

# Modellbildung und Simulation

## Kapitel 7: Systeme mit verteilten Parametern

Balázs Pritz  
pritz@kit.edu

Institut für Thermische Strömungsmaschinen  
Prof. Dr.-Ing. Hans-Jörg Bauer



Quelle: Xflow Product Sheet – [www.xflowcf.com](http://www.xflowcf.com)

# Lernziele der heutigen Vorlesung

- Die Studierenden
  - kennen die grundlegenden Eigenschaften der zwei meist benutzten Verfahren (FDM und FVM), die in der numerischen Strömungssimulation verwendet werden

# Übersicht

## 7 Systeme mit verteilten Parametern

### 7.3 Numerische Lösungsverfahren für PDGLen

#### **7.3.3 Finite Differenzen (Forts.)**

# FDM - Abbruchfehler

Der Abbruchfehler  $\varepsilon$  ist die Summe der nicht berechneten Terme auf der rechten Seite:

$$\varepsilon = (\Delta x_i)^m \alpha_{m+1} + (\Delta x_i)^{m+1} \alpha_{m+2} + \cdots + (\Delta x_i)^{n-1} \alpha_n + H'$$

wobei  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  und  $\alpha_{m+1} \approx \left( \frac{\partial^{m+1} \Phi}{\partial x^{m+1}} \right)_i$

mit  $r_e = \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i}$

$$\varepsilon \approx \frac{(1-r_e)\Delta x_i}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_i$$

Zentrale Differenz

$$\varepsilon \approx \frac{\Delta x_i}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_i$$

Vorwärts- und Rückwärtsdifferenz

# FDM – Der Begriff der Ordnung

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + O(\Delta x)$$

Rückwärtsdifferenz 1.Ord

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} + O(\Delta x)$$

Vorwärtsdifferenz 1.Ord

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + O((\Delta x)^2)$$

Zentrale Differenz 2.Ord

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{2\phi_{i+1} + 3\phi_i - 6\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{6\Delta x} + O((\Delta x)^3)$$

Rückwärtsdifferenz 3.Ord

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{-\phi_{i+2} + 6\phi_{i+1} - 3\phi_i - 2\phi_{i-1}}{6\Delta x} + O((\Delta x)^3)$$

Vorwärtsdifferenz 3.Ord

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{-\phi_{i+2} + 8\phi_{i+1} - 8\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{12\Delta x} + O((\Delta x)^4)$$

Zentrale Differenz 4.Ord

# FDM - Ableitung 2. Ordnung

Approximation der Ableitung 2. Ordnung für äquidistante Gitter\*:

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

Zentral, 2. Ord. genau

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i = \frac{-\phi_{i+2} + 16\phi_{i+1} - 30\phi_i + 16\phi_{i-1} - \phi_{i-2}}{12(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^4)$$

Zentral, 4. Ord. genau

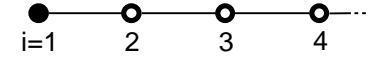
Approximation des Diffusionsterms durch Zentraldifferenzen:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right]_i \approx \frac{\left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i+1/2} - \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i-1/2}}{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})} \approx \frac{\Gamma_{i+1/2} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \Gamma_{i-1/2} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})}$$

\* Herleitung: Saalübung zu FDM, Verwendung: Poolübung zu FDM

# FDM - Randbedingungen

Formulierung von Randbedingungen auf einem 1D Netz  
z.B. im Punkt  $i=1$ :



- Dirichlet-Randbedingung:  $\phi_1 = konst.$
- Neumann-Randbedingung:  $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_1 = konst.$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_1 = 0 \Rightarrow \frac{\phi_2 - \phi_1}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$$

Vorwärtsdifferenz 1.Ord

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_1 = \frac{-\phi_3 + 4\phi_2 - 3\phi_1}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

Vorwärtsdifferenz 2.Ord

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_1 = \frac{2\phi_4 - 9\phi_3 + 18\phi_2 - 11\phi_1}{6\Delta x} + O((\Delta x)^3)$$

