Modellbildung und Simulation
Kapitel 7: Systeme mit verteilten Parametern

Balázs Pritz
pritz@kit.edu

Fachgebiet Strömungsmaschinen

Quelle: Xflow Product Sheet – www.xflowcfd.com

Übersicht

7 Systeme mit verteilten Parametern

7.3 Numerische Lösungsverfahren für PDGLen

7.3.3 Finite Differenzen

Poolübung zur FDM

- Ziele:
  - Erfahrung mit Implementieren (Debugging)
  - Typisches Lösungsverfahren für stationäre Strömungen
  - Parameter für eine effektive Simulation richtig wählen
    - Zeitliche und räumliche Auflösung
    - Stabilitätsgrenze
    - UDS $\leftrightarrow$ CDS
  - Was kosten Erweiterungen?
    - Abbruchkriterium
    - Streckung im Netz
  - Modellreduktion: 1D $\leftrightarrow$ 2D

Navier-Stokes Gleichungen

- 3D, instationär, kompressibel

K $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

I $$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + g_i$$

$$T_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)$$

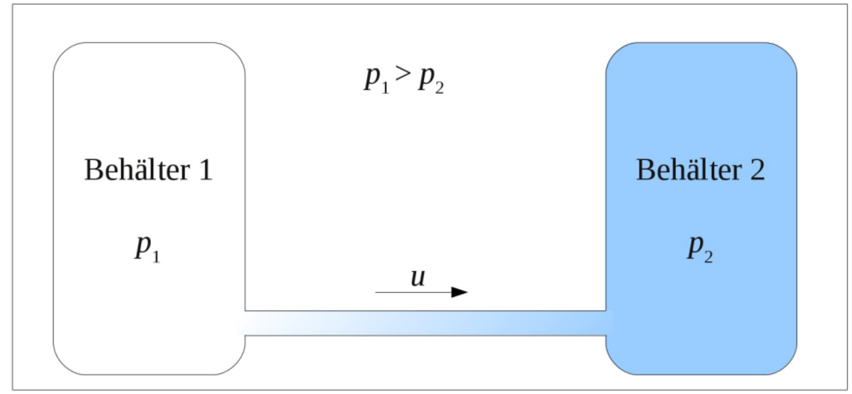
$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E $$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i E}{\partial x_i} = \frac{\partial (q_i - p u_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i T_{ij}}{\partial x_j} + u_i g_i$$

$$q_i = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \qquad E = \frac{1}{2} u_i u_i + e \qquad e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} = c_v T \qquad p = \rho R T$$

Navier-Stokes Gleichungen

- Transportgleichung in allgemeiner Form
  - ϕ ist jetzt ein passiver Skalar



T

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + q_\phi$$

Γ=konst.

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i \phi}{\partial x_i} = \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial {x_i}^2} + q_\phi$$

inkomp., instat., keine Quelle

$$\frac{\partial u_i \phi}{\partial x_i} = \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial {x_i}^2}$$

FDM – Beispielformeln (9. VL)

Beispiel für einfache Differenzenformeln:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \varepsilon$$

Rückwärtsdifferenz

(BDS: backward-difference scheme)

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} + \varepsilon$$

Vorwärtsdifferenz

(FDS: forward-difference scheme)

UDS: upwind difference scheme

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \varepsilon$$

Zentraldifferenz

(CDS: central-difference scheme)

ε stellt den Abbruchfehler dar

FDM - Randbedingungen (10. VL)

Formulierung von Randbedingungen nach Dirichlet oder Neumann

$$\phi_1 = Const. \Rightarrow Dirichlet - RB$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_1 = Const. \Rightarrow Neumann - RB$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_1 = 0 \Rightarrow \frac{\phi_2 - \phi_1}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$$ Vorwärtsdifferenz 1.Ord

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_1 = \frac{-\phi_3 + 4\phi_2 - 3\phi_1}{2\Delta x} + O\left((\Delta x)^2\right)$$ Vorwärtsdifferenz 2.Ord

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_1 = \frac{2\phi_4 - 9\phi_3 + 18\phi_2 - 11\phi_1}{6\Delta x} + O\left((\Delta x)^3\right)$$ Vorwärtsdifferenz 3.Ord

