Modellbildung und Simulation

Zeitkontinuierliche Modelle mit konzentrierten Parametern

INSTITUT FÜR TECHNISCHE MECHANIK / BEREICH DYNAMIK UND MECHATRONIK

Umfang und Ablauf einer Simulationsstudie

- Ablauf einer Simulationsstudie

Problemspezifikation	Aufgabenstellung, Qualitätskriterien Ergebnisse, Zeit- und Kostenrahmen
Modellbildung	Idealisierungen, Naturgesetze
Mathematisches Modell	algebraische Gleichungen, Dgln.
Modellanalyse	z.B. Lösungen, Eigenfrequenzen,…
Simulationsverfahren	Algorithmen
Simulator	Hardware + Software
Simulationsergebnis, Beurteilung	z.B. Zeitverläufe, Animationen

Lernziele der heutigen Vorlesung

- Die Studierenden
  - kennen Darstellungsformen für gewöhnliche Differentialgleichungen,
  - kennen Untersuchungsmethoden zur Bestimmung des Lösungsverhaltens in der Umgebung eines Gleichgewichtspunktes,
  - können das Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung skizzieren,
  - können Gleichgewichtspunkte der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung auffinden und deren Stabilitätseigenschaften charakterisieren.

Modelleigenschaften und Modellanalyse

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen
2. Richtungsfeld
3. Gleichgewichtswert und Linearisierung
4. Stabilität
5. Phasenportraits

Institut für Technische Mechanik
Abteilung Dynamik / Mechatronik

1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Gewöhnliche Differentialgleichung

$$\Phi\left(t, y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right) = 0$$

- Differentialgleichungen *n*-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

- Systeme erster Ordnung

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y^{(1)} \\ &\vdots \\ y_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}\right.$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \ldots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \ldots. \\ f\left(t, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\right) \end{pmatrix}$$

1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Differentialgleichungs-Systeme erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots \\ f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

- Vektorschreibweise

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1(t, \boldsymbol{y}) \\ f_2(t, \boldsymbol{y}) \\ \dots\dots \\ f_n(t, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$$

1.2 Autonome Differentialgleichungssysteme

- Autonomes System:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{y}\right) \\ \boldsymbol{y}\left(t_0\right) = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{0}} = \left(y_1\left(t_0\right), \ldots, y_n\left(t_0\right)\right)^T \end{cases}$$

- Autonomisierung:

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{y}\right), \quad y_0(t) = t \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{y}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f_1\left(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \\ \cdots \\ f_{n-1}\left(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \\ f_n\left(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{f}}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}\right) \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{y}}} = \tilde{\boldsymbol{f}}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}\right)$$

1.2 Autonome Differentialgleichungssysteme

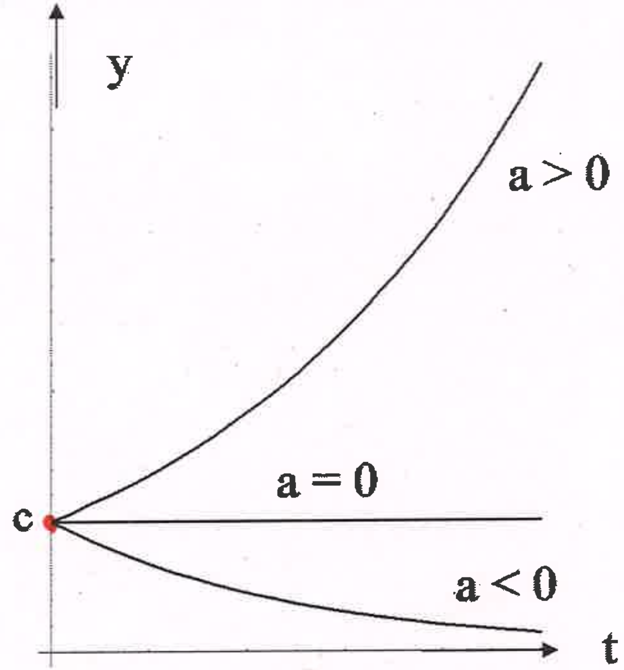
Beispiel: Wachstumsmodell, Änderungsgeschwindigkeit proportional zur Variable

$$\dot{y}(t) = a\, y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a\, y(t) \iff \int \frac{dy}{y} = \int a\, dt$$

Bsp: radioaktiver Zerfall $a < 0$,
Kettenreaktionen $a > 0$.

