

$$x_{\text{гр}} = 1 - 0,86 \exp(-29 / \text{We}^{1/2}), \quad (9.82)$$

где число Вебера  $\text{We} = (\rho' \bar{u})^2 d_{\text{r}} / (\rho' \sigma)$ . Данное соотношение, определяющее наступление кризиса кипения второго рода, было получено в результате качественного анализа основных механизмов, управляющих поведением жидкой пленки при кольцевом режиме течения двухфазного потока. Оно строилось исходно для пароводяных потоков и подтверждено широким сравнением с экспериментальными данными, причем для сравнения привлекались данные и для других веществ. Однако проверка этого соотношения на опытных данных по диоксиду углерода (см. примеры на рис. 9.27) показала, что оно не отражает действительных закономерностей процессов, которые определяли условия высыхания пленки при высоких приведенных давлениях и относительно низких тепловых потоках. Формула (9.82) не учитывает, в частности, влияния теплового потока, хотя из анализа опытных данных такой эффект следует. Кроме того, в экспериментах, обсуждавшихся в п. 9.7.2, наблюдалось не резкое падение КТО при достижении критического (граничного) паросодержания  $x_{\text{гр}}$ , характерного для опытов с пароводяными потоками, а плавное; фактически при осушении стенки в координатах  $\alpha(x)$  существует достаточно протяженная (по  $x$ ) переходная область, в пределах которой КТО падает от высокого уровня при пузырьковом кипении к существенно более низкому для однофазной конвекции к пару. Таким образом, и в этом случае эмпирическая формула, даже неплохо обоснованная на качественном уровне, не обладает универсальностью.

В отличие от кипения в объеме, где кризис однозначно определяется свойствами жидкости и пара, при кипении в каналах кризис сложным образом зависит от локального паросодержания (относительной энтальпии) потока. Однако  $x$  — единственный параметр, влияющий на кризис. Из самых общих соображений ясно, что на условия эвакуации пара от стенки, а следовательно, на критический тепловой поток  $q_{\text{кр}}$  должна влиять скорость потока. Причем влияние это, как показывают эксперименты, неоднозначное: при  $x < x_{\text{инв}}$  с ростом массовой скорости теплового потока  $q_{\text{кр}}$  возрастает (что представляется естественным), а при  $x > x_{\text{инв}}$  происходит «инверсия» влияния массовой скорости на  $q_{\text{кр}}$ : с ростом  $(\rho' W_0)$  плотность теплового потока  $q_{\text{кр}}$  снижается (что не имеет сегодня достаточно убедитель-

ного объяснения). Поскольку механизм отрицательного влияния массовой скорости на критическую тепловую нагрузку не ясен, отсутствует и сколь-либо стройная методика расчета положения «точки инверсии», т.е. величины  $x_{\text{инв}}$ . Не имеет сегодня объяснения и такой (достаточно удивительный) экспериментальный результат, как отрицательное влияние на  $q_{\text{кр}}$  недогрева жидкости до  $T_s$  в узкой области малых отрицательных значений  $x$  [12].

Все сказанное выше объясняет то, что в настоящее время в проектных расчетах чаще используют не расчетные соотношения, а рекомендуемые табличные значения  $q_{\text{кр}}$  в зависимости от давления, массовой скорости и относительной энталпии потока в точке кризиса. Таблицы рекомендуемых значений  $q_{\text{кр}}$  при кипении воды в круглых равномерно обогреваемых трубах впервые были составлены в СССР [32]. Позднее аналогичные таблицы были подготовлены в Канаде; недавно опубликован новый, совместный вариант таких таблиц [59]. Предпринимаются попытки разработать методы пересчета  $q_{\text{кр}}$  для воды на другие жидкости [60].

### 9.9.2. Модель кризиса в высокоскоростных потоках недогретой жидкости

Анализ какого-либо физического явления, как это не раз демонстрировалось в настоящей книге, сильно упрощается в предельных случаях, когда удается свести к минимуму число параметров, реально влияющих на процесс. Применительно к анализу кризиса кипения в каналах такая возможность возникает для высокоскоростных потоков жидкости, сильно недогретой до температуры насыщения.