Iteratives Lösungsverfahren (11. VL)

- Integration in der Zeit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u_i \phi}{\partial x_i} = \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial {x_i}^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = RHS$$

Diskretisierung

$$\frac{{\phi_i}^{n+1} - {\phi_i}^{n}}{t^{n+1} - t^{n}} = RHS$$

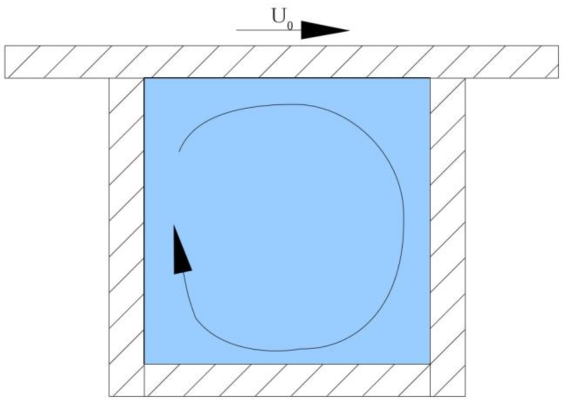
konstanter Zeitschritt,
explizite Euler-Methode

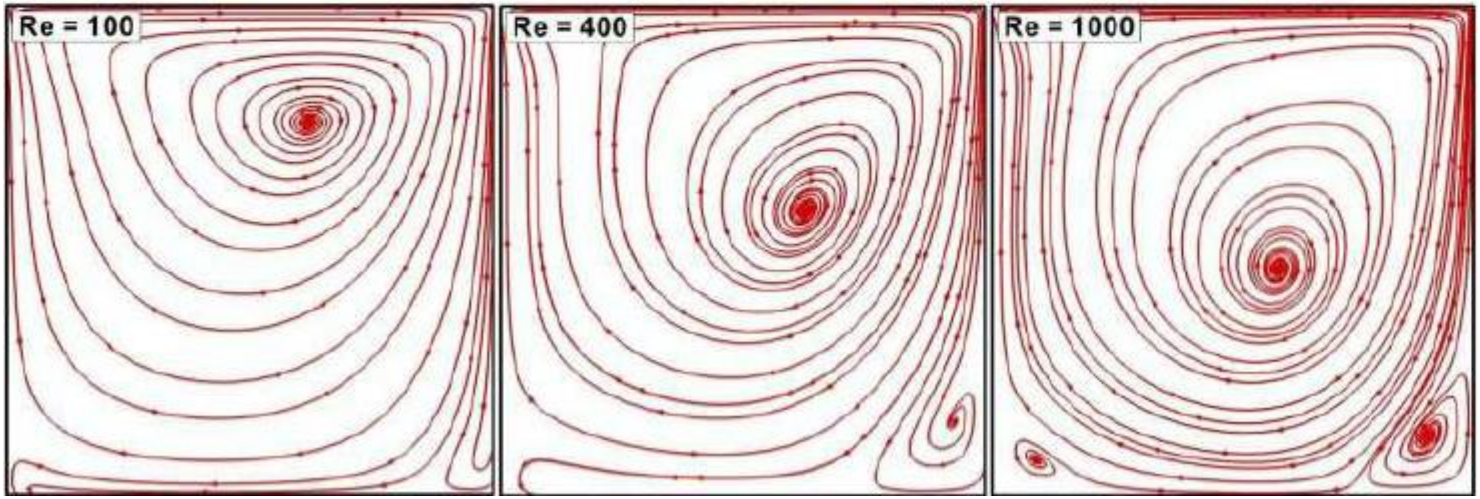
$${\phi_i}^{n+1} = \Delta t \cdot RHS^{n} + {\phi_i}^{n}$$

Einschränkungen für den Zeitschritt: $D = \frac{\Gamma \Delta t}{\rho \Delta x^2}$ $CFL = \frac{u \Delta t}{\Delta x}$

1D ⇨ 2D

- Wirbelströmung im rechteckigen Gebiet (lid driven cavity)





Quelle: DOI: 10.4208/cicp.300514.160115a