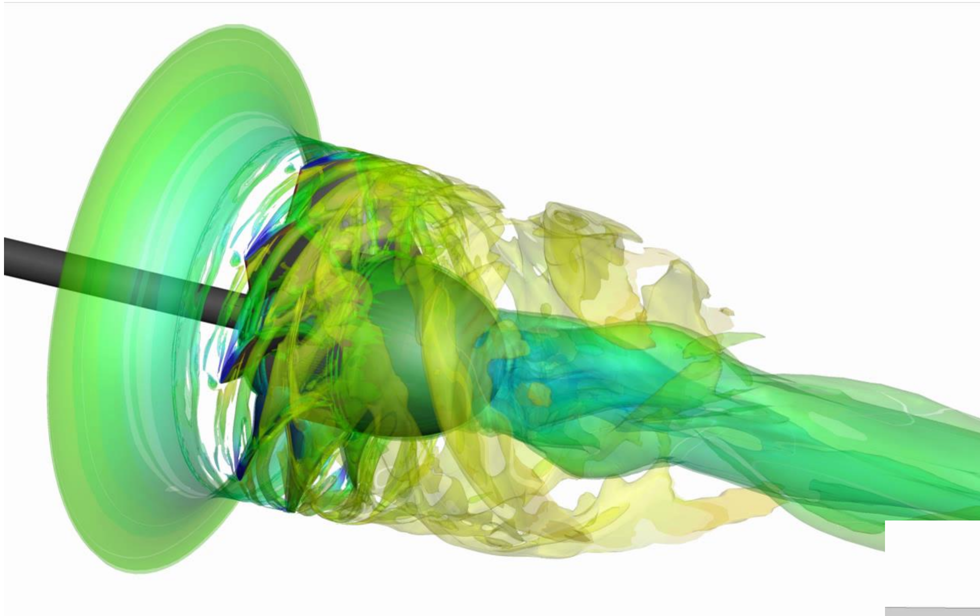
Modellbildung und Simulation
Kapitel 7: Systeme mit verteilten Parametern

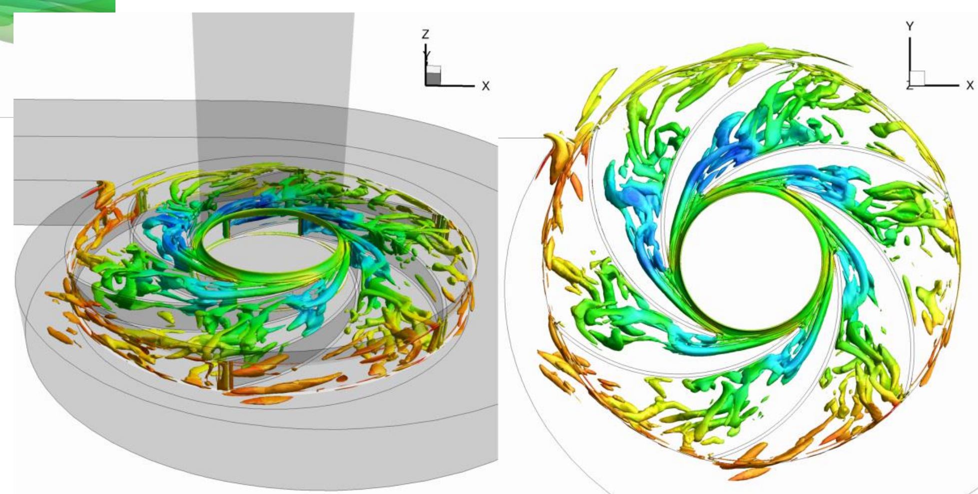
Balázs Pritz
pritz@kit.edu

Institut für Thermische Strömungsmaschinen
Prof. Dr.-Ing. Hans-Jörg Bauer

Quelle: Xflow Product Sheet – www.xflowcfd.com

- Beispiel: Axialventilator bzw. Radialventilator






skysport.com
en.espnf1.com
newmotoring.com
ar15.com
thestar.com.my

XFlow – Aerodynamic simulation of a Formula One

“This video shows a volumetric rendering of the vorticity field on a Formula 1.”

Eyecatcher / Eye Candy

CFD – Computational Fluid Dynamics   or   Colors For Directors?!

Ziele für Kapitel 7

- Die Studierenden
  - können Modelle mit verteilten Parametern aufstellen.
  - kennen Modelle verschiedener Komplexität.
  - kennen die Grundlagen der modernen Simulationstechniken.

Motivation

“Computational Fluid Dynamics (CFD) is about solving difficult engineering problems, using expensive software, enormous computing resources, and highly trained engineers. If the problems weren’t difficult, then it is doubtful that anyone would devote so much time and money to solving them. […]”
Bill Clark, executive vice president of CD-adapco
http://www.scientific-computing.com/features/feature.php?feature_id=306

“[…] Computer simulation and analysis software-techniques such as computational fluid dynamics (CFD) and finite element analysis (FEA) - are being used more than ever in the automotive sector. […] although companies are looking carefully at licence usage, automotive firms are not scaling back on computer-aided engineering. Instead, they are using analysis software more. […]“
Ben Sampson: Growth industry; Professional Engineering Magazine, 4/29/2009, Vol. 22 Issue 8, p35-36

Motivation

Industrie 4.0

KI
Künstliche Intelligenz

CAE

CFD

CAD

FEA / FEM

VR
Virtual Reality

Cloud-Computing

Digitale Zukunft

AR
Augmented Reality

Digitaler Zwilling

IoT
Internet der Dinge

Smart …

Übersicht

Quellen

Graphiken teilweise aus:

Ferziger, J. H., Peric, M.: Numerischer Strömungsmechanik, Springerlink
Ferziger, J. H., Peric, M.: Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag

http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Freileitung_mit_Transformatorhaus.jpg

Schäfer, M.: Numerik im Maschinenbau, Springer
Schäfer, M.: Computational Engineering – Introduction to Numerical Methods, Springerlink