Эксперименты (см. [12]) показывают, что при высоких скоростях течения и больших недогревах ( $x_b < -0,1$ ) плотность теплового потока не влияет на гидравлическое сопротивление вплоть до  $q_{\text{кр}}$ . Это дает основания полагать, что в рассматриваемых условиях паровые пузырьки не выходят за пределы вязкого подслоя, а остаются на стенке, действуя как тепловые трубы микронных размеров. В основании таких пузырьков жидкость испаряется, а на верхней (купольной) части пар конденсируется (рис. 9.30). Если предположить, что на контрольной поверхности  $AA$ , совпадающей с границей вязкого подслоя, температура равна  $T_s$  (предполагается, следовательно, что эта граница проходит в среднем через вершины паровых пузырьков, «сидящих» на стенке), то предельная плотность теплового потока определяется однофазной турбулентной конвекцией.

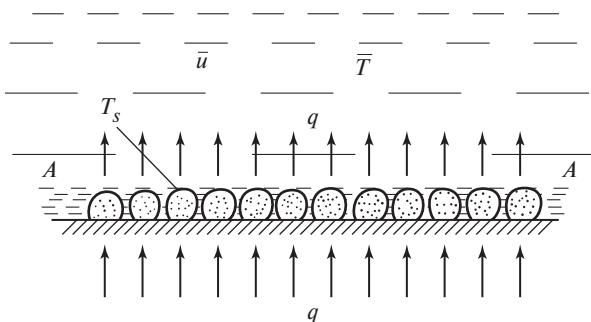


Рис. 9.30. Схема переноса тепла от стенки канала к холодному ядру жидкости при высоких массовых скоростях и больших недогревах

Если отсутствует поток пара через поверхность  $AA$ , то невозможно отвести от стенки тепловой поток, превосходящий тот, что отводится от поверхности  $AA$  к «холодному» ядру. Превышение такого потока приведет к выпариванию жидкости в двухфазном пристенном слое и, следовательно, к кризису. При развитой турбулентности в пристенной области справедлива аналогия Рейнольдса. Если эффективная толщина вязкого подслоя оценивается как  $11v/v_*$ , где  $v_* = \sqrt{\tau_c/\rho} = \bar{u}\sqrt{\xi/8}$  — динамическая скорость, то рейнольдсов поперечный поток может быть оценен как

$$\dot{m}_R = \rho \bar{u} \frac{\xi/8}{1 - 11\sqrt{\xi_0/8}}, \quad (9.83)$$

где  $\bar{u}$  — среднемассовая скорость жидкости в канале, а коэффициент гидравлического сопротивления  $\xi_0$  вычисляется по формуле Филоненко (4.29а). Число Рейнольдса при этом рассчитывается по свойствам жидкости на линии насыщения.

При сделанных предположениях критическая плотность теплового потока рассчитывается как

$$q_{kp} = \rho' W_0 c_p \Delta T_{ned} \frac{\xi_0/8}{1 - 11\sqrt{\xi_0/8}}. \quad (9.84)$$

Как показано в [80], эта формула хорошо согласуется с опытными данными в области весьма высоких массовых скоростей [ $\rho' W_0 >$

$> 2000 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ] и недогревов  $\Delta T_{\text{нед}} = T_s - \bar{T}$  ( $\Delta T_{\text{нед}} > 50 \text{ К}$  для воды). В частности, она согласуется с опытными результатами работы [67], в которой зафиксированы абсолютно наибольшие значения  $q_{\text{кр}} = 276 \text{ МВт}/\text{м}^2$  при кипении воды при давлении 3,1 МПа, недогреве около 180 К и огромной массовой скорости воды  $\rho' W_0 = 13 \cdot 10^4 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ . (Полезно упомянуть, что эта плотность теплового потока более чем вчетверо превосходит плотность потока энергии с поверхности Солнца  $\sim 60 \text{ МВт}/\text{м}^2$ .) На рис. 9.31 показано сравнение расчетов по (9.84) с данными работы [67].