Vorwärtsdifferenz 3.Ord

# Übersicht

## 7 Systeme mit verteilten Parametern

### 7.3 Numerische Lösungsverfahren für PDGLen

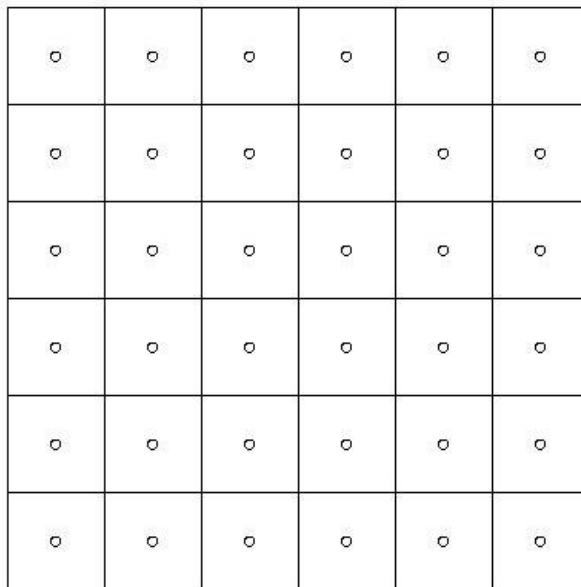
#### **7.3.4 Finite Volumen**



# Finite Volumen Verfahren

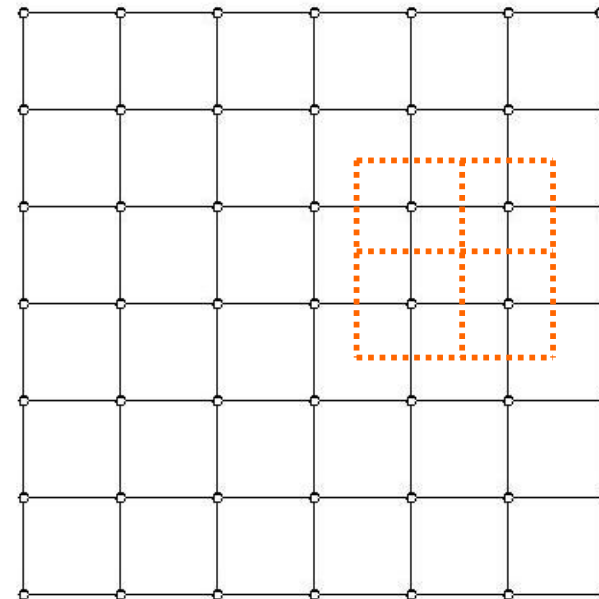
Ausgangspunkt für FVM ist die Integralform der Erhaltungsgleichungen

$$\oint_S \rho \phi \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \oint_S \Gamma \cdot \nabla \phi \cdot \vec{n} dS + \int_{\Omega} q_{\phi} d\Omega$$



## Zellmittelpunktschema:

Rechennetz definiert Ränder der Kontrollvolumina (**KV**), Mittelpunkte definieren sich implizit (wird am meisten verwendet)

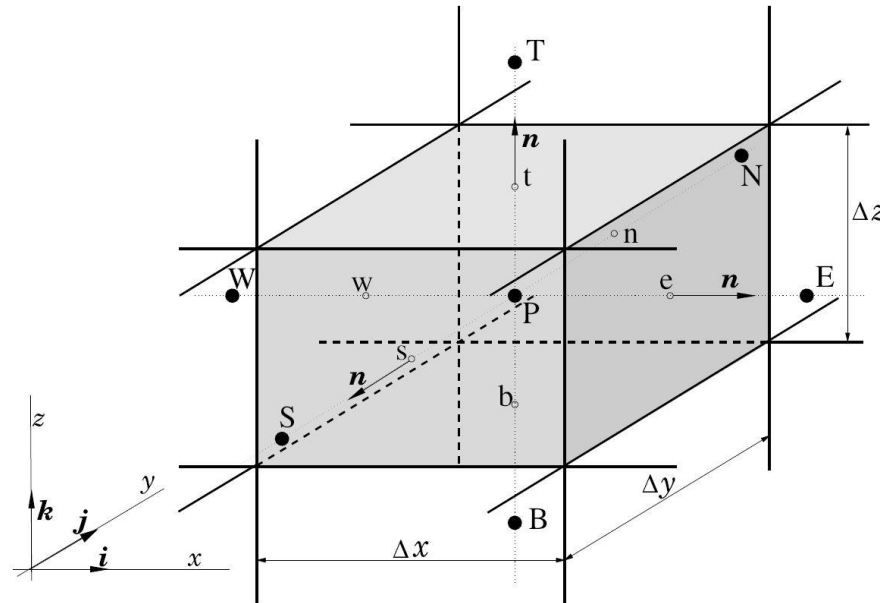


## Zelleckpunktschema:

Netz definiert Zellmittelpunkte der Kontrollvolumina, Ränder werden implizit definiert

$$\oint_S f dS = \sum_k \int_{S_k} f dS$$


# Finite Volumen Verfahren



Kontrollvolumen und die entsprechende Notation für ein 3-D-kartesisches Gitter

- Um der Erhaltungssform zu genügen, dürfen die Kontrollvolumina sich nicht überlappen oder Hohlräume enthalten
- Die Approximation der Oberflächenintegrale umfasst zwei Stufen:
  - Das Integral wird mit dem Variablenwert an einer oder mehreren Stellen auf der Randfläche approximiert
  - **Zuvor**: Randflächenwerte werden durch die Werte in der Zellenmitte approximiert, die aus Volumenintegralen/Erhaltung stammen

