Modellbildung und Simulation

2. Modellklassifizierung, Netzwerke

INSTITUT FÜR TECHNISCHE MECHANIK / BEREICH DYNAMIK UND MECHATRONIK

Lernziele

- Die Studierenden
  - kennen die Modellklassen zur Beschreibung technischer Systeme,
  - kennen die Eigenschaften von Modellen mit konzentrierten und verteilten Parametern,
  - können für technische Problemstellungen entscheiden, ob eine Modellierung mit konzentrierten oder mit verteilten Parametern sinnvoll ist.

Institut für Technische Mechanik
Abteilung Dynamik / Mechatronik

Übersicht

1. Welche Modellklassen gibt es?
2. Wie unterscheiden sie sich?
3. Was sind Netzwerke?

Institut für Technische Mechanik
Abteilung Dynamik / Mechatronik

Welche Modellklassen gibt es?

- Mathematisch-physikalische Modelle:
  - algebraische Modelle

    Beschreibung von Zustandsänderungen durch algebraische Gleichungen, linear bzw. nichtlinear.

  - Modelle mit konzentrierten Parametern

    Ortsunabhängige Darstellung der Zustandsgrößen führt auf Beschreibung von Zustandsänderungen durch gewöhnliche Differentialgleichungen, die evtl. durch algebraische Nebenbedingungen ergänzt werden.

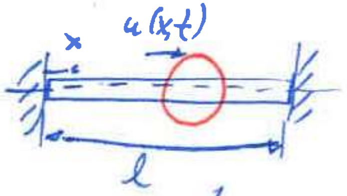
  - Modelle mit verteilten Parametern

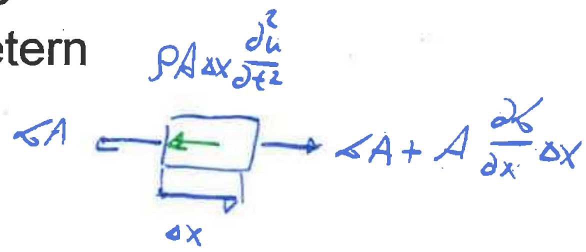
    Zustandsgrößen sind Feldgrößen; Beschreibung von Zustandsänderungen durch partielle Differentialgleichungen.

Institut für Technische Mechanik
Abteilung Dynamik / Mechatronik

Wie unterscheiden sich die Modellklassen?

- Beispiel Stablängsschwingungen:
  - Modell mit verteilten Parametern





$$\rho \cancel{A} \cancel{\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cancel{A} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cancel{\Delta x}, \quad \sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$RB: \; u(x=0,t) = 0, \quad AB: \; u(x,t=0) = f(x)$$

$$u(x=l,t) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t=0) = g(x)$$

$$u(x,t) = W(x)\,\Theta(t)$$

$$W\ddot{\Theta} - c^2 W''\Theta = 0 \quad -c^2\frac{W''}{W} + \frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = 0 \; ; \quad c^2\frac{W''}{W} = \frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = -\omega^2$$

Wie unterscheiden sich die Modellklassen?

- Beispiel Stablängsschwingungen:

$$W'' + \underbrace{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}_{\omega'^2} W = 0 \quad ; \quad \ddot{\Theta} + \omega^2 \Theta = 0$$

$$W(x) = C_1 \sin(\omega' x) + C_2 \cos(\omega' x)$$

$$\Theta(t) = \boxed{C_3 \sin(\omega t) + C_4 \cos(\omega t)}$$

RB: $\underbrace{u(x=0,t)=0}_{C_2=0}$, $\underbrace{u(x=l,t)=0}_{C_1 \underbrace{\sin(\omega' l)}_{=0}=0}$

$$\omega'_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \omega' = \frac{\omega}{c}, \quad \omega_n = \frac{cn\pi}{l}$$

Eigenformen: $W_n(x) = \boxed{C_{1n} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x)\Theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(C_{3n}\sin(\omega_n t) + C_{4n}\cos(\omega_n t)\right)$$

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{l}{2} & n = m \end{cases}$$

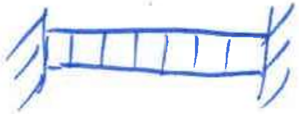
$$c\frac{m\pi}{l} C_{3m}\frac{l}{2} = \int_0^l g(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx$$

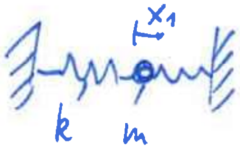
$$u(x,t=0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) C_{4n} \quad \Big| \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right), \int_0^l \ldots dx \; ; \quad C_{4m}\frac{l}{2} = \int_0^l f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx$$

Wie unterscheiden sich die Modellklassen?