При меньших недогревах часть пара, генерируемого на стенке, попадает в ядро, т.е. пересекает контрольную поверхность  $AA$  (см. рис. 9.30). В этих условиях при строгом подходе необходимо, во-первых, учитывать изменение значения  $\xi_0$  в сравнении с расчетом по формуле (4.29а), относящейся к течению в гладкой трубе, а во-вторых, требуется учет той части теплового потока, который отводится к холодному ядру потоком пара. В отсутствие строгой модели, учитывающей эти эффекты, в [80] предлагается интерполяционная формула, дающая при больших недогревах и скоростях жидкости соот-

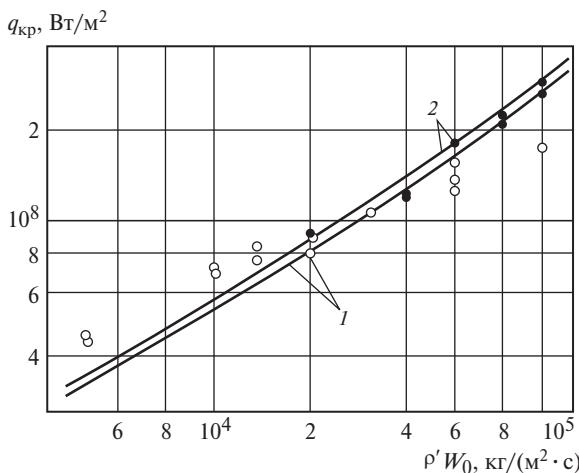


Рис. 9.31. Сравнение расчетной зависимости (9.84) с опытными данными [67] о критическом тепловом потоке при кипении воды в круглых каналах:  
1 —  $d_r = 0,902 \text{ мм}$ ; 2 —  $d_r = 0,406 \text{ мм}$

ношение (9.84), а при нулевом недогреве ( $x_{\text{кр}} = 0$ ) — формулу для кризиса кипения насыщенной жидкости.

В п. 9.7.1 обсуждалось, что с ростом недогрева и скорости жидкости начало кипения сдвигается в область высоких перегревов стенки  $\Delta T = T_c - T_s$  и, следовательно, больших тепловых потоков. При высоких приведенных давлениях (практически при  $p/p_{\text{кр}} \geq 0,8$ ) это может привести к тому, что температура стенки, необходимая для начала закипания, превысит температуру предельного перегрева жидкости  $T_{\text{lim}}$ . В этом случае кризис кипения должен иметь термодинамическую природу. Аналогично кризису пленочного кипения в объеме, обсуждавшемуся в п. 9.8.3, расчет  $q_{\text{кр}}$  в этих условиях следует вести по формуле

$$q_{\text{кр}} = \alpha \Delta T_{\text{lim}}, \quad (9.85)$$

где  $\Delta T_{\text{lim}} = T_{\text{lim}} - T_s$ , а коэффициент теплоотдачи рассчитывается по формуле Б.С. Петухова с сотрудниками (6.19). Температура предельного перегрева вычисляется по формуле (9.81) или (9.81а).

Условием применимости формулы (9.85) является неравенство  $\Delta T_{\text{н.к}} \geq \Delta T_{\text{lim}}$ , где  $\Delta T_{\text{н.к}}$  — температурный напор начала закипания.