Die Abbildung zeigt einige Lösungen
für den Anfangswert $y(0) = c$
und verschiedene Werte des Parameters a



$$y(t) = c\, e^{a t}$$

Lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \mathbf{A}(t)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(t)$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Ist $\mathbf{A}$ ***eine konstante Matrix***, so spricht man von einem ***System mit konstanten Koeffizienten***

2. Richtungsfeld

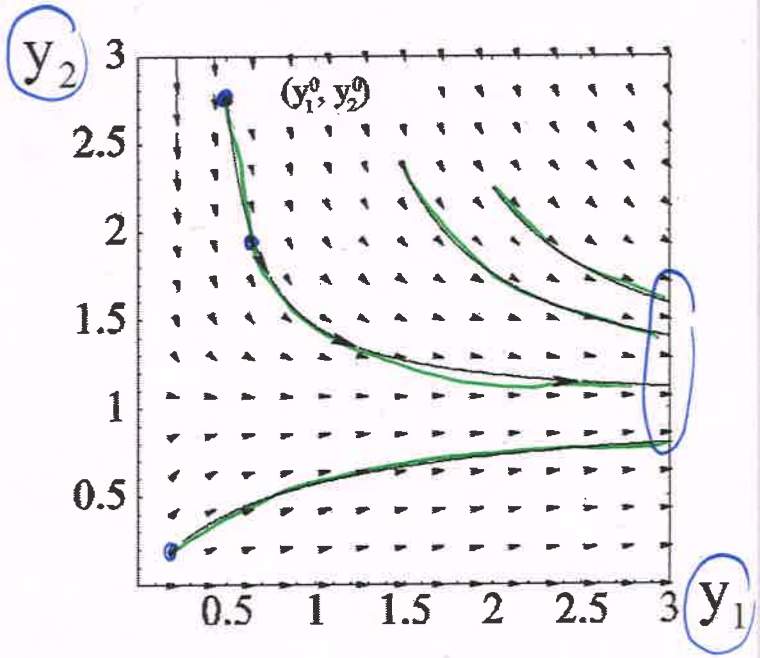
Das Richtungsfeld einer Differentialgleichung: $\dot{y} = f(y)$

Beispiel (2D-System):

$\dot{y} = f(t,y)$

$$\begin{cases} \boxed{\dot{y} = y(1-y)/t} \\ y(t_0) = y^0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad \boxed{y_1 = t,\, y_2 = y}:$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_2(1-y_2)/y_1 \end{pmatrix}$$



Aus dem Richtungsfeld lässt sich das qualitative Verhalten von Lösungen unmittelbar erkennen.

3. Gleichgewichtswert und Linearisierung

Ein singulärer Punkt oder Gleichgewichtspunkt ist definiert durch

$$y_s: \quad f(y_s) = 0$$

Bsp 1: $\dot{y} = f(y) = Ay + c,$

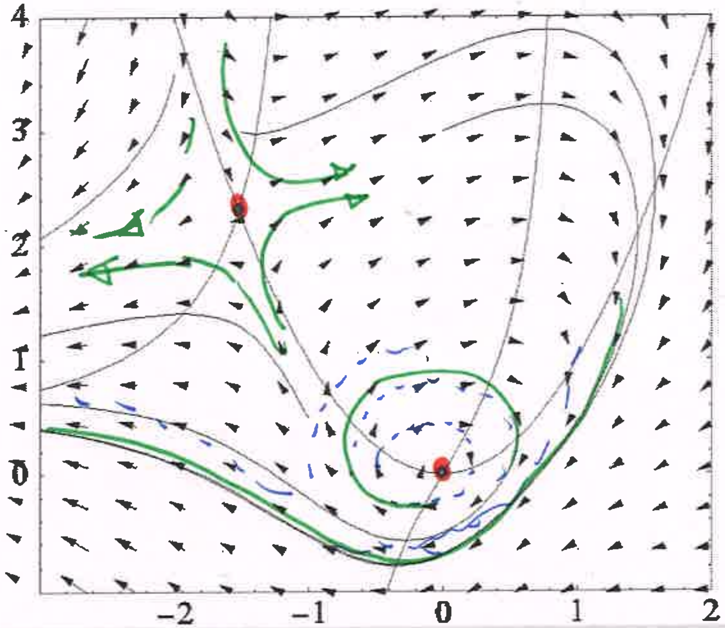
$$f(y_s) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ay_s + c = 0$$

$$\Rightarrow y_s = -A^{-1}c, \quad (\det(A) \neq 0)$$

Bsp 2:
$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 - y_1^2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \frac{1}{2}(1-y_1^2)y_2 \end{aligned}\right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bedingung für singuläre Punkte:
$$y_2 - y_1^2 = 0$$
$$-y_1 + \frac{1}{2}(1-y_1^2)y_2 = 0$$

