

Modellbildung und Simulation

Kapitel 7: Systeme mit verteilten Parametern

Balázs Pritz
pritz@kit.edu

Institut für Thermische Strömungsmaschinen
Prof. Dr.-Ing. Hans-Jörg Bauer



Quelle: Xflow Product Sheet – www.xflowcf.com

Lernziele der heutigen Vorlesung

- Die Studierenden
 - kennen mehrere Möglichkeiten, wie das mathematische Modell für den Rechner verständlich gemacht wird
 - kennen die dazu notwendige Approximationen

Übersicht

7 Systeme mit verteilten Parametern

7.3 Numerische Lösungsverfahren für PDGLe

7.3.1 Gewichtete Residuen

7.3.2 Einführung in die Feldverfahren

7.3.3 Finite Differenzen

7.3.4 Finite Volumen

7.3.5 Finite Elemente

7.3.6 Lösungsverfahren

Übersicht

7 Systeme mit verteilten Parametern

7.3 Numerische Lösungsverfahren für PDGLen

7.3.1 Gewichtete Residuen

4.3.1 Gewichtete Residuen

Methode zur Bestimmung einer Näherungslösung einer DGL

Nachfolgend: Notation für 1D-Probleme:

Gegeben: DGL + Randbedingungen

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u &= 0 & \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R} \\ \mathcal{G}u &= 0 & \text{auf } \Gamma = \partial\Omega\end{aligned}$$

Wähle Basis von Ansatzfunktionen $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^N$, die die RB erfüllen:
 $\mathcal{G}\phi_i(x) = 0 \quad \text{auf } \Gamma$

Ansatz für Näherungslösung als Superposition dieser Ansatzfunktionen

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(x)$$

4.3.1 Gewichtete Residuen

Einsetzen von \tilde{u} in DGL liefert **Residuum** $r(x)$

$$r(x) = \mathcal{L}\tilde{u}(x) \neq 0$$

Jetzt: nicht Residuum minimieren, sondern

$$\int_{\Omega} r(x) w_i(x) dx = 0$$

mit Gewichtungsfunktionen w_i . Fragen:

- Welche Gewichtungsfunktionen ?
- Wie werden Parameter a_j in \tilde{u} bestimmt ?
- Wie gut ist die Näherungslösung \tilde{u} ?

4.3.1 Gewichtete Residuen

■ Kollokationsmethode

$$\Rightarrow r(x_i) = 0$$

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

■ Subdomain (Kollokations-)Methode

$$\Rightarrow \int_{\Omega} r(x) dx = 0$$

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 & x_a \leq x \leq x_b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

■ Methode der kleinsten Quadrate

$$\min \int_{\Omega} r(x)^2 dx \Rightarrow \int_{\Omega} r(x) \frac{\partial r}{\partial a_i} dx = 0$$

$$w_i(x) = \frac{\partial r}{\partial a_i} \quad i = 1, \dots, N$$

$$\forall i = 1, \dots, N$$

■ Galerkin-Methode

$$\Rightarrow \int_{\Omega} r(x) \phi_i(x) dx = 0$$

$$w_i(x) = \phi_i(x) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_i} \quad i = 1, \dots, N$$

$$\forall i = 1, \dots, N$$

4.3.1 Gewichtete Residuen

Starke und schwache Formulierung

Reduktion der Ordnung des Gliedes der höchsten Ableitung durch partielle Integration

Beispiel:

Funktion wird gesucht: $u = u(x)$, $x \in (0,1)$, so dass:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} - u = -x \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

Zwei-Punkt-Randwertproblem mit starke Formulierung

Residuum:

$$r = \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} - (-x)$$

4.3.1 Gewichtete Residuen

Starke und schwache Formulierung (2)

$$\int_{\Omega} r(x)w(x)dx = \int_{\Omega} w \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \right) dx = 0$$

Mit der Kettenregel:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad u = w \quad u' = \frac{dw}{dx} \quad v = \frac{d\tilde{u}}{dx} \quad v' = \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2}$$

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \right) dx = \underbrace{\int_{\Omega} \left(-\frac{dw}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} - w\tilde{u} + wx \right) dx}_{\text{Schwache Formulierung}} + w \frac{d\tilde{u}}{dx} \Big|_a^b = 0$$

