Modellbildung und Simulation
Kapitel 7: Systeme mit verteilten Parametern

Balázs Pritz
pritz@kit.edu

Institut für Thermische Strömungsmaschinen
Prof. Dr.-Ing. Hans-Jörg Bauer

Quelle: Xflow Product Sheet – www.xflowcfd.com

Lernziele der heutigen Vorlesung

- Die Studierenden
  - wissen, wie sich die Komplexität der Materialeigenschaften auf die Simulation auswirkt
  - kennen die Klassen von PDGL und die Ausbreitungsrichtung der Information
  - kennen unterschiedlich komplexe Modelle mit zugehörigem Simulationsaufwand
  - kennen Vereinfachungsmöglichkeiten bei der Modellerstellung

Übersicht

7. Systeme mit verteilten Parametern

7.1 Beschreibung von Systemen mittels PDGL

7.1.2 Konstitutive Gleichungen

Festkörpermechanik

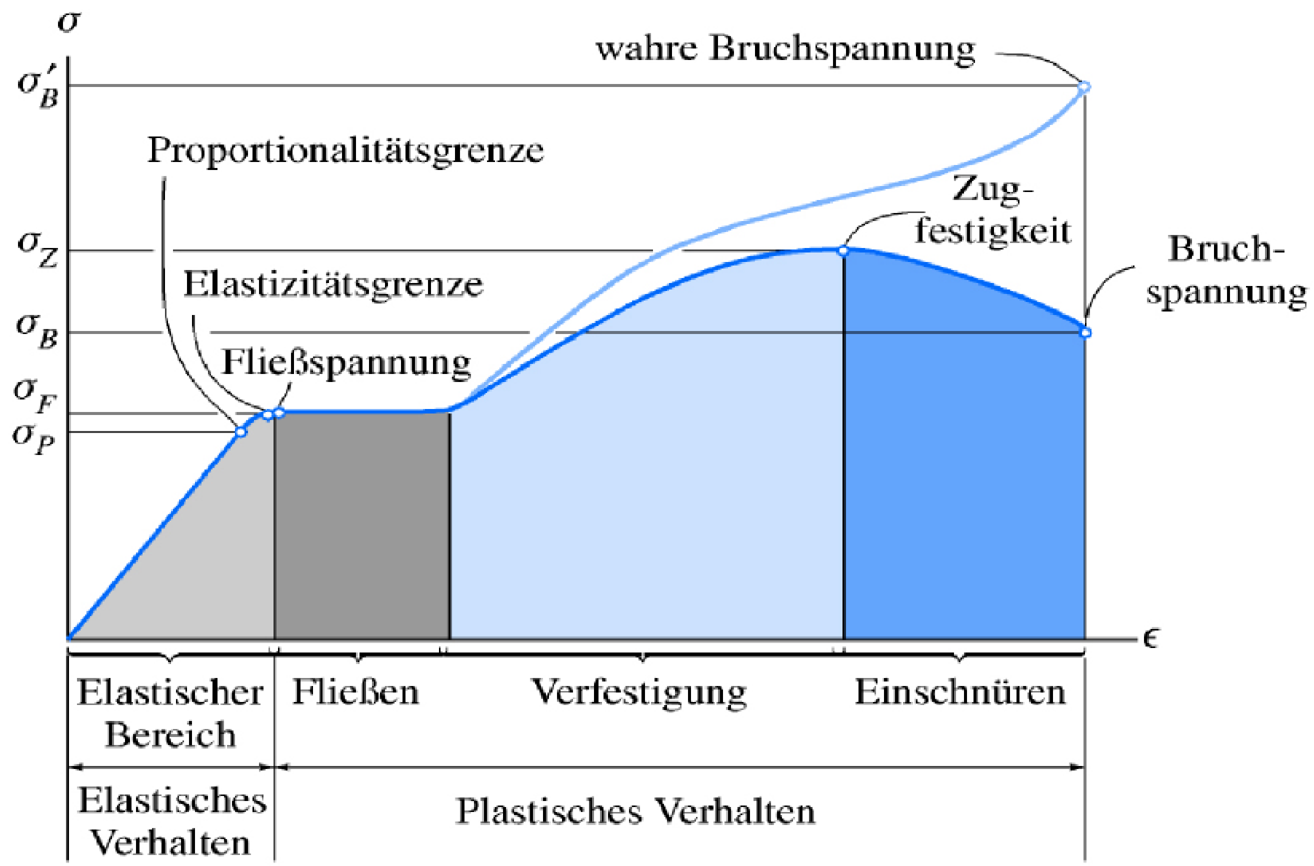
Bsp.: Hooke‘sches Gesetz

Fluidmechanik

Bsp.: ideale Gasgleichung

Konstitutive Gleichungen
Festkörpermechanik

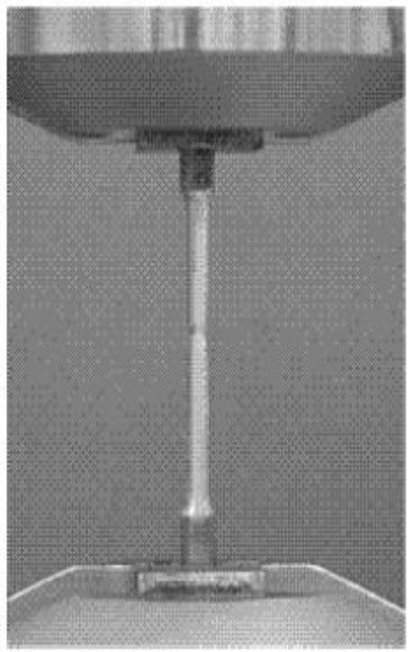
- Materialverhalten durch konstitutive Gleichungen beschrieben
- konstitutive Gleichungen korrelieren Spannungen mit Verzerrungen und enthalten Werkstoffkennwerte

