

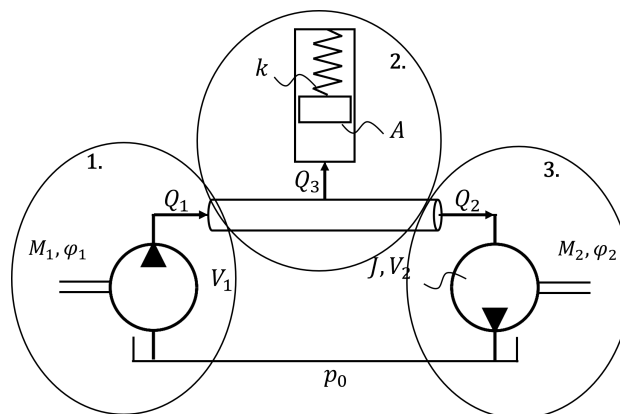
Übungsblatt Nr. 4

Thema: Konzentrierte Parameter - Zustandsgleichungen

In diesem Übungsblatt wird ausschließlich die Potenzial-Strom-Darstellung verwendet.

Aufgabe 1:

In einem hydraulischen Getriebe bestehend aus einer Pumpe und einem Motor wurde ein zusätzlicher Speicher angebracht. Dieser befindet sich mittig zwischen der Leitung von Pumpe zum Motor, welche als real zu betrachten ist.

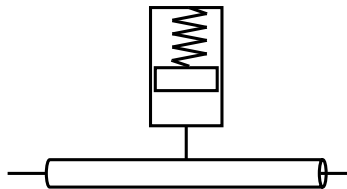


Hydraulisches Getriebe.

1. Durch die Kompressibilität des Öls ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\Delta p = E_{\text{Öl}} \cdot \frac{\Delta V}{V_0} \quad (1)$$

Die Kapazität der Schlauchleitung kann als $C_{\text{pipe}} = \frac{dV}{dp}$ angenommen werden und die Be-



Schlauchleitung mit federbelastetem Kolbenspeicher.

schleunigung des Kolbenspeichers kann vernachlässigt werden. Berechnen Sie die hydraulische Ersatzkapazität für die Schlauchleitung und den federbelasteten Kolbenspeicher.

$$C_{\text{ges}} = C_{\text{Öl}} + C_{\text{pipe}} + C_{\text{Speicher}} \quad (2)$$

Kapazität des Öls:

(3)

$$e = \frac{1}{C} \int f dt$$

$$\dot{e} = \frac{1}{C} f \quad (4)$$

$$\rightarrow C_{\text{Öl}} = \frac{Q}{\dot{p}} = \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{V_0}{E_{\text{Öl}}} \quad (5)$$

Kapazität des Kolbenspeichers:

Für das Kräftegleichgewicht im Kolben gilt:

$$\Sigma F = kx - pA = 0 \quad (6)$$

$$kx = \dot{p}A \quad \text{mit} \quad \dot{x} = \frac{Q}{A}$$

$$k \frac{Q}{A} = \dot{p}A$$

$$\frac{Q}{\dot{p}} = \frac{A^2}{k} \quad (7)$$

Daraus ergibt sich die Kapazität des Kolbenspeichers zu:

$$\rightarrow C_{\text{Speicher}} = \frac{Q}{\dot{p}} = \frac{A^2}{k} \quad (8)$$

und damit für die Gesamtkapazität:

$$\Rightarrow C_{\text{ges}} = \frac{V_0}{E_{\text{Öl}}} + C_{\text{pipe}} + \frac{A^2}{k} \quad (9)$$

2. Ermitteln Sie die hydraulische Induktivität des hydraulischen Motors. Die Trägheit des Öls kann dabei vernachlässigt werden.

