Aufgabe 1 (15 Punkte)

Sie sind Entwicklungsingenieur und möchten hydraulische Bohrhämmer umrüsten auf ein lineare Auslenkung dazu kommt ein elektrischer Linearmotor für den generatorischen Teil zum Einsatz.

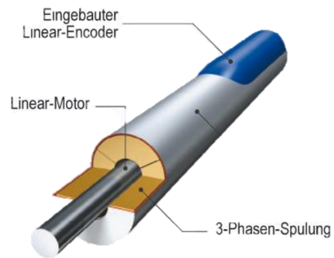


Abbildung 2: Konventioneller Bohrhammer im Einsatz (re.) und elektrischer Linearmotor (li.)

Ihr Kollege möchte das folgende System modellieren um dieses anschließend zu simulieren. Er bittet Sie um Hilfe, da er während sein Studium nie die Vorlesung Modellbildung und Simulation hatte.

Das System, ist in Abbildung 2 dargestellt.

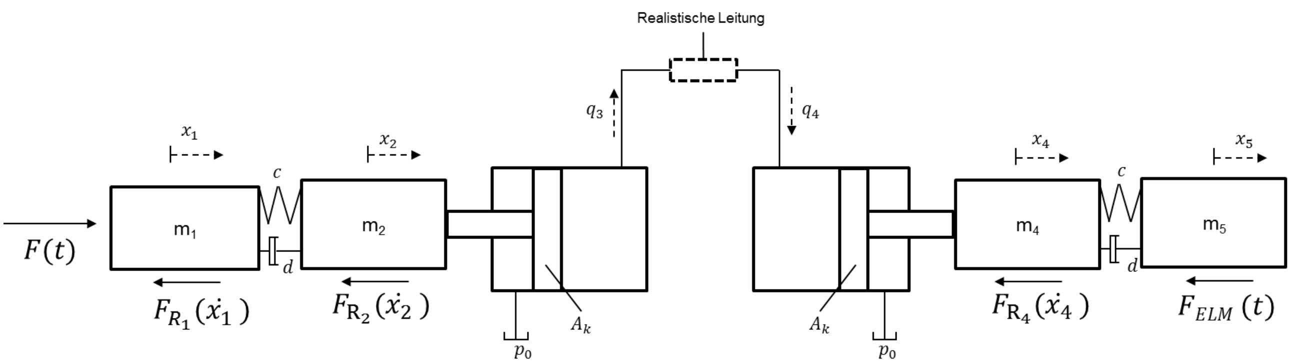
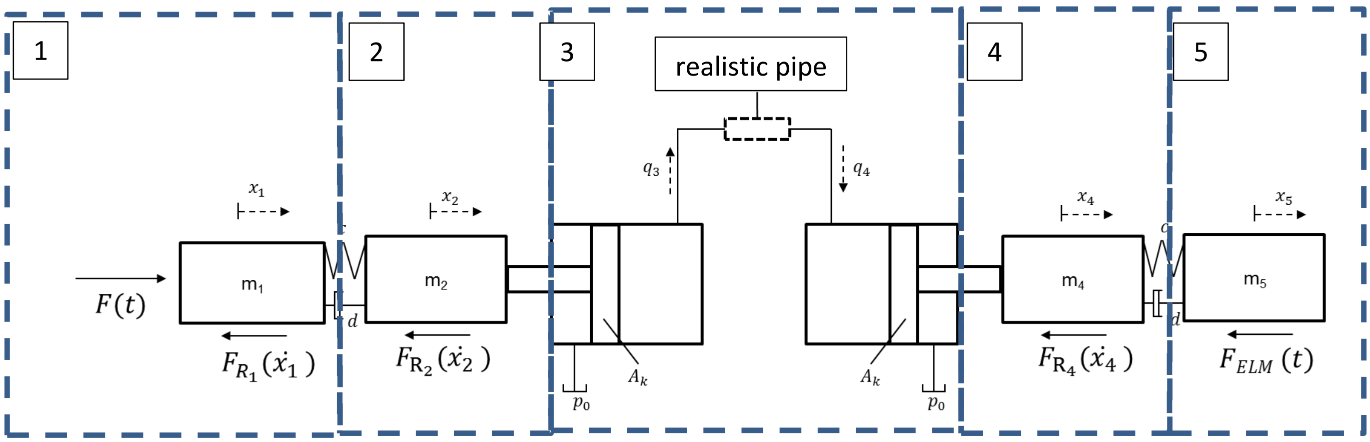


