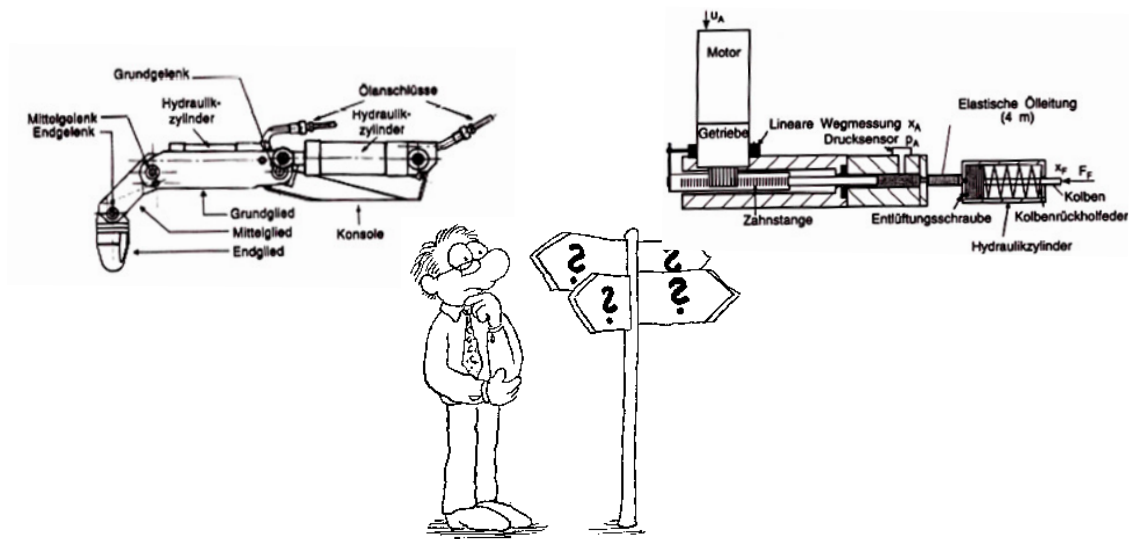


Skriptum zur Vorlesung

Modellbildung und Simulation



Kai Furmans, Marcus Geimer, Balazs Pritz, Carsten Proppe

Wintersemester 2021/2022

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

vii

1	Einleitung	1
1.1	Zielsetzung	2
1.2	Was ist Simulation?	2
1.3	Was ist ein System?	3
1.3.1	Äußere Struktur eines Systems	4
1.3.2	Innere Struktur eines Systems	4
1.3.3	Klassifikation von Systemen	5
1.4	Was ist ein Modell?	5
1.5	Ablauf einer Simulationsstudie	6
1.6	Literaturempfehlungen	7
1.7	Weiterführende Bemerkungen	8
1.8	Verständnisfragen	8
2	Modellklassen	9
2.1	Einleitung	9
2.2	Lernziele	9
2.3	Modelle mit konzentrierten und Modelle mit verteilten Parametern	9
2.4	Netzwerke	14
2.4.1	Elektrische Netzwerke	14
2.4.2	Hydraulische Netzwerke	15
2.5	Vorgehensweise bei der Modellierung mit konzentrierten Parametern	15
2.6	Literaturempfehlungen	16
2.7	Weiterführende Bemerkungen	16
2.8	Verständnisfragen	16
3	Modelle mit konzentrierten Parametern	17
3.1	Einleitung	17
3.2	Lernziele	18
3.3	Klassifizierung von Prozesselementen	18
3.3.1	Quellen	18
3.3.2	Speicher	19
3.3.3	Übertrager	19
3.3.4	Wandler	19
3.3.5	Senken/dissipative Elemente	20
3.3.6	Kombinierung von Prozesselementen zu Netzwerken	20
3.4	Analogietafeln	20
3.4.1	Gegenüberstellung von Trans-Per-Darstellung und Potenzial-Strom-Darstellung	22
3.5	Formulierung der Zustandsgleichungen	25
3.6	Beispiel: Hydraulischer Finger einer Roboterhand	25

3.7	Co-Simulationen	29
3.8	Literaturempfehlungen	31
3.9	Weiterführende Bemerkungen	31
4	Modellanalyse: gewöhnliche Differentialgleichungen	33
4.1	Einleitung	33
4.2	Lernziele	33
4.3	Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen	33
4.3.1	Formulierung als System 1. Ordnung	34
4.3.2	Autonome Systeme	35
4.4	Richtungsfeld	36
4.5	Gleichgewichtspunkt und Linearisierung	37
4.6	Stabilität des Gleichgewichtspunktes	40
4.7	Literaturempfehlungen	47
4.8	Weiterführende Bemerkungen	47
4.9	Verständnisfragen	47
5	Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen	49
5.1	Einleitung	49
5.2	Lernziele	49
5.3	Numerische Integrationsverfahren	49
5.3.1	Integrationsverfahren mittels Integrationsformeln	50
5.3.2	Integrationsverfahren mittels Polynominterpolation	50
5.3.3	Integrationsverfahren durch finite Differenzen	51
5.3.4	Prädiktor-Korrektor-Verfahren	52
5.4	Fehleranalyse	52
5.5	Stabilität der Integrationsverfahren	53
5.6	Steife Differentialgleichungen	56
5.7	Schrittweitensteuerung	56
5.8	Literaturempfehlungen	57
5.9	Weiterführende Bemerkungen	57
5.10	Verständnisfragen	58
6	Modelle mit verteilten Parametern	59
6.1	Einleitung	59
6.2	Lernziele	59
6.3	Beschreibung von Systemen mittels PDGL	59
6.3.1	Einführung	59
6.3.2	Erhaltungssätze	60
6.3.3	Konstitutive Gleichungen	61
6.3.4	Charakteristiken	61
6.4	Modellreduktion	61
6.4.1	Einführung	61
6.4.2	Physikalische Modellreduktion	62
6.4.3	Mathematische Modellreduktion	63
6.5	Numerische Lösungsverfahren für PDGLen	63
6.5.1	Die Methode der gewichteten Residuen	63
6.5.2	Einführung in die Feldverfahren	68

6.5.3	Finite Differenzen Methode	70
6.5.4	Finite Volumen Methode	74
6.5.5	Finite Elemente Methode	79
6.5.6	Lösungsverfahren	81
6.6	Modellierung komplexer Phänomene	87
6.7	Literaturempfehlungen	87
6.8	Weiterführende Bemerkungen	88
6.9	Verständnisfragen	88
7	Verifikation und Validierung	89
7.1	Einleitung	89
7.2	Verifikation	89
7.2.1	Fehlermöglichkeiten	89
7.2.2	Methoden zur Verifikation	90
7.3	Validierung	91
7.3.1	Fehlermöglichkeiten	91
7.3.2	Methoden zur Validierung	91
7.4	Verständnisfragen	92
8	Versuchsplanung	93
8.1	Vorgehensweise	93
8.1.1	Beschreibung der Ausgangssituation	93
8.1.2	Beschreibung des Untersuchungszieles	94
8.1.3	Festlegung der zu erreichenden Zielgrößen und der Einflussfaktoren	94
8.1.4	Aufstellung eines Versuchsplans	94
8.1.5	Experimente durchführen	95
8.1.6	Versuchsergebnisse auswerten	95
8.1.7	Interpretation der Ergebnisse	95
8.2	Verständnisfragen	95
	Literaturverzeichnis	97
	Stichwortverzeichnis	99

Abbildungsverzeichnis

1.1	Darstellung eines Systems.	4
1.2	Ablauf einer Simulationsstudie	6
1.3	Beziehungen zwischen Realität, konzeptionellem Modell und Simulationsmodell	7
1.4	Zeitungsausschnitt, Quelle: Badische Neueste Nachrichten, 12.10.09	8
2.1	Längsschwingungen eines homogenen unbelasteten Stabes	10
2.2	Zerlegung des Stabs in Segmente	11
2.3	Einfreiheitsgradschwinger	12
2.4	Schwingerkette	12
2.5	Regalbediengerät	16
3.1	Teleskoplager	17
3.2	Schematische Darstellung von Eintoren (Zweipolen) und Zweitoren (Vierpolen).	18
3.3	Reale hydraulische Leitung und hydraulische Modellierung mit Prozesselementen.	21
3.4	Elektrisches Ersatzschaltbild der realen hydraulischen Leitung.	21
3.5	Elektrische Schaltung als Grundlage für den Darstellungsvergleich.	23
3.6	Hydraulischer Finger einer Roboterhand.	26
3.7	Unterteilung des Systems in Subsysteme.	26
3.8	Elektrisches Netzwerk des Gleichstrommotors	27
3.9	Mechanisches Modell des Antriebskolbens	27
3.10	Mechanisches Modell des Abtriebskolbens	27
3.11	Möglichkeiten um Simulationen zu koppeln [GKL06].	30
3.12	Möglichkeiten um den Roboterfinger in Co-Simulationen aufzuteilen und zu koppeln.	30
4.1	Lösungen der Differentialgleichung des Wachstumsmodells	36
4.2	Richtungsfeld für das System (4.4)	37
4.3	Richtungsfeld des nichtlinearen autonomen Systems (4.5)	38
4.4	Mathematisches Pendel	38
4.5	Richtungsfeld des Systems (4.7)	39
4.6	Richtungsfelder der drei linearen Systeme	42
4.7	Stabilitätskarte der zweidimensionalen linearen Systeme	43
4.8	Klassifikation des Stabilitätsverhaltens der Gleichgewichtspunkte	44
4.9	Richtungsfeld des mathematischen Pendels mit zusätzlicher Dämpfung	46
4.10	Richtungsfeld des Van-der-Pol-Schwingers	47
5.1	Treppenapproximationen des Zeitintegrals	51
5.2	Stabilitätsgebiete der numerischen Integrationsverfahren.	53
5.3	Auswirkung der Schrittweite und des Integrationsverfahrens	55

5.4	Numerische Integration steifer Differentialgleichungen	56
6.1	Vergleich der Ergebnisse	67
6.2	Zur Definition einer Ableitung und deren Approximationen	71
6.3	Ein typisches KV für ein kartesisches 2D-Gitter und die verwendete Notation	75
6.4	Ein typisches KV für ein kartesisches 3D-Gitter und die verwendete Notation	76
6.5	Verschiedene Elemententypen	79
6.6	Beispiele für Rechensterne in 2D (links, Mitte) und 3D (rechts)	82
6.7	Graphische Darstellung der Matrix für einen Fünf-Punkte-Rechenstern (die von null verschiedenen Elemente der Koeffizientenmatrix an den fünf Diago- nalen sind schattiert dargestellt; jeder horizontale Kästchensatz entspricht einem Gitterpunkt)	83

1 Einleitung

Modellbildung und Simulation ist ein Prozess, der Problemdefinition, das Erstellen eines problemadäquaten Modelles, dessen Analyse und Validierung sowie die Umsetzung in ein Simulationsmodell und die Durchführung und Auswertung von Simulationsläufen umfasst. Modellbildung und Simulation findet im gesamten Maschinenbau (und nicht nur dort...) statt und dies bereits seit der Etablierung des wissenschaftlichen Maschinenbaus. Modellbildung und Simulation ist eine Wissenschaft, aber auch eine Kunst. Das Erstellen und Durchführen umfangreicher Simulationsstudien lässt sich erlernen, aber gerade das Erstellen geeigneter Modelle und das Vermeiden typischer Fehler bedarf der Übung. Diese Lehrveranstaltung vermittelt die Grundlagen für eine erfolgreiche Durchführung von Simulationsstudien im Maschinenbau. Darüber hinaus bedarf es solider Kenntnisse einzelner Fachdisziplinen, um problemspezifische Simulationsstudien erfolgreich zum Abschluss zu bringen.

Die Lehrveranstaltung konzentriert sich auf zwei fundamentale Modellklassen, die in den unterschiedlichsten Disziplinen des Maschinenbaus zum Einsatz kommen: auf Modelle mit konzentrierten und mit verteilten Parametern. Für diese beiden Modellklassen werden die einzelnen Schritte bei der Erstellung einer Simulationsstudie dargestellt. Dabei erfolgt ein Rückgriff auf die im Bachelorstudium vermittelten Grundlagen in Mechanik, Strömungslehre und Elektrotechnik, die hier in einer einheitlichen Sicht betrachtet werden.

Zielsetzung der Lehrveranstaltung:

Die Studierenden können Modelle und Simulationen als Bestandteil zahlreicher Fachrichtungen des Maschinenbaus erläutern. Sie sind in der Lage, die interdisziplinären Aspekte wie der im Maschinenbau typischen Modellierungs- und Simulationstechniken wiederzugeben. Die Studierenden beherrschen Simulationsstudien von der Problemformulierung über Modellbildung, Simulation, Verifikation bis zur Validierung, d.h:

- Sie sind in der Lage, die zur Lösung technischer Fragestellungen erforderlichen Probleme zu formulieren, entsprechende konzeptionelle und mathematische Modelle zu erstellen und zu analysieren.
- Sie können Algorithmen zur Lösung der mathematischen Modelle entwickeln und implementieren.
- Sie können umfassende, auch interdisziplinäre Simulationsstudien durchführen, die Simulationsergebnisse beurteilen und die Qualität der Simulationsergebnisse kritisch bewerten.

1.1 Zielsetzung

Die Studierenden

- sind mit den Begriffen System und Modell vertraut,
- kennen den prinzipiellen Ablauf einer Simulationsstudie,
- können ausgehend vom Systembegriff konzeptionelle Modelle für technische Sachverhalte entwickeln,
- können für technische Problemstellungen eine Simulationsstudie planen.

1.2 Was ist Simulation?

Von Robert E. Shannon stammt folgende Definition des Begriffs Simulation:

„Simulation is the process of designing a model of a real system and conducting experiments with this model for the purpose either of understanding the behavior of the system and its underlying causes or of evaluating various designs of an artificial system or strategies for the operation of the system.“ Quelle: [Sha98]

Gemäß Shannon [Sha98] ist Simulation ein Prozess, der von der Modellerstellung bis zur Durchführung von Experimenten mit dem Modell reicht. Dieser Prozess verfolgt ein klares Ziel: es soll ein reales System besser verstanden werden, indem sein Verhalten nachgebildet wird und die Ursachen für dieses Verhalten gesucht werden bzw. indem Varianten untersucht werden. In der VDI-Richtlinie 3633 [VDI10] findet sich eine sehr ähnliche Definition des Begriffs Simulation:

„Simulation ist ein Verfahren zur Nachbildung eines Systems mit seinen dynamischen Prozessen in einem experimentierbaren Modell, um zu Erkenntnissen zu gelangen, die auf die Wirklichkeit übertragbar sind. Im weiteren Sinne wird unter Simulation das Vorbereiten, Durchführen und Auswerten gezielter Experimente mit einem Simulationsmodell verstanden. Mit Hilfe der Simulation kann das zeitliche Ablaufverhalten komplexer Systeme untersucht werden.“ Quelle: [VDI10].

In dieser Definition wird besonderen Wert auf den Systembegriff und die mit einem System verknüpften Prozesse gelegt.

Unter Simulation versteht man also das Nachbilden des Verhaltens von Systemen durch Modelle. Simulationen können u.a. auf einem Digitalrechner, einem Analogrechner oder durch Experimentieren an einem ähnlichen, z.B. maßstabsverkleinertem Modell (z.B. einem Objekt im Windkanal) durchgeführt werden. Diese Vorlesung wird sich ausschließlich auf Simulationen mit einem Digitalrechner konzentrieren; viele Aussagen der Vorlesung sind jedoch auch auf andere Simulationen übertragbar.

Mit Hilfe der Simulation können wir Erkenntnisse über Systeme erlangen, die in der Realität nicht oder nur mit hohem Aufwand bzw. Risiko experimentierbar sind, weil u.a.

- die Zeitskala zu klein oder zu groß ist (z. B. Kernreaktionen, Klima);
- die Raumdimensionen zu klein oder zu groß sind (z. B. Atome, Galaxien);

- das reale Systeme (noch) nicht verfügbar ist (z. B. Produktentwicklung);
- das Experimentieren am realen System zu teuer wäre (z.B. Crash, Luftfahrt);
- beim Experimentieren das reale System gestört bzw. zerstört werden würde (z. B. Kraftwerke, Ökosysteme, Börse).

Der allumfassende Erfolg der digitalen Simulation in den Ingenieurwissenschaften ist vor allem darin begründet, dass sie Entscheidungshilfen liefert, eine umfangreiche Erfassung der Systemkomplexität ermöglicht und eine Alternative zu Experimenten darstellt.

Trotz dieses Erfolges ist es bei jeder Simulationsstudie auch wichtig, sich die Risiken der Simulation bewusst zu machen:

- Datenmangel: Es liegen nicht genügend Daten vor, um die Modellparameter zu identifizieren;
- Fehleranfälligkeit: Sowohl bei der Modellerstellung als auch bei der Implementierung müssen notwendigerweise Fehler gemacht werden (z.B. Approximationsfehler). Darüber hinaus können sich ungewollt Fehler in den Prozess einschleichen. Dies kann dazu führen, dass die Ergebnisse einer Simulationsstudie unrealistisch sind;
- hoher Aufwand der Modellerstellung: Die Kosten der Modellerstellung übersteigen den Nutzen;
- Realitätsferne: Das Modell wurde so konzipiert, dass es die Realität nicht oder nur unzureichend wiedergibt;
- Vermischung von Modell und Realität;
- Mangelnde Transparenz: Große Modelle, die in Teams erstellt werden, sind oft nur noch schwer im Detail für den Einzelnen verständlich.

1.3 Was ist ein System?

Der Begriff „System“ stammt aus der Regelungstechnik. Die DIN 19226 [DIN94] führt hierzu aus:

„Ein System ... ist eine abgegrenzte Anordnung von aufeinander einwirkenden Gebilden. Solche Gebilde können sowohl Gegenstände als auch Denkmethode und deren Ergebnisse ... sein. Diese Anordnung wird durch eine Hüllfläche von ihrer Umgebung abgegrenzt oder abgegrenzt gedacht.“

Durch die Hüllfläche werden Verbindungen des Systems mit seiner Umgebung geschnitten. Die mit diesen Verbindungen übertragenen Eigenschaften und Zustände sind die Größen, deren Beziehungen untereinander das dem System eigentümliche Verhalten beschreiben.

Durch zweckmäßiges Zusammenfügen und Unterteilen von solchen Systemen können größere und kleinere Systeme entstehen.“ Quelle: [DIN94]

Systeme werden durch eine Hüllfläche von der Umgebung abgegrenzt. Sie besitzen ferner eine innere Struktur. Der Zustand eines Systems wird durch Zustandsgrößen beschrieben. Sie sind veränderlich. Konstante Größen, die das System beschreiben, werden als Parameter bezeichnet.

Aufgabe der *Systemdefinition* ist es, die innere und äußere Struktur des Systems, die Wechselwirkungen und die Zustandsgrößen und Parameter festzulegen. Aufgabe der *Systemanalyse* (oder: Systemidentifikation) ist es, aus bekanntem Systemverhalten auf die Struktur des Systems zu schließen. Bei der *Systemsynthese* schließt man bei bekannter Struktur des Systems auf seine Funktion.

1.3.1 Äußere Struktur eines Systems

Aufgrund der Abtrennung von der Umgebung durch die Hüllfläche besitzen Systeme eine äußere Struktur. Ein System ist eine klar abgegrenzte Menge von Objekten. Diese Objekte können materiell oder immateriell sein. Durch die Hüllfläche werden Verbindungen des Systems mit der Umgebung geschnitten. Diese Verbindungen können Einflüsse von der Umgebung (Systemeingänge) oder Wirkungen des Systems auf die Umgebung (Systemausgänge) sein.

Die Wahl der Systemgrenze ist eine der wichtigsten Aufgaben bei der Systemdefinition. Sie erfolgt nach Zielstellung (*Abgrenzung*) und den zur Verfügung stehenden Möglichkeiten (*Ausgrenzung*). Ist die Hüllfläche einmal festgelegt, müssen die Systemeingänge und -ausgänge definiert werden.

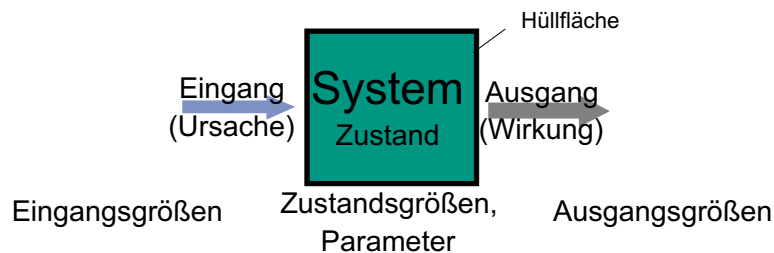


Abbildung 1.1: Darstellung eines Systems.

1.3.2 Innere Struktur eines Systems

Systeme sind in ihrem Inneren strukturiert. Sie bestehen aus Teilsystemen, die miteinander wechselwirken. Diese Teilsysteme können selbst wieder strukturiert sein, so dass eine Strukturierung über mehrere hierarchische Ebenen möglich ist. *Elementare Systeme* sind nicht weiter zerlegbare Systeme. Sie bestimmen die Granularität der Systembeschreibung. Die Strukturierung eines Systems und damit auch die Granularität der Systembeschreibung erfolgt ziel- und problemorientiert. Dabei gibt es prinzipiell zwei Vorgehensweisen:

- Dekomposition: Zerlegung eines Systems in Teilsysteme;
- Aggregation: Zusammenfügen eines Systems aus Teilsystemen, hierdurch müssen u. U. zusätzliche Parameter in die Systembeschreibung eingefügt werden.

Die Wahl der Granularität ist eine wichtige Aufgabe bei der Festlegung der inneren Struktur eines Systems. Generell gibt es einen Zielkonflikt zwischen einer groben Granularität (größere Übersichtlichkeit, Minimierung des Aufwands) und einer feinen Granularität (größere Ausdrucksstärke, mehr Untersuchungsmöglichkeiten). Generell gilt: so grob wie möglich, so fein wie nötig strukturieren!

Hinsichtlich der inneren Struktur lassen sich *komplexe* Systeme und *komplizierte* Systeme unterscheiden:

- Komplexe Systeme bestehen aus vielen Teilsystemen unterschiedlichen Typs mit vielfältigen Wechselwirkungen. Sie können auch unstrukturiert sein. Oftmals können nur noch statistische Aussagen über die Eigenschaften komplexer Systeme getroffen werden.
- Komplizierte Systeme bestehen aus wenigen Teilsystemen, besitzen aber viele Zustandsgrößen bzw. Parameter, wodurch die Systemanalyse erschwert wird.

1.3.3 Klassifikation von Systemen

Systeme können nach dem Wertebereich der Zustandsgrößen und der Abhängigkeit der Zustandsgrößen von der Zeit klassifiziert werden:

- diskretes System: Wertebereich der Zustandsvariablen ist diskret (Gegenteil: *analoges System*);
- kontinuierliches System: Zustandsänderungen können zu jedem beliebigen Zeitpunkt erfolgen (Gegenteil: *diskontinuierliches System*).

Ebenso lassen sich diskrete und analoge sowie kontinuierliche und diskontinuierliche Prozesse unterscheiden. Der Digitalrechner arbeitet jedoch mit diskret-diskontinuierliche Daten! Dadurch ist bei der Simulation auf dem Digitalrechner unter Umständen ein Wechsel der Systembeschreibung erforderlich.

Man kann ferner noch zwischen Systemen mit linearer Eingangs-Ausgangs-Beziehung (*lineare Systeme*) und Systemen mit nichtlinearer Eingangs-Ausgangs-Beziehung unterscheiden. Ferner bezeichnet man ein System als *statisch*, wenn sich der Zustand nicht mit der Zeit ändert. Das Gegenteil sind dynamische Systeme.

1.4 Was ist ein Modell?

Ein *Modell* eines Originals ist ein System, das als Abbild wesentlicher Eigenschaften und Beziehungen des Originals genutzt wird, um eine bestimmte Aufgabe lösen zu können, deren Durchführung am Original nicht möglich, zu aufwändig oder zu langwierig ist. Man kommt zu einem Modell, indem man aus der in der Wirklichkeit vorhandenen Vielfalt von Faktoren und Beziehungen die für das zu lösende Problem wesentlichen herausgreift und in einem Abbild widerspiegelt.

Man unterscheidet u.a. *konzeptionelle* und *algorithmische* Modelle. Konzeptionelle Modelle sind nicht direkt experimentierbar. Sie können dazu dienen, sich zunächst einen Überblick zu verschaffen und dadurch ausführbare Modelle in Form von Software zu entwickeln. Ein *Algorithmus* ist eine geordnete endliche Folge von elementaren Operationen und Bedingungen zur Umformung von Eingangsgrößen in Ausgangsgrößen, wobei nach Ausführung einer Operation eindeutig feststeht oder an Hand einer Bedingung entschieden werden kann, welche Operation beim nächsten Schritt auszuführen oder ob das Verfahren abzubrechen ist. Ein algorithmisches Modell (oder Simulationsmodell) ist ein Modell, das den originalen Prozessverlauf in Abhängigkeit von Anfangsbedingungen, Eingangsinformationen und Parametern durch algorithmische Verknüpfungen widerspiegelt.

1.5 Ablauf einer Simulationsstudie

Eine Simulationsstudie umfasst das Erstellen, Implementieren und das Experimentieren von Simulationsmodellen, um zu Erkenntnissen zu gelangen, die auf die Wirklichkeit übertragbar sind. Die Modellerstellung erstreckt sich dabei von der Problemdefinition zur Systemdefinition und -identifikation. Implementieren ist das Umsetzen eines konzeptionellen Modells in ein auf einem Rechner ablauffähiges Simulationsmodell. Unter Experimentieren versteht man die gezielte empirische Untersuchung des Modellverhaltens durch wiederholte Simulationsläufe mit systematischen Parametervariationen. Das prinzipielle Ablaufdiagramm ist in Abbildung 1.2 dargestellt.

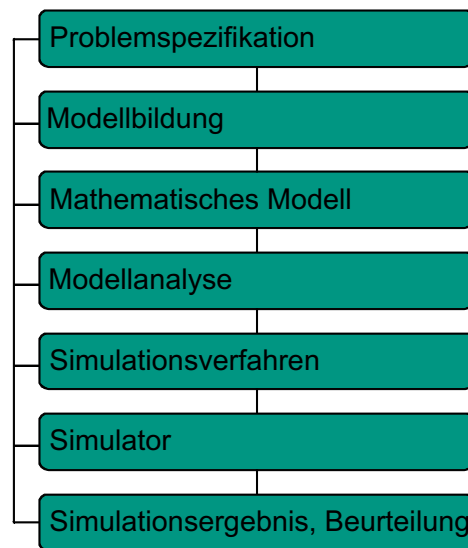


Abbildung 1.2: Ablauf einer Simulationsstudie

Die Möglichkeiten zur Entwicklung von Simulatoren sind vielfältig. Je nach Aufgabenstellung bieten sich folgende Umsetzungen an:

- direkte Programmierung unter Verwendung von Programmbibliotheken, z.B. Matlab, C/C++, Fortran, ...;
- Verwendung spezieller Simulationssprachen, z.B. ACSL, Modelica;
- blockorientierte Simulation, z.B. Simulink, Dymola;
- Komplettpakete für spezielle Systemklassen, z.B.
 - Mehrkörpersysteme: ADAMS, Simpack;
 - Antriebsdynamik: DRESP;
 - Hydraulik, Pneumatik: DSH plus;
 - elektrische Netzwerke: SPICE.

Bei einer Simulationsstudie wird aus einem konzeptionellen Modell ein ablauffähiges Simulationsmodell der Realität erstellt und implementiert. Die wechselseitigen Beziehungen zwischen Realität, konzeptionellem Modell und Simulationsmodell sind in Abbildung 1.3 dargestellt. Unverzichtbarer Bestandteil einer Simulationsstudie ist die Frage nach der Richtigkeit der verwendeten Modelle und der mit ihnen gewonnenen Ergebnisse. Hierzu sind zwei Fragen zu untersuchen:

- Verifikation: Beschreibt das Simulationsmodell das konzeptionelle Modell richtig?
- Validierung: Stimmen Realität und Modell im Hinblick auf die Untersuchungsziele genau genug überein?

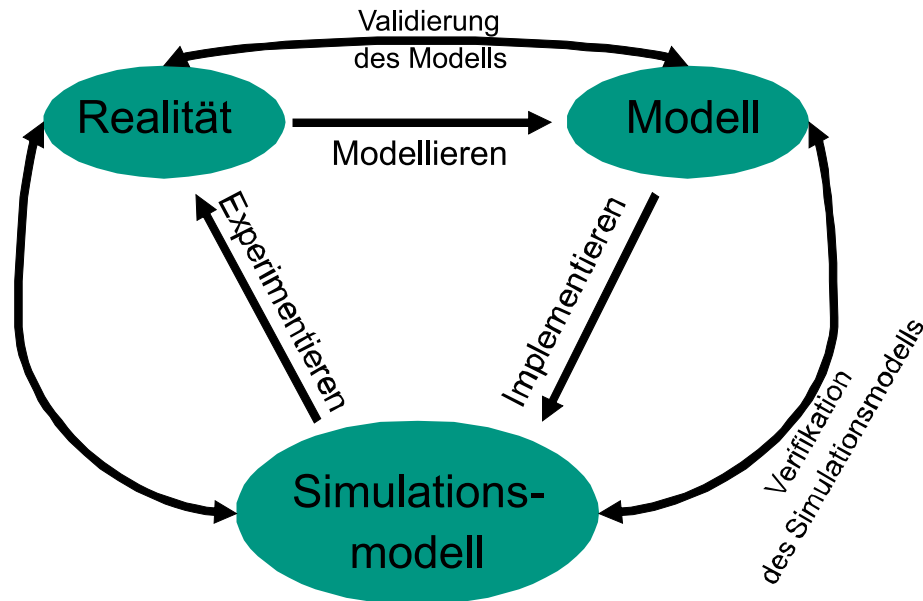


Abbildung 1.3: Beziehungen zwischen Realität, konzeptionellem Modell und Simulationsmodell

Abschließend weist folgendes Zitat von S. W. Golomb [Gol70] auf typische Fallen bei der Modellerstellung hin:

„The DON‘Ts of Mathematical Modelling

DON‘T believe that the model is the reality
 DON‘T extrapolate beyond the region of fit
 DON‘T distort reality to fit the model
 DON‘T retain a discredited model
 DON‘T fall in love with your model“ Quelle: [Gol70]

1.6 Literaturempfehlungen

Der in Karlsruhe lebende Philosoph Günter Ropohl wendet in seiner Systemtheorie der Technik [Rop10] den Systembegriff auf die Technik an. Im Zusammenhang mit dem hier eingeführten Systembegriff sind seine Ausführungen zur Allgemeinen Systemtheorie ([Rop10], Kapitel 3.1) und die Anwendung auf ein allgemeines Modell des Handlungssystems ([Rop10], Kapitel 3.2) besonders empfehlenswert. Im Anhang entwickelt Ropohl ein mathematisches Modell für Handlungssysteme.

Eine kurze Einführung in Modellierung und Simulation bietet das erste Kapitel von [BZBP09].

In [Pie12], Kapitel 8 finden sich einige mit Matlab und Simulink durchgeführte Simulationsstudien.

1.7 Weiterführende Bemerkungen

Während in diesem Kapitel die Systemtheorie recht allgemein betrachtet wurde, werden wir uns im nächsten Kapitel überlegen, welche Eigenschaften Modelle im Maschinenbau haben. Da konzeptionelle Modelle recht vage formuliert sein können, wählen wir die mathematischen Modelle als Ausgangspunkt. Schließen Sie für einen Moment die Augen und überlegen Sie sich, welche mathematischen Modelle Ihnen in Ihrem Bachelor-Studium Maschinenbau bereits begegnet sind...

Richtig: Es waren (lineare und nichtlineare) algebraische Gleichungen, Anfangswertprobleme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen und Anfangs-Randwertprobleme mit partiellen Differentialgleichungen. In dieser Veranstaltung werden wir uns mit den letzten beiden Modellklassen näher beschäftigen. Die diesen mathematischen Modellen entsprechenden physikalischen Modelle sind die Modelle mit konzentrierten bzw. mit verteilten Parametern. Von ihnen handelt das nächste Kapitel.

1.8 Verständnisfragen

1. Modellbildung und Simulation hat im wissenschaftlichen Maschinenbau eine lange Tradition. Suchen Sie im 2. Stock des Alten Maschinenbaugebäudes (Geb. 10.91) nach Modellen. Wie sieht in diesem Fall eine Simulation aus?
2. Überlegen Sie sich Beispiele für komplexe und komplizierte Systeme. Wie müssten die entsprechenden Simulationsverfahren für Ihre Beispiele aussehen?
3. Lesen Sie die Veröffentlichung von Shannon [Sha98] und den folgenden Zeitungsausschnitt. Entwerfen Sie eine Simulationsstudie für das in dem Zeitungsartikel geschilderte Problem. Worauf würden Sie besonders achten?



Abbildung 1.4: Zeitungsausschnitt, Quelle: Badische Neueste Nachrichten, 12.10.09

2 Modellklassen

2.1 Einleitung

Dieses Kapitel behandelt die beiden wichtigsten Modellklassen des Maschinenbaus: Modelle mit konzentrierten Parametern und Modelle mit verteilten Parametern. Um entscheiden zu können, welche Modellklasse für eine gegebene Fragestellung am zweckmäßigsten ist, ist es wichtig, die Unterschiede der Modellklassen zu kennen. Dies wird am Beispiel der Eigenschwingungen verdeutlicht. Darüber hinaus wird auf die Netzwerkdarstellung der Modelle mit konzentrierten Parametern eingegangen.

2.2 Lernziele

Zielsetzung dieses Kapitels: Die Studierenden

- kennen die Modellklassen zur Beschreibung technischer Systeme,
- kennen die Modelleigenschaften von Systemen mit konzentrierten und verteilten Parametern,
- können für technische Problemstellungen entscheiden, ob eine Modellierung mit konzentrierten oder mit verteilten Parametern sinnvoll ist.

2.3 Modelle mit konzentrierten und Modelle mit verteilten Parametern

Bei Modellen mit verteilten Parametern sind die Zustandsgrößen Feldgrößen, die außer von der Zeit auch vom Ort abhängig sind. Dies führt auf eine mathematische Beschreibung mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen. Bei Modellen mit konzentrierten Parametern ist eine ortsunabhängige Darstellung der Zustandsgrößen möglich. In diesem Fall liefert die Modellbeschreibung gewöhnliche Differentialgleichungen.

Modelle mit verteilten Parametern stellen eine umfassendere Modellklasse in dem Sinne dar, dass Modelle mit konzentrierten Parametern aus Modellen mit verteilten Parametern hergeleitet werden können. So ergeben sich beispielsweise die Gleichungen der Starrkörperdynamik aus denen der Dynamik von Kontinua, wenn die Deformation verschwindet. Auch für hydraulische oder elektrische Netzwerke lassen sich die Grundgleichungen durch idealisierende Annahmen aus Kontinuumstheorien der Fluidodynamik bzw. Elektrodynamik ableiten.

