Modellbildung und Simulation

Prof. Dr.-Ing. K. Furmans
Prof. Dr.-Ing. M. Geimer
Dr.-Ing. B. Pritz
Prof. Dr.-Ing. C. Proppe

Übungsblatt Nr. 5

Thema: **Modellanalyse: gewöhnliche Differentialgleichungen**

Differentialgleichungen in

a) impliziter Darstellung $\boxed{f\left(y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n)}(t), t\right) = 0}$ + Abn.

b) expliziter Darstellung $\boxed{y^{(n)}(t) = f\left(y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), t\right)}$ + Abn.

können immer in ein System 1. Ordnung mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 = y(t) \\ x_2 = \dot{y}(t) \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ und dem Anfangswert $\mathbf{x}(t_0) = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})^T$ überführt werden.

Lineares System 1. Ordnung	**Nichtlineares System 1. Ordnung**
$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)} \quad (*)$	$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)\right)} \quad (**)$

Ruhelagen $\mathbf{x}_0$ berechnen aus

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}}$$

Linearisierung um die Ruhelage $\mathbf{x}_0$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{f}|_{\mathbf{x}_0} + \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{\mathbf{x}_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

liefert erneut System in der Form $(*)$.

Stabilität einer Ruhelage $\mathbf{x}_0$

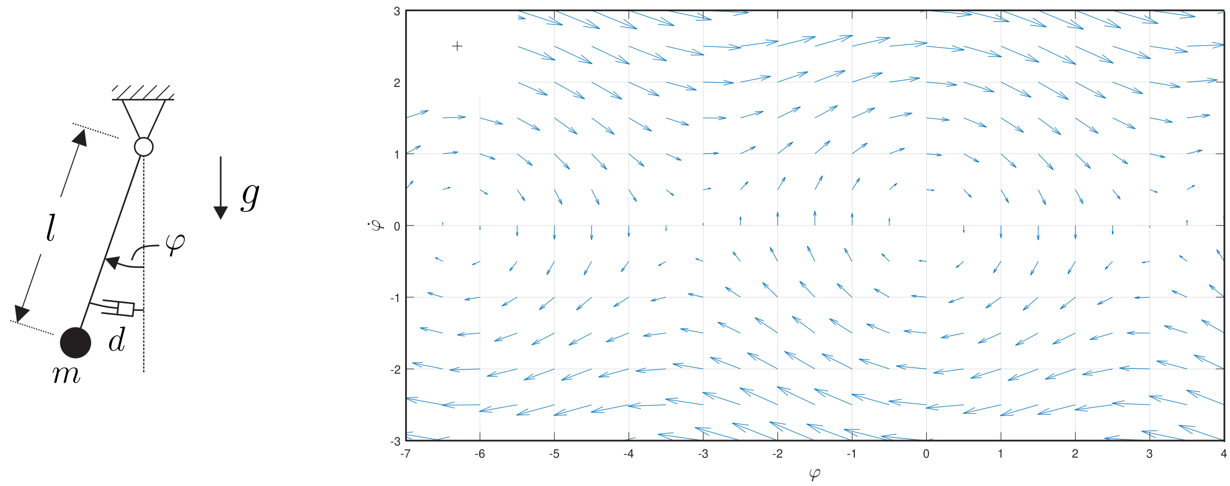
Eigenwertanalyse mit Ansatz $\mathbf{x} = \exp(\lambda t)\, \mathbf{r}$ liefert Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren $\mathbf{r}_i$

Lineares System	Nichtlineares System
Fall 1: alle $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$	
asymptotisch stabil	asymptotisch stabil
Fall 2: mind. ein $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$	
oder k-facher imag. EW mit $r < k$ unabh. EV instabil	instabil
Fall 3: größter $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$	
oder k-facher imag. EW mit k unabh. EV stabil	keine Aussage mit linearer Theorie möglich (*Satz von Hartmann-Grobmann*)

Das **Richtungsfeld** wird durch $(*)$ bzw. $(**)$ vorgegeben. Einsetzen von Werten $\mathbf{x}(t_m) = \begin{pmatrix} y(t_m) \\ \dot{y}(t_m) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_m) \end{pmatrix}$ liefert wegen Kenntnis von $\dot{\mathbf{x}}(t_m) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t_m)\right)$ Tangente an die Trajektorie. Damit ist das numerische Lösen des nichtlinearen (und auch linearen) Systems möglich (siehe Übungsblatt 6: *Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*).