Abbildung 2: Das untersuchende Teilsystem

Sie nehmen dabei folgendes an:

- Alle Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten sind Konstant, für alle Domänen.
- Die Kolben der Zylinder sind an die Massen absolut starr gekoppelt
- Die Kolben der Zylinder sind masselos, reibungsfrei und absolut starr an die Masse m_4 bzw. m_2 gekoppelt
- Die Kraft des elektrischen Linearmotord $F_{\mathrm{ELM}}(t)$, die Reaktionskraft $F(t)$ sowie die Reibungskräfte $F_{R_1}(\dot{x}_1)$, $F_{R_2}(\dot{x}_2)$ und $F_{R_4}(\dot{x}_4)$ dürfen als äußere Kräfte angenommen werden
- Für den Volumenstrom des Zylinders gilt $q_i = A_k * \dot{x}_i$
- Der Atmosphärendruck p_0 darf als 0 angenommen werden
- Die Stange des Linearmotors m_5 ist absolut Reibungsfrei gelagert
- Als Anfangsbedingung dürfen Sie annehmen, dass das System in Ruhe ist, ohne Auslenkung und in den Leitungen herrscht Atmosphärendruck.
- x_1, x_2, x_4, x_5 beschreiben die Auslenkung der Massen m_1, m_2, m_4, m_5
- q_3, q_4 beschreiben den Volumenstrom der beiden Zylinder

1.1. Teilen Sie gut erkennbar das System in Teilsystemen auf und zeichnen diese ein. Nennen Sie für jedes Teilsystem die jeweiligen Domänen. (2 Punkte)



1 mechanisch

2 mechanisch

3 hydraulisch

4 mechanisch

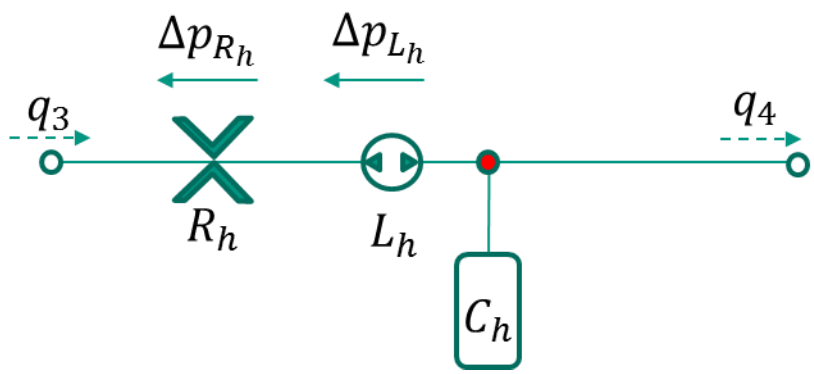
5 mechanisch

(1 und 2 sowie 4 und 5 zusammen eingezeichnet ebenfalls zulässig)

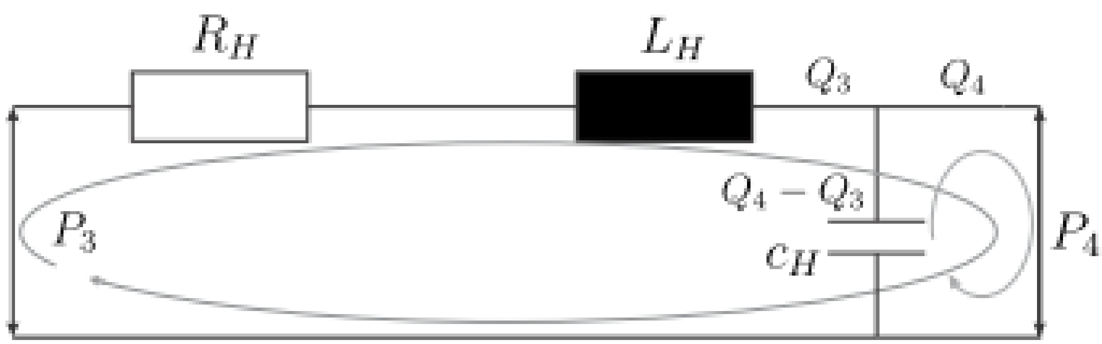
1 Punkt das richtige Zeichnen und 1 Punkt die richtige Benennung