Hirsch, C.: Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. I, II, Wiley

Schlichting, H., Gersten, K.: Grenzschicht-Theorie, Springer

www.cfd-online.com

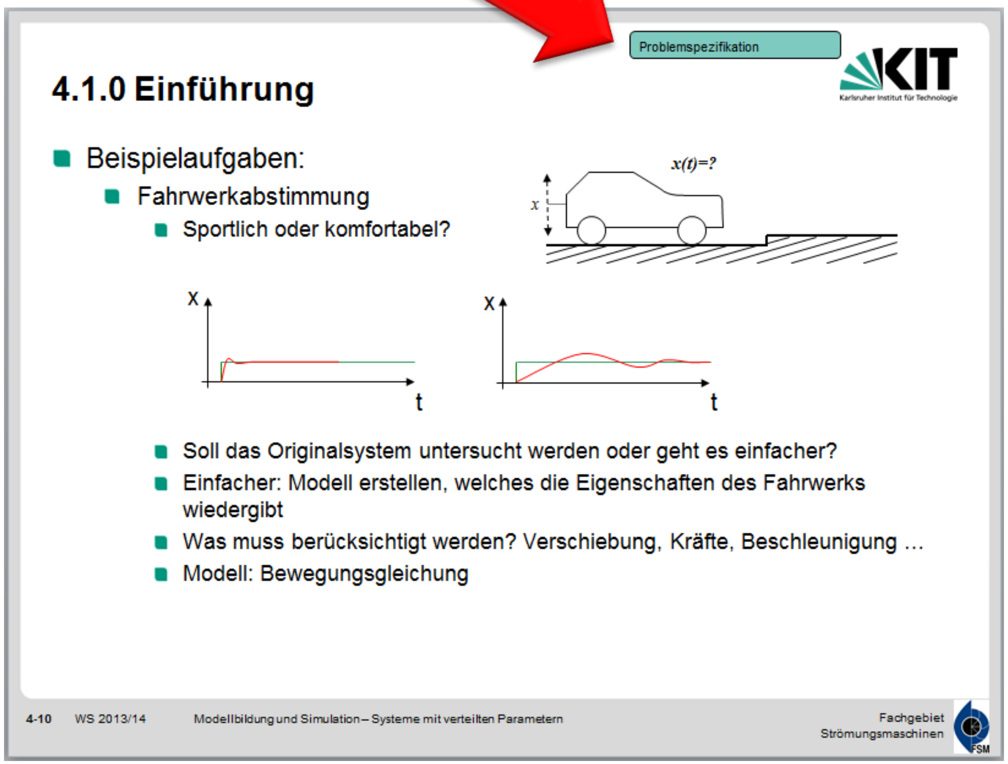
Ablauf einer Simulationsstudie

Problemspezifikation	Aufgabenstellung, Qualitätskriterien Ergebnisse, Zeit- und Kostenrahmen
Modellbildung	Idealisierungen, Naturgesetze
Mathematisches Modell	algebraische Gleichungen, Dgln.
Modellanalyse	z.B. Lösungen, Eigenfrequenzen,…
Simulationsverfahren	Algorithmen
Simulator	Hardware + Software
Simulationsergebnis, Beurteilung	z.B. Zeitverläufe, Animationen

Institut für Thermische Strömungsmaschinen

Ablauf einer Simulationsstudie

- Hilfe für die Orientierung



Komponenten eines numerischen Modells

- Grundlegende Modellgleichungen
  - Transport- bzw. Erhaltungsgleichungen, konstitutive Gleichungen
- Diskretisierung der Gleichungen
  - Diskretisierungsmethode
- Räumliche Diskretisierung
  - Netz
- Zeitliche Diskretisierung
  - Integrationsverfahren, Zeitschritt, Integrationszeit
- Definition des Simulationsgebietes
  - Geometrie (Vereinfachungen, Erweiterungen)
- Randbedingungen
- Initialisierung
- Modelle für nicht aufgelöste Phänomene
- Numerik, Compiler, Bibliotheken, Rechnerarchitektur …

Lernziele der heutigen Vorlesung

- Die Studierenden
  - können es entscheiden, wann Modelle mit verteilten Parametern verwendet werden müssen (vergl. 2. Vorl.).
  - wissen, wie man diese Modelle erstellt.

Übersicht

7. Systeme mit verteilten Parametern

7.1 Beschreibung von Systemen mittels PDGL

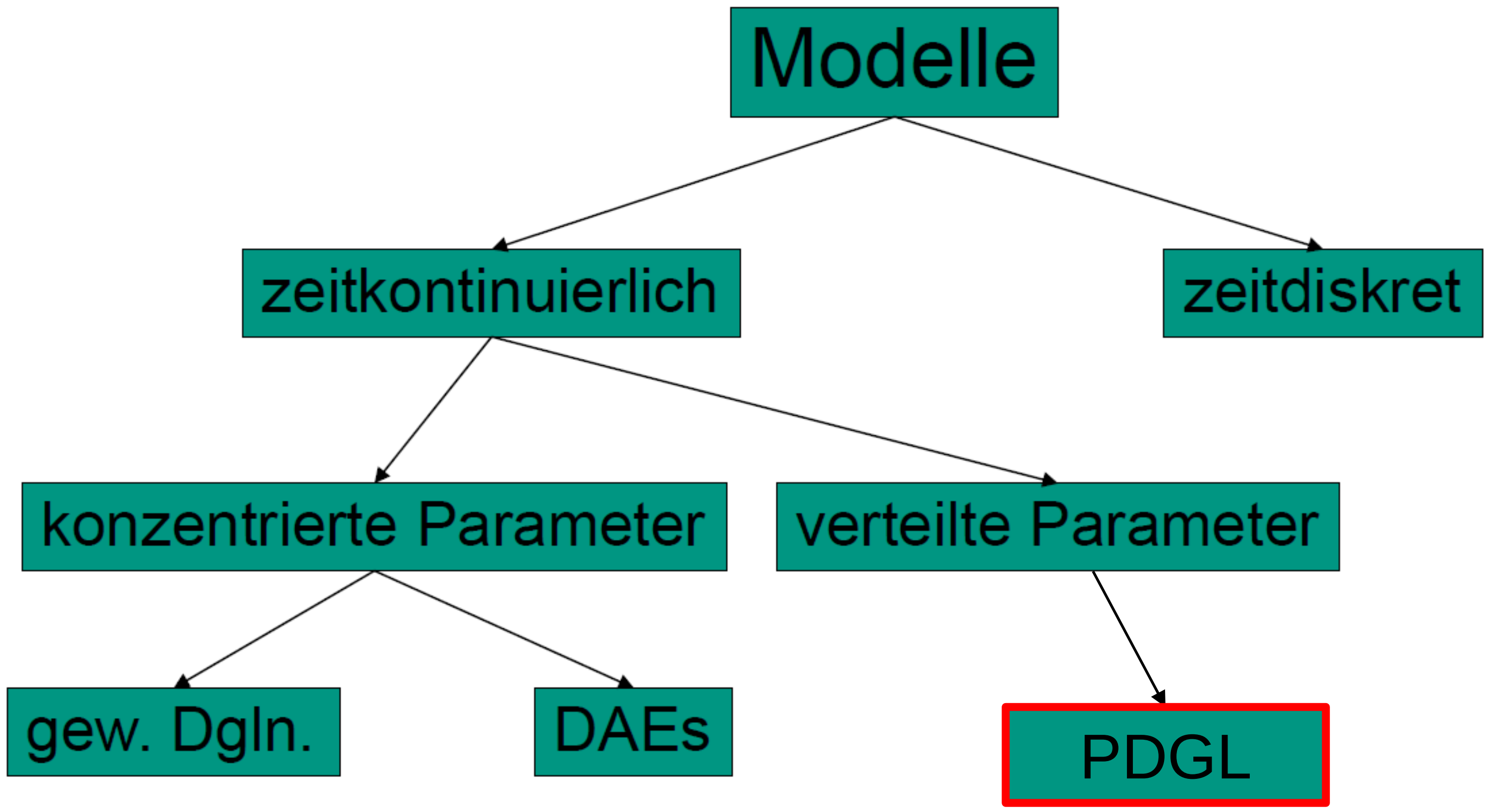
7.1.0 Einführung

7.1.1 Erhaltungssätze

7.1.2 Konstitutive Gleichungen

7.1.3 Charakteristiken

VL 1 / Folie 4


Modelle
zeitkontinuierlich
zeitdiskret
konzentrierte Parameter
verteilte Parameter
gew. Dgln.
DAEs
PDGL