Beispiel: Stablängsschwingungen

Wir betrachten die Längsschwingungen eines homogenen unbelasteten Stabes konstanten Querschnitts, Abbildung 2.1(a). Für das Modell mit verteilten Parametern liefert der Freischnitt an einem materiellen Volumenelement (s. Abbildung 2.1(b))

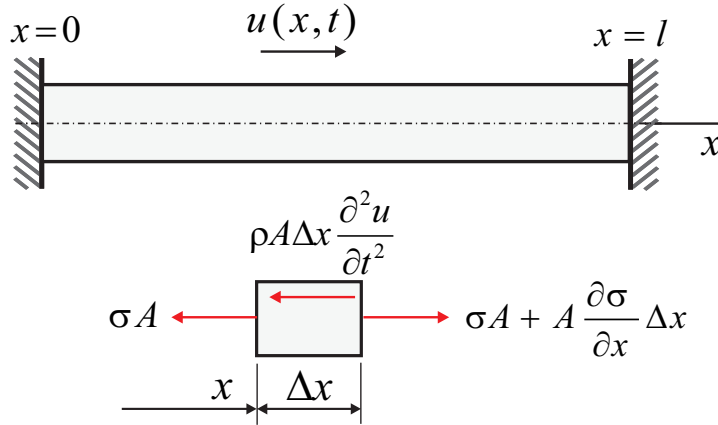


Abbildung 2.1: Längsschwingungen eines homogenen unbelasteten Stabes

$$\rho A \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta x A \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Unter Verwendung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung $\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$ und der Abkürzung $c^2 = \frac{E}{\rho}$ folgt daraus die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Mit den Randbedingungen $u(x=0, t) = 0$, $u(x=l, t) = 0$ und den Anfangsbedingungen $u(x, t=0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = g(x)$ erhalten wir ein Anfangs-Randwertproblem, das eine eindeutige Lösung besitzt. Zur Bestimmung dieser Lösung verwenden wir den Separationsansatz nach Daniell Bernoulli:

$$u(x, t) = W(x)\theta(t),$$

der die Gleichung

$$\ddot{\theta} W - c^2 W'' \theta = 0, \text{ also } c^2 \frac{W''}{W} = \frac{\ddot{\theta}}{\theta}$$

liefert. Da die linke Seite nur vom Ort, die rechte Seite jedoch nur von der Zeit abhängt, und Zeit und Ort unabhängig voneinander verändert werden können, ist der Ausdruck konstant. Setzen wir

$$c^2 \frac{W''}{W} = \frac{\ddot{\theta}}{\theta} = -\omega^2,$$

so ergeben sich die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$W'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 W = 0 \text{ und } \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

zur Beschreibung des orts- und zeitabhängigen Lösungsanteils. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichungen ist bekanntlich

$$W(x) = C_1 \sin(\omega' x) + C_2 \cos(\omega' x), \quad \omega' = \frac{\omega}{c}$$

$$\theta(t) = C_3 \sin(\omega t) + C_4 \cos(\omega t),$$

Die Anpassung des ortsabhängigen Lösungsanteils an die Randbedingungen liefert

$$C_2 = 0 \text{ und } \sin(\omega' \ell) = 0,$$

woraus die Lösungen $\omega_n = n\pi \frac{c}{\ell}$, $n \in \mathbb{N}$, folgen. Sie werden als Eigenkreisfrequenzen und $W_n(x) = C_1 \sin(n\pi \frac{x}{\ell})$ als Eigenformen bezeichnet. Die Gesamtlösung lautet dann

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \sin(\omega_n t) + C_{2n} \cos(\omega_n t)) \sin(\omega'_n x),$$

mit $\omega'_n = \frac{\omega_n}{c}$. Sie muss noch an die Anfangsbedingungen angepasst werden. Unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^{\ell} \sin(\omega'_n x) \sin(\omega'_m x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\ell}{2}, & n = m \end{cases}$$

ergeben sich die Integrationskonstanten C_{1n} und C_{2n} aus den Fourierkoeffizienten der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$:

$$\omega_n C_{1n} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin(\omega'_n x) dx,$$

$$C_{2n} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin(\omega'_n x) dx.$$

Ein Modell mit konzentrierten Parametern erhalten wir, wenn Trägheits- und Rückstellkräfte getrennten Elementen zugewiesen werden. Dazu wird der Stab in einzelne starre Segmente zerlegt, vgl. Abbildung 2.2, die durch Federelemente miteinander verbunden sind.

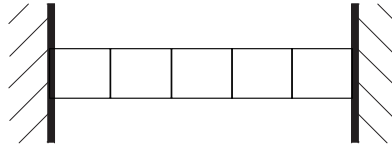


Abbildung 2.2: Zerlegung des Stabs in Segmente

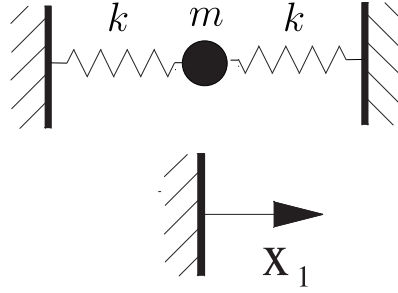


Abbildung 2.3: Einfreiheitsgradschwinger

Im einfachsten Fall ergibt sich der in Abbildung 2.3 skizzierte Einfreiheitsgradschwinger, der durch die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 = 0$$

beschrieben wird. Masse m und Steifigkeit k erhält man, wenn die Gesamtmasse im Massenpunkt konzentriert und die Längssteifigkeit des Stabes auf die beiden Federn im Sinne einer Reihenschaltung aufgeteilt wird:

$$m = \rho A \ell \text{ und } k = \frac{2EA}{\ell}.$$

Die Eigenkreisfrequenz lautet

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{2}{\ell}},$$

was eine sehr grobe Näherung der ersten Eigenkreisfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{\pi}{\ell}}$ des Modells mit verteilten Parametern darstellt.

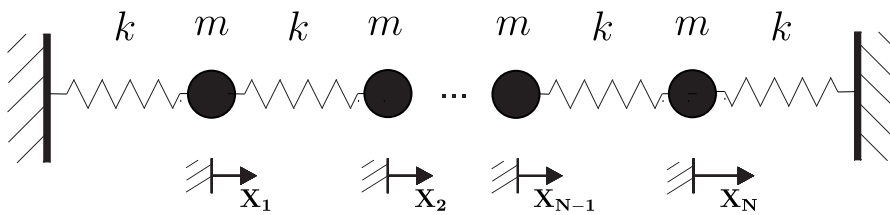


Abbildung 2.4: Schwingerkette

Ein besseres Modell mit konzentrierten Parametern liefert die in Abbildung 2.4 skizzierte Schwingerkette. Hierbei sind N starre Einzelkörper der Masse $m = \rho A \Delta x$, $\Delta x = \frac{\ell}{N}$ mit Federn verbunden, deren Steifigkeit $k = \frac{(N+1)EA}{\ell}$ beträgt. Für die n . Masse ergibt sich

gemäß Abbildung 2.4 die Bewegungsgleichung

$$-m\ddot{x}_n - k(x_n - x_{n-1}) + k(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

also

$$m\ddot{x}_n - kx_{n-1} + 2kx_n - kx_{n+1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Dabei ist $x_0 = 0$ und $x_{N+1} = 0$ zu setzen. Für die in Abbildung 2.4 eingeführten Absolutverschiebungen lautet dann die Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & \dots \\ 0 & m & 0 & \dots \\ & & \ddots & \\ & & & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & \dots \\ -k & 2k & -k & \dots \\ & & \ddots & \\ & & -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für beliebiges N sind die Eigenkreisfrequenzen durch

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m} \left(1 - \cos \left(\frac{n\pi}{N+1} \right) \right)}, \quad n = 1, \dots, N,$$

gegeben. Speziell für die erste Eigenkreisfrequenz ergibt sich daraus die Näherung

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{N+1} \right) \right)}.$$

Mit $\cos \left(\frac{\pi}{N+1} \right) \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{N+1} \right)^2$ folgt daraus

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{k}{m} \frac{\pi}{N+1}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{N}{N+1}}}.$$

Der Fehler zum Modell mit verteilten Parametern ist von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{N+1}}$ und konvergiert für $N \rightarrow \infty$ gegen 0. Auch für die höheren Eigenkreisfrequenzen gilt diese Fehlerabschätzung, solange die Näherung für die Kosinusfunktion gerechtfertigt ist.

Auch die Eigenformen werden durch das Modell mit konzentrierten Parametern angenähert. Für das Modell mit konzentrierten Parametern lauten die Eigenformen:

$$\left[\sin \left(\frac{n\pi}{N+1} \right) \quad \sin \left(\frac{2n\pi}{N+1} \right), \dots, \sin \left(\frac{Nn\pi}{N+1} \right) \right]^T, \quad n = 1, \dots, N.$$

Diese Eigenformen stimmen recht gut mit den Eigenformen $\sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right)$ des Modells mit verteilten Parametern überein, wenn die Auswertung an den Endpunkten $x = j\Delta x = \frac{j\ell}{N}$, $j = 1, \dots, N$, der starren Einzelkörper vorgenommen wird. Es ergibt sich dann

$$\left[\sin \left(\frac{n\pi}{N} \right) \quad \sin \left(\frac{2n\pi}{N} \right), \dots, \sin \left(\frac{Nn\pi}{N} \right) \right]^T, \quad n = 1, \dots, N.$$

Der Fehler ist hier von der Ordnung $\frac{1}{N+1}$.

Insgesamt stellen wir fest:

- Das Modell mit verteilten Parametern wird durch eine partielle Differentialgleichung beschrieben, während das Modell mit konzentrierten Parametern durch eine gewöhnliche Differentialgleichung beschrieben wird. Der Lösungsaufwand für das Modell mit verteilten Parametern ist in der Regel größer.
- Das Modell mit verteilten Parametern besitzt abzählbar unendlich viele Eigenkreisfrequenzen und zugehörige Eigenformen, während das Modell mit konzentrierten Parametern nur eine endliche Anzahl von Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen besitzt.
- Die Eigenformen des Modells mit verteilten Parametern sind kontinuierlich, d.h. für alle Werte $0 \leq x \leq \ell$ gegeben. Für das Modell mit konzentrierten Parametern liegen die Eigenformen nur an den Mittelpunkten der Einzelmassen vor.
- Für $N \rightarrow \infty$ liefert das Modell mit konzentrierten Parametern die Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen des Modells mit verteilten Parametern. Für endliche Werte N ist der Fehler von der Größenordnung $\frac{1}{N+1}$.

2.4 Netzwerke

Modelle mit konzentrierten Parametern werden in einigen Disziplinen, beispielsweise in der Elektrotechnik und in der Hydraulik, durch Netzwerke dargestellt. Als Netzwerke werden Systeme bezeichnet, deren zugrundeliegende Struktur sich durch eine Menge von Knoten darstellen lässt, die mit Zweigen (Kanten) verbunden sind. Ein geschlossener Zug aus Zweigen und Knoten heißt Masche. In der Elektrotechnik und der Hydraulik repräsentieren die Zweige Bauelemente.

2.4.1 Elektrische Netzwerke

Bei der Beschreibung von elektrischen Systemen können häufig vereinfachte Bauelementbeziehungen angenommen werden. So gilt zum Beispiel das Ohmsche Gesetz, das den Zusammenhang zwischen Spannungsabfall und Strom durch den Widerstand beschreibt. Bei dieser Modellierung der elektrischen Zusammenhänge wird stillschweigend die Annahme gemacht, dass der Strom durch den Widerstand an jedem Punkt derselbe ist. In der Wirklichkeit ist diese Annahme nur eingeschränkt gültig, da sich elektrische Zustände nicht unendlich schnell, sondern nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. In Wirklichkeit ist die elektrische Spannung an einem Widerstand nicht nur eine Funktion der Zeit, sondern auch des Ortes. Bei niedrigen Frequenzen oder genauer bei Wellenlängen, die groß gegen die geometrischen Abmessung der elektrischen Schaltung sind, kann die verteilte Natur der elektrischen Eigenschaften vernachlässigt werden. Wenn diese Vereinfachung auf Grund der hohen Frequenzen nicht mehr möglich ist, müssen die Systeme, wie z.B. Leitungen, die mit hoher Signalfrequenz gespeist werden oder Antennen, in Abhängigkeit von Ort und Zeit dargestellt werden und es entstehen bei der Modellierung (lineare oder nichtlineare) *partielle* Differentialgleichungen.

In elektrischen Netzwerken gelten die Kirchhoffschen Gesetze. Zählt man alle Spannungen längs einer Masche zusammen, erhält man den Wert Null, solange sich das Netzwerk quasistatisch verhält.

2.4.2 Hydraulische Netzwerke

Die Beschreibung hydraulischer Netzwerke kann ebenfalls durch Reduktion einer Kontinuumsstheorie gewonnen werden. Die Zweige stellen dann Rohrleitungen dar, die an den Knoten miteinander verbunden sind. Hydraulische und elektrische Netzwerke verhalten sich weitgehend analog zueinander. Setzt man das Volumen mit der elektrischen Ladung und den Druck mit dem elektrischen Potential gleich, lassen sich viele Prinzipien vom elektrischen Netzwerk auf das hydraulische übertragen. So gilt beispielsweise in Analogie zur Kirchhoffschen Maschenregel: Misst man in einem hydraulischen Leitungssystem an mehreren Punkten den Druck, ist die Summe über alle Druckdifferenzen einer Masche zu einem bestimmten Zeitpunkt gleich Null.

2.5 Vorgehensweise bei der Modellierung mit konzentrierten Parametern

Für die Ermittlung eines geeigneten mathematischen Modells eines realen Systems müssen sowohl die Systemstruktur als auch die Parameter (Systemkonstanten) ermittelt werden. Die Aufgabe der Systemidentifikation kann theoretisch (anhand physikalischer Grundlagen) oder experimentell durch Messung des Ein-/Ausgangsverhaltens mittels geeigneter Testsignale erfolgen.

Bei der theoretischen Vorgehensweise sind folgende Schritte durchzuführen:

- Systemzerlegung in rückwirkungsfreie einfache Teilsysteme, Definition der physikalischen Gesetze der Teilsysteme:
 - Mechanische Systeme: kinematische Beziehungen, Newton-Eulersche Gesetze, Materialgesetze
 - Elektrische Systeme: Kirchhoffsche Gesetze, Ohmsches Gesetz, Induktionsgesetz,
 - Hydraulische Systeme: Druckbilanz, Kontinuitätsgleichung, Strömungswiderstand
- Beschreiben von Kopplungsbeziehungen zwischen den Teilsystemen
- Festlegen der Zustandsgrößen
- Zusammenfassen aller Gleichungen zu einem Differentialgleichungssystem oder - im Falle eines linearen Systems - einer Übertragungsfunktion.

In mechanischen, elektrischen und hydraulischen Systemen mit konzentrierten Parametern können Arbeit und Energie definiert und berechnet werden. Damit existiert eine Basis, um trotz der unterschiedlichen physikalischen Systemgrößen zu einer gemeinsamen Systembeschreibung in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Zustandsgrößen zu gelangen. Dies ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

2.6 Literaturempfehlungen

Die hier vorgestellte Diskretisierung von Kontinuumsmodellen wird beispielsweise in [KMR05] behandelt.

2.7 Weiterführende Bemerkungen

Die in Abschnitt 2.3 durchgeführte Diskretisierung ist anschaulich und liefert in unserem Fall brauchbare Näherungen, stellt jedoch keine geeignete mathematische Vorgehensweise zur Approximation des Anfangs-Randwertproblems dar. Geeignete Verfahren werden beispielsweise in der Veranstaltung „Mathematische Methoden der Dynamik“ vorgestellt.

2.8 Verständnisfragen

1. Betrachten Sie das in Abbildung 2.5 dargestellte Regalbediengerät, dass sich wie eingezeichnet bewegen kann. Beim Beschleunigen und Verzögern kommt des Regalbediengerätes kommt es zu Biegeschwingungen des Mastes. Wie würde ein Modell mit verteilten Parametern aussehen, wie ein Modell mit konzentrierten Parametern? Wie müssten die Modellparameter hergeleitet werden?

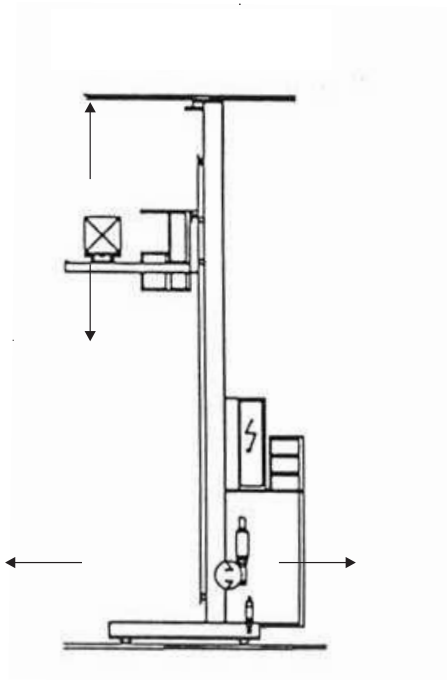


Abbildung 2.5: Regalbediengerät

3 Modelle mit konzentrierten Parametern

3.1 Einleitung

Simulationsmodelle mit verteilten Parametern berechnen ortsabhängige, lokal aufgelöste Zustände. Im Gegensatz dazu wird bei der Simulation mit konzentrierten Parametern der Zustand nicht örtlich aufgelöst sondern als ein Wert angegeben. Beispielhaft besitzt ein starrer Körper eine Geschwindigkeit, die im Zentrum des Körpers angenommen wird oder in einem Raum herrscht an allen Stellen der gleiche Druck.

Modelle von Maschinen lassen sich in vielen Fällen mit konzentrierten Parametern beschreiben, wenn z.B. die Bewegung der Körper untereinander betrachtet wird. Häufig bestehen Maschinen jedoch aus mechanischen, hydraulischen und elektrischen Subsystemen, die miteinander gekoppelt sind (Beispiel Teleskopklader, Abbildung 3.1). Die Modellierung der gesamten Maschine benötigt daher eine fachübergreifende Modellbildung. Hierzu ist es sinnvoll, zunächst die Analogien zwischen den einzelnen Disziplinen zu betrachten und daraus allgemeine Formulierungen zu entwickeln. Im Zentrum der Überlegungen werden dabei die Größen Arbeit und Leistung stehen, die in allen hier betrachteten Disziplinen gebildet werden können.

Das Kapitel stellt zunächst Zusammenhänge zwischen Modellen unterschiedlicher Disziplinen auf. Dazu gehört eine disziplinenübergreifende Klassifizierung der Prozesselemente sowie eine Analogiebildung. Es wird gezeigt, wie die Zustandsgleichungen eines Systems unter der Berücksichtigung von Nebenbedingungen formuliert werden können. Die Vorgehensweise wird am Beispiel eines Roboterfinger exemplarisch gezeigt. Abschließend wird eine Einführung in die Co-Simulation gegeben.

Vorausgesetzt wird, dass die Grundlagen der Fächer Starrkörpermechanik und Elektrotechnik aus dem Bachelor-Studium bereits bekannt sind. Die notwendigen hydrostatischen Grundlagen werden in der Vorlesung vermittelt.

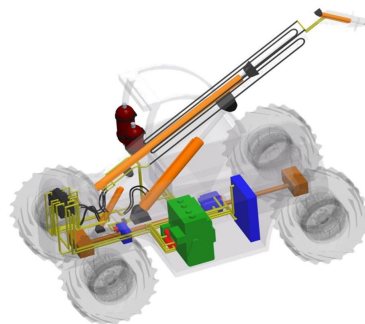


Abbildung 3.1: Teleskopklader

3.2 Lernziele

Zielsetzung dieses Kapitels: Die Studierenden

- können die Prozesselement unterschiedlicher Disziplinen den vorgestellten Kategorien zuordnen.
- können Analogietafeln anwenden, um Modelle in andere Disziplinen umzuwandeln.
- können Zustandsgleichungen für Systeme mit konzentrierten Parametern herleiten.
- können ein Modell mit konzentrierten Parametern in Subsysteme zerlegen, sowie Nebenbedingungen und die Anzahl der Freiheitsgrade bestimmen.

3.3 Klassifizierung von Prozesselementen

Systeme, wie der unbelastete Stab, können durch Modelle mit konzentrierten Parametern approximiert werden. Diese Modelle können disziplinenübergreifend in die idealisierten Elemente *Quellen*, *Speicher*, *Übertrager*, *Wandler* und *Senken* unterteilt werden. Dabei handelt es sich um Zweipole (Eintore) oder Vierpole (Zweitore) (Abbildung 3.2) mit Klemmen als Schnittstellen, an denen Potenzialgrößen (e) und Stromgrößen (f) ausgetauscht werden, worüber sich der Leistungsfluss ermitteln lässt. Der Zusammenhang aus Potenzial- und Stromgröße ist für die jeweiligen Elementtypen gleich und lässt sich durch einfache, meist lineare Gleichungen beschreiben. Das Kapitel orientiert sich dabei an [Ise08].



Abbildung 3.2: Schematische Darstellung von Eintoren (Zweipolen) und Zweitoren (Vierpolen).

Im Folgenden werden die unterschiedlichen Elementtypen und deren Zusammenhänge von Strom- und Potenzialgrößen vorgestellt.

3.3.1 Quellen

Quellen zählen zu den Zweipolen, wobei zwischen den folgenden Varianten unterschieden werden kann

1. Ideale Potenzialquelle:

Das Potenzial $e = e_0$ ist konstant und unabhängig von der Stromgröße. Beispiele sind eine ideale Spannungsquelle, eine druckgeregelte Hydraulikpumpe oder eine konstante Wärmequelle.

2. Ideale Stromquelle:

Hier ist die Stromgröße $f = f_0$ konstant und unabhängig vom anliegenden Potenzial. Beispiele sind eine ideale elektrische Stromquelle oder eine hydraulische Pumpe mit konstantem Volumenstrom.

Die abgegebene Leistung ist je nach Variante $P(t) = e_0 f(t)$ (Potenzialquelle) oder $P(t) = f_0 e(t)$ (Stromquelle).

3.3.2 Speicher

Diese Elemente sind abhängig von der über der Zeit t zu- oder abgeführten Energie E . Dieser Zusammenhang kann verallgemeinert ausgedrückt werden durch

$$dE_s(t) = P(t)dt = f(t)e(t)dt \quad (3.1)$$

Unterschieden wird zwischen Potenzialspeichern und Stromspeichern, wodurch sich dieser Zusammenhang weiter vereinfachen lässt.

1. Potenzialspeicher:

Das Potenzial ist proportional zum über der Zeit integrierten Strom.

$$e(t) = \frac{1}{C} \int f(t)dt \quad \text{bzw.} \quad f(t) = C \frac{de(t)}{dt} \quad (3.2)$$

Beispiele hierfür sind der elektrische Kondensator oder ein Wärmespeicher.

2. Stromspeicher:

Entsprechend ist hier der Strom proportional zum angesammelten Potenzial.

$$f(t) = \frac{1}{L} \int e(t)dt \quad \text{bzw.} \quad L \frac{df(t)}{dt} = e(t) \quad (3.3)$$

Hierunter fallen im Allgemeinen Trägheiten, wie die elektrische Induktivität oder der hydraulische Volumenstrom.

3.3.3 Übertrager

Diese Prozesselemente sind Vierpole mit gleichen Eingangs- und Ausgangsleistungen. Über das Element verändern sich jedoch die Ströme und Potenziale, sodass aus einem größeren Ausgangsstrom ein kleineres Ausgangspotenzial folgt.

$$P_1 - P_2 = 0 \quad (3.4)$$

$$f_1 e_1 - f_2 e_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{e_2}{e_1} \quad (3.5)$$

Ein solches Verhalten zeigen unter anderem Getriebe, elektrische Transformatoren und Druckübertrager.

3.3.4 Wandler

Beispiele hierfür sind Elektromotoren, hydraulische Pumpen, Verbrennungsmotoren oder hydraulische Kolbenzylinder. Sie haben gemein, dass sie die Leistung einer Disziplinen in eine andere wandeln. Beim Elektromotor ist dies die elektrische Leistung in mechanische. Mathematisch lässt sich der Zusammenhang beschreiben durch

$$e_2 = g_1(f_1); \quad e_1 = h_1(f_2). \quad (3.6)$$

Anzumerken ist, dass nicht bei allen Wandlern der Leistungsfluss umgekehrt werden kann. So erhält man z.B. beim Verbrennungsmotor keine chemische Energie, wenn man diesen antreibt.

3.3.5 Senken/dissipative Elemente

Systeme, bei denen durch unumkehrbare Prozesse, wie die Umwandlung in Wärmeenergie, die Entropie erhöht wird und Verluste entstehen, nennt man Senken. Dieser Effekt tritt bei allen realen Systemen auf. Im Falle von elektrischen Widerständen, hydraulischen Drosseln oder mechanischen Dämpfern existiert ein proportionaler Zusammenhang aus Potenzial- und Stromgröße.

$$e(t) = Rf(t) \quad (3.7)$$

Es gibt aber auch Senken, bei denen andere Zusammenhänge vorliegen wie bei hydraulischen Blenden oder mechanischer Reibung. Die bisherigen Elemente wurden alle als ideal und verlustfrei betrachtet. Da in der Realität immer Verluste auftreten, können diese Effekte durch das Hinzufügen von dissipativen Elementen im Modell berücksichtigt werden.

3.3.6 Kombinierung von Prozesselementen zu Netzwerken

Unter der Berücksichtigung, dass die zugrunde liegenden physikalischen Strom- und Potenzialgrößen übereinstimmen, können die Prozesselemente zu beliebigen Netzwerken (Systemen) verschaltet werden. Aufgrund der Verschaltung der Bauelemente ergeben sich jedoch Nebenbedingungen, die es erlauben, die Zahl der unbekannten Zustandsgrößen zu reduzieren.

Diese Gleichungen können folgende Form annehmen:

- **Knotengleichung:** kinematische Beziehungen, Kontinuitätsgleichung in der Strömungsmechanik, 1. Kirchhoffsches Gesetz
- **Maschengleichung:** Kräftegleichgewicht und Momentengleichgewicht der Statik, Druckbilanz, 2. Kirchhoffsches Gesetz

3.4 Analogietafeln

Zu den zuvor vorgestellten Klassifizierungen von Prozesselementen lassen sich jeweils Beispiele mehrerer Disziplinen finden. Darüber lassen sich Analogien zwischen den unterschiedlichen Disziplinen ableiten. Als Beispiel soll zunächst eine reale hydraulische Leitung gewählt werden. Betrachtet man die Leitung als Black-Box, handelt es sich um einen Vierpol, mit unterschiedlichen Ein- und Ausgangsdrücken sowie unterschiedlichen Ein- und Ausgangsvolumenströmen. Schaut man in die Black-Box hinein und betrachtet die physikalischen Zusammenhänge der Leitung, fließt darin ein Fluid mit einer gewissen Geschwindigkeit und Trägheit. An der Innenwand kommt es durch die Reibung mit dem Fluid zu einem dissipativen Effekt. Die Leitung weist zudem eine Elastizität auf. Obwohl die Reibung, die Trägheit und die Speicherwirkung durch die Elastizität über die gesamte Länge der Leitung auftreten, sollen Sie durch eine hydraulische Drossel, einen hydraulischen Speicher und einer hydraulischen Induktivität als konzentrierte Parameter approximiert werden. Eine mögliche Modellierung einer solchen realen Leitung¹ ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Zu erkennen ist, dass die Hydraulik sich hierbei bereits einer Analogie bedient, indem für die hydraulische Induktivität das Symbol der elektrischen Induktivität verwendet wird.

¹Es wird hier davon ausgegangen, dass die größere Kapazität des Systems auf der Ausgangsseite zu finden ist. Je nach Systemkontext muss die Position der Kapazität verschoben oder weitere Kapazitäten hinzugefügt werden.

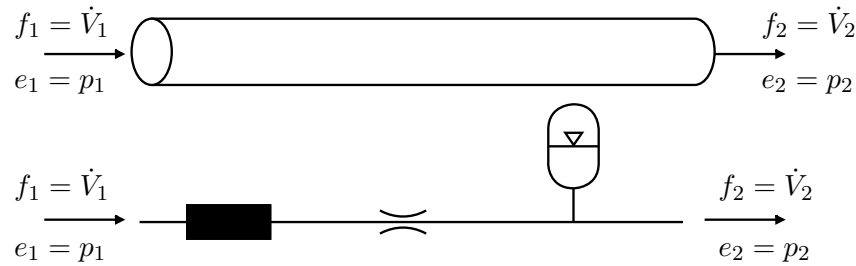


Abbildung 3.3: Reale hydraulische Leitung und hydraulische Modellierung mit Prozesselementen.

Die hydraulische Drossel und der hydraulische Potenzialspeicher lassen sich durch analoge elektrische Prozesselemente ersetzen, die die selben Zusammenhänge zwischen den Strom- und Spannungsgrößen aufweisen. Daraus ergibt sich das elektrische Schaltbild aus Abbildung 3.4.

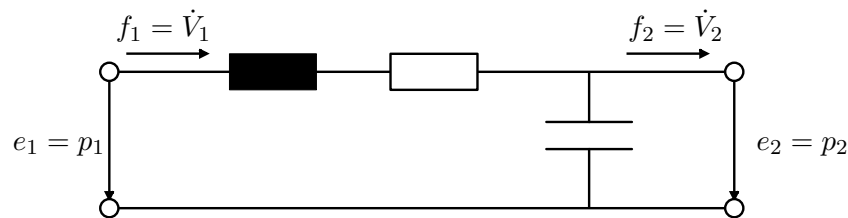


Abbildung 3.4: Elektrisches Ersatzschaltbild der realen hydraulischen Leitung.

Eine grundlegende Annahme bei der Analogiebildung ist, dass für die jeweilige Disziplinen feststeht, welche physikalische Größe die Stromgröße und welches die Potenzialgröße ist. Hier gibt es beliebig viele Möglichkeiten, wobei die häufigsten in der Literatur beschriebenen die folgenden sind:

- **Potenzial-Strom-Darstellung:**

Potenziale sind Größen, die als Differenz zwischen zwei Klemmen auftreten wie die elektrische Spannung und Druckdifferenzen. Auch die Kraft oder das Moment aus der Mechanik fallen darunter. Stromgrößen sind Größen, die in eine Klemme hinein-fließen, wie ein Wärmestrom, ein Volumenstrom oder die Geschwindigkeit. Bei einer mechanisch-elektrischen Analogie entspricht die elektrische Spannung der Kraft, die Stromstärke der Geschwindigkeit und ein viskoser Dämpfer ist analog zu einem elektrischen Widerstand. Die mechanische Reihenschaltung entspricht jedoch einer Parallelschaltung, weshalb man diese Analogie als schaltungsreziprok bezeichnet. Diese Eigenschaft wird später noch in einem Beispiel erläutert.

- **Trans-Per-Darstellung (Quer-Durch-Darstellung):**

Hier wird unterschieden zwischen Quergrößen, die, wie die elektrische Spannung, Geschwindigkeit oder Druckdifferenz, zwischen zwei Klemmen gemessen werden können. Durchgrößen sind die Größen, die an einer Klemme gemessen werden können. Dazu zählt die Kraft, das Moment, der elektrische Strom und der Volumenstrom. Es folgt, dass bei der Trans-Per-Darstellung die Spannung der Geschwindigkeit und die Stromstärke der Kraft entspricht. Diese Analogie ist schaltungstreu; die Beiwerte eines viskosen Dämpfers und eines elektrischen Widerstands verhalten sich jedoch reziprok zueinander. Man spricht daher von einer widerstandsreziproken Analogie.

Anwendbar sind die Analogien auf alle Disziplinen. Bei mechanischen Systemen wird zudem zwischen Translation und Rotation unterschieden. Der weitere Teil dieses Kapitels beschränkt sich auf die Mechanik, Elektrotechnik und die Hydraulik. Gegenüberstellen lassen sich Analogien in Analogietafeln, wie es für die Potenzial-Strom-Darstellung in Tabelle 3.1 der Fall ist.

	<u>Elektrisch</u>	<u>Mechanisch</u>		<u>Hydraulisch</u>
		Translation	Rotation	
Potenzialdiff. e	U	F	M	p
Stromgröße f	I	v	w	Q
Integrierte Potenzialdiff. p	$\Phi = L \cdot I$ (<i>magn. Fluss</i>)	$p = m \cdot v$ (<i>Impuls</i>)	$L = J \cdot \omega$ (<i>Drall</i>)	$\Gamma = L_H \cdot Q$ (<i>Druckimpuls</i>)
Integrierte Stromgröße q	Ladung Q	Verschiebung x	Winkel φ	Volumen V
Widerstand R	$\frac{U}{I}$	$\frac{F}{v}$ ($= d$)	$\frac{M}{w}$ (<i>Drehdämpfer</i>)	$\frac{p}{Q}$
Kapazität C	$\frac{Q}{U}$	$\frac{x}{F}$ ($= \frac{1}{k}$)	$\frac{\varphi}{M}$ (<i>Drehfeder</i>)	$\frac{V}{p}$
Induktivität L	$\frac{U}{\dot{I}}$	$\frac{F}{\dot{v}}$ ($= m$)	$\frac{M}{\dot{\omega}}$ ($= J$)	$\frac{p}{\dot{Q}}$
Leistung: $P = e \cdot f$	$U \cdot I$	$F \cdot v$	$M \cdot \omega$	$p \cdot Q$
Energie: $E = \int f dp$	$\frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$	$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	$\frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$	$\frac{1}{2} \cdot L_h \cdot Q^2$
Maschenregel:	$\sum_i U_i = 0$	$\sum_i v_i = 0$	$\sum_i \omega_i = 0$	$\sum_i p_i = 0$
Knotenregel:	$\sum_i I_i = 0$	$\sum_i F_i = 0$	$\sum_i M_i = 0$	$\sum_i Q_i = 0$

Tabelle 3.1: Analogietafel: Potenzial-Strom-Darstellung

Nachfolgend wird beispielhaft eine elektrische Schaltung in ihr mechanisches Äquivalent unter Verwendung der Potenzial-Strom-Analogie und Trans-Per-Analogie umgewandelt. Dies verdeutlicht die schaltungsreziproke Eigenschaft der Potenzial-Strom-Darstellung und die widerstandsreziproke Eigenschaft der Trans-Per-Darstellung.

3.4.1 Gegenüberstellung von Trans-Per-Darstellung und Potenzial-Strom-Darstellung

In Abbildung 3.5 ist eine elektrische Beispielschaltung dargestellt, die jeweils mit der Trans-Per- und der Potenzial-Strom-Darstellung in ihr mechanisches Äquivalent überführt werden soll.

Zunächst werden die Knoten- und Maschengleichungen aufgestellt. Für den Knoten K_1 erhält man:

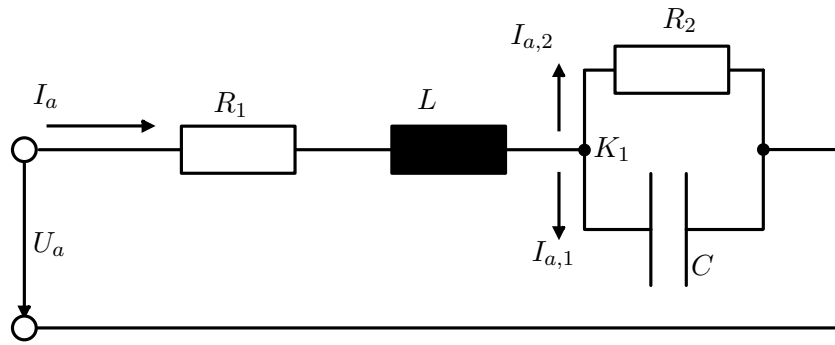


Abbildung 3.5: Elektrische Schaltung als Grundlage für den Darstellungsvergleich.

$$K_1 : \quad 0 = I_a - I_{a,1} - I_{a,2} \quad (3.8)$$

Insgesamt benötigt es zwei Maschengleichungen:

$$M_1 : \quad 0 = -U_a + I_a \cdot R_1 + \dot{I}_a \cdot L + I_{a,2} \cdot R_2 \quad (3.9)$$

$$M_2 : \quad 0 = -\frac{1}{C} \int I_{a,1} dt + I_{a,2} \cdot R_2 \quad (3.10)$$

Mithilfe von K_1 kann eine der Stromgrößen der Maschengleichungen eliminiert werden. Setzt man $I_{a,2} = I_a - I_{a,1}$ ein erhält man:

$$M_1 : \quad U_a = I_a \cdot R_1 + \dot{I}_a \cdot L + (I_a - I_{a,1}) \cdot R_2 \quad (3.11)$$

$$M_2 : \quad 0 = -\frac{1}{C} \int I_{a,1} dt + (I_a - I_{a,1}) \cdot R_2 \quad (3.12)$$

Mit diesen beiden Gleichungen lässt sich der Zustand des Systems beschreiben. Mit den unterschiedlichen Darstellungen werden diese nun in mechanische Systeme überführt.