1.2. Bitte zeichnen Sie von der „Realistischen Leitung“ das hydraulische Modell und das äquivalente elektrische System der (Die Kapazität der Leitung wir als nur einer diskreten Komponente angenommen). (2 Punkte)

Modell einer hydraulischen Leitung mit einer Kapazität



Übertragung in die elektrische Domäne ergibt ähnlich der Vorlesung:



1.3 Welche der Größen bilden einen korrekten Stromgrößenvektor? Wählen Sie den korrekten Stromgrößenvektoren und begründen Sie wieso die anderen beiden jeweils nicht in Frage kommen. (Tipp: beachten Sie die nahmen)

(2Punkte)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

☐ *Richtig. (Alle Größen sind unabhängig voneinander & Stromgrößen)*

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_1 \\ F_{ELM} \end{pmatrix}$$

☐ *Falsch. Kräfte sind Potentialgrößen, der Vektor enthält die Kraft F_{ELM}. Stromgrößenvektoren dürfen keine Potentialgrößen enthalten.*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ q_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

☐ *Falsch. Der Volumenstrom und Zylinderweg sind über die Gleichung $q_i = A_k * \dot{x}_i$ mit einander gekoppelt. Stromgrößen müssen unabhängig sein*

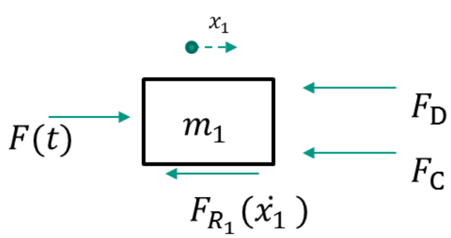
Richtige Auswahl 1 Punkt & pro richtige Erklärung jeweils 0,5 Punkte

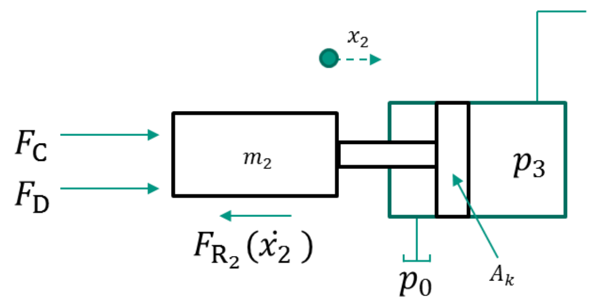
1.4 Für den in Aufgabe 1.3 gewählten Stromgrößenvektor sollen seiner Dimension entsprechend, die Anzahl an Differenzialgleichungen aufgestellt werden die die einzelnen Teilsysteme beschreiben und deren Freischnitte gezeichnet werden. Geben sie auch die Gleichungen an die die Systeme untereinander Koppeln an.

(8 Punkte)

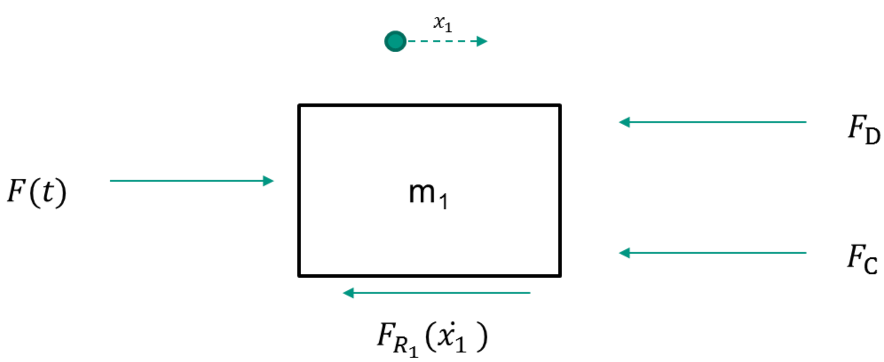
1 Punkt für Richtige Freischnitte

Freischnitt Masse1 und 2:





