Prof. Dr.-Ing. K. Furmans
Prof. Dr.-Ing. M. Geimer
Dr.-Ing. B. Pritz
Prof. Dr.-Ing. C. Proppe

Übungsblatt Nr. 9

Thema: **Modelle mit verteilten Parametern – MGR und FDM**

Ansprechpartner: Balazs Pritz (pritz@kit.edu), Inst. für Thermische Strömungsmaschinen (ITS)

Aufgabe 1

Methode der gewichteten Residuen

Es soll die **Methode der gewichteten Residuen (MGR)** untersucht werden. Folgende Differentialgleichung sei gegeben:

$$\frac{du}{dx} - u = 0 \text{ gültig im Bereich } 0 \leq x \leq 1, \tag{1}$$

mit der Randbedingung $u(x = 0) = 1$. Für dieses Problem existiert die exakte Lösung: $u(x) = e^x$.
Die folgende Reihe soll als Ansatz für eine Näherungslösung untersucht werden:

$$\tilde{u}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{2} a_i x^i. \tag{2}$$

Der Ansatz erfüllt automatisch die Randbedingung.

a) Bestimmen Sie das Residuum $r(x)$ unter Verwendung der Näherungslösung $\tilde{u}$!
b) Kollokationsmethode I: Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i für die Stützstellen x_m, wobei $m = (1; 2)$ sowie $x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 1$!
c) Kollokationsmethode II: Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i für die Stützstellen x_m, wobei $m = (1; 2)$ sowie $x_1 = 0{,}25$ und $x_2 = 0{,}75$!
d) Subdomain-Methode: Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i für die Subdomains D_m, wobei $m = (1; 2)$ sowie D_1: $0 \leq x \leq 0{,}5$ und D_2: $0{,}5 \leq x \leq 1$!
e) Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung an den folgenden 4 Stellen: $x = 0{,}25$; $x = 0{,}5$; $x = 0{,}75$ und $x = 1$!
f) Welcher der Ansätze zur Kollokationsmethode liefert die „bessere“ Lösung?

Hinweis für die Prüfung: Der Lösungsweg sollte klar erkennbar sein, d.h. schreiben Sie die Gleichungen, Integrale, Umformungen etc. auf und setzen Sie erst dann Werte ein.

Aufgabe 2

Finite Differenzen Methode

Betrachten Sie die generische Transportgleichung in der Strömungsmechanik:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i \phi)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial(\phi)}{\partial x_i}\right) + q_\phi, \qquad (3)$$

Diese Gleichung wird jetzt mit konstanten Koeffizienten auf einem äquidistanten eindimensionalen Netz mit Hilfe der **Finite Differenzen Methode (FDM)** diskretisiert.

a) Bestimmen Sie die 1. räumliche Ableitung mit einer Formel bis maximal 2. Ordnung!
b) Bestimmen Sie die 1. räumliche Ableitung mit einer Formel bis maximal 2. Ordnung!
c) Wie wird die Zeitableitung bestimmt?