Vergleich von Trans-Per- und Potenzial-Strom-Darstellung:

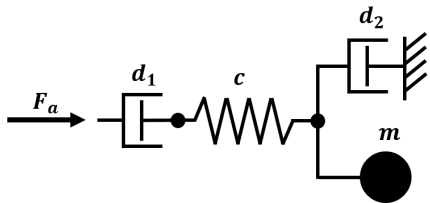
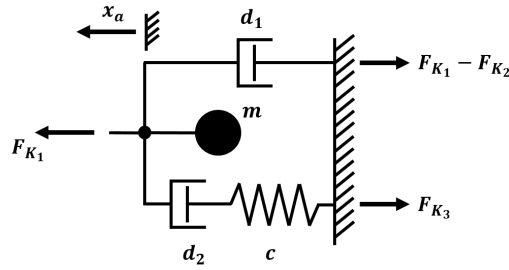
Trans-Per-Darstellung:	Potenzial-Strom-Darstellung:
<p>Bei der Trans-Per-Darstellung entsprechen sich Kraft und elektrischer Strom sowie Geschwindigkeit und elektrische Spannung. Ersetzt man diese elektrischen Größen mit ihrem mechanischen Äquivalent erhält man:</p> $M_1 : v_a = F_a \cdot R_1 + \dot{F}_a \cdot L + (F_a - F_{a,1}) \cdot R_2$ $M_2 : 0 = -\frac{1}{C} \int F_{a,1} dt + (F_a - F_{a,1}) \cdot R_2$ <p>Hier kann man jeweils aus den Zusammenhängen aus Kraft und den Ableitungen der Verschiebung ($F = cx$, $F = d\dot{x}$, $F = m\ddot{x}$) die zum elektrischen Modell äquivalenten mechanischen Bauteile ablesen:</p> <p>Dämpfer: $d = \frac{1}{R}$</p> <p>Feder: $c = \frac{1}{L}$</p> <p>Masse: $m = C$</p> <p>Eingesetzt ergeben sich daraus:</p> $M_1 : v_a = F_a \cdot \frac{1}{d_1} + \dot{F}_a \cdot \frac{1}{c} + (F_a - F_{a,1}) \cdot \frac{1}{d_2}$ $M_2 : 0 = -\frac{1}{m} \int F_{a,1} dt + (F_a - F_{a,1}) \cdot \frac{1}{d_2}$ <p>Daraus lassen sich jeweils die folgenden mechanischen Systeme ableiten:</p> 	<p>Bei der Potenzial-Strom-Darstellung entsprechen sich Kraft und elektrische Spannung sowie Geschwindigkeit und elektrische Stromstärke. Hier ergibt das Austauschen dieser elektrischen Größen mit den mechanischen:</p> $M_1 : F_a = v_a \cdot R_1 + \dot{v}_a \cdot L + (v_a - v_{a,1}) \cdot R_2$ $M_2 : 0 = -\frac{1}{C} \int v_{a,1} dt + (v_a - v_{a,1}) \cdot R_2$ <p>Dämpfer: $d = R$</p> <p>Feder: $c = \frac{1}{C}$</p> <p>Masse: $m = L$</p> <p>Eingesetzt ergeben sich daraus:</p> $M_1 : F_a = v_a \cdot d_1 + \dot{v}_a \cdot m + (v_a - v_{a,1}) \cdot d_2$ $M_2 : 0 = -k \cdot x_{a,1} + (v_a - v_{a,1}) \cdot d_2$ <p>Daraus lassen sich jeweils die folgenden mechanischen Systeme ableiten:</p> 

Tabelle 3.2: Vergleich von Trans-Per- und Potenzial-Strom-Darstellung anhand des Beispiels aus Abbildung 3.5.

Wie das Beispiel in Tabelle 3.2 zeigt, liefern die Analogien der beiden Darstellungen bei der Umwandlung eines elektrischen Systems in ein mechanisches unterschiedliche Systeme. Bei der Trans-Per-Darstellung gleicht der elektrische Schaltungsaufbau dem mechanischen Aufbau. Die sich daraus ergebenden Zusammenhänge zwischen den Bauteilen ist dabei allerdings nicht intuitiv. Beispielsweise wird die elektrische Induktivität, welche einer elektrischen Trägheit entspricht, in eine Federkonstante umgerechnet und nicht in die mecha-

nische Trägheit, der Masse.

Im Gegensatz dazu sind bei der Umwandlung mit der Potenzial-Strom-Darstellung die Trägheiten und Kapazitäten Funktionen der Kapazitäten und Trägheiten der anderen Domäne. Unterschiedlich ist jedoch der Schaltungsaufbau, aus einer Reihenschaltung wird eine parallele (und umgekehrt).

Bei der Modellierung muss darauf geachtet werden, welche der Darstellungen verwendet wird. Die häufiger verwendete Darstellung ist die Potenzial-Strom-Darstellung.

3.5 Formulierung der Zustandsgleichungen

Die Naturgesetze allein sind zur Aufstellung der Zustandsgleichungen nicht ausreichend, da Nebenbedingungen noch berücksichtigt werden müssen. Neben der Formulierung der Zustandsgleichungen unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen können für Systeme mit konzentrierten Parametern weitere Verfahren herangezogen werden. Beispiele der Mechanik sind:

- Projektionsgleichungen
- Lagrange-Gleichungen 1. Art.

Die Naturgesetze liefern zunächst die Identität $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{e}$. Dabei sind unter $\dot{\mathbf{p}}$ in der Mechanik die Trägheitswirkungen und in der Elektrotechnik und Hydraulik die Induktivitäten zu verstehen. Die rechte Seite ergibt sich durch Krafteinwirkungen (z.B. Feder, Dämpfer, Reibungsverluste) bzw. in der Elektrotechnik durch die Änderung der Spannung bspw. infolge von Widerständen, Kondensatoren sowie durch die induzierte Spannung bei Gleichstrommaschinen. Zu jeder dieser Potenzialdifferenzgrößen kann eine Stromgröße angegeben werden, die die Potenzialdifferenzgröße zu einem Ausdruck für die Leistung ergänzt.

Liegen n Zustandsgleichungen und m unabhängige Nebenbedingungen vor, so hat das System $n - m$ Freiheitsgrade, d.h., es können $n - m = i$ verallgemeinerte integrierte Stromgrößen \mathbf{s} eingeführt werden, die voneinander unabhängig sind. Damit erhält man die allgemeine Form des Zustandsgleichungssystem mit dem Zustandsgrößenvektor \mathbf{s} , bestehend aus Stromgrößen.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \vdots \\ \dot{s}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & & b_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & & c_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_i \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Zu Verdeutlichung der Vorgehensweise werden im folgenden Kapitel die Zustandsgleichung mit den Nebenbedingungen exemplarisch aufgestellt.

3.6 Beispiel: Hydraulischer Finger einer Roboterhand

Es soll mithilfe der Potenzial-Strom Analogie ein Modell für den in Abbildung 3.6 dargestellten hydraulischen Finger einer Roboterhand ermittelt und die zugehörigen Zustandsgleichungen aufgestellt werden.

1. Festlegen der Teilsysteme:

Welche Komponenten jeweils welcher Disziplinen zuzuordnen sind und wo die Wandlungen zwischen den Disziplinen stattfinden, ist in Abbildung 3.7 farblich zu er-

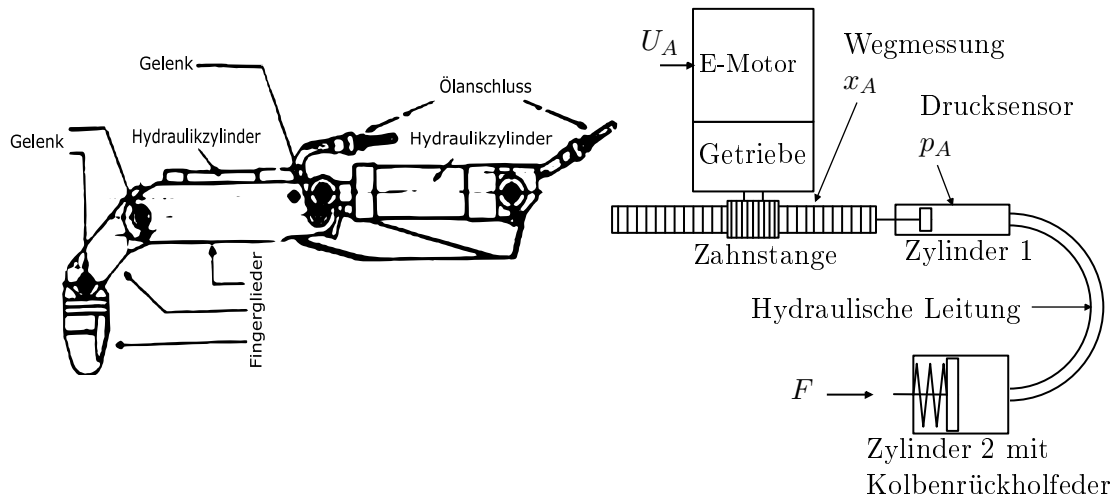


Abbildung 3.6: Hydraulischer Finger einer Roboterhand.

kennen. Für die Modellierung werden zunächst die einzelnen Komponenten durch konzentrierte Parameter modelliert und analytisch beschrieben.

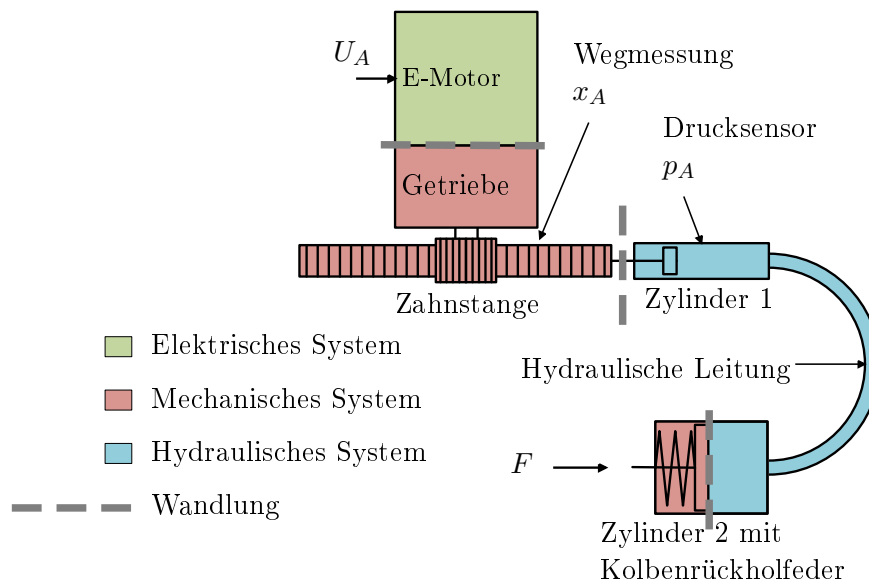


Abbildung 3.7: Unterteilung des Systems in Subsysteme.

- Gleichstrommotor:* Abbildung 3.8 zeigt den Ankerkreis des Gleichstrommotors mit Ankerspannung u_1 , Wicklungswiderstand R_A , Induktivität der Ankerwicklung L_A und induzierte Spannung u_i . Der Ankerstrom ist \dot{q}_1 . Es wird davon ausgegangen, dass der Gleichstrommotor permanent erregt ist. Der Erregerkreis muss dann nicht weiter betrachtet werden.
- Antriebskolben:* Der Antriebskolben ist ein starrer Körper. An ihm greift die Kraft F_z an, die vom Motor über ein Zahnstangengetriebe aufgebracht wird. Ferner wirkt auf den Kolben der Druck p_2 . Bei einer Bewegung des Kolbens muss

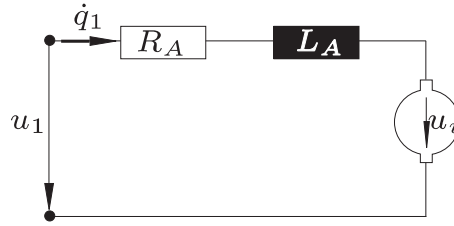


Abbildung 3.8: Elektrisches Netzwerk des Gleichstrommotors

die Reibkraft $F_{r,2}$ berücksichtigt werden, die der Bewegung entgegen gerichtet ist.

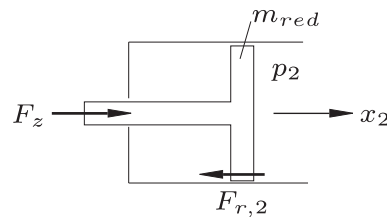


Abbildung 3.9: Mechanisches Modell des Antriebskolbens

- c) *Ölleitung*: Die Ölleitung wird auf beiden Seiten durch Drücke (p_3 bzw. p_4) belastet. Die Strömung durch die raue Rohrleitung und die Kompressibilität können vereinfacht wie bereits in Abbildung 3.3 und Abbildung 3.4 durch ein hydraulische Netzwerk modelliert werden, wobei die Kompressibilität als diskrete Komponente (z.B. einen Druckspeicher) vereinfacht wurde.
- d) *Abtriebskolben*: Auch beim Abtriebskolben (Masse m_5) muss der Druck (hier: p_5) berücksichtigt werden. Ferner wirkt auf den Kolben die Fingerkraft F_F und eine durch die Rückholfeder (Federkonstante c_F) hervorgerufene Federkraft. Bewegt sich der Kolben, dann wirkt die Reibkraft $F_{r,5}$ der Bewegung entgegen.

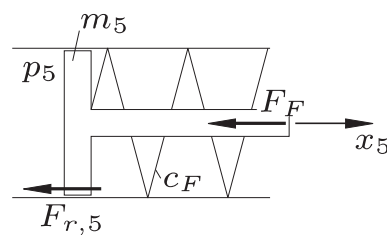


Abbildung 3.10: Mechanisches Modell des Abtriebskolbens

2. Festlegen der integrierten Stromgrößen:

Für jedes der Teilsysteme müssen nun integrierte Stromgrößen zur Beschreibung des Systemzustands festgelegt werden. Für den Ankerkreis ist dies die Ladung als Zeitintegral des Ankerstroms. Für die beiden Kolben werden die Kolbenverschiebungen als integrierte Stromgrößen gewählt. Bei der Ölleitung treten die Verschiebungen an den Endflächen als integrierte Stromgrößen auf. Es gibt also insgesamt fünf integrierte Stromgrößen, die den Systemzustand beschreiben.

3. *Aufstellen der Nebenbedingungen:*

An der Schnittstelle zwischen Ölleitung und Kolben liegt jeweils eine Nebenbedingung vor, denn die Verschiebung des Kolbens muss gleich der Verschiebung des unmittelbar an ihn angrenzenden Fluids sein. Dadurch ergeben sich zwei Nebenbedingungen.

4. *Auswahl der verallgemeinerten integrierten Stromgrößen:*

Aufgrund der zwei Nebenbedingungen können drei verallgemeinerte integrierte Stromgrößen eingeführt werden, die den Systemzustand eindeutig beschreiben. Als verallgemeinerte integrierte Stromgrößen wählen wir die Ladung im Ankerkreis und die Verschiebungen der beiden Kolben:

$$\mathbf{s} = (q_1, x_2, x_5)^T$$

5. *Aufstellen der Zustandsgleichungen und der Projektionsvektoren für jedes Teilsystem:*

a) *Gleichstrommotor (Maschenregel):*

$$L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + u_i - u_1 = 0$$

Der Gleichstrommotor stellt einen sich drehenden stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld dar. Es gilt das Induktionsgesetz. Die induzierte Spannung lässt sich durch den magnetischen Fluss berechnen: $u_i = \Phi \omega$. Durch Analyse des Zahnstangengetriebes ergibt sich ein Zusammenhang $M_M = i_G F_z$ zwischen Motormoment und der Kraft F_z , wobei i_G der Übersetzungsfaktor des Getriebes ist. Für die kinematischen Größen gilt dann $\dot{x}_2 = i_G \omega$. Mit dieser Gleichung lässt sich die induzierte Spannung als $u_i = \frac{\Phi}{i_G} \dot{x}_2$ schreiben, bzw. $u_i = k \dot{x}_2$ mit $k = \frac{\Phi}{i_G}$.

b) *Antriebskolben (Newtonsche Bewegungsgleichung):*

$$m_{red} \ddot{x}_2 = F_z - F_{r,2} \operatorname{sgn}(\dot{x}_2) - p_2 A_2$$

Die Kraft F_z lässt sich auf den Ankerstrom \dot{q}_1 zurückführen. Aus der Gleichheit von elektrischer und mechanischer Leistung folgt $M_M \omega = u_i \dot{q}_1$. Mit $M_M = i_G F_z$ und $u_i = \Phi \omega$ folgt daraus $F_z = \frac{\Phi}{i_G} \dot{q}_1 = k \dot{q}_1$.

c) *Ölleitung (Maschenregel für Drücke und Druckaufbaugleichung):*

$$\begin{aligned} 0 &= L_h \dot{Q}_3 + R_h Q_3 - p_3 + p_4 \\ &= L_h A_2 \ddot{x}_2 + R_h A_2 \dot{x}_2 - p_3 + p_4 \\ 0 &= \frac{1}{C_h} V_c - p_4 \\ &= \frac{1}{C_h} (V_3 - V_4) - p_4 = \frac{1}{C_h} (A_2 x_2 - A_5 x_5) - p_4 \end{aligned}$$

d) *Abtriebskolben (Newtonsche Bewegungsgleichung):*

$$m_5 \ddot{x}_5 = -c_5 x_5 - F_{r,5} \operatorname{sgn}(\dot{x}_5) - F_F + p_5 A_5$$

6. *Aufstellen des Differentialgleichungssystems:*

Da der Systemzustand durch drei Zustandsgrößen eindeutig beschrieben wird und

diese Zustandsgröße mit Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in den einzelnen Zustandsgleichungen auftreten, wird das System durch drei Differentialgleichungen 2. Ordnung beschrieben. Wir erhalten das Differentialgleichungssystem, indem wir aus den 5 Zustandsgleichungen je eine Gleichung für p_5 und p_3 bilden und diese Größen in den anderen Gleichungen eliminieren. Es verbleiben 3 Zustandsgleichungen mit den integrierte Stromgrößen $s = (q_1, x_2, x_5)^T$. Werden die Terme nach der Ordnung der Zeitableitung sortiert, so ergibt sich schließlich das System

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{red} + \frac{\rho L}{A_3} A_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix} \ddot{s} + \begin{bmatrix} R_1 & k & 0 \\ -k & A_2^2 R_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{s} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_h} A_2^2 & -\frac{1}{C_h} A_2 A_5 \\ 0 & -\frac{1}{C_h} A_2 A_5 & \frac{1}{C_h} A_5^2 + c_5 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} u_1 \\ -F_{r,2} \operatorname{sgn}(\dot{x}_2) \\ -F_{r,5} \operatorname{sgn}(\dot{x}_5) - F_F \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.7 Co-Simulationen

Die Beschreibung eines gesamten Systems, wie z.B. eines Radladers, bedient sich häufig mehrerer Disziplinen. Für den Radlader sind dies die Mechanik und die Hydraulik. Prototypisch wird auch an der Elektrifizierung des Fahrantriebs geforscht, so dass dann zudem die Modellbildung elektrischer Komponenten notwendig wäre.

Für die Modellbildung eines solchen Systems gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Zum Ersten kann über eine Analogiebildung die Beschreibung in einer Disziplin erfolgen. Mechanische und hydraulische Komponenten könnten beispielsweise wie elektrische Systeme aufgebaut werden und dann zusammen mit dem elektrischen System in einem entsprechenden Modell umgesetzt werden. Problematisch ist hierbei zum einen die Übersichtlichkeit: Der direkte Zusammenhang zwischen den mechanischen Komponenten und der elektrotechnischen Darstellung geht verloren. Zum anderen sind die Teilsysteme unterschiedlich steif, so dass Probleme beim Gleichungslöser, dem sogenannten Solver, während der Berechnung entstehen können.

Zum Zweiten können die Teilmodelle miteinander gekoppelt werden. So können die Teilmodelle in ihren spezifischen Disziplinen aufgebaut werden und auf die Disziplin optimierte Integrator und Programme verwendet werden. Abbildung 3.11 zeigt die unterschiedlichen Möglichkeiten der Kopplung.

Wird das zu simulierende System in einem Simulationsprogramm modelliert und mit einem Gleichungslöser, hier Integrator, gelöst, so spricht man von einer klassischen Simulation. Werden für die unterschiedlichen Disziplinen zur Modellierung unterschiedliche Modellierungswerkzeuge genutzt, so spricht man von einer Zusammenführung der Gleichungssysteme. Ein Integrator löst dabei die numerischen Gleichungen. Werden die unterschiedlichen Teilsysteme in verschiedenen Programmen modelliert und die dort vorhandenen Integrator genutzt, spricht man von einer Co-Simulation. Die Vorteile sind, wie bereits oben erläutert, die gute Übersichtlichkeit und die Verwendung disziplinspezifischer Integrator. Nachteilig ist jedoch der erhöhte Rechenaufwand durch die Verteilung der Informationen und eine damit verbundene längere Simulationsdauer. Die Modellseparation wird genutzt, wenn das System aus unterschiedlich steifen Subsystemen besteht, die unterschiedliche Integratoren

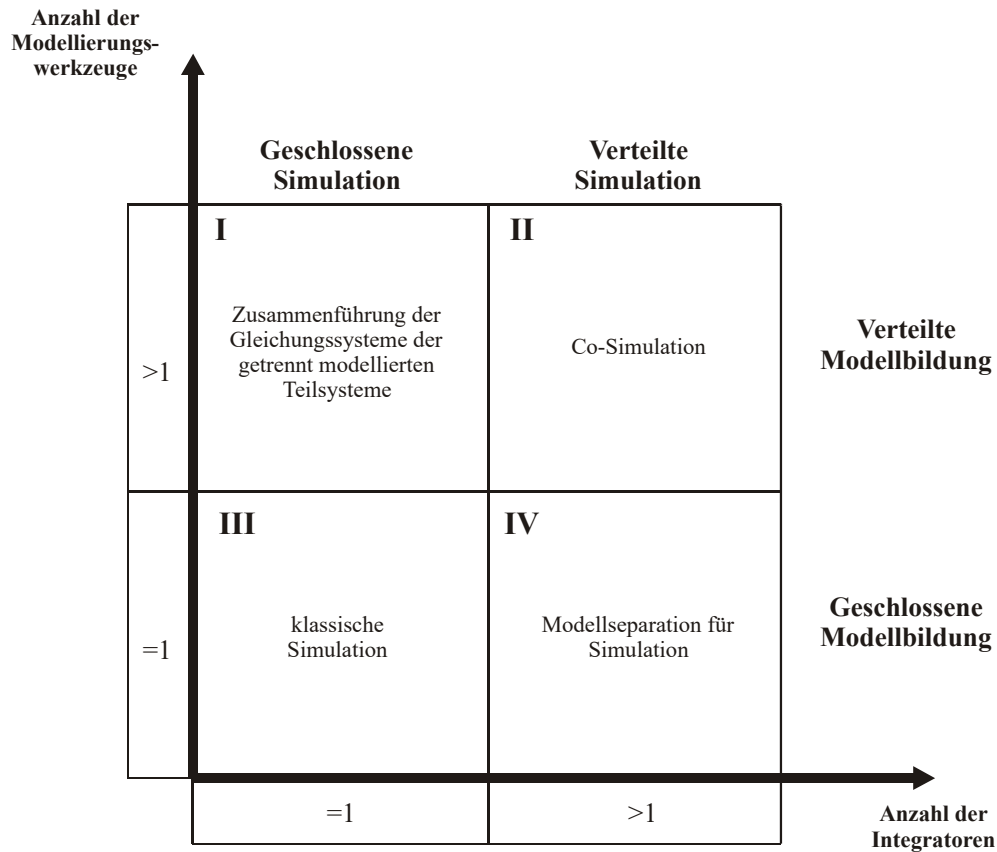


Abbildung 3.11: Möglichkeiten um Simulationen zu koppeln [GKL06].

benötigen.

Bei der Co-Simulation müssen zwischen den unterschiedlichen Disziplinen Energie- bzw. Leistungsdaten ausgetauscht werden. Dies kann mit Hilfe der Potential- und Stromgrößen aus der Analogietafel erfolgen. Bevorzugt werden in der Praxis die mechanischen Größen Kraft und Geschwindigkeit bzw. Moment und Drehgeschwindigkeit verwendet. Bezogen auf das Beispiel des Roboterfingers könnte das Gesamtsystem in die in Abbildung 3.12 gezeigten, disziplinspezifischen Subsysteme unterteilt werden. Für jedes der Subsysteme ließe sich eine eigene Simulation mit eigenem Integrator erstellen. Zwischen den Subsystemsimulationen würden bei jedem Simulationsschritt die eingezeichneten Potenzial- und Stromgrößen ausgetauscht werden.

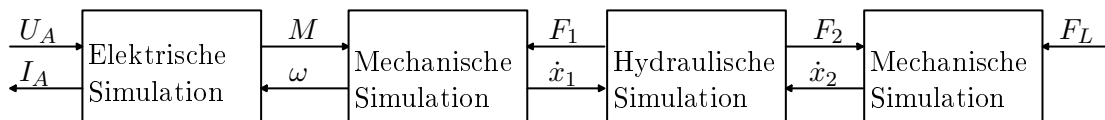


Abbildung 3.12: Möglichkeiten um den Roboterfinger in Co-Simulationen aufzuteilen und zu koppeln.

3.8 Literaturempfehlungen

Eine Einführung in das Arbeiten mit Analogietafeln finden Sie in vielen Werken der mechatronischen Systemtheorie, beispielsweise in [Ise08], Kapitel 2. Aber auch in anderen Disziplinen wird mit elektromechanischen Analogien gearbeitet, vgl. [LSW09], Kapitel 11.

3.9 Weiterführende Bemerkungen

In der Lehrveranstaltung „Systemtheorie der Mechatronik“ wird die Modellierung mechatronischer Systeme mit Hilfe von Analogietafeln vertieft behandelt. Die gekoppelte Simulation wird am Beispiel eines Radladers in der Vorlesung „Simulation gekoppelter Systeme“ vertieft.

4 Modellanalyse: gewöhnliche Differentialgleichungen

4.1 Einleitung

Wie wir in den vorherigen Kapiteln gesehen haben, führt die Modellbildung mit konzentrierten Parametern auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das unter Umständen noch durch algebraische Gleichungen ergänzt wird. Wir wollen in diesem Kapitel für die Praxis wichtige Modelleigenschaften studieren. Uns interessieren vor allem qualitative Aussagen über das Verhalten der Lösung unserer Modellgleichungen. Die quantitative Bestimmung der Lösung der Differentialgleichungen wird dabei nicht angestrebt.

Ein wichtiges Werkzeug, um Aussagen über das Lösungsverhalten zu ermitteln, ist das Richtungsfeld. Es lässt sich durch Einsetzen von Zahlenwerten in das Differentialgleichungssystem einfach erzeugen und darstellen. Im Richtungsfeld lassen sich in vielen Fällen Gleichgewichtspunkte finden. Diese sind für den Ingenieur von großer Bedeutung, da dort das System eventuell stationär betrieben werden kann. Um heraus zu finden, ob dies in der Praxis aber auch tatsächlich möglich ist, muss die Stabilität der Gleichgewichtspunkte untersucht werden. Hierzu liefert dieses Kapitel eine Einführung, indem die Stabilität der Gleichgewichtspunkte linearer Differentialgleichungssysteme im Detail untersucht wird und anschließend der Frage nachgegangen wird, in wie weit sich die Stabilitätsaussagen auch auf nichtlineare Differentialgleichungssysteme übertragen lässt.

4.2 Lernziele

Zielsetzung dieses Kapitels: Die Studierenden

- kennen Darstellungsformen für gewöhnliche Differentialgleichungen,
- kennen Untersuchungsmethoden zur Bestimmung des Lösungsverhaltens in der Umgebung eines Gleichgewichtspunktes,
- können das Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung skizzieren,
- können Gleichgewichtspunkte der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung auffinden und deren Stabilitätseigenschaften charakterisieren.

4.3 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Die allgemeinste Formulierung einer Differentialgleichung n ter Ordnung ist die implizite Angabe einer Vorschrift

$$\Phi\left(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0.$$

Besser handhabbar ist jedoch die explizite Darstellung

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}\right), \quad (4.1)$$

die in der Anwendung durch Umformungen erreicht werden kann. Sie wird durch Vorgabe von Anfangsbedingungen für die gesuchte Funktion $y(t)$ und ihre Ableitungen bis zur Ordnung $n - 1$ zu einem Anfangswertproblem ergänzt.

4.3.1 Formulierung als System 1. Ordnung

Ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung der Dimension n besitzt die Gestalt

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

und dem Vektor der Systemfunktionen

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(t, \mathbf{y}) \\ f_2(t, \mathbf{y}) \\ \dots \\ f_n(t, \mathbf{y}) \end{bmatrix}$$

lässt sich das System erster Ordnung in Vektorschreibweise als $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ notieren. Als Anfangsbedingung muss hier der Vektor $\mathbf{y}(t)$ zu einem Zeitpunkt t_0 vorgegeben werden.

Ein lineares System erster Ordnung der Dimension n ist gegeben durch

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad (4.3)$$

wobei $\mathbf{A}(t)$ eine quadratische Matrix und $\mathbf{f}(t)$ ein Vektor ist, die nicht von den Zustandsgrößen abhängen. Hängt die Matrix $\mathbf{A}(t)$ nicht von der Zeit ab, so liegt ein lineares System mit konstanten Koeffizienten vor, dessen Lösung in der Vorlesung Höhere Mathematik II bestimmt wurde.

Eine Differentialgleichung n ter Ordnung in expliziter Darstellung (4.1) kann stets als ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung notiert werden. Hierzu wird der Zustandsvektor

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 = y(t) \\ y_2 = y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y_n = y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

eingeführt, der die gesuchte Funktion $y(t)$ und ihre ersten $n - 1$ Ableitungen enthält. Die

erste Ableitung des Zustandsvektors liefert dann das System erster Ordnung

$$\begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \dots \\ y^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ f(t, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

4.3.2 Autonome Systeme

Als autonomes System erster Ordnung bezeichnet man ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung, bei der die Systemfunktionen nicht explizit von der Zeit abhängen:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Insbesondere ist das lineare System erster Ordnung (4.3) ein autonomes System. Jedes System erster Ordnung der Dimension n kann als autonomes System der Dimension $n+1$ geschrieben werden. Wird nämlich der Zustandsvektor um $y_0 = t$ erweitert, so ergibt sich aus (4.2):

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ f_1(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_{n-1}(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_n(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{y}}).$$

Die Anfangsbedingung für dieses autonome System lautet dann

$$\tilde{\mathbf{y}}(t_0) = \begin{bmatrix} t_0 \\ y_1(t_0) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t_0) \\ y_n(t_0) \end{bmatrix}$$

Beispiel: Wachstumsmodell, Wachstumsgeschwindigkeit proportional zum Systemzustand

Die Differentialgleichung lautet $\dot{y}(t) = ay(t)$ mit Anfangsbedingung $y(0) = c$, wobei a und c Konstanten sind. Ist a positiv (z.B. bei Kettenreaktionen), so liegt Wachstum vor; ist a negativ (z.B. radioaktiver Zerfall), dann liegt Abnahme vor. Es handelt sich um ein lineares autonomes System der Dimension 1. Die Lösung kann z.B. durch Variablentrennung leicht zu $y(t) = c \exp(at)$ bestimmt werden. Abbildung 4.1 zeigt einige Lösungen für verschiedene Werte des Parameters a .

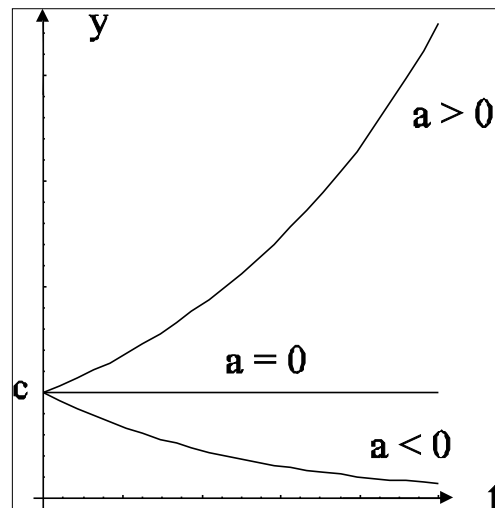


Abbildung 4.1: Lösungen der Differentialgleichung des Wachstumsmodells

4.4 Richtungsfeld

Mindestens genauso wichtig wie die Kenntnis des quantitativen Lösungsverhaltens durch Bestimmung der Lösung ist für den Ingenieur die Kenntnis des qualitativen Lösungsverhaltens. Ein wichtiges Werkzeug zur Bestimmung des quantitativen Lösungsverhaltens ist das Richtungsfeld. Dabei werden Werte für den Zustandsvektor in das System erster Ordnung eingesetzt. Das Ergebnis ist dann die Ableitung an dieser Stelle, also die Tangente der Lösungstrajektorie. Für ein zweidimensionales System können diese Tangenten als Richtungspfeile in ein Diagramm an der durch den Zustandsvektor bezeichneten Stelle eingezeichnet werden. Dies ergibt das Richtungsfeld. Ähnlich wie das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung lassen sich daraus die Trajektorien, also die Verläufe der Lösungen für unterschiedliche Anfangsbedingungen ablesen. Für höherdimensionale Systeme können nur Schnitte gezeichnet werden.

Beispiel:

Wir betrachten die nichtlineare Differentialgleichung $\dot{y} = y(1 - y)/t$. Durch Einführung von $y_1 = t$ und $y_2 = y$ erhalten wir ein autonomes System erster Ordnung:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ y_2(1 - y_2)/y_1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Abbildung 4.2 zeigt das Richtungsfeld für dieses System und einige Trajektorien der Lösung, die von verschiedenen Anfangsbedingungen ausgehen. Ohne die Lösung der Differentialgleichung ermittelt zu haben, erkennt man aus dem Richtungsfeld, dass die Werte $y = y_2$ mit wachsender Zeit $t = y_1$ gegen eins konvergieren.

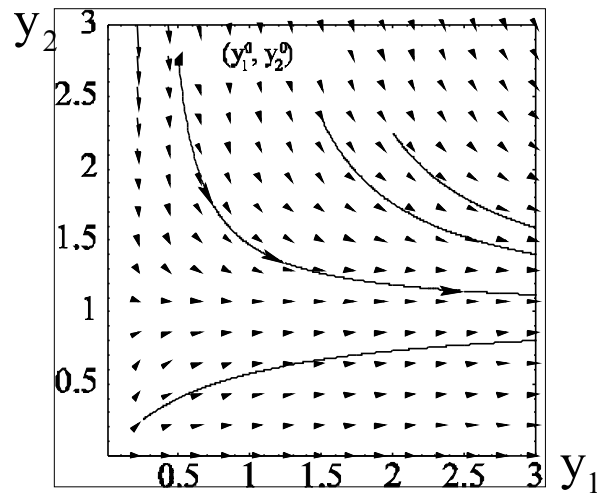


Abbildung 4.2: Richtungsfeld für das System (4.4)

4.5 Gleichgewichtspunkt und Linearisierung

Gilt für ein System erster Ordnung $\mathbf{f}(\mathbf{y}_s) = \mathbf{0}$, so heißt \mathbf{y}_s Gleichgewichtspunkt oder stationärer Punkt. Das Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_s$ besitzt dann die konstante Lösung $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_s$. In der Praxis bedeutet dies, dass ein System (z.B. eine Maschine) stationär betrieben werden kann, wenn die Zustandsgleichungen einen Gleichgewichtspunkt besitzen, dieser erreicht werden kann und er stabil ist.

Beispiele:

1. Lineares System $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) + \mathbf{c}$, Matrix \mathbf{A} und Vektor \mathbf{c} konstant:

Ist die Matrix \mathbf{A} regulär, dann ist der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}_s = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}$.