## Контрольные вопросы к главе 9

- Почему зародыш паровой фазы под уровнем жидкости возникает только в метастабильной (перегретой) жидкости?
- Какой смысл имеют слагаемые в уравнениях (9.2) и (9.2а) для изменения термодинамического потенциала при возникновении парового зародыша?
- Как выводится формула для радиуса равновесного парового пузырька в объеме жидкости? Почему этот размер называется критическим?
- Как согласно современным представлениям происходит возникновение паровых зародышей в объеме однородно перегретой жидкости (гомогенная нуклеация)?
- Как гомогенное зародышеобразование реализуется в экспериментах? Какие перегревы жидкости при этом необходимы?
- Чем парообразование на стенке (при кипении) отличается от вскипания в объеме? Как эти отличия отражены в уравнении для изменения термодинамического потенциала?
- Почему смачиваемость стенки сильно влияет на парообразование? Какие предельные случаи следуют из уравнения (9.5) и как анализ согласуется с экспериментом?

8. Какое влияние на зарождение паровой фазы и поддержание устойчивого кипения оказывает микрощероховатость стенки? Как объясняется гистерезис зависимости  $q(\Delta T)$  при пузырьковом кипении?
9. Как сказываются на парообразовании режимные параметры (давление) и растворенные газы?
10. Какой смысл имеют четыре предельные схемы роста парового пузырька в объеме однородно перегретой жидкости?
11. Какой закон роста пузырька следует из динамической инерционной схемы? Можно ли эту схему роста реализовать практически?
12. Каково содержание тепловой энергетической схемы роста пузырька? Каковы математическое описание задачи и результаты ее решения Скривеном?
13. Как получаются асимптотические пределы для решения Скривена? Как получен закон роста (9.19) и как он согласуется с результатами экспериментов?
14. Как изменяются параметры пара в растущем пузырьке при больших числах Якоба? Как строится приближенная модель роста при этих условиях и какой закон изменения радиуса во времени она предсказывает?
15. Какие выводы о закономерностях роста пузырьков на стенке (при кипении) следуют из опытных наблюдений? Чем отличается динамика пузырьков при низких и высоких приведенных давлениях?
16. На основе каких допущений строится приближенная модель роста пузырька при кипении? Как обоснованы соотношения для тепловых потоков к поверхности пузырька от стенки и от перегретой жидкости?
17. Какие асимптоты имеет уравнение (9.24) для роста пузырька на стенке?
18. Как обосновывается предельное соотношение (9.27) для роста пузырьков при кипении при больших числах Якоба?
19. Как строится строгое решение задачи об отрыве пузырька от обогреваемой стенки? С чем связана сложность такого решения?
20. Как происходит отрыв паровых пузырьков от стенки в квазистатических условиях (малые числа Якоба)? Почему формула Фритца (9.29) не согласуется с опытными данными?
21. Каковы закономерности отрыва пузырьков при больших числах Якоба?
22. Что дает приближенный анализ динамики пузырьков заданной (сферической) формы? Как объясняется отрыв пузырьков «против силы тяжести»?
23. Чем отличаются различные режимы на «кривой кипения»? Какая связь  $q(\Delta T)$  характерна для каждого из них?
24. На основе каких модельных представлений получены формулы Бромли (9.40) и (9.41) для теплообмена при пленочном кипении с ламинарной пленкой? Чем объясняется плохое согласие расчетов по (9.40) с опытными данными для вертикальной поверхности?
25. Каковы закономерности теплообмена при пленочном кипении при турбулентном течении пара? Как в этом случае рассчитывается КТО?