Schwache Formulierung

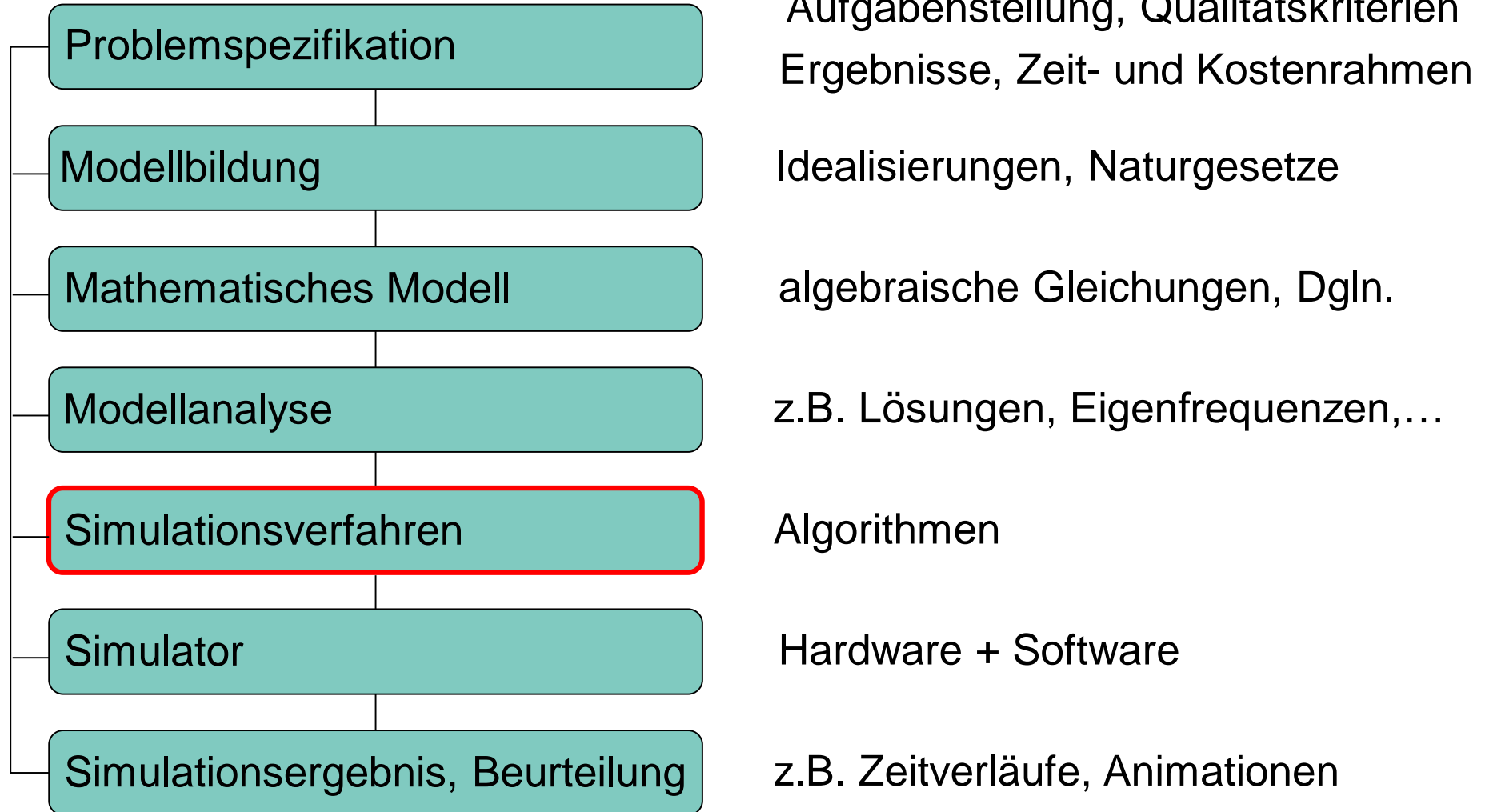
Übersicht

7 Systeme mit verteilten Parametern

7.3 Numerische Lösungsverfahren für PDGLen

7.3.2 Einführung in die Feldverfahren

Ablauf einer Simulationsstudie



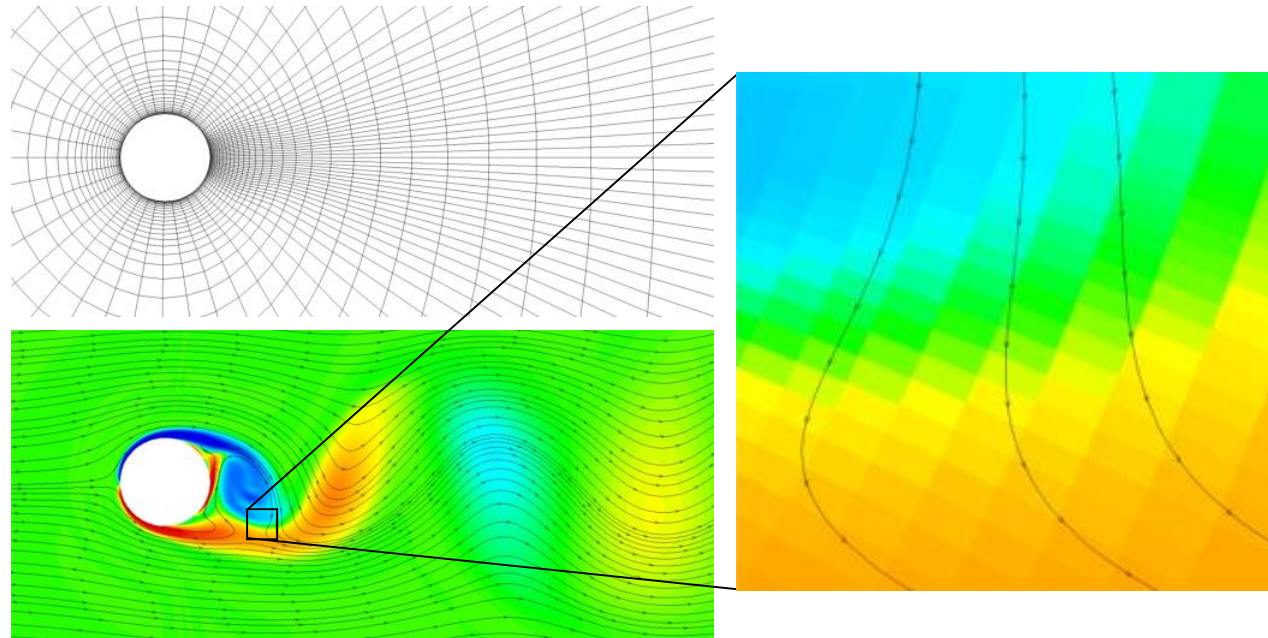
7.3.3 Einführung in die Feldverfahren

- Basiert auf die geeigneten mathematischen Modellierung der zu untersuchenden Vorgänge
- Diskretisierung des Problemgebietes:

Das kontinuierliches Gebiet wird durch eine endliche Anzahl von Teilgebieten approximiert

- Diskretisierung der Modellgleichungen

$$\partial u / \partial x = 0 \rightarrow \Delta u / \Delta x$$



Diskretisierungsmethoden

- Finite-Differenzen-Methode (FDM)

Basiert auf der differentiellen Form der Transportgleichungen

- Finite-Volumen-Methode (FVM)

Basiert auf der integralen Form der Transportgleichungen

Wird beim Strömungsmechanik meistens verwendet

Computational Fluid Dynamics (CFD)

- Finite-Elemente-Methode (FEM)