Für Masse 1 gilt:



Gleichgewicht um m_1

$$\ddot{x}1 * m_1 = - F_{R_1}(\dot{x}_w) - F_c - F_D + F(t)$$

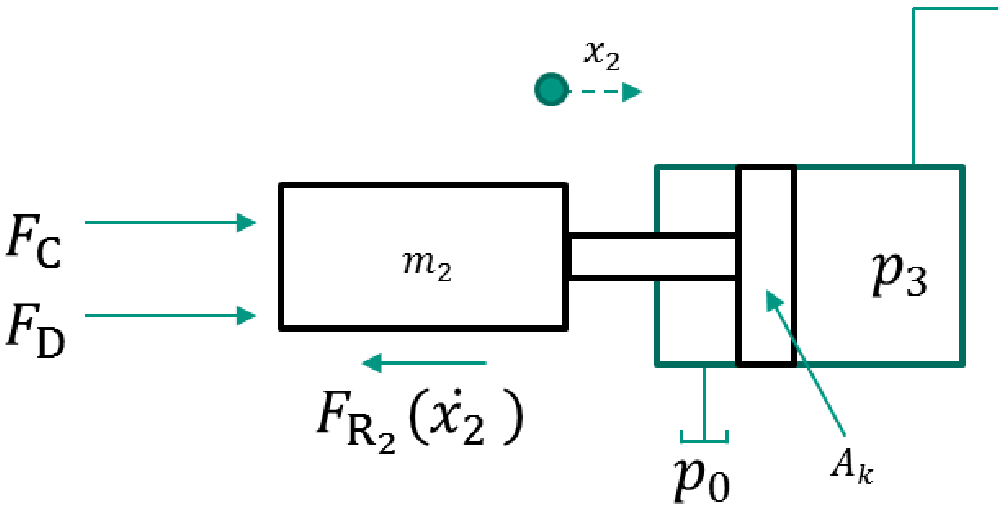
Für Feder Dämpfer gilt:

$$F_C = c\,(x_i - x_j) \text{ und } F_D = d\,(\dot{x}_\iota - \dot{x}_j)$$ *1 Punkt*

Ergibt Diff.-Gleichung 1 :

$$-F(t) = -\ddot{x}_1 * m_1 - F_{R_2}(\dot{x}_w) - d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - c(x_1 - x_2)$$ *(Gl.I)* *1 Punkt*

Für Masse 2:



Gleichgewicht um m_2:

$$\ddot{x} * m_2 = -P_3 * A_K - F_{R_2}(\dot{x}_2) + F_c + F_D$$

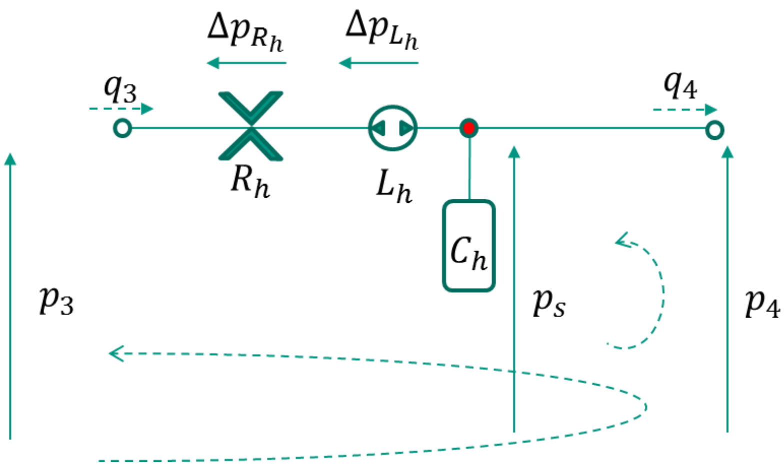
Außerdem gilt:

$$F_C = c\,(x_i - x_j) \; und \; F_D = d\,(\dot{x}_i - \dot{x}_j)$$

Ergibt Diff.-Gleichung 2 :

$\ddot{x} * m_2 = -P_3 * A_K - F_{R_2}(\dot{x}_2) + d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c(x_1 - x_2)$ *(Gl.II)* *1 Punkt*