Herleitung der Induktivität aus der Potenzial-Strom Darstellung:

$$f = \frac{1}{L} \int e dt \quad \rightarrow e = L \dot{f} \quad (10)$$

$$\rightarrow L = \frac{p}{\dot{Q}} \quad (11)$$

Für einen idealen hydraulischen Motor gilt:

$$M = \frac{V_{th} p}{2\pi} = J \ddot{\varphi}_2 \quad \rightarrow p = \frac{2\pi}{V_{th}} J \ddot{\varphi}_2 \quad (12)$$

$$Q = V_{th} n = \frac{V_{th}}{2\pi} \dot{\varphi}_2 \quad \rightarrow \dot{Q} = \frac{V_{th}}{2\pi} \ddot{\varphi}_2 \quad (13)$$

Gleichungen 12 und 13 in Gleichung 11 eingesetzt ergibt die gesuchte Induktivität des Motors:

$$L = \frac{4\pi^2}{V_{th}^2} J \quad (14)$$

3. Stellen Sie die Zustandsgleichung des Systems auf.

Die Teilsysteme sind im Bild oben eingezeichnet. Die integrierten Stromgrößen sind:

$$\varphi_1, \varphi_2, V_1, V_2, V_3 \quad (15)$$

Für die Nebenbedingungen gilt:

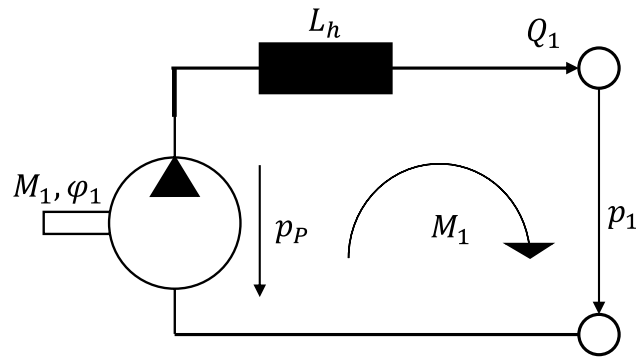
$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (16)$$

$$Q_1 = \frac{V_{th}}{2\pi} \dot{\varphi}_1 \quad (17)$$

$$Q_2 = \frac{V_{th}}{2\pi} \dot{\varphi}_2 \quad (18)$$

Die verallgemeinerten integrierenden Stromgrößen sind:

$$\varphi_1, \varphi_2 \quad (19)$$



Teilsystem 1

Zustandsgleichung Teilsystem 1.

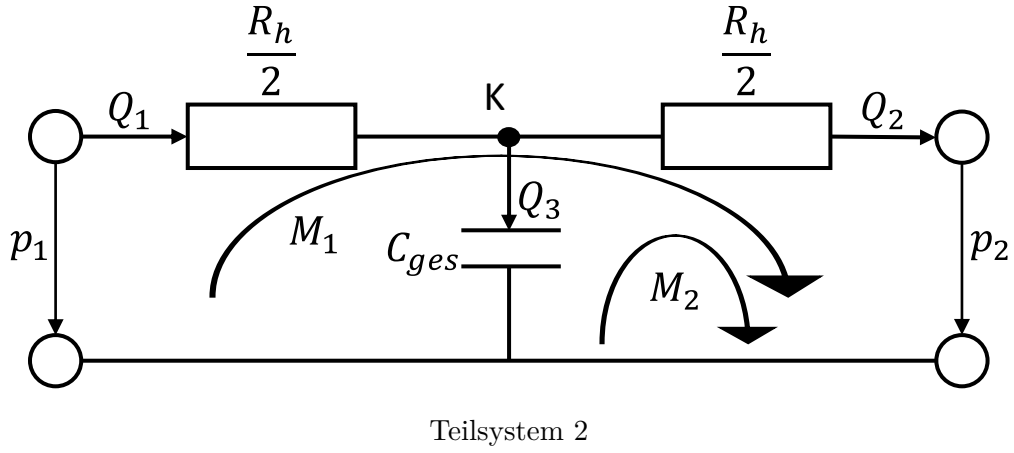
$$M_1 : \quad -p_P + \dot{Q}_1 L_h + p_1 = 0 \quad (20)$$

Für eine ideale hydraulische Pumpe gilt:

$$p_P = \frac{M_1}{V_{th}} 2\pi \quad Q_1 = \frac{V_{th}}{2\pi} \dot{\varphi}_1 \quad (21)$$

und damit:

$$p_1 = p_P - L_h \dot{Q}_1 = \frac{2\pi}{V_{th}} M_1 - L_h \frac{V_{th}}{2\pi} \ddot{\varphi}_1 \quad (22)$$



