Klausurvorbereitung II

Thema: **Modelle mit verteilten Parametern**

Aufgabe 1: Methode der gewichteten Residuen

Es soll die Methode der gewichteten Residuen untersucht werden. Folgende Differentialgleichung sei gegeben:

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + u = 1 \quad \text{gültig im Bereich} \quad 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

mit den Randbedingungen $u(x = 0) = 1$ und $u(x = 1) = 0$. Für dieses Problem existiert die exakte Lösung:

$$u(x) = 1 - \frac{sin(x)}{sin(1)}. \tag{2}$$

Die folgende Gleichung soll als Ansatz für eine Näherungslösung untersucht werden:

$$\tilde{u}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{2} a_i x^i. \tag{3}$$

Der Ansatz erfüllt automatisch die Randbedingungen.

a) Bestimmen Sie das Residuum $r(x)$ in Funktion von a_2 unter Verwendung der Näherungslösung $\tilde{u}$!

Aus $u(1) = 0 : a_1 = -(1 + a_2)$
$r(x) = \frac{d^2 \tilde{u}}{d x^2} + \tilde{u} - 1 = 2a_2 - (1 + a_2)x + a_2x^2 =$
$-x + a_2(x^2 - x + 2)$

b) Bestimmen Sie die Konstante a_2 mit Hilfe der Subdomain-Methode für das Subdomain $D_1 = 0 \le x \le 1$!

$W = \int_{unten}^{oben} w_i(x)r(x)dx = 0$
Subdomain-Methode: $w_i(x) = 1$
$W = \int_{unten}^{oben} 1 \cdot r(x)dx = 0$
für $x = [0, 1]$:
$W = \int_0^1 r(x)dx = 0$
$\int_0^1 (2a_2 - (1 + a_2)x + a_2x^2)dx = 0$
$[2a_2x - (1 + a_2)\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3}]_0^1 = 0$
$2a_2 - \frac{1+a_2}{2} + \frac{a_2}{3} = 0$

$a_2 = \frac{3}{11} = 0,\overline{27}$

c) Bestimmen Sie die Konstante a_2 mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate!

$W = \int_{unten}^{oben} w_i(x) r(x) dx = 0$
Methode der kleinsten Quadrate: $w_i = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial a_i}$
$w_2 = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial a_2} = \frac{\partial(-x + a_2(x^2 - x + 2))}{\partial a_2} = x^2 - x + 2$
$W = \int_0^1 (x^2 - x + 2)(-x + a_2(x^2 - x + 2)) dx = 0$
$a_2 \frac{101}{30} - \frac{11}{12} = 0$
$a_2 = \frac{30}{101} \cdot \frac{11}{12} = \frac{55}{202} = 0,27\overline{2277}$

d) Welche Methode liegt näher zu der exakten Lösung an der Stelle $x = 0,5$?

Exakte Lösung:
$u(0,5) = 1 - \frac{sin(0,5)}{sin(1)} = 0,43025$

Subdomain-Methode:
$a_1 = -(1 + \frac{3}{11}) = -\frac{14}{11} = -1,\overline{27}$
$\tilde{u}(0,5) = 1 - \frac{14}{11} \cdot 0,5 + \frac{3}{11} \cdot 0,5^2 = 0,43\overline{18}$
$\|u(0,5) - \tilde{u}(0,5)\| = 0,0015651$

Methode der kleinsten Quadrate:
$a_1 = -(1 + \frac{55}{202}) = -\frac{257}{202} = -1,27\overline{2277}$
$\tilde{u}(0,5) = 1 - \frac{257}{202} \cdot 0,5 + \frac{55}{202} \cdot 0,5^2 = 0,43193069$
$\|u(0,5) - \tilde{u}(0,5)\| = 0,0016777$

Die Subdomain-Methode liegt zwar zu der exakten Lösung an der Stelle $x = 0,5$ näher, liefern aber beide Methoden ähnlich gute Ergebnisse.

Aufgabe 2: Theoriefragen

1. Nennen Sie ein Beispiel, warum Modellierung mit verteilten Parametern in der Festkörpermechanik notwendig sein könnte!

   S. Folien 8-6, 8-11

2. In welcher Betrachtungs- bzw. Schreibweise werden die Erhaltungssätze für die Festkörpermechanik formuliert?

   S. Folien 7-36, 7-37

3. Welche Vereinfachungen sind bei einer langsamen Wasserströmung durch eine achsensymmetrische Düse möglich?

   1)

   2)

   S. Folien 8-22, 8-31

4. Warum muss man den Charakter der Differentialgleichung kennen?

   S. Folie 8-16

5. Skizieren Sie in den angegeben Bereichen ein strukturiertes und ein unstrukturiertes Gitter!

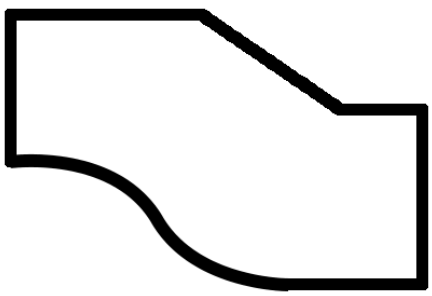
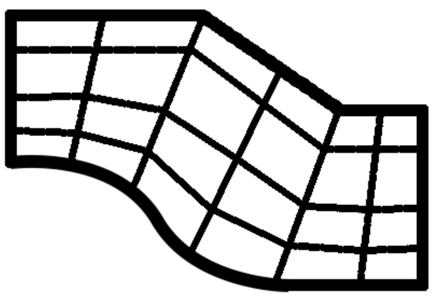


Abbildung 1: a) strukturierte und b) unstrukturierte Vernetzung

S. Folien 9-14, 9-15, 9-16



6. Wie kann man den Abbruchfehler verkleinern?

   1)

   2)

   S. Folien 10-4, 10-5

7. Was für ein Netz ist notwendig, damit der Zentraldifferenz-Ansatz die Genauigkeit von 2. Ordnung beibehält?

   S. Folie 10-4: bei äquidistantem Netz $r_e = 1$

8. Was ist die numerische Diffusion?

   S. Folie 10-14

9. Bei welchem Fall handelt es sich um eine Dirichlet-Randbedingung?
   a) Bei Vorgabe der Temperatur?
   b) Bei Vorgabe des Wärmeflußes?

   S. Folie 10-7 und für Wärmefluß Folie 7-42

10. Was muss man bei der Randbedingung einer adiabaten Wand für die FVM vorgeben?

    S. Folie 10-17

11. Nennen Sie zwei Gründe, warum iterative Methoden in CFD verwendet werden!

    S. Folie 11-16