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe soll das in Abbildung 1 (a) dargestellte Pendel auf sein Stabilitätsverhalten untersucht werden.



(a) Modell

(b) Richtungsfeld des Pendels

Abbildung 1: Pendel

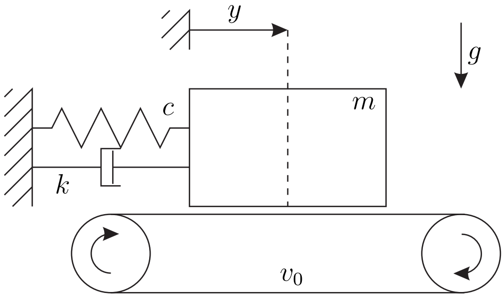
Die Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung von Dämpfung ergibt sich zu

$$\ddot{\varphi} + \frac{d}{m}\dot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

1. Bestimmen Sie einen geeigneten Zustandsvektor. Stellen Sie mit diesem ein System erster Ordnung auf.
2. Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems und geben Sie die physikalische Interpretation an.
3. Untersuchen Sie die Stabilität aller Ruhelagen.
4. Klassifizieren Sie das Stabilitätsverhalten der Ruhelagen des Systems. Führen Sie gegebenenfalls eine Fallunterscheidung durch.
5. In Abbildung 1 (b) ist das Richtungsfeld des Pendels bei einer bestimmten Wahl der Parameter ($\frac{d}{m} = 0.1$, $\frac{g}{m} = 1$) dargestellt. Kennzeichnen Sie alle im Richtungsfeld sichtbaren Ruhelagen des Systems. Klassifizieren Sie für diese das Stabilitätsverhalten.
6. Berechnen Sie den Vektor des Richtungsfelds an der Stelle ($\varphi = -2\pi, \dot{\varphi} = 2.5$) und zeichnen Sie diesen in Abbildung 1 (b) ein. Geben Sie die physikalische Interpretation des Punktes an.
7. Dieser Punkt soll nun als Anfangsbedingung des Systems verwendet werden. Zeichnen Sie ausgehend von diesem Punkt die Trajektorie in das Richtungsfeld.

Aufgabe 2

Im Folgenden soll der in der Abbildung gezeigte Einmassenreibschwinger auf sein Stabilitätsverhalten untersucht werden.



Dazu soll der Zustand des **Gleitens** ($\dot{y} - v_0 \neq 0$) untersucht werden. Während des Gleitens ergibt sich die Differentialgleichung

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + cy + \mu mg \operatorname{sgn}(\dot{y} - v_0) = 0$$

mit der Schaltfunktion

$$\operatorname{sgn}(\dot{y} - v_0) = \begin{cases} 1, & \text{for } \dot{y} - v_0 > 0 \\ -1, & \text{for } \dot{y} - v_0 < 0 \end{cases}.$$

Für die Parameter gilt $m, c, v_0, g, \mu > 0$.

1. Formen Sie die Differentialgleichung mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} y & \dot{y} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ in ein System erster Ordnung um.
2. Berechnen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_0$ des Systems.

Ab nun sei $\dot{y} < v_0$ stets erfüllt.

3. Bringen Sie das System durch die Einführung der neuen Koordinate $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ in die Form $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}$.
4. Berechnen Sie die Eigenwerte.
5. Welche Bedingung muss für den Parameter k gelten, sodass die Ruhelage asymptotisch stabil bzw. instabil ist? Was passiert für $k = 0$?
6. Skizzieren Sie das Richtungsfeld für $k < 0$, $k = 0$ und $k > 0$.

Aufgabe 3

Es wird ein Regelungssystem betrachtet, das durch die nachfolgenden Differentialgleichungen beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} - \Omega(\gamma_1 + \gamma_2) &= c_2\gamma_2 \\ \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \Omega\psi &= -c_1\gamma_2 \\ \dot{\gamma}_1 + \Omega\psi &= -k(\gamma_1 - \kappa),\end{aligned}$$

wobei $c_1, c_2, k, \Omega > 0$. Die Antriebskraft κ ist als konstant anzunehmen.