26. Какие последовательные стадии процесса рассматривает модель теплообмена при переходном кипении? Как длительность контакта жидкость—стенка зависит от перегрева стенки?
27. Почему при переходном кипении паровой пузырь продолжает расти после полного испарения жидкой пленки на стенке? Какое условие определяет завершение периода контакта пар—стенка?
28. Как следующая из уравнения (9.48) зависимость  $q(\Delta T)$  согласуется с опытными данными о теплообмене при переходном кипении?
29. Почему почти 70-летние исследования пузырькового кипения не привели к построению строгой количественной теории теплообмена? Каковы возможности DNS при изучении пузырькового кипения?
30. Почему аналогия с процессами однофазной конвекции не объясняет закономерностей теплообмена при пузырьковом кипении? Какая особенность пузырькового кипения отличает его от других процессов конвективного теплообмена?
31. Какие закономерности отражают эмпирические формулы для расчета КТО при пузырьковом кипении? Могут ли они быть универсальными по роду жидкости и уровню давления?
32. Какую роль при пузырьковом кипении играют центры парообразования? Почему интенсивное испарение жидкости на границе с сухими пятнами можно рассматривать как точечные стоки тепла?
33. Как обосновывается оценка градиента капиллярного давления, вызывающего поступление жидкости в зону интенсивного испарения у границы сухого пятна?
34. Какие допущения позволяют определить составляющую теплового потока  $q_1$  за счет испарения по границам сухих пятен?
35. С помощью каких масштабов длины и скорости оценивается толщина температурного пограничного слоя между центрами парообразования, определяющая «конвективную» составляющую теплового потока при кипении?
36. Какие общие тенденции отражает итоговое уравнение (9.65) для расчета теплообмена при кипении? Почему зависимость безразмерного КТО при пузырьковом кипении от безразмерного параметра  $B$  существенно различна в области низких и высоких приведенных давлений (см. рис. 9.23)?
37. Как скорость вынужденного движения жидкости влияет на начало закипания в обогреваемом канале? Как рассчитывается КТО при соизмеримых вкладах в теплообмен конвекции и кипения?
38. Как изменяются параметры и структура потока по длине протяженного обогреваемого канала (см. рис. 9.26)?
39. Чем отличается кипение в каналах при высоких приведенных давлениях? Как рассчитывается эффективный КТО в этих условиях? Почему при невысоких  $q$  интенсивность теплообмена увеличивается с ростом паросодержания?
40. Каковы главные допущения гидродинамической теории кризиса пузырькового кипения? Насколько они соответствуют реальной структуре двухфазной

области у стенки перед кризисом? Как строится расчетная формула и как она согласуется с результатами опытов?

41. Как обосновывается модель кризиса, связывающая его возникновение с ростом площади сухих пятен при высоких  $q$  и ведущая к формуле (9.75)?
42. Чем обусловлено построение двух асимптотических зависимостей для КТП для низких и высоких приведенных давлений?
43. Почему при  $p/p_{kp} \geq 0,03$  разные по заложенной в них физической модели формулы (9.73) и (9.76) дают близкие значения КТП?
44. Какова физическая природа кризиса пленочного кипения? Как следует расчитывать  $q_{min}$ ?
45. Каковы качественные закономерности наступления кризиса при кипении в трубах? Чем обусловлено создание таблиц рекомендуемых значений  $q_{kp}$  при кипении воды в круглых равномерно обогреваемых трубах?
46. Как обосновывается предельная модель кризиса кипения в трубах при высоких скоростях течения и больших недогревах жидкости, ведущая к формуле (9.84)?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. **Альбом** течений жидкости и газа: пер. с англ. / Сост. М. Ван-Дайк. М.: Мир, 1986.
2. **Аметистов Е.В., Клименко В.В., Павлов Ю.М.** Кипение криогенных жидкостей. М.: Энергоатомиздат, 1995.
3. **Берман Л.Д.** К влиянию скорости пара на теплоотдачу при конденсации на горизонтальной трубе // Теплоэнергетика. 1979. № 5. С. 16—20.
4. **Боришанский В.М.** Оценка влияния давления на теплообмен и критические тепловые потоки при кипении, основанная на теории термодинамического подобия // Вопросы теплообмена и гидродинамики в двухфазных средах. Л.: Госэнергоиздат, 1961. С. 18—36.
5. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
6. **Веркин Б.И., Кириченко Ю.А., Русанов К.В.** Теплообмен при кипении криогенных жидкостей. Киев: Наукова думка, 1987.
7. **Гухман А.А.** Введение в теорию подобия. — 2-е изд., доп. и перераб. М.: Высшая школа, 1973.
8. **Гухман А.А.** Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассообмена. — 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1974.
9. **Дорошук В.Е.** Кризисы теплообмена при кипении воды в трубах. М.: Энергоатомиздат, 1983.
10. **Жукаускас А.А.** Конвективный перенос в теплообменниках. М.: Наука, 1982.
11. **Зайчик Л.И., Алипченков В.М.** Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости. М.: Физматлит, 2007.
12. **Зейгарник Ю.А.** Об универсальной модели кризиса кипения недогретой жидкости в каналах // ТВТ. 1996. Т. 34. № 1. С. 52—56.
13. **Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.** Теплопередача. М.: Энергоатомиздат, 1981.
14. **Капица П.Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. Вып. 1. С. 1—28.
15. **Капица П.Л., Капица С.П.** Опытное изучение волнового режима течения // ЖЭТФ. 1949. Т. 19. № 2. С. 105—120.
16. **Кутателадзе С.С.** Гидромеханическая модель кризиса теплообмена в кипящей жидкости при свободной конвекции // ЖТФ. 1950. Т. 20. Вып. 11. С. 1389—1392.
17. **Кутателадзе С.С.** Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979.