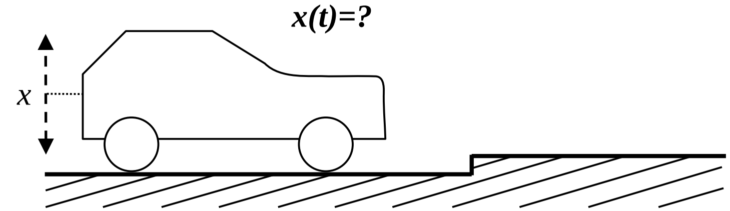
Konzentrierte vs. verteilte Parameter 1

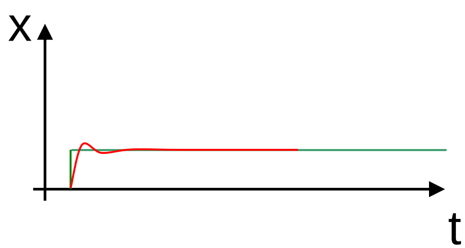
Systemmodellierung mit konzentrierten und verteilten Parametern

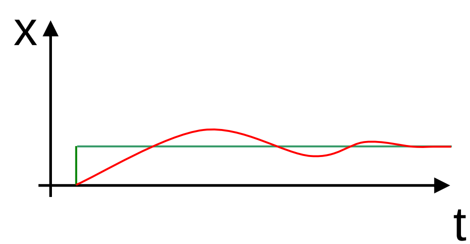
am Beispiel vom Automobil

Konzentrierte vs. verteilte Parameter 1

- Beispielaufgaben:
  - Fahrwerkabstimmung
    - Sportlich oder komfortabel?



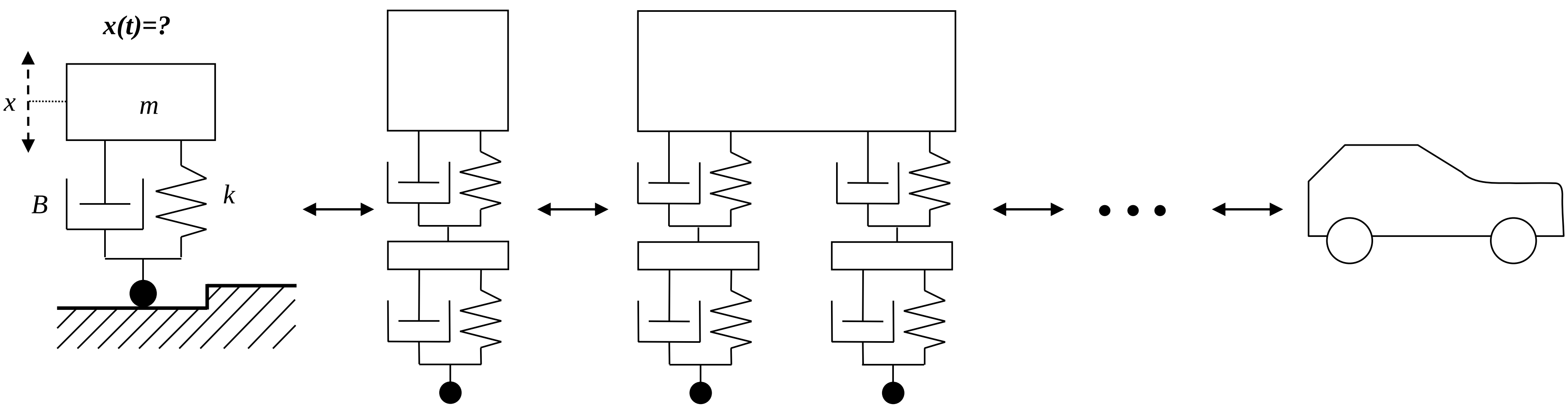




    - Soll das Originalsystem untersucht werden oder geht es einfacher?
    - Einfacher: Modell erstellen, welches die Eigenschaften des Fahrwerks wiedergibt
    - Was muss berücksichtigt werden? Verschiebung, Kräfte, Beschleunigung …
    - Modell: Bewegungsgleichung

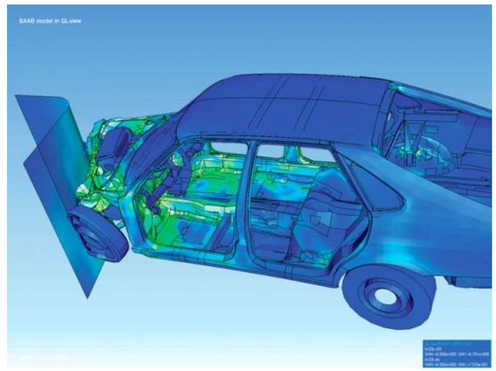
Konzentrierte vs. verteilte Parameter 1

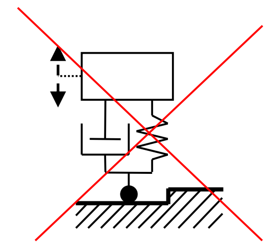
- Fahrwerkabstimmung (Forts.)
  - Welche Approximationsstufe liefert ausreichend genaue Ergebnisse?
    - Einfacheres Modell: liefert schneller Ergebnisse
    - Komplexeres Modell: beschreibt genauer das Originalsystem
    - Hier können Modelle mit konzentrierten Parametern erfolgreich eingesetzt werden, aber die Komplexität ist noch immer frei wählbar:



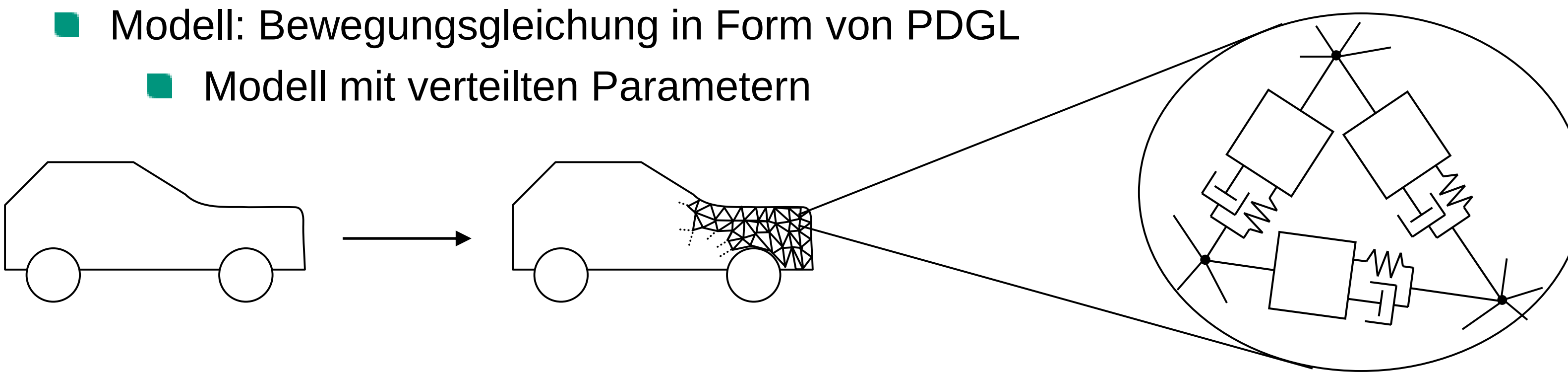
Konzentrierte vs. verteilte Parameter 1

- Beispielaufgaben:
  - Chrashtest





- Modelle mit konzentrierten Parameter nicht mehr ausreichend
- Deformation ist zeit- und ortsabhängig
- Was muss beschrieben werden: Verschiebungen, Kräfte …
- Modell: Bewegungsgleichung in Form von PDGL
  - Modell mit verteilten Parametern