2. Nichtlineares autonomes System

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 - y_1^2, \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \frac{1}{2}(1 - y_1^2)y_2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Gleichgewichtspunkte müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_2 - y_1^2 &= 0, \\ -y_1 + \frac{1}{2}(1 - y_1^2)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

erfüllen.

Lösung: $\mathbf{y}_{s1} = [0 \ 0]^T$, $\mathbf{y}_{s2} = [z \ z^2]^T$, mit $z = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{10}-3}{3}} + \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{10}+3}{3}}$

Abbildung 4.3 zeigt das Richtungsfeld für das autonome System (4.5) mit den beiden

Gleichgewichtspunkten, die rot markiert sind. Es ist zu erkennen, dass das Verhalten des Richtungsfeldes in der Umgebung der beiden Gleichgewichtspunkte unterschiedlich ist: die Trajektorien umkreisen den Gleichgewichtspunkt \mathbf{y}_{s1} , während sie auf \mathbf{y}_{s2} zulaufen und dann von diesem Punkt abgestoßen werden.

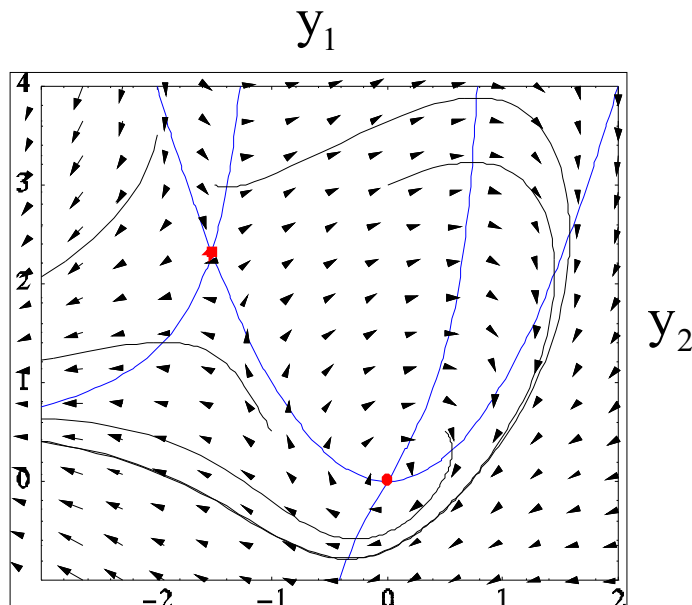


Abbildung 4.3: Richtungsfeld des nichtlinearen autonomen Systems (4.5)

3. Mathematisches Pendel:

Das in Abbildung 4.4 gezeigte mathematische Pendel, das sich im Schwerfeld der Erde bewegt, kann durch die Differentialgleichung $ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = 0$ beschrieben werden. Mit $y_1 = \theta$ und $y_2 = \dot{\theta}$ erhält man das System erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(y_1). \end{aligned} \quad (4.6)$$

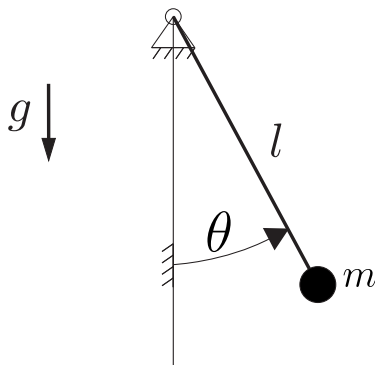


Abbildung 4.4: Mathematisches Pendel

Aus der Bedingung

$$\begin{aligned} y_2 &= 0, \\ -\frac{g}{l} \sin(y_1) &= 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

ergeben sich abzählbar unendlich viele Gleichgewichtspunkte $\mathbf{y}_{sk} = [k\pi \ 0]^T$, $k \in \mathbb{Z}$. Die Betrachtung des Richtungsfeldes, Abbildung 4.5 zeigt, dass für gerade Werte k Schwingungen um die Gleichgewichtspunkte auftreten, während die Gleichgewichtspunkte mit ungeradem k ein ähnliches Verhalten wie der Punkt \mathbf{y}_2 im vorherigen Beispiel zeigen.

Für eine genauere Analyse ist die Betrachtung der Energie

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos(\theta))$$

des Systems hilfreich. Die Energie ist konstant (konservatives System, Energieerhaltung) und daher durch die Anfangsbedingungen vorgegeben. Es gilt:

- Für $E < 2mgl$ sind die Lösungen periodisch.
- Für $E > 2mgl$ wird die Geschwindigkeit nie null. Das Pendel schwingt über.
- Im Grenzfall $E = 2mgl$ (rote Kurven) nähert sich das Pendel dem instabilen höchsten Punkt (Überkopfposition), ohne ihn jedoch in endlicher Zeit zu erreichen.

Die Trajektorie des Grenzfalls $E = 2mgl$ wird auch als Separatrix bezeichnet, weil sie zwei Gebiete mit unterschiedlichem Lösungsverhalten trennt.

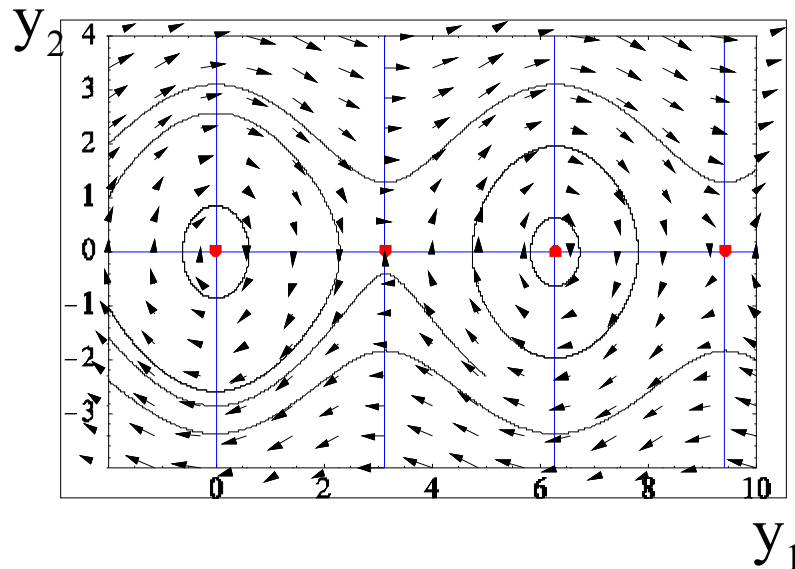


Abbildung 4.5: Richtungsfeld des Systems (4.7)

Ein dynamisches System $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, das einen Gleichgewichtspunkt besitzt, kann um diesen

Gleichgewichtspunkt linearisiert werden. Aus der Taylor-Entwicklung

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_s) + \mathbf{f}_{\mathbf{y}}|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_s} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_s) + \mathbf{R}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_s), \text{ mit } \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_s} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_s)}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_s\|} = \mathbf{0},$$

ergibt sich durch Ausnutzen der Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{f}(\mathbf{y}_s) = \mathbf{0}$ und unter Vernachlässigung des Restgliedes $\mathbf{R}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_s)$ für die Differenz $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_s$ das lineare System

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} \approx \mathbf{J}\boldsymbol{\eta}$$

mit der Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \mathbf{f}_{\mathbf{y}}|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \bigg|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_s},$$

das das Verhalten des dynamischen Systems in der Umgebung des Gleichgewichtspunktes beschreibt.

4.6 Stabilität des Gleichgewichtspunktes

Wir wollen nun die Stabilität der Gleichgewichtspunkte untersuchen. Der Gleichgewichtspunkt \mathbf{y}_s eines autonomen Systems $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$ heißt

- *Ljapunov-stabil* (kurz: *stabil*), wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Zeiten $t \geq 0$ und alle Trajektorien $\mathbf{y}(t)$ mit $\|\mathbf{y}(0) - \mathbf{y}_s\| < \delta$ gilt: $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_s\| < \epsilon$. Kurz: eine hinreichend kleine Störung bleibt stets klein.
- *attraktiv*, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass jede Trajektorie $\mathbf{y}(t)$ mit $\|\mathbf{y}(0) - \mathbf{y}_s\| < \delta$ für alle Zeiten $t \geq 0$ existiert und die folgende Grenzwertbedingung erfüllt: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_s\| = 0$.
- *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil und attraktiv ist.
- *neutral stabil* oder *marginal stabil*, wenn er stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.
- *instabil*, wenn er nicht stabil ist.

Wir betrachten nun speziell das homogene lineare System

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) \tag{4.8}$$

mit konstanter Matrix \mathbf{A} . Es besitzt den Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}_s = \mathbf{0}$. Der Lösungsansatz $\mathbf{y}(t) = \exp(\lambda t)\mathbf{v}$ führt auf das Eigenwertproblem $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Lösungen des Systems (4.8) sind dann Linearkombinationen der

- Eigenvektorklösungen $\exp(\lambda t)\mathbf{v}$, und den
- Hauptvektorklösungen $\exp(\lambda t) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^j \mathbf{v}_H$, falls λ mehrfache Nullstelle mit algebraischer Vielfachheit k ist und nur $r < k$ linear unabhängige Eigenvektoren vorliegen; die $r - k$ linear unabhängigen und von den Eigenvektoren linear unabhängigen Hauptvektoren \mathbf{v}_H müssen dann aus der Gleichung $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \mathbf{v} = \mathbf{0}$ bestimmt werden,

vgl. Höhere Mathematik II. Das Stabilitätsverhalten des Gleichgewichtspunktes hängt also nur vom Zeitverhalten der Eigen- und Hauptvektordösungen ab. Dabei ist zu beachten, dass der Eigenwert λ komplexwertig ist: $\lambda = \alpha + i\omega$. Für eine Eigenvektordlösung finden wir:

- Ist $\alpha > 0$, dann wächst der Betrag der Lösung exponentiell an;
- Ist $\alpha < 0$, dann nimmt der Betrag der Lösung exponentiell ab und strebt für $t \rightarrow \infty$ nach null;
- Ist $\alpha = 0$, dann liegt harmonisches Lösungsverhalten (wie bspw. beim ungedämpften Einheitskreisfrequenzschwinger) vor.

Für eine Hauptvektordlösung liegt bei positivem bzw. negativem Realteil α des Eigenwertes das gleiche asymptotische Verhalten wie bei einer Eigenvektordlösung vor, denn für große Zeiten t dominiert die Exponentialfunktion gegenüber dem Polynom. Verschwindet der Realteil, dann wächst der Betrag der Lösung wegen des Polynoms jedoch exponentiell an.

Aus der Kenntnis der Lösungen des Systems (4.8) können wir nun Aussagen über das Stabilitätsverhalten des Gleichgewichtspunktes gewinnen: Genau dann, wenn alle Lösungsanteile exponentiell abklingen, liegt asymptotische Stabilität vor. Damit erhalten wir folgendes Ergebnis:

- Genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} einen negativen Realteil besitzen, ist der Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil.
- Genau dann, wenn kein Eigenwert positiven Realteil hat oder es zu allen rein imaginären Eigenwerten der algebraischen Vielfachheit k auch k linear unabhängige Eigenvektoren gibt, ist der Gleichgewichtspunkt stabil.
- Genau dann, wenn es einen Eigenwert mit positivem Realteil gibt oder ein rein imaginärer Eigenwert der algebraischen Vielfachheit k nur $r < k$ linear unabhängige Eigenvektoren besitzt, ist der Gleichgewichtspunkt instabil.

Beispiele:

1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Es liegen drei Eigenwerte mit negativem Realteil vor, der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}_s = \mathbf{0}$ ist asymptotisch stabil.

2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte lauten -1 , i , $-i$. Der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}_s = \mathbf{0}$ ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Es liegen zwei Eigenwerte mit positivem Realteil vor. Der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}_s = \mathbf{0}$ ist instabil.

Abbildung 4.6 zeigt die Richtungsfelder der drei Systeme.

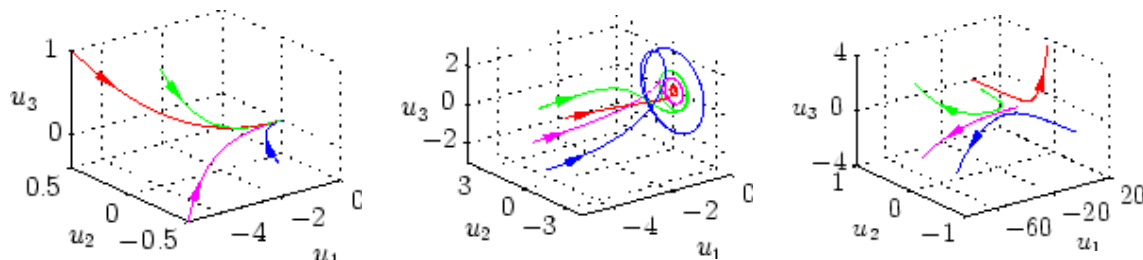


Abbildung 4.6: Richtungsfelder der drei linearen Systeme

Den zweidimensionalen Systemen kommt in der Praxis eine große Bedeutung zu, da die Modellbildung oft auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung führt. Wir wollen uns nun überlegen, wie das Richtungsfeld in der Umgebung des Gleichgewichtspunktes $\mathbf{y}_s = \mathbf{0}$ für ein autonomes System $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$ aussieht, wenn \mathbf{A} die 2x2-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ist. Mit $\gamma = \det(\mathbf{A}) = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$ und $\alpha = \frac{1}{2}\text{Spur}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$ lauten die beiden Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \gamma}$. Die Stabilität des Gleichgewichtspunktes kann nun ausgehend von den beiden reellwertigen Parametern α und γ beurteilt werden:

- Ist $\gamma < 0$, so ist der Gleichgewichtspunkt instabil, denn es treten zwei reelle Eigenwerte auf, von denen einer stets größer, der andere stets kleiner als null ist.
- Ist $\alpha > 0$, so ist der Gleichgewichtspunkt instabil. Ist $\alpha^2 > \gamma > 0$, dann liegen zwei positive reelle Eigenwerte vor. Ist $\alpha^2 = \gamma$, so liegt ein positiver reeller Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 vor. Ist $\alpha^2 < \gamma$, so liegt ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte mit positivem Realteil vor.
- Ist $\alpha < 0$, so ist der Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil. Ist $\alpha^2 > \gamma > 0$, dann liegen zwei negative reelle Eigenwerte vor. Ist $\alpha^2 = \gamma$, so liegt ein negativer reeller Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 vor. Ist $\alpha^2 < \gamma$, so liegt ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte mit negativem Realteil vor.
- Für $\alpha = 0$ und $\gamma > 0$ liegt ein Paar komplex konjugierter, rein imaginärer Eigenwerte vor.

Abbildung 4.7 fasst diese Aussagen in einer Stabilitätskarte zusammen.

Abbildung 4.8 stellt die möglichen Richtungsfelder zusammen:

- Liegen zwei unterschiedlich große rein reelle Eigenwerte vor, die beide positiv bzw. negativ sind, so spricht man von einem stabilen bzw. instabilen Knoten.
- Liegt ein rein reeller Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 vor, so sind zwei Szenarien möglich: Gibt es zwei unabhängige Eigenvektoren, so liegt ein stabiler bzw. instabiler Stern vor. Existiert jedoch nur ein unabhängiger Eigenvektor, so muss ein Hauptvektor bestimmt werden. Man spricht dann wieder von einem stabilen bzw. instabilen Knoten.

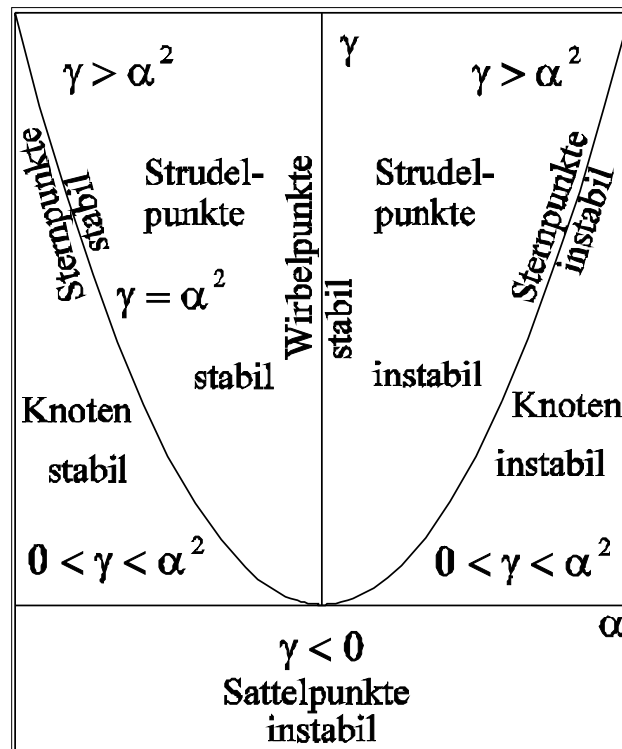


Abbildung 4.7: Stabilitätskarte der zweidimensionalen linearen Systeme

- Liegt ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte mit nicht verschwindendem Realteil vor, dann spricht man von einem stabilen bzw. instabilen Strudel (oder Fokus). Dies ist beispielsweise der Fall bei den freien Schwingungen des schwach gedämpften Einfreiheitsgradschwingers.
- Liegt ein Paar komplex konjugierter, rein imaginärer Eigenwerte vor, dann spricht man von einem Wirbel (oder Zentrum). Dies ist beispielsweise der Fall für die freien Schwingungen des ungedämpften Einfreiheitsgradschwingers.
- Liegen zwei rein reelle Eigenwerte mit unterschiedlichem Vorzeichen vor, so spricht man von einem Sattelpunkt.

Für zweidimensionale Systeme sind also die Richtungsfelder in der Umgebung eines Gleichgewichtspunktes noch relativ übersichtlich zu klassifizieren: Es können Knoten, Sterne, Strudel, Wirbel oder Sattelpunkte auftreten.

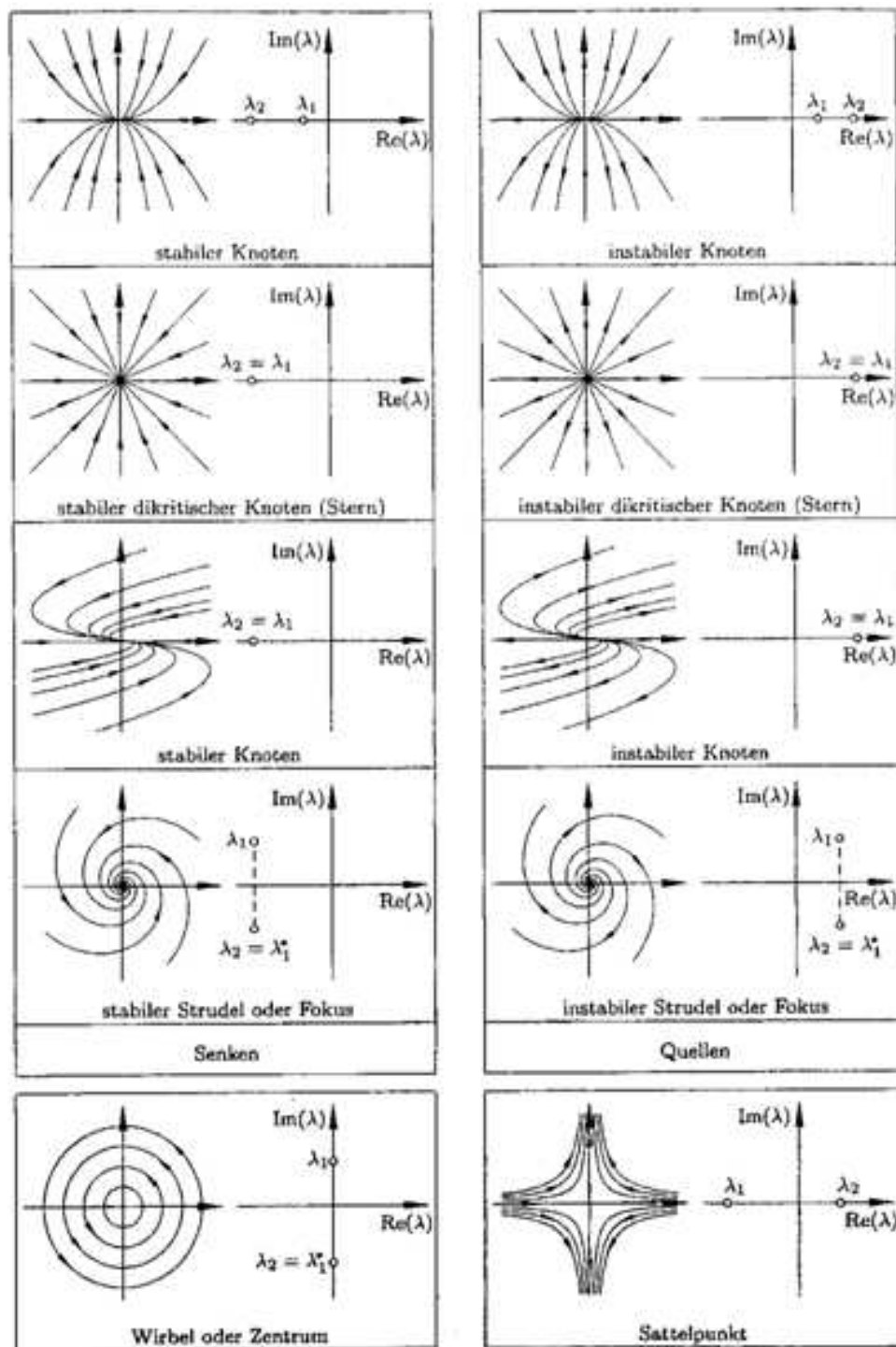


Abbildung 4.8: Klassifikation des Stabilitätsverhaltens der Gleichgewichtspunkte

Lassen sich die Ergebnisse für lineare Systeme auch auf nichtlineare Systeme übertragen, wenn diese um den Gleichgewichtspunkt linearisiert werden? Dann hätten wir allein aus

der Kenntnis des Gleichgewichtspunktes und der Jacobi-Matrix eine Stabilitätsaussage für nichtlineare Systeme gewonnen, ohne deren tatsächliche Lösung vorab ermitteln zu müssen!

In der Tat können die Ergebnisse auf nichtlineare Systeme übertragen werden, wenn die Jacobi-Matrix ausschließlich Eigenwerte besitzt, deren Realteil von null verschieden ist. Für nichtlineare Systeme gilt also:

- Besitzen alle Eigenwerte der Jacobimatrix negativen Realteil, dann ist der zugehörige Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil.
- Sind die Realteile aller Eigenwerte verschieden von null, ist jedoch bereits der Realteil eines Eigenwertes positiv, dann ist der Gleichgewichtspunkt instabil.

Beispiele:

1. Mathematisches Pendel mit zusätzlicher Dämpfung

Bei zusätzlicher geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung $k\dot{\theta}$ lautet die Differentialgleichung des mathematischen Pendels

$$ml^2\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = 0$$

Das System erster Ordnung ist dann

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(y_1) - \frac{k}{ml^2} y_2, \end{aligned} \tag{4.9}$$

vgl. (4.7). Die Dämpfung hat keinen Einfluss auf die Koordinaten der Gleichgewichtspunkte. Sie sind weiterhin durch $\mathbf{y}_{sk} = [k\pi \ 0]^T$, $k \in \mathbb{Z}$ gegeben. Die Jacobimatrix lautet für einen beliebigen Punkt y_1, y_2 :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(y_1) & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix},$$

woraus sich α und γ zu

$$\alpha = -\frac{k}{2ml^2}, \quad \gamma = \frac{g}{l} \cos(y_1)$$

ergeben. Daher gilt:

- Die Gleichgewichtspunkte $[2k\pi \ 0]^T$, $k \in \mathbb{Z}$, sind asymptotisch stabil.
- Die Gleichgewichtspunkte $[(2k+1)\pi \ 0]^T$, $k \in \mathbb{Z}$, sind instabil.

Dieses Verhalten ist auch am Richtungsfeld, Abbildung 4.9 ablesbar.

2. Van-der-Pol-Schwinger

Der Van-der-Pol-Schwinger wird durch das autonome System

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \frac{1}{2} (1 - y_1^2) y_2 \end{aligned}$$

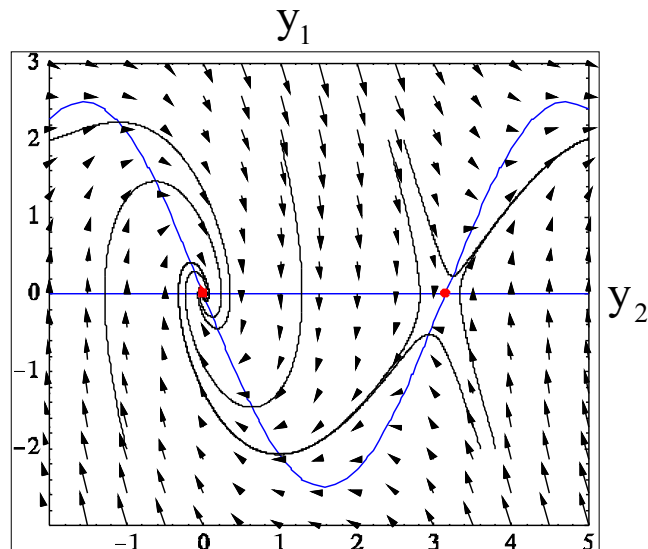


Abbildung 4.9: Richtungsfeld des mathematischen Pendels mit zusätzlicher Dämpfung

beschrieben. Der Gleichgewichtspunkt ist $\mathbf{y}_s = \mathbf{0}$. Die Jacobimatrix lautet allgemein

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - y_1 y_2 & \frac{1}{2} (1 - y_1^2) \end{bmatrix}$$

und speziell für den Gleichgewichtspunkt

$$\mathbf{J}|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sie besitzt den Eigenwert $\lambda = \frac{1}{4} (1 \pm \sqrt{15})$, dessen Realteil positiv ist. Daher ist der Gleichgewichtspunkt instabil. Abbildung 4.10 zeigt das Richtungsfeld des Van-der-Pol-Schwingers. Das Richtungsfeld offenbart neben dem Gleichgewichtspunkt eine Besonderheit, die in einem linearen System nicht auftreten kann: einen Grenzzyklus, d.h. eine isolierte periodische Lösung.

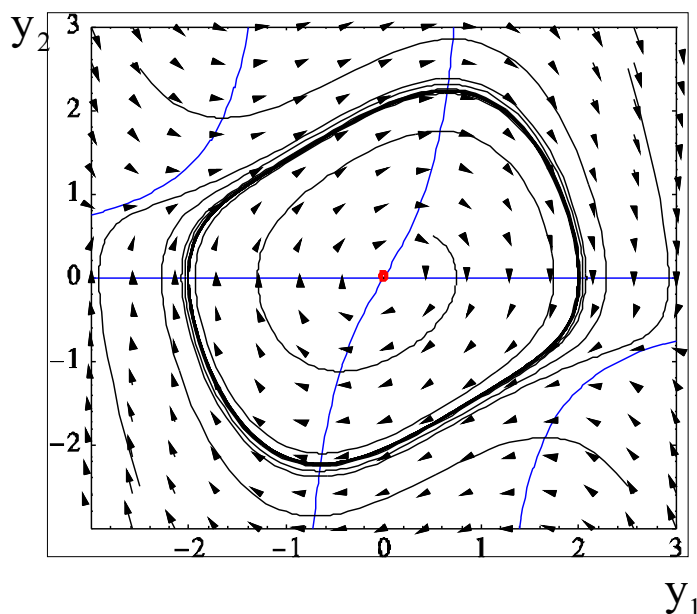


Abbildung 4.10: Richtungsfeld des Van-der-Pol-Schwingers

4.7 Literaturempfehlungen

Kapitel 2 in [MV11] führt in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ein und betont dabei vor allem die qualitative Untersuchung des Lösungsverhaltens. Die folgenden Kapitel des Buchs stellen analytische und numerische Methoden der Bifurkationstheorie vor. Die Bifurkationstheorie untersucht die Änderung des Lösungsverhaltens in Abhängigkeit von Parametern der Systemgleichungen.

4.8 Weiterführende Bemerkungen

In der Lehrveranstaltung „Stabilitätstheorie“ wird vertieft auf die Stabilitätsuntersuchung der Gleichgewichtslagen und der periodischen Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen eingegangen.

4.9 Verständnisfragen

1. Skizzieren Sie das Richtungsfeld des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und untersuchen Sie den Fixpunkt auf Stabilität:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ b) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ c) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{d) } & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ e) } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ f) } \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Skizzieren Sie das Richtungsfeld der folgenden nichtlinearen Systeme in der Nähe

ihrer Fixpunkte:

$$\text{a) } \dot{x}_1 = x_1(1 - x_2),$$

$$\dot{x}_2 = x_2(1 - x_1).$$

$$\text{b) } \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1),$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2(1 - \beta x_1), \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

5 Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen

5.1 Einleitung

Ausgangspunkt für die numerische Integration ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (5.1)$$

Gesucht ist der Verlauf $x(t)$ des Zustandsvektors. Die numerische Berechnung der Lösung setzt einen Modellwechsel voraus: das zeitkontinuierliche Modell (5.1) wird durch ein zeitdiskretes Modell ersetzt. Durch diesen Modellwechsel wird ein wichtiger Parameter eingeführt, die Schrittweite h . Die Berechnung einer guten Näherung für die Lösung des Ausgangsproblems 5.1 setzt die Wahl eines geeigneten zeitdiskreten Modells (durch Auswahl eines Integrationsverfahrens) und die richtige Einstellung der Schrittweite voraus. Hierzu ist es erforderlich, den Einfluss der Schrittweite auf den Approximationsfehler zu kennen.

In diesem Kapitel werden daher zunächst Integrationsverfahren hergeleitet. Anschließend wird der durch den Modellwechsel bedingte Fehler analysiert und der Einfluss der Schrittweite auf den Fehler untersucht.

5.2 Lernziele

Die Studierenden

- kennen numerische Integrationsverfahren und deren Eigenschaften,
- kennen die bei der numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichung auftretenden Fehlerarten,
- können einfache numerische Integrationsverfahren herleiten,
- können geeignete numerische Integrationsverfahren zur Simulation eines Systems mit konzentrierten Parametern auswählen.

5.3 Numerische Integrationsverfahren

Numerische Integrationsverfahren lassen sich grob nach der Integrationsart und nach der Anzahl der verwendeten Stützstellen klassifizieren. Nach der Integrationsart unterscheidet man *explizite Verfahren*, bei denen die Lösung zum Zeitpunkt t_{n+1} , $x(t_{n+1})$, durch eine Berechnungsvorschrift ermittelt werden kann, in denen nur die bereits berechneten Lösungen zu vorhergehenden Zeitpunkten, nicht aber $x(t_{n+1})$ auftritt. Andernfalls spricht man von einem *impliziten Verfahren*.

Hängt die Berechnungsvorschrift für $x(t_{n+1})$ nur vom unmittelbaren Vorgänger $x(t_n)$ ab, so spricht man von einem *Einschrittverfahren*. Werden noch weitere Vorgängerwerte benötigt, liegt ein *Mehrschrittverfahren* vor.

Zur Herleitung von Integrationsverfahren wird Gleichung 5.1 von t_n nach t_{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots$, integriert:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(t), t) dt. \quad (5.2)$$

Wird jetzt noch das Integral auf der rechter Seite diskretisiert, so ist der Modellwechsel vollzogen. Ergebnis ist eine Berechnungsvorschrift zur Bestimmung von $x(t)$ an diskreten Werten t_n , $n = 1, 2, \dots$. Die Differenz $h = t_{n+1} - t_n$ nennt man Schrittweite. Sie muss keineswegs konstant für alle Werte von n sein.

Alternativ lassen sich auch Integrationsverfahren durch Diskretisierung der linken Seite von Gleichung 5.1 mittels finiter Differenzen ableiten.

5.3.1 Integrationsverfahren mittels Integrationsformeln

Zur Berechnung des Integrals $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(t), t) dt$ in Gleichung 5.2 können numerische Integrationsverfahren herangezogen werden., z.B. die Rechteckregel:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + f(x(t_n), t_n)(t_{n+1} - t_n) \text{ (linke Stützstelle)} \quad (5.3)$$

bzw.

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + f(x(t_{n+1}), t_{n+1})(t_{n+1} - t_n) \text{ (rechte Stützstelle)} \quad (5.4)$$

Dies ist das Eulerverfahren in expliziter (Gleichung 5.3) bzw. impliziter (Gleichung 5.4) Form. Abkürzend schreibt man mit $x_{n+1} = x(t_{n+1})$, $x_n = x(t_n)$, $h = t_{n+1} - t_n$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + f(x_n, t_n)h \text{ (Euler explizit)} \\ x_{n+1} &= x_n + f(x_{n+1}, t_{n+1})h \text{ (Euler implizit)} \end{aligned}$$

Bei Verwendung der Trapezregel ergibt sich

$$x_{n+1} = x_n + (f(x_n, t_n) + f(x_{n+1}, t_{n+1}))h/2,$$

ein implizites Verfahren. Offenbar liefert die Vorgehensweise nur Einschrittverfahren.

5.3.2 Integrationsverfahren mittels Polynominterpolation

Zur Herleitung von Mehrschrittverfahren aus Gleichung 5.2 wird der Integrand durch ein Polynom in t dargestellt, das dann exakt integriert werden kann.

Bei Verwendung der Lagrange-Interpolation ist

$$p_1(t) = \sum_{j=0}^{k-1} f(x_{n-j}, t_{n-j}) \frac{\prod_{i=0, i \neq j}^{k-1} (t - t_{n-i})}{\prod_{i=0, i \neq j}^{k-1} (t_{n-j} - t_{n-i})}$$

das zur Ordnung k interpolierte Polynom von $f(x, t)$. Der zunächst kompliziert aussehende Term auf der rechten Seite ist die Summe der Stützstellen $f(x_n, t_n)$ bis $f(x_{n-k+1}, t_{n-k+1})$,

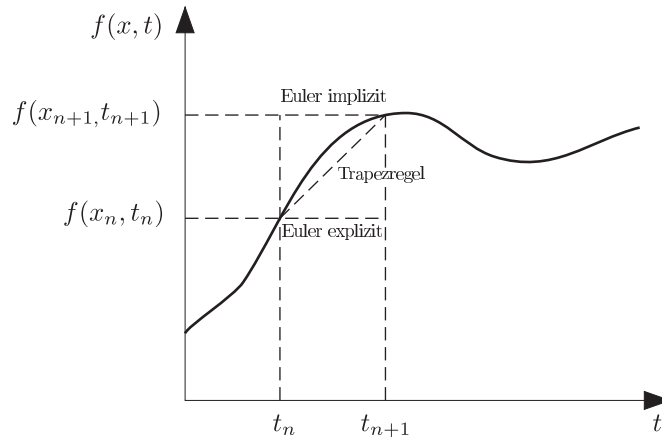


Abbildung 5.1: Treppenapproximationen des Zeitintegrals

wobei der Einfluss jeder Stützstelle mit einer Gewichtungsfunktion (dem Bruch auf der rechten Seite) bewertet wird. Je nach Wahl von t verändern sich die Gewichte. Durch exakte Integration des Interpolationspolynoms erhält man ein explizites k -Schrittverfahren. Die Verfahrensklasse bezeichnet man als Adams-Bashforth-Verfahren. Für $k = 1$ erkennt man, dass auch das explizite Euler-Verfahren ein Adams-Bashforth-Verfahren ist. Ein Nachteil der Adams-Bashforth-Verfahren ist, dass die Lagrange-Interpolation nur bis zum Wert $f(x_n, t_n)$ vorgenommen wird, während anschließend im Intervall $[t_n, t_{n+1}]$ integriert wird. Die Interpolation erfolgt also außerhalb des Integrationsintervalls!

Um dies zu vermeiden, kann die Lagrange-Interpolation auf die Stützstelle $f(x_n, t_n)$ ausgedehnt werden:

$$p_1(t) = \sum_{j=-1}^{k-1} f(x_{n-j}, t_{n-j}) \frac{\prod_{i=-1, i \neq j}^{k-1} (t - t_{n-i})}{\prod_{i=-1, i \neq j}^{k-1} (t_{n-j} - t_{n-i})}$$

Durch numerische Integration dieses Ausdrucks erhält man implizite $(k+1)$ -Schrittverfahren, die Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren. Für $k = 0$ ergibt sich das implizite Eulerverfahren, für $k = 1$ die Trapezregel.