# FVM - Approximation der Oberflächenintegrale

$$F_e = \int_{S_e} f dS = \bar{f}_e S_e \approx f_e S_e$$

Mittelpunktsregel, 2. Ordnung genau

$$F_e = \int_{S_e} f dS \approx \frac{S_e}{2} (f_{ne} + f_{se})$$

Trapezregel, 2. Ordnung genau

$$F_e = \int_{S_e} f dS \approx \frac{S_e}{6} (f_{ne} + 4f_e + f_{se})$$

Simpsonsche Regel, 4. Ordnung genau

# FVM - Approximation der Randflächenwerte

Um die Flüsse an den Randflächen berechnen zu können, müssen die Berechnungsgrößen durch die Knotenpunktwerte angenähert werden:

- Verwendet man nur einen Punkt, so nennt man dies eine Upwind-Interpolation
- Verwendet man zwei Punkte, so nennt man dies eine lineare Interpolation
- Verwendet man drei Punkte, so nennt man dies ein Quadratisches Upwind-Interpolation
- Verwendet man mehr als drei Punkte, so nennt man dies ein Verfahren höherer Ordnung

# FVM – Die *Upwind-Interpolation*

Das Upwind-Schema ist 1. Ordnung genau. Es ist dem Vorwärts- bzw. Rückwärts-Differenzen-Verfahren 1. Ordnung der FDM äquivalent.

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P \rightarrow (\vec{u} \cdot \vec{n})_e > 0 \\ \phi_E \rightarrow (\vec{u} \cdot \vec{n})_e < 0 \end{cases} \quad 1. \text{ Ordnung genau}$$

Upwind-Schema ist numerisch diffusiv. Die Taylor-Reihenentwicklung um den Punkt „P“ für  $(\vec{u} \cdot \vec{n})_e > 0$  :

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + H$$

$$f_e^d = \Gamma_e \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \quad \Gamma_e^{num} = \frac{(\rho u)_e \Delta x}{2}$$

Abbruchfehler ist proportional zur 1. Ableitung. Man nennt ihn daher **numerische, künstliche oder falsche Diffusion**.\*

Das Upwind-Schema erfordert sehr feines Gitter, um akkurate Lösungen zu erhalten.\*

\* Poolübung zu FDM

# FVM - Die *lineare Interpolation*

Hier approximiert man den Wert an der Zellfläche durch eine lineare Interpolation der beiden nächsten Nachbarn:

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) \qquad \lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}$$

Abbruchfehler ist 2. Ordnung genau.

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) - \frac{(x_e - x_P)(x_E - x_e)}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + H$$

---

Die Annahme einer linearen Verteilung der Werte zwischen P und E führt zu einer einfacheren Approximation der Ableitung in den Diffusionsflüssen:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} \qquad \text{2.Ordnung genau}$$

# FVM - Approximation der Volumenintegrale

Die Quellterme erfordern die Integration über das Volumen, die einfachste Approximation erhält man mit der Mittelpunktsregel:

$$Q_P = \int_{\Omega} q d\Omega = \bar{q} \Delta\Omega \approx q_P \Delta\Omega$$

2. Ordnung genau

Eine Approximation höherer Ordnung erhält man unter Verwendung mehrerer Punkte innerhalb des Kontrollvolumens. In 2-D z.B.:

$$Q_P \approx \frac{\Delta x \Delta y}{36} (16q_P + 4q_s + 4q_n + 4q_w + 4q_e + q_{se} + q_{sw} + q_{ne} + q_{nw})$$

4. Ordnung genau



# FVM - Randbedingungen

An den physikalischen Rändern muss man bei der FVM Flüsse vorgeben.

- direkte Vorgabe, wenn bekannt (z.B. Massen- bzw. Wärmeflüsse)
- Berechnung aus Kombinationen von Randwerten und inneren Strömungswerten

Üblicherweise gibt man folgende Randbedingungen vor:

- An den Wänden: Massenflüsse zu Null setzen, Wärmeflüsse vorgeben (adiabate Wand: Wärmefluss Null vorgeben)
- An Einströmrändern: Geschwindigkeiten, Temperaturen und Drücke setzen
- An Ausströmrändern: Geschwindigkeiten und Temperaturen meist extrapolieren, Druck setzen
- An Symmetrierändern: alle Flüsse normal zum Rand Null setzen

# Ausblick

## ■ Nächste Übung:

- Saalübung zu gewichteten Residuen und zu FDM

## ■ Nächste Vorlesung:

- Evaluation zum Kapitel 7 (10 Min.)
- Wie wird das Gleichungssystem gelöst, das bisher aufgestellt wurde?
- Ist das Modell ausreichend oder muss noch etwas modelliert werden?