Konzentrierte vs. verteilte Parameter 1

- Beispielaufgaben:
  - Korrosion
  - Innenraumbelüftung (Frischluft, Heizung, Kühlung)
  - Motorkühlung
  - Verbrennung im Motor
  - Geräuschentwicklung

- Welches Modell kann angewendet werden und wie?
- Was haben die Ergebnisse des Modells mit der Realität zu tun?
  - Verifikation, Validierung (z.B. Nachmessung am Originalsystem)

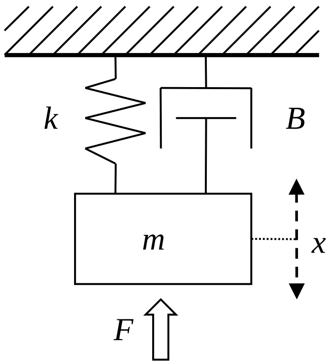
Konzentrierte vs. verteilte Parameter 2

Systemmodellierung mit konzentrierten und verteilten Parametern

am Beispiel vom Helmholtz-Resonator

Konzentrierte vs. verteilte Parameter 2

Modell des einfachen Helmholtz-Resonators

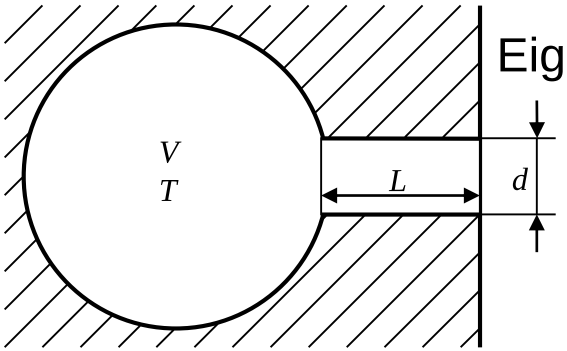


Eigenfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

DGL:

$$F = m\ddot{x} + B\dot{x} + kx$$



Eigenfrequenz des HRs:

$$\omega_H = \sqrt{\frac{c^2 \cdot A}{V \cdot L}}$$

$$c = \sqrt{\gamma RT}$$

$$k = c^2 \rho \frac{A^2}{V}$$

$$m = \rho A l$$

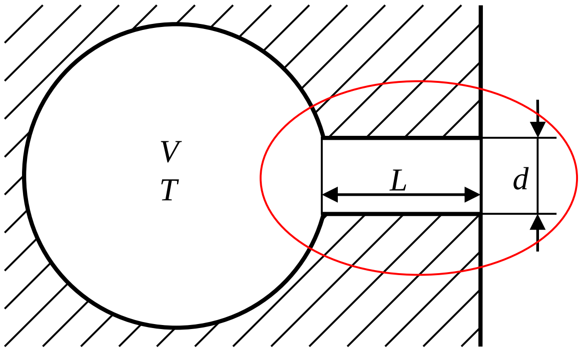
Übertragungsfunktion für Verzögerungsglied 2. Ord.:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2DTs + T^2 s^2} \qquad s = i\omega \qquad T = \frac{1}{\omega_0}$$

Dämpfungsparameter: $D = \frac{1}{2}\frac{T_1}{T_2}$ $\qquad$ T_1, $T_2 = T$ sind Zeitkonstanten

Konzentrierte vs. verteilte Parameter 2

Eigenfrequenz des HRs bei verlustbehafteten Systemen:



$$\omega_H = \sqrt{\frac{c^2 \cdot A}{V \cdot L}}$$

Mündungskorrektur (mitschwingende Masse vor und hinter der Öffnung):

Veit: $L = L + \frac{\pi}{4} \cdot d$

Skudrzyk: $L = L + \Delta l \qquad 0{,}785 \cdot d \leq \Delta l \leq 0{,}85 \cdot d \qquad \Delta l = \frac{3\pi}{16} d$

Cremer: $L = L + 2 \cdot \Delta l \qquad$ *Δl* wurde nicht angegeben

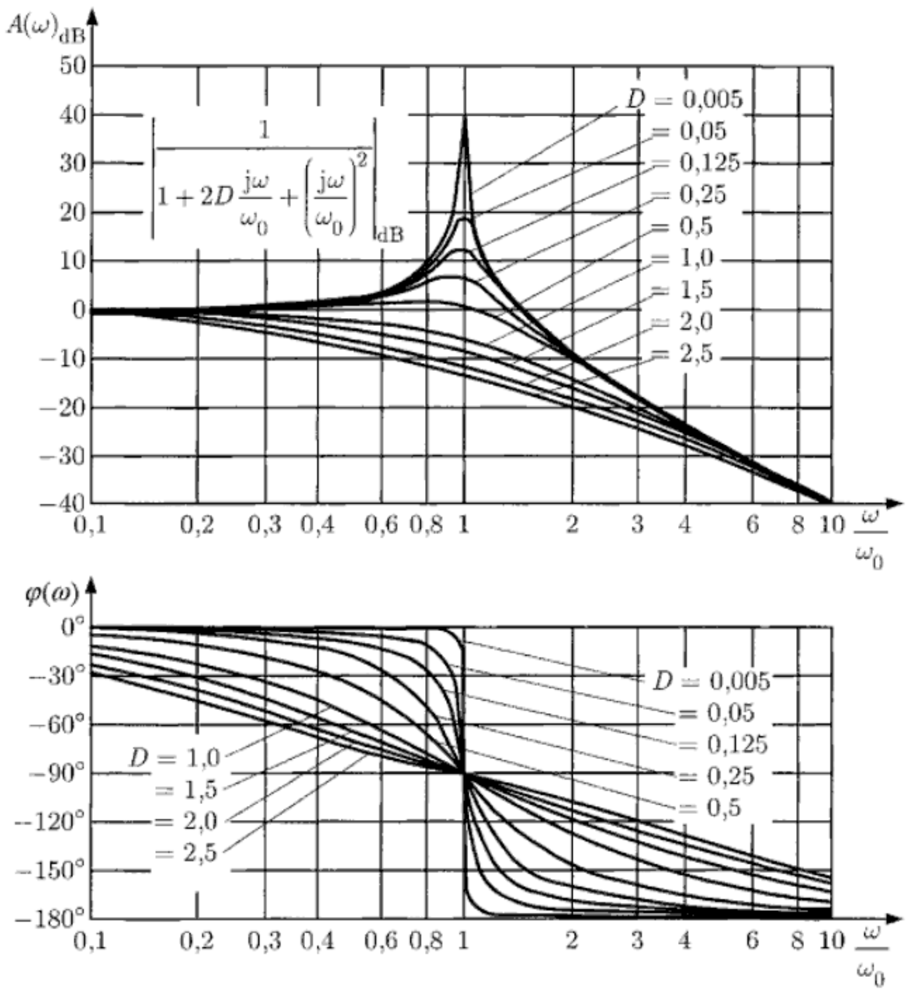
Szentmártony-Kurutz
bzw. Kurtze-Schmidt-Westphal, …: $L = L + 0.8 \cdot d$