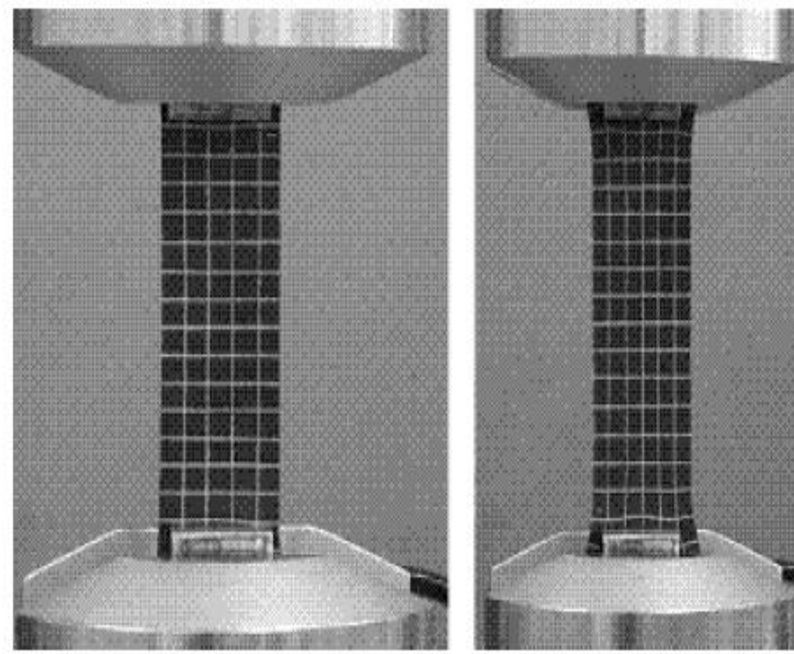


Konstitutive Gleichungen der Festkörpermechanik

- Materialverhalten durch konstitutive Gleichungen beschrieben

- konstitutive Gleichungen korrelieren Spannungen mit Verzerrungen und enthalten Werkstoffkennwerte





Konstitutive Gleichungen der Festkörpermechanik

- Einfaches Beispiel:
  Hooke'sches Gesetz (aus TM I/II) für linear elastisches Verhalten:

3D (allg.): $\boldsymbol{\sigma} = \lambda\, tr(\boldsymbol{\varepsilon})\, \boldsymbol{I} + 2\mu\, \boldsymbol{\varepsilon}$ 1D (spez.): $\sigma = E\varepsilon$

- Mögliche Klassifikationen des Materialverhaltens:

elastisches Verhalten ⟷	inelastisches Verhalten
momentane Spannungen nur von momentanen Verzerrungen abhängig	weitere Abhängigkeiten der momentanen Spannungen möglich
viele Werkstoffe bei kleinen Belastungen (zB Metalle, Kunststoffe, etc)	Elastomere, Metalle bei großen mechanischen und/oder thermischen Belastungen

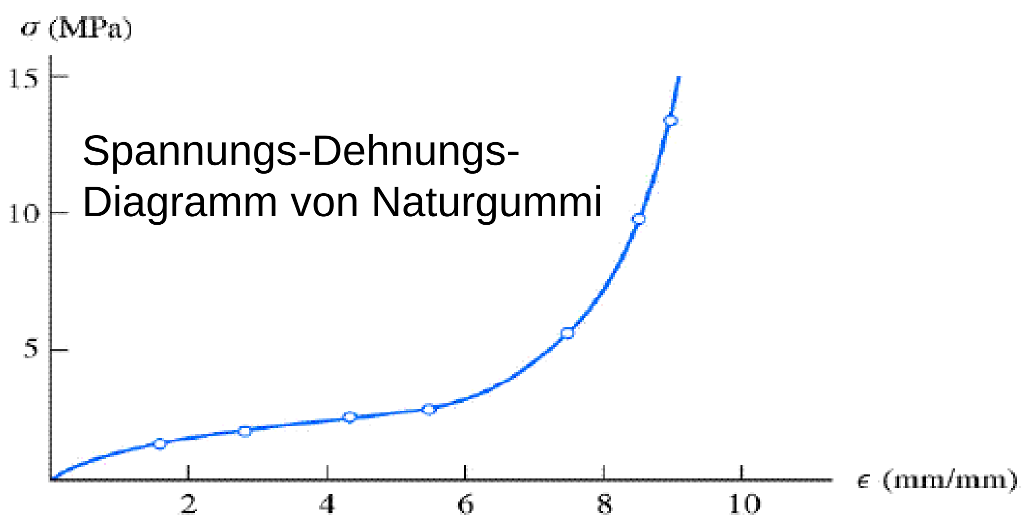
isotropes Verhalten ⟷	anisotropes Verhalten
keine Richtungsabhängigkeit der Materialeigenschaften	Richtungsabhängigkeit der Materialeigenschaften
Stahl	Faserverstärkte Werkstoffe, geschichtete Werkstoffe, Holz

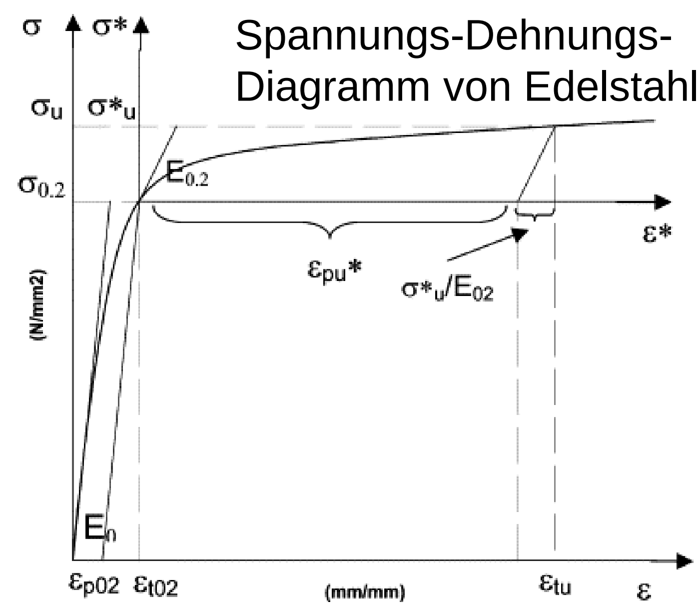
Elastizitätstheorie

- Ein Material heißt elastisch, wenn die momentanen Spannungen nur von den momentanen Verzerrungen abhängen.
- Die Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ ist eine Funktion der Verzerrung ε:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}(\varepsilon).$$