Lösung:
$$\boxed{(y_1, y_2) = (0,0)}$$
$$(y_1, y_2) = \boxed{(-1.52, 2.31)}$$



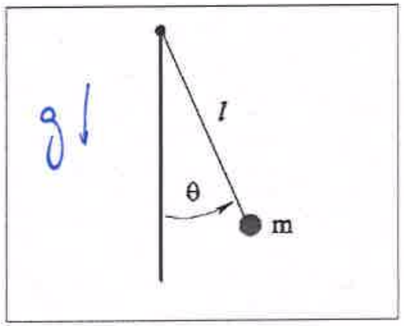
3. Gleichgewichtswert und Linearisierung

Pendel

Reibbeiwert k

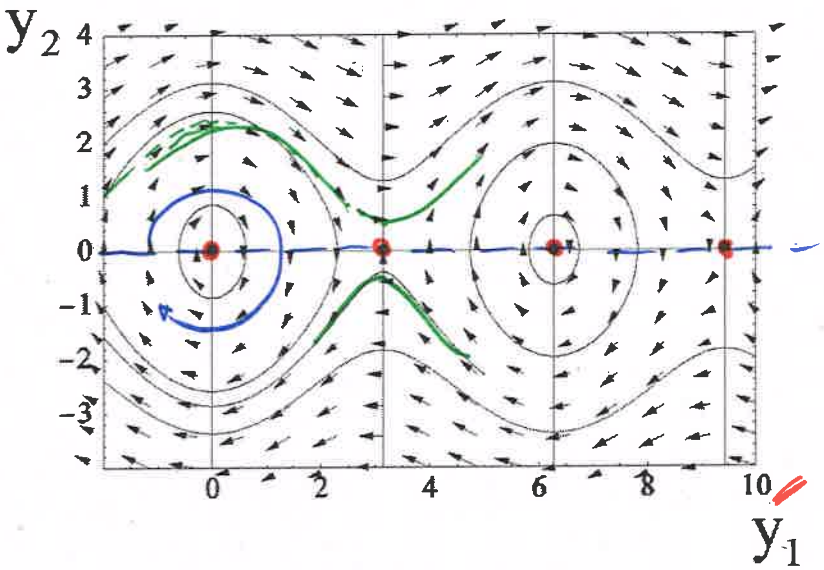
$$ml^2\ddot{\theta}+k\dot{\theta}+mgl\sin(\theta)=0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y_1&=\theta \\ y_2&=\dot{\theta}\end{aligned}}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin(y_1)-\cancel{\dfrac{k}{ml^2}}\,y_2 \end{cases} \quad =0$$



Ideales Pendel $\boxed{k=0}$

$$\boxed{\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin(\theta)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 = 0 \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin(y_1) \end{cases}$$



Energie

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl(1-\cos(\theta))$$

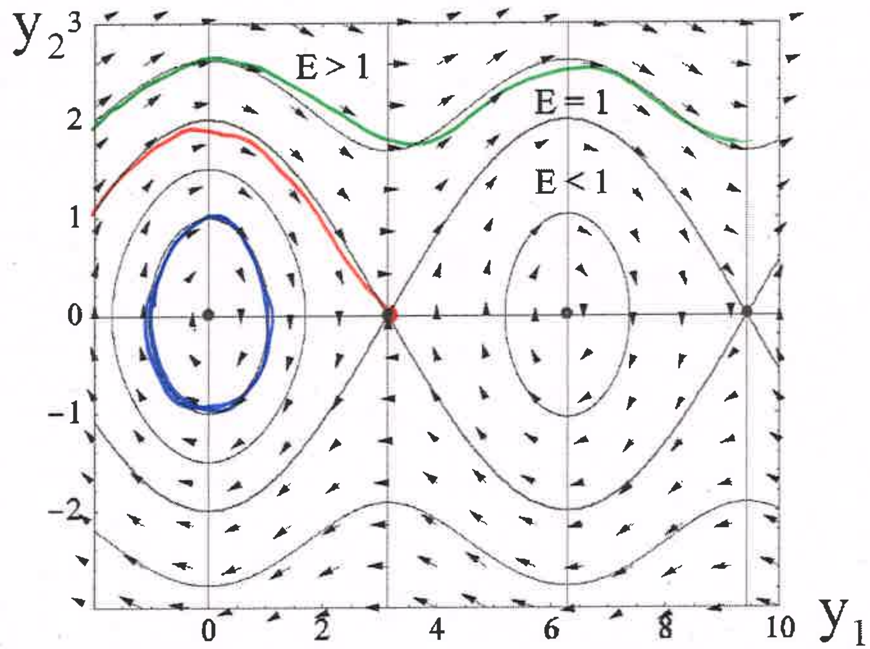
3. Gleichgewichtswert und Linearisierung

