量子力学与统计物理

Quantum mechanics and statistical physics

光电科学与工程学院 王智勇

第六章：微扰理论

第四讲：含时微扰与量子跃迁

含时微扰理论

定态微扰理论讨论的是定态薛定谔方程的近似求解问题.

现在，考虑量子态的演化问题。即已知初始时刻t_0的态函数 $\Psi(\mathbf{r},t_0)$ ，求其演化到任意时刻t的状态函数 $\Psi(\mathbf{r},t)$ 。显然，它是含时薛定谔方程的解。

含时微扰理论讨论的是含时薛定谔方程的近似求解问题

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t)=\hat{H}\Psi(\mathbf{r},t)$$

1、*H*不显含时间*t*

这种情况的态演化可归结为求解定态薛定谔方程。

若定态薛定谔方程已解（当然很可能是近似解）

$$\hat{H}\psi_n(\mathbf{r}) = E_n\psi_n(\mathbf{r})$$

则：

$$\Psi(\mathbf{r},0) = \sum_n a_n(0)\psi_n(\mathbf{r})$$

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \sum_n a_n(t)\psi_n(\mathbf{r}) = \sum_n a_n(0)\psi_n(\mathbf{r})\exp(-\mathrm{i}E_n t/\hbar)$$

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \hat{U}(t,t_0)\Psi(\mathbf{r},0) = \exp(-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar)\Psi(\mathbf{r},0)$$

波函数随时间的演化只是一种幺正变换！

2. *H*显含时间*t*

$$\hat{H}(t)=\hat{H}_0+H'(t)$$

含时微扰理论，可以通过 H_0 的定态波函数，近似地求出有微扰时的波函数演化。进而可以求出无微扰体系在受到微扰后，从一个态（初态）跃迁到另一个态（末态）的跃迁概率。

（1）求薛定谔方程的在H_0表象中的形式

若H_0的本征方程已得解

$$\hat{H}_0\phi_n=\varepsilon_n\phi_n$$

它在t时刻的态函数为： $\Phi_n(t)=\phi_n\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_n t/\hbar)$

则显然有 $\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\Phi_n(t)=\hat{H}_0\Phi_n(t)$， (3)

利用解集合的正交归一完备性，微扰体系的解可以表达为

$$\Psi(\mathbf{r},t)=\sum_n a_n(t)\Phi_n(t)$$

求 $\Psi(\mathbf{r},t)$ 归结为求展开系数$a_n(t)$

代入薛定谔方程：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=(\hat{H}_0+\hat{H}')\Psi$$

$$\mathrm{i}\hbar\sum_n\frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t}\Phi_n+\sum_n a_n(t)\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi_n=\sum_n a_n(t)\hat{H}_0\Phi_n+\sum_n\hat{H}'a_n(t)\Phi_n$$

由（3）可知，上式的左边第二项与右边第一项相等，得

$$\mathrm{i}\hbar\sum_n\frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t}\Phi_n=\sum_n\hat{H}'a_n(t)\Phi_n$$

以$\Phi_m{}^*$左乘上式后对全空间积分 $\Phi_n(t)=\phi_n\exp(-\mathrm{i}\varepsilon_n t/\hbar)$

$$\mathrm{i}\hbar\sum_n\left[\frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t}\right]\int\Phi_m^*\Phi_n\mathrm{d}\tau=\sum_n a_n(t)\int\Phi_m^*\hat{H}'(t)\Phi_n\mathrm{d}\tau\Rightarrow$$

$$\mathrm{i}\hbar\sum_n\left[\frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t}\right]\delta_{mn}=\sum_n a_n(t)\int\phi_m^*\hat{H}'(t)\phi_n\exp[\mathrm{i}[\varepsilon_m-\varepsilon_n]t/\hbar]\mathrm{d}\tau\Rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a_m(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_n H'_{mn}\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)a_n(t),\quad(4)}$$

其中 $\begin{cases}H'_{mn}=\int\phi_m^*\hat{H}'(t)\phi_n\mathrm{d}\tau, & \rightarrow\text{微扰矩阵元}\\ \omega_{mn}=(\varepsilon_m-\varepsilon_n)/\hbar, & \rightarrow\text{Bohr 频率}\end{cases}$

这就是薛定谔方程在H_0表象中的表示，求解此方程，可得演化后的波函数

（2）近似求解法（逐次逼近法）

条件： H' 远小于 H_0

设 $t=0$ 时体系处于 H_0 的某一定态 Φ_k，即

$$\Psi(t)=\Phi_k(0)=\sum_m \delta_{mk}\Phi_m(0)=\sum_m a_m(0)\Phi_m(0)$$

$$\Rightarrow a_m(0)=\delta_{mk} \qquad \Phi_m(t)=\phi_m \exp(-\mathrm{i}\varepsilon_m t/\hbar)$$