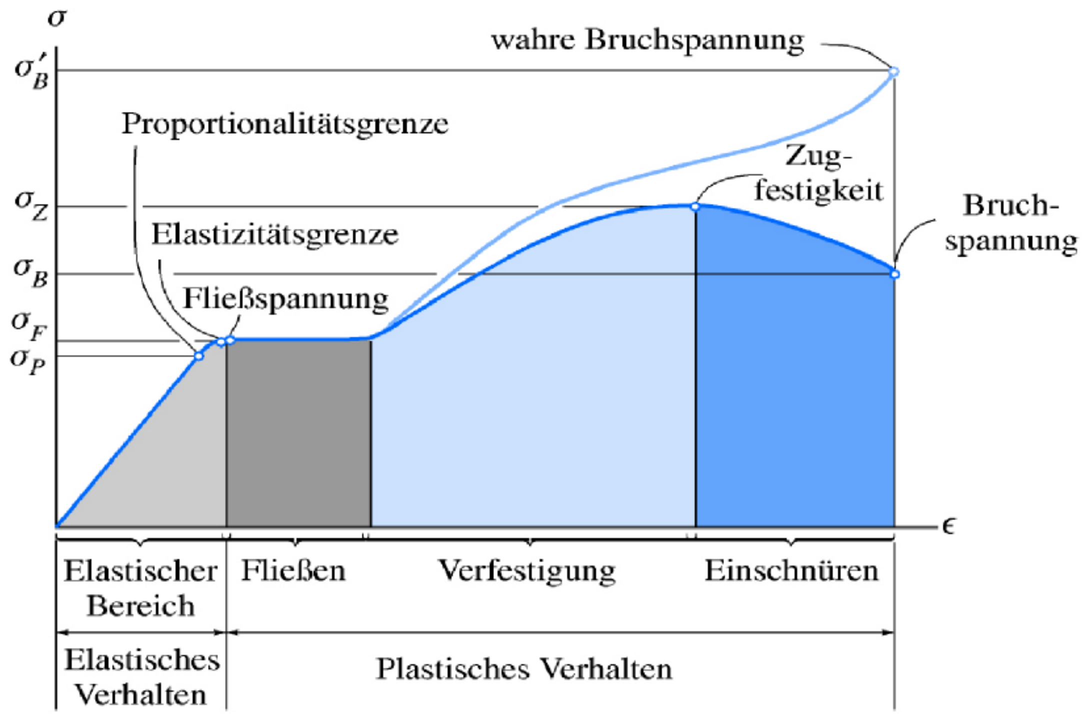
- Die Funktion $\boldsymbol{f}$ kann linear oder nicht linear sein.





Lineare Elastizitätstheorie

- Metallische Werkstoffe weisen in den meisten Fällen lineare elastische Eigenschaften auf.
- Die Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ ist eine lineare Funktion der Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}$:
  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\varepsilon}]$ mit Elastizitätstensor $\mathbb{C}$

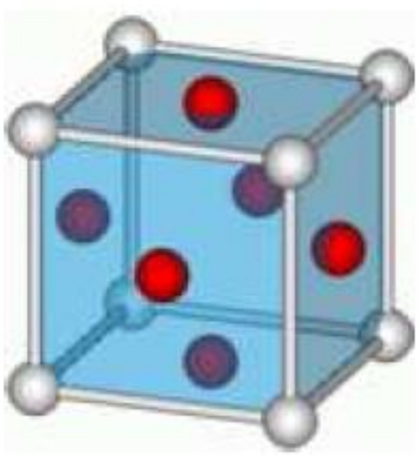


Karlsruher Institut für Technologie

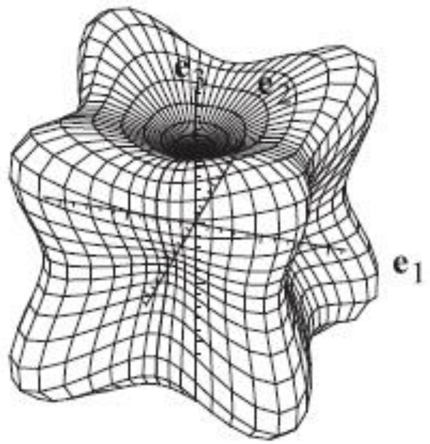
Isotropie vs Anisotropie

- Materialeigenschaften heißen anisotrop, wenn sie richtungsabhängig sind. Anderenfalls heißen sie isotrop.

- Ein Beispiel für die Anisotropie elastischer Eigenschaften: Richtungsabhängigkeit des E-Moduls bei Einkristallen.



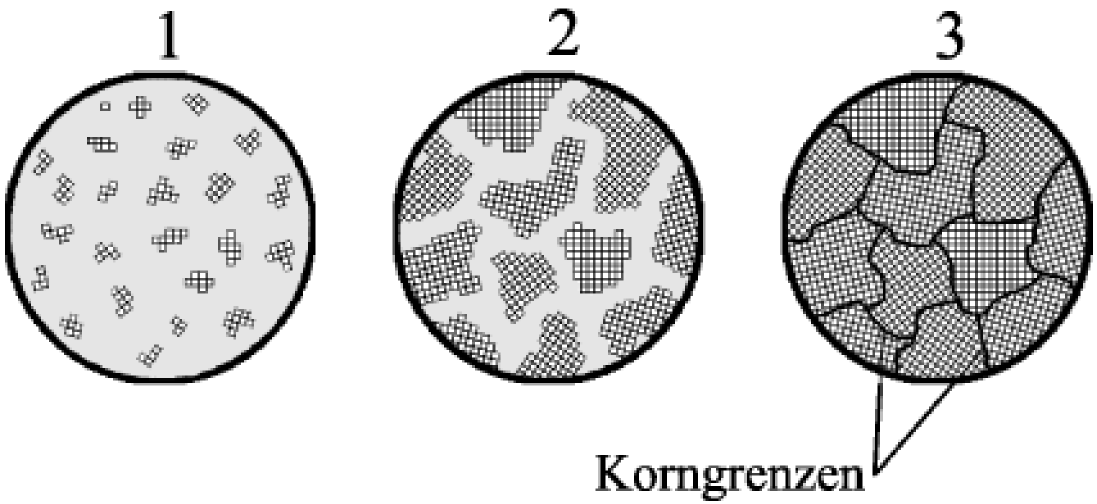
Kubisch flächenzentrierte Einheitszelle



E-Modul-Körper von Gold

Anisotrope lineare Elastizitätstheorie

- Die linearen elastischen Eigenschaften sind richtungsabhängig.
- Ursache: Produktions- und Fertigungsprozesse induzieren Gefügestrukturen mit Vorzugsrichtungen (Textur).
- Kristallographische Textur: Kornorientierungen richtungsabhängig
- Morphologische Textur: Korngeometrie richtungsabhängig