(i) Für E < 2mgl sind die Lösungen periodisch.

(ii) Für E > 2mgl wird die Geschwindigkeit nie null.
Das Pendel schwingt über.

(iii) Im Grenzfall E = 2mgl (rote Kurven) nähert sich das Pendel dem instabilen höchsten Punkt, ohne ihn jedoch in endlicher Zeit zu erreichen.

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos(\theta))$$



Singuläre Punkte:

$$y_1 = \pi\, j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots..$$

$$y_2 = 0$$

4. Stabilität

Linearisierung

$\left.\frac{d\vec{y}}{dt}\right|_{y_s} = \vec{f}(y_s) = \vec{0}$

$$\frac{d(\overbrace{y-y_s}^{\vec{\eta}})}{dt} = \boxed{\frac{dy}{dt}} \approx \underbrace{f(y_s)}_{=\vec{0}} + \left. f_y \right|_{y=y_s} (y-y_s) \quad \Rightarrow$$

$$\eta = (y - y_s)$$

$$f(y_s) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\eta}{dt} \approx \mathbf{J}\,\vec{\eta}} \quad \sim \; G\,\exp(\underset{\mathbf{J}}{a}t)$$

Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \left. f_y \right|_{y=y_s} = \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \right|_{y=y_s}$$

Lösung $\quad \eta = \vec{\eta}_0 e^{\mathbf{J}t}$

$$\exp(\mathbf{J}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{J}^k t^k}{k!}$$

$$J^k = \underbrace{J \ldots J}_{k\text{-mal}}$$

Linearisiertes System

- stabil, wenn $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{\eta}(t)\right\| = \lim\limits_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{\eta}_0 e^{\mathbf{J}t}\right\| = 0$

für alle Anfangswerte $\boldsymbol{\eta}_0$,

- neutral stabil, wenn Lösungen $\boldsymbol{\eta}(t)$ für alle $t>0$ beschränkt bleiben und es Startwerte $\boldsymbol{\eta}_0$ gibt, für die $\boldsymbol{\eta}(t)$ nicht gegen 0 konvergiert,

- instabil, wenn $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{\eta}(t)\right\| \to \infty$

für einen Anfangswert $\boldsymbol{\eta}_0$.

4. Stabilität

$$\exp(Jt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Q^{-1}\Lambda Q)^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^{-1}\Lambda^k Q\, t^k}{k!}$$

- Stabilität lässt sich mit Hilfe der Eigenwerte λ von J charakterisieren. Notwendig und hinreichend ist, dass für alle Eigenwerte $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ ist.

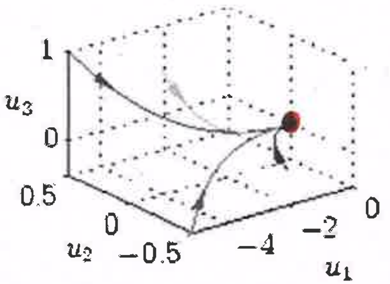
$$J = Q^{-1}\Lambda Q$$

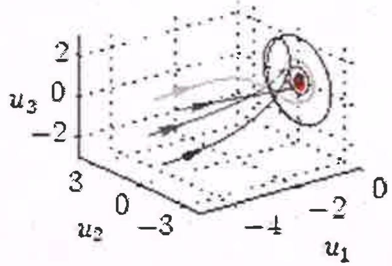
$$\eta(t) = \eta_0 e^{\mathbf{J}t} = \mathbf{Q}^{-1}\,\eta_0 e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \dots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} t}\,\mathbf{Q}$$