5.3.3 Integrationsverfahren durch finite Differenzen

Bei diesem Verfahren wird die Zeitableitung in Gleichung 5.1 durch einen Differenzenquotienten approximiert. Ersetzt man in $\dot{x}(t)$ durch eine aus dem aktuellen Wert und den Vorgängerwerten berechnete Approximation, $\sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n+1-i}$, so erhält man ein explizites k -Schrittverfahren

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n+1-i} = f(x_n, t_n)$$

bzw. ein implizites k -Schrittverfahren

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i x_{n+1-i} = f(x_{n+1}, t_{n+1})$$

Mit $k = 1$, $\alpha_0 = \frac{1}{h}$ und $\alpha_1 = -\frac{1}{h}$ erhält man wieder die Euler-Verfahren.

5.3.4 Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Implizite Verfahren besitzen, wie später noch gezeigt wird, bessere Stabilitätseigenschaften als explizite Verfahren. Sie sind jedoch numerisch aufwändiger, da x_{n+1} noch als Argument der (meist nichtlinearen!) Funktion $f(x, t)$ in der Berechnungsvorschrift auftritt und daher in der Regel eine iterative Lösung zur Bestimmung von x_{n+1} notwendig ist. Ferner kann die Lösung für x_{n+1} mehrdeutig sein.

Einen Ausweg bieten Prädiktor-Korrektor-Verfahren, bei denen mit einem expliziten Verfahren vorab ein Näherungswert für x_{n+1} ermittelt wird, der dann in die Funktionsausdrücke $f(x_{n+1}, t_{n+1})$ des impliziten Verfahrens eingesetzt wird.

Beispiel: Kopplung von explizitem Euler-Verfahren und Trapezregel (*Verfahren von Heun*)

1. $x_{n+1}^{(1)} = x_n + hf(x_n, t_n)$
2. $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f(x_{n+1}^{(1)}, t_{n+1}) + f(x_n, t_n))$

Notation:

$$\begin{aligned} k_n^{(1)} &= hf(x_n, t_n), \quad k_n^{(2)} = hf(x_n + k_n^{(1)}, t_n + h) \\ \rightarrow x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}(k_n^{(1)} + k_n^{(2)}) \end{aligned}$$

Prominentester Vertreter dieser Klasse von Verfahren ist das Runge-Kutta-Verfahren:

$$\begin{aligned} k_n^{(1)} &= hf(x_n, t_n), \quad k_n^{(2)} = hf(x_n + k_n^{(1)}/2, t_n + h/2) \\ k_n^{(3)} &= hf(x_n + k_n^{(2)}/2, t_n + h/2), \quad k_n^{(4)} = hf(x_n + k_n^{(3)}, t_n + h) \\ \rightarrow x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_n^{(1)} + 2k_n^{(2)} + 2k_n^{(3)} + k_n^{(4)}) \end{aligned}$$

5.4 Fehleranalyse

Man unterscheidet zwei Fehlerarten zur Bewertung der Approximationsgüte. Der *lokale Diskretisierungsfehler* $l(h)$ ist die Differenz zwischen dem exakten und dem genäherten Differenzenquotienten, also das, was in jedem Zeitschritt neu als Fehler entsteht. Ist $l(h)/h^p$ beschränkt für $h \rightarrow 0$, so heißt das Diskretisierungsverfahren *konsistent* zur Ordnung p .

Beispiele für Konsistenzordnungen:

- Euler-Verfahren: $p = 1$
- Trapezregel: $p = 2$
- Verfahren von Heun: $p = 2$

- Runge-Kutta-Verfahren: $p = 4$

Offenbar steigt die Konsistenzordnung mit wachsendem Aufwand (wachsender Anzahl von Funktionsauswertungen) an.

Der *globale Diskretisierungsfehler* $e(h)$ ist der maximale Fehler zwischen genäherter und exakter Lösung. Gilt $e(h) \rightarrow 0$, für $h \rightarrow 0$, so wird das Diskretisierungsschema konvergent genannt. Voraussetzung für die Konvergenz eines Diskretisierungsschema ist seine Konsistenz. Aber: Konsistenz allein garantiert noch keine Konvergenz! Erst wenn Stabilität vorliegt, also der unvermeidbare lokale Fehler nicht verstärkt wird, folgt aus Konsistenz auch Konvergenz. Wir müssen uns daher mit der Stabilität der vorgestellten Integrationsverfahren beschäftigen.

5.5 Stabilität der Integrationsverfahren

Dies geschieht anhand des Modellproblems

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t), \quad x(t_0 = 0) = x_0, \quad (5.5)$$

wobei λ ein komplexwertiger Parameter ist. Die Betrachtung dieses Modellproblems ist für unsere Zwecke ausreichend, da das allgemeine Randwertproblem 5.1 lokal durch 5.5 genähert werden kann. Die exakte Lösung von 5.5 lautet $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$. Sie ist stabil

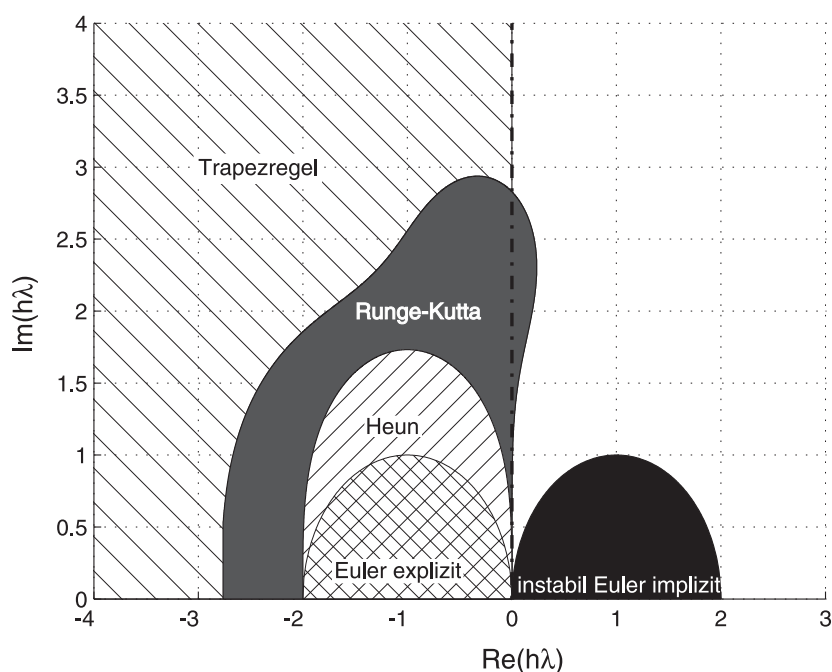


Abbildung 5.2: Stabilitätsgebiete der numerischen Integrationsverfahren.

für $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Zur Untersuchung der Stabilität eines Integrationsverfahrens bringt man das Diskretisierungsschema für 5.5 in die Gestalt $x_{n+1} = F(\lambda h)x_n$. Das Schema ist dann stabil für $|F(\lambda h)| < 1$.

Beispiele:

- explizites Euler-Verfahren: $x_{n+1} = x_n + h\lambda x_n = (1 + \lambda h)x_n$
 Stabilitätsbedingung: $|1 + h\lambda| < 1$
- implizites Euler-Verfahren: $x_{n+1} = x_n + h\lambda x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_n}{1 - h\lambda}$
 Stabilitätsbedingung: $|\frac{1}{1 - h\lambda}| < 1$

Abbildung 5.2 zeigt die Stabilitätsgebiete der exakten Lösung und der besprochenen Integrationsverfahren. Man stellt fest:

- Das explizite Euler-Verfahren und die Prädiktor-Korrektor-Verfahren werden bei stabiler exakter Lösung instabil. Das Stabilitätsgebiet dieser Verfahren wächst mit zunehmender Konsistenzordnung.
- Das implizite Euler-Verfahren und das Runge-Kutta-Verfahren sind noch stabil, wenn die exakte Lösung bereits instabil ist. Dieses Phänomen bezeichnet man als numerische Dämpfung.
- Das Stabilitätsgebiet der Trapezregel stimmt mit dem Stabilitätsgebiet der exakten Lösung überein.

Lassen sich die am Modellproblem gewonnenen Erkenntnisse auf allgemeine Differentialgleichungssysteme übertragen?

Dies ist nur dann der Fall, wenn die Jacobi-Matrix der Systemfunktion diagonalisierbar ist. In diesem Fall zerfällt das linearisierte System in skalare Differentialgleichungen vom Typ des Modellproblems. Sind die Realteile aller Eigenwerte der Jacobi-Matrix kleiner als null, so kann das System stabil integriert werden, wenn die Schrittweite h so gewählt wird, dass für alle Eigenwerte λ das Produkt $h\lambda$ im Stabilitätsgebiet des numerischen Integrationsverfahrens liegt.

Beispiel:

Integration der Differentialgleichung $\ddot{x} - 2\sigma\dot{x} + (\sigma^2 + \omega^2)x = 0, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$, für $\sigma = -2, \omega = 2$ bzw. $\sigma = 0$ und $\omega = 2$ (freie gedämpfte und freie ungedämpfte Schwingung).
Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\omega$.

Runge-Kutta- Verfahren der Ordnung $p = 4$

System 1.Ordnung

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = 2\sigma z_2 - (\sigma^2 + \omega^2) z_1; \quad z_1(0) = 1, z_2(0) = 0$$

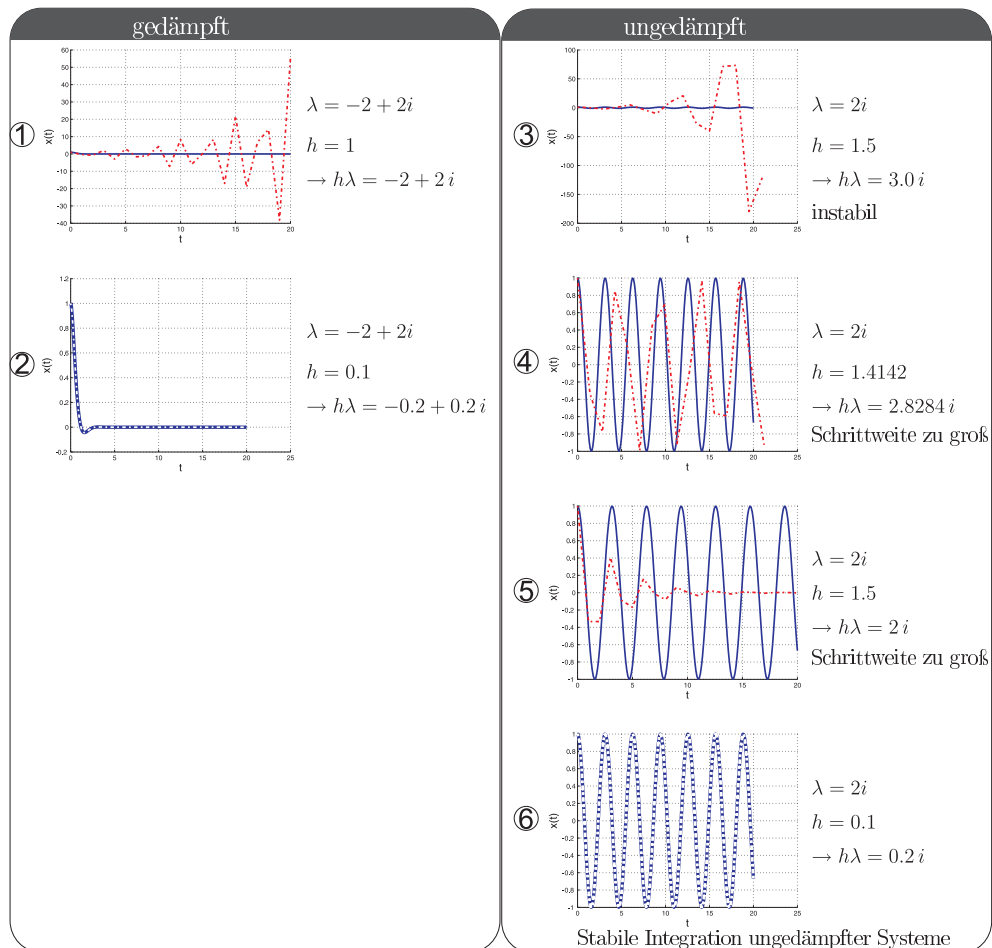
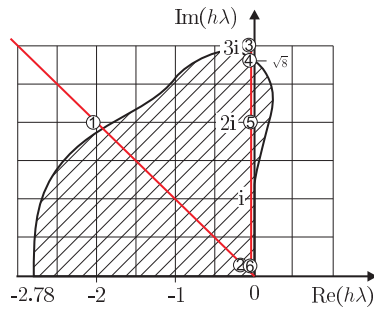


Abbildung 5.3: Auswirkung der Schrittweite und des Integrationsverfahrens

5.6 Steife Differentialgleichungen

Wir betrachten zwei Modelle für eine steife Verbindung zweier Massen untereinander: im ersten Fall wird das System als Einmassenschwinger modelliert, im zweiten Fall als Zweimassensystem mit dazwischen geschalteter Feder, die eine extrem hohe Federsteifigkeit besitzt. Beide Systeme sind ungedämpft.

Modellparameter:

1. $m_1 = 1, m_2 = 2, c_1 = 1$, Eigenwerte: $\lambda_{1/2} = \pm 0.5774i$;
2. $m_1 = 1, m_2 = 2, c_1 = 1, c_2 = 400$, Eigenwerte: $\lambda_{1/2} = \pm 0.5770i, \lambda_{3/4} = \pm 24.5085i$

Das erste Modell wird mit allen Verfahren (Runge-Kutta, Euler explizit, Euler implizit) hinreichend genau integriert. Beim zweiten Modell liegt eine steife Differentialgleichung vor, d. h., die größten und kleinsten Beträge der Eigenwerte unterscheiden sich um mehrere Größenordnungen. Physikalisch bedeutet dies, dass hoch- und niederfrequente Schwingungsanteile in der Lösung existieren, die nur schwach gekoppelt sind. Bei der Integration dieses Modellproblems versagt das explizite Eulerverfahren. Das implizite Euler-Verfahren bedämpft die hochfrequenten Lösungsanteile und liefert daher die gleiche Lösung wie für Problem 1. Erst das Runge-Kutta-Verfahren ist bei sehr geringer Schrittweite in der Lage, auch die hochfrequente Bewegung der Masse m_1 aufzulösen.

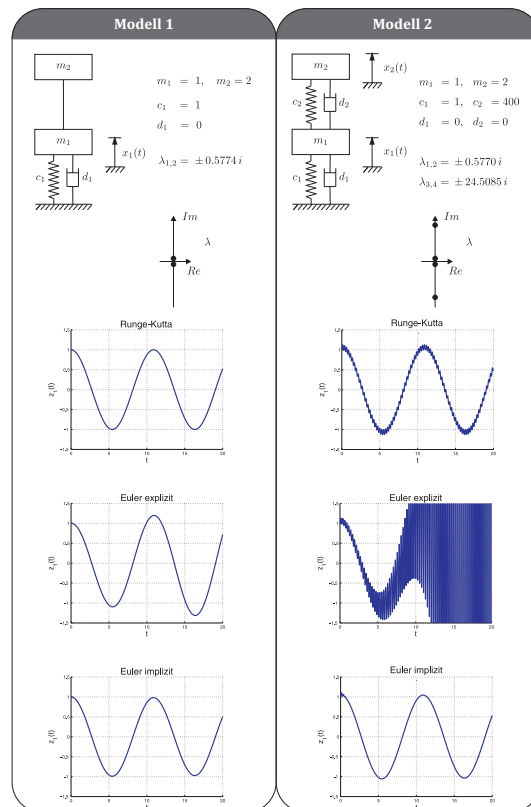


Abbildung 5.4: Numerische Integration steifer Differentialgleichungen

5.7 Schrittweitensteuerung

Eine geeignete Wahl der Schrittweite ist erforderlich, um bei vorgegebener Genauigkeit die Lösung möglichst effizient zu ermitteln. Hierzu wird der Fehler gemessen und dann die Schrittweite entsprechend angepasst.

Die einfachste Möglichkeit besteht darin, einmal mit der Schrittweite h zu integrieren und anschließend mit halber Schrittweite zwei Integrationsschritte auszuführen. Für ein Verfahren p . Ordnung ergibt sich dann ungefähr

$$x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1} \approx h^p C_{n+1} - \left(\frac{h}{2}\right)^p C_{n+1},$$

wobei \tilde{x}_{n+1} die Lösung mit halber Schrittweite und x_{n+1} die mit h berechnete Lösung ist. Die Konstante C_{n+1} lässt sich dann abschätzen durch

$$C_{n+1} = \frac{2^p}{2^p - 1} \frac{x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}}{h^p}.$$

Zu einem vorgegebenen Fehler δ ergibt sich dann mit $\delta = h_{opt}^p C_{n+1}$ die optimale Schrittweite

$$h_{opt} = \left(\frac{2^p - 1}{2^p} \frac{\delta}{x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}} \right)^{(1/p)} h$$

die optimale Schrittweite. Ist $h_{opt} \ll h/2$, muss der Schritt nochmals mit der Schrittweite $2h_{opt}$ wiederholt werden. Ist dies nicht der Fall, kann mit der Schrittweite h (oder für $h_{opt} > h$ einer entsprechend größeren Schrittweite) fortgefahren werden.

Der Nachteil dieser Methode ist jedoch, dass ungefähr ein Drittel des Rechenaufwands für die Schrittweitensteuerung verwendet wird. Vermeiden kann man dies durch Verwendung zweier Verfahren der Ordnung p und $p + 1$ gleicher Verfahrensklasse, bei denen möglichst viel Funktionsauswertungen wiederverwendet werden. Für das Runge-Kutta-Verfahren wurden derartige Formeln von Fehlberg hergeleitet.

Neben der Verringerung der Schrittweite stellt die Wahl eines Verfahrens höherer Konsistenzordnung eine weitere Möglichkeit dar, eine vorgegebene Genauigkeit zu erreichen.

5.8 Literaturempfehlungen

Kapitel 6 in [GJ09] enthält eine Zusammenfassung der wichtigsten numerischen Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen.

5.9 Weiterführende Bemerkungen

Zahlreiche Anwendungen im Maschinenbau führen bei der Modellierung mit konzentrierten Parametern bzw. bei der räumlichen Diskretisierung eines Modells mit verteilten Parametern auf ein Anfangswertproblem mit gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Für die numerische Integration derartiger Differentialgleichungssysteme wurden spezielle Algorithmen entwickelt, wie beispielsweise das Newmark-Verfahren. Diese Algo-

rithmen werden in der Lehrveranstaltung „Rechnergestützte Dynamik“ behandelt.

Häufig liegt aber auch nicht nur ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen vor, sondern es existieren auch noch algebraische Nebenbedingungen, die Abhängigkeiten zwischen den Zustandsgrößen abbilden. Dann kann man bei naiver Anwendung der in diesem Kapitel vorgestellten numerischen Integrationsverfahren schnell böse Überraschungen erleben. Welche Schwierigkeiten auftreten können und wie man diese vermeidet – davon handelt das nächste Kapitel.

5.10 Verständnisfragen

1. Zeigen Sie, dass für das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sowohl das explizite als auch das implizite Euler-Verfahren bei äquidistanter Schrittweite auf Näherungen der Form $\mathbf{x}_n = \tilde{\mathbf{A}}^n \mathbf{x}_0$ führen und berechnen Sie die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ für die beiden Verfahren.

6 Modelle mit verteilten Parametern

6.1 Einleitung

In den vorangegangenen Kapiteln wurden gewöhnliche Differentialgleichungen als Modelle verwendet. In diesem Kapitel werden Methoden dargestellt, die verwendet werden, wenn sich das untersuchte System durch Modelle mit konzentrierten Parametern nicht mehr ausreichend genau beschreiben lässt.

Hier werden partielle Differentialgleichungen bei der Modellierung benutzt, die aber nicht einfach zu lösen sind. Hierzu werden verschiedene Approximationsmethoden zur Hilfe gerufen, die für die Ingenieure ausreichend gute Ergebnisse liefern können.

In diesem Kapitel werden die grundlegendsten Methoden dargestellt, die für die Simulation komplexer Systeme geeignet sind.

6.2 Lernziele

Zielsetzung dieses Kapitels: Die Studierenden

- kennen die Vorgehensweise, wie man ein Modell mit verteilten Parametern für ein System erstellt,
- kennen die Wichtigkeit, wie sich die Komplexitätsstufe eines Modells auf die Simulation auswirkt,
- kennen die Bausteine, die in den meist verwendeten Simulationswerkzeugen implementiert sind,
- können entscheiden, für welche Probleme, welche Modelle verwendet werden können.

6.3 Beschreibung von Systemen mittels PDGL

6.3.1 Einführung

Wenn man ein System etwas ausführlicher beschreiben möchte, mehrere Abhängigkeiten gleichzeitig berücksichtigen will, werden die Modelle mit konzentrierten Parametern nicht mehr ausreichen. Die Systemeigenschaften können z. B. nicht nur von der Zeit sondern auch von der räumlichen Position abhängig sein bzw. in den verschiedenen Raumrichtungen unterschiedliche Funktionen darstellen. Die Eigenschaften können somit z.B. räumlich verteilt unterschiedliche Werte aufnehmen. Wenn man diese Abhängigkeiten in Gleichungen zusammenfassen möchte, gelangt man zu den partiellen Differentialgleichungen (es gibt mehr als eine unabhängige Variable). Beispielhaft, wenn die Eigenschaften eines Fahrwerks untersucht werden müssen, ist es zuerst ausreichend, die Position des Fahrzeugmittelpunktes in der Zeit zu beschreiben. Bei einem Crash deformiert sich aber jeder Teil der Karosserie in der Zeit anders, wobei die Teile miteinander unterschiedlich starke Wechselwirkung zeigen. Bei der Modellbildung werden Erhaltungssätze formuliert und infolgedessen Erhaltungsgleichungen abgeleitet. Damit das Gleichungssystem geschlossen werden kann, müssen oft

zusätzlich konstitutive Gleichungen formuliert werden. Die Erhaltungsgleichungen und die konstitutiven Gleichungen bilden die ersten Bausteine für die Modellierung.

In diesem Bereich wird die Modellbildung mehrfach und unterschiedlich benötigt. Die partiellen Differentialgleichungen können meistens nicht analytisch gelöst werden, folglich muss eine numerische Simulation durchgeführt werden. Diese Simulation basiert auf dem bereits erwähnten mathematischen Modell. Nach dieser Vorgabe ist für das numerische Modell das verwendete numerische Verfahren, die zeitliche Diskretisierung (Zeitschritt), die räumliche Diskretisierung (Zellgröße), die Initialisierung (die Anfangslösung) und die Randbedingungen von großer Bedeutung. Darüber hinaus müssen eventuell weitere physikalische Prozesse bei speziellen Problemen, wie z.B. Turbulenz, chemischen Reaktionen (z.B. Verbrennung) und Mehrphasenströmungen, ebenfalls modelliert werden.

Die Ansätze für die Modellierung in diesem Kapitel werden an Beispielen aus der Festkörpermechanik und aus der Strömungsmechanik präsentiert.

In den vergangenen Jahren haben die Möglichkeiten zur modellgestützten Analyse mechanischer Systeme an Bedeutung gewonnen, da sich durch die Leistungsfähigkeit der Computer und der Software der zeitliche und finanzielle Aufwand für Simulationsrechnungen bedeutend verringert hat. Demgegenüber sind Prüfstandversuche zeit- und kostenaufwendig geblieben. Die Nachfrage an Ingenieuren, die mit sehr guten Kenntnissen numerische Simulationen durchführen können, wird in der Zukunft demzufolge kontinuierlich wachsen.

6.3.2 Erhaltungssätze

Ein wichtiger Aspekt bei der Anwendung numerischer Simulationen ist die “richtige” mathematische Modellierung der zu untersuchenden Vorgänge. Liegt der Berechnung kein adäquates Modell zugrunde, kann auch ein noch so genaues numerisches Verfahren keine vernünftigen Ergebnisse liefern.

Zur Beschreibung der Eigenschaften materieller Punkte, die sich im Allgemeinen mit deren Bewegung, d.h. mit der Zeit ändern, unterscheidet man zwischen der Lagrangeschen und der Eulerschen Betrachtungsweise. Diese lassen sich wie folgt charakterisieren:

- Lagrangesche Betrachtungsweise: Formulierung der Eigenschaften als Funktion von einem Ausgangszustand und der Zeit. Ein Beobachter ist mit dem Teilchen verbunden und misst die Veränderung der Eigenschaften. Dieses Vorgehen bezeichnet man auch als materielle, substantielle oder referenzbezogene Betrachtungsweise. Diese findet zumeist Anwendung in der Festkörpermechanik, da in der Regel ein deformierter Zustand (Verschiebungen) aus einer bekannten Referenzkonfiguration zu bestimmen ist.
- Eulersche Betrachtungsweise: Formulierung der Eigenschaften als Funktion von der Zeit und den räumlichen Koordinaten. Ein Beobachter befindet sich an einem festen Ort und misst Veränderungen, die sich dadurch ergeben, dass zu unterschiedlichen Zeitpunkten unterschiedliche materielle Punkte an diesem Ort sind. Dieses Vorgehen bezeichnet man auch als räumliche oder lokale Betrachtungsweise. Diese findet zumeist Anwendung in der Strömungsmechanik, da in der Regel die physikalischen Eigenschaften (z. B. Druck, Geschwindigkeit) an einer bestimmten Stelle des Problemgebietes von Interesse sind. Jedoch kann die Lagrangesche Betrachtungsweise z.B. für Partikelverfolgung zusätzlich eingesetzt werden.

Die Betrachtungsweise erlangt Bedeutung sobald in dem mathematischen Modell die Zeitableitung definiert wird. Dementsprechend gibt es materielle bzw. lokale Zeitableitungen,

die wie folgt miteinander gekoppelt sind:

$$\underbrace{\frac{D\phi}{Dt}}_{\text{materiell}} = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{\text{lokal}} + \underbrace{v_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}}_{\text{konvektiv}} \quad (6.1)$$

Die mathematischen Modelle, auf denen Berechnungsverfahren basieren, leiten sich aus den fundamentalen Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik für Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie ab. Zusammen mit verschiedenen Materialgesetzen (s. nächstes Unterkapitel: Konstitutive Gleichungen) ergeben diese die Grundgleichungen, die unter Berücksichtigung von geeigneten problemspezifischen Anfangs- und Randbedingungen numerisch gelöst werden können. Die Erhaltungsgleichungen können als Differential- oder als Integralgleichungen formuliert werden. Dies wird bei den verschiedenen Diskretisierungsverfahren ausgenutzt. Für die Herleitung der Gleichungen wird hier auf die entsprechenden Kapitel der technischen Mechanik (Bewegungsgleichungen) bzw. Strömungslehre (Navier-Stokes Gleichungen) verwiesen. In der Vorlesung wird beispielhaft die Ableitung für die Fluidmechanik in Kurzform wiederholt.

6.3.3 Konstitutive Gleichungen

Die grundlegenden Erhaltungsgleichungen können meist nur mit konstitutiven Gleichungen (Materialgesetzen) zusammen ein geschlossenes Gleichungssystem bilden. Diese sind auch Modellgleichungen, die auf Messungen basierend aufgestellt wurden. Beispiel für Strukturmechanik: Hookesches Gesetz, und für Fluidmechanik: thermische Zustandsgleichung von Gasen. In der Vorlesung wird beispielhaft gezeigt, wie die verschiedenen Materialeigenschaften (linear-nichtlinear, isotrop-anisotrop, plastisch-elastisch) die Berechnung von Deformationen in der Strukturmechanik beeinflussen.

6.3.4 Charakteristiken

Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen können mathematisch in drei Typen klassifiziert werden: hyperbolisch, parabolisch und elliptisch. Die mathematische Unterteilung kann mit Hilfe der Koeffizienten stattfinden, wie in der Vorlesungsfolie angegeben ist. Gleichungen als Beispiele für die verschiedenen Typen sind in den Folien angegeben. Die wichtigste Eigenschaft der unterschiedlichen Typen ist die Richtung der Informationsausbreitung. Bei parabolischen Gleichungen gibt es nur eine Richtung, bei hyperbolischen zwei, und bei elliptischen Gleichungen breiten sich die Informationen in jede Richtung gleichmäßig aus. Komplexe Strömungsphänomene haben meistens gemischten Charakter. Die numerischen Methoden sollen die Eigenschaften der Gleichungen berücksichtigen.

6.4 Modellreduktion

6.4.1 Einführung

Oftmals ist durch gewisse Vereinfachungen im Modell eine enorme Reduzierung des numerischen Aufwandes möglich. Generell sollte bei der Modellierung der folgende Grundsatz gelten: so einfach wie möglich, so komplex wie nötig!

Grundsätzlich sind die Systeme, die modelliert werden müssen, dreidimensional und zeitabhängig. Im ersten Schritt kann man darüber nachdenken, welche Zusammenhänge unbedingt berücksichtigt werden müssen, und welche vernachlässigt werden können. Im zweiten Schritt, wenn ein mathematisches Modell für das System aufgestellt wurde, kann untersucht werden, ob sich die Komplexität des Modells reduzieren lässt, ohne eine bedeutende Auswirkung auf die modellierten Eigenschaften zu verursachen.

6.4.2 Physikalische Modellreduktion

Wenn die Änderung der unbekannten Variablen nur in einer oder zwei Raumrichtungen vorhanden ist, kann die Dimensionalität des Modells reduziert werden. Die Beispiele sind in den Vorlesungsfolien angegeben. Damit man die Dimensionalität reduzieren kann, müssen eventuell bestimmte Vereinfachungen getroffen werden. Beispiel aus der Strömungsmechanik: in Rohrströmungen gibt es wegen der Wandreibung immer eine Geschwindigkeitsverteilung normal zur Wand (Grenzschicht). Oft sind aber die Änderungen in Strömungsrichtung von Interesse. So ist die Fragestellung grundsätzlich mindestens zweidimensional. Wenn die Grenzschicht relativ zur Kernströmung sehr klein ist, kann sie vernachlässigt werden. Oder wenn die Form der Grenzschicht sich in der Strömungsrichtung nicht mehr ändert, kann nur eine im Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit berücksichtigt werden. In beiden Fällen ermöglichen die Annahmen eine Reduktion der Dimensionalität.

Weitere Möglichkeit zur physikalischen Reduktion besteht darin, die Detailliertheit des Systems zu reduzieren. Entweder können Teilbereiche in diskrete Teilsysteme zusammengefasst werden, in denen die ablaufenden Prozesse integriert berücksichtigt werden, oder es können Teilbereiche mit sehr kleiner Auswirkung vernachlässigt werden (z. B. bei der Autoumströmung: kleine Stufen oder die kleinen Spalten um Türen).

Manchmal besteht das System aus Teilsystemen, in denen die Prozesse angenähert zueinander ähnlich ablaufen. In diesem Fall kann die Untersuchung nur eines Teilsystems auf ausreichend gute Ergebnisse führen. Zum Beispiel wäre die Modellierung der Strömung durch einen Axialkompressor zu aufwendig. Bei der Annahme, dass die Strömung in jedem Schaufelkanal ähnlich aussieht, kann die Simulation nur eines Schaufelkanals mit periodischen Randbedingungen in der Umfangsrichtung es ermöglichen, bei moderatem Aufwand sehr wichtige Erkenntnisse zu gewinnen.

In der Strömungsmechanik werden zahlreiche Vereinfachungsmethoden verwendet, die die Modellierung schneller machen bzw. überhaupt erst ermöglichen. Einige Beispiele werden hier kurz erwähnt. Bei einer Potentialströmung wird die Drehungsfreiheit vorausgesetzt. Dies wird z.B. in der Meteorologie zur Beschreibung von Zyklone benutzt. Die Reibungsfreiheit (Eulersche Gleichung) ist z.B. bei der Auftriebsrechnung für Tragflügelprofile eine gute Annahme (FoilSim - NASA). Vernachlässigung der zeitlichen Abhängigkeit führt zu stationären Strömungen. Dies gilt für das vorherige Beispiel, wenn der Auftrieb bei konstanter Reisegeschwindigkeit ermittelt werden soll. Bei Flüssigkeitsströmungen (wie z.B. Wasser) mit geringer Geschwindigkeit kann die Dichte als konstant betrachtet werden und man kann die inkompressible Variante der Modellgleichungen benutzen.

Weiterhin können die Gleichungen linearisiert werden. Man spaltet z.B. bei einer Strömung die Geschwindigkeit in eine mittlere und in eine Schwankungskomponente und nimmt an, dass die Schwankungen die mittlere Strömung nicht beeinflussen. In den resultierenden Gleichungen können dann die Terme mit zwei und mehreren Schwankungsgrößen unter bestimmten Bedingungen als sehr klein angenommen werden und daher vernachlässigt werden.

Generell ist jedoch immer darauf zu achten, dass für eine getroffene Annahme stets eine Abschätzung des zu erwartenden Fehlers zu tätigen ist.

Exakte Lösung der Navier-Stokes Gleichungen

Die Navier-Stokessche Gleichungen sind in ihrer allgemeinen Form nichtlineare partielle Differentialgleichungen von zweiter Ordnung. Das sich ergebende Gleichungssystem kann man zur Zeit nur numerisch lösen. Unter bestimmten Annahmen kann es aber vereinfacht werden, sodass die übrig bleibenden Modellgleichungen analytisch gelöst werden können. Als Beispiel werden die Couette-Poiseuille-Strömung und das erste Stokessche Problem diskutiert [SGKO06].

6.4.3 Mathematische Modellreduktion

Damit die physikalischen Vorgänge besser untersucht werden können, bildet man die Zusammenhänge mit einem mathematischen Modell ab. Nehmen wir jetzt an, dass das Modell das physikalische System vollständig beschreiben kann und jetzt sollten die Modellgleichungen gelöst werden. Das ist aber nicht immer möglich oder es ist sehr aufwendig. Um den Aufwand zu reduzieren, kann die Komplexität des Modells unter Umständen so reduziert werden, dass der Fehler, welcher dadurch entsteht, vernachlässigbar klein bleibt. Bei der modalen Transformation kann die Gesamtlösung als Superposition der Einzellösungen ermittelt werden. Die Einzellösungen werden durch die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen erhalten. Die Gesamtlösung enthält unendlich viele Einzellösungen, aber die höhere Moden sind aus Sicht eines Ingenieurs meistens vernachlässigbar. Deshalb wird die Gesamtlösung als Linearkombination einer endlich begrenzten Anzahl von Einzellösungen dargestellt.

6.5 Numerische Lösungsverfahren für PDGLen

Eine realistische und erfolgreiche Lösung eines technischen Problems beginnt in der Regel mit einem genauen physikalischen Modell des Problems und einem richtigen Verständnis der verwendeten Annahmen. Zunächst wird das physikalische Modell in ein mathematisches Modell oder Problem umgewandelt. Es gibt nur relativ wenige Probleme, für die eine exakte analytische Lösung existiert. Die überwiegende Anzahl von technischen Problemen kann mit den momentan zur Verfügung stehenden analytischen Methoden nicht gelöst werden. In solchen Fällen werden Näherungslösungen gesucht. Die Lösung des mathematischen Problems wird dann in der Regel durch numerische Methoden ermittelt, welche definitionsgemäß jedoch nur eine Näherungslösung liefern können.

6.5.1 Die Methode der gewichteten Residuen

Bei der Suche nach einer Näherungslösung ist es möglich, dass eine allgemeine Funktion durch einfache Funktionen (Ansatzfunktion - trial function) angenähert wird. Die Methode der gewichteten Residuen ist die allgemeinste unter den Methoden, die Ansatzfunktionen verwenden. Zum Beispiel ist die Rayleigh-Ritz Methode eine Methode der gewichteten Residuen mit einer speziell gewählten Gewichtsfunktion. In der Vorlesung wird die Methode am Beispiel von eindimensionalen gewöhnlichen Differentialgleichungen erläutert, aber sie kann auch für mehrdimensionale partielle Differentialgleichungen angewendet werden.