…

Problemspezifikation

Konzentrierte vs. verteilte Parameter 2

Problem mit ungedämpftem Modell



Rayleigh-Kriterium für thermoakustische Instabilitäten:

$$\int_0^T \tilde{\dot{q}}(t)\cdot\tilde{p}(t)dt > 0$$

Mit D=0 kann der Verlauf von Amplitudengang und Phasengang nicht benutzt werden.

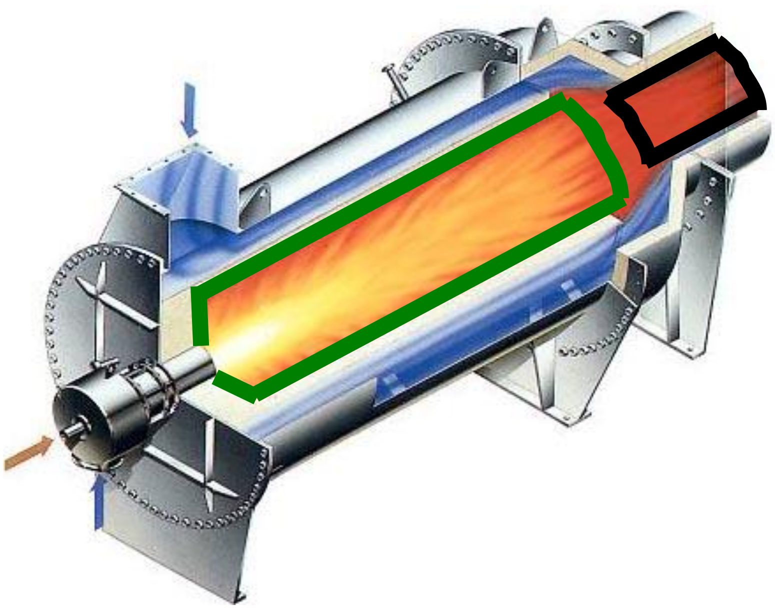
Bode-Diagramm für VZ2

Heinz Unbehauen: Regelungstechnik I. Vieweg + Teubner, Wiesbaden 2008

Konzentrierte vs. verteilte Parameter 2

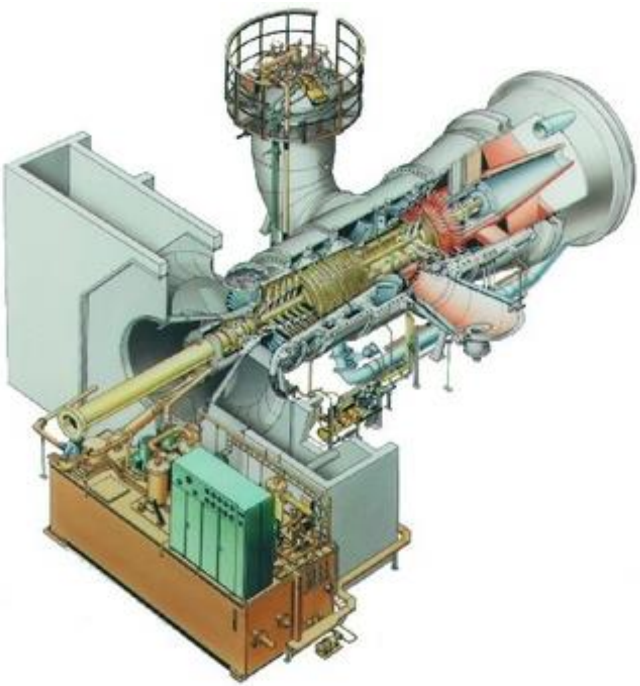
Einfacher und gekoppelter Helmholtz-Resonator in der Praxis

