

Modellbildung und Simulation - Kurzfassung

Kapitel 3: Modelle mit konzentrierten Parametern Prof. Dr.-Ing. Marcus Geimer

Institut für Fahrzeugsystemtechnik (FAST), Institutsteil Mobile Arbeitsmaschinen (Mobima)
Institutsleiter: Prof. Dr.-Ing. Marcus Geimer

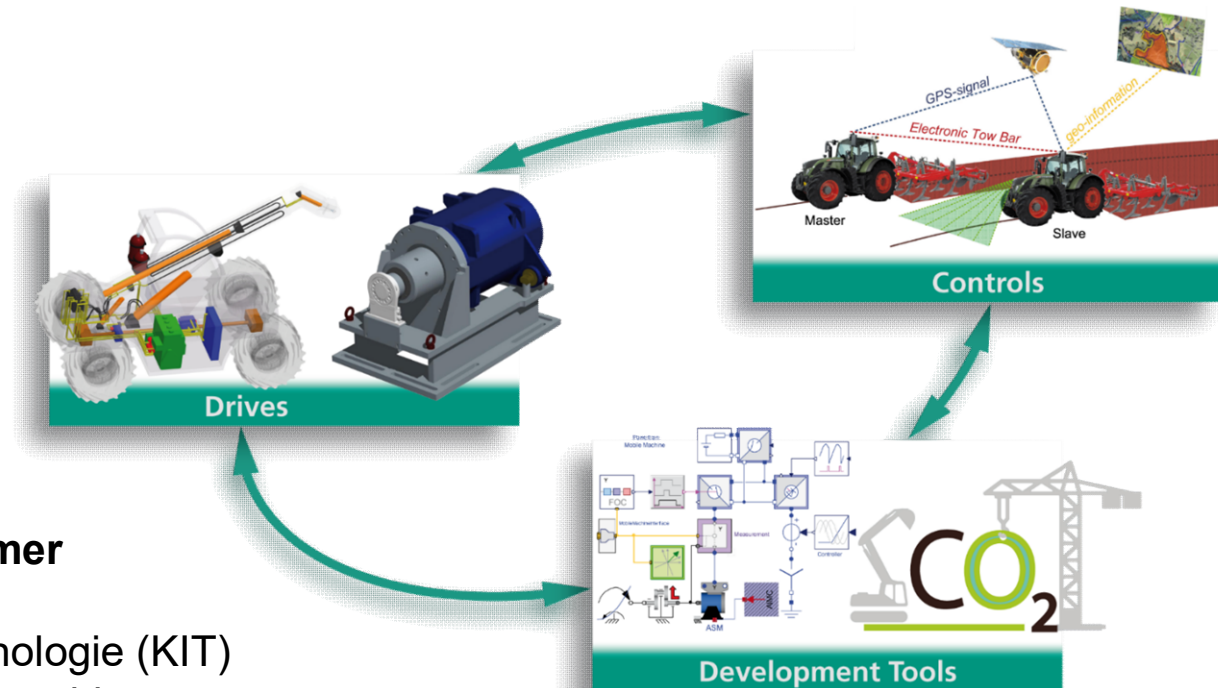




■ Prof. Dr.-Ing. Marcus Geimer

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institutsteil Mobile Arbeitsmaschinen
Rintheimer Querallee 2
76131 Karlsruhe

marcus.geimer@kit.edu
+49 721 608 48601



Organisatorisches

- Bereitstellung der Vorlesungsvideos über ILIAS
- Heute
 - Beantwortung von Fragen auf Englisch und Deutsch
 - Zusammenfassung auf Deutsch
- Mitschrift wird auf ILIAS hochgeladen
- Fragen: Hand heben oder über den Chat
(H. Stein beobachtet auch den Chat)

Fragen

■ ...

Inhalt der Zusammenfassung

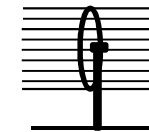
- Einleitung
- Analogien
 - Detailliertere Vorstellung der Darstellungsmöglichkeiten von Systemen
 - Überarbeitung der Analogietafeln
- Grundlagen der Hydraulik
- Erstellung der Differentialgleichungen

Warum Modellbildung mit konzentrierten Parametern?

- Modellbildungsprozess ist einfacher, da z.B. keine dreidimensionale Überlegungen notwendig sind.
- Keine partiellen DGL zu lösen. Bewegungsgleichungen können mit gewöhnlichen DGL gelöst werden.
- Geringerer Rechenaufwand bei der Simulation, einfache stabile Solver verwendbar
- Detaillierungsgrad je nach Anwendung ausreichend, insbesondere für
 - systemische Untersuchungen
 - eindimensionale Problemstellungen
 - Parameterstudien
 - Vernachlässigbare 3D-Effekte



