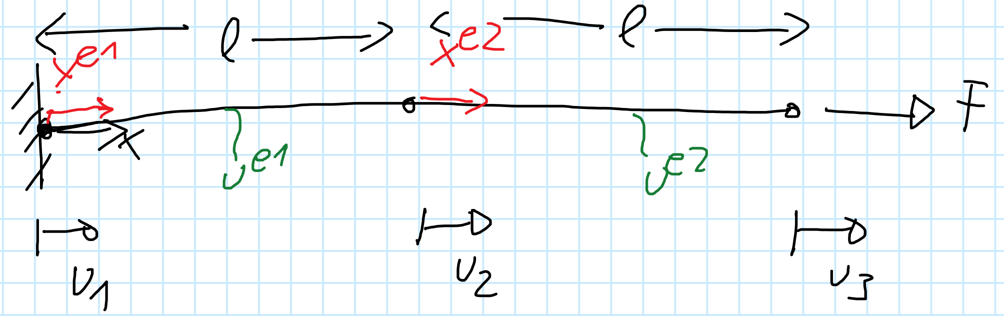
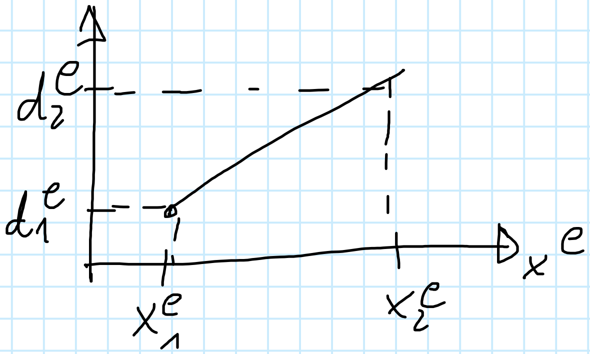
MuS - Übung (Klausurvorbereitung II - ITM)

2



Linearer Ansatz: $u^e(x^e) = a_0 + a_1 x^e$

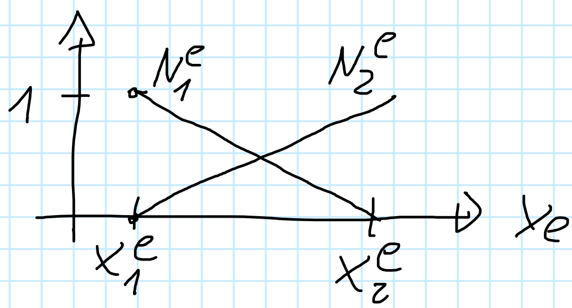


$$u^e(x_1^e) = d_1^e$$

$$u^e(x_2^e) = d_2^e$$

$$u^e(x^e) = \frac{x_2^e - x^e}{x_2^e - x_1^e} d_1^e + \frac{x^e - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} d_2^e$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\frac{x_2^e - x^e}{x_2^e - x_1^e}}_{N_1^e} & \underbrace{\frac{x^e - x_1^e}{x_2^e - x_1^e}}_{N_2^e} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{N}}^e} \underbrace{\begin{pmatrix} d_1^e \\ d_2^e \end{pmatrix}}_{\underline{d}^e}$$



MuS - Übung (Fortsetzung)

1 Element:
$$v^{e1} = \begin{pmatrix} \frac{l - x^{e1}}{l} & \frac{x^{e1}}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{l-x^{e1}}{l} & \frac{x^{e1}}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dv^{e1}}{dx^{e1}} = \underbrace{\frac{1}{l} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{B}}^{e1} = \underline{\underline{B}}^{e2}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{\Omega_e} EA \, \vec{B}^{eT} \vec{B}^e \, dx^e$$

$$\underline{\underline{K}}^{e1} = \int_0^l EA \frac{1}{l} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{l} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} dx^{e1}$$
$$= \frac{EA}{l^2} \int_0^l \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} dx^{e1} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \underline{\underline{K}}^{e2}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{K}} \, \underset{\sim}{v} = \underbrace{\frac{EA}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{K}}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{N} \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{f}_a \\ \\ \vec{f}_b \end{matrix} = \frac{EA}{l} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{v}_a \\ \\ \vec{v}_b \end{matrix}$$

$\underline{\underline{K}}_{11}$, $\underline{\underline{K}}_{12}$, $\underline{\underline{K}}_{21}$, $\underline{\underline{K}}_{22}$

MuS - Übung (Fortsetzung)

$$\vec{v}_b = \underline{K}_{22}^{-1} \left(\vec{f}_b - \underline{\underline{K}}_{21} \cancel{\vec{v}_a} \right)$$

$$= \frac{\ell}{EA} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} = \frac{F\ell}{EA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_a = \underline{K}_{12} \vec{v}_b = -\frac{EA}{\ell} \frac{F\ell}{EA} = -F$$

Hinweise zur Notation in dieser Übung:

- **tiefgestellter Index:** Nummerierung der Knoten (d: Knotenverschiebungen eines allgemeinen Elements, u: Knotenmverschiebungen der Zugstab-Knoten)
- **Tiefgestellte Variable an eine Funktion:** Ableitung der Funktion nach dieser Variablen (siehe insb. Aufgabe 1 in anderer Datei)
- **Hochgestelltes "e" bzw. "e1", "e2":** Diese Größe bezieht sich auf ein allgemeines Element oder auf das Element "e1" / "e2" usw.
- **Tiefgestelltes "a" oder "b" an Knotenverschiebungen/kräften:** bekannte bzw. unbekannte Größen (siehe Deckblatt Poolübung FEM)