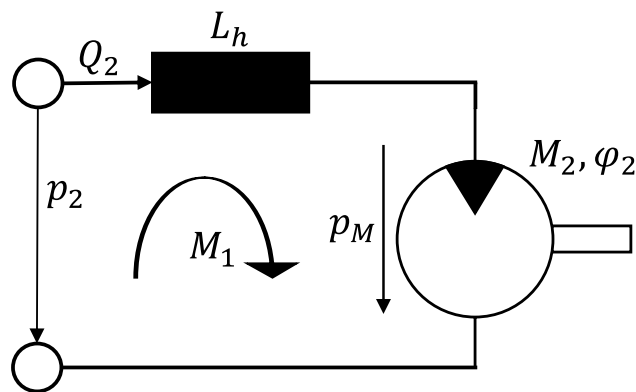
Zustandsgleichung Teilsystem 2.

$$M_1 : \quad -p_1 + Q_1 \frac{R_h}{2} + Q_2 \frac{R_h}{2} + p_2 = 0 \quad (23)$$

$$M_2 : \quad -\frac{1}{C_{ges}} \int Q_3 dt + p_2 + Q_2 \frac{R_h}{2} = 0 \quad (24)$$

$$\text{mit } K : \quad Q_3 = Q_1 - Q_2 \quad \text{in } M_2 \text{ eingesetzt} \quad (25)$$

$$M_2 : \quad -\frac{1}{C_{ges}} \int Q_1 - Q_2 dt + p_2 + Q_2 \frac{R_h}{2} = 0 \quad (26)$$



Zustandsgleichung Teilsystem 3.

$$M_1 : \quad -p_2 + \dot{Q}_2 L_h + p_M = 0 \quad (27)$$

Mit den Gleichungen 12 und 13 für ideale hydraulische Motoren:

$$p_2 = L_h \frac{V_{th}}{2\pi} \ddot{\varphi}_2 + \frac{2\pi}{V_{th}} M_2 \quad (28)$$

Um die Zustandsgleichungen des Systems zu erhalten werden Gleichung 22 und Gleichung 28 in die Gleichungen 23 und 26 eingesetzt:

$$\begin{aligned} M_1 : \quad & -\frac{2\pi}{V_{th}} M_1 + L_h \frac{V_{th}}{2\pi} \ddot{\varphi}_1 + \frac{R_h}{2} Q_1 + \frac{R_h}{2} Q_2 + L_h \frac{V_{th}}{2\pi} \ddot{\varphi}_2 + \frac{2\pi}{V_{th}} M_2 = 0 \\ M_2 : \quad & -\frac{1}{C_{ges}} \int Q_1 - Q_2 dt + L_h \frac{V_{th}}{2\pi} \ddot{\varphi}_2 + \frac{2\pi}{V_{th}} M_2 + Q_2 \frac{R_h}{2} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

mit Nebenbedingungen (Gleichung 17 und 18) für Q_1 und Q_2 :

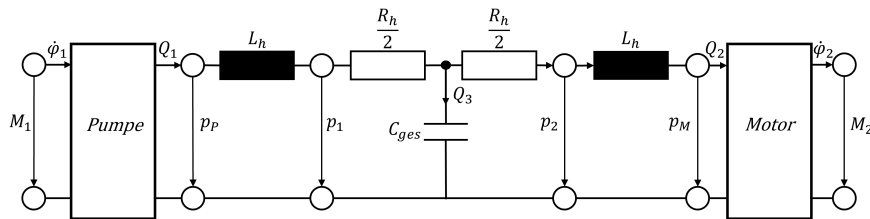
$$M_1 : \quad -\frac{2\pi}{V_{th}} M_1 + L_h \frac{V_{th}}{2\pi} \ddot{\varphi}_1 + \frac{V_{th} R_h}{2\pi} \frac{\dot{\varphi}_1}{2} + \frac{V_{th} R_h}{2\pi} \frac{\dot{\varphi}_2}{2} + L_h \frac{V_{th}}{2\pi} \ddot{\varphi}_2 + \frac{2\pi}{V_{th}} M_2 = 0 \quad (30)$$

$$M_2 : \quad -\frac{1}{C_{ges}} \frac{V_{th}}{2\pi} \int \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 dt + L_h \frac{V_{th}}{2\pi} \ddot{\varphi}_2 + \frac{2\pi}{V_{th}} M_2 + \frac{V_{th} R_h}{2\pi} \frac{\dot{\varphi}_2}{2} = 0 \quad (31)$$