18. Кутепов А.М., Стерман Л.С., Стюшин Н.Г. Гидродинамика и теплообмен при парообразовании. — 3-е изд. М.: Высшая школа, 1986.
19. Кэйс В.М. Конвективный тепло- и массообмен: пер. с англ. М.: Энергия, 1972.
20. Кэйс В.М., Лондон А.Л. Компактные теплообменники. М.: Энергия, 1967.
21. Лабунцов Д.А. Физические основы энергетики. М.: Издательство МЭИ, 2000.
22. Лабунцов Д.А., Гомелаури А.В. Теплообмен при пленочном кипении криогенных и обычных жидкостей на вертикальных поверхностях // Труды МЭИ. 1976. Вып. 310. С. 41—50.
23. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика простых газожидкостных структур. М.: МЭИ, 1978.
24. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика двухфазных систем. М.: Издательский дом МЭИ, 2007.
25. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Об условиях отрыва парового пузыря при кипении при низких приведенных давлениях // ТВТ. 1988. Т. 26. № 6. С. 1233—1236.
26. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
27. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977.
28. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости // А.Д. Мышкис, В.Г. Бабский, М.Ю. Жуков и др. Киев: Наукова думка, 1992.
29. Несис Е.И. Кипение жидкостей. М.: Наука, 1973.
30. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987.
31. Теплообмен в ядерных энергетических установках / Б.С. Петухов, Л.Г. Генин, С.А. Ковалев, С.Л. Соловьев. М.: Издательский дом МЭИ, 2003.
32. Рекомендации по расчету кризиса теплоотдачи при кипении воды в круглых трубах: Препринт № 1—57. М.: ИВТ АН СССР, 1980.
33. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен / Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия. В 2-х кн.: пер. с англ. М.: Мир, 1991.
34. Себиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы: пер. с англ. М.: Мир, 1987.
35. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1973.
36. Сергеев В.В. Обобщение данных по кризису кипения при подъемном течении воды в каналах // Теплоэнергетика. 2000. № 3. С. 67—69.
37. Скрипов В.П. Метастабильная жидкость. М.: Наука, 1972.