Leider gibt es keine allgemeine wissenschaftliche Methode zur Bestimmung, welche der, in unbegrenzter Anzahl zur Verfügung stehenden, Näherungsfunktionen die effizienteste Approximation der exakten Lösung ist. In der Praxis wird die Wahl der Ansatzfunktion oft auf der Basis von Erfahrung oder Intuition getroffen.

Um die Methode der gewichteten Residuen zu erklären, betrachten Sie bitte das folgende Modellproblem:

Finden Sie eine Funktion $u = u(x)$, $x \in (0, 1)$, so dass,

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} - u = -x, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Dies ist ein *Randwertproblem* (BVP): es besteht aus einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die im Innern des gegebenen Gebiets gültig ist, sowie der Vorgabe der Werte der Funktion am Rand (hier $u(0) = 0$, $u(1) = 0$). Im obigen 1D-Fall (6.2) spricht man von einem *Zwei-Punkt-Randwertproblem*, welches in der sogenannten *starken Formulierung* vorliegt (dies wird noch im nächsten Unterkapitel erläutert).

Die Methode der gewichteten Residuen angewandt auf die Lösung von (6.2) schließt die nachfolgenden Schritte ein:

1. *Wahl einer Ansatzlösung*: Annahme einer Ansatzfunktion (trial function), die ausreichend glatt (also *zweimal* differenzierbar) ist und die Randbedingungen erfüllt. Zum Beispiel: $\tilde{u}(x) = ax(1-x)$ mit dem unbestimmten Parameter $a \in \mathbb{R}$. Hier bezeichnet das Zeichen ' \sim ' eine Näherungslösung.
2. *Berechnung des Residuums des Problems*: Sobald die Ansatzfunktion ausgewählt ist, setzen wir sie in das BVP in (6.2) ein und berechnen die Differenz r zwischen der linken und rechten Seite der gewöhnlichen Differentialgleichung (6.2). Diese Abweichung nennt man das *Residuum* des Randwertproblems. In unserem Fall ist das Residuum r ,

$$r = \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} - (-x) = -2a - ax(1-x) + x. \quad (6.3)$$

Beachten Sie, dass unsere Basisfunktion dann mit der exakten Lösung des Problems übereinstimmt, wenn das Residuum $r = 0$ ist. Im gegebenen Fall ist $r \neq 0$, daher ist \tilde{u} nur eine Näherungslösung.

3. *Bestimmung der unbekannten Parameter zur Beschreibung der Ansatzfunktion*: Der nächste Schritt besteht darin, die unbekannte Konstante a so zu bestimmen, dass die gewählte Ansatzfunktion eine bestmögliche Annäherung der exakten Lösung erreicht. Einfacher ausgedrückt, wir müssen a so wählen, dass r sich soweit als möglich 0 annähert. Um dies zu erzielen, werden wir einen auf den ersten Blick 'aufwendig' wirkenden Schritt unternehmen. Wir führen die *Testfunktion* w ein, sodass der gewichtete Durchschnittswert W des Residuums des Problems (6.2) über dem Problembereich $(0, 1)$ den Wert 0 annimmt. Dies gibt uns die Sicherheit, dass unsere Annäherung mit der genauen Lösung übereinstimmt, zumindest was die Durchschnittswerte betrifft.

Das bedeutet,

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^1 r w dx = \int_0^1 w \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} - (-x) \right) dx = \\
 &= \int_0^1 w(-2a - ax(1-x) + x) dx = 0. \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

Wenn wir die Testfunktion w kennen, ist es uns möglich, das auf der linken Seite stehende Integral zu lösen und eine Gleichung für a herbeizuführen.

4. *Wahl der Testfunktion*: Es ist klar, dass sich die Näherungslösung \tilde{u} von w unterscheidet. In Abhängigkeit der Wahl von w , sind die folgenden Varianten der Methode der gewichteten Residuen (GR) möglich:

- 4.1 *Kollokationsmethode der GR*: Lassen Sie uns die DIRAC¹ -Deltafunktion einführen,

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \neq x_i, \\ \infty, & \text{wenn } x = x_i, \end{cases} \quad (6.5)$$

für $x_i \in (0, 1)$. Hierbei wird Bezug auf die *verallgemeinerte Funktion*² oder *Distribution* genommen.

Gegeben sei x_i , das Integral von δ zwischen $-\infty$ bis $+\infty$ ist,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_i) dx = 1. \quad (6.6)$$

Die DIRAC-Deltafunktion darf nicht in ihrem klassischen Sinne sondern als Operator interpretiert werden, der durch seine Wirkung auf eine andere Funktion definiert wird. Z.B. Sei $f(x)$ stetig in $(0, 1)$, dann wird die Wirkung von δ auf $f(x)$ mit $x_i \in (0, 1)$ durch

$$f(x_i) = \int_0^1 f(x) \delta(x - x_i) dx. \quad (6.7)$$

berücksichtigt. Wir verwenden die DIRAC-Deltafunktion, um (6.2) zu berechnen. Es wird $w = \delta(x - x_i)$ eingesetzt und $x_i = 0.5$ gewählt. Dann die Eigenschaft (6.7) impliziert,

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^1 w(-2a - ax(1-x) + x) dx = \int_0^1 \delta(x - 0.5)(-2a - ax(1-x) + x) dx \\
 &= -2a - 0.5a(1 - 0.5) + 0.5 = -\frac{9}{4}a + \frac{1}{2} = 0. \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

¹PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902-1984)

²Nach LAURENT SCHWARTZ (1915-2002)

Dadurch ist $a = \frac{2}{9}$ und die approximierte Lösung \tilde{u} ist $\tilde{u} = \frac{2x}{9}(1-x)$.

4.2 *Verfahren der kleinsten Quadrate der GR*: Hier wird die Testfunktion aus dem Residuum r nach dem Ausdruck

$$w = \frac{\partial r}{\partial a}. \quad (6.9)$$

berechnet. Aus (6.3) bekommen wir

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} (-2a - ax(1-x) + x) = -2 - x(1-x). \quad (6.10)$$

Wird (6.10) in (6.4) eingesetzt, integriert und bzgl. a aufgelöst, ergibt sich $a = 0.2305$ und dadurch $\tilde{u} = 0.2305x(1-x)$.

4.3 *GALERKIN-Verfahren der GR*: Die Testfunktion w wird aus dem Ausdruck

$$w = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a}. \quad (6.11)$$

ermittelt, der für die bisherige Ansatzfunktion $w = x(1-x)$ impliziert. Wird das Ergebnis in (6.4) eingesetzt, ergibt sich $a = 0.2272$, so dass $\tilde{u} = 0.2272x(1-x)$.

	Kollokations- methode	Methode der kleinsten Quadrate	GALERKIN- Verfahren
a	$2/9 \approx 0.2222$	0.2305	0.2272

Nun vergleichen wir die Ergebnisse aus 4.1, 4.2, and 4.3 mit der exakten Lösung von Gleichung (6.2) (Siehe auch die Veranschaulichung in Bild 6.1). Die exakte Lösung des Randwertproblems (6.2) lautet

$$u(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{1 - e^2} + x. \quad (6.12)$$

Lösung (6.12) wird mit der approximierten Lösung mit Hilfe einer *Fehlerabschätzung* $\Delta(u; \tilde{u})$ verglichen:

$$\Delta(u; \tilde{u}) = \int_0^1 |u(x) - \tilde{u}(x)| dx. \quad (6.13)$$

Die Fehlerabschätzung erlaubt die *a posteriori* Berechnung der globalen Approximationsfehler zwischen der exakten u und der Näherungslösung \tilde{u} . Damit wird der Abstand zwischen der Lösung und ihrer Näherung gemessen. Offensichtlich je kleiner der Abstand ist, desto genauer ist die gewonnene Annäherung. Die Berechnung des Integrals für \tilde{u} aus der rechten Seite von (6.13), entsprechend der Kollokations-, Fehlerquadrat- und GALERKIN-Methode der gewichteten Residuen, liefert die folgenden Ergebnisse:

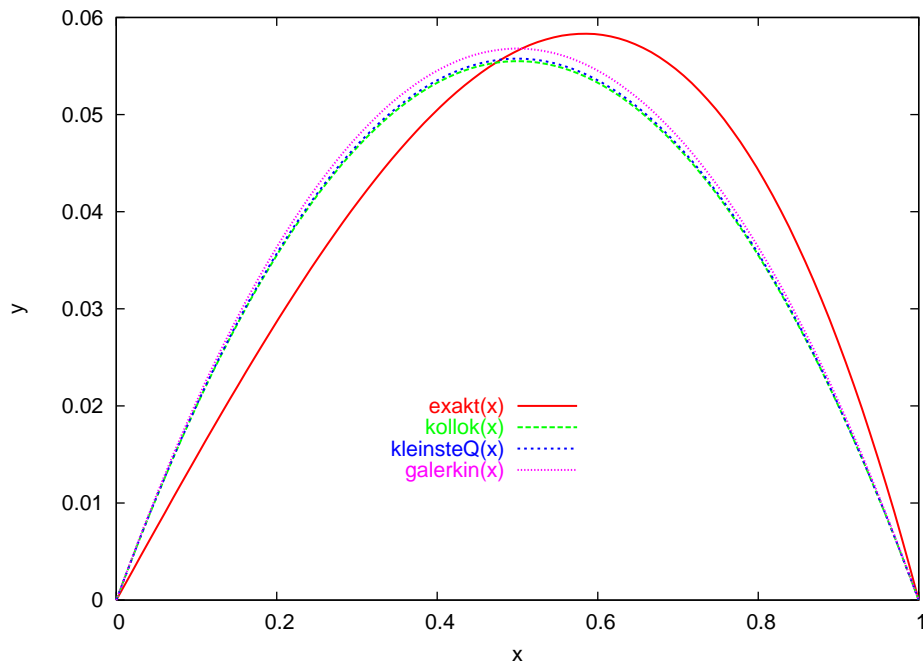


Abbildung 6.1: Vergleich der Ergebnisse

	Kollokations- methode	Methode der kleinsten Quadrate	GALERKIN- Verfahren
$\Delta(u; \tilde{u})$	0.005108	0.005107	0.005082

Die Variante von GALERKIN ergibt die höchste Genauigkeit im Vergleich zu den anderen Ansatzmethoden, da dort die globale Näherungsfehler $\Delta(u; \tilde{u})$ die kleinste ist.

Die schwache Formulierung des Randwertproblems

Beachte, dass die Form des gewichteten Residuums aus (6.4) eine Berechnung des Integrals $\int_0^1 w(d^2\tilde{u}/dx^2)dx$ erfordert, in das das Glied der höchsten Ableitung der Differentialgleichung (6.2) einbezogen wird. Das Integral soll verschieden von 0 sein, damit eine sinnvolle Approximation zustande kommen kann, d.h. die Basisfunktion soll zweimal differenzierbar mit einer nicht verschwindenden zweiten Ableitung sein.

Die letzte Forderung kann durch eine einfache partielle Integration abgeschwächt werden:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^1 w \left(\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} - (-x) \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left(-\frac{dw}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} - w\tilde{u} + xw \right) dx + w \frac{d\tilde{u}}{dx} \Big|_0^1 = 0. \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

Aus dem Ausdruck ist ersichtlich, dass die Ansatz- und Testfunktion *nur* eine einmalige

anstatt einer zweimaligen Differenziation erfordern. Als Ergebnis wird die zweimalige Differenziation geschwächt und die Form (6.14) wird *schwach* genannt. Auf der schwachen Formulierung beruht die Herleitung von Näherungen niedriger Ordnung (die nicht so glatt sind). Hierbei braucht die Basisfunktion nur *stückweise* stetig zu sein.

6.5.2 Einführung in die Feldverfahren

Im Abschnitt 6.3 wurde die Modellbildung mittels PDGL diskutiert. Es ist jetzt die Frage, wie man mit diesen Modellen umgehen kann. Wie bereits erwähnt wurde, existiert eine analytische Lösung nur für sehr eingeschränkte Fälle. Es besteht somit nur die Möglichkeit, diese Modellgleichungen numerisch zu lösen. Das aus der Modellierung resultierende kontinuierliche Problem muss durch ein geeignetes diskretes Problem approximiert werden, d.h. die zu berechnenden Größen müssen durch eine endliche Anzahl von Werten angenähert werden (das Problem wird digitalisiert, die abhängigen und die unabhängigen Variablen können nur diskrete Werte aufnehmen). Dieser Prozess, den man als Diskretisierung bezeichnet, beinhaltet im Wesentlichen zwei Aufgaben:

- die Diskretisierung des Problemgebietes,
- die Diskretisierung der Gleichungen.

Die Diskretisierung des Problemgebietes approximiert das kontinuierliche Gebiet durch eine endliche Anzahl von Teilgebieten. Da die Teilgebiete meistens aus geraden Kanten aufgebaut sind, können gekrümmte Oberflächen der Geometrie auch nur approximiert wiedergegeben werden. So wird z.B. ein Kreisbogen durch endliche viele gerade Segmenten approximiert. In den Teilgebieten werden dann numerische Werte der unbekannten Variablen bestimmt. Die Beziehungen zur Berechnung dieser Werte werden durch die Diskretisierung der Gleichungen gewonnen, welche die kontinuierlichen Systeme durch algebraische Gleichungen approximiert. Im Gegensatz zu einer analytischen Lösung, stellt eine numerische Lösung einen Satz von dem diskretisierten Problemgebiet zugeordneten Werten dar, aus dem dann der Verlauf der Variablen näherungsweise konstruiert werden kann.

Als Diskretisierungsverfahren stehen im Wesentlichen drei unterschiedliche Ansätze zur Verfügung:

- die Finite-Differenzen-Methode (FDM),
- die Finite-Volumen-Methode (FVM),
- die Finite-Element-Methode (FEM).

In der Praxis werden heute vor allem die FEM und die FVM verwendet. Während im strukturellen Bereich vorwiegend die FEM verwendet wird, ist es im strömungsmechanischen Bereich hauptsächlich die FVM. Für spezielle Aufgaben, z.B. für die Zeitdiskretisierung oder für spezielle Approximationen im Rahmen der FVM und der FEM, kommt häufig auch die FDM zum Einsatz.

Der nächste Schritt im Ablauf der Simulation besteht in der Lösung der algebraischen Gleichungssysteme (die eigentliche Berechnung, Abschnitt 6.5.6), wobei man es oftmals mit Gleichungen mit mehreren Millionen Unbekannten zu tun hat (je mehr, desto genauer ist in der Regel das Ergebnis). Die Berechnung liefert dann zunächst eine, meist riesige Menge an Zahlen, welche in der Regel nicht unmittelbar einer Interpretation zugänglich sind. Für die Auswertung der Berechnungsergebnisse ist daher insbesondere eine geeignete Visualisierung von Bedeutung (Diagramm, Konturplot, Isoflächen-Darstellung, Animation). Nachdem die Ergebnisse in interpretierbarer Form vorliegen, ist es notwendig diese

hinsichtlich ihrer Qualität zu prüfen. Bei allen zuvor durchgeführten Schritten werden zwangsläufig Fehler gemacht, und man muss sich darüber Klarheit verschaffen, welche Größenordnung sie annehmen (z.B. Referenzexperimente für Modellfehler, systematische Rechnungen für numerische Fehler). Oftmals ist es nach dieser Validierung notwendig, das Modell anzupassen oder die Rechnung mit einer verbesserten Diskretisierungsgenauigkeit erneut durchzuführen.

Bevor die einzelne Diskretisierungsverfahren diskutiert werden, kann hier noch auf die räumliche Diskretisierung als gemeinsamer Punkt eingegangen werden. Die diskreten Stellen, in denen die unbekannten Variablen bestimmt werden, sind üblicherweise in Form eines Gitters (Netzes) über das Lösungsgebiet verteilt, so dass die räumliche Diskretisierung des Problemgebiets oft auch als Gittergenerierung (Netzgenerierung, Vernetzung) bezeichnet wird. Bei praktischen Anwendungen mit sehr komplexen Geometrien kann die Gittergenerierung eine sehr zeitintensive Aufgabe darstellen.

Für die Gittergenerierung stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Die Gittertypen können unterschiedlich gruppiert werden (die Beispielbilder sind von den Vorlesungsfolien zu entnehmen):

- Bezüglich ihrer Struktur gibt es zwei große Gruppen:
 - strukturierte und
 - unstrukturierte Gitter.

Strukturierte Gitter sind durch eine regelmäßige Anordnung der Gitterpunkte charakterisiert. Man kann zwei oder drei Liniengruppen abhängig von der Dimensionalität des Gitters definieren. Für die Erstellung eines strukturierten Gitters sollen zwei Regeln eingehalten werden:

- Die Gitterlinien einer Gruppe dürfen sich nicht überschneiden.
- Die Gitterlinien verschiedener Gruppen dürfen sich paarweise nur einmal schneiden.

Bei Einhaltung dieser Regeln ist es möglich die Schnittpunkte entlang einer Linie sequentiell von 1 bis N zu nummerieren, und die Nachbarpunkte können durch Erhöhung bzw. Reduzierung dieses Index bestimmt werden. Bei unstrukturierten Gittern existiert so eine Ordnung nicht. Die Kombination von beiden Strukturtypen ergibt ein hybrides Gitter. Die Zellen (die von den Linien umrandeten Gebiete) sind bei strukturierten Gittern typischerweise Vierecke (2D) oder Hexaeder (3D). Bei unstrukturierten Gittern sind die Zellen Dreiecke, Vierecke oder Polygone (2D) bzw. Tetraeder, Hexaeder, Prismen oder Polyeder (3D).

Bei blockstrukturierten Gittern ist das Problemgebiet in Blöcke unterteilt, und die Regeln für strukturierte Gitter muss man blockweise anwenden. Ein strukturiertes Gitter kann auch unstrukturiert behandelt werden, umgekehrt ist dies nicht möglich. Strukturierte Gitter kann man nur für sehr einfache Geometrien verwenden. Mit blockstrukturierten Gittern können komplexe Geometrien vernetzt werden, aber der Aufwand steigt sehr rasch mit der Komplexität der Geometrie. Der Implementierungsaufwand und der Rechenaufwand sind bei strukturierten Gittern geringer als bei unstrukturierten Gittern. Mit unstrukturierten Gittern lassen sich fast alle Geometrien vernetzen, aber bei diesem Gittertyp muss die Topologie (Nachbarschaften von Zellen) mit verwaltet und gespeichert werden. Dementsprechend liegen der Implementierungsaufwand, der Rechenaufwand und Speicherbedarf höher als beim strukturierten Gittern.

- Bezüglich der Orthogonalität (bei strukturierten Gitter):
 - orthogonal (kartesisch): die Gitterlinien der Gruppen sind stets orthogonal zu einander,
 - krummlinig orthogonal: in einem Schnittpunkt sind die Tangente der Linien orthogonal zu einander,
 - krummlinig nicht-orthogonal.
- Bezüglich Verhältnis von Problemgebiet und vernetztes Gebiet:
 - geometrieangepasst: nur das Problemgebiet wird vernetzt,
 - "immersed boundary": ein orthogonales Gitter wird benutzt, welches größer ist, als das Problemgebiet,
 - überlappend (Chimera): es werden mehrere Gitter für Abdeckung des Problemgebietes benutzt, welche sich überlappen.

6.5.3 Finite Differenzen Methode

Als Diskretisierungstechniken für PDE hat sich im Laufe der Jahre eine ganze Reihe von Ansätzen etabliert. Finite Differenzen Verfahren diskretisiert die PDE insofern direkt, als sie sämtliche Ableitungen durch sie annähernde Differenzenquotienten ersetzen - ein naheliegender und leicht zu implementierender Ansatz, der in puncto theoretischem Hintergrund aber seine Schwächen hat und außerdem im Wesentlichen auf strukturierte bzw. orthogonale Gitter beschränkt ist.

Die Erhaltungsgleichungen in der Strömungsmechanik haben alle eine ähnliche Form und können als Sonderfälle einer allgemeinen Transportgleichung betrachtet werden. Deshalb wird hier eine generische Erhaltungsgleichung an einem kartesischem Gitter behandelt (s. erste Vorlesungsfolie in Abschnitt Finite Differenzen). Es wird jetzt angenommen, dass ρ , v_j , Γ und q_ϕ bekannt sind. Dies ist normalerweise nicht der Fall, da die Geschwindigkeit meistens ebenfalls berechnet werden muss. Außerdem können Fluideigenschaften (z.B. die Viskosität) von der Temperatur und, wenn Turbulenzmodelle verwendet werden (z.B. die turbulente Viskosität), auch vom Geschwindigkeitsfeld abhängig sein. Es wird hier nur ϕ als einzige Unbekannte behandelt.

Die angegebene generische Erhaltungsgleichung in Differentialform dient bei FDM als Ausgangspunkt. Da sie in ϕ linear ist, wird sie mit einem System linearer algebraischer Gleichungen approximiert, in dem die Variablenwerte in den Gitterpunkten die Unbekannten sind (bei den NS-Gleichungen ist die Geschwindigkeit auch eine Unbekannte, dementsprechend ist der konvektive Term nichtlinear). Die Lösung dieses Systems approximiert die Lösung der partiellen Differentialgleichung.

Jeder Gitterpunkt ist somit mit einem unbekannten Variablenwert verknüpft und muss eine algebraische Gleichung liefern. Diese stellt eine Beziehung zwischen dem Variablenwert im gegebenen Gitterpunkt und den Werten in einigen Nachbargitterpunkten dar. Man erhält sie, indem man jeden Term der Differentialgleichung im betreffenden Gitterpunkt durch eine Finite-Differenzen-Approximation ersetzt. Natürlich muss die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmen. In Randpunkten, wo die Variablenwerte gegeben sind (Dirichlet-Bedingungen), ist keine Gleichung notwendig. Wenn die Randbedingungen Ableitungen beinhalten (wie bei Neumann-Bedingungen), muss die Randbedingung für solche Randpunkte diskretisiert werden, um eine Gleichung zum zu lösenden Gleichungssystem hinzuzufügen.

Die Grundidee für FDM stammt direkt von der Definition einer Ableitung:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x_i + \Delta x) - \phi(x_i)}{\Delta x}. \quad (6.15)$$

In Abb. 6.2 wird eine geometrische Interpretation gegeben. Die erste Ableitung $\partial\phi/\partial x$ in einem Punkt repräsentiert die Neigung der Tangente zur Kurve $\phi(x)$ in diesem Punkt; diese Linie ist mit "exakt" in der Abbildung gekennzeichnet. Ihre Neigung kann durch die Neigung einer Geraden, die durch zwei benachbarte Punkte auf der Kurve verläuft, approximiert werden. Die gepunktete Linie zeigt die Approximation bei einer Vorwärtsdifferenz; die Ableitung in x_i wird durch die Neigung einer Linie, die durch den Punkt x_i und einen anderen Punkt in $x_i + \Delta x$ verläuft, approximiert. Die gestrichelte Linie stellt eine Approximation durch Rückwärtsdifferenz dar: Der zweite Punkt liegt hier bei $x_i - \Delta x$. Die mit "zentral" markierte Linie zeigt eine Approximation durch Zentraldifferenz: Sie verwendet eine Linie, die durch einen Punkt rechts und einen Punkt links vom Punkt verläuft, in dem die Ableitung approximiert wird.

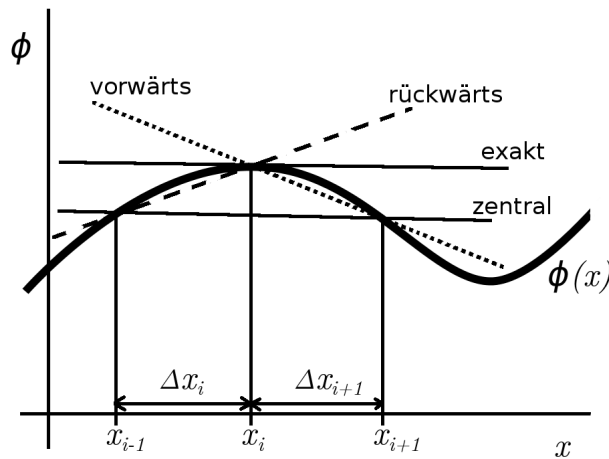


Abbildung 6.2: Zur Definition einer Ableitung und deren Approximationen

Aus Abb. 6.2 ist ersichtlich, dass einige Approximationen besser sind als andere. Die Linie der Zentraldifferenz-Approximation hat eine Neigung, die der Neigung der Tangente sehr nahekommt; wenn die Funktion $\phi(x)$ ein Polynom 2. Ordnung wäre und die Punkte in gleichem Abstand in x-Richtung lägen, würden die Neigungen genau übereinstimmen.

Es ist weiterhin aus Abb. 6.2 zu erkennen, dass sich die Qualität der Approximation verbessern würde, wenn die zusätzlichen Punkte näher bei x_i liegen würden, d.h. die Approximation wird mit Gitterverfeinerung besser. Die in Abb. 6.2 gezeigten Approximationen sind nur einige von vielen Möglichkeiten; die folgenden Abschnitte erläutern die grundlegenden Wege zur Ableitung von Approximationen verschiedener Ordnung.

In den folgenden zwei Abschnitten werden nur eindimensionale Fälle betrachtet. Die Koordinate x , auf die Bezug genommen wird, kann entweder kartesisch oder krummlinig sein; der Unterschied ist hier von geringer Bedeutung. In mehrdimensionalen finiten Differenzen wird normalerweise jede Koordinate einzeln behandelt, so dass die hier entwickelten Methoden ohne weiteres bei höherer Dimensionalität angewendet werden können.

Approximation der ersten Ableitung

Die Diskretisierung des konvektiven Terms in den Navier-Stokes Gleichungen erfordert eine Approximation der ersten Ableitung: $\partial(\rho u \phi)/\partial x$. Im vorangegangenen Abschnitt wurde ein Weg zur intuitiven Herleitung von Approximationen für die erste Ableitung vorgestellt. Es gibt jedoch systematischere Wege, die besser für die Herleitung von genaueren Approximationen geeignet sind.

Hier wird erläutert, wie man mit Hilfe der Taylor-Reihen-Entwicklung die Approximation der ersten Ableitung einer generischen Variablen ϕ herleiten kann. Weitere Methoden sind in [FP08] beschrieben.

Jede kontinuierlich differenzierbare Funktion $\phi(x)$ kann in der Nähe von x_i als Taylor-Reihe ausgedrückt werden:

$$\phi(x) = \phi(x_i) + \frac{(x - x_i)}{1!} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_i} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{x_i} + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_{x_i} + \dots + \frac{(x - x_i)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} \right)_{x_i} + H, \quad (6.16)$$

wo H "Terme höherer Ordnung" bedeutet. Ersetzt man in dieser Gleichung x durch x_{i+1} oder x_{i-1} , erhält man Ausdrücke für die Variablenwerte in diesen Punkten als Funktion der Variablen und ihrer Ableitung in x_i . Dies gilt für jeden anderen Punkt in der Nähe von x_i , beispielsweise x_{i+2} und x_{i-2} .

Mit diesen Reihen kann man Näherungsausdrücke für die erste und höhere Ableitungen im Punkt x_i als Funktionen von Variablenwerten in den Nachbarpunkten erhalten. So kann beispielsweise mit Gl. (6.16) für ϕ in x_{i+1} gezeigt werden, dass:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{x_i} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_{x_i} + H. \quad (6.17)$$

Ein anderer Ausdruck kann mit Gl. (6.16) für ϕ in x_{i-1} hergeleitet werden:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_i} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{x_i} - \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_{x_i} + H. \quad (6.18)$$

Noch ein weiterer Ausdruck kann durch Verwendung von Gl. (6.16) in sowohl x_{i-1} als auch in x_{i+1} erhalten werden:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2}{2!(x_{i+1} - x_{i-1})} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{x_i} - \frac{(x_{i+1} - x_i)^3 - (x_i - x_{i-1})^3}{3!(x_{i+1} - x_{i-1})} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_{x_i} + H. \quad (6.19)$$

Alle drei Ausdrücke sind *exakt*, wenn alle Terme auf der rechten Seite beibehalten werden. Da aber die Ableitungen höherer Ordnung unbekannt sind, nützen einem diese Ausdrücke in der gegebenen Form nicht viel. Doch wenn der Abstand zwischen den Gitterpunkten

(d.h. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ bzw. $\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i$) klein ist, sind die Terme höherer Ordnung klein, da sie höhere Potenzen des Gitterabstands als Multiplikatoren beinhalten. Eine Ausnahme sind die ungewöhnlichen Situationen, wenn die höheren Ableitungen lokal sehr groß sind. Vernachlässigt man die letzte Möglichkeit, ergeben sich *Approximationen* der ersten Ableitung durch den Abbruch jeder dieser Reihen nach dem ersten Term auf der rechten Seite:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i}; \quad (6.20)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}; \quad (6.21)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \quad (6.22)$$

Dies sind die Vorwärts-, die Rückwärts- und die Zentralfrequenz-Approximation, die bereits erwähnt wurden. Die auf den rechten Seiten vernachlässigten Terme stellen die *Abbruchfehler* dar. Diese sind das Maß für die Genauigkeit der Approximation und bestimmen die Rate, mit der sich der Fehler verkleinert, wenn der Abstand zwischen den Gitterpunkten reduziert wird. Der Abbruchfehler ist proportional zur Summe der Produkte aus einer Potenz des Gitterpunktabstandes und einer Ableitung höherer Ordnung im Punkt $x = x_i$:

$$\epsilon_\tau = (\Delta x)^m \alpha_{m+1} + (\Delta x)^{m+1} \alpha_{m+2} + \dots + (\Delta x)^n \alpha_{n+1}, \quad (6.23)$$

wo Δx der Abstand zwischen den Punkten ist (zunächst als überall gleich groß angenommen - äquidistantes Gitter), und die α 's sind Ableitungen höherer Ordnung, multipliziert mit konstanten Faktoren. Gleichung (6.23) zeigt, dass die Terme mit höheren Potenzen von Δx für kleine Abstände kleiner sind, so dass der führende Term (der mit dem kleinsten Exponenten) der dominierende ist. Wenn Δx reduziert wird, konvergieren die obigen Approximationen zur exakten Ableitung mit einem Fehler, der proportional zu $(\Delta x)^m$ ist, wobei m der Exponent des führenden Terms im Abbruchfehler ist. Man sagt dann, dass es sich um eine Approximation m -ter Ordnung handelt.

Die Ordnung einer Approximation gibt an, wie schnell der Fehler *reduziert* wird, wenn das Gitter *verfeinert* wird; sie sagt nichts über die absolute Größe des Fehlers aus. Der Fehler wird folglich um einen Faktor von zwei, vier, acht oder sechzehn für Approximationen 1., 2., 3. oder 4. Ordnung reduziert. Man sollte jedoch beachten, dass diese Regel nur bei *genügend kleinen Abständen* gilt; die Definition von "genügend klein" hängt vom Profil der Funktion $\phi(x)$ ab.

Approximation der zweiten Ableitung

Zweite Ableitungen tauchen in diffusiven Termen der Erhaltungsgleichungen auf. Um die zweite Ableitung in einem Punkt abzuschätzen, kann man die Approximation für die erste Ableitung zweimal anwenden. Das ist der einzig mögliche Weg, wenn die Fluideigenschaften veränderlich sind, da man dann die Ableitung des Produktes aus dem Diffusionskoeffizienten und der ersten Ableitung benötigt. Geometrisch gesehen stellt die zweite Ableitung die Neigung der Tangente zur Kurve, die die erste Ableitung darstellt, dar. Man kann eine Approximation der zweiten Ableitung im Punkt i erhalten, indem man Approximationen für die erste Ableitung in zwei Punkten (z.B. x_{i+1} und x_{i-1}) einsetzt. Eine meist

benutzte Möglichkeit ist, die ersten Ableitungen in den Hilfspunkten in der Mitte zwischen x_i und x_{i+1} bzw. x_i und x_{i-1} mit Zentralfdifferenzen zu approximieren, was zu folgenden Ausdrücken führt (auf einem äquidistanten Gitter):

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_i} \approx \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_{i-\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1})} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}. \quad (6.24)$$

mit

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_{i-\frac{1}{2}}} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Die Approximation (6.24) kann auch mit Hilfe der Taylor-Reihen-Entwicklung hergeleitet werden. Dazu muss man die Gleichungen (6.17) und (6.18) voneinander subtrahieren.

Implementierung der Randbedingungen

Für jeden inneren Gitterpunkt wird eine Finite-Differenzen-Approximation der partiellen Differenzialgleichung verlangt. Für eine eindeutige Lösung des Kontinuumsproblems benötigt man Informationen über die Lösung an den Rändern des Lösungsgebietes. Im Allgemeinen ist der Wert der Variablen am Rand (Dirichlet-Randbedingung) oder ihr Gradient in eine bestimmte Richtung (normalerweise senkrecht zum Rand – Neumann-Randbedingung) oder eine lineare Kombination der beiden Größen (Cauchy-Randbedingung), gegeben.

Ist der Variablenwert in einem Randpunkt bekannt, dann muss dort keine Gleichung gelöst werden. In allen FD-Gleichungen, die Daten aus solchen Punkten verwenden, werden die bekannten Werte eingesetzt, und es ist nichts weiter erforderlich. Wird der Gradient am Rand vorgeschrieben, kann eine passende FD-Approximation für ihn verwendet werden (es muss eine einseitige Approximation sein), um den Randwert der Variablen zu berechnen. Ist zum Beispiel ein Nullgradient in randnormale Richtung vorgeschrieben, führt eine einfache Vorwärtsdifferenz-Approximation zu:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\phi_2 - \phi_1}{x_2 - x_1} = 0, \quad (6.25)$$

was $\phi_1 = \phi_2$ ergibt. Dies erlaubt wiederum, den Randwert in finiten Approximationen durch den Wert der Variablen im randnächsten Punkt zu ersetzen und ihn als Unbekannte zu beseitigen. Approximationen höherer Ordnung sind in den Vorlesungsfolien exemplarisch angegeben.

6.5.4 Finite Volumen Methode

Finite Volumen Verfahren sind besonders im Kontext von Strömungssimulationen populär. Sie diskretisieren kontinuumsmechanische Erhaltungssätze auf kleinen Kontrollvolumina. Wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten wird auch hier nur die generische Erhaltungsgleichung für eine Größe ϕ betrachtet. Außerdem wird angenommen, dass das Geschwindigkeitsfeld und alle Fluideigenschaften bekannt sind. Die Finite-Volumen-Methode (FVM) verwendet die Integralform der Erhaltungsgleichung als Startpunkt (s. Vorlesungsfolie).

Das Lösungsgebiet wird von einem Gitter in eine endliche Anzahl kleiner Kontrollvolumina (KVs) unterteilt. Im Gegensatz zur Finite-Differenzen-Methode definiert dieses Gitter nicht

die Rechenpunkte, sondern die Ränder der Kontrollvolumina. Normalerweise definiert man die KVs durch ein passendes Gitter und setzt den Rechenpunkt ins KV-Zentrum (Zellmittelpunktschema). Man könnte aber ebenso die Lage der Rechenpunkte zuerst festlegen und dann die KVs um sie herum konstruieren, z.B. so, dass die KV-Seiten in der Mitte zwischen den Rechenpunkten liegen (Zelleckpunktschema).

Die integrale Erhaltungsgleichung gilt für jedes KV, wie auch für das Lösungsgebiet als Ganzes. Wenn man die Gleichungen für alle KVs summiert, erhält man die Erhaltungsgleichung für das gesamte Lösungsgebiet, da sich die Oberflächenintegrale über die inneren KV-Seiten aufheben. Dadurch wird die physikalisch geforderte globale Konservativität in die Methode eingebaut, und dies ist einer ihrer wesentlichen Vorteile.

Um eine algebraische Gleichung für ein bestimmtes KV zu erhalten, müssen die Oberflächen- und die Volumenintegrale numerisch approximiert werden; dazu benutzt man die sog. Quadraturformeln.