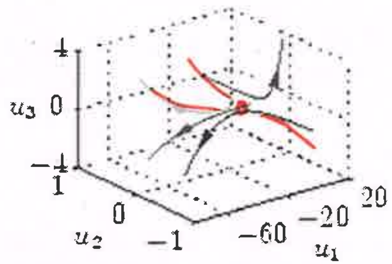
$$(Q^{-1}\Lambda Q)^k = Q^{-1}\Lambda \underbrace{Q Q^{-1}}_{I} \Lambda Q \dots Q^{-1}\Lambda Q = Q^{-1}\underbrace{\Lambda \dots \Lambda}_{k} Q = Q^{-1}\Lambda^k Q$$

- Beispiele für Stabilität, neutrale Stabilität und Instabilität: $\dot{\eta} = \mathbf{J}\,\eta$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda = (-1, i, -i) \\ \mathrm{Re}(\lambda) \le 0 \end{matrix} \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$



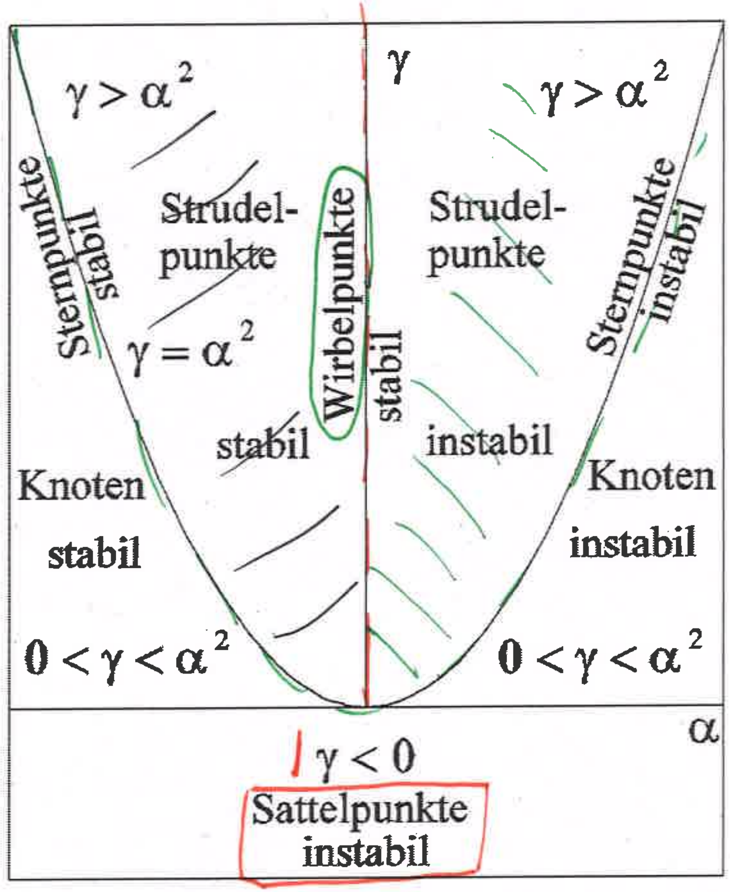




5. Phasenportraits linearer Systeme

Stabilitätskarte für lineare autonome DGL-Systeme im R^2

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \gamma &= \det(\mathbf{J}) = j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21} \\ \alpha &= \frac{1}{2}Spur(\mathbf{J}) = \frac{1}{2}(j_{11} + j_{22}) \end{aligned}$$

