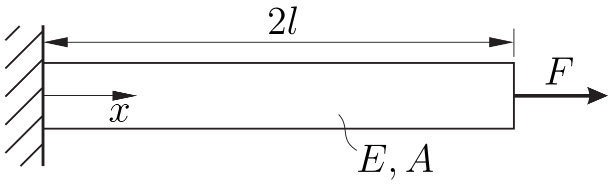
Modellbildung und Simulation

Prof. Dr.-Ing. K. Furmans
Prof. Dr.-Ing. M. Geimer
Dr.-Ing. B. Pritz
Prof. Dr.-Ing. C. Proppe

Klausurvorbereitung II



Gegeben sei ein homogener Stab der Länge $L = 2\ell$, der an der Stelle $x = 0$ fest eingespannt ist. Er besitzt den Elastizitätsmodul E und die konstante Querschnittsfläche A. An der Stelle $x = L$ greift die Kraft F an.
Die Differentialgleichung in starker Form, sowie die Randbedingungen sind durch

$$(EAu_x)_x = 0, \quad EAu_x(L) = F \quad \text{und} \quad u(0) = 0$$

gegeben. Es soll im Folgenden die Finite-Elemente-Methode angewandt werden.

1. Überführen Sie die Differentialgleichung durch Einführung der Testfunktion $w(x)$ in die schwache Form und leiten Sie durch Einsetzen von $u^e(x) = \vec{N}^e(x)\,\vec{d}^e = \vec{N}^e(x)\,\mathbf{L}^e\vec{d}$ und $w^e(x) = \vec{N}^e(x)\,\vec{w}^e = \vec{N}^e\mathbf{L}^e\vec{w}$ das zu lösende Gleichungssystem her *(nicht klausurrelevant)*.
2. Der Balken soll in zwei Elemente unterteilt werden. Stellen Sie für diese sowohl lineare Ansatzfunktionen, als auch Elementsteifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}_i^e$ auf. Berechnen Sie damit die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$.
3. Stellen Sie das zu lösende Gleichungssystem auf und berechnen Sie die unbekannten Kräfte und Verschiebungen in Abhängigkeit der gegebenen Größen.

<u>Lösung</u>

1. <u>Vorgehensweise</u> *(nicht klausurrelevant)*
   Testfunktion $w(x)$ verschwindet auf Γ_D

$$\int_0^L (EAu_x)_x\, w(x)\mathrm{d}x \overset{\text{p.I.}}{=} [EAu_x w]_0^L - \int_0^L EAu_x w_x \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^L EAu_x w_x \mathrm{d}x = Fw(L)$$

$$\int_0^L EAu_x w_x \mathrm{d}x = \int_0^{\ell_e} EAu_x w_x \mathrm{d}x + \int_{\ell_e}^{2\ell_e} EAu_x w_x \mathrm{d}x + \cdots + \int_{(n-1)\ell_e}^{n\ell_e} EAu_x w_x \mathrm{d}x$$

$$\approx \sum_e \int_{\Omega_e} EA\left(\vec{B}^e \mathbf{L}^e \vec{d}\right)\left(\vec{B}^e \mathbf{L}^e \vec{w}\right)\mathrm{d}x$$

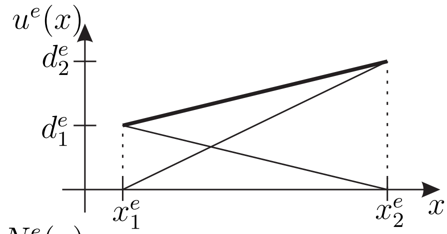
$$= \vec{w}^T \underbrace{\left[\sum_e \mathbf{L}^e \overbrace{\int_{\Omega_e} EA\left(\vec{B}^e\right)^T \vec{B}^e \mathrm{d}x}^{\mathbf{K}^e} \mathbf{L}^e\right]}_{\mathbf{K}} \vec{d} = \vec{w}^T \vec{f}$$

$$\overset{\forall \vec{w}}{\Rightarrow} \boxed{\mathbf{K}\vec{d} = \vec{f}}$$

2. <u>Steifigkeitsmatrizen</u>

Linearer Ansatz für ein Element:

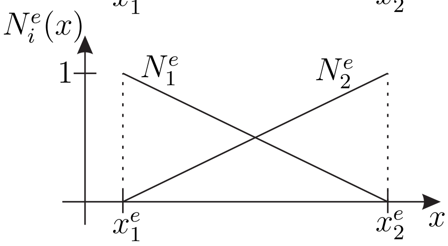
$u^e(x) = a_0 + a_1 x$
mit $u^e(x_1^e) = d_1^e$ und $u^e(x_2^e) = d_2^e$



$u^e(x) = \vec{N}^e(x)\vec{d}^{\,e} = \vec{N}^e(x)\mathbf{L}^e\vec{d}$

$$\vec{N}^e = (N_1^e\ N_2^e) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} & \dfrac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}^e = (B_1^e\ B_2^e) = \frac{1}{x_2^e - x_1^e}\,(-1 \quad 1)$$



$$\mathbf{K}_1^e = \int_0^{\ell} \frac{EA}{\ell^2}\left(\vec{B}_1^e\right)^{\mathrm{T}} \vec{B}_1^e \mathrm{d}x = \frac{EA}{l}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2^e = \int_{\ell}^{2\ell} \frac{EA}{\ell^2}\left(\vec{B}_2^e\right)^{\mathrm{T}} \vec{B}_2^e \mathrm{d}x = \frac{EA}{\ell}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_1^e$$

$$\mathbf{K} = \sum_e \left(\mathbf{L}^e\right)^T \mathbf{K}^e \mathbf{L}^e = \frac{EA}{\ell}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \mathbf{L}_1^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{L}_2^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. <u>Gleichungssystem</u>

$$\underbrace{\frac{EA}{\ell}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} N \\ 0 \\ F \end{pmatrix}}_{\vec{f}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_a \\ \vec{u}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_a \\ \vec{f}_b \end{pmatrix}$$

bekannt	unbekannt
$\vec{u}_a = u_1 = 0$	$\vec{u}_b = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$
$\vec{f}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}$	$\vec{f}_a = N$

Dies führt auf

$$\mathbf{K}^{21}\vec{u}_a + \mathbf{K}^{22}\vec{u}_b = \vec{f}_b$$

$$\Rightarrow \vec{u}_b = (\mathbf{K}^{22})^{-1}\left(\vec{f}_b - \mathbf{K}_{22}\underbrace{\vec{u}_a}_{=0}\right) = \frac{\ell}{EA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} F$$

$$\Rightarrow \vec{f}_a = \mathbf{K}^{11}\underbrace{\vec{u}_a}_{=0} + \mathbf{K}_{12}\vec{u}_b = -F$$