Die realistische Leitung:



$p_3 = p_4 + \Delta p_{R_h} + \Delta p_{L_h}$ *($Gl.1$) (Maschenumlauf groß)*

$p_s = p_4$ *($Gl.2$) (Maschenumlauf klein)*

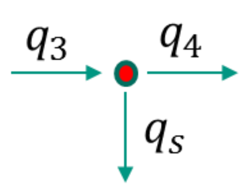
Einsetzen ($Gl.1$) in ($Gl.2$)

$$p_3 = p_s + \Delta p_{R_h} + \Delta p_{L_h}\ (Gl.1*)$$

P_s *aus Druckaufbaugleichung am markeirten Punkt:*

$$\dot{p_s} = \frac{1}{C_h}\sum_i (q_s)\quad (Gl.3)$$

$\sum_i(Q_i)$ *aus Kontinuitätsgleichung:*



$$q_s = q_3 - q_4\ (Gl.4)$$

Einsetzen ($Gl.4$) in ($Gl.3$) und ($Gl.3$) integrieren ergibt:

$$\Delta p = p_s - p_{start} = p_4 - p_{start} = \frac{1}{C_h}(V_3 - V_4)$$

$$p_{start} = 0$$

$$p_s = p_4 = \frac{1}{C_h}(V_3 - V_4)$$ 1 Punkt

Ergibt sich:

$$p3 \;=\; \frac{1}{C_\mathrm{h}}(\mathrm{V}_3 \; - V_4) + \Delta p_{R_\mathrm{h}} + \Delta p_{L_\mathrm{h}} \; (Gl1 \,**)$$

Außerdem gilt allgemein für den Volumenstrom eines Zylinders:

$$q_i \;=\; A_k * \dot{x}_i \; und \; V_3 = A_i * x_i$$

Außerdem gilt für die hydraulischen Widerstände und Induktivitäten

$$\Delta p_{R_\mathrm{h}} = R_\mathrm{h} * q_3 \;\; \text{sowie} \;\; \Delta \mathrm{p}_{\mathrm{L_h}} = \mathrm{L_h} * \dot{\mathrm{q}}_3$$

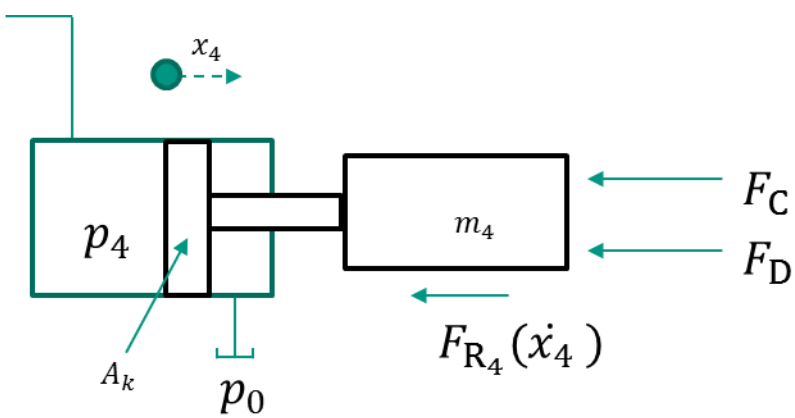
Bedingungen einsetzen in$(Gl.\,1 \,**)$

$$p_3 = \frac{1}{C_h}(\,A_k * x_2 - \;A_k * x_4) + R_h * \;A_k * \dot{x}_2 + L_h * \;A_k \dot{*} \, \ddot{x}_2 \; \textit{(Gl.III)}$$ *1 Punkt*

Diff.Gleichung (Gl.II) in (Gl.III) einsetzen ergibt:

$\ddot{x} * m_2 = -\frac{Ak^2}{C_h}(x_2 - x_4) - R_h * Ak^2 * \dot{x}_2 - L_h * Ak^2 * \ddot{x}_2 \; - \; F_{R_2}(\dot{x}_2\;) + c(x_1 - x_2) +$
$d(\dot{x}_1 \; - \dot{x}_2)$ *(Gl.III*)* *1 Punkt*