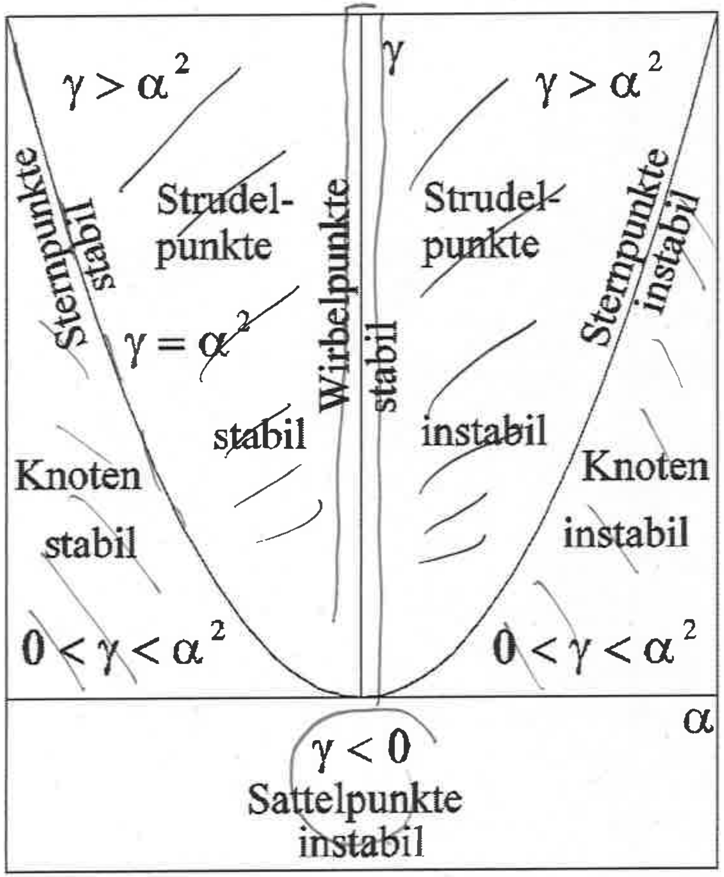


Eigenwerte

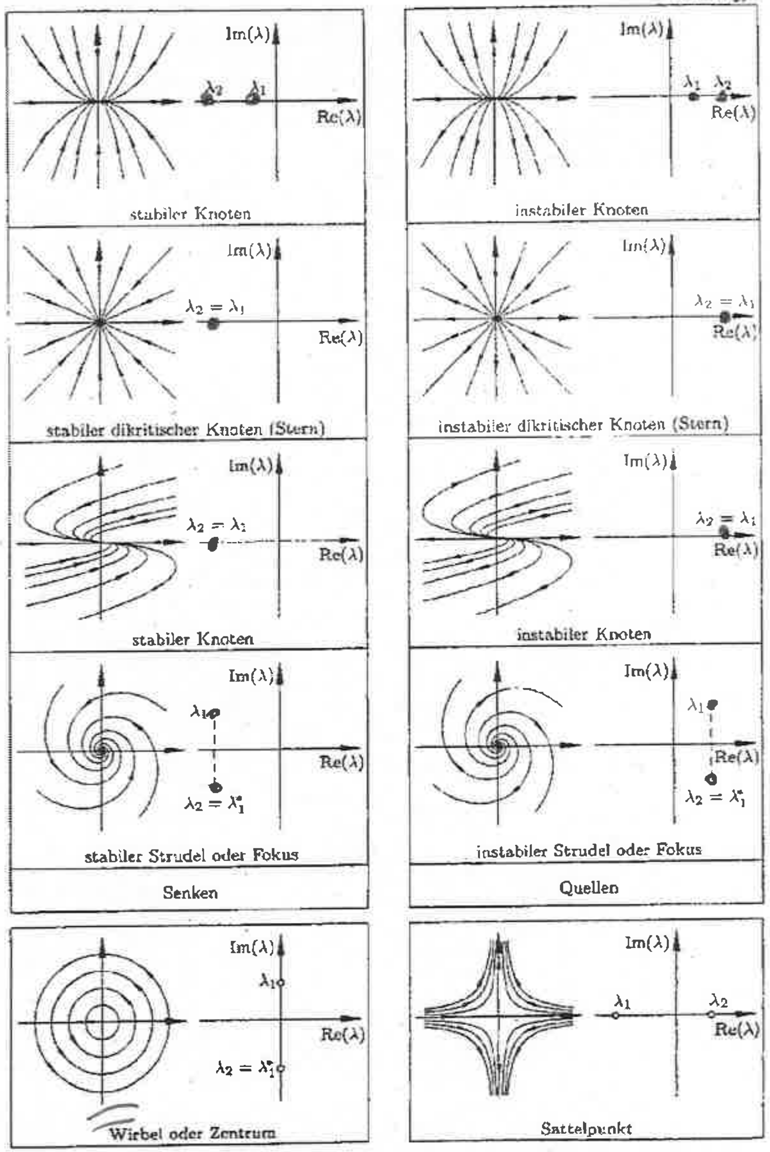
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \gamma} \\ \lambda_2 &= \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \gamma} \end{aligned}$$

5. Phasenportraits linearer Systeme

$$\lambda_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \gamma}$$
$$\lambda_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \gamma}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ausblick

- Nächste Vorlesung:
  - Simulation: Wie können Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen numerisch gelöst werden?