Gefügeausbildung durch Wachstum der Korngrenzen

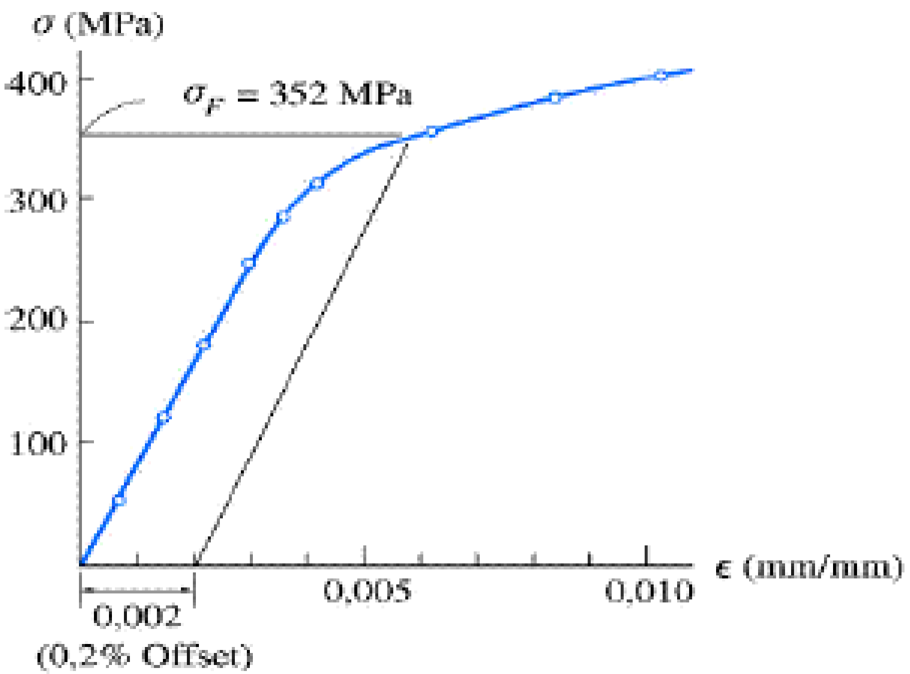
Institut für Thermische Strömungsmaschinen

Nichtlineares Materialverhalten

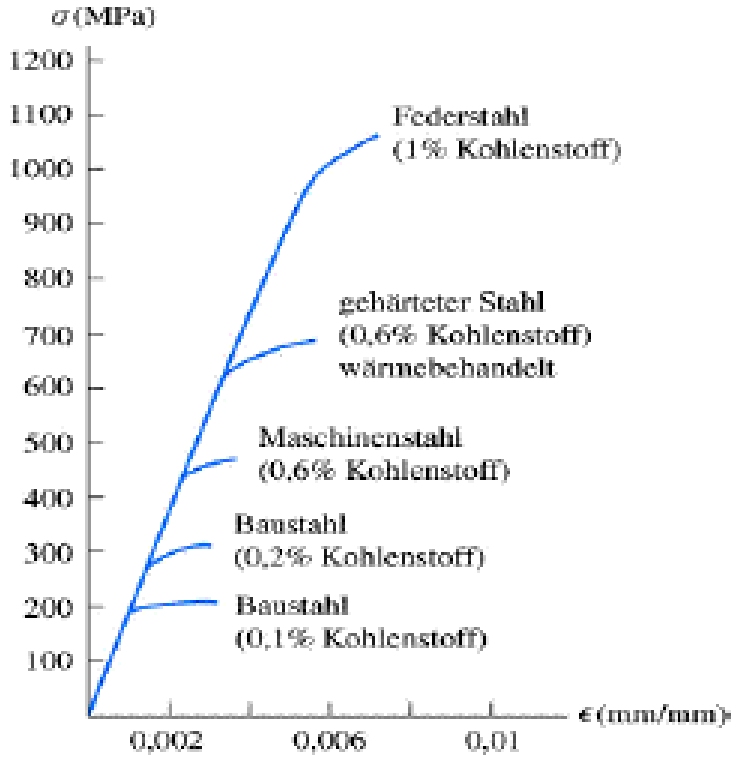
- Bisher: lineare Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen: „lineares Materialverhalten“
- 2 Arten nichtlinearen Materialverhaltens:
  - geometrische Nichtlinearitäten:
    Näherung kleiner Verformungen nicht mehr zulässig, auch große Verformungen und Belastungen betrachten
    Anwendungen: Tiefziehprozesse, Umformprozesse
  - physikalische Nichtlinearitäten:
    andere Mechanismen neben elastischer Materialantwort, auch bei „kleinen Verformungen“ bereits möglich
    Anwendungen: Schädigungsprozesse, Plastizität

Nichtlineares Materialverhalten

Ein Material heißt plastisch (elastisch-plastisch), wenn bei Erreichen eines kritischen Spannungszustands und gleichzeitiger Belastung bleibende Deformationen hervorgerufen werden, die unabhängig von der Verformungsgeschwindigkeit sind.