Approximation von Flächenintegralen

In den Abbildungen 6.3 und 6.4 sind typische 2D und 3D kartesische Kontrollvolumina mit der hier verwendeten Notation gezeigt. Die KV-Oberfläche besteht aus vier (im 2D-Fall) oder sechs (im 3D-Fall) ebenen Seiten, die durch tiefer gestellte Buchstaben entsprechend ihrer Ausrichtung ("e", "w", "n", "s", "o" und "u" für östlich, westlich, nördlich, südlich, oben und unten) in Bezug auf den Mittelpunkt (P) gekennzeichnet sind.

Der 2D-Fall kann als Sonderfall des 3D-Falles angesehen werden, in dem die abhängigen Variablen unabhängig von z -Richtung sind. Die x und y Flächen werden als Kanten dargestellt, die z Fläche entspricht das Volumen des KV.

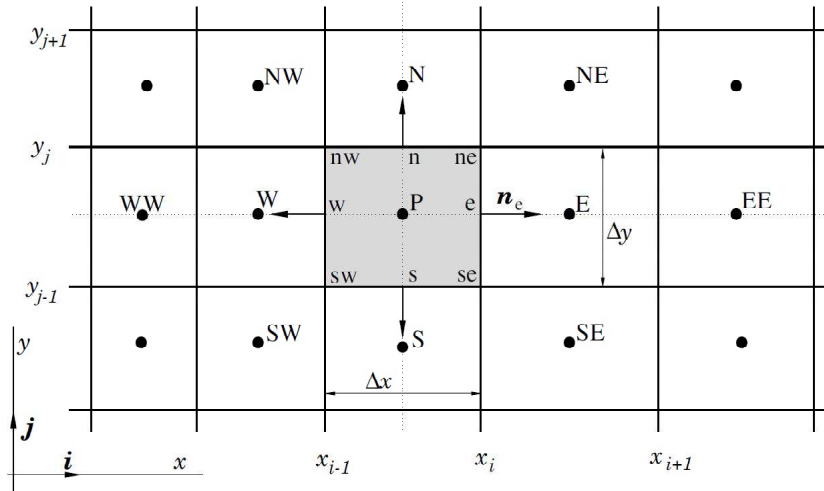
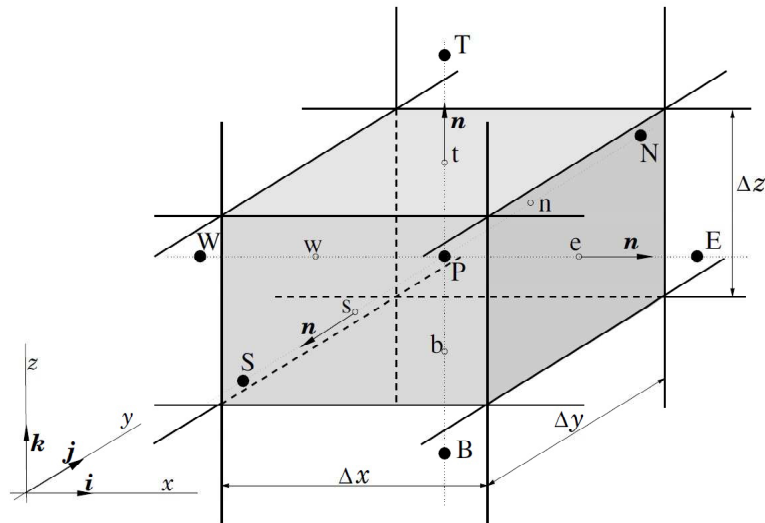


Abbildung 6.3: Ein typisches KV für ein kartesisches 2D-Gitter und die verwendete Notation

Der Nettofluss durch den KV-Rand ist gleich der Summe der Integrale über die vier (im 2D-Fall) oder sechs (im 3D-Fall) KV-Seiten:

$$\int_S f dS = \sum_k \int_{S_k} f dS, \quad (6.26)$$

wo f die Komponente des konvektiven ($\rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$) oder diffusiven ($\Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n}$) Flussvektors



Um die Konservativität zu gewährleisten ist es wichtig, dass sich die KVs nicht überlappen; jede KV-Seite gehört eindeutig den beiden KVs an, die sie trennt.

Nehmen wir jetzt als Beispiel die östliche Fläche (e) des KV. Um das Flächenintegral in Gl. (6.26) exakt zu berechnen, müsste man den Integranden f überall auf der Oberfläche S_e kennen. Diese Information steht nicht zur Verfügung, da nur die Knotenwerte von ϕ (d.h. im KV-Zentrum) berechnet werden, weshalb Approximationen notwendig sind. Zu diesem Zweck werden üblicherweise Approximationen auf drei Ebenen eingeführt:

- Das Integral über eine KV-Seite wird als Funktion der Variablenwerte an einer oder mehreren Stellen innerhalb der KV-Seite – den sog. Integrationspunkten – approximiert (Quadraturformel);
- Die Variablenwerte in den Integrationspunkten an einer KV-Seite werden als Funktion der Knotenwerte approximiert, d.h. durch Interpolation.
- Die Ableitungen der Variablen in den Integrationspunkten werden durch finite Differenzen approximiert.

$$F_e = \int_{S_e} f dS = \bar{f}_e S_e \approx f_e S_e. \quad (6.27)$$

Weitere Approximationen des Flächenintegrals sind z. B. die Trapezregel oder die Simpsonsche Regel (s. Vorlesungsfolie).

Da der Wert von f im Integrationspunkt (Flächenschwerpunkt) "e" zunächst nicht verfügbar ist, muss er durch Interpolation gewonnen werden.

Hierfür stehen unterschiedliche Möglichkeiten zur Verfügung:

- **Upwind-Interpolation:**

Die Approximation von ϕ_e durch den Wert von ϕ im KV-Zentrum stromauf von "e" ist äquivalent zur Verwendung einer Rückwärts- oder Vorwärtsapproximation für die erste Ableitung in FD-Verfahren (abhängig von der Strömungsrichtung); deshalb wird diese Approximation oft als Aufwinddifferenz bezeichnet, obwohl es sich hier um keine Differenz, sondern um Interpolation handelt:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{falls } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e > 0; \\ \phi_E & \text{falls } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e < 0. \end{cases} \quad (6.28)$$

Diese Approximation wird nie oszillierende Lösungen liefern, da sie numerisch diffusiv ist. Die Taylor-Reihen-Entwicklung um den Punkt P ergibt (für $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e > 0$):

$$\phi_e = \phi_P + (x_e - x_P) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_P + \frac{(x_e - x_P)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} \right)_P + H, \quad (6.29)$$

wo H die Terme höherer Ordnung kennzeichnet. Die Aufwind-Approximation beinhaltet nur den ersten Term auf der rechten Seite, sie ist also ein Verfahren 1. Ordnung. Ihr führender Abbruchfehler-Term ist diffusiv, d. h. er ähnelt dem diffusiven Fluss:

$$f_e^{\text{diff}} = \Gamma_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \quad (6.30)$$

Der Koeffizient der numerischen Diffusion (in der Literatur werden verschiedene Bezeichnungen dafür verwendet, u. a. künstliche und falsche Diffusion) ist $\Gamma_e^{\text{num}} = (\rho u)_e \Delta x / 2$. Diese numerische Diffusion wird in mehrdimensionalen Problemen verstärkt, wenn die Strömung schräg zum Gitter verläuft; der Abbruchfehler produziert dann Diffusion sowohl in Richtung normal zur Strömung als auch in Strömungsrichtung, was ein besonders schwerwiegender Fehlertyp ist. Spitzen oder starke Veränderungen in den Variablen werden verwischt und, da die Rate der Fehlerreduzierung nur 1. Ordnung ist, sind sehr feine Gitter notwendig, um genaue Lösungen zu erhalten.

- **Lineare Interpolation:**

Eine andere einfache Approximation für den Wert im Mittelpunkt der KV-Seite ist die lineare Interpolation zwischen den zwei benachbarten Rechenknoten (KV-Zentren). Im Punkt "e" gilt auf einem kartesischen Gitter (siehe Abb. 6.3 und 6.4):

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) \quad (6.31)$$

wobei der lineare Interpolationsfaktor λ_e wie folgt definiert ist:

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad (6.32)$$

Die Gleichung (6.31) hat eine Genauigkeit 2. Ordnung, was durch das Einsetzen von ϕ_E in die Taylor-Reihen-Entwicklung von ϕ um den Punkt P, um die 1. Ableitung in Gl. (6.29) zu eliminieren, gezeigt werden kann.

Wie bei allen Approximationen mit einer Ordnung größer als eins kann diese Methode oszillierende Lösungen produzieren. Dies ist die einfachste Approximation 2. Ordnung und die am häufigsten angewendete. Sie entspricht der Zentralkifferenz-Approximation der ersten Ableitung in FD-Methoden; daher wird sie in der Literatur oft genauso genannt. Die Annahme eines linearen Profils zwischen Knoten P und E bietet ebenfalls die einfachste Approximation des Gradienten im Punkt "e", der für die Berechnung des diffusiven Flusses benötigt wird:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} \quad (6.33)$$

- **Quadratische Upwind-Interpolation:**

Für die Approximation werden die Punkte P, E und EE (weiter östlich von E) verwendet.

- **Verfahren höherer Ordnung:**

Für die Approximation werden mehr als drei Punkte herangezogen.

Um die Genauigkeit der Approximation des Flächenintegrals beizubehalten, muss der Wert von f_e mindestens mit derselben Genauigkeit interpoliert werden.

Approximation der Volumenintegrale

Einige Terme in den Transportgleichungen verlangen eine Integration über das Volumen eines KV. Die einfachste Approximation 2. Ordnung erfolgt wieder nach der Mittelpunkregel: das Volumenintegral wird durch das Produkt aus dem Wert des Integranden im KV-Zentrum (der für den Mittelwert über das KV-Volumen steht) und dem KV-Volumen approximiert (s. Vorlesungsfolie). Da alle Variablen im Punkt P zur Verfügung stehen, muss zur Bestimmung von q_P (Wert für q im KV-Zentrum) keine Integration durchgeführt werden. Diese Approximation wird exakt, wenn q entweder konstant ist oder linear im KV variiert; ansonsten enthält die Approximation einen Fehler 2. Ordnung.

Für eine Approximation höherer Ordnung sind die Werte von q in mehreren Punkten als nur dem KV-Zentrum erforderlich. Diese Werte müssen durch Interpolation der Knotenwerte oder äquivalent durch die Verwendung einer Formfunktion ermittelt werden. Um eine optimale Genauigkeit zu erhalten, sollte die Interpolation bzw. die Formfunktion von derselben Ordnung wie die Ordnung der Integralapproximation sein.

Implementierung der Randbedingungen

Jedes KV liefert eine algebraische Gleichung. Die Volumenintegrale werden auf die gleiche Weise für jedes KV berechnet, aber die Flüsse durch die KV-Seiten, die am Rande des Lösungsgebietes liegen, bedürfen besonderer Behandlung. Diese Randflüsse müssen entweder bekannt sein oder als Kombination aus den (unbekannten) inneren Werten und den (bekannten) Randdaten ausgedrückt werden. Da sie keine zusätzlichen Gleichungen liefern, dürfen sie auch keine weiteren Unbekannten einführen. Weil es keine Rechenpunkte außerhalb des Randes gibt, müssen diese Approximationen auf einseitigen Differenzen oder Extrapolationen basieren.

Normalerweise sind konvektive Flüsse an den Einstromrändern vorgegeben. An undurchlässigen Wänden und Symmetrieebenen sind sie gleich null. An einem Ausstromrand wird

normalerweise angenommen, dass Ableitungen aller Variablen in Strömungsrichtung gleich null sind; in diesem Fall können Aufwind-Approximationen verwendet werden.

Diffusive Flüsse werden manchmal an der Wand spezifiziert, z.B. wenn ein bestimmter Wärmefluss vorgegeben ist (einschließlich dem Sonderfall einer adiabaten Oberfläche, wo der Wärmefluss gleich null ist). Häufig sind die Randwerte von Variablen vorgegeben. In solchen Fällen werden die diffusiven Flüsse mittels einseitiger Approximationen für Ableitungen in Richtung der Normalen zum Rand berechnet. Ist der Gradient selbst vorgegeben, wird er zur Berechnung des Flusses verwendet, und es kann eine Approximation für den Fluss als Funktion von Knotenwerten verwendet werden, um die Randwerte der Variablen zu berechnen.

6.5.5 Finite Elemente Methode

Das Lösen partieller Differentialgleichungen (PDGL) kann je nach Problemstellung sehr rechenintensiv werden, da für jeden Zeitschritt das komplette Rechengebiet aktualisiert werden muss. Für eine effizientere Berechnung unterteilt die Finite Elementen Methode (FEM) das Rechengebiet in finite Elemente. Dadurch kann für jedes Element, unter Berücksichtigung von Übergangsbedingungen mit den Nachbarelementen, die PDGL approximiert werden. Je nach Problemstellung lassen sich verschiedene Elemente verwenden. Eine Auswahl ist in Abbildung 6.5 gegeben. Eine Variation bzw. Kombination verschiedener Elemente ist denkbar.

Eine Möglichkeit, die FEM herzuleiten, basiert auf der Idee, dass jede physikalische Pro-

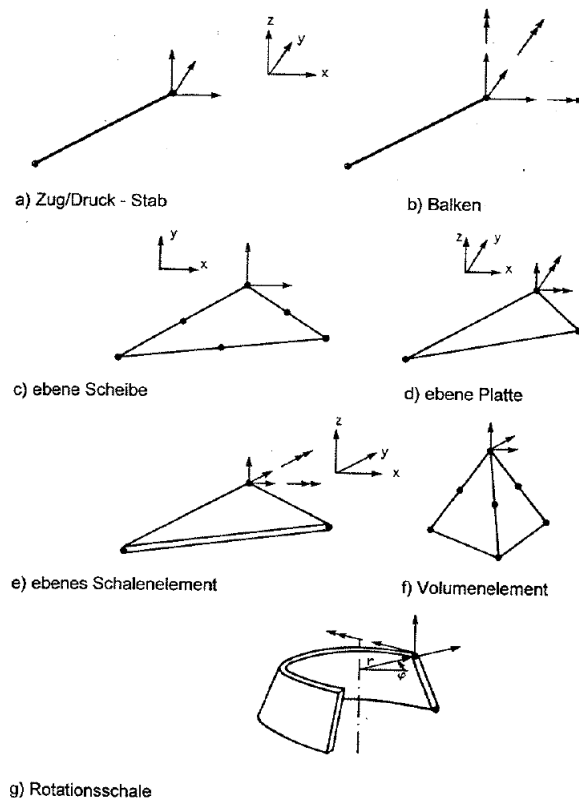


Abbildung 6.5: Verschiedene Elemententypen

blemstellung die Lösungen besitzt, bei denen die Energie minimal ist. Da die Energie von Funktionen abhängt (z.B. von der Verschiebung $u(x)$), wird diese mit einem Funktional beschrieben (Funktional ist eine Funktion, die von Funktionen abhängig ist). Um das Minimum des Energiefunktional zu finden, muss die erste Variation des Funktional (entspricht der ersten Ableitung bei Funktionen) zu Null gesetzt werden:

$$\delta\Pi = 0. \quad (6.34)$$

Für das Aufstellen des Energiefunktional Π und das Lösen der Gleichung (6.34) existieren unterschiedliche Herangehensweisen, wie z.B. das *Prinzip nach Hamilton*

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt + \int_{t_0}^{t_1} W_{virt} dt = 0 \quad (6.35)$$

mit der kinetischen Energie T , der potentiellen Energie V und der virtuellen Arbeit der potentiallosen Kräfte W_{virt} . Zudem müssen noch geeignete Anfangs- und Randbedingungen für eine vollständige Problembeschreibung gewählt werden.

Im Folgenden soll für den Sonderfall der Statik das allgemeine Vorgehen der FEM erläutert werden. Dadurch ergeben sich gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL). Für jedes Element i wird eine Ansatzfunktion für die Verschiebung $u_i^{approx}(x, y, z)$ benötigt. Der hochgestellte Index weist darauf hin, dass es sich um einen Näherungsansatz handelt. Lediglich für sehr einfache Strukturmodelle (z.B. Dehnstab) kann eine exakte Ansatzfunktion aufgestellt werden. Es ist darauf zu achten, dass der Grad der Ansatzfunktion der Anzahl der Freiheitsgrade des Elementes entspricht. Für jedes Element wird zudem ein passendes lokales Koordinatensystem $\{x_i, y_i, z_i\}$ definiert. Für eine Implementierung wird die Ansatzfunktion

$$u_i^{approx}(x_i, y_i, z_i) = \mathbf{N}_i(x_i, y_i, z_i) \mathbf{u}_i \quad (6.36)$$

mit den Knotenverschiebungen \mathbf{u}_i diskretisiert. Die Matrix $\mathbf{N}_i(x_i, y_i, z_i)$ interpoliert die Knotenverschiebungen miteinander. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf die Argumente (x_i, y_i, z_i) im Folgenden verzichtet.

Für die Betrachtung mechanischer Probleme lassen sich mit der Annahme kleiner Verschiebungen und linearer Elastizität die Verzerrungs- und Spannungsfelder zu

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{1}{2} \left(\nabla u_i^{approx} + (\nabla u_i^{approx})^T \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{N}_i + (\nabla \mathbf{N}_i)^T \right) \mathbf{u}_i := \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i, \\ \sigma_i &= \mathbf{C}_i \varepsilon_i = \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (6.37)$$

diskretisieren.

Für den Fall der Statik entfällt die kinetische Energie und die gesamte Energie lässt sich für konservative Systeme zu

$$\Pi = \sum_{i=1}^N (\Pi_{i,innen}) + (\Pi_{i,aussen}) \quad (6.38)$$

mit dem Potential der inneren Kräfte $\Pi_{i,innen}$ und äußeren Kräfte $\Pi_{i,aussen}$ aufstellen. Das innere Potential der Elemente kann über $\Pi_{innen} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_i d\varepsilon_i dV$ und das äußere Potential aus dem Produkt von den an den Knoten angreifenden Knoten und deren Verschiebung

$\Pi_{\text{aussen}} = -\mathbf{f}\mathbf{u}$ berechnet werden. Damit erhält man für das Potential

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i - \mathbf{f}\mathbf{u} \quad (6.39)$$

mit $\mathbf{K}_i = \int_V \mathbf{B}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i dV$. Mit der ersten Variation erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} = 0 &= \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i - \mathbf{f} \\ \mathbf{f} &= \mathbf{K}_{\text{Ges}} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (6.40)$$

mit der Gesamtsteifigkeit \mathbf{K}_{Ges} . Hierbei ist zu beachten, dass $\mathbf{K}_{\text{Ges}}, \mathbf{f}, \mathbf{u}$ im globalen Koordinatensystem definiert sind. Die im lokalen Koordinatensystem definierten Elementsteifigkeiten \mathbf{K}_i müssen dafür durch eine geeignete Transformation in das globale Koordinatensystem überführt werden.

Unter Hinzunahme der bekannten Verschiebungsrandbedingungen \mathbf{u}_a und angreifenden äußeren Kräfte \mathbf{f}_b ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\text{Ges}}^{11} & \mathbf{K}_{\text{Ges}}^{12} \\ \mathbf{K}_{\text{Ges}}^{21} & \mathbf{K}_{\text{Ges}}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{pmatrix} = \mathbf{K}_{\text{Ges}} \mathbf{u} \quad (6.41)$$

mit den unbekannten Reaktionskräften \mathbf{f}_a und den unbekannten Verschiebungen \mathbf{u}_b bzw. durch Umstellen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{Ges}}^{22} \mathbf{u}_b &= (\mathbf{f}_b - \mathbf{K}_{\text{Ges}}^{21} \mathbf{u}_a) \\ \mathbf{f}_a &= \mathbf{K}_{\text{Ges}}^{11} \mathbf{u}_a + \mathbf{K}_{\text{Ges}}^{12} \mathbf{u}_b, \end{aligned} \quad (6.42)$$

das mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren zu lösen ist.

Die Güte der Ergebnisse einer FEM-Modellierung wird hauptsächlich durch die Wahl des Elementtyps, die Anzahl der Freiheitsgrade pro Element und die Gesamtanzahl an Elementen beeinflusst.

6.5.6 Lösungsverfahren

Das Ergebnis des Diskretisierungsprozesses ist ein System algebraischer Gleichungen, die entsprechend der Natur der partiellen Differentialgleichungen, von denen sie abgeleitet wurden, linear oder nichtlinear sind. Im nichtlinearen Fall müssen die Diskretisierungsgleichungen mit einer iterativen Technik gelöst werden, die ein Abschätzen der Lösung, Linearisierung der Gleichungen um diese Lösung und Verbessern der Lösung umfasst; der gesamte Prozess wird wiederholt, bis ein konvergiertes Ergebnis erhalten wird. Es ist also ganz egal, ob die Gleichungen linear sind oder nicht – eine effiziente Methode zur Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme wird in jedem Fall benötigt.

Die algebraischen Gleichungen in jedem Gitterpunkt enthalten sowohl den Variablenwert in diesem Punkt, als auch die Werte in einigen Nachbarpunkten. Das Ergebnis der Diskretisierung ist ein System linearer algebraischer Gleichungen in der Form:

$$A_P \phi_P + \sum_l A_l \phi_l = Q_P \quad (6.43)$$

wobei P den Punkt bezeichnet, in dem die partielle Differentialgleichung approximiert

wird, und der Index l läuft über die Nachbarpunkte, die in die finite Differenzen Approximationen einbezogen sind. Der Punkt P und seine Nachbarn formen den sog. *Rechenstern*; in Abb. 6.6 sind drei Beispiele, die sich aus gewöhnlichen Approximationen in zwei und drei Dimensionen ergeben, dargestellt. Die Koeffizienten A_l hängen von den geometrischen Größen, den Fluideigenschaften und, bei nichtlinearen Gleichungen, von den Variablenwerten selbst ab. An der rechten Seite beinhaltet Q_P alle Terme, die keine unbekannten Variablenwerte beinhalten und wird als bekannt angenommen.

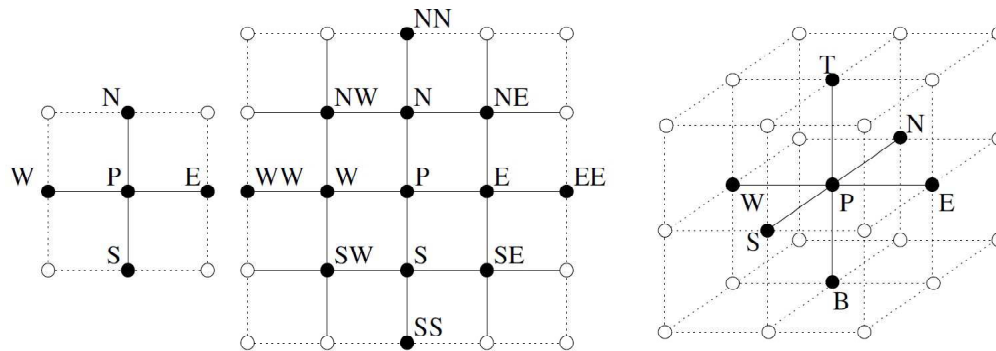


Abbildung 6.6: Beispiele für Rechensterne in 2D (links, Mitte) und 3D (rechts)

Die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten muss gleich sein, d. h. es muss für jeden Gitterpunkt eine Gleichung geben. Damit hat man einen großen Satz linearer algebraischer Gleichungen, der numerisch gelöst werden muss. Dieses System ist dünn besetzt, was bedeutet, dass jede Gleichung nur einige wenige Unbekannte enthält. Das System kann folgendermaßen in Matrix-Notation geschrieben werden:

$$A\phi = \mathbf{Q}. \quad (6.44)$$

Hier ist A eine dünn besetzte, quadratische Koeffizientenmatrix, ϕ ist ein Vektor (oder eine Spaltenmatrix) mit den Variablenwerten in den Gitterpunkten, und \mathbf{Q} ist der Vektor, der die Terme auf der rechten Seite von Gl. (6.43) enthält.

Die Struktur der Matrix A hängt von der Anordnung der Variablen im Vektor ϕ ab. Für strukturierte Gitter, bei denen die Variablen – von einer Ecke ausgehend – Linie für Linie geordnet nummeriert sind, hat die Matrix eine polydiagonale Struktur, wie z. B. für einen Fünf-Punkte-Rechenstern in Abb. 6.7 dargestellt wird.

Für blockstrukturierte Gitter wird diese Struktur in jedem Gitterblock beibehalten. Für unstrukturierte Gitter bleibt die Koeffizientenmatrix dünn besetzt, sie hat jedoch keine regelmäßige Struktur mehr. Für ein 2D-Gitter, bestehend aus Vierecken, und für Approximationen, die nur die vier nächsten Nachbarpunkte verwenden, gibt es nur fünf Koeffizienten in jeder Spalte oder Reihe, die ungleich null sind. Die Hauptdiagonale ist voll, und die anderen Koeffizienten ungleich null liegen in einer bestimmten Entfernung von der Hauptdiagonalen, aber nicht unbedingt auf bestimmten Diagonalen.

Direkte Lösungsverfahren

Die Gauß-Elimination

Die Grundmethode zur Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme ist die Gauß-Elimination. Ihre Grundlage ist die systematische Reduzierung von großen Gleichungssystemen in kleinere. Auf diese Weise werden die Matrixelemente modifiziert, doch da sich

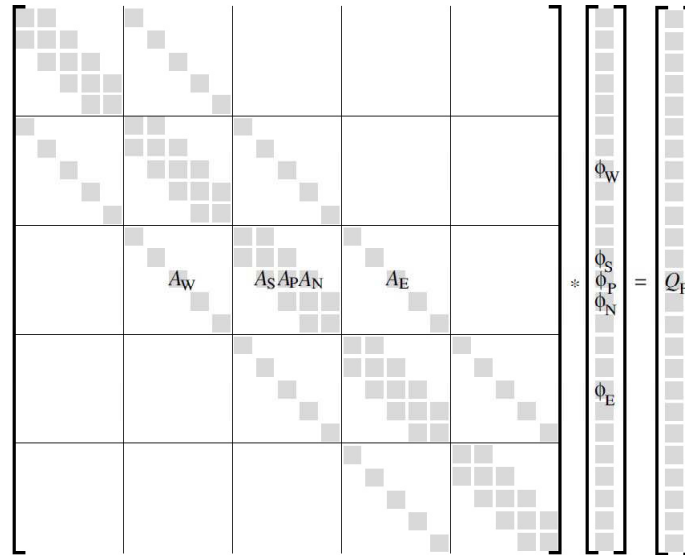


Abbildung 6.7: Graphische Darstellung der Matrix für einen Fünf-Punkte-Rechenstern (die von null verschiedenen Elemente der Koeffizientenmatrix an den fünf Diagonalen sind schattiert dargestellt; jeder horizontale Kästchensatz entspricht einem Gitterpunkt)

die abhängigen Variablenamen nicht ändern, lässt sich diese Methode einfach durch die Matrix allein beschreiben:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6.45)$$

Das Herzstück des Algorithmus ist die Technik zur Eliminierung von A_{21} , d. h. dieses Element durch null zu ersetzen. Dies erreicht man, indem man die erste Gleichung (erste Matrixreihe) mit A_{21}/A_{11} multipliziert und sie dann von der zweiten Gleichung (zweite Matrixreihe) subtrahiert. In diesem Prozess werden alle Elemente in der zweiten Reihe der Matrix sowie das zweite Element des Vektors auf der rechten Seite der Gleichung angepasst. Die anderen Elemente der ersten Spalte der Matrix, $A_{31}, A_{41}, \dots, A_{n1}$, werden ähnlich behandelt; um beispielsweise A_{i1} zu eliminieren, wird die erste Reihe der Matrix mit A_{i1}/A_{11} multipliziert und von der i -ten Reihe subtrahiert. Durch systematisches Vorgehen entlang der ersten Spalte der Matrix werden alle Elemente unter A_{11} eliminiert. Wenn dieser Vorgang abgeschlossen ist, enthält keine der Gleichungen $2, 3, \dots, n$ mehr die Variable ϕ_1 ; sie sind ein System von $n - 1$ Gleichungen für die Variablen $\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$. Die gleiche Vorgehensweise wird dann auf das kleinere Gleichungssystem angewendet – alle Elemente unter A_{22} in der zweiten Spalte sind dann eliminiert.

Diese Prozedur wird für alle Spalten $1, 2, 3, \dots, n - 1$ durchgeführt. Nachdem dieser Prozess

abgeschlossen ist, erhält man statt der Originalmatrix eine obere Dreiecksmatrix:

$$U = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6.46)$$

Dieser Teil des eben beschriebenen Algorithmus wird *Vorwärtselimination* genannt. Die Elemente auf der rechten Seite der Gleichung, Q_i , werden in diesem Prozess ebenfalls modifiziert.

Das Gleichungssystem mit einer oberen Dreiecksmatrix, die sich aus einer Vorwärtselimination ergibt, ist leicht zu lösen. Die letzte Gleichung enthält nur eine Variable, ϕ_n , und kann direkt nach ihr gelöst werden. Die vorletzte Gleichung enthält nur ϕ_{n-1} und ϕ_n , und wenn erst einmal ϕ_n bekannt ist, kann sie für ϕ_{n-1} gelöst werden. Fährt man auf diese Weise fort, wird jede Gleichung der Reihe nach gelöst. Dieser Teil der Gauß-Elimination, der mit der oberen Dreiecksmatrix beginnt und die Unbekannten berechnet, wird *Rücksubstitution* genannt.

Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass für große n die Anzahl der benötigten Operationen, um ein lineares System von n Gleichungen mit der Gauß-Elimination zu lösen, proportional zu n^3 ist. Der Hauptteil dieses Aufwands liegt in der Phase der Vorwärtselimination. Die Rücksubstitution verlangt nur n^2 Rechenoperationen und ist damit viel billiger als die Vorwärtselimination. Die Gauß-Elimination ist somit teuer, aber für volle Matrizen ist sie eine der besten zur Verfügung stehenden Methoden.

LU-Zerlegung

Wegen den hohen Kosten wurden einige Variationen der Gauß-Elimination vorgeschlagen. Eine für die CFD wertvolle Variante ist die LU-Zerlegung. Sie wird hier ohne Ableitung präsentiert. Es wurde gezeigt, dass bei der Gauß-Methode die Vorwärtselimination eine volle Matrix auf eine obere Dreiecksmatrix reduziert. Dieser Prozess kann auf formale Art durch Multiplikation der Originalmatrix A mit einer unteren Dreiecksmatrix durchgeführt werden. Dies allein ist nicht sehr interessant, doch da das Invertieren einer unteren Dreiecksmatrix ebenfalls eine untere Dreiecksmatrix ergibt, zeigt dies, dass jede Matrix A – unter gewissen Einschränkungen, die hier ignoriert werden können – in das Produkt einer unteren (L) und einer oberen (U) Dreiecksmatrix faktorisiert werden kann:

$$A = LU \quad (6.47)$$

Um diese Faktorisierung eindeutig zu machen, wird verlangt, dass die Diagonalelemente von L , L_{ii} alle gleich eins sind; alternativ könnte man verlangen, dass die Diagonalelemente von U gleich eins sind.

Ihre einfache Konstruktion macht diese Faktorisierung nützlich. Die obere Dreiecksmatrix U ist genau die, die in der Vorwärtsphase der Gauß-Elimination entsteht. Außerdem sind die Elemente von L die Multiplikationsfaktoren (z. B. A_{ji}/A_{ii}), die im Eliminationsprozess verwendet werden. Dies erlaubt, die Faktorisierung durch eine geringe Modifizierung der Gauß-Elimination zu konstruieren. Die Existenz dieser Faktorisierung erlaubt die Lösung des Gleichungssystems (6.44) in zwei Stufen. Mit der Definition:

$$U\phi = \mathbf{Y} \quad (6.48)$$

wird das Gleichungssystem (6.44) zu:

$$LY = Q \quad (6.49)$$

Das letztere Gleichungssystem kann durch eine Variante der Methode gelöst werden, die in der Rückwärtssubstitutionsphase der Gauß-Elimination verwendet wird, indem man am oberen statt am unteren Ende des Systems anfängt. Nachdem Gl. (6.49) für Y gelöst wurde, kann Gl. (6.48) – die identisch mit dem Dreieckssystem ist, das in der Rücksubstitutionsphase der Gauß-Elimination gelöst wird – nach ϕ gelöst werden.

Der Vorteil der LU-Faktorisierung gegenüber der Gauß-Elimination liegt darin, dass die Faktorisierung durchgeführt werden kann, ohne den Vektor Q zu kennen. Wenn viele Systeme mit derselben Matrix gelöst werden müssen, können beachtliche Einsparungen erreicht werden, indem die Faktorisierung als Erstes durchgeführt wird; anschließend können die Systeme nach Bedarf gelöst werden. Wie weiter unten gezeigt wird, stellen Varianten der LU-Faktorisierung die Grundlage für einige der besseren iterativen Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme dar; dies ist der wichtigste Grund, weshalb diese Methode hier eingeführt wurde.

Thomas-Algorithmus

Bei der Diskretisierung von gewöhnlichen Differentialgleichungen (eindimensionale Probleme) entsteht eine tridiagonale Matrix, und das Gleichungssystem ist ganz einfach zu lösen. Die Gleichungen in den Knoten enthalten nur die Variablen in den Knoten selbst (P) und in den direkten Nachbarknoten (W und E ; vgl. Abb. 6.7, wo W und E auf die Stellen von S und N kommen):

$$A_W^i \phi_{i-1} + A_P^i \phi_i + A_E^i \phi_{i+1} = Q_i \quad (6.50)$$

Die Gauß-Elimination ist in so einem Fall besonders einfach: Es muss nur ein Element von jeder Reihe während des Vorwärtseliminationsprozesses eliminiert werden. Wenn der Algorithmus die i -te Reihe erreicht hat, muss nur noch A_P^i modifiziert werden; der neue Wert wird von den alten Wert gerechnet:

$$A_{P(neu)}^i = A_{P(alt)}^i - \frac{A_W^i A_E^{i-1}}{A_P^{i-1}}. \quad (6.51)$$

Der Quellterm Q_i muss ebenfalls modifiziert werden.

$$Q_{i,neu} = Q_{i,alt} - \frac{A_W^i Q_{i-1}}{A_P^{i-1}} \quad (6.52)$$

Die Rückwärtssubstitution für die i -te Variable wird berechnet aus:

$$\phi_i = \frac{Q_{i,neu} - A_E^i \phi_{i+1}}{A_P^i}. \quad (6.53)$$

Diese Methode zur Lösung der tridiagonalen Matrixsysteme wird manchmal *Thomas-Algorithmus* oder "Tridiagonaler Matrix-Algorithmus" (TDMA) genannt. Er ist einfach zu programmieren und die Anzahl der Rechenoperationen ist proportional zu n , der Anzahl der Unbekannten, im Gegensatz zu n^3 bei der Gauß-Elimination für eine Vollmatrix. Somit sind die Rechenkosten pro Unbekannte unabhängig von der Anzahl der Unbekannten. Viele Lösungsalgorithmen nutzen die niedrigen Rechenkosten dieser Methode, indem sie das gegebene Problem auf ein neues, das tridiagonale Matrizen beinhaltet, reduzieren.

Iterative Lösungsverfahren

Jedes lineare Gleichungssystem kann mit der Gauß-Elimination oder der LU-Zerlegung gelöst werden. Leider sind jedoch die aus der Zerlegung von dünn besetzten Matrizen entstehenden Dreiecksmatrizen nicht dünn besetzt, so dass die Rechenkosten bei diesen Methoden ziemlich hoch sind. Außerdem sind die Diskretisierungsfehler normalerweise viel größer als die Genauigkeit der Rechenarithmetik, so dass es keinen Grund gibt, das Gleichungssystem sehr genau zu lösen. Eine Lösung mit etwas höherer Genauigkeit als die der Diskretisierung reicht aus.