Für die Masse 4 gilt:



Gleichgewicht um m_4:

$$\ddot{x} * m_4 = +P_4 * A_K - \; F_{R_4}(\dot{x}_4\;) - F_c - F_D$$

Weiterhin gilt:

$$\mathrm{p_s} = \mathrm{p}_4 = \frac{1}{C_\mathrm{h}}(\mathrm{V}_3 \; - \mathrm{V}_4)$$

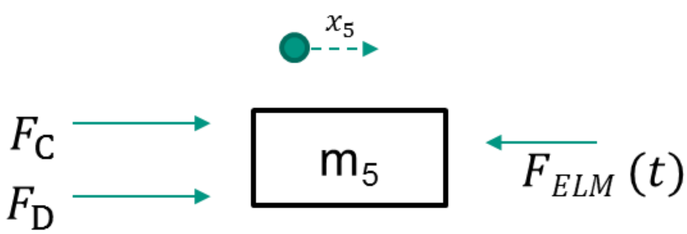
$$q_i = A_k * \dot{x}_i \; und \; V_i = A_i * x_i$$

$$F_C = c\left(x_i - x_j\right) \; und \; F_D = d\left(\dot{x}_\iota - \dot{x}_j\right)$$

Einsetzen ergibt *(Gl.IV):*

$$\ddot{x}_4 * m_4 = +\frac{Ak^2}{C_h}(x_2 - x_4)^* - F_{R_4}(\dot{x}_4) - c(x_4 - x_5) - d(\dot{x}_4 - \dot{x}_5)$$ *(Gl.IV)* 1 Punkt

Für Masse 5 gilt:



Gleichgewicht um Masse 5:

$$\ddot{x} * m_4 = F_c + F_D - F_{ELM}(x)$$

Weiterhin gilt:

$$F_C = c\left(x_i - x_j\right) \; und \; F_D = d\left(\dot{x}_\iota - \dot{x}_j\right)$$

Einsetzen ergibt *(Gl.V):*

$$\ddot{x}_5 * \mathrm{m}_5 = -F_{ELM}(t) + c(x_4 - x_5) + \mathrm{d}(\dot{x}_4 - \dot{x}_5)$$ 1 Punkt

1.5 Zeigen Sie wie aus den aufgestellten Differenzialgleichungen aus Aufgabe 1.4 das für das System in ein Differentialgleichungssystem, welches das Gesamtsystem beschreibt überführt werden kann und stellen es auf. *(1 Punkt)*

$$\ddot{x}_1 * m_1 = F(t) - F_{R_1}(\dot{x}_1) - c(x_1 - x_2) - d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\ddot{x}2 * m_2 = -\frac{Ak^2}{C_h}(x_2 - x_4) - R_h * Ak^2 * \dot{x}_2 - L_h * Ak^2 * \ddot{x}_2 - F_{R_2}(\dot{x}_2) + c(x_1 - x_2) + d(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\ddot{x}4 * m_4 = +\frac{Ak^2}{C_h}(x_2 - x_4)^* - F_{R_4}(\dot{x}_4) - c(x_4 - x_5) - d(\dot{x}_4 - \dot{x}_5)$$

$$\ddot{x}_5 * m_5 = -F_{ELM}(t) + c(x_4 - x_5) + d(\dot{x}_4 - \dot{x}_5)$$

$$\begin{pmatrix} -m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 - L_h * {A_k}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{m}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d & d & 0 & 0 \\ \mathrm{d} & -d - R_h {A_k}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & d \\ 0 & 0 & d & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -c & c & 0 & 0 \\ c & -c - \frac{{A_k}^2}{C_h} & +\frac{{A_k}^2}{C_h} & 0 \\ 0 & \frac{A_K}{C_h} & -\frac{{A_K}^2}{C_h} - c & c \\ 0 & 0 & c & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F(x) + \mathrm{F}_{\mathrm{R}_1}(\dot{x}_1) \\ -\mathrm{F}_{\mathrm{R}_2}(\dot{x}_2) \\ \mathrm{F}_{\mathrm{R}_4}(\dot{x}_4) \\ F_{ELM}(t) \end{pmatrix}$$

Für die weiteren Aufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg!