量子力学与统计物理

Quantum mechanics and statistical physics

光电科学与工程学院　王智勇

第二章：波函数与Schrödinger方程

第四讲：Schrödinger方程

德布罗意物质波假说（ 1923年）被玻恩进行了统计解释，并发展出量子测量理论后，量子力学的发展分成二大支：

第一支：玻恩的学生**海森堡**进一步发展老师玻恩的统计观和量子测量理论，用矩阵描述微观体系的量子态，于1925年建立量子力学之矩阵力学

第二支：**薛定谔**横空出世，他不认同统计解释，直接从德布罗意物质波假说出发，于1926年提出波动方程，建立波动力学

会师： 1926年，薛定谔证明矩阵力学和波动力学的等价性；(非相对论)**量子力学正式建立！**

引入

瑞士苏黎世大学每两周会举办一场物理学术研讨会。有一次，老讲师薛定谔正在讲他的研究工作气体动力学问题，彼得·德拜看大家都不感兴趣，就说要不你向大家介绍一下德布罗意有关物质波的博士论文吧。

微观粒子具有波粒二象性，其状态用波函数完全描述……

既然粒子有波动性

那总得有个波动方程吧？

--德拜.1925年

两周后……

Dear Debye，I find one…

--薛定谔

但是，我不明白，为什么要用“i”去操作才行

薛定谔方程的建立：

对于质量为μ的自由粒子单色平面波

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=A\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar]$$

将上式对时间求偏微分：

$$\boxed{\begin{aligned}&\psi(\boldsymbol{r},t)=A\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar]\Rightarrow\\&\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}A\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar]=-\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}\psi\Rightarrow\\&\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=E\psi,\ E=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu},\ (1)\end{aligned}}$$

同理，将上式对空间坐标求偏微分：

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=A\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar]=A\exp[\mathrm{i}(p_x x+p_y y+p_z z-Et)/\hbar]\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\psi=\dfrac{\mathrm{i}p_x}{\hbar}\psi\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\psi=\dfrac{\mathrm{i}p_y}{\hbar}\psi\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\psi=\dfrac{\mathrm{i}p_z}{\hbar}\psi\end{cases}\Rightarrow\nabla\psi=\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{p}}{\hbar}\psi;\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\psi=-\dfrac{p_x^2}{\hbar^2}\psi\\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\psi=-\dfrac{p_y^2}{\hbar^2}\psi\\ \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\psi=-\dfrac{p_z^2}{\hbar^2}\psi\end{cases}\Rightarrow\nabla^2\psi=-\frac{\boldsymbol{p}^2}{\hbar^2}\psi\Rightarrow$$

$$-\hbar^2\nabla^2\psi=\boldsymbol{p}^2\psi,\ E=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}\Rightarrow-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2\mu}\psi=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}\psi=E\psi,\quad(2)$$

其中∇是梯度算符矢量：$\nabla=(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z})=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\dfrac{\partial}{\partial z}$,

∇^2是拉普拉斯算符：$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$;

同理，$\boldsymbol{p}^2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}=p_x^2+p_y^2+p_z^2$

比较以上(1)和(2)两式，可得：

$$\boxed{\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi \\ -\dfrac{\hbar^2\nabla^2}{2\mu}\psi = \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}\psi = E\psi \end{cases} \Rightarrow i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi = -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi,\ (3)}$$

根据态叠加原理，一般波函数可以由平面波叠加而成

$$\psi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int c(\boldsymbol{p})\exp[i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar]d^3\boldsymbol{p}$$

对它分别求关于时间和空间坐标的偏导数，一样可以得到：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int c(\boldsymbol{p})E\exp[i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar]d^3\boldsymbol{p}$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int c(\boldsymbol{p})(-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu})\exp[i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar]d^3\boldsymbol{p}$$

因此

$$(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2)\psi=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int c(\boldsymbol{p})(E-\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu})\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)/\hbar]\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi$$

即方程(3)对于一般的位置空间波函数也是成立的

$$\boxed{\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)}$$

由于$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi = E\psi$，称$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2$为能量算符

$\hat{H}$可以推广到系统的总哈密顿算符(不显含时间时，即是总能量算符）。

例如对于处于势场$U(\boldsymbol{r})$中的粒子，总能量$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} + U(\boldsymbol{r})$,

总哈密顿算符$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + U$,

此时(3)式推广为：$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$, (4)

方程(4)即是薛定谔方程，它是(非相对论)量子力学的基本方程，

可称为薛定谔方程或者薛定谔波动方程，

该量子力学方程的矩阵形式，即是后面将会讲到的海森堡矩阵力学方程.

通常情况下，单个粒子的薛定谔方程可以写成：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\boldsymbol{r},t) = [-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + U(\boldsymbol{r})]\psi(\boldsymbol{r},t) \qquad (4)$$

课外参考：薛定谔方程(4)详细“推导”：

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int c(\boldsymbol{p})\exp[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)]\mathrm{d}^3\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{r}=(x,y,z),\ \boldsymbol{p}=(p_x,p_y,p_z),\ \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}=\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z,$$

$$E=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}+U(\boldsymbol{r}),\ \hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\boldsymbol{r}),\ \nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}),\ \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\ \boldsymbol{p}^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2,$$

$$-\mathrm{i}\hbar\nabla\psi=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int c(\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}\exp[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)]\mathrm{d}^3\boldsymbol{p},\ -\hbar^2\nabla^2\psi=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int c(\boldsymbol{p})\boldsymbol{p}^2\exp[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)]\mathrm{d}^3\boldsymbol{p},$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int c(\boldsymbol{p})E\exp[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)]\mathrm{d}^3\boldsymbol{p},\ \hat{H}\psi=[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\boldsymbol{r})]\psi,$$

$$\hat{H}\psi=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int c(\boldsymbol{p})[\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}+U(\boldsymbol{r})]\exp[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)]\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int c(\boldsymbol{p})E\exp[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et)]\mathrm{d}^3\boldsymbol{p},$$

$\Rightarrow$ 薛定谔方程： $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi$, or, $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\boldsymbol{r})]\psi$, (4)

这是常见的非相对论量子力学方程

有关薛定谔方程的讨论：

第三章要具体学习算符！

(1) 算符：算符作用于波函数，得到相应的物理量

$-\mathrm{i}\hbar(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\psi=(p_x,p_y,p_z)\psi$，即：$-\mathrm{i}\hbar\nabla\psi=\boldsymbol{p}\psi \Rightarrow \boldsymbol{p}\rightarrow\hat{\boldsymbol{p}}=-\mathrm{i}\hbar\nabla$

$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=E\psi \Rightarrow E\rightarrow\hat{E}=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}$; $-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}\psi \Rightarrow T=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}\rightarrow\hat{T}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2$

$(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U)\psi=(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}+U)\psi \Rightarrow H=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu}+U\rightarrow\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U$

$E=H\rightarrow\hat{E}\psi=\hat{H}\psi$，即：$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi=(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U)\psi$

经典力学方程$E=H\rightarrow$量子力学方程$\hat{E}\psi=\hat{H}\psi$

$\Rightarrow$将力学量换成对应的力学量算符，并在作用于波函数的意义上相等

（2）薛定谔方程含有守恒定律

粒子的空间几率密度及其变化率

$$w(\mathbf{r},t)=|\psi(\mathbf{r},t)|^2=\psi^*\psi \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t}=\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi$$

考虑到

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U)\psi \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi=\frac{i\hbar}{2\mu}\nabla^2\psi+\frac{1}{i\hbar}U\psi,\quad \frac{\partial}{\partial t}\psi^*=-\frac{i\hbar}{2\mu}\nabla^2\psi^*-\frac{1}{i\hbar}U\psi^*$$

于是有

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\psi^*(\frac{i\hbar}{2\mu}\nabla^2\psi+\frac{1}{i\hbar}U\psi)+(-\frac{i\hbar}{2\mu}\nabla^2\psi^*-\frac{1}{i\hbar}U\psi^*)\psi$$

$$=\frac{i\hbar}{2\mu}\psi^*\nabla^2\psi+\frac{1}{i\hbar}U\psi^*\psi-(\frac{i\hbar}{2\mu}\nabla^2\psi^*)\psi-\frac{1}{i\hbar}U\psi^*\psi$$

$$=\frac{i\hbar}{2\mu}(\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*)=\frac{i\hbar}{2\mu}\nabla\cdot\underline{(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)}$$

这是某个矢量的散度

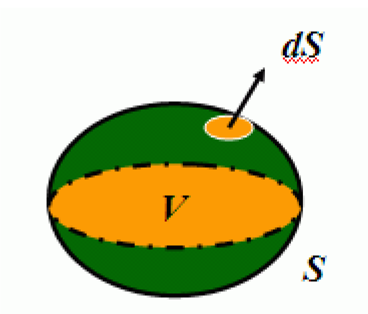
定义这个矢量为$\boldsymbol{j}$，则有

$$\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{i}\hbar}{2\mu}(\psi\nabla\psi^{*}-\psi^{*}\nabla\psi)=\frac{1}{2\mu}[-\psi(-\mathrm{i}\hbar\nabla)\psi^{*}+\psi^{*}(-\mathrm{i}\hbar\nabla)\psi]=\frac{1}{2\mu}(\psi^{*}\hat{\boldsymbol{p}}\psi-\psi\hat{\boldsymbol{p}}\psi^{*}),\quad(1)$$

代回原方程，可得概率变化率的微分表达式

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0,\quad(2)$$

上式具有连续性方程形式，如在任意空间区域V内积分，由 Gauss 定理,可得它的积分表达式



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V w\,\mathrm{d}\tau=-\oint_S\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},\quad(3)$$

说明：单位时间内体积V中概率的增量等于穿过V的边界面S进入V内的概率。所以$\boldsymbol{j}$是概率流密度，（2）（3）式分别是概率守恒定律的微分和积分形式。

在上式中,让 $V \to \infty$ (全空间),得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{(全)} w\,\mathrm{d}\tau = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{(全)} \left|\psi\left(\boldsymbol{r},t\right)\right|^2 \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = 0$$

即:整个空间找到粒子的概率不随时间发生变化，也就是说归一化是不随时间变化的.

物理意义：粒子既未产生也未湮没.概率守恒定律就是粒子数守恒定律

在守恒方程中

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0,\ w=|\psi|^2,\ \boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{i}\hbar}{2\mu}(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi)$$

若定义如下质量密度和质量流密度

$$w_\mu=\mu w=\mu|\psi|^2,\ \boldsymbol{j}_\mu=\mu\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi)$$

可得质量守恒定律：

$$\frac{\partial w_\mu}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}_\mu=0,\quad (5)$$

类似地，若定义如下电荷密度和电流密度

$$w_e=ew=e|\psi|^2,\ \boldsymbol{j}_e=e\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{i}\hbar e}{2\mu}(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi)$$

可得电荷守恒定律：

$$\frac{\partial w_e}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}_e=0,\quad (6)$$

（4）定态问题

若势函数U不显含时间t，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t)=[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r},t), \quad (1)$$

时间和坐标可变量分离，设方程的特解为：

$$\Psi(\mathbf{r},t)=\psi(\mathbf{r})f(t), \quad (2)$$

代入式(1),得

$$\frac{i\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\psi(\mathbf{r})}[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\mathbf{r})]\psi(\mathbf{r})=E, \quad (3)$$

左边只与时间变量有关，右边只与空间变量有关，说明它们只能等于一个常数，将这个常数记为E.

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=Ef(t) \quad \Rightarrow \quad f(t)\sim\exp(-\mathrm{i}Et/\hbar)$$

$$\Psi(\mathbf{r},t)=\psi(\mathbf{r})f(t)=\psi_E(\mathbf{r})\exp(-\mathrm{i}Et/\hbar) \quad (2)$$

$$[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\mathbf{r})]\psi_E(\mathbf{r})=E\psi_E(\mathbf{r}) \quad (4)$$

波函数（2）描述的态具有确定的能量E，称为定态，此波函数称为定态波函数，对应方程（4）称为定态薛定谔方程。

而波函数 $\Psi(\mathbf{r},t)=\sum_E C_E\psi_E(\mathbf{r})e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$ 描述的态具多个能量，是非定态

（5）本征值问题

$$[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\mathbf{r})]\,\psi_E(\mathbf{r})=E\psi_E(\mathbf{r})$$

