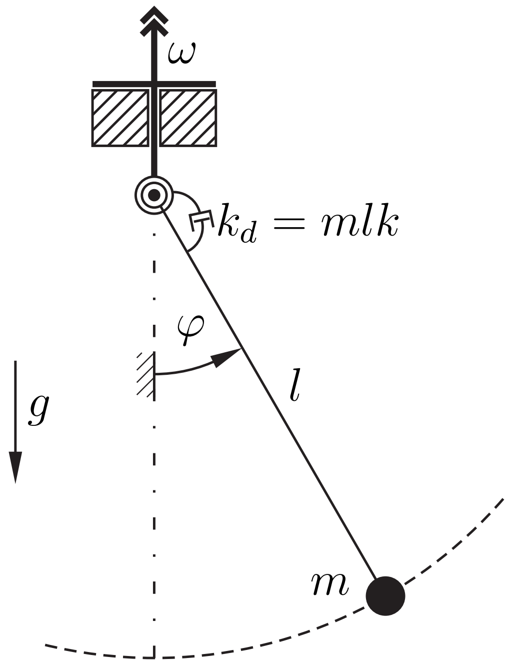
Modellbildung und Simulation

Prof. Dr.-Ing. K. Furmans
Prof. Dr.-Ing. M. Geimer
Dr.-Ing. B. Pritz
Prof. Dr.-Ing. C. Proppe

Klausurvorbereitung I



Ein masseloses Pendel der Länge l, an dem ein Massenpunkt mit der Masse m befestigt ist, rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \text{const}$. Durch Freischneiden erhält man die Bewegungsgleichung

$$l\ddot{\varphi} = -k\dot{\varphi} - g\sin\varphi + l\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi.$$

Das System soll auf seine Gleichgewichtslagen und deren Stabilität untersucht werden.

1. Bestimmen Sie einen geeigneten Zustandsvektor und überführen Sie die DGL in ein System 1. Ordnung.
2. Bestimmen Sie die Ruhelagen für $\varphi \in [0, \pi]$.
3. Untersuchen Sie die Ruhelagen auf Stabilität.
4. Zeichnen Sie eine Stabilitätskarte x_1 über ω für $x_1 \in (-\pi, \pi]$. Markieren Sie jeweils instabile bzw. stabile Lösungen.

Lösung

1. Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 + \sin x_1 \cos x_1 \omega^2 - \frac{k}{l} x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}$$

2. Ruhelagen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 + \sin x_1 \cos x_1 \omega^2 - \frac{k}{l} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} & x_2 = 0 \\ & \sin x_1 \left(-\frac{g}{l} + \cos x_1 \omega^2 \right) = 0 \\ \Rightarrow \quad & x_{11} = 0 \\ & x_{12} = \pi \\ & x_{13} = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 l}\right), \text{ wenn } \boxed{\frac{g}{l} \leq \omega^2} (*) \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich

$$\mathbf{x}_{1\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{2\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{3\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 l}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Stabilität
Linearisierung mit Jacobi-Matrix:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_\mathrm{S}}}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{J}|_{\mathbf{x}_\mathrm{S}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{S}) \text{ (siehe Übungsblatt 5: Modellanalyse)}$$

$$\text{mit } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 + (\cos^2 x_1 - \sin^2 x_1)\,\omega^2 & -\frac{k}{l} \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{x}_{1\mathrm{S}}$:

$$\mathbf{J}|_{\mathbf{x}_{1\mathrm{S}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} + \omega^2 & -\frac{k}{l} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\mathbf{J}$:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \gamma} \quad \text{mit} \quad \alpha = -\frac{1}{2}\frac{k}{l} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{g}{l} - \omega^2$$

1. Fall: $\gamma < 0 \rightarrow \omega^2 > \frac{g}{l}$: instabil
2. Fall: $\gamma = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l}$: keine Aussage möglich
3. Fall: $\gamma > 0 \rightarrow \omega^2 < \frac{g}{l}$: asymptotisch stabil

- $\mathbf{x}_{2\mathrm{S}}$:

$$\mathbf{J}|_{\mathbf{x}_{2\mathrm{S}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} + \omega^2 & -\frac{k}{l} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\mathbf{J}$:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \gamma} \quad \text{mit} \quad \alpha = -\frac{1}{2}\frac{k}{l} \quad \text{und} \quad \gamma = -\frac{g}{l} - \omega^2$$

$\gamma < 0 \rightarrow$ Instabil, da immer ein $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$.

- $\mathbf{x}_{3\mathrm{S}}$:

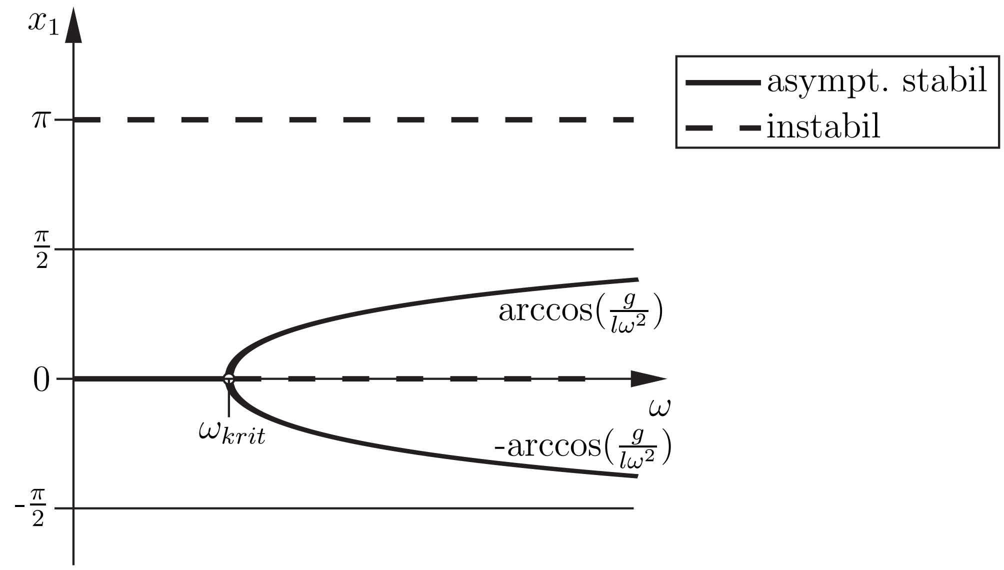
$$\mathbf{J}|_{\mathbf{x}_{3\mathrm{S}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g^2}{l^2\omega^2} - \omega^2 & -\frac{k}{l} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\mathbf{J}$:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \gamma} \quad \text{mit} \quad \alpha = -\frac{1}{2}\frac{k}{l} \quad \text{und} \quad \gamma = -\frac{g^2}{l^2\omega^2} + \omega^2 \rightarrow \gamma \geq 0, \text{ wegen } (*)$$

1. Fall: $\gamma > 0 \rightarrow \frac{g}{l} < \omega^2$: asymptotisch stabil
2. Fall: $\gamma = 0 \rightarrow \frac{g}{l} = \omega^2$: keine Aussage möglich

4. <u>Stabilitätskarte</u>



Heugabel-Bifurkation: Die Ruhelage $\varphi = 0$ wird bei der kritischen Kreisfrequenz $\omega_{krit} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ instabil. Oberhalb dieser Kreisfrequenz existieren dafür zwei neue stabile Ruhelagen. Die Ruhelage $\varphi = \pi$ ist immer instabil.