Dreidimensionale Strömung



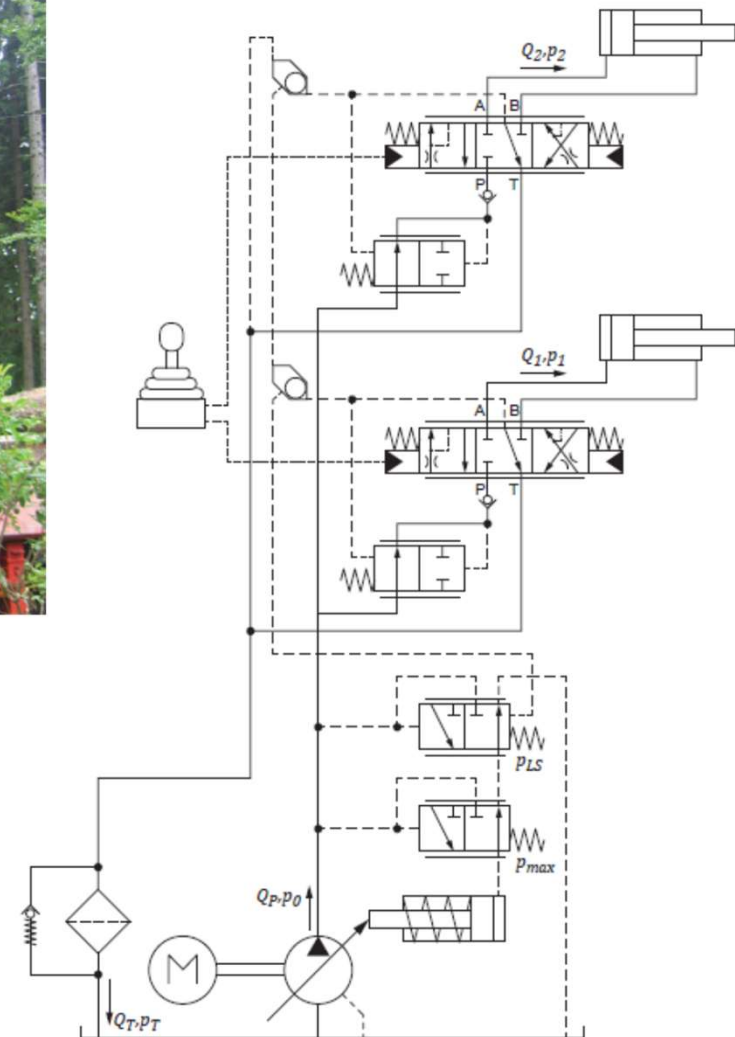
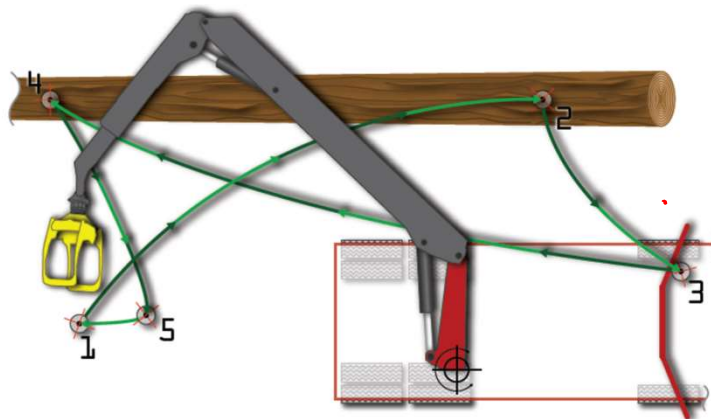
Eindimensionale Strömung

Vereinfachung der Navier Stokes Gleichung:

$$\rho \cdot \left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} + w \cdot \cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} \right) = k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \right)$$

$$\rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Aktuelle Forschungsbeispiele - Forstkran



Aufstellung eines Netzwerks

- Aufstellung eines Netzwerks aufgrund der Problemstellung
- Nebenbedingungen durch die Verschaltung berücksichtigen
 - Knotengleichung:
(Kräfte- und Momentengleichgewicht, Druckaufbaugleichung, 1. Kirchhoffsches Gesetz)
 - Maschenregel
(kinematische Beziehungen, Druckbilanz, 2. Kirchhoffsches Gesetz)
- In der Praxis üblich: Formulierung des Problems mit Hilfe der Naturgesetze und Einbezug der Nebenbedingungen

Inhalt heute

- Einleitung
- Analogien
 - Detailliertere Vorstellung der Darstellungsmöglichkeiten von Systemen
 - Überarbeitung der Analogietafeln
- Grundlagen der Hydraulik
- Erstellung der Differentialgleichungen

Analogiebildung

- Analogien zwischen unterschiedlichen technischen Systemen schon seit langem bekannt

- Festlegung der Analogien erfolgt in einer Analogietafel:

- Unendlich viele Möglichkeiten der Darstellung
- Im Rahmen der Vorlesung wird Potential-Strom Darstellung verwendet

- Möglichkeiten der Darstellung:

- Potential – Strom Darstellung:
schaltungsreziproke Darstellung

$$F = U \quad v = I$$

- Trans – Per Darstellung:
schaltungstreue Darstellung;
Beiwerte verhalten sich jedoch reziprok

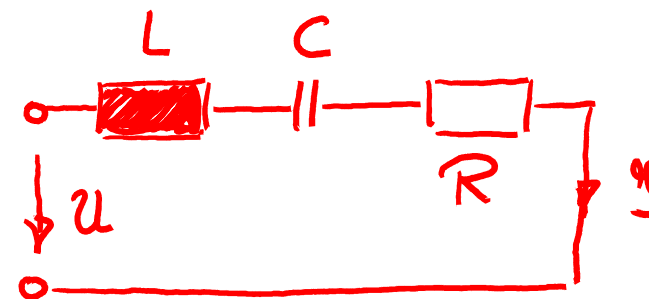
$$F = I \quad v = U$$

Darstellungsmöglichkeiten

Trans-Per Darstellung (schaltungstreu):