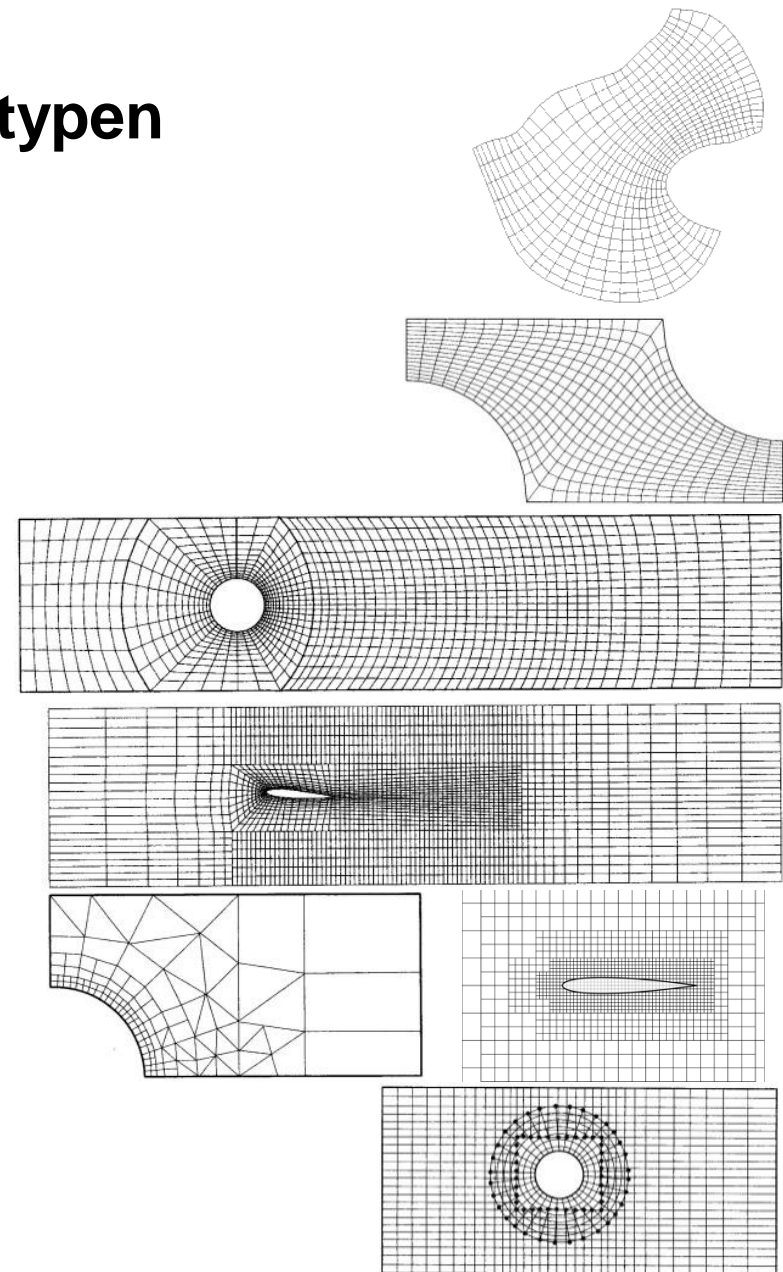
Basiert auf der gewichteten integralen Form der Transportgleichungen