Nach Umstellung und Auflösen des Integrals ergibt sich die Matrixform zu:

$$\begin{bmatrix} L_h \frac{V_{th}}{2\pi} & L_h \frac{V_{th}}{2\pi} \\ 0 & L_h \frac{V_{th}}{2\pi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_h V_{th}}{4\pi} & \frac{R_h V_{th}}{4\pi} \\ 0 & \frac{R_h V_{th}}{4\pi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{V_{th}}{2\pi C_{ges}} & \frac{V_{th}}{2\pi C_{ges}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\pi}{V_{th}} (M_1 - M_2) \\ -\frac{2\pi}{V_{th}} M_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

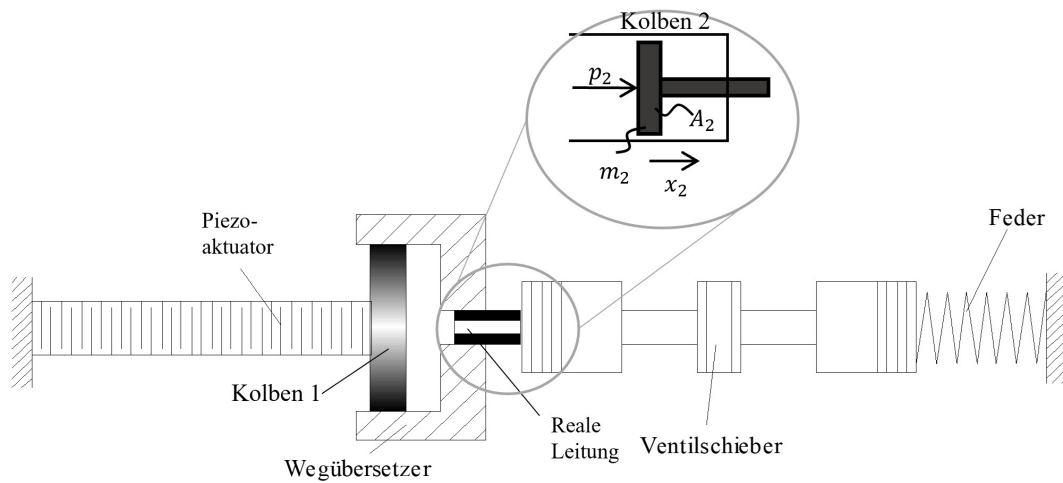
4. Wandeln Sie das gesamte System in ein elektrisches Ersatzschaltbild um. Die Wandler können als Vierpole modelliert werden.



Lösung zu Teilaufgabe 1.4

Aufgabe 2:

Bei der Dieseleinspritzung wird der Einspritzvorgang zur Emissionsreduzierung in mehrere zeitlich versetzte Einspritzungen aufgeteilt. Durch ein Ventil können diese Einspritzungen drehzahlunabhängig durchgeführt werden. Ein solches Ventil kann durch einen Piezoaktuator angesteuert werden und soll im Folgenden modelliert werden.

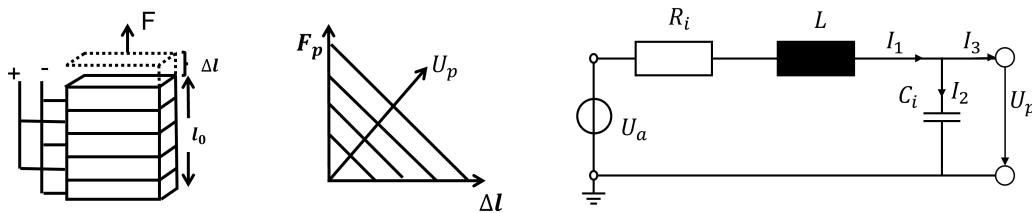


Ventil mit Piezoaktuator.

Der Piezoaktuator betätigt einen Kolben, welcher durch einen Druckübersetzer den Ventilschieber betätigt. Die fettmarkierte Leitung zwischen Kolben 1 und Ventilschieber ist als reale Leitung zu betrachten, wobei die Kapazität auf der Seite des Ventilschiebers vernachlässigbar klein ist im Vergleich zur Kapazität auf der Seite von Kolben 1. Die Längenänderung Δl des Piezoaktuators ist abhängig von der anliegenden Spannung U_p und der Kraft F_p und berechnet sich wie folgt:

$$\Delta l = -\frac{F_p}{c_p} + U_p \cdot l_0 \cdot K_{const} \quad (33)$$

Daraus ergibt sich die folgende Kennlinie, abhängig von der Spannung U_p , welche an den Anschlüssen der schematischen Darstellung links anliegt.