- 零级近似：取 $H'(t)=0$，微扰矩阵元都为零，有

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a_m(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_n H'_{mn}\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)a_n(t)=0$$

即 $a_m(t)$ 不随时间改变 $\Rightarrow a_m(t)=a_m(0)=\delta_{mk}$

$$\Psi(\mathbf{r},t)=\sum_m a_m(t)\Phi_m(t)=\sum_m a_m(0)\Phi_m(t)$$

$$=\sum_m \delta_{mk}\phi_m \exp(-\mathrm{i}\varepsilon_m t/\hbar)=\phi_k \exp(-\mathrm{i}\varepsilon_k t/\hbar)$$

一级近似：

把零级近似结果 $a_n(t)=\delta_{nk}$ 代回方程（4）的右边，得

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a_m(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_n H'_{mn}\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)\delta_{nk}=H'_{mk}\exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t)$$

得一级近似公式

$$a_m(t)=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t H'_{mk}\exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t')\mathrm{d}t' \Longrightarrow \Psi(\mathbf{r},t)=\sum_m a_m(t)\Phi_m(t)$$

如果把一级近似的结果(m改用n标记)，再代回方程（4）的右边，可得到二级近似的结果，这样逐级进行，可得多个高级的近似解。

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a_m(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_n H'_{mn}\exp(\mathrm{i}\omega_{mn}t)a_n(t), \quad (4)$$

（3）跃迁概率

由前可知，在 $t=0$ 时刻，体系处于 H_0 的某一本征态 Φ_k，t 时刻发现体系处于 Ψ 态，它是各本征态的线性叠加：

$$\Psi(\mathbf{r},t)=\sum_m a_m(t)\Phi_m(t)$$

展开系数 $|a_m(t)|^2$ 表示体系从 Φ_k 态跃迁到 Φ_m 态的概率

所以在 $0\longrightarrow t$ 时间内，体系受到微扰 H' 的激发而由初态 Φ_k 跃迁到末态 Φ_m 的概率为：（一级近似）

$$W_{k\to m}=\left|a_m^{(1)}(t)\right|^2=\left|\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t H'_{mk}\exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t')\mathrm{d}t'\right|^2$$

$$W_{k\to m}=\left|a_m^{(1)}(t)\right|^2=\left|\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t H'_{mk}\exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t')\mathrm{d}t'\right|^2,\quad \omega_{mn}=\frac{\varepsilon_m-\varepsilon_n}{\hbar}$$

很明显，实际的跃迁概率大小，由微扰矩阵元的大小、微扰作用时间的长短、以及初末态间的能差大小决定。下面分情况进行实际计算

（4）、实际计算

例1．常微扰

即 H'在 $0\le t\le t_1$ 这段时间之内不为零，但不含时间，比如体系进入如下势场：

$$\hat{H}'=\begin{cases}0, & t<0\\ \hat{H}'(\boldsymbol{r}), & 0\le t\le t_1\\ 0, & t>t_1\end{cases}$$

计算一级微扰

$\hat{H}' = \hat{H}'(\boldsymbol{r})$ 只是位置的函数

$$a_m(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t H'_{mk}\exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t')\mathrm{d}t' = \frac{H'_{mk}}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t \exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t')\mathrm{d}t'$$

$$= \frac{H'_{mk}}{\mathrm{i}\hbar}\frac{1}{\mathrm{i}\omega_{mk}}\exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t')\Big|_{t'=0}^{t'=t}$$

$$= -\frac{H'_{mk}}{\hbar\omega_{mk}}[\exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t)-1]$$

$$= -\frac{H'_{mk}}{\hbar\omega_{mk}}\exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t/2)[\exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t/2)-\exp(-\mathrm{i}\omega_{mk}t/2)]$$

$$= -\frac{H'_{mk}}{\hbar\omega_{mk}}2\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t/2)\sin(\omega_{mk}t/2)$$

$$a_m(t) = -\frac{H'_{mk}}{\hbar\omega_{mk}} 2\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t/2)\sin(\omega_{mk}t/2) \Rightarrow$$

$$W_{k\to m} = \left|a_m^{(1)}(t)\right|^2 = \frac{4\left|H'_{mk}\right|^2}{\hbar^2\omega_{mk}^2}\sin^2(\omega_{mk}t/2) = \frac{\left|H'_{mk}\right|^2 t}{\hbar^2}\frac{\sin^2(t\omega_{mk}/2)}{t(\omega_{mk}/2)^2}$$