Wird beim Strukturmechanik meistens verwendet

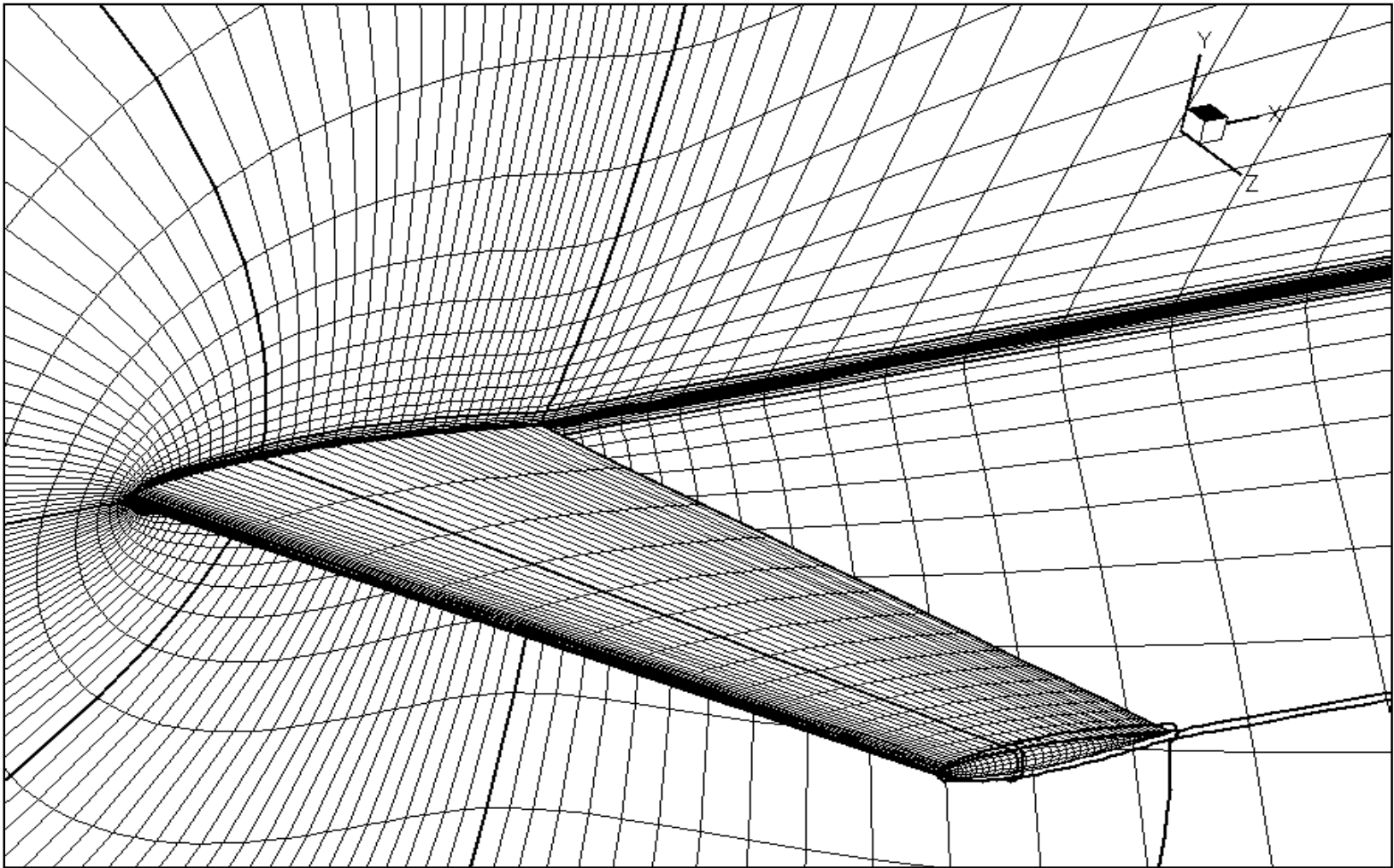
(Computational Solid Dynamics (CSD))

Räumliche Diskretisierung: Gittertypen

- Orthogonal
- Krummlinig orthogonal
- Krummlinig nicht-orthogonal
- Strukturiert / Blockstrukturiert (H-, O-, C-type)
- Unstrukturiert
- Hybrid
- Geometrieangepasst
- “Immersed Boundary”
- Überlappend (Chimera, overset grid)