Kennlinie des Piezoaktuators und Ersatzschaltbild.

1. Das elektrische Ersatzschaltbild des Piezoaktuators ist oben angegeben. Stellen sie einen Zusammenhang zwischen U_a und U_p her.

Für den Knoten gilt:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad \text{mit} \quad I_3 = 0 \quad \rightarrow I_1 = I_2 \quad (34)$$

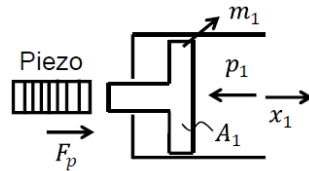
Für die Masche gilt damit:

$$-U_a + R_i I_1 + L \dot{I}_1 + U_p = 0 \quad (35)$$

$$-U_a + R_i I_1 + L \dot{I}_1 + \frac{1}{C_i} \int I_1 dt = 0 \quad (36)$$

$$U_p = U_a - R_i I_1 - L \dot{I}_1 \quad (37)$$

2. Modellieren Sie den Kolben 1 und stellen Sie dessen Differentialgleichung auf.



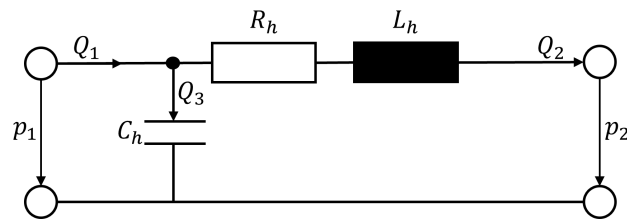
Lösung zu Teilaufgabe 2.2

Für das Kräftegleichgewicht im Kolben 1 gilt:

$$F_p - p_1 A_1 - m_1 \ddot{x}_1 = 0 \quad (38)$$

$$F_p = p_1 A_1 + m_1 \ddot{x}_1 \quad (39)$$

3. Geben Sie nun die Gleichungen für die reale Leitung und dessen Ersatzschaltbild an.



Lösung zu Teilaufgabe 2.3

Aus dem Ersatzschaltbild kann man folgende Gleichungen entnehmen (Maschengleichungen):

$$p_1 = \frac{1}{C_h} \int Q_1 - Q_2 dt \quad (40)$$

$$p_1 = R_h Q_2 + L_h \dot{Q}_2 + p_2 \quad (41)$$

4. Stellen Sie die Differentialgleichung des Ventilschiebers auf.

Für das Kräftegleichgewicht im Ventilschieber gilt (siehe Bild oben):

$$0 = p_2 A_2 - m_2 \ddot{x}_2 - k x_2 \quad (42)$$

$$p_2 = \frac{1}{A_2} (m_2 \ddot{x}_2 + k x_2) \quad (43)$$

Gleichung 43 zusammen mit 40 in Gleichung 41 eingesetzt ergibt:

$$\frac{1}{C_h} \int Q_1 - Q_2 dt = R_h Q_2 + L_h \dot{Q}_2 + \frac{1}{A_2} (m_2 \ddot{x}_2 + k x_2) \quad (44)$$

5. Stellen Sie nun die Zustandsgleichungen des Systems auf. Durchlaufen Sie dabei die folgenden Schritte:

a) Festlegen der Teilsysteme.

Teilsystem 1 ist der Piezoaktor, Teilsystem 2 ist der Kolben 1, Teilsystem 3 ist die reale Leitung und Teilsystem 4 ist der Kolben 2 und der Ventilschieber, mit ihren jeweiligen Differenzialgleichungen, die in den vorherigen Teilaufgaben hergeleitet wurden.

b) Festlegen der integrierten Stromgrößen.

$$I_1 \rightarrow q_1, x_1, x_2, V_1, V_2, V_3$$

c) Aufstellen der Nebenbedingungen.

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (45)$$

$$Q_1 = A_1 \dot{x}_1 \quad (46)$$

$$Q_2 = A_2 \dot{x}_2 \quad (47)$$

d) Auswahl der verallgemeinerten integrierten Stromgrößen.