Fließfestigkeit für eine Aluminiumlegierung



Nichtlineares Materialverhalten

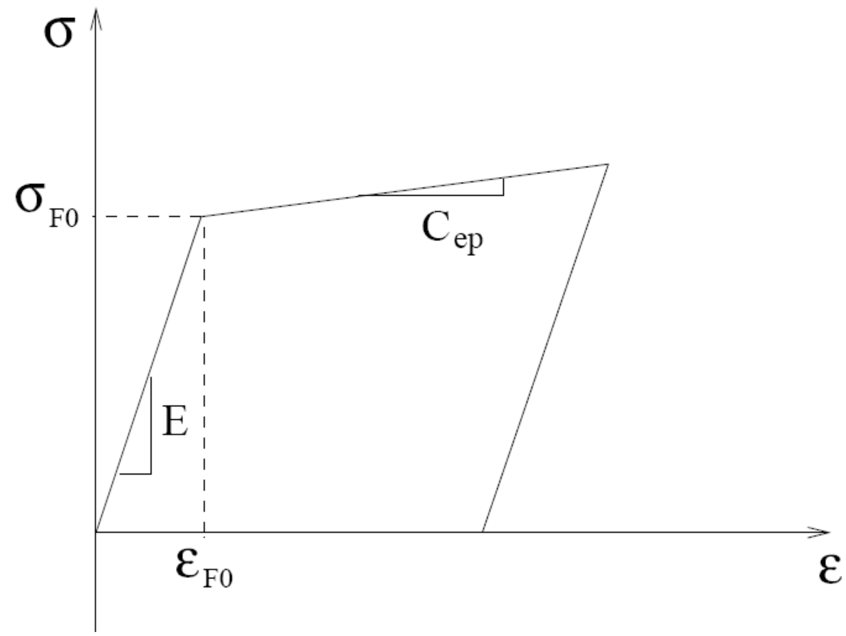
Plastizität

Additive Dekomposition der Verzerrungen in elastischen und plastischen Anteil

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

Konstitutive Gleichungen: nur elastische Anteile der Verzerrungen bewirken Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}[\varepsilon_e] = \mathbb{C}[\varepsilon - \varepsilon_p]$$



Spannungs-Dehnungs-Diagramm mit bilinearem Materialverhalten
σ_{F0}: Fließspannung,
ε_{F0}: zugehörige Dehnung

Konstitutive Gleichungen

Fluidmechanik

Konstitutive Gleichungen, die in der Fluidmechanik benötigt werden, sind typischerweise die Zustandsgleichungen (-tabellen) von Gasen und Flüssigkeiten. Sie stellen den Zusammenhang von Druck und Temperatur mit der zu lösenden Erhaltungsgröße der Dichte her.

Im einfachsten Fall: **Ideale Gasgleichung**

$$p = \rho R T$$

Für komplexere Fälle muß diese Information aus den thermodynamischen Zusammenhängen ermittelt werden (adiabatisch, isothermisch, Approximationen der Zustandsgleichung bei Flüssigkeiten/Wasser).

Für reaktive Flüssigkeiten müssen entsprechenden Reaktionsgesetzmäßigkeiten modelliert werden. Teilweise entstehen hier auch zusätzlich zu lösenden Gleichungen.

Übersicht

7. Systeme mit verteilten Parametern

   7.1 Beschreibung von Systemen mittels PDGL

7.1.3 Charakteristiken

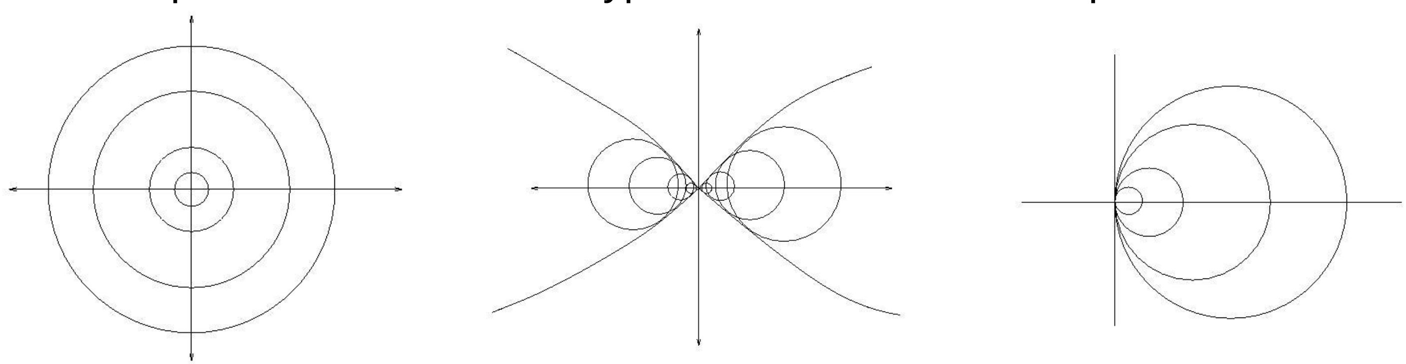
Charakter der Differentialgleichungen

Zeigt die Limitierung der Ausbreitungsmöglichkeiten der Information

$$a\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+d\frac{\partial\Phi}{\partial x}+e\frac{\partial\Phi}{\partial y}+f\Phi+g=0$$

- Hyperbolischer Charakter der Strömung wenn b^2-4ac > 0
- Parabolischer Charakter der Strömung wenn b^2-4ac = 0
- Elliptischer Charakter der Strömung b^2-4ac < 0
- Gemischter Charakter wenn zwei oder mehr Typen im Strömungsgebiet vorkommen

elliptisch hyperbolisch parabolisch



Charakter der Differentialgleichungen

Elliptisch: Stationäre, subsonische Strömungen.

Gleichgewichtzustand → Randwertproblem

Poisson-Gl: $\Delta\Phi = f$ Laplace-Gl: $\Delta\Phi = 0$

Hyperbolisch: Lineare Elastodynamik

Stationäre, supersonische Strömungen.

Instationäre, subsonische aber kompressible, reibungslose Strömungen. (Schallwellen, Stöße)

Wellengleichung: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

PDGL 1. Ordnung: Konvektionsgleichung: $\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

Charakter der Differentialgleichungen

Parabolisch: Instationäre Strömungen.

(Grenzschichtapproximation)

Anfangs-Randwertproblem (räumliche Randbedingung und zeitliche Anfangsbedingung ist nötig)

Wärmeleitung/Diffusion (Fourier-Gl): $\frac{\partial u(t,\mathbf{x})}{\partial t} = a \cdot \Delta u(t,\mathbf{x})$

Viskose, kompressible Strömungen haben gemischten Charakter.