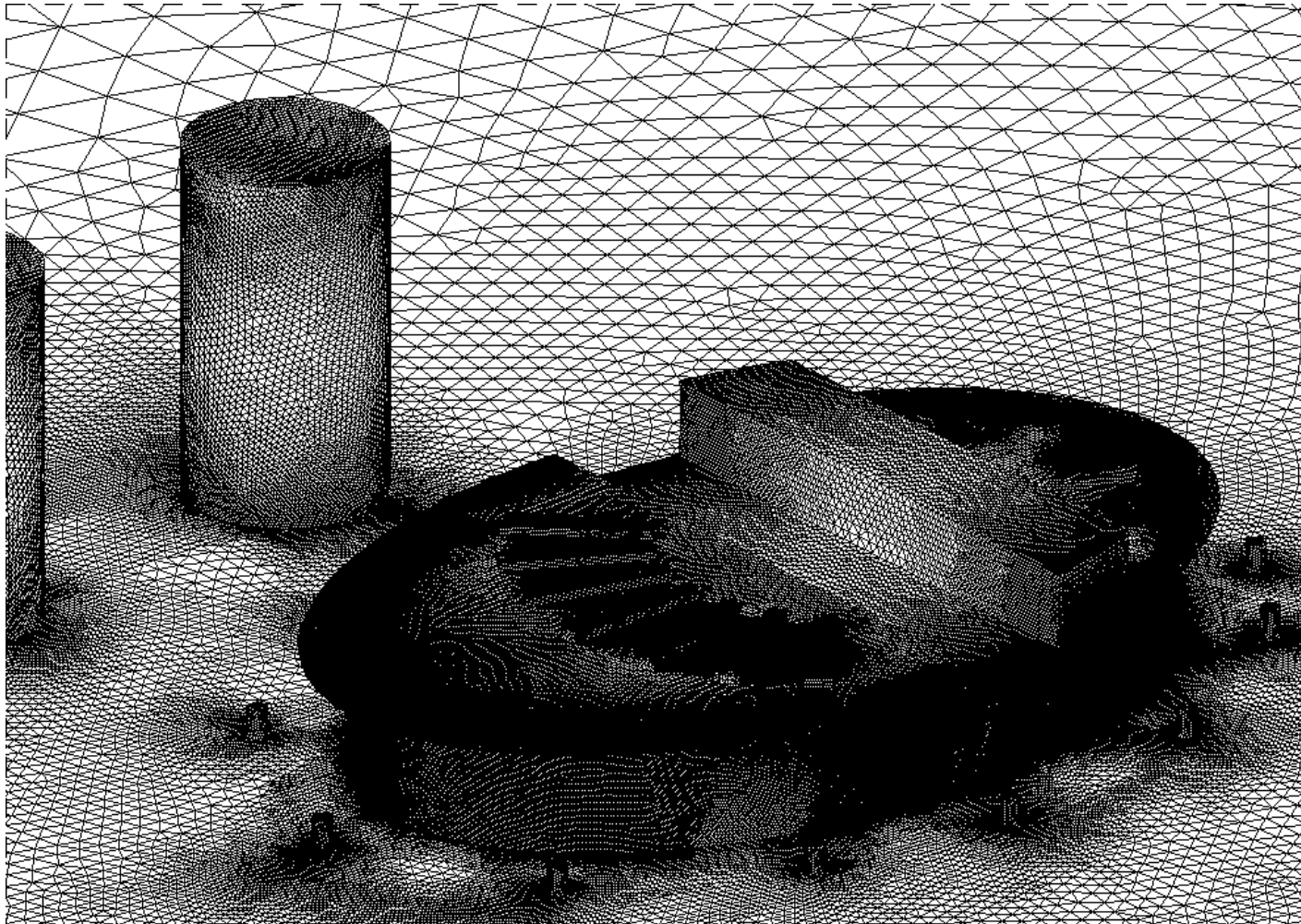


Blockstrukturiertes Gitter



Rechengitter um den ONERA M6 Tragflügel

Unstrukturiertes Gitter

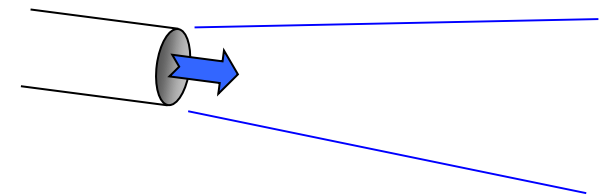
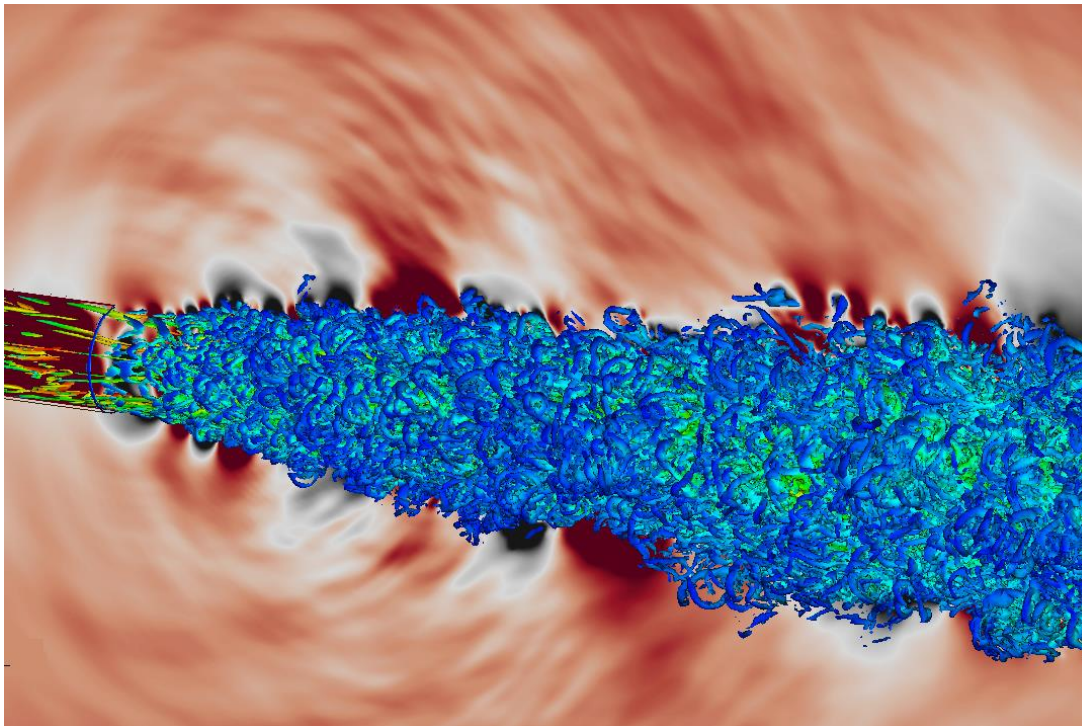