$$F = I$$

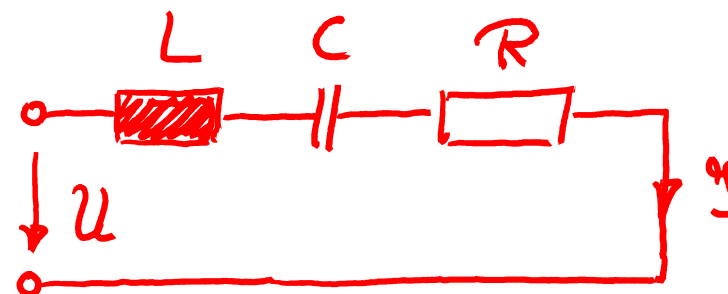
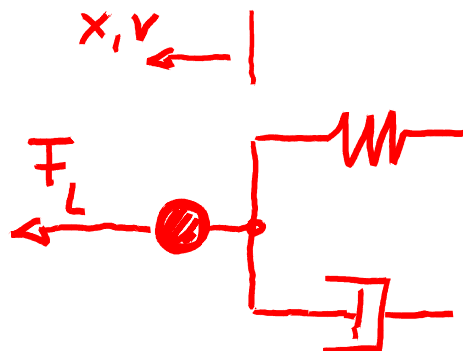
$$v = U$$



Potential-Strom Darstellung (schaltungsreziprok):

$$F = U$$

$$v = I$$

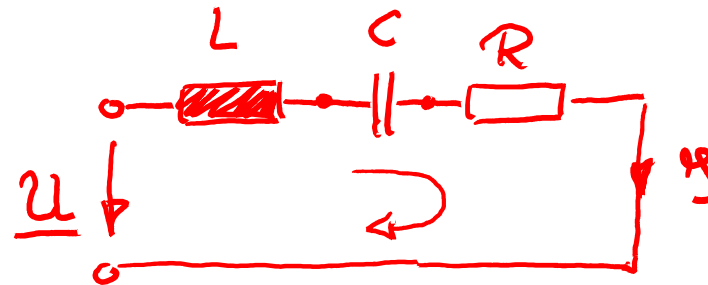
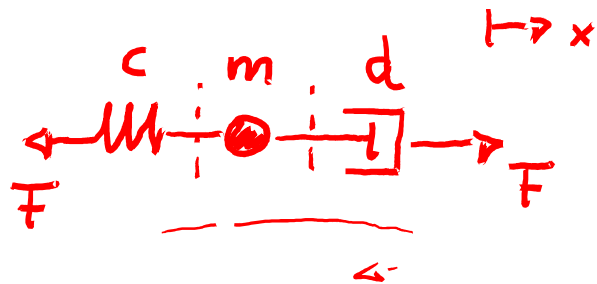


Darstellungsmöglichkeiten

Trans-Per Darstellung (schaltungstreu):

$$\hat{F} = I$$

$$\hat{v} = U$$



$$F = F_c = F_m = F_d \quad \longleftrightarrow$$

$$I = I_L = I_C = I_R$$

$$V_c + V_m + V_d - V = 0$$

$$U_L + U_C + U_R - U = 0$$

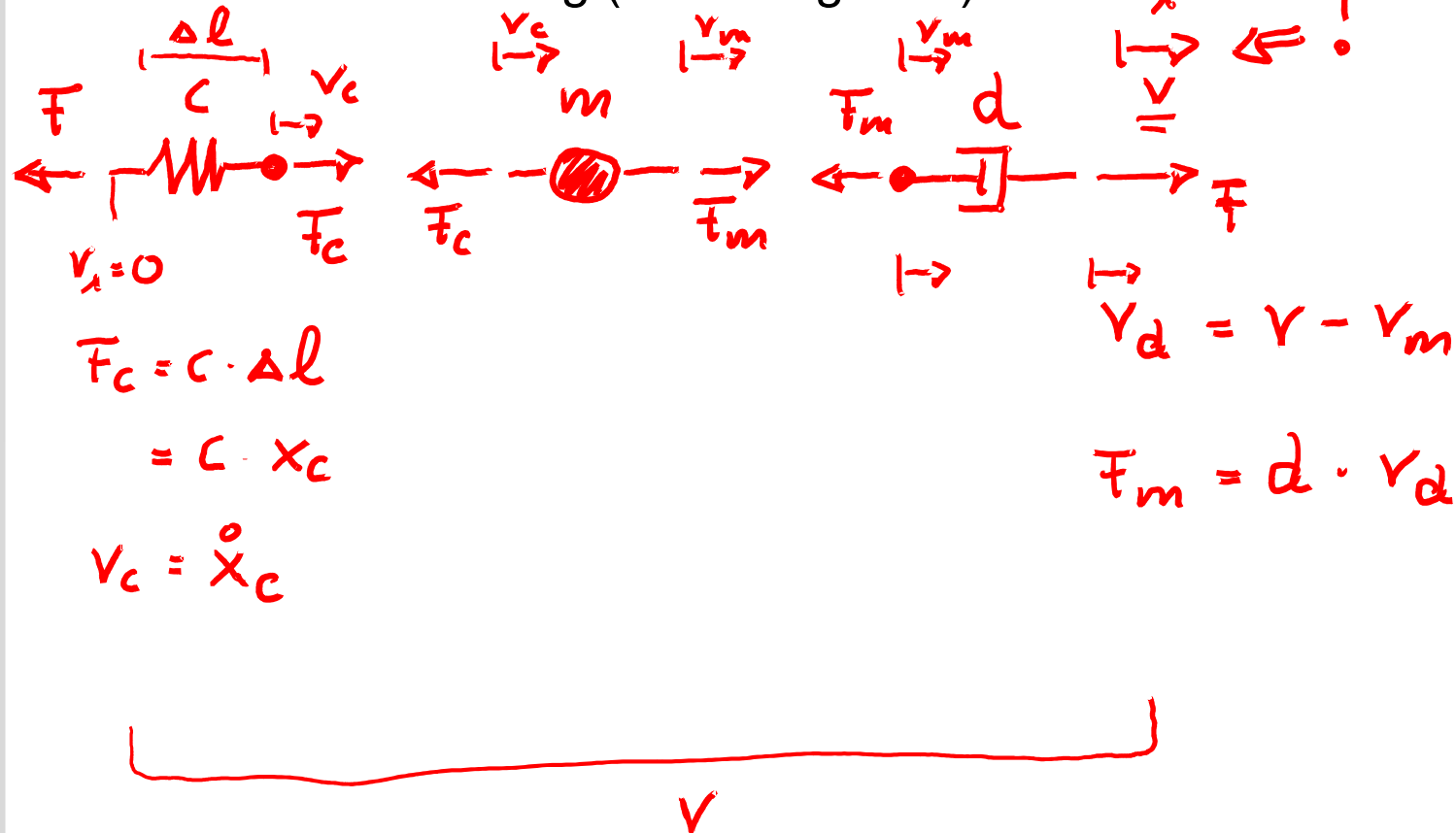
$$V = V_c + V_m + V_d \quad \longleftrightarrow$$

$$U = U_L + U_C + U_R$$

$$F_d = d \cdot v_d \Leftrightarrow \underline{v_d} = \frac{1}{d} \cdot \underline{F_d} \left[\frac{1}{d} \hat{=} R \right] \underline{U_R} = R \cdot \underline{I}$$

Darstellungsmöglichkeiten

Trans-Per Darstellung (schaltungstreu):



$v = U$

Darstellungsmöglichkeiten

V_m :

$$\underline{F}_m = m \cdot \dot{V}_m$$

$$\boxed{m \hat{=} C}$$

$$C = \frac{\dot{y}}{\dot{u}_c} \Leftrightarrow \underline{y} = C \cdot \dot{u}_c$$

V_c :

$$F_c = C \cdot x_c$$

$$\underline{\dot{F}_c} = C \cdot \dot{V}_c$$

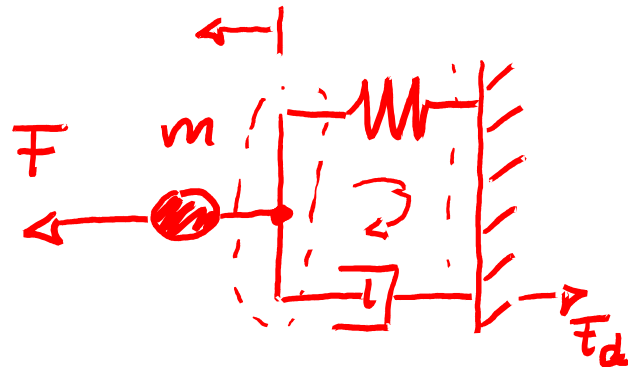
$$\boxed{C \hat{=} \frac{1}{L}}$$

$$L = \frac{u_L}{\dot{y}} \Leftrightarrow u_L = L \cdot \dot{y}$$

$$\underline{\dot{y}} = \frac{1}{L} \cdot u_L$$

Darstellungsmöglichkeiten

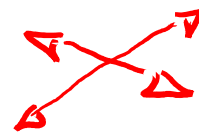
Potential-Strom Darstellung (schaltungsreziprok): $F = U$ $v = I$



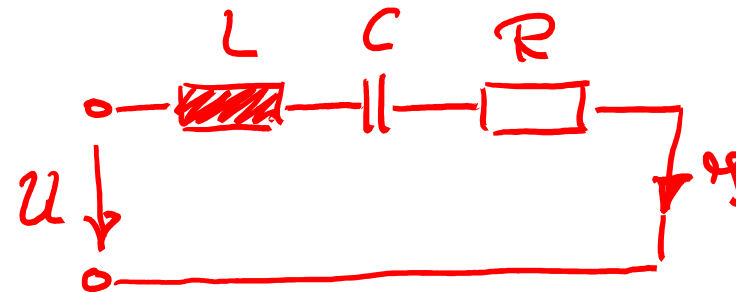
$$\bar{F} = \bar{F}_m + \bar{F}_c + \bar{F}_d$$

$$V_c = V_d = V_m = V$$

$$\bar{F}_d = d \cdot v$$



$$d \hat{=} R$$



$$g = g_L = g_C = g_R$$

$$U = U_L + U_C + U_R$$

$$\underline{U_R} = R \cdot g$$

Darstellungsmöglichkeiten

$v_m :$

$$\vec{F}_m = m \cdot \dot{\vec{v}}$$

$$\hat{m} = L$$

$$u_2 = L \cdot \dot{i}$$

$v_c :$

$$\dot{\vec{F}}_c = c \cdot \vec{v}_c$$

$$\hat{c} = \frac{1}{C}$$

$$\dot{u}_c = \frac{1}{C} \cdot i$$

Analogietafel für die Potential-Strom Darstellung

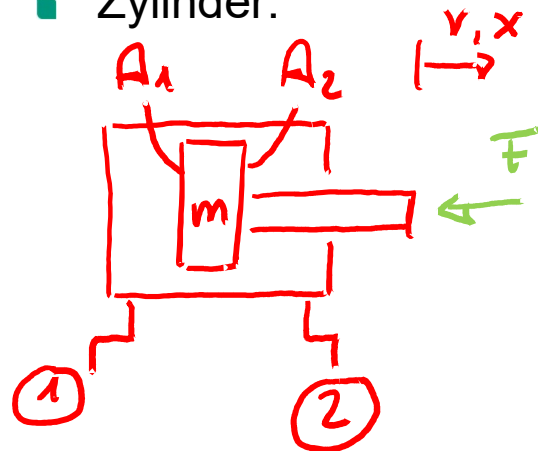
Analogietafel: Potential-Strom-Darstellung				
	Elektrisch	Mechanisch		Hydraulisch
		Translation	Rotation	
Potentialdifferenz e	Spannung $U = L\ddot{Q}$	Kraft $F = m\ddot{x}$	Moment $M = J\ddot{\varphi}$	Druck $p = L_h\ddot{V}$
Stromgröße f	Stromstärke $I = \frac{dQ}{dt}$	Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$	Drehgeschwindigkeit $w = \frac{d\varphi}{dt}$	Volumenstrom $Q = \frac{dV}{dt}$
int. Potentialdifferenz p	Magn. Fluss $\Phi = LI$	Impuls $p = mv$	Drall $L = Jw$	Druckimpuls $\Gamma = L_h Q$
int. Stromgröße q	Ladung Q	Verschiebung x	Winkel φ	Volumen V
Widerstand R	$\frac{U}{I}$	$\frac{F}{v} (= d, \text{Dämpfer})$	$\frac{M}{w} (\text{Drehdämpfer})$	$\frac{p}{Q}$
Kapazität C	$\frac{Q}{U}$	$\frac{x}{F} (= \frac{1}{c}, \text{Federkonstante})$	$\frac{\varphi}{M}$	$\frac{V}{p}$
Induktivität L	$\frac{U}{\dot{I}}$	$\frac{F}{\dot{v}} (= m, \text{Masse})$	$\frac{M}{\dot{w}} (= J, \text{Trägheitsmoment})$	$\frac{p}{\dot{Q}}$
Leistung $P = e \cdot f$	$U \cdot I$	$F \cdot v$	$M \cdot w$	$p \cdot Q$
Energie $E = \int f \cdot dp$	$\frac{1}{2} L \cdot I^2$	$\frac{1}{2} m \cdot v^2$	$\frac{1}{2} J \cdot w^2$	$\frac{1}{2} L_h \cdot Q^2$
Maschenregel $\sum e_i = 0$	$\sum U_i = 0$	$\sum v_i = 0$	$\sum \omega_i = 0$	$\sum p_i = 0$
Knotenregel $\sum f_i = 0$	$\sum I_i = 0$	$\sum F_i = 0$	$\sum M_i = 0$	$\sum Q_i = 0$

Inhalt heute

- Einleitung
- Analogien
 - Detailliertere Vorstellung der Darstellungsmöglichkeiten von Systemen
 - Überarbeitung der Analogietafeln
- Grundlagen der Hydraulik
- Erstellung der Differentialgleichungen

Hydraulische Grundgleichungen

■ Zylinder:



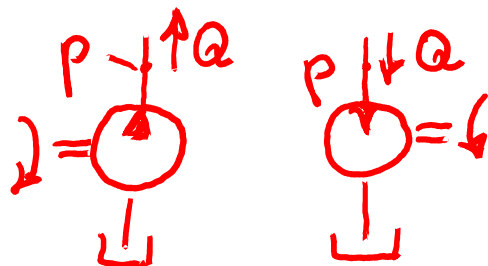
$$P = \frac{F}{A}$$

$$Q = v \cdot A$$

$$P_1 = \frac{F}{A_1} ; P_2 = 0$$

$$x \dot{=} 0 : F = p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2$$

■ Pumpe oder Motor:



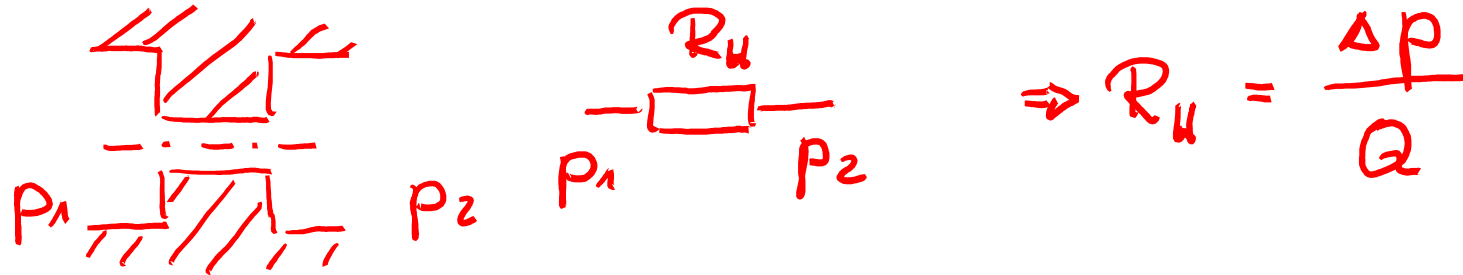
$$Q = V_{te} \cdot n ; H = \frac{V_{te}}{2\pi} \cdot p$$

$$P_{mech} = H \cdot \omega = H \cdot 2\pi \cdot n$$

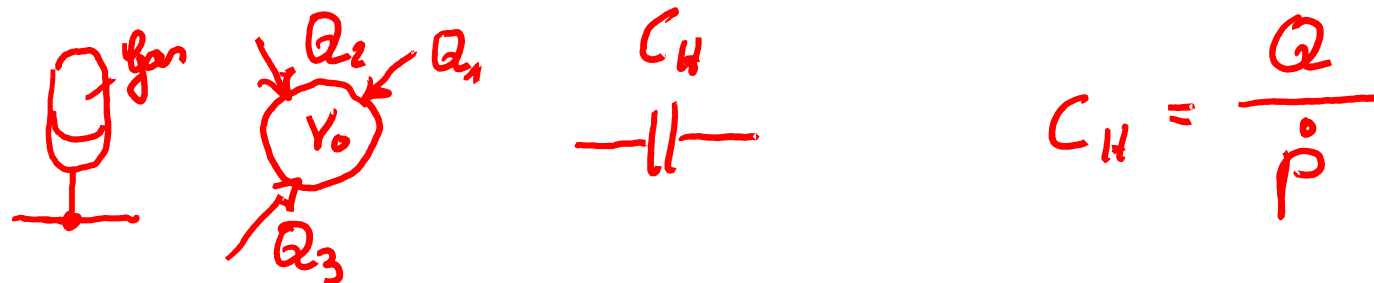
$$= \frac{V_{te}}{2\pi} \cdot p \cdot 2\pi \cdot \frac{Q}{V_{te}} = p \cdot Q = P_{hydr.}$$

Hydraulische Grundgleichungen

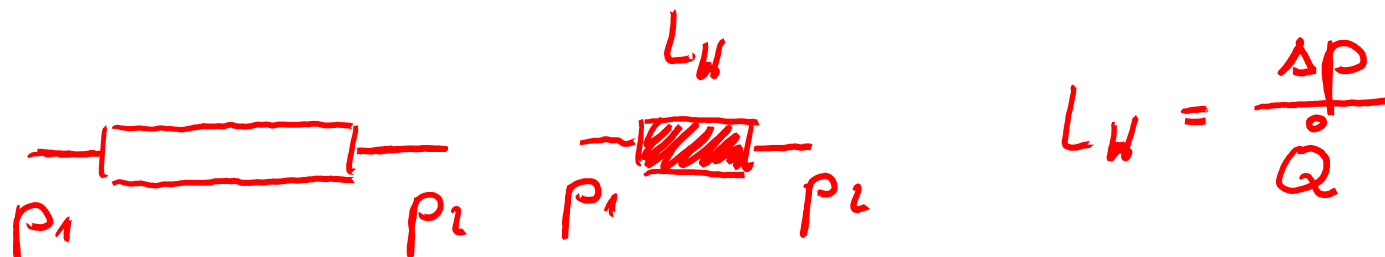
■ Widerstände:



■ Kapazitäten:

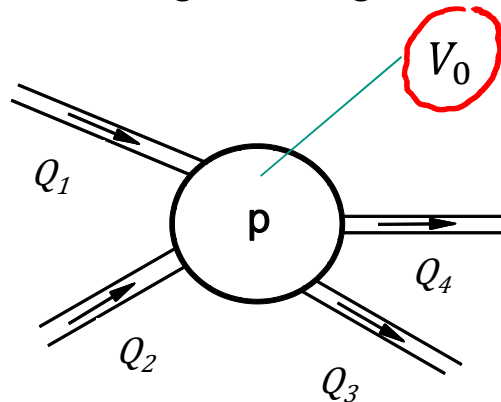


■ Induktivitäten:



Aufstellung eines Netzwerks für hydraulische Systeme

■ Druckaufbaugleichung

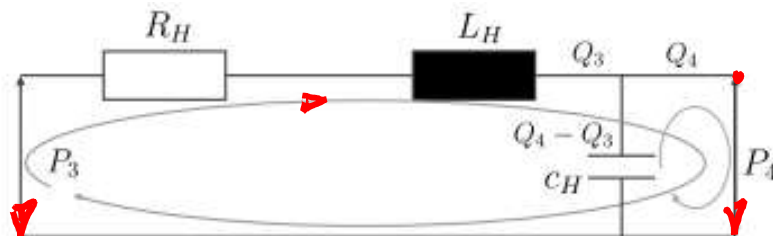


$$C_H = \frac{Q}{\dot{p}}$$

$$\dot{p} = \frac{1}{C_H} \sum Q = \frac{1}{C_H} (Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4)$$