Karlsruhe Institute of Technology

- Beispiel Stablängsschwingungen:
  - Modell mit konzentrierten Parametern



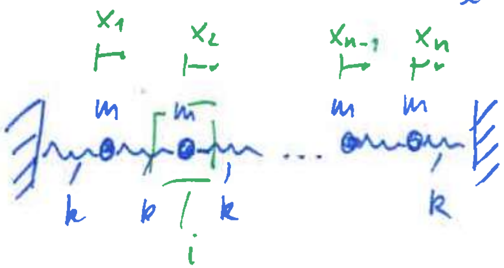


$$m = \rho A \ell \qquad k = \frac{2EA}{\ell}$$

$$m\ddot{x}_1 + 2k x_1 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{2k}{m} x_1 = 0 \;; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,\frac{2}{\ell} \;; \quad \omega_{n} = \frac{c\, n\pi}{\ell}$$

$$\omega_{1,\nu} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,\frac{\pi}{\ell}$$



$$\Delta x = \frac{\ell}{N}, \quad m = \rho A \Delta x$$

$$k = \frac{N+1}{\ell} EA$$

$$+m\ddot{x}_i + k(x_i - x_{i-1}) - k(x_{i+1} - x_i) = 0$$

$$m\ddot{x}_i - k x_{i+1} + 2k x_i - k x_{i-1} = 0 \;; \quad i = 1,\dots,N \text{ mit } x_0 = 0 \text{ und } x_{N+1} = 0$$

$$\begin{bmatrix} m & & & & 0 \\ & m & & & \\ & & m & & \\ & & & m & \\ 0 & & & & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}^{\cdot\cdot} + \begin{bmatrix} 2k & -k & & 0 \\ -k & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -k \\ 0 & & -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wie unterscheiden sich die Modellklassen?

Karlsruhe Institute of Technology

- Beispiel Stablängsschwingungen:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)\right)}\,, \quad n = 1,\dots,N$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}\underline{\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right)\right)}} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{N+1}\right) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{N+1}\right)^2$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{\pi}{N+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\sqrt{\frac{\pi^2 N}{\ell^2(N+1)}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{N}{N+1}}\;; \quad \omega_{1,v} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,\frac{\pi}{\ell}$$

Eigenformen für das Modell mit konzentrierten Parametern:

$$\left[\sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)\ \sin\left(\frac{2n\pi}{N+1}\right) \dots \sin\left(\frac{Nn\pi}{N+1}\right)\right]$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

Vergleich: $\left[\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)\ \sin\left(\frac{2n\pi}{N}\right) \dots \sin\left(\frac{\cancel{N}n\pi}{\cancel{N}}\right)\right]$

Wie unterscheiden sich die Modellklassen?

- Modell mit verteilten Parametern:
  - Ausgangspunkt: Kontinuumsmechanik, Bilanzgleichungen
  - partielle Differentialgleichungen; Lösung aufwendiger
  - abzählbar unendlich viele Eigenfrequenzen und Eigenformen
  - Lösung besteht aus abzählbar unendlich vielen Harmonischen
  - Lösung ist für jeden materiellen Punkt des Kontinuums bestimmbar

- Modell mit konzentrierten Parametern:
  - zusätzliche Modellannahmen erforderlich, dadurch Beseitigung der Ortsabhängigkeit der Zustandsgrößen
  - gewöhnliche Differentialgleichungen; Lösung einfacher
  - endlich viele Eigenfrequenzen und Eigenformen
  - Lösung besteht aus endlich vielen Harmonischen
  - Lösung ist nur in einzelnen Punkten bestimmbar
  - Approximation der Lösung eines Modells mit verteilten Parametern (Fehlerabschätzung, Grenzübergang)

Was sind Netzwerke?