Einfacher Helmholtz-Resonator



Heißgaserzeuger
Anwendung: Trocknungsanlagen,
Leistungsbereich: 0,1 - 20 MW

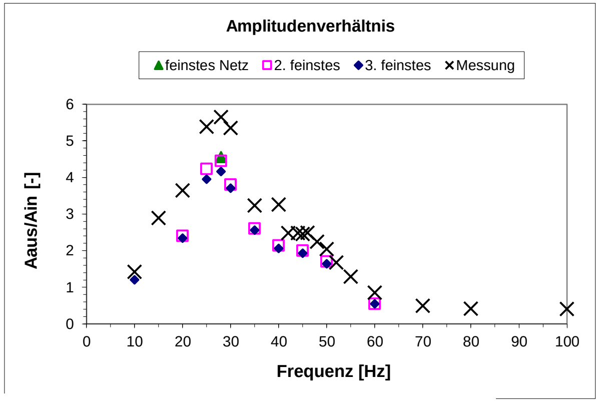
Gekoppelte Helmholtz-Resonatoren

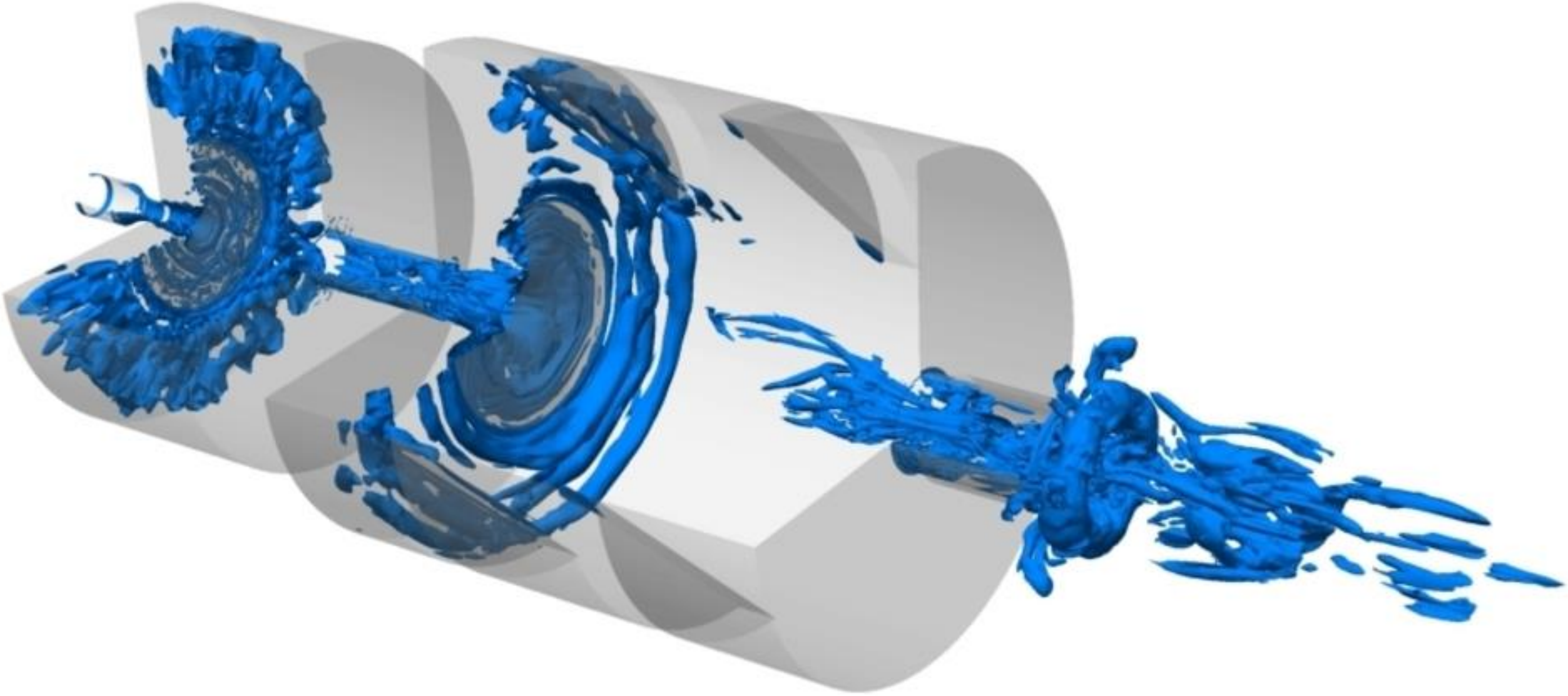


Gasturbine im Kraftwerk
Mit zwei, seitlich angeordneten
Brennkammern mit je acht Brennern
Leistungsbereich: 20 - 250 MW

Konzentrierte vs. verteilte Parameter 2

Gekoppelte Resonatoren, Modellbrennkammer





Konzentrierte vs. verteilte Parameter 2

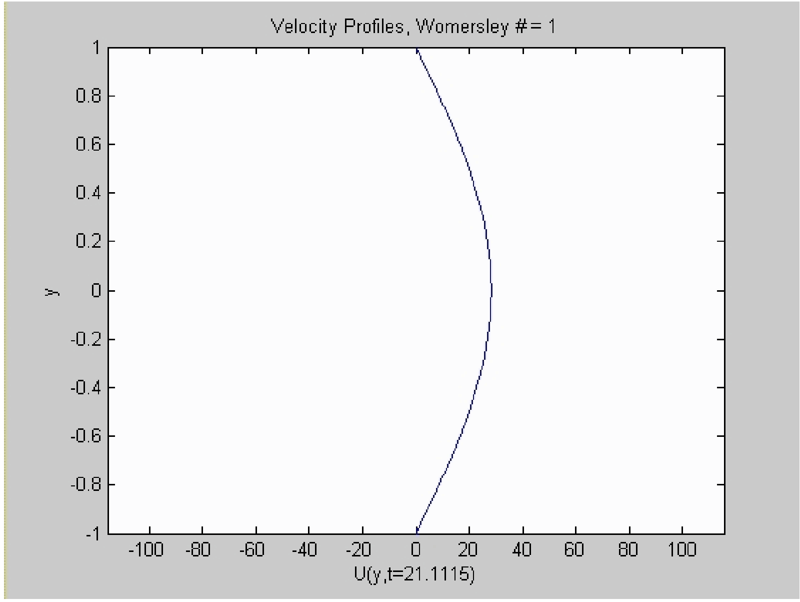
Reibung im Rohr bei pulsierender Strömung

Die Reibungskräfte an der Rohrwand sind Funktion der Zeit und der Womersley-Zahl α.

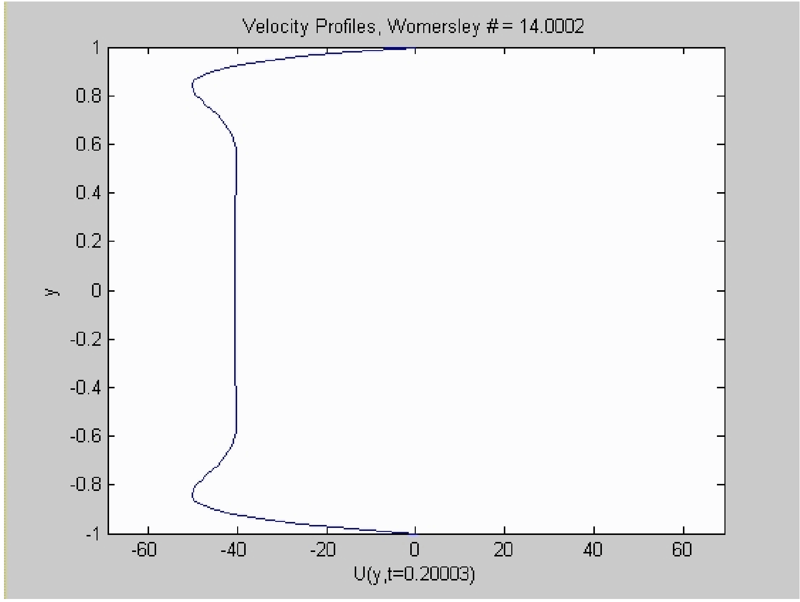
$\alpha = f(\omega, \nu)$

Der zeitliche Ablauf der Womersley Strömung:

www.andrew.cmu.edu/user/kyuhoh/dissipation/dissipation.html



Womersley-Zahl=1



Womersley-Zahl=14

Übersicht

7. Systeme mit verteilten Parametern

7.1 Beschreibung von Systemen mittels PDGL

7.1.0 Einführung

Einführung PDGL

Beispiel für System mit verteilten Parametern: Freilandleitung

Grafik entnommen aus http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Freileitung_mit_Transformatorhaus.jpg

Einführung PDGL

- Tacoma-Narrows-Brücke (1940)

Einführung PDGL

Wind strömt um Leitung: Was passiert?	
Leitung schwingt im Wind	Leitung verursacht als Hindernis in Strömung bestimmte Strömungs-phänomene: Kármán’sche Wirbelstraße → Äolische Töne (Windharfe)
Fragestellungen für Modellansatz?	
Wie deformiert sich die Leitung? Wie stabil bleibt die Leitung?	Wie sieht die Strömung in Windrichtung hinter der Leitung aus?
↓	
Strukturmechanik	Strömungsmechanik