38. Скрипов В.П., Файзуллин М.З. Фазовые переходы кристалл—жидкость—пар и термодинамическое подобие. М.: Физматлит, 2003.
39. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: справ. / под ред. А.В. Клименко, В.М. Зорина. М.: Издательство МЭИ, 2001.
40. Теории подобия и размерностей. Моделирование / П.М. Алабужев, В.Б. Геронимус, Л.М. Минкевич, Б.А. Шеховцов. М.: Высшая школа, 1968.
41. Теория тепломассообмена / под ред. А.И. Леонтьева. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
42. Термофизические свойства жидкостей в метастабильном состоянии / В.П. Скрипов, Е.Н. Синицын, П.А. Павлов и др. М.: Атомиздат, 1980.
43. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975.
44. Цветков Ф.Ф., Григорьев Б.А. Тепломассообмен. — 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство МЭИ, 2005.
45. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
46. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена: пер. с англ. / под ред. А.В. Лыкова. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961.
47. Ягов В.В. О предельном законе роста паровых пузырей в области весьма низких давлений (большие числа Якоба) // ТВТ. 1988. Т. 26. № 2. С. 335—341.
48. Ягов В.В. Теплообмен при развитом пузырьковом кипении жидкостей // Теплоэнергетика. 1988. № 2. С. 4—9.
49. Ягов В.В. Механизм переходного кипения жидкостей // ИФЖ. 1993. Т. 64. С. 740—751.
50. Ягов В.В. Механизм кризиса кипения в большом объеме // Теплоэнергетика. 2003. № 3. С. 2—10.
51. Ягов В.В. Развитие представлений о механизме кризиса кипения в большом объеме // Вестник МЭИ. 2003. № 1. С. 11—20.
52. Ягов В.В., Минко М.В. Теплообмен в двухфазном потоке при высоких приведенных давлениях // Теплоэнергетика. 2011. № 4. С. 13—23.
53. Ягов В.В., Самохин Г.И. Механизм теплообмена при переходном кипении жидкостей // Теплоэнергетика. 1990. № 10. С. 16—20.
54. Abraham J.P., Sparrow E.M., Tong J.C.K. Heat transfer in all pipe flow regimes: laminar, transitional/intermittent, and turbulent // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2009. Vol. 52. P. 557—563.
55. Bui T.D., Dhir V.K. Film boiling heat transfer on an isothermal vertical surface // J. Heat Transfer. 1985. Vol. 107. (Рус. пер.: Теплопередача. 1985. № 4. С. 18—27.)

56. **Subcooled** boiling incipience on a highly smooth microheater / T. Chen, J.F. Klausner, S.V. Garimella, J.N. Chung // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2006. Vol. 49. P. 4399—4406.
57. **Cooper M.G.** Saturation nucleate pool boiling — a simple correlation // 1st U.K. National Conf. on Heat Transfer. Inst. Chem. Engineers. 1984. P. 785—793.
58. **Florschuetz L.W., Henry C.L., Rashid Khan A.** Growth rates of free vapor bubbles in liquids at uniform superheats under normal and zero gravity conditions // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1969. Vol. 12. № 11. P. 1465—1489.
59. **The 1996** look-up table for critical heat flux in tubes / D.C. Groeneveld, L.K.H. Leung, P.L. Kirillov et al. // Nucl. Engng and Design. 1996. Vol. 163. P. 1—23.
60. **Fluid-to-fluid** modelling of the critical heat flux and post-dryout heat transfer / D.C. Groeneveld et al. // Exptl Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics / Edited by M. Giot, F. Mayinger, G.P. Celata. 1997. Vol. 2. P. 859—866.
61. **Hasan A., Roy R.P., Karla S.P.** Experiments on subcooled flow boiling heat transfer in a vertical annular channel // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1990. Vol. 33. P. 2285—2293.
62. **Katto Y.** Critical heat flux // Advances in Heat Transfer. 1985. Vol. 17. P. 1—64.
63. **Katto Y., Otokuni S.** Behavior of vapour masses on a vertical flat surface of comparatively large height near critical heat flux conditions in saturated pool boiling // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1994. Vol. 37. P. 225—263.
64. **Kutateladze S.S.** Boiling heat transfer // Inten. J. Heat and Mass Transfer. 1961. Vol. 4. P. 31—45.
65. **Memory S.B., Mazzone R.W., Marto P.J.** Enhanced laminar film condensation of R-113 using wire-wrap on a horizontal roped tube bundle // ICHEME Symp. Ser. 1992. Vol. 1. № 129. P. 249—262.
66. **Moore F.D., Mesler R.B.** The measurement of rapid surface fluctuations during nucleate boiling of water // AIChE J. 1961. Vol. 7. P. 620—624.
67. **Mudawar I., Bowers M.B.** Parametric study of ultra-high CHF in highly sub-cooled water flow inside small diameter tubes // Convective Flow Boiling / Editor J.C. Chen. Taylor & Francis, 1995. P. 117—122.
68. **Murase T., Wang H.S., Rose J.W.** Marangoni condensation of steam-ethanol mixtures on a horizontal tube // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2007. Vol. 50. P. 3774—3779.
69. **Ostrach S.** An analysis of laminar free-convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force: NACA Rep. 1111. 1953.
70. **Hewitt G.F., Shires G.L., Bott T.R.** Process Heat Transfer. Begell House, 1994.

