Karlsruher Institut für Technologie

Modellbildung und Simulation

Prof. Dr.-Ing. K. Furmans
Prof. Dr.-Ing. M. Geimer
Dr.-Ing. B. Pritz
Prof. Dr.-Ing. C. Proppe

Übungsblatt Nr. 12

Thema: **Numerische Lösungsverfahren für partielle DGLen: Finite-Elemente-Methode**

Ausgangspunkt: Variationsprinzip

$$\delta\Pi = 0$$

Diskretisierung des Verschiebungsfeldes:

$$u_i^{approx}(x,y,z) = \mathbf{N}_i(x,y,z)\mathbf{u}_i$$
$$\mathbf{N}(x,y,z) := \text{Interpolationsmatrix}$$
$$\mathbf{u} := \text{Knotenverschiebungen}$$

Diskretisierung der Verzerrungs- und Spannungsfelder (kleine Verzerrungen, lineare Elastizität):

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}\left(\nabla u_i^{approx} + (\nabla u_i^{approx})^T\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{N}_i\mathbf{u}_i + (\nabla \mathbf{N}_i\mathbf{u}_i)^T\right) := \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i$$
$$\sigma_i = \mathbf{C}_i\varepsilon_i = \mathbf{C}_i\mathbf{B}_i\mathbf{u}_i$$

Berechnung der Elementsteifigkeit:

$$\mathbf{K}_i = \int_V \mathbf{B}_i^T\mathbf{C}_i\mathbf{B}_i \mathrm{d}V$$

Überführung der Elementsteifigkeiten $\mathbf{K}_i$ (lokale KOS!) in Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{ges}$ (globales KOS!).
Systemgleichung für den Sonderfall der Statik:

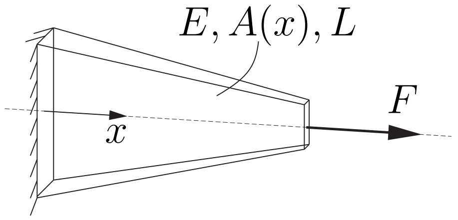
$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix}\mathbf{f_a}\\ \mathbf{f_b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{K}_{ges}^{11} & \mathbf{K}_{ges}^{12}\\ \mathbf{K}_{ges}^{21} & \mathbf{K}_{ges}^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u_a}\\ \mathbf{u_b}\end{pmatrix} = \mathbf{K}_{ges}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{u_a} := \text{bekannte Verschiebungsrandbedingungen}$$
$$\mathbf{f_a} := \text{unbekannte Reaktionskräfte}$$
$$\mathbf{u_b} := \text{unbekannte Verschiebungen}$$
$$\mathbf{f_b} := \text{bekannte angreifende äußere Kräfte}$$

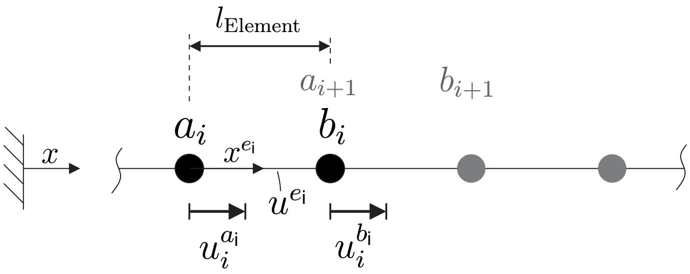
Lösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{K}_{ges}^{22}\mathbf{u_b} = \left(\mathbf{f_b} - \mathbf{K}_{ges}^{21}\mathbf{u_a}\right)$$
$$\mathbf{f_a} = \mathbf{K}_{ges}^{11}\mathbf{u_a} + \mathbf{K}_{ges}^{12}\mathbf{u_b}$$

Aufgabe 1 – zu bearbeiten –

Matlabfile: fem_Bearbeitungsfile.m





Gegeben ist ein einseitig eingespannter Stab mit konisch zulaufendem rechteckigen Querschnitt (Abbildung links). Folgende Daten sind gegeben:

$$
\begin{aligned}
F &= 20 \text{ [kN]} \\
E &= 70 \text{ [GPa]} \\
L &= 1 \text{ [m]} \\
A(x) &= 0.001 - 0.0009x \text{ [m}^2\text{]}
\end{aligned}
$$