在上方程中，定义哈密顿算符：

$$\hat{H}=\hat{T}+\hat{U}=\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\mathbf{r})$$

得定态薛定谔方程的哈密顿形式：

$$\hat{H}\psi_E=E\psi_E \tag{5}$$

象（5）这样，具有：

算符作用于波函数 = 常数乘以这波函数

形式的方程称为该算符的**本征方程**，常数称为该算符的**本征值**，波函数称为该算符的属于该本征值的**本征函数**。本征函数描述的态称为**本征态**

能量具有确定值的态，也称为能量本征态

定态问题就是要求出体系可能有的定态波函数及其对应的本征能量E；因此，求解能量本征方程（5）以求定态波函数的问题可归结为求解“定态方程（4）+定解条件”构成的能量本征值问题：

$$[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\boldsymbol{r})]\psi_E(\boldsymbol{r})=E\psi_E(\boldsymbol{r})$$

+定解条件

本征函数系： $\psi_{E_1}(\boldsymbol{r}),\ \psi_{E_2}(\boldsymbol{r}),\ \ldots,\ \psi_{E_n}(\boldsymbol{r}),\ \ldots$

能量本征值(其集合称为谱)： $E_1,\ E_2,\ldots,\ E_n,\ \ldots$

本征函数： $\Psi_{E_n}(\boldsymbol{r},t)=\psi_{E_n}(\boldsymbol{r})\exp(-\mathrm{i}\,E_n t/\hbar)$

如果**能量本征值问题**得解：

根据态叠加原理，能量本征态是体系的一整套“完备基函数”，比如 $\{\psi_{E_n}\}$． 那么这个体系处于任一状态的波函数都可以在这个完备集上展开：

$$\Psi(\mathbf{r},t)=\sum_n c_n \Psi_{E_n}(\mathbf{r},t)=\sum_n c_n \psi_{E_n}(\mathbf{r})\exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n t)$$

对以上体系进行能量的量子测量，测得的能量只能是本征能量谱：$\{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ 中的一个；测得能量为 E_n 的概率为 $|c_n|^2$ ；并且测量后，波函数塌缩到本征态 Ψ_{E_n} 并处于这个态上。

作业：

1、证明如果 ψ_1 和 ψ_2 都是薛定谔方程的解，则它们的线性组合 $a\psi_1 + b\psi_2$ 也是薛定谔方程的解

2. 求下列两波函数的概率流密度

$$\psi_1 = \frac{1}{r}\exp(\mathrm{i}kr), \psi_2 = \frac{1}{r}\exp(-\mathrm{i}kr)$$

3. 试述什么是定态，写出定态波函数的基本形式

4. 设 $\Psi(x)$ 是定态薛定谔方程的解，对应的能量本征值为 E，证明：$\Psi^*(x)$ 也是方程(3)的解，对应的本征能量也是 E。

1. $\psi = A\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar]$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}A\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar] = -\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}\psi$$

$$\Rightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi$$

2. $\psi = A\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar]$

$$\nabla\psi = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}A\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar] = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p}\psi$$

$$\nabla^2\psi = \nabla\cdot\nabla\psi = (\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p})\cdot(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p})\psi$$

$$-\hbar^2\nabla^2\psi = \boldsymbol{p}^2\psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi = \frac{p^2}{2\mu}\psi = E\psi$$

$$3.\quad \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\boldsymbol{r})]\psi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\boldsymbol{r})]\psi=[\frac{\mathrm{i}\hbar}{2\mu}\nabla^2+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}U(\boldsymbol{r})]\psi$$

$$4.\quad \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\boldsymbol{r})]\psi$$

$$(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t})^*=\{[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\boldsymbol{r})]\psi\}^*$$

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\boldsymbol{r})]\psi^*$$

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=-[\frac{\mathrm{i}\hbar}{2\mu}\nabla^2+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}U(\boldsymbol{r})]\psi^*$$

$$5.\quad \nabla\cdot(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)$$

$$=\nabla\psi^*\nabla\psi+\psi^*\nabla^2\psi$$

$$-(\nabla\psi\nabla\psi^*+\psi\nabla^2\psi^*)$$

$$=\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*$$