Dies eröffnet eine Möglichkeit für die Anwendung iterativer Methoden. Sie werden notwendigerweise für nichtlineare Probleme verwendet (da es anders nicht geht), aber sie sind ebenso wertvoll für dünn besetzte lineare Systeme. Bei einer iterativen Methode startet man mit einer abgeschätzten Lösung (*Initialisierung*) und nutzt die Gleichung, um die Lösung systematisch zu verbessern. Ist jede Iteration billig und deren Anzahl gering, kann man eine ausreichend genaue Lösung mit einem geringeren Aufwand erhalten, als bei der Verwendung einer direkten Lösungsmethode. Bei CFD-Problemen ist dies normalerweise der Fall.

Es wird das durch Gl. (6.44) gegebene Matrixproblem betrachtet, das sich aus einer FD- oder FV-Approximation eines Strömungsproblems ergibt. Nach n Iterationen hat man eine Näherungslösung ϕ^n , die diese Gleichungen nicht exakt erfüllt. Stattdessen gibt es einen Rest (*Residuum*) ρ^n , der ungleich null ist:

$$A\phi^n = \mathbf{Q} - \rho^n. \quad (6.54)$$

Subtrahiert man diese Gleichung von Gl. (6.44), erhält man eine Beziehung zwischen dem Iterationsfehler, der wie folgt definiert ist:

$$\epsilon^n = \phi - \phi^n, \quad (6.55)$$

und dem Residuum:

$$A\epsilon^n = \rho^n. \quad (6.56)$$

Hier ist ϕ die exakte Lösung des Gleichungssystems.

Der Sinn des Iterationsprozesses ist, das Residuum bzw. den Iterationsfehler gegen null zu treiben ($\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^n = 0$). Eine schnelle Konvergenz ist für eine iterative Methode der Schlüssel zu ihrer Effektivität. Diese hängt von den Eigenwerten bzw. Eigenvektoren der s. g. Iterationsmatrix ab, die unter anderem die geometrischen Eigenschaften des Gitters auch beinhaltet. Die Iterationen werden normalerweise fortgesetzt, bis der Iterationsfehler unter eine Toleranz fällt.

Bei der Verwendung iterativer Löser ist es wichtig zu wissen, wann man mit Iterieren aufhören soll. Es wäre wichtig, den Iterationsfehler abschätzen zu können, um zu entscheiden, wann das Iterieren angehalten werden soll. Die Berechnung der Eigenwerte der Iterationsmatrix ist aber schwierig (häufig ist sie nicht explizit bekannt), weshalb Approximationen verwendet werden müssen.

Das am häufigsten verwendete Kriterium basiert auf der Differenz zwischen Lösungen in zwei aufeinander folgenden Iterationen (*Korrektur* oder *Update*):

$$\delta^n = \phi^{n+1} - \phi^n \quad (6.57)$$

Die Korrektur ist eine Approximation des Iterationsfehlers. Das Iterieren wird angehalten,

wenn die normalisierte Differenz kleiner als ein vorgewählter Wert ist. Leider kann diese Differenz klein sein, wenn der Fehler nicht klein ist und die richtige Normalisierung ist von entscheidender Bedeutung.

Wenn die Größenordnung der Ausgangsfehler bekannt ist, ist es möglich, die Norm der Differenzen zwischen Lösungen zu zwei aufeinander folgenden Iterationen zu beobachten und sie mit derselben Größe zu Beginn des Iterationsprozesses zu vergleichen. Die Erfahrung zeigt, wenn die Norm der Differenzen um drei bis fünf Größenordnungen gefallen ist, haben sich die Fehler normalerweise um einen vergleichbaren Betrag verringert.

Die einfachste Iterationsmethode ist die Jacobi-Methode, die für diagonale Matrizen eingesetzt werden kann, aber sie ist nicht günstiger als eine direkte Lösungsmethode. In der Gauß-Seidel-Methode ist die Iterationsmatrix eine untere Dreiecksmatrix. Diese Methode ist ein Spezialfall der sukzessiven Überrelaxationsmethode (bekannt unter der englischen Abkürzung SOR) und ist doppelt so schnell wie die Jacobi-Methode. Bei der unvollständigen LU-Zerlegung wird eine unvollständige LU-Faktorisierung von A (Gl. (6.44)) als Iterationsmatrix verwendet, und es ergibt sich eine schnelle Konvergenz.

Eine übliche Methode zur Lösung elliptischer Probleme (stationäre, subsonische Strömungen; Gleichgewichtszustände) ist das Hinzufügen zur Gleichung eines Terms, der die erste Zeitableitung beinhaltet, und die anschließende Lösung des sich ergebenden parabolischen Problems (instationäre Strömungen), bis der stationäre Zustand erreicht ist. Zu diesem Zeitpunkt ist die Zeitableitung gleich null und die Lösung erfüllt die elliptische Ausgangsgleichung.

6.6 Modellierung komplexer Phänomene

Damit es klar wird, wie viele Möglichkeiten es bei der Modellierung gibt, werden die verschiedenen Stufen nochmal aufgelistet. Zuerst wird ein physikalisches Modell erstellt, welches sich in einem mathematischen Modell kompakt darstellen lässt. Bei Feldverfahren versteht man unter dem numerischen Modell das gewählte Gebiet inklusive Randbedingungen und die gewählten Lösungsverfahren (räumliche und zeitliche Diskretisierung, Lösungsmethode). Wenn die Lösung der Modellgleichungen aber zu aufwendig wäre, können zur Lösbarkeit des Problems weitere Prozesse vereinfacht behandelt werden: diese Prozesse werden auch modelliert. Als Beispiel aus der Strömungsmechanik sollen zuerst die Turbulenzmodelle dienen. Wenn eine Strömung turbulent wird, wird die Modellierung über die Navier-Stokes-Gleichungen abhängig von der Reynolds-Zahl sehr aufwendig. Um diesen Aufwand zu reduzieren, kann die Wirkung der turbulenten Bewegungen auf die Hauptströmung modelliert werden.

Als weiteres Beispiel kann die Simulation von Verbrennung erwähnt werden. Die Zeitskalen von chemischen Prozessen bei der Verbrennung sind mehrere Größenordnungen kleiner als die Zeitskalen der Strömung. Dementsprechend ist das System sehr steif. Damit die Simulationszeit reduziert werden kann, können die Verbrennungsprozesse modelliert werden.

Wenn die zeitlichen oder räumlichen Skalen sehr unterschiedlich sind, wird die Simulation immer rechenintensiv. Die weiteren Beispiele werden in der Vorlesung diskutiert.

6.7 Literaturempfehlungen

Zum Kapitel 6 allgemein findet man eine kompakte Übersicht und weitere Referenzen in [BZBP09].

Die Herleitung der Modellgleichungen ist in [Sch06] bzw. [Sch99] gleichzeitig für die Strukturmechanik und für die Strömungsmechanik ausführlich gegeben. Nur für die Strömungsmechanik findet man Beschreibung in [FP08] und [SGKO06].

Gittertypen sind ausführlich beschrieben in: [FP08], [Sch06], [Sch99].

FDM und FVM sind ausführlich beschrieben in [FP08].

Das algebraische Gleichungssystem und die Lösungsverfahren sind anschaulich dargestellt in [Wes10].

6.8 Weiterführende Bemerkungen

In der Veranstaltung “Numerische Methoden in der Strömungstechnik” werden die Methoden für CFD ausführlicher dargestellt. In dem Praktikum “Einführung in die numerische Strömungstechnik” werden die wichtigsten Bausteine der Strömungssimulation kennengelernt und Simulationen werden selbständig durchgeführt.

6.9 Verständnisfragen

- Wann ist eine Zylinderumströmung ein Randwertproblem und wann ist sie ein Rand- und Anfangswertproblem?
- Warum sind lokale Netzverfeinerungen nötig?
- Was können Sie unternehmen, wenn eine Simulation instabil ist und kein vernünftiges Ergebnis liefert?
- Was kann man machen, wenn die Simulationsergebnisse eines stationären Problems instationär wirken?

7 Verifikation und Validierung

7.1 Einleitung

Modelle, mit deren Hilfe Aussagen über technische Systeme getroffen werden sollen, müssen daraufhin überprüft werden, ob eine sinnvolle Aussage mit ihnen überhaupt getroffen werden kann. Diese Überprüfung sollte in zwei Schritten erfolgen: im ersten Schritt ist zu untersuchen, ob das konzeptionelle Modell (also das Modell, welches man im Kopf hat, auf einem oder mehreren Blättern Papier skizziert hat, als Flusschart dargestellt oder einer sonstigen gut verständlichen Form dokumentiert hat) richtig in den Rechner übertragen wurde. Diese nennt man *Verifikation*. Das Wort Verifikation wurde gebildet aus den lateinischen Begriffen Veritas für Wahrheit und facere "machen". Im nächsten Schritt ist das Modell zu *validieren*, d.h. es ist daraufhin zu überprüfen ob mithilfe des Modells nützliche, gültige Aussagen über das abzubildende System getroffen werden können. Dieser Begriff ist abgeleitet vom englischen "validity" welcher für Gültigkeit steht.

7.2 Verifikation

Modelle, die im Maschinenbau verwendet werden, sind meist viel zu komplex, um von Hand ausgewertet werden zu können, um letztendlich numerische Werte zu ermitteln. Numerische Werte sind in den Ingenieurwissenschaften jedoch meistens erforderlich, um die konkrete Dimensionierung eines Bauteils, die Stärke eines Beschleunigungsvorgangs oder andere Parameter zu bestimmen. Deshalb werden die Modelle, von denen in dieser Vorlesungsreihe die Rede ist, im allgemeinen in einen Rechner übertragen, so wie sie das bereits auch schon mehrfach gemacht haben. Bei der Übertragung in den Rechner können allerdings Fehler auftreten, die erkannt werden müssen, um zu verhindern das sich dieser strukturelle Fehler in vielen falschen Berechnungen in der Zukunft niederschlägt.

7.2.1 Fehlermöglichkeiten

Da es bei der Verifikation darum geht, Fehler zu vermeiden richten sich die Verifikationsmethoden daran aus, welche Fehler überhaupt auftreten können. Typische Fehler die auftreten können sind die folgenden:

Bei der Übertragung eines mathematischen Ausdrucks in die verwendete Programmiersprache wird ein Fehler begangen, zum Beispiel wird vergessen eine Variable zu initialisieren (ist in mathematischen Formeln im Allgemeinen nicht notwendig, auf dem Rechner aber wohl), Summationsgrenzen werden falsch gesetzt oder ein Bezug zu einem anderen Wert wird fehlerhaft hergestellt. Darüber hinaus gibt es zahlreiche weitere Fehler, ein besonderer Fehler besteht noch darin, dass ungeeignete Datentypen verwendet werden, die zum Beispiel zu klein sind, um mit der notwendigen Genauigkeit einen Parameter aufzunehmen oder wenn bei der Übertragung eines Wertes falsch abgeschnitten wird. Hierfür ist ein besonderes Beispiel der Absturz der Ariane V.

Wenn eine Berechnung durchgeführt wird, insbesondere bei zeitschrittgesteuerten Simulationen, besteht die Versuchung, die Schrittweite zu groß wählen, damit das numerische Ergebnis möglichst schnell vorliegt. Es kann dabei jedoch passieren, dass kritische Ereignisse in der Simulation gar nicht auftreten, weil das zugehörige Ereignis zwischen zwei Simulationsschritten lag. Diese kritischen Ereignisse könnten zum Beispiel die Kollision zweier beweglicher Objekte oder das auftreten eines Belastungsspitzenwertes sein.

Damit zusammen hängt auch die Versuchung, die Laufzeit für eine numerische Integration oder die Durchführung einer Simulation zu kurz zu wählen, so dass der errechnete Wert nicht dem tatsächlich auftretenden Wert im eingeschwungenen Zustand entspricht.

Moderne Software kann vor dem folgenden Fehler unter Umständen bewahren, trotzdem ist es wichtig zu wissen, welcher numerische Solver für welchen Modelltypen geeignet ist. Sonst kann es auch hier passieren, dass ein falscher Wert ermittelt wird.

7.2.2 Methoden zur Verifikation

Welche Methoden können von Ihnen eingesetzt werden, um nachzuweisen, dass die Implementierung eines Modells im Rechner gelungen ist? Zu aller erst muss vorausgeschickt werden, dass der Nachweis einer komplett korrekten Implementierung nicht möglich ist. In der Informatik wird wissenschaftlich verfolgt, formal zu beweisen, dass eine Implementierung korrekt ist. Dies wiederum setzt nach dem gegenwärtigen Kenntnisstand voraus, dass es eine formale Spezifikation des Berechnungsalgorithmus gibt. Aus Sicht der Anwendungen des Maschinenbaus, verlagert diese Vorgehensweise das Problem von der korrekten Implementierung im Rechner zur Ableitung einer korrekten formalen Spezifikation aus dem konzeptionellen Modell. Deshalb ist dieser Weg gegenwärtig noch nicht umsetzbar.

Das bestmögliche Ergebnis was wir erreichen können ist, es unwahrscheinlich zu machen dass die Implementierung nicht korrekt ist. Was kann nun getan werden, um zu plausibilisieren, dass die Implementierung gelungen ist?

Bei ereignisdiskreten Systemen, bei denen ein Ereignis zu Folgeereignissen führen kann (im Extremfall auch zu keinem) kann im Debugmodus des Simulationssystems verfolgt werden, ob die Reaktion des Systems den Erwartungen und den Intentionen entspricht. Allerdings wird es nur für sehr kleine Systeme gelingen, dies vollständig zu tun, da die Menge der möglichen Ereignisse in Abhängigkeit von der Zahl der möglichen Systemzustände sehr stark zunimmt. Bei kontinuierlichen Systemen kommt diese Rolle der Animation des Systems zu, bei der visuell verfolgt werden kann ob die Abläufe in dem System plausibel sind.

Eine weitere Möglichkeit der Verifikation ist der Vergleich der Ergebnisse des implementierten Modells mit bereits bekannten anderen Daten. Diese Daten können verschiedene Quellen haben, so ist ein erster Schritt, triviale Werte einzusetzen, also Parameterwerte zu Null, zu eins oder sehr große Werte zu setzen bei denen man genau weiß, was passieren sollte. Ist dieser Test erfolgreich bestanden, kann versucht werden mit einfachen Werten weiter zu rechnen, so zum Beispiel wenn man Faktoren wie 2, 10 einsetzt, für die klar ist, wie die Ergebnisse auszusehen haben. Ist dies geschehen, oder ist das Modell hierfür schon zu komplex besteht eine Möglichkeit darin, einen mit einem anderen Werkzeug nachzurechnen. Dies kann vielleicht nicht für alle Fälle des neu erstellten Modells eine Antwort geben, aber wir wissen, dass sie zumindest für bestimmte Fälle für zuverlässige Ergebnisse sorgt. Diese Vorgehensweise liegt auch dem Ansatz zu Grunde, bei dem verschiedene Programmierer mit verschiedenen Programmiersprachen auf verschiedener Hardware dasselbe Problem lösen, um Steuerungsentscheidungen zu treffen. Anschließend wird dann durch Abgleich der Ergebnisse überprüft, ob möglicherweise Probleme vorliegen.

Zu guter Letzt sollte versucht werden, mit bekannten Daten aus der Literatur Vergleiche anzustellen, da hier die Hoffnung besteht, dass diese schon mehrfach überprüft wurden.

7.3 Validierung

Noch weniger als bei der Verifikation ist es bei der Validierung möglich nachzuweisen, dass ein Modell korrekt ist. Der Statistiker George Box prägte einmal den Leitsatz: All models are wrong, but some are usefull. Damit meint er letztendlich, dass alle Modelle eine starke Vereinfachung der Realität darstellen, dass letztlich aber wichtig ist, ob mit ihrer Hilfe Aussagen getroffen werden können, die helfen das Problem zu lösen. Dieses Problem kann die Dimensionierung eines Bauteils sein, die Auslegung einer Steuerung und Bestimmung des Energieverbrauchs eines Systems und viele andere Aufgaben aus dem Maschinenbau. Der Wissenschaftsphilosoph Karl Popper lehrt, dass es nicht möglich ist, zu beweisen dass ein Modell gültig ist. Es kann aber so lang genutzt werden, solange es alle interessierenden Phänomene erklärt und durch kein besseres Modell ersetzt wurde. Jedes Modell muss außerdem so gestaltet werden, dass es möglich ist zu beweisen, dass das Modell eventuell ungültig ist. Die vernünftigste Vorgehensweise für den Ingenieur ist deshalb, selber die Kriterien aufzustellen, an denen erkennbar wäre, dass ein Modell nicht mehr genutzt werden kann.

7.3.1 Fehlermöglichkeiten

Wie auch bei der Verifikation wollen wir bei der Validierung erstmal betrachten, welche Fehlermöglichkeiten in der Modellerstellung bestehen. Eine erste Möglichkeit besteht darin, dass wir beim Erstellen des Modells zu viele Vereinfachungen vorgenommen haben. Deshalb sind wesentliche Einflüsse, die für den Verwendungszweck des Modells wichtig sind, möglicherweise nicht berücksichtigt worden. So könnte es zum Beispiel sein, dass wir für unsere Modell die Newtonsche Mechanik als ausreichend erkannt haben, aber relativistische Effekte trotzdem eine Rolle spielen (so zum Beispiel bei der Ortsbestimmung mithilfe der Satellitennavigation).

Ein weiterer Fehler besteht möglicherweise darin, dass zwar alle wichtigen Einflüsse berücksichtigt wurden, aber nicht genau genug abgebildet sind. So kann zum Beispiel in einem Wertebereich des Modells eine lineare Approximationen zulässig sein und die Ergebnisse nicht zu stark zu verfälschen, in anderen Bereichen aber jedoch zu völlig falschen Ergebnissen führen. Eine weitere Fehlerquelle liegt in der Kalibrierung der Modelle. So kann das Modell selbst möglicherweise gut genug sein, um die benötigten Aussagen zu treffen, aber die Bestimmung von Systemparametern war möglicherweise fehlerhaft. Dies kann insbesondere dann passieren wenn die Abtastrate des Modells bei der Kalibrierung ungeeignet war.

7.3.2 Methoden zur Validierung

Die Validierung eines Modells richtet sich danach aus, für welchen Zweck das Modell erstellt wurde. Deshalb beginnt die Validierung damit, zu klären, welche Daten ein Modell liefern soll, und welche weiteren Schritte mit den Ergebnissen des Modells vorgesehen sind. Hierbei ist auch zu klären, wie genau die Ergebnisse sein müssen, damit der Modellzweck erfüllt ist. Da ein technisches System möglicherweise in sehr viel verschiedenen Betriebszuständen

beobachtet werden kann, ist auch notwendig zu klären, welche Betriebszustände abgebildet werden müssen. Genügt es, den eingeschwungenen Durchschnittsfall abzubilden, sind Hochlauf- oder Herunterfahrphasen abzubilden, muss das System im instationären Zustand betrachtet werden können und ist es auch notwendig, das System im Fehlerfall abzubilden? Dies sind typische Fragen, die im Vorfeld der Validierung zu klären sind.

Wenn die Validierungsziele geklärt sind, können verschiedene Methoden, am besten kombiniert angewendet werden:

Wie bereits schon beim Schritt der Verifikation ist es sinnvoll, charakteristische Werte zu nutzen, bei denen klar ist, was das Ergebnis des Modells sein sollte. Diese Werte sind oft trivial, dennoch ermöglichen sie einen schnellen Einblick, ob grundsätzliche Zusammenhänge richtig abgebildet wurden. Die wenigsten Modelle sind gänzlich neu. Deshalb sollte zumindest für einen Teil des Wertebereichs oder der Problemstellung ein anderes Modell zur Verfügung stehen, mit dem sich die Übereinstimmung überprüfen lässt. Damit ist noch nicht gesagt, ob das neue Modell auch in den darüber hinausgehenden Bereichen wertvolle Aussagen liefert, aber zumindest der Anschluss oder Übergang von bekannten und unbekannten Modellergebnissen kann überprüft werden.

Ein zu validierendes Modell kann auch überprüft werden, mit Messdaten eines realen Systems oder eines Laborversuches, welches zum Beispiel für bestimmte Stützstellen des Modells übereinstimmende Werte liefern sollte. Hierbei ist es wichtig, eine Betrachtung der Messfehler einerseits und der Modellgenauigkeit andererseits durchzuführen, um den Wertevergleich seriös durchführen zu können.

Eine weitere Möglichkeit für die Validierung besteht in Sensitivitätsanalysen, bei denen überprüft wird, ob die Veränderung eines Eingangsparameters zu sinnvollen Veränderungen des Ausgangsparameters führt.

7.4 Verständnisfragen

1. Erklären Sie mit eigenen Worten die Notwendigkeit von Verifikation und Validierung und den Unterschied zwischen Verifikation und Validierung.
2. Es gibt den ca. 80 Jahre alten Witz: "Hummeln können nach den Gesetzen der Aeronautik nicht Fliegen. Sie wissen aber nichts davon und fliegen trotzdem". Handelt es sich hier um ein Verifikations- oder ein Validierungsproblem?

8 Versuchsplanung

8.1 Vorgehensweise

Rechnergestützte Modelle bieten die Möglichkeit, innerhalb von kurzer Zeit sehr viele verschiedene Konfigurationen eines Modells, viele verschiedene Parameter, die Einfluss auf die Leistung des Modells haben, zu untersuchen. Dennoch stellt sich immer wieder heraus, dass der Appetit beim Essen kommt. Rechnergestützte Untersuchungen benötigen häufig länger als ursprünglich geplant, was nicht daran liegt, dass die Modelle selber ungeeignet waren, sondern dass angesichts der Möglichkeiten eines Modells die Zahl der zu untersuchenden Variationen sehr stark ansteigt und innerhalb des gegebenen Budgets und der gegebenen Zeit nicht mehr bewältigt werden kann. Deshalb ist es wichtig, dass von Anfang an geplant wird, welche Versuche mit einem Modell überhaupt durchgeführt werden sollen.

Grundsätzlich kann das Modell für die Versuchsplanung als Blackbox dargestellt werden, d.h. als ein System, dessen Inneres kommissionieren wir nicht kennen. Dieses Modell kann durch Eingangsgrößen beeinflusst werden, die wir gezielt verändern können. Es wird außerdem beeinflusst von unkontrollierbaren Einflussgrößen oder von Einflussgrößen, die wir selber gar nicht kennen. Rekombination dieser Einflussgrößen mit dem Modell ergeben dann Ergebnisse, die uns interessieren. Gegenstand der Versuchsplanung ist es festzustellen, wie das Modell auf die veränderbaren Einflussgrößen reagiert.

Dabei sollte in folgenden Schritten vorgegangen werden:

1. Beschreibung der Ausgangssituation,
2. Beschreibung des Untersuchungszieles,
3. Festlegung der zu erreichenden Zielgrößen und der Einflussfaktoren,
4. Aufstellung einer Versuchsplanung,
5. Experimente durchführen,
6. Versuchsergebnisse auswerten,
7. Ergebnisse interpretieren und Rückschlüsse auf Maßnahmen am ursprünglichen System ableiten.

Auf diese Schritte wird im nachfolgenden eingegangen.

8.1.1 Beschreibung der Ausgangssituation

Zu Beginn der Untersuchungen sollte festgelegt werden, welche Ziele mit den Experimenten verfolgt werden. Dazu muss zuerst der Adressat oder der Kunde der Untersuchungen identifiziert werden, um anschließend zu klären, welche Informationen sich der Adressat von den Untersuchungen erhofft. Gleichzeitig ist zu klären, wie viel Zeit und Geld für die Untersuchungen zur Verfügung stehen. Wichtig ist es auch festzuhalten, was bereits vor Beginn der Untersuchungen bekannt war. So kann man sich auf der einen Seite unnötige Versuche sparen, und andererseits kann man Erklärungsnot vermeiden für den Fall, dass nach erfolgreichem Abschluss der Untersuchungen jemand behauptet, das Ergebnis schon immer gekannt zu haben.

Zum Abschluss der Ist-Aufnahme ist auch geklärt, ob die Aufgabenstellung bereits definiert werden kann, oder ob erst über die Experimente herausgefunden werden muss, welche Aufgabenstellung vorliegt.

8.1.2 Beschreibung des Untersuchungszieles

Ist die Ausgangssituation verstanden, kann anschließend das Ziel der Untersuchungen definiert werden. Dies kann z.B. darin bestehen, ein gegebenes Ziel (z.B. Transport einer Last, Beschleunigung eines Fahrzeugs, eine bestimmte Oberflächenqualität) mit möglichst geringen Mitteln (Zeit, Energieverbrauch, Betriebsmittel, u.a.) zu erreichen oder mit gegebenen Mitteln ein Ergebnis zu verbessern (z.B.: mit gegebenem Energieeinsatz eine Last möglichst schnell zu bewegen).

Außerdem wird immer häufiger geordert, ein robustes Ergebnis zu erreichen, d.h. auch bei Abweichungen von den idealen Eingangsparametern kann noch ein gutes Ergebnis erzielt werden.

8.1.3 Festlegung der zu erreichenden Zielgrößen und der Einflussfaktoren

Im nächsten Schritt ist zu definieren, anhand welcher Zielgrößen festgestellt wird, ob die Untersuchung erfolgreich war. Bei der Auswahl der Zielgrößen ist zu berücksichtigen, dass die im vorigen Schritt festgelegten Untersuchungsziele widerspiegelt werden. Gleichzeitig sollte überprüft werden, ob die Zielgrößen die Untersuchungsziele vollständig abdecken und möglichst redundanzfrei sind, d.h. dass derselbe Sachverhalt sich nicht in mehreren Zielgrößen widerspiegelt. Bei allem Streben nach Vollständigkeit sollte darauf geachtet werden, dass die Menge der Zielgrößen übersichtlich gehalten wird. Häufig werden die Zielgrößen im Konflikt zueinanderstehen, weshalb das Untersuchungsziel darin bestehen kann, auf den jeweiligen Zielgrößen ein Mindest-Qualitätsniveau zu erreichen.

Sind die Zielgrößen geklärt, ist zu definieren, welche Faktoren mit ihrem Einfluss auf die Ziele näher untersucht werden sollen. Möglicherweise ist in Vorversuchen zu klären, welche Faktoren überhaupt einen nennenswerten Einfluss auf die Ziele haben. Für die identifizierten Faktoren sind die zu untersuchenden Faktorwertstufen zu klären, ob es qualitative (z.B. Zugstrebe einbauen oder nicht) oder quantitative Faktoren (z.B. Steifigkeit der Zugstrebe) handelt und für den Fall, dass es sich um qualitative Ziele handelt, welche Faktorstufen zu untersuchen sind. Reichen einige wenige Stufen oder ist eine hohe Auflösung der Faktorwerte erforderlich?

8.1.4 Aufstellung eines Versuchsplans

Sind die zu beeinflussenden Faktoren mit ihren Wertstufenkombinationen identifiziert, kann der Versuchsplan aufgestellt werden. Liegen keine anderen Informationen vor, eine vollfaktorielle Versuchsplanung, bei der alle Wertstufenkombinationen aller Faktoren miteinander kombiniert werden, um den Untersuchungsraum vollständig abzudecken. Allerdings ist schnell einzusehen, dass eine vollfaktorielle Versuchsplanung sehr schnell sehr aufwändig wird. Deshalb kann es sinnvoll sein, in Vorversuchen zu ermitteln, welche Wertstoffkombinationen immer nur gemeinsam auftreten können oder anders herum, welche Wertstoffkombinationen sich ausschließen.

Ist bekannt, dass Faktoren linear wirken, dann kann auf Zwischenstufen der Wertstufen verzichtet werden und eine lineare Approximation kann viele Versuche ersetzen. Ein weiterer Aspekt ist die Frage nach der Wiederholbarkeit der Versuche, liegen stochastische d.h.

zufällige Einflüsse auf das Ergebnis vor, so ist durch entsprechend häufige Wiederholung der Versuche der zufällige Anteil am Gesamtergebnis herauszumitteln. Diese Wiederholungen (Replikation) erhöhen den Versuchsaufwand noch einmal erheblich. Aus diesem Grund ist nach der ersten Aufstellung des Versuchsplans eine Abschätzung des Versuchsaufwandes sinnvoll, um dann gegebenenfalls die Versuchsplanung noch einmal anzupassen, wenn sich herausstellt, dass der gesamte Aufwand nicht in das Zeit- oder Geldbudget passt.

8.1.5 Experimente durchführen

Nun können die Versuche nach Versuchsplan durchgeführt werden. Ggfs. können die Versuche auch parallel durchgeführt werden, gerade bei rechnergestützten Simulationen ist dies im Allgemeinen ohne nachteilige Auswirkungen auf die Untersuchungsergebnisse möglich. Wenn möglich sollten bereits parallel zur Durchführung der Versuche die Auswertungen beginnen, um möglichst frühzeitig zu erkennen, ob getroffene Annahmen, z.B. über die Streuung von Versuchen, über die Unabhängigkeit von Faktoren oder die Linearität eines Zusammenhangs, zutreffend waren. Falls nicht, kann der Versuchsplan noch angepasst werden. Bei der Versuchsdurchführung ist es essentiell, die Eingangsparameter (z.B. die Wertstufen) und die zugehörigen Versuchsergebnisse nachvollziehbar zu dokumentieren.

8.1.6 Versuchsergebnisse auswerten

Liegen die Versuchsergebnisse vor, kann die Auswertungen der Versuche stattfinden. Liegen stochastische Einflüsse auf das Ergebnis vor, kann durch Anwendung statistischer Methoden ermittelt werden, ob die Zahl der Versuche bei gleichen Parametereinstellungen ausreichend hoch war. Dies kann durch Bestimmung eines Konfidenzintervalls erfolgen, aus dem man ermitteln kann, mit welcher Wahrscheinlichkeit der tatsächliche Wert eines Modells in einem bestimmten Bereich liegt. Möglicherweise ist es dabei auch notwendig, Ausreißer zu identifizieren und zu eliminieren, bei denen die Versuchsergebnisse so stark von den anderen Werten abweichen, dass eine unbekannte Störung eingetreten sein muss. Wenn identifiziert ist, welche Störung dies war, kann das entsprechende Experiment aus der Liste der Ergebnisse eliminiert werden und geht nicht in die Berechnung des Mittelwerts der Replikationen ein.

8.1.7 Interpretation der Ergebnisse

Mit dem erfolgreichen Abschluss der Untersuchungen besteht nun ein Überblick, über die Erreichung der Zielgrößen in Abhängigkeit von den qualitativen und quantitativen Einflußfaktoren. Damit kann die Auslegung eines Systems erfolgen.

8.2 Verständnisfragen

1. Warum ist Versuchsplanung notwendig?
2. Sie möchten einen neuen Ski systematisch mit Methoden des Maschinenbau entwickeln. Beschreiben sie hierfür mögliche Zielgrößen und Einflußfaktoren. Wie könnten Versuche durchgeführt werden und wie sähe für die von Ihnen ausgewählten Einflußfaktoren ein Versuchsplan aus?

Literaturverzeichnis

- [BZBP09] BUNGARTZ, H.-J. ; ZIMMER, S. ; BUCHHOLZ, M. ; PFLÜGER, D.: *Modellbildung und Simulation. Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Verlag, 2009 1.6, 6.7
- [DIN94] Deutsches Institut für Normung (DIN): *Norm 19226-1: Leittechnik: Regelungstechnik und Steuerungstechnik, Allgemeine Grundbegriffe*. Februar 1994 1.3
- [FP08] FERZIGER, J.H. ; PERIC, M.: *Numerische Strömungsmechanik*. Springer, 2008 <http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-68228-8/page/1>. – ISBN 978-3-540-68228-8 6.5.3, 6.7
- [GJ09] GRÜNE, L. ; JUNGE, O.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme*. Vieweg+Teubner Verlag, 2009 5.8
- [GKL06] GEIMER, M. ; KRÜGER, T. ; LINSEL, P.: Co-Simulation, gekoppelte Simulation oder Simulatorkopplung? Ein Versuch der Begriffsvereinheitlichung. In: *O+P Ölhdraulik und Pneumatik* 50 (2006), Nr. 11-12, S. 572 – 576. – ISSN 0341-2660 (document), 3.11
- [Gol70] GOLOMB, S. W.: Mathematical Models: Uses and Limitations. In: *Simulation* 14 (1970), S. 197–198 1.5
- [Ise08] ISERMANN, R.: *Mechatronische Systeme. Grundlagen*. Springer-Verlag, 2008 3.3, 3.8
- [KMR05] KARNOPP, D. C. ; MARGOLIS, D. L. ; ROSENBERG, R. C.: *System Dynamics: Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*. John Wiley & Sons, 2005 2.6
- [LSW09] LERCH, R. ; SESSLER, G. M. ; WOLF, D.: *Technische Akustik. Grundlagen und Anwendungen*. Springer-Verlag, 2009 3.8
- [MV11] MARX, B. ; VOGT, W.: *Dynamische Systeme. Theorie und Numerik*. Spektrum-Verlag, 2011 4.7
- [Pie12] PIETRUSZKA, W.-D.: *MATLAB® und Simulink® in der Ingenieurpraxis*. Vieweg+Teubner Verlag, 2012 1.6
- [Rop10] ROPOHL, G.: *Allgemeine Technologie. Eine Systemtheorie der Technik*. Universitätsverlag Karlsruhe, 2010 1.6
- [Sch99] SCHÄFER, M.: *Numerik Im Maschinenbau*. Springer-Verlag GmbH, 1999 (Springer-Lehrbuch). <http://books.google.de/books?id=HtMnQxjZxkAC>. – ISBN 9783642584169 6.7

- [Sch06] SCHÄFER, M.: *Computational Engineering - Introduction to Numerical Methods*. Springer, 2006 http://books.google.de/books?id=6J_qGwA8XusC. – ISBN 9783540306856 6.7
- [SGKO06] SCHLICHTING, H. ; GERSTEN, K. ; KRAUSE, E. ; OERTEL, H.J.: *Grenzschicht-Theorie*. Springer, 2006 <http://books.google.de/books?id=M0t-kTuzLxoC>. – ISBN 9783540230045 6.4.2, 6.7
- [Sha98] SHANNON, R. E.: Introduction to the art and science of simulation. In: MEDEIROS, D.J. (Hrsg.) ; WATSON, E.F. (Hrsg.) ; CARSON, J.S. (Hrsg.) ; MANIVANNAN, M.S. (Hrsg.): *Proc. Winter Simulation Conference*, 1998, S. 7–14 1.2, 3
- [VDI10] Verband Deutscher Ingenieure (VDI): *Richtlinie 3633: Simulation von Logistik-, Materialfluss- und Produktionssystemen - Grundlagen*. Dezember 2010 1.2
- [Wes10] WESTERMANN, T.: *Modellbildung und Simulation: mit einer Einführung in ANSYS ; [Extras im Web]*. Springer, 2010 http://books.google.de/books?id=jWvuI5qm_toC. – ISBN 9783642054617 6.7

Stichwortverzeichnis

- Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren, 51
- Adams-Bashforth-Verfahren, 51
- Anfangswertproblem, 34
- autonomes System, 35
- Differentialgleichungssystem erster Ordnung, 34
- Diskretisierungsfehler, 52
- Einschrittverfahren, 50
- Eulerverfahren, 50
- gewöhnliche Differentialgleichung
 - explizite Darstellung, 34
 - implizite Darstellung, 33
- Gleichgewichtspunkt, 37
 - Linearisierung, 40
- Granularität, 4
- Hüllfläche, 3
- Integrationsverfahren, 49
 - explizite, 49
 - implizite, 49
- Konsistenzordnung, 52
- lineares System, 34
- Mehrschrittverfahren, 50
- Modell, 5
 - algorithmisches, 5
 - konzeptionelles, 5
 - mit konzentrierten Parametern, 9
 - mit verteilten Parametern, 9
- Prädiktor-Korrektor-Verfahren, 52
- Richtungsfeld, 36
- Simulation, 2
- Simulationsstudie, 6
- System, 3
 - diskretes, 5
 - komplexe, 5
 - komplizierte, 5
 - kontinuierliches, 5
- Systemfunktion, 34
- Trapezregel, 50
- Validierung, 7
- Verfahren von Heun, 52
- Verifikation, 7
- Zustandsgröße, 3
- Zustandsvektor, 34