- Darstellung von Modellen mit konzentrierten Parametern z.B. in der Elektrotechnik oder Hydraulik
- Systeme, deren zugrundeliegende Struktur sich durch eine Menge von **Knoten** darstellen lässt, die mit Zweigen (**Kanten**) verbunden sind
- ein geschlossener Zug aus Zweigen und Knoten heißt **Masche**
- häufig repräsentieren die Zweige Bauelemente

Was sind Netzwerke?

- Beispiel I: Elektrotechnik

Spannung $\underline{\underline{U}}$ (Differenzgröße) $U = \frac{d\Phi}{dt}$

Stromstärke $\underline{\underline{I}}$ (Stromgröße) $I = \frac{dQ}{dt}$

Hydraulik

Δp (Druckdifferenz)

q Durchfluss $q = \frac{dV}{dt}$

Bauteile:

Widerstand $U = R I$

Kondensator $U = \frac{1}{C} Q$

$\Delta p = R_H q$

hydraul. Speicher

Kirchhoff-Gesetze

Knotenregel

Maschenregel

Kontinuitätsgleichung

Druckbilanz

Ausblick

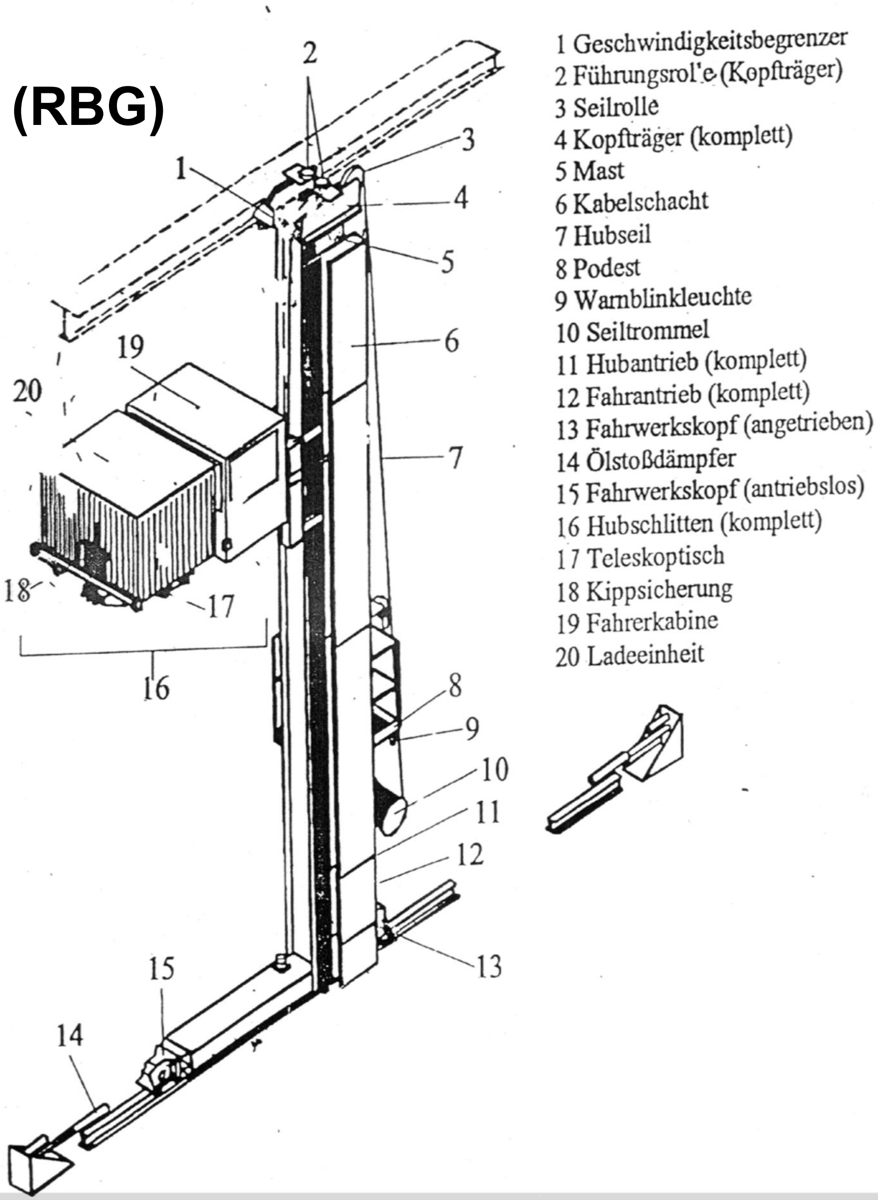
Karlsruhe Institute of Technology

- Nächste Vorlesung:
  - Modellierung von mechanisch-hydraulisch-elektrischen Systemen als Modelle mit konzentrierten Parametern
  - Herleitung der Zustandsgleichungen für das Gesamtsystem ausgehend von Arbeit und Energie
  - Berücksichtigung von Nebenbedingungen (Kopplungen zwischen den Subsystemen)

- Nächste Übung:
  - Netzwerke in Software implementieren: Einführung in Simulink (Pool)

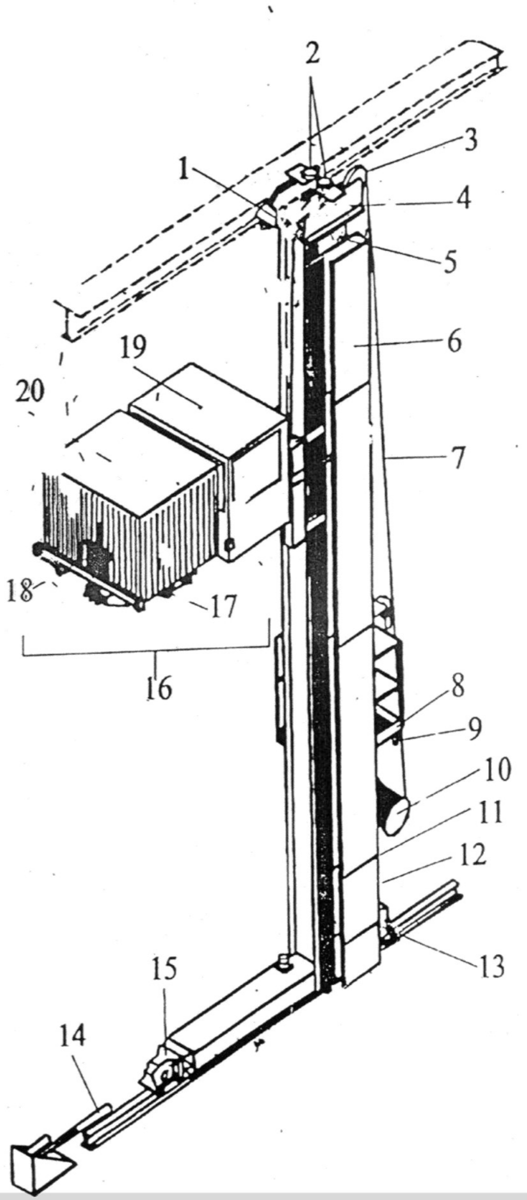
Problem der Woche

Regalbediengerät (RBG)