讨论：当$t\to\infty$时，有数学公式

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sin^2(\alpha x)}{\alpha x^2} = \pi\delta(x),\ \text{let } \alpha = t,\ x = \omega_{mk}/2 \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin^2(t\,\omega_{mk}/2)}{t(\omega_{mk}/2)^2} = \pi\delta(\omega_{mk}/2) = 2\pi\delta(\omega_{mk}) = 2\pi\hbar\delta(\varepsilon_m - \varepsilon_k)$$

跃迁概率

$$W_{k\to m}(t\to\infty) = \frac{2\pi t}{\hbar}\left|H'_{mk}\right|^2\delta(\varepsilon_m - \varepsilon_k)$$

跃迁速率（单位时间内的跃迁概率）

$$w_{k\to m} = \frac{\mathrm{d}W_{k\to m}}{\mathrm{d}t} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|H'_{mk}\right|^2\delta(\varepsilon_m - \varepsilon_k)$$

结论

跃迁概率：$W_{k\to m}(t\to\infty)=\dfrac{2\pi t}{\hbar}\left|H'_{mk}\right|^2\delta(\varepsilon_m-\varepsilon_k)$

跃迁速率：$w_{k\to m}=\dfrac{\mathrm{d}W_{k\to m}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2\pi}{\hbar}\left|H'_{mk}\right|^2\delta(\varepsilon_m-\varepsilon_k)$

1. 常微扰条件下，体系将跃迁到与初态能量相近的末态（比如简并态）。

2. 式中的$\delta(\varepsilon_m-\varepsilon_k)$反映了跃迁过程的能量守恒。

3. 黄金定则

设体系在末态能量ε_m附近$\mathrm{d}\varepsilon_m$范围内态的能态数目是$\rho(\varepsilon_m)\mathrm{d}\varepsilon_m$，则跃迁到$\varepsilon_m$附近一系列可能末态的跃迁速率为：

$$
\begin{aligned}
w &= \int \rho(\varepsilon_m)\omega_{k\to m}\mathrm{d}\varepsilon_m \\
&= \frac{2\pi}{\hbar}\int \rho(\varepsilon_m)\,|H'_{mk}|^2\,\delta(\varepsilon_m-\varepsilon_k)\mathrm{d}\varepsilon_m \\
&= \frac{2\pi}{\hbar}\left|H'_{mk}\right|^2 \rho(\varepsilon_m)
\end{aligned}
$$

只考虑平滑变化，因而可以近似提到积分号外面来

这个公式就是著名的费米黄金定则

态密度： 计算自由粒子的态密度

解 设末态是自由粒子动量的本征态. 本征函数为 $\psi_{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{L^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}$

动量本征值为

$$p_x = \frac{2\pi\hbar}{L} n_x, \quad p_y = \frac{2\pi\hbar}{L} n_y, \quad p_z = \frac{2\pi\hbar}{L} n_z, \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

其中 L 为立方体箱的边长

每一组 $\{n_x, n_y, n_z\}$ 的值代表一个态 粒子动量在 $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} + \mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 范围内的状态数为

$$\mathrm{d}n = \mathrm{d}n_x \mathrm{d}n_y \mathrm{d}n_z = \frac{\mathrm{d}p_x \mathrm{d}p_y \mathrm{d}p_z}{\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3} = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 p^2 \mathrm{d}p \mathrm{d}\Omega$$

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}\left(\frac{p^2}{2\mu}\right) = \frac{p}{\mu} \mathrm{d}p$$

态密度

$$\rho(E) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E} = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \mu p \,\mathrm{d}\Omega = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \mu p \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

例 2.简谐微扰

小扰动一般可写成简谐的形式

从$t=0$ 开始加入一个简谐振动的微小扰动：

(1) 微扰

$$\hat{H}'(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \hat{A}\cos\omega t, & t>0\end{cases}$$

$$\hat{H}'(t)=\hat{A}\cos\omega t=\hat{F}[\exp(\mathrm{i}\omega t)+\exp(-\mathrm{i}\omega t)]$$

(2) 求 $a_m^{(1)}(t)$

公式： $$a_m(t)=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t H'_{mk}\exp(\mathrm{i}\omega_{mk}t')\mathrm{d}t'$$