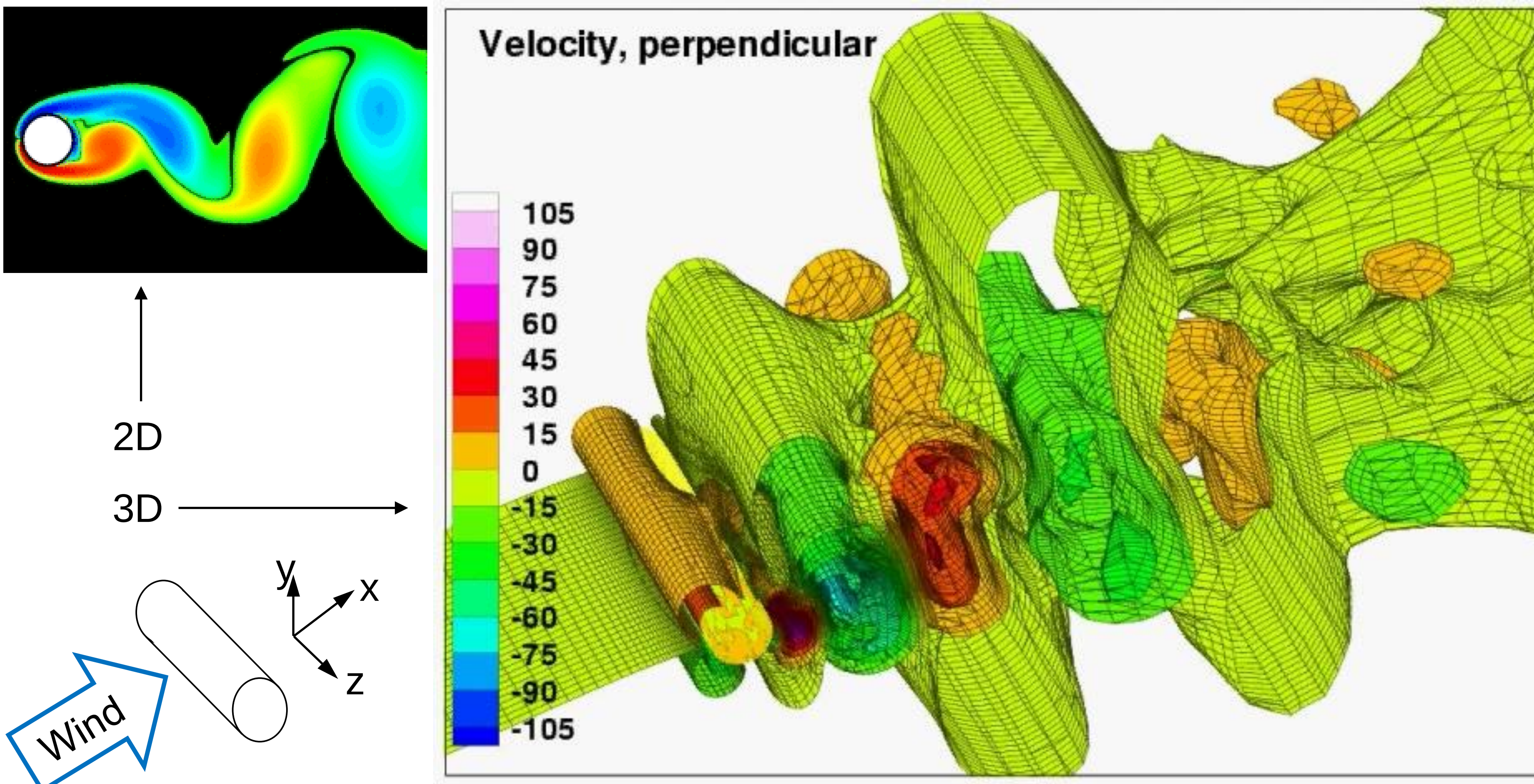
Einführung PDGL

Was genau soll beobachtet werden?	
Details der Bewegung: Unterteilung der Leitung in Elemente, deren Bewegung wechselweise aufeinander wirkt	*Details der Bewegung*: Unterteilung des Strömungsgebiets um die Leitung herum in Elemente, deren Strömungszustände sich wechselweise beeinflussen

Was bedeutet "verteilte Parameter"?
Z.B. Einfluss von - räumlich nicht miteinander zusammenhängenden Vorgaben - räumlich variierenden Vorgaben - zeitlich variierenden Vorgaben

Einführung PDGL

Beispiel Freilandleitung: Ergebnis eines Modells



Wie kommt man zu solch einer Darstellung?

Einführung PDGL

Karlsruher Institut für Technologie

Untersuchung der Veränderung der durch vorgegebene Parameter beeinflussten Größen:	
räumliche Veränderung: z.B. Veränderung in einem vorgegebenen Koordinatensystem (x,y,z)	zeitliche Veränderung
Was bedeutet das?	
- Betrachtung von Veränderungsprofilen (→ “Gradienten” bezüglich der Koordinaten oder der Zeit) - Erfassen von Bewegung in *partiellen Differentialgleichungen*	

Übersicht

7. Systeme mit verteilten Parametern

7.1 Beschreibung von Systemen mittels PDGL

7.1.1 Erhaltungssätze

Karlsruher Institut für Technologie

Erhaltungssätze – Lagrange/Euler Schreibweise

Festkörpermechanik	**Fluidmechanik**
Massenerhaltung	Kontinuitätsgleichung: zu lösende Variable: Dichte ρ
Impulserhaltung (3 Gleichungen): zu lösende Variablen 3 Komponenten des Verschiebungsvektors $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$	Impulserhaltung (3 Gleichungen): zu lösende Variablen 3 Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\rho\vec{v} = (\rho v_1, \rho v_2, \rho v_3)$
Energieerhaltung	Energieerhaltung: zu lösende Variable: Energie ρE
Lagrange-Notation anschaulich: Es wird ein Materialelement betrachtet, welches seine Position mit der Zeit t verändert. Sämtliche Änderungen des Zustands des Materialelements beziehen sich auf den Ausgangszustand x_0.	Euler-Notation anschaulich: Es wird der Zustand zur Zeit t im Volumenelement beschrieben. Dieser ändert sich, im allg. ändert sich aber die Position und Form des Volumenelements nicht. Einzelne Materien-Partikel werden nicht betrachtet, würden aber von einem ins nächste Volumenelement wandern.
Verschiebung u, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a sind Feldfunktionen der Ausgangslage des Materialelements	Geschwindigkeit v und Beschleunigung a sind Feldfunktionen der aktuellen Lage x eines Materieelements zum Zeitpunkt t

Erhaltungssätze – Lagrange/Euler Schreibweise

Festkörpermechanik	**Fluidmechanik**
Lagrange-Schreibweise	Euler-Schreibweise

$$v = \dot{u} = \frac{d}{dt}u(x_0,t)$$

$$a = \dot{v} = \ddot{u} = \frac{d}{dt}v(x_0,t) = \frac{d^2}{dt^2}u(x_0,t)$$

$$v = v(x,t)$$

$$a = \frac{d}{dt}v(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}$$

Erhaltungsgrößen – skalar und vektoriell

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \begin{cases} 0 \\ q \end{cases}$$