1. Formen Sie die Differentialgleichung mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \psi)^{\mathrm{T}}$ in ein System erster Ordnung um.
2. Berechnen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{x}_0$ des Systems.
3. Bestimmen Sie die Gleichung (*charakteristisches Polynom*), mit der die Eigenwerte bestimmt werden können.
4. Mithilfe des Kriteriums von Hurwitz ist es möglich, mit dem charakteristischen Polynom eine Aussage über die Stabilität zu treffen. Hat das Polynom die Form $p(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ (mit $a_3 > 0$), so lauten die Bedingungen für asymptotische Stabilität $a_2 > 0$, $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$, $a_0(a_1a_2 - a_0a_3) > 0$. Bestimmen Sie damit die Bedingungen für die Parameter, sodass asymptotische Stabilität vorliegt.
5. Wie unterscheidet sich das Richtungsfeld von den vorangegangenen Aufgaben dieser Übung? Bestimmen Sie den Vektor des Richtungsfelds an der Stelle $\mathbf{x} = (0 \quad 0 \quad 0)^{\mathrm{T}}$.

Lösung zu Aufgabe 1

1. Zustandsvektor: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

   $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{d}{m}x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1 \end{pmatrix}$

2. Gleichgewichtspunkte: $x_{10} = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}, \quad x_{20} = 0$
   k gerade: untere Ruhelage, k ungerade: obere Ruhelage

3. A) Linearisierung um $(0 \quad 0)^T$ (k gerade): $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

   $\Rightarrow \lambda = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 - \frac{g}{l}} \Rightarrow$ asympt. stabil ($\frac{d}{2m} > 0$, $\frac{g}{l} > 0$)

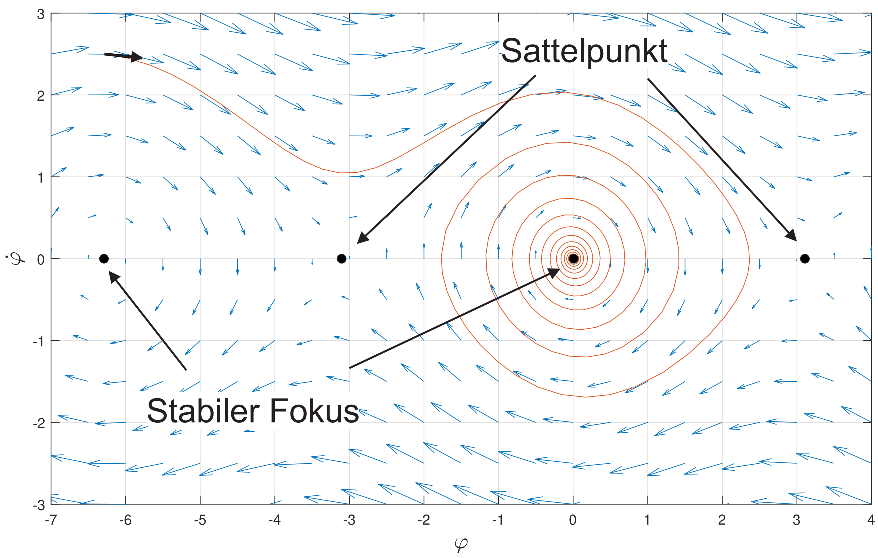
   B) Linearisierung um $(\pi \quad 0)^T$ (k ungerade): $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 \end{bmatrix}$

   $\Rightarrow \lambda = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 + \frac{g}{l}} \Rightarrow$ instabil, da $\frac{g}{l} > 0$ und damit positiver Realteil von λ.

4. A)
   - $\left(\frac{d}{2m}\right)^2 < \frac{g}{l} \Longrightarrow$ stabiler Fokus / Strudel, da λ imaginär
   - $\left(\frac{d}{2m}\right)^2 \geq \frac{g}{l} \Longrightarrow$ stabiler Knoten, da λ reell

   B) Sattelpunkt, da λ immer reell. Es existiert immer ein Eigenwert mit positivem und ein Eigenwert mit negativem Realteil.