- 
71. **Scriven L.E.** On the dynamics of phase growth // Chem. Engng Sci. 1959. Vol. 1. P. 1—14.
  72. **The departure** size of pool-boiling bubbles from artificial cavities at moderate and high pressures / W.M. Slyeter, P.C. Sloote, C.A. Copraij, A.K. Chesters // Intern. J. Multiphase Flow. 1991. Vol. 17. P. 153—158.
  73. **Stephan P., Hammer J.** A new model for nucleate boiling heat transfer // Wärme- und Stoffübertragung. 1994. Bd 30. P. 119—125.
  74. **Taylor M.F., Bauer K.E., McEligot D.M.** Internal forced convection to low-Prandtl-number gas mixtures // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1988. Vol. 31. № 1. P. 13—25.
  75. **Experiments** and universal growth relations for vapour bubbles with microlayers / T.G. Theofanous, T.G. Bohrer, M.C. Chang, P.D. Patel // J. Heat Transfer. 1978. Vol. 100. № 1. (Рус. пер.: Теплопередача. 1978. Т. 100. № 1. С. 43—51.)
  76. **Two-Phase** Flow and Heat Transfer / Edited by D. Butterworth and G.F. Hewitt. Oxford University Press, 1977.
  77. **Vilimpoc V., Cole R., Sukanek P.C.** Heat transfer in Newtonian liquids around a circular cylinder // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1990. Vol. 33. № 3. P. 447—456.
  78. **Yagov V.V.** Vapour bubble departure conditions at pool boiling // Eurotherm Seminar N 48 / Pool Boiling 2. Paderborn. Germany. Edizioni ETS. Pisa. 1996. P. 95—104.
  79. **Yagov V.V.** Generic features and puzzles of nucleate boiling // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 2009. Vol. 52. P. 5241—5249.
  80. **Yagov V.V., Puzin V.A., Sukomel L.A.** The approximate model for critical heat flux under subcooled flow boiling conditions // Proc. of the 2nd European Thermal Sciences and 14th UIT Nat. Heat Transfer Conf. Rome, Italy. 19—31 May, 1996. Vol. 1. P. 483—490.
  81. **Zuber N.** On the stability of boiling heat transfer // Trans. of ASME. 1958. Vol. 80. № 3. P. 711—720.

*Учебное издание*

**Виктор Владимирович Ягов**

**ТЕПЛООБМЕН В ОДНОФАЗНЫХ СРЕДАХ  
И ПРИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ**

Учебное пособие для вузов

Редактор издательства *М.П. Соколова*

Технический редактор *Т.А. Дворецкова*

Корректоры *В.В. Самова, Е.П. Севостьянова*

Компьютерная верстка *Л.В. Софейчук*

Подписано в печать с оригинала-макета 22.07.14 Формат 60×90/16

Бумага офсетная Гарнитура Таймс Печать офсетная

Усл. печ. л. 33,9 Усл. кр.-отт. 34,9 Уч.-изд. л. 36,0

Тираж 500 экз. Заказ №

ЗАО «Издательский дом МЭИ», 111250, Москва, Красноказарменная ул., 14а

Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., д. 6