Übersicht

7 Systeme mit verteilten Parametern

7.2 Modellreduktion

7.2.0 Einführung

7.2.1 Physikalische Modellreduktion

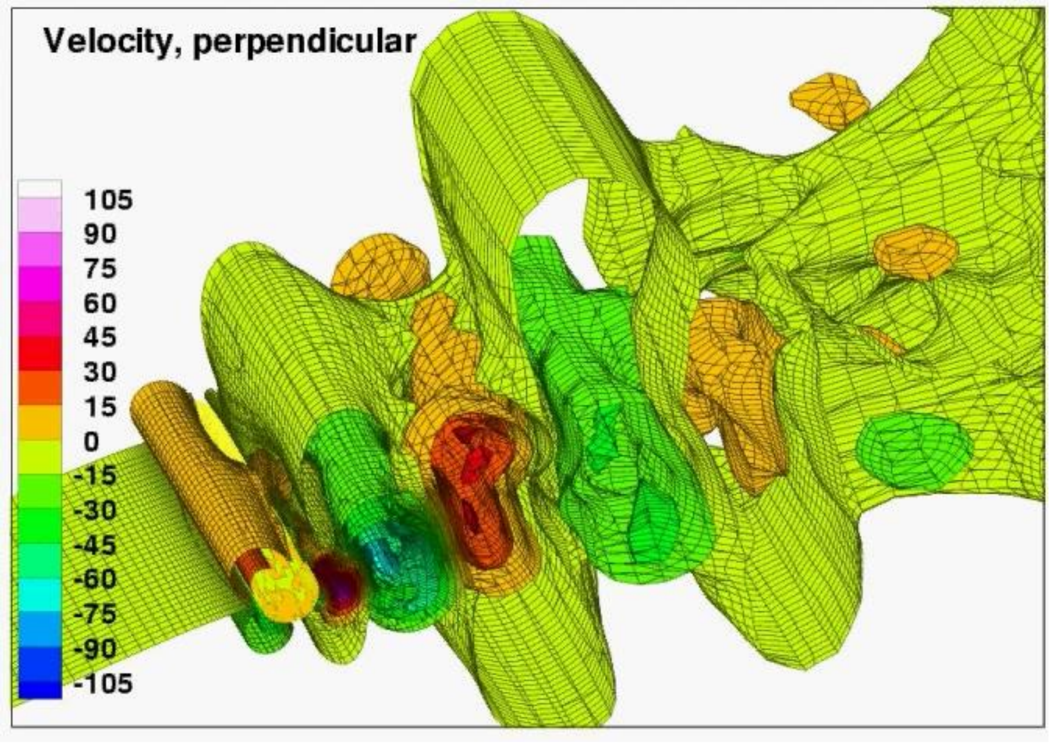
7.2.2 Mathematische Modellreduktion

7.2.3 Exakte Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen

Einführung Modellreduktion

Zurück zum Anfang:

Inwiefern findet Modellreduktion statt?



Welche Schritte sind noch denkbar?

Wovon hängt das ab?

Übersicht

7. Systeme mit verteilten Parametern

    7.2 Modellreduktion

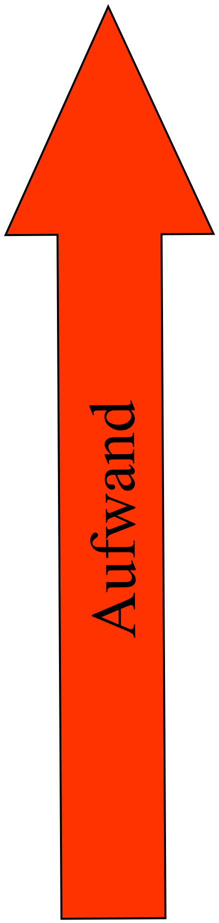
7.2.1 Physikalische Modellreduktion

Institut für Thermische Strömungsmaschinen

Geometrische Modelle der Festkörpermechanik und Fluidmechanik

Festkörpermechanik	Fluidmechanik
Reduktion beim 3D-Kontinuum über Verformungskinematik auf 2D-Kontinuum: ■ Plattenmodelle (Kirchhoff, Aindin) ■ Schalenmodelle (mit und ohne Schub) ■ Membranmodelle ■ etc.	Reduktion der 3D-Strömung durch Symmetrieannahmen auf 2D-Strömung: z.B. Spiegelsymmetrie-Annahme bei der Querumströmung unendlich langer Körper. → Einsatz von Symmetrierandbedingungen (Geschwindigkeitsvektoren parallel zur Ebene einstellen), Vernachlässigung einer Impulsgleichung
Reduktion für schlanke Bauteil auf 1D Kontinuum ■ Euler-Bernoulli-Balken ■ Timoshenko-Balken ■ Saite, etc.	Reduktion der 3D-Strömung durch Symmetrieannahmen auf 1D-Strömung: z.B. Rotationssymmetrie-Annahme bei Durchströmung einer Düse. → Vernachlässigung von zwei Impulsgleichungen
Im Extremfall führt die Reduktion der 3D-Betrachtung auf eine 1D-Betrachtung zur Modellierung mit konzentrierten Parametern, wie sie in Block 3 der VL beschrieben wird.	
Weitere Reduktionen führen zum diskreten System mit Ersatzmassen, Ersatzsteifigkeiten etc.	Reduktion der Berechnungsgeometrie auf das Nötigste: ■ Periodizitätsannahmen (z.B. bei Strömungsmaschinen nur ein Schaufelkanal) ■ Idealisierungen (Glätten/Vernachlässigen von Sicken, Absätzen, Stufen, anderen geometrischen Details)
Übergang von Betrachtung anisotropen Materialverhaltens zu isotroper Betrachtung	Vereinfachte Strömungseigenschaften (Reibungsfreiheit u.a.)

Physikalische Modelle der Fluidmechanik



- Kompressible Navier-Stokes-Gleichungen
- Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen
- *Stationäre Strömung*
- Reibungsfreie Strömung (Euler)
- Potentialströmung (Drehungsfreiheit $\nabla \times \vec{u} = 0$)
- Schleichende Strömung (Stokes-Strömung)
- *Zweidimensional*
- Grenzschichtströmung

Stationäre vs instationäre Strömungen

Beispiel Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho = \rho(t, x_i)$$

$$\rho = \rho(x_i)$$

Dichte ist zeit- und ortsabhängig

Dichte ist nur ortsabhängig,
ist zeitlich konstant

Läßt sich für Strömungen anwenden,
die im zeitlichen Mittel konstant sind

Linearisierungen in der Fluidmechanik

Beispiel Fluss:

Ein Fluss besitzt eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit,
dennoch herrscht nicht in jedem Bereich dieselbe Geschwindigkeit.
Wenn das Flussbett überall dieselbe Form hat kann man annehmen,
Dass diese mittlere Geschwindigkeit überall gleich ist:

$$\overline{u_i} = const.$$

Beobachtet wird, dass kleine Wellen entstehen, kleine Wirbel,
das Wasser sich kräuselt.