1. Stellen Sie mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes $\sigma(x) = E\varepsilon(x)$ und unter der Annahme kleiner Dehnungen eine systembeschreibende Differentialgleichung für $u(x)$ in Abhängigkeit der gegebenen Parameter auf. Benennen Sie außerdem alle benötigten Randbedingungen.
2. Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe eines geeigneten Matlab-Solvers.
3. Das Tragwerk soll mit linearen Elementen erster Ordnung mit den Knoten a_i und b_i diskretisiert werden (Abbildung rechts). Der Knoten a_i bzw. b_i wird um $u_i^{a_i}$ bzw. $u_i^{b_i}$ verschoben. Stellen Sie einen geeigneten Ansatz für die Verschiebung $u^{e_i}(x^{e_i})$ für das i-te Element auf. Bestimmen Sie die Interpolationsmatrix $\mathbf{N}(x^{e_i})$, so dass sich $u^{e_i}(x^{e_i}) = \mathbf{N}(x^{e_i})\mathbf{u}$ ergibt. Die Gesamtanzahl der Elemente M ist frei wählbar.
   Außerdem soll die Flächenfunktion $A(x)$ diskretisiert werden. Berechnen Sie für jedes Element eine gemittelte Fläche mit Hilfe der Endpunkte $A_i = \frac{A_{i,a_i} + A_{i,b_i}}{2}$.
4. Berechnen Sie die Matrizen $\mathbf{B}(x^{e_i})$ und $\mathbf{C}$, die sich aus der diskretisierten Dehnung $\varepsilon_i(x^{e_i}) = \mathbf{B}(x^{e_i})\mathbf{u}$, bzw. der Spannung $\sigma_i(x^{e_i}) = \mathbf{CB}(x^{e_i})\mathbf{u}$ für das i-te Element ergeben.
5. Stellen Sie die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_i = \int_0^{V_i} \mathbf{B}^T(x^{e_i})\mathbf{CB}(x^{e_i})\, \mathrm{d}V$ für das i-te Element auf.
6. Stellen Sie die Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$
\mathbf{K}_{Ges} = \begin{pmatrix}
\mathbf{K_1^{a_1a_1}} & \mathbf{K_1^{a_1b_1}} & 0 & \dots & 0 \\
\mathbf{K_1^{b_1a_1}} & \mathbf{K_1^{b_1b_1}} + \mathbf{K_2^{a_2a_2}} & \mathbf{K_2^{a_2b_2}} & \dots & 0 \\
0 & \mathbf{K_2^{b_2a_2}} & \mathbf{K_2^{b_2b_2}} + \mathbf{K_3^{a_3a_3}} & & \\
\vdots & & & \ddots & \\
0 & & \dots & & \mathbf{K_M^{b_Mb_M}}
\end{pmatrix}
$$

   mit $\mathbf{K_i} = \begin{pmatrix} \mathbf{K_i^{a_ia_i}} & \mathbf{K_i^{a_ib_i}} \\ \mathbf{K_i^{b_ia_i}} & \mathbf{K_i^{b_ib_i}} \end{pmatrix}$ für $i = 1 \dots M$ Elemente auf.
7. Bestimmen Sie für den Verschiebungsvektor $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u_a} & \mathbf{u_b} \end{pmatrix}^T$ und Kraftvektor $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f_a} & \mathbf{f_b} \end{pmatrix}^T$ die Teilvektoren $\mathbf{u_a}$ und $\mathbf{f_b}$, wobei $\mathbf{u_a}$ die bekannten Verschiebungsrandbedingungen, $\mathbf{f_a}$ die dazugehörigen unbekannten Reaktionskräfte, $\mathbf{u_b}$ die unbekannten Verschiebungen und $\mathbf{f_b}$ die bekannten angreifenden äußeren Kräfte beinhaltet.

8. Berechnen Sie die unbekannten Vektoren $\mathbf{u_b}$ und $\mathbf{f_a}$. Wie groß ist die Verschiebung $u(x = L)$? Stellen Sie schließlich die Verschiebungen und den Spannungsverlauf für die exakte Lösung (Teilaufgabe 2) und für die FEM-Lösung über die Länge des Stabes graphisch dar.
   Passen Sie die Elementanzahl M für die FEM so an, dass Ihre FEM-Lösung mit der exakten Lösung gut übereinstimmt.
   Hinweis: Nutzen Sie zur Darstellung der Spannung den *Matlab*-Befehl *stairs()* an Stelle von *plot()*.