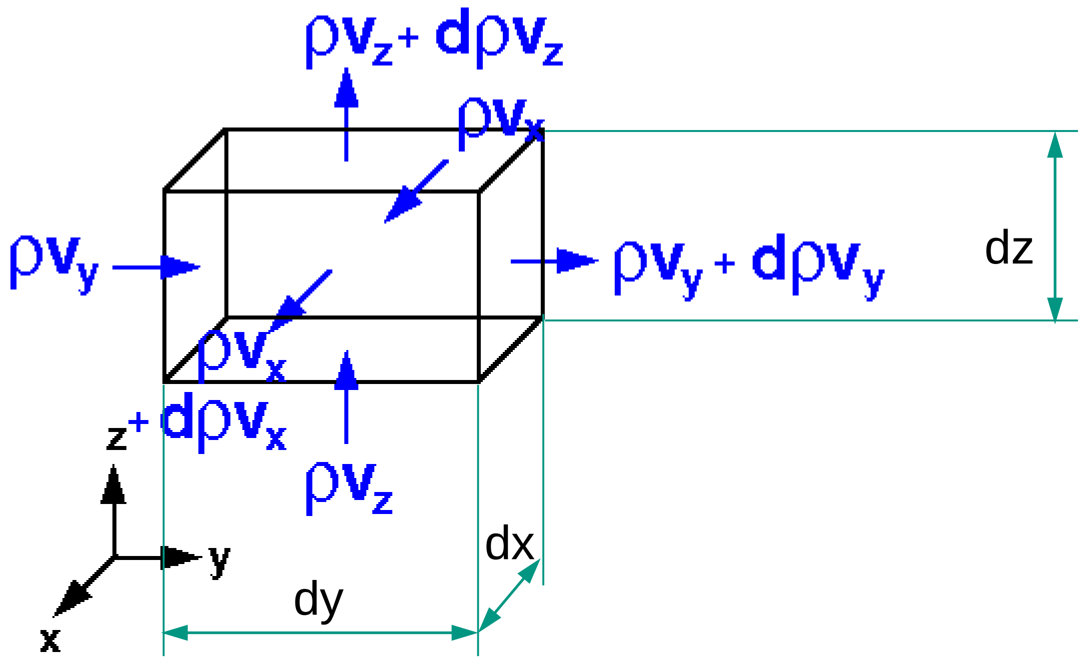
$$\frac{d\vec{\Psi}}{dt} = \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \begin{cases} 0 \\ \vec{f} \end{cases}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\Phi = \begin{cases} 0 \\ q \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{\Psi}}{dt} = \frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\Psi} = \begin{cases} 0 \\ \vec{f} \end{cases}$$

Bilanzierung am Volumenelement: Euler'sche Betrachtung

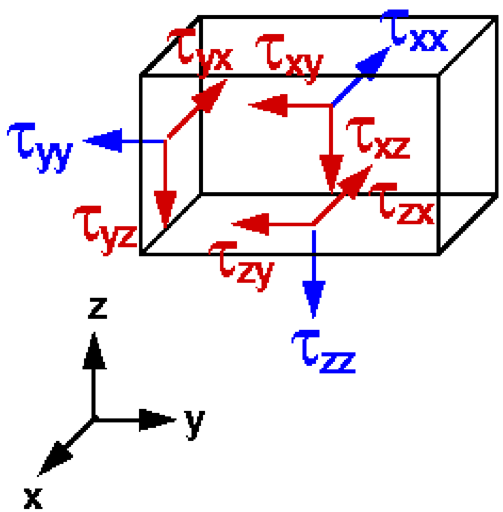
Flüsse an den Rändern des Volumenelements

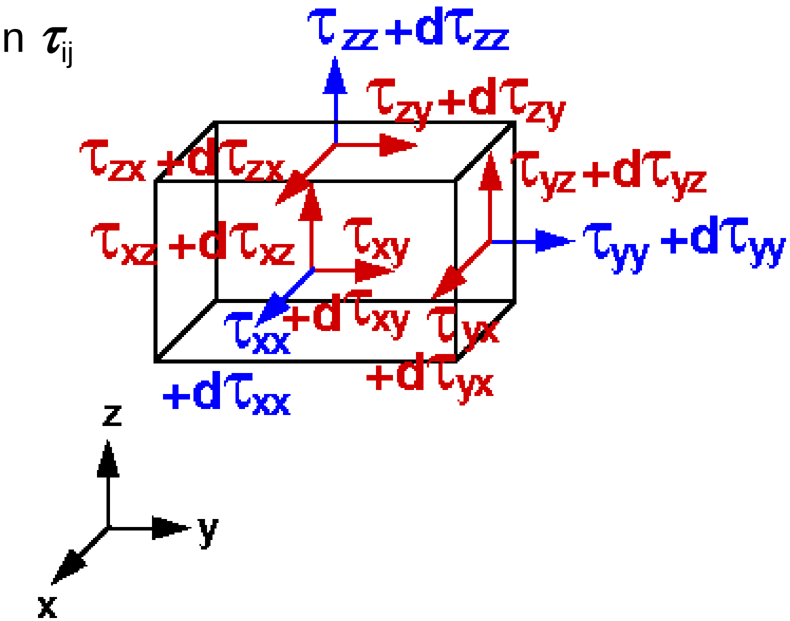


Bilanzierung am Volumenelement

Spannungstensor

Allgemeine Notation τ_{ij}





Fluidik:

Viskoser Spannungstensor T_{ij}

Vollständiger Spannungstensor $\tau_{ij} = \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + T_{ij}$

Festkörpermechanik:

Spannungstensor (z. B. Schub, Zug, Torsion) $\tau_{ij} = \sigma_{ij}$

Erhaltungssätze in der Fluidmechanik

Konservative Variablen der Fluidmechanik

$$\rho$$

$$\rho v_i$$

$$\rho E$$

Variablen der Erhaltungssätze

Nicht-Konservative (Primitive) Variablen der Fluidmechanik

$$\rho$$

$$v_i$$

$$p$$

Variablen, die direkt kontrollierbar,

z.B. experimentell ermittelbar, sind,

die aber nur unter bestimmten Annahmen (Näherungen, Vernachlässigungen) erhaltend sind

Erhaltungssätze in der Fluidmechanik

Differentielle Darstellung im kompressiblen Fall: Navier-Stokes Gleichungen

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

Impulserhaltung (3 Gl.)

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

Energieerhaltung

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i E)}{\partial x_i} =$$

$$\frac{\partial(q_i - p v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(v_i T_{ij})}{\partial x_j}$$

→ Insgesamt 5 Gleichungen, die gleichzeitig gelten

Erhaltungssätze in der Fluidmechanik

Differentielle Darstellung im kompressiblen Fall: Navier-Stokes Gleichungen

Ergänzungen:

Wärmefluß $$q_i = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$$ Fouriersches Gesetz

Energie $$E = \frac{1}{2} v_i v_i + \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} = \frac{1}{2} v_i v_i + c_V T$$

Viskoser Spannungstensor $$T_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)$$

Erhaltungssätze in der Fluidmechanik

Differentielle Darstellung im **in**kompressiblen Fall: $\rho = const. \Rightarrow \partial\rho = 0$

Kontinuitätsgleichung $$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Impulserhaltung (3Gl.) $$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial (v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + g_i$$

Übrige Größen $$T_{ij} = \nu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

→ Insgesamt 4 (3) Gleichungen, die gleichzeitig gelten

Ausblick

- Nächste Vorlesung:
  - Vervollständigung des Modells durch konstitutive Gleichungen
  - Eigenschaften des Modells
  - Reduktion der Komplexität des Modells