$$\text{mit: } C_H = \frac{V_0}{E'_{\text{Öl}}}$$

■ Druckbilanz



$$\sum \Delta p = 0$$

$$\Delta p_{R_H} + \Delta p_{L_H} + p_4 - p_3 = 0$$

$$p_4 - \Delta p_{C_H} = 0$$

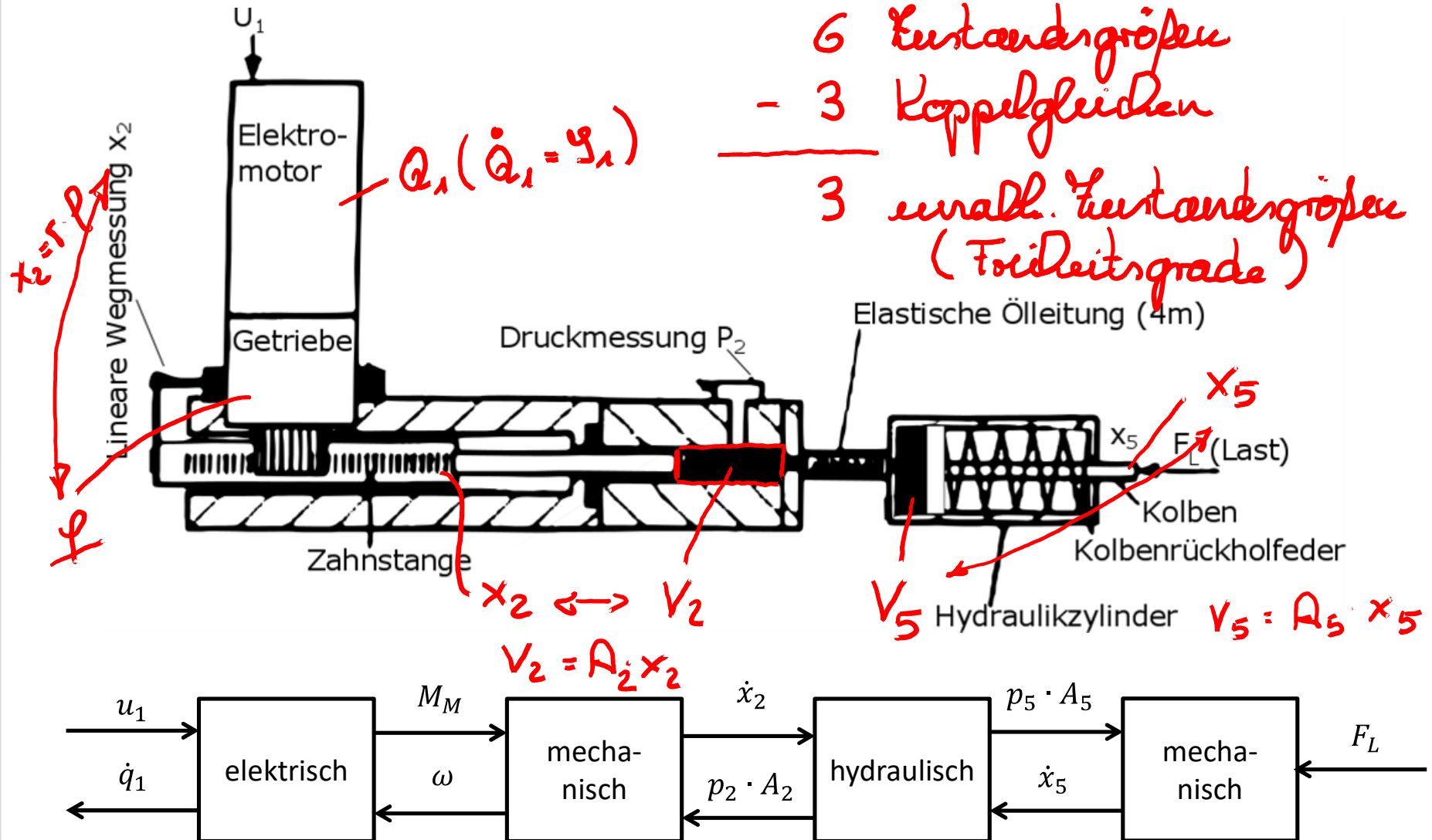
Inhalt heute

- Einleitung
- Analogien
 - Detailliertere Vorstellung der Darstellungsmöglichkeiten von Systemen
 - Überarbeitung der Analogietafeln
- Grundlagen der Hydraulik
- Erstellung der Differentialgleichungen

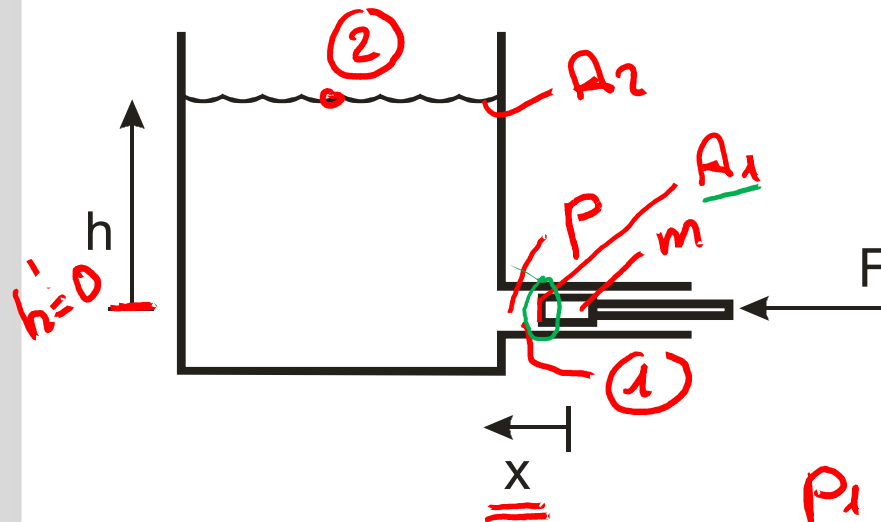
Aufstellung eines Netzwerks

- Aufstellung eines Netzwerks aufgrund der Problemstellung
- Nebenbedingungen durch die Verschaltung berücksichtigen
 - Knotengleichung:
(Kräfte- und Momentengleichgewicht, Druckaufbaugleichung, 1. Kirchhoffsches Gesetz)
 - Maschenregel
(kinematische Beziehungen, Druckbilanz, 2. Kirchhoffsches Gesetz)
- In der Praxis üblich: Formulierung des Problems mit Hilfe der Naturgesetze und Einbezug der Nebenbedingungen