- Nächste Übung:
  - Richtungsfeld, Stabilitätsuntersuchungen für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen (Saal)

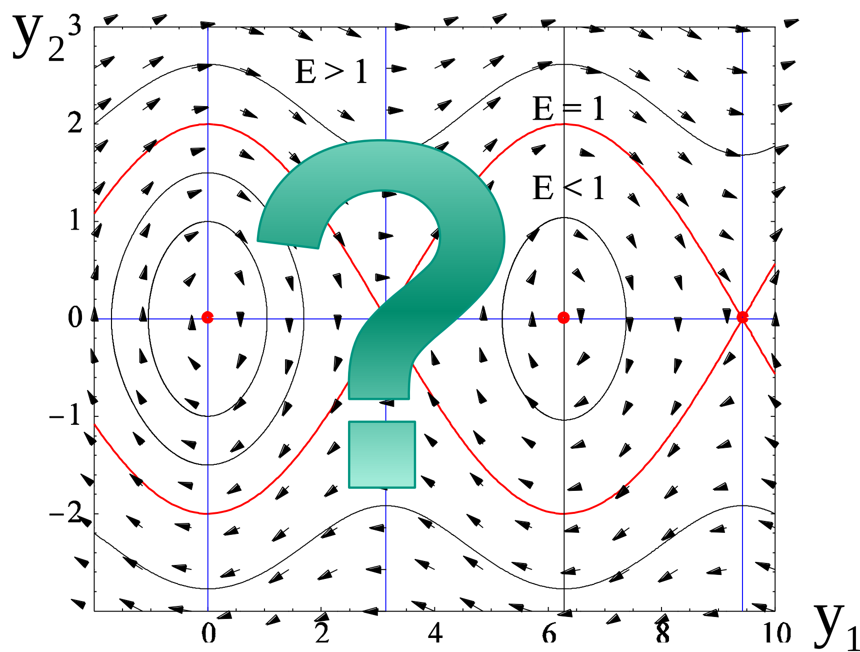
Problem der Woche

Wie ändern sich Richtungsfeld und Phasenportrait der Schwingungsdifferentialgleichung, wenn Dämpfung vorliegt?

$$\mathrm{k} \neq 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= \theta \\ y_2 &= \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin(y_1) - \dfrac{k}{ml^2} y_2 \end{cases}$$



Institut für Technische Mechanik
Abteilung Dynamik / Mechatronik

Problem der Woche

$$k \neq 0$$

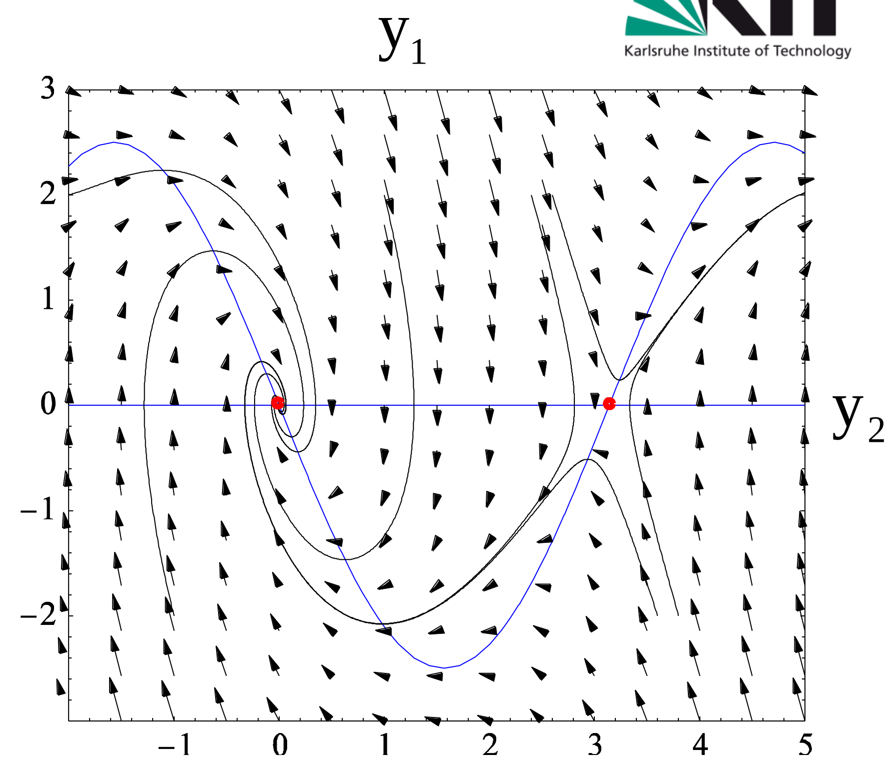
$$ml^2\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= \theta \\ y_2 &= \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin(y_1) - \dfrac{k}{ml^2}y_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l}\cos(y_1) & -\dfrac{k}{ml^2} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2}Spur(\mathbf{J}) = -\frac{k}{2ml^2}$$