Rechengitter um das Kundencenter der Volkswagen AG

Modellreduktion

Vereinfachungsmöglichkeit im Raum:

- Kartesische Koordinaten
- Zylinderkoordinaten
- Kugelkoordinaten

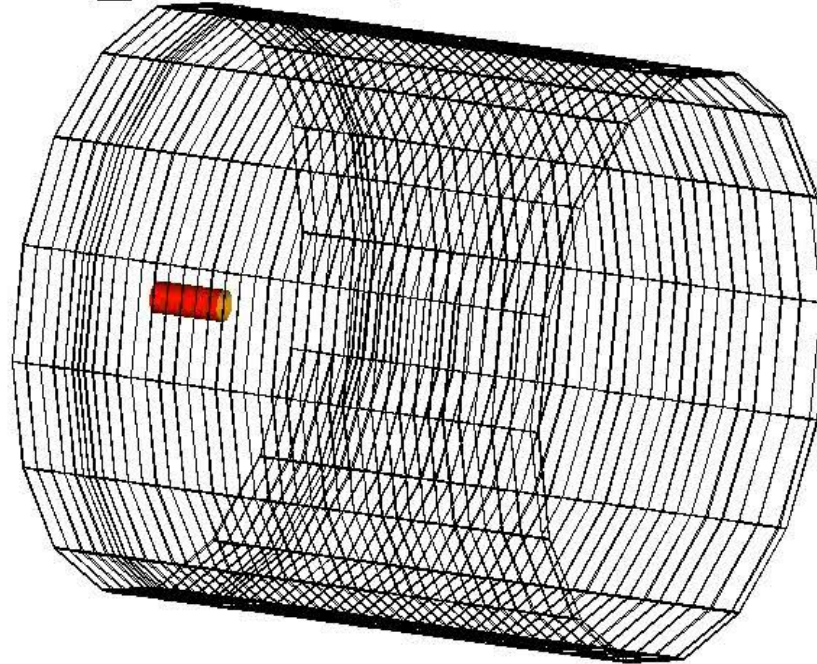


Freistrah
Wirbelstrukturen und akustische Wellen

Quelle: S. Bühler, IFD, ETH Zürich

Simulation of a jet-nozzle configuration

$Re_D = 18000$, $Ma=0.9$



Stefan Bühler and Leonhard Kleiser
Institute of Fluid Dynamics, ETH Zürich

$Re_D=18100$ (tech. relev. 10^7), $Ma=0.9$

Auflösung: 88 Mio. Zellen, 5 TB Daten

Rechenzeit: 20 Tage auf 2048 CPUs, Simulationszeit: 1-2 s

Übersicht

7 Systeme mit verteilten Parametern


7.3 Numerische Lösungsverfahren für PDGLen

7.3.3 Finite Differenzen


Finite Differenzen Verfahren

- Transportgleichungen haben alle die gleiche Struktur
- Hier: generische Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten
- nur im kartesischen Koordinatensystem betrachtet
- Partielle Ableitungen müssen für die Simulation „computerverständlich“ approximiert werden