5. Richtungsfeld



6. $\mathbf{f}((-2\pi \quad 2.5)^T) = (2.5 \quad -0.25)^T$
7. s. Abbildung

Lösung zu Aufgabe 2

1. Die umgeformte Differentialgleichung lautet:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 - \mu g \operatorname{sgn}(x_2 - v_0) \end{pmatrix}$$

2. Ruhelagen:

$$\dot{\mathbf{x}} \overset{!}{=} \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{x}_0 = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{\mu m g}{c} \\ 0 \end{pmatrix}, & v_0 > 0 \\ \begin{pmatrix} -\frac{\mu m g}{c} \\ 0 \end{pmatrix}, & v_0 < 0 \end{cases}$$

3. Umgeformtes System:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}$$

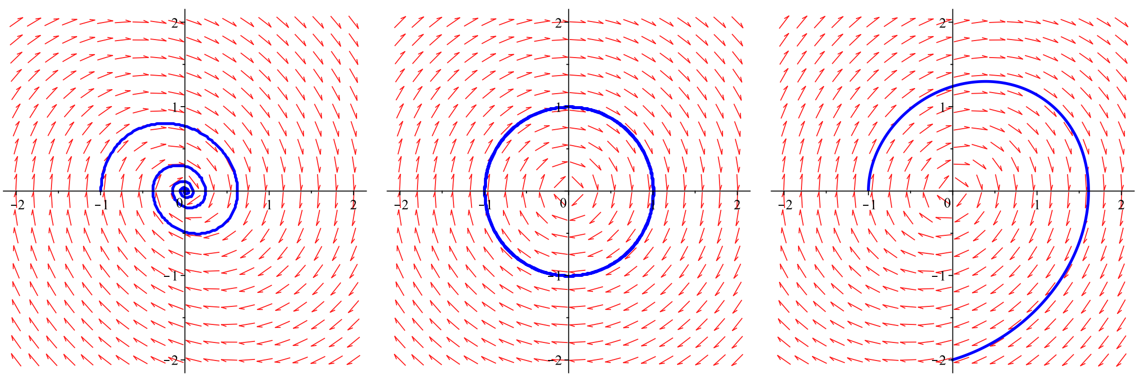
4. Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} =& \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \gamma} \\ \alpha =& -\frac{1}{2}\frac{k}{m} \\ \gamma =& \frac{c}{m} \end{aligned}$$

5. Stabilität:
   - $k > 0$ asymptotisch stabil $\rightarrow$ alle $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$
   - $k = 0$ stabil $\rightarrow$ größter $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$
   - $k < 0$ instabil $\rightarrow$ mindestens ein $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$

6. Richtungsfeld:

$k > 0$ $\qquad$ $k = 0$ $\qquad$ $k < 0$



Bemerkung: Für das Richtungsfeld wurde angenommen, dass $\gamma > \alpha^2$ gilt. Andernfalls wird der Strudel bzw. Fokus zu einem Knoten.

Lösung zu Aufgabe 3

1. System erster Ordnung durch Umformen: $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx_1 - \Omega x_3 + \kappa k \\ kx_1 + -c_1 x_2 - \kappa k \\ \Omega x_1 + (\Omega + c_2) x_2 \end{pmatrix}$

2. Mit $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$ ergibt sich: $\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa k(\Omega + c_2)}{c_1\Omega + k\Omega + kc_2} \\ -\frac{\kappa k\Omega}{c_1\Omega + k\Omega + kc_2} \\ \frac{\kappa k c_1}{c_1\Omega + k\Omega + kc_2} \end{pmatrix}$

3. Bei der Linearisierung um die Ruhelage $\mathbf{x}_0$ ergibt sich

$$\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}\right|_{\mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} -k & 0 & -\Omega \\ k & -c_1 & 0 \\ \Omega & \Omega + c_2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Das charakteristische Polynom ergibt sich mit $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \stackrel{!}{=} 0$ zu
   $p(\lambda) = \lambda^3 + (k + c_1)\lambda^2 + (c_1 k + \Omega^2)\lambda + \Omega(k\Omega + kc_2 + c_1\Omega)$.
   Die Nullstellen des Polynoms entsprechen den Eigenwerten λ_i.

4. Mit dem Kriterium von Hurwitz muss für asymptotische Stabilität gelten: $c_1(k + c_1) > c_2\Omega$, gegeben, dass alle Parameter gemäß Aufgabenstellung positiv sind.

5. Das Richtungsfeld befindet sich nun im dreidimensionalen Zustandsraum.

   An der Stelle $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich der Vektor zu $\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \kappa k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.