Co-Simulation



Aufstellen der Differentialgleichungen - Beispiel



$$m \cdot \ddot{x} = F - \bar{F}_p$$

$$\bar{F}_p = \underline{p} \cdot A_1$$

$$\cancel{p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1} = \cancel{p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2}$$

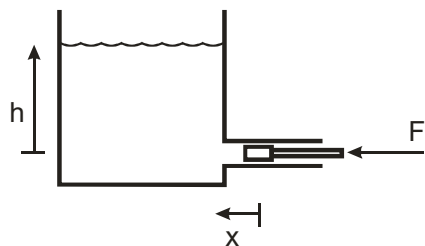
$v_1 = \dot{x}$ $v_2 = \dot{h}$

$$\Rightarrow \underline{p} = \rho \cdot g \cdot \underline{h}$$

h aus Klammernhaltung:

$$\underline{h} \cdot A_2 = \underline{x} \cdot A_1$$

Aufstellen der Differentialgleichungen - Beispiel



$$m \cdot \ddot{x} = F - p \cdot A_1$$

$$p + \frac{\rho}{2} \dot{x}^2 = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\parallel h \cdot A_2 = x \cdot A_1$$

$$\Leftrightarrow h = x \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

$$= \rho \cdot g \cdot x \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

$$\Rightarrow p = \rho \cdot g \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot x - \frac{\rho}{2} \dot{x}^2$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} = F - \rho \cdot g \cdot \frac{A_1^2}{A_2} \cdot x + \frac{\rho \cdot A_1}{2} \dot{x}^2$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \ddot{x} - \frac{\rho \cdot A_1}{2} \dot{x}^2 + \rho \cdot g \cdot \frac{A_1^2}{A_2} \cdot x = F$$

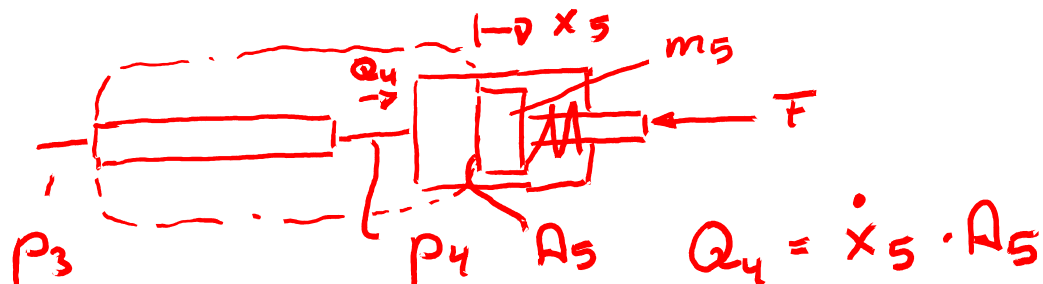
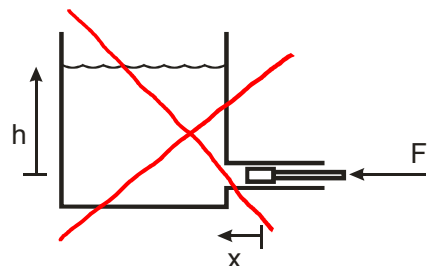


$$C_x = \frac{V}{E_{0L}}$$

$$x \in [1, 2, 3]$$

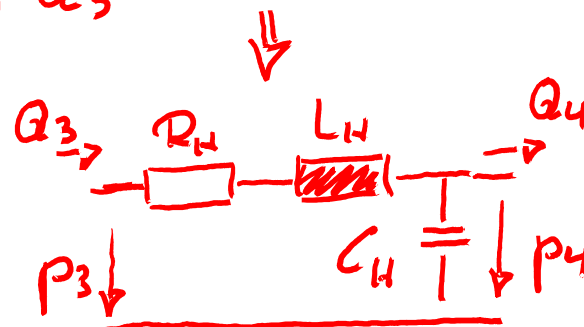


Aufstellen der Differentialgleichungen - Beispiel



$$m_5 \cdot \ddot{x}_5 = p_4 \cdot A_5 - F - F_c$$

$$F_c = c \cdot x_5$$



$$\dot{p}_4 = \frac{1}{C_H} (Q_3 - Q_4)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$V_3 \quad \underline{\underline{V_4}}$$

$$C_H = \frac{V_0}{E_{\text{öl}}}$$

$$V_0 = V_R + V_Z$$

$$V_Z = V_4$$

Fragen

Auf Folie 29 nehmen Sie an, dass $x \cdot A_1 = h \cdot A_2$ gilt. Allerdings handelt es sich dann bei dem h ja um das Δh , also die Differenz die die Höhe h durch das Einströmen des Fluids um x in den Kolben abnimmt. Dementsprechend dürfte im folgenden das berechnete h nicht in die Bernoulligleichung eingesetzt werden, da dort das absolute h relevant ist. Müsste dann nicht eine Gleichung: $h_0 - \Delta h$ genommen werden, welche dann in die Bernoulligleichung eingesetzt werden kann?