Modellbildung und Simulation

Prof. Dr.-Ing. K. Furmans
Prof. Dr.-Ing. M. Geimer
Dr.-Ing. B. Pritz
Prof. Dr.-Ing. C. Proppe

Übungsblatt Nr. 6

Thema: **Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen**

Numerische Integration des Anfangswertproblems

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0}$$

Diskretisierung des zeitkontinuierlichen Modells zu einem zeitdiskreten Modell mit

- explizitem Verfahren $\boxed{\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{g}(t_0, t_1, \dots, t_n)}$ vs. implizitem Verfahren $\boxed{\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{g}(t_0, t_1, \dots, t_{n+1})}$
- Einschrittverfahren $\boxed{\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{g}(t_n)}$ vs. Mehrschrittverfahren $\boxed{\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{g}(t_0, t_1, \dots, t_n)}$
- Schrittweite $\boxed{h = t_{n+1} - t_n}$
- Notation: $\boxed{\mathbf{x}(t_n) = \mathbf{x}_n, \quad \mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{x}_{n+1}}$

Integrationsverfahren

- Euler explizit $\boxed{\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t_n)}$ vs. implizit $\boxed{\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1})}$
- Prädiktor-Korrektor-Verfahren
  1. Verfahren von Heun (2. Ordnung)

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_n^{(1)} &= h\mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t_n) \\
\mathbf{k}_n^{(2)} &= h\mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_n^{(1)}, t_n + h) \\
\Longrightarrow \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{1}{2}\left(\mathbf{k}_n^{(1)} + \mathbf{k}_n^{(2)}\right)
\end{aligned}$$

  2. Runge-Kutta-Verfahren (4. Ordnung)

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_n^{(1)} &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_n, t_n\right) \\
\mathbf{k}_n^{(2)} &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_n^{(1)}/2, t_n + h/2\right) \\
\mathbf{k}_n^{(3)} &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_n^{(2)}/2, t_n + h/2\right) \\
\mathbf{k}_n^{(4)} &= h\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_n + \mathbf{k}_n^{(3)}, t_n + h\right) \\
\Longrightarrow \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{1}{6}\left(\mathbf{k}_n^{(1)} + 2\mathbf{k}_n^{(2)} + 2\mathbf{k}_n^{(3)} + \mathbf{k}_n^{(4)}\right)
\end{aligned}$$

Fehleranalyse und Schrittweitensteuerung

- lokaler Disrektisierungsfehler $l(h)$: Differenz zwischen exaktem und genähertem Differenzenquotienten
- globaler Diskretisierungsfehler $e(h)$: max. Fehler zwischen exakter Lösung und Näherung nach n Schritten
- Optimale Schrittweite mit vorgegebenem Fehler δ: $\boxed{h_{opt} = \left(\frac{2^p-1}{2^p}\frac{\delta}{\mathbf{x}_{n+1}-\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}}\right)^{\frac{1}{p}} h}$ mit Ordnung p (Euler $p=1$, Heun $p=2$, Runge-Kutta $p=4$)

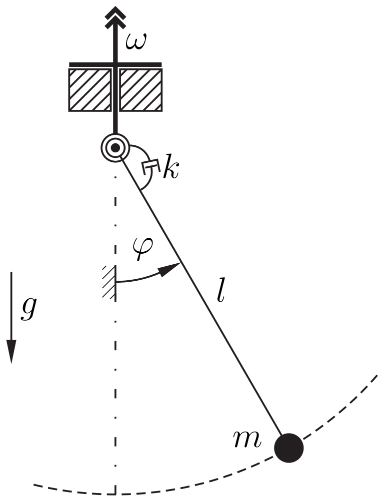
Aufgabe 1 – zu bearbeiten –

Matlabfile: Pendel_Bearbeitungsfile.m

Für das in der Abbildung gezeigte rotierende Pendel lässt sich die Bewegungsgleichung

$$ml^2\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + mgl\sin(\varphi) - ml^2\omega^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) = 0$$

herleiten. Die Anfangsbedingungen seien mit $\varphi(t=0) = \frac{\pi}{6}$ und $\dot{\varphi}(t=0) = 0$ gegeben. Die Lösung der Gleichung soll mit verschiedenen Integrationsverfahren gefunden werden.



Zur Vereinfachung soll die Dämpfung im Folgenden vernachlässigt werden: $k = 0$. Das Pendel wird in der Nähe der Ruhelage $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ untersucht.

1. Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung um die Ruhelage und bestimmen Sie die Systemmatrix.
2. Berechnen Sie analytisch (handschriftlich) die exakte Lösung des linearisierten Systems.

Für die Parameterwerte kann nun $l = 20\,\mathrm{cm}$, $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$ angenommen werden. Verwenden Sie außerdem $n_{max} = 10^4$ Diskretisierungsschritte.

3. Berechnen Sie die Lösung des linearisierten Systems mit dem expliziten Eulerverfahren.
4. Berechnen Sie die Lösung des linearisierten Systems mit dem impliziten Eulerverfahren.
5. Berechnen Sie die Lösung des linearisierten Systems mit dem Runga-Kutta-Verfahren.
6. Berechnen Sie den lokalen Diskretisierungsfehler $l(h)$ und den globalen Diskretisierungsfehler $e(h)$ für alle drei Integrationsverfahren.
7. Zeigen Sie den zeitlichen Verlauf von $\varphi(t)$ bzw. $\dot{\varphi}(t)$ für alle drei Integrationsverfahren sowie für die exakte Lösung graphisch auf. Ist es für alle Integrationsverfahren möglich, h so zu wählen, dass diese numerisch stabil sind? Wie muss h in diesem Fall gewählt werden? Zeichnen Sie für Ihren gewählten Wert von h den entsprechenden Punkt in das Schaubild der Stabilitätsgebiete ein. Achten Sie darauf, dass die Zeitschrittweite nicht unnötig klein gewählt wird, um Rechenzeit einzusparen.
8. Stellen Sie für Ihren Wert für h den lokalen und globalen Diskretisierungsfehler über der Zeit graphisch da.
9. Erhöhen Sie die Rotationsgeschwindigkeit auf $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ und simulieren Sie das Ergebnis erneut. Was passiert nun? Beziehen Sie sich auf die berechneten Eigenwerte in Aufgabe 2.

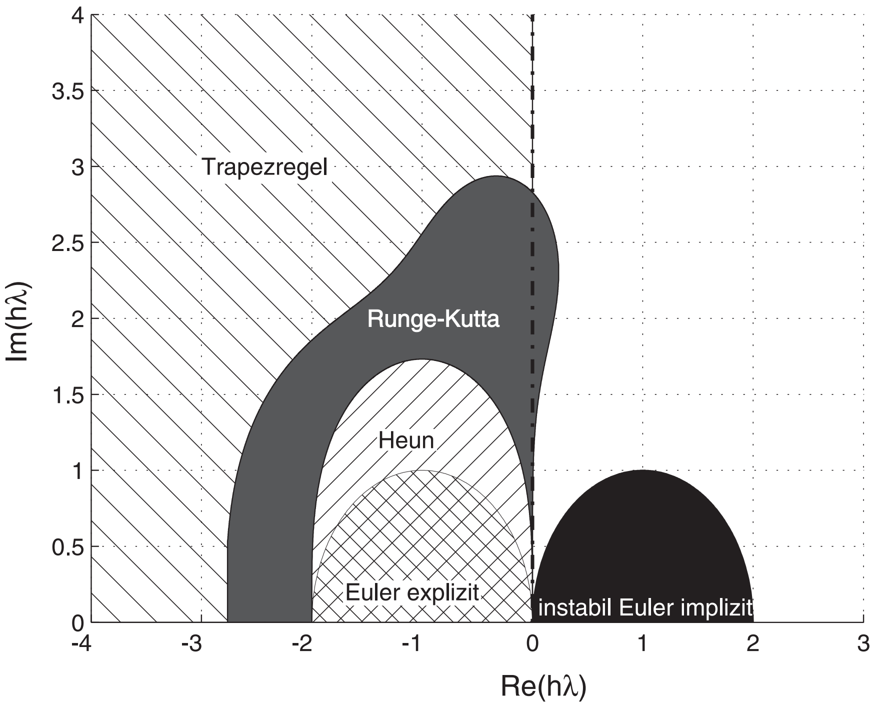


Abbildung 1: Stabilitätsgebiete der numerischen Integrationsverfahren

Zusatzaufgabe (freiwillig): Stellen Sie das Richtungsfeld des Systems graphisch dar (*MATLAB: quiver*) und plotten Sie die exakte und numerischen Lösungen. Bewerten Sie die Qualität der Integrationsverfahren für bestimmte Werte von h. Was passiert mit der exakten Lösung bei der modifizierten Rotationsgeschwindigkeit aus Aufgabe 9?