$$\gamma = \det(\mathbf{J}) = \frac{g}{l}\cos(y_1)$$



An den kritischen Punkten mit $y_1 = 2j\pi,\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist $\gamma > 0$ und somit sind diese Punkte stabil.

Entsprechend ist für $y_1 = (2j+1)\pi$ die Determinante negativ, was Instabilität impliziert.

Problem der Woche

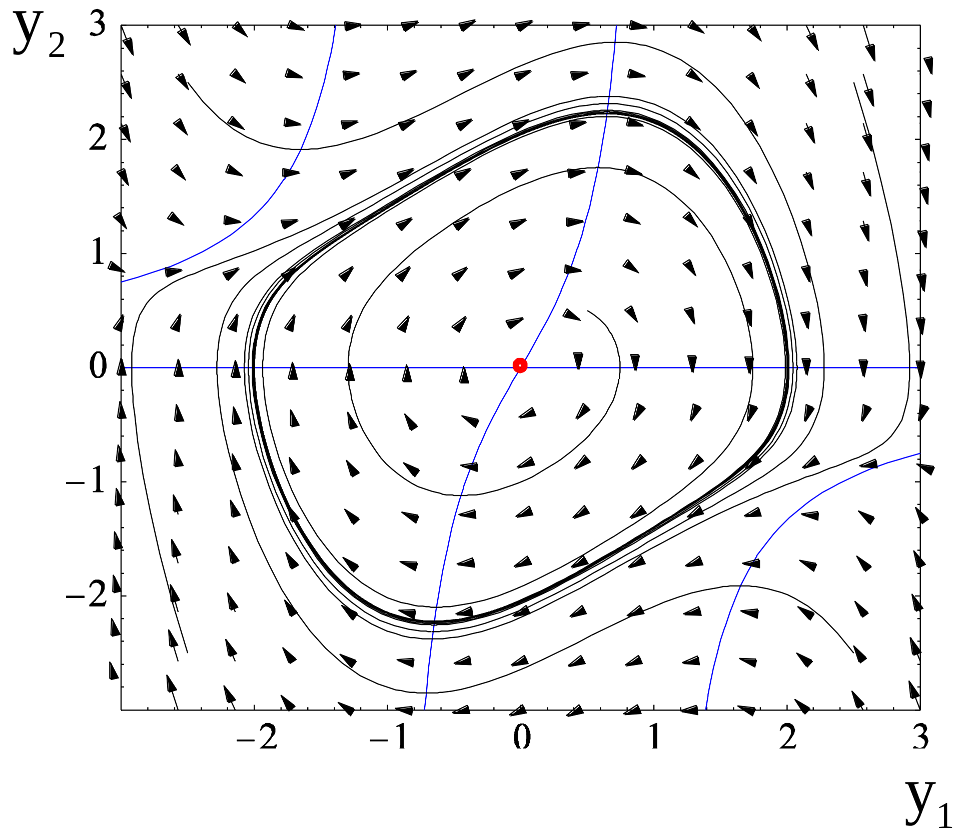
Van der Pol Oszillator

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 + \frac{1}{2}\left(1 - y_1^2\right) y_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - y_1 y_2 & \frac{1}{2}\left(1\text{-}y_1^2\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{1}{4}\left(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{15}\right)$$

$$\mathrm{Re}(\lambda) > 0$$



Es tritt ein instabiler Strudel auf. Zusätzlich liegt ein Grenzzyklus vor.