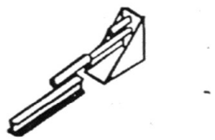


Problem

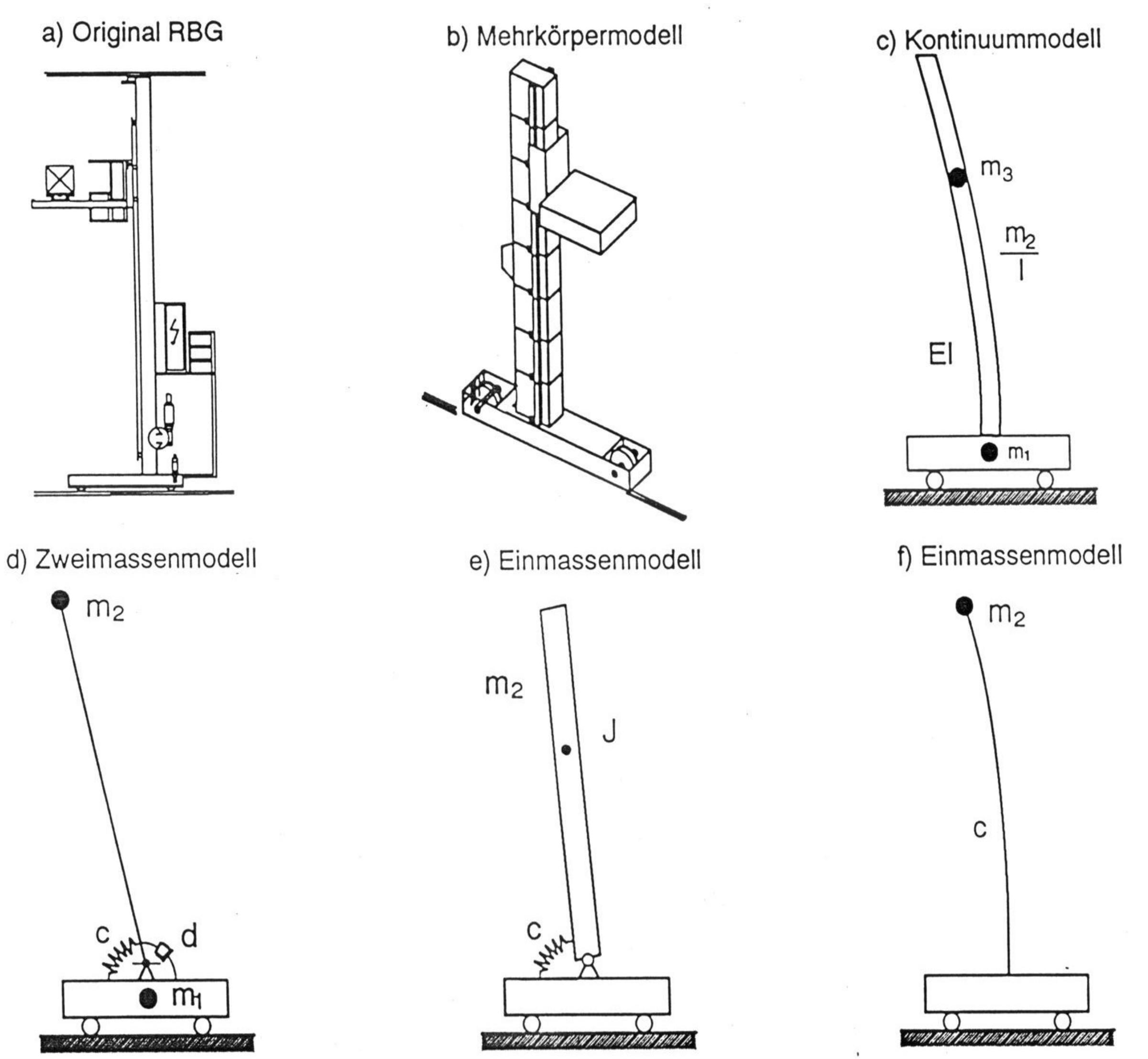
Modell für die Biegeschwingungen des Masts?



1 Geschwindigkeitsbegrenzer
2 Führungsrol'e (Kopfträger)
3 Seilrolle
4 Kopfträger (komplett)
5 Mast
6 Kabelschacht
7 Hubseil
8 Podest
9 Warnblinkleuchte
10 Seiltrommel
11 Hubantrieb (komplett)
12 Fahrantrieb (komplett)
13 Fahrwerkskopf (angetrieben)
14 Ölstoßdämpfer
15 Fahrwerkskopf (antriebslos)
16 Hubschlitten (komplett)
17 Teleskoptisch
18 Kippsicherung
19 Fahrerkabine
20 Ladeeinheit



Modellierungsmöglichkeiten für ein RBG



Institut für Technische Mechanik
Abteilung Dynamik / Mechatronik