Man kann ansetzen, dass diese Bewegungen kleinskalige Überlagerungen der mittleren Strömung darstellen, die diese aber nicht beeinflussen.
Man kann dies mit einem linearen (!) Störungsansatz annähern:

$$u_i(t, x_i) = \overline{u_i} + u_i'(t, x_i)$$

Linearisierungen in der Fluidmechanik

Fort. Beispiel Fluss:

Verwendet man diese Systematik für alle Variablen der Navier-Stokes Gleichungen und setzt diesen Ansatz ein, ergeben sich Terme mit

- nur 1 gestrichenen Größe:

$$\overline{\rho}\,\frac{\partial u_i'}{\partial t}$$

- 2 und mehr gestrichenen Größen:

$$\frac{\partial \rho' u_i'}{\partial t}$$

Terme mit mehreren gestrichenen Größen können unter bestimmten Bedingungen als sehr klein angenommen und daher vernachlässigt werden.

Übersicht

7. Systeme mit verteilten Parametern

   7.2 Modellreduktion

7.2.2 Mathematische Modellreduktion

Mathematische Modellreduktion

Vollständiges Funktionensystem:

Darstellung einer Funktion *f(x)* durch ein vollständiges Funktionensystem $g_n(x)$ (analog zur Darstellung eines Vektors über Basisvektoren):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)$$

- *Voraussetzung: Funktionensystem muss vollständig sein*
- *Bestimmung der Koeffizienten a_n über ein Skalarprodukt*

Beispiel: Fourierreihe

Basisfunktionen sind die einzelnen Harmonischen; fehlt eine Harmonische, kann die Ausgangsfunktion *f(x)* niemals fehlerfrei dargestellt werden.

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

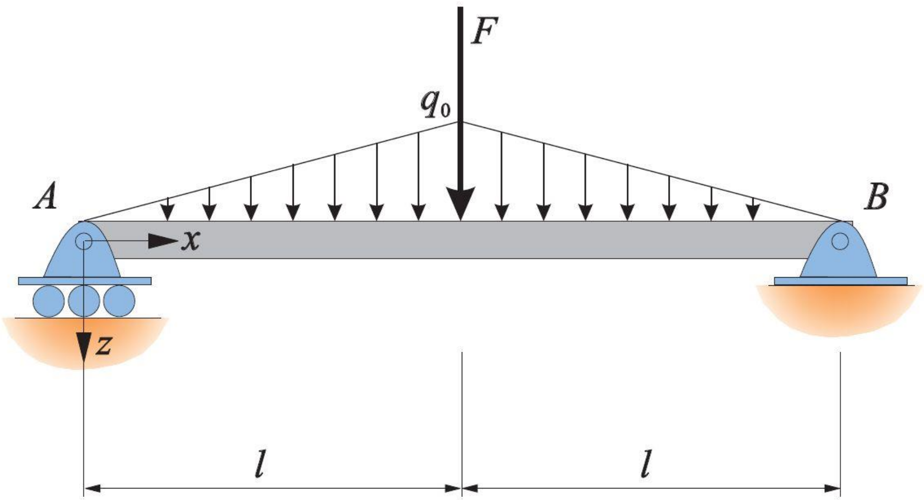
Mathematische Modellreduktion

Reduktion auf endlich viele Freiheitsgrade:

Mitnahme einer nur begrenzten Zahl von Basisfunktionen:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n g_n(x)$$

Beispiel:



Biegebalken:

Berechnung einer Näherungslösung für die Durchbiegung $w(x)$ mit Hilfe des

Verfahrens von Galerkin. Benutzt wird dabei die Ansatzfunktion:

$$w(x) = w_0 + w_1 \frac{x}{2l} + w_2 \left(\frac{x}{2l}\right)^2 + w_3 \left(\frac{x}{2l}\right)^3 + w_4 \left(\frac{x}{2l}\right)^4$$

Übersicht

7. Systeme mit verteilten Parametern

7.2 Modellreduktion

7.2.3 Exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen

Modellreduktion

Allgemeine Vereinfachung:

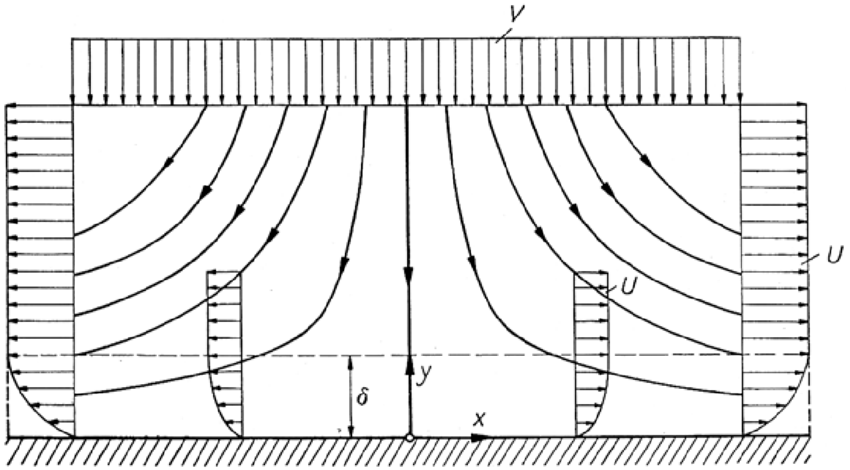
Inkompressible Strömungen $\rho = const. \Rightarrow \partial\rho = 0$