$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + q_\phi$$




Instationärer
Term



Konvektions-
term



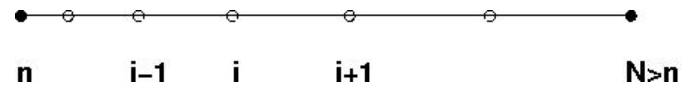
Diffusions-
Term



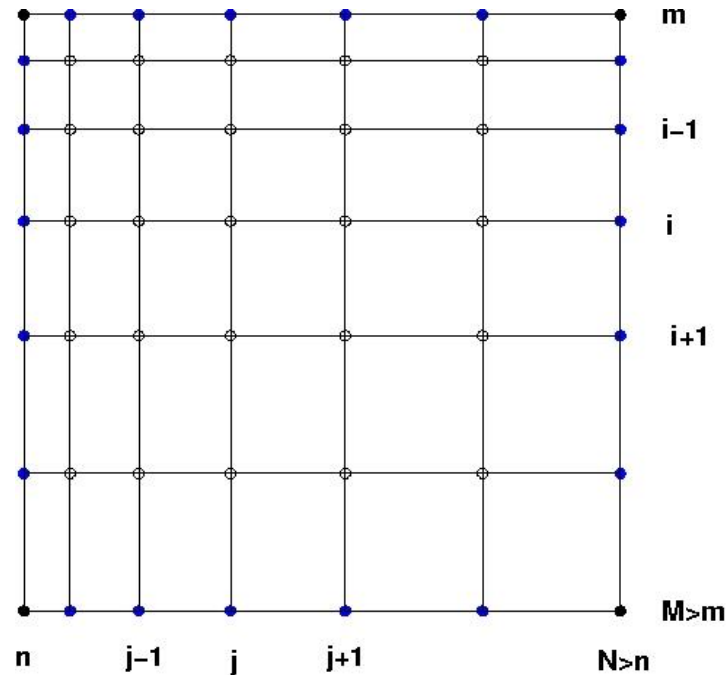
Quellterm

Finite Differenzen Verfahren

1-D



2-D



Die Simulation erfolgt diskret an Stützstellen auf einem Berechnungsnetz, da der Computer das Kontinuum nicht kennt.

Typisches Kartesische Gitter der Finite-Differenzen Methode für:

1-D (oben) und 2-D (darunter).

Finite Differenzen Verfahren

Die Berechnung der partiellen Ableitungen an einer Stützstelle (i) kann nur mit Hilfe der Informationen an den Nachbarstützstellen (i+1, i-1 usf.) berechnet werden.

Frage: **Wie konstruiert man sich ein passendes Berechnungsverfahren?**

- Zunächst: Entwicklung einer stetigen und differenzierbaren Funktion $\Phi(x)$ durch Werte an der Stelle x_i mittels einer Taylor-Reihe (H: Terme höherer Ordnung):

$$\phi(x) = \phi(x_i) + (x - x_i) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i + \dots + \frac{(x - x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} \right)_i + H$$

- Auflösen nach der gesuchten (z.B. ersten) Ableitung und Ersetzen von x durch einen der Nachbarknoten von x_i , z.B. x_{i+1} :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_i + H'$$

Finite Differenzen Verfahren

Die nicht verschwindenden partiellen Ableitungen höherer Ordnung (n) bestimmen die Ordnung (n-1) der Differenzenformel, denn diese Ableitungen sind nicht bekannt und können nicht bestimmt werden. Die vorige war daher von 1. Ordnung.

Durch geschickte Kombination mehrerer solcher Formeln für die Berechnung von

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i$$

wobei die Informationen mehrerer Stützstellen $n = \dots i-3, i-2, i-1, i+1, i+2, i+3 \dots$ etc. verwendet werden (nicht nur $i+1$), lassen sich Differenzenformeln höherer Ordnung konstruieren. Dabei wird ein Gleichungssystem aufgestellt und es werden die höherwertigen Ableitungen bis zur gewünschten Ordnung eliminiert.

Ordnung einer Formel \rightarrow qualitative Aussage zur Genauigkeit:

je niedriger die Ordnung der ersten (dominanten) nicht verschwindenden Ableitung, desto größer der zu erwartende Fehler und desto weniger stark nimmt der Fehler mit verfeinertem Netz ab.

FDM - Beispielformeln

Beispiel für einfache Differenzenformeln*:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \varepsilon$$

Rückwärtsdifferenz

(BDS: backward-difference scheme)

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} + \varepsilon$$

Vorwärtsdifferenz

(FDS: forward-difference scheme)

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \varepsilon$$

Zentraldifferenz

(CDS: central-difference scheme)

ε stellt den Abbruchfehler dar

* Herleitung: Saalübung zu FDM, Verwendung: Poolübung zu FDM

- Nächste Vorlesung:
 - Finite Differenzen Verfahren (Forts.)
 - Finite Volumen Verfahren