Da das System 3 Freiheitsgrade besitzt, reichen 3 verallgemeinerte integrierte Stromgrößen aus, um das System vollständig zu beschreiben:

$$q_1, x_1, x_2$$

e) Aufstellen der Zustandsgleichungen.

Die erste Zustandsgleichung ist die DGL die q_1 beschreibt und kann aus der Gleichung 36 entnommen werden:

$$U_a = R_i I_1 + L \dot{I}_1 + \frac{1}{C_i} \int I_1 dt \quad (48)$$

$$\mathbf{I.} \quad U_a = L \ddot{q}_1 + R_i \dot{q}_1 + \frac{1}{C_i} q_1 \quad (49)$$

Die zweite Zustandsgleichung ist die DGL die x_1 beschreibt und kann aus der Gleichung

33 entnommen werden:

$$x_1 = \Delta l = -\frac{F_p}{c_p} + U_p \cdot l_0 \cdot K_{const} \quad (50)$$

Durch einsetzen von Gleichung 37, 39 und 40 erhält man:

$$x_1 = -\frac{1}{c_p} \left(\frac{1}{C_h} \int Q_1 - Q_2 dt \right) A_1 + m_1 \ddot{x}_1 + (U_a - R_i I_1 - L \dot{I}_1) \cdot l_0 \cdot K_{const} \quad (51)$$

Mit Nebenbedingungen aus Gleichung 46 und 47 und Ausführen der Integration ergibt:

$$\text{II. } x_1 = -\frac{1}{c_p} \left(\frac{1}{C_h} A_1 (A_1 x_1 - A_2 x_2) + m_1 \ddot{x}_1 \right) + (U_a - R_i \dot{q}_1 - L \ddot{q}_1) \cdot l_0 \cdot K_{const} \quad (52)$$

Die dritte Zustandsgleichung ist die DGL die x_2 beschreibt und kann aus der Gleichung 44 entnommen werden:

$$\frac{1}{C_h} \int Q_1 - Q_2 dt = R_h Q_2 + L_h \dot{Q}_2 + \frac{1}{A_2} (m_2 \ddot{x}_2 + k x_2) \quad (53)$$

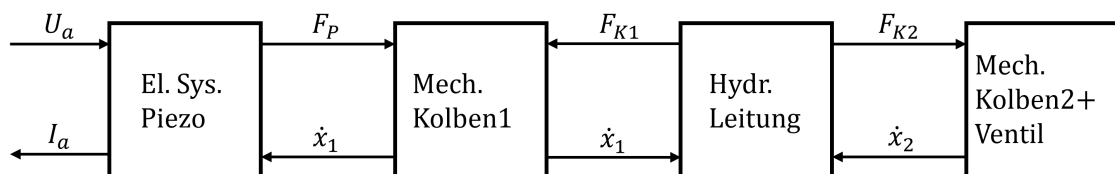
Mit Nebenbedingungen aus Gleichung 46 und 47 und Ausführen der Integration ergibt:

$$\text{III. } \frac{1}{C_h} (A_1 x_1 - A_2 x_2) = R_h A_2 \dot{x}_2 + L_h A_2 \ddot{x}_2 + \frac{1}{A_2} (m_2 \ddot{x}_2 + k x_2) \quad (54)$$

Nach Umsortierung der Zustandsgleichungen, ergibt sich die Matrixform zu:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ L l_0 K_{const} & -\frac{m_1}{c_p} & 0 \\ 0 & 0 & L_h A_2 + \frac{m_2}{A_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 \\ R_i l_0 K_{const} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_h A_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \\ \text{II. } & \begin{bmatrix} \frac{1}{C_i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{A_1^2}{c_p C_h} & -\frac{A_1 A_2}{c_p C_h} \\ 0 & -\frac{A_1}{C_h} & \frac{A_2}{C_h} + \frac{k}{A_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_a \\ U_a l_0 K_{const} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (55)$$

6. Sie würden gerne das gesamte Ventil in einer Co-Simulation simulieren, bei der jede Disziplin in einem speziellen Programm umgesetzt wird. Teilen Sie das System in Blöcke auf, verbinden Sie diese mit Pfeilen für die Potenzial- und Stromgrößen, die zwischen den Blöcken ausgetauscht werden. Achten Sie auf die richtige Richtung der Pfeile.



Lösung zu Teilaufgabe 2.6