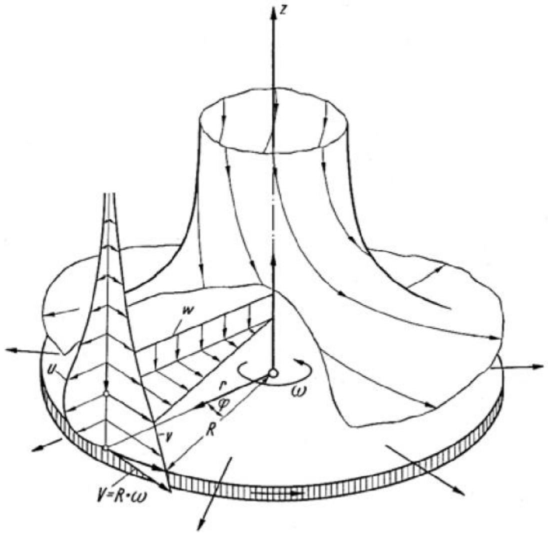
Möglich ist für spezielle

stationäre / instationäre

ebene / axialsymmetrische

Strömungen





H. Schlichting, K. Gersten: Grenzschicht-Theorie, Springer

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel für stationäre Strömung

Couette-Poiseuille-Strömung

Schichtenströmung: es gibt nur eine Geschwindigkeitskomponente

Z.B.: $u \neq 0$, $v=0$ ➞ $u=u(y)$; $v=0$; $\partial u/\partial x=0$; $\partial p/\partial y=0$

Die reduzierte NS-Gleichung:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2u}{dy^2}$$

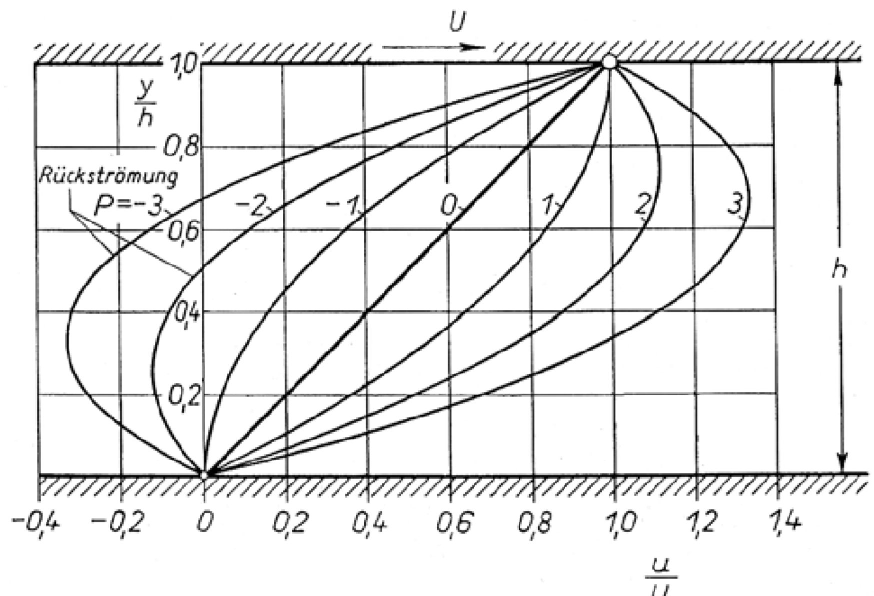
Randbedingungen:

y=0: u=0

y=h: u=U

Lösung:

$$u = \frac{y}{h}U - \frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)$$



Sonderfälle: Couette- ($\partial p/\partial x=0$) und Poiseuille-Strömung ($U=0$)

Beispiel für instationäre Strömung

Erstes Stokessches Problem:

Strömung an einer plötzlich in Gang gesetzten ebenen Wand

Anlaufströmung

Voraussetzung: p=konst.

Die reduzierte NS-Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

Randbedingungen:

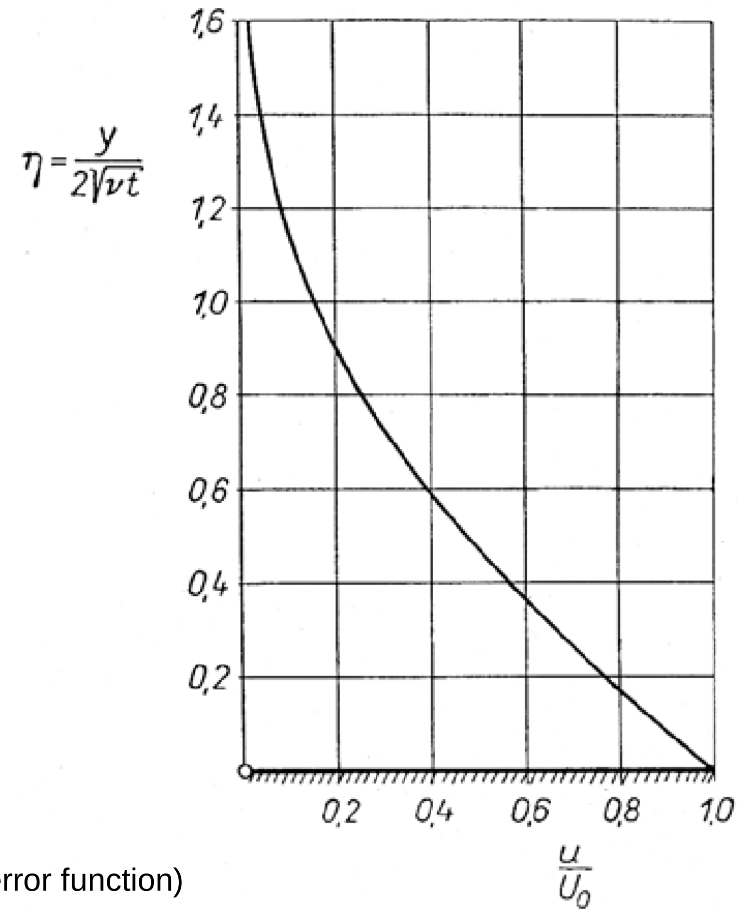
t=0: y≥0: u=0

t>0: y=0: $u=U_0$

y→∞: u=0

Lösung:

$$\frac{u}{U_0} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$



erf – Gaußsche Fehlerfunktion (error function)

Ausblick

- Nächste Übung:
  - Saalübung zur Modellreduktion

- Nächste Vorlesung:
  - Lösungsverfahren für PDGL