要先要计算微扰矩阵元……

$$H'_{mk}=\int\phi_m^*\hat{H}'\phi_k\mathrm{d}\tau=\int\phi_m^*\hat{F}[\exp(\mathrm{i}\omega t)+\exp(-\mathrm{i}\omega t)]\phi_k\mathrm{d}\tau$$

$$=[\exp(\mathrm{i}\omega t)+\exp(-\mathrm{i}\omega t)]\int\phi_m^*\hat{F}\phi_k\mathrm{d}\tau$$

$$=[\exp(\mathrm{i}\omega t)+\exp(-\mathrm{i}\omega t)]F_{mk}$$

代回计算

$$a_m(t)=\frac{F_{mk}}{\mathrm{i}\hbar}\int_0^t\{\exp[\mathrm{i}(\omega_{mk}+\omega)t']+\exp[\mathrm{i}(\omega_{mk}-\omega)t']\}\mathrm{d}t'$$

$$=-\frac{F_{mk}}{\hbar}\{\frac{\exp[\mathrm{i}(\omega_{mk}+\omega)t']-1}{\omega_{mk}+\omega}+\frac{\exp[\mathrm{i}(\omega_{mk}-\omega)t']-1}{\omega_{mk}-\omega}\}$$

$$a_m(t) = -\frac{F_{mk}}{\hbar}\{\frac{\exp[i(\omega_{mk}+\omega)t']-1}{\omega_{mk}+\omega} + \frac{\exp[i(\omega_{mk}-\omega)t']-1}{\omega_{mk}-\omega}\}$$

讨论：如果微扰是光照（热幅射），频率是很大的。

例如黄绿光， $\lambda \approx 5000\,\mathring{A}$ $\omega \approx 4\times 10^{15} s^{-1}$

1) 当 $\omega \approx \omega_{mk} = (\varepsilon_m - \varepsilon_k)/\hbar$ 时，上式第二项分母很小，所以很大，而第一项很小。求模方时，主要贡献来自第二项，

即 $\varepsilon_m = \varepsilon_k + \hbar\omega$ ，吸收跃迁

2) 当 $\omega \approx -\omega_{mk}$ 时，同理，上式中第一项的贡献是主要的，

即 $\varepsilon_m = \varepsilon_k - \hbar\omega$ ，发射跃迁

3) 当 $\omega \neq \omega_{mk}$ 时，所有各项都很小，没有显著跃迁

结论：物体在吸收光子或发射光子时，才有显著跃迁

（3）求跃迁概率

当$\omega=\omega_{mk}$时，略去第一项，则

$$a_m(t)=-\frac{F_{mk}}{\hbar}\frac{\exp[i(\omega_{mk}-\omega)t']-1}{\omega_{mk}-\omega}$$

此式与常微扰情况的表达式类似，只需作代换：

$H'_{mk}\rightarrow F_{mk}$，$\omega_{mk}\rightarrow\omega_{mk}-\omega$，

常微扰的结果可直接使用，简谐微扰情况下的跃迁概率为：

$$W_{k\to m}=\frac{|F_{mk}|^2}{\hbar^2}2\pi t\delta(\omega_{mk}-\omega)$$

$$=\frac{2\pi t}{\hbar^2}|F_{mk}|^2\delta((\varepsilon_m-\varepsilon_k)/\hbar-\omega)$$

$$=\frac{2\pi t}{\hbar}|F_{mk}|^2\delta(\varepsilon_m-\varepsilon_k-\hbar\omega)$$

同理，对于$\omega=-\omega_{mk}$时，有

$$W_{k\to m}=\frac{2\pi t}{\hbar}\left|F_{mk}\right|^2\delta(\varepsilon_m-\varepsilon_k+\hbar\omega)$$

二式合并

$$W_{k\to m}=\frac{2\pi t}{\hbar}\left|F_{mk}\right|^2\delta(\varepsilon_m-\varepsilon_k\pm\hbar\omega)$$

说明：只有与体系能级差相当的微扰才能引起显著的跃迁，这称为共振跃迁。

（4）求跃迁速率（单位时间内的跃迁概率）

$$w_{k\to m}=\frac{\mathrm{d}W_{k\to m}}{\mathrm{d}t}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|F_{mk}\right|^2\delta(\varepsilon_m-\varepsilon_k\pm\hbar\omega)$$

费米黄金定则为

$$w=\frac{2\pi}{\hbar}\left|F_{mk}\right|^2\rho(\varepsilon_m),\quad \varepsilon_m=\varepsilon_k\pm\hbar\omega$$

（5）细致平衡

由于F是厄密算符 $F_{km}=F_{mk}^{*} \Rightarrow \left|F_{km}\right|^{2}=\left|F_{mk}\right|^{2}$

若 $\varepsilon_m > \varepsilon_k$

$$w_{m\to k}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|F_{km}\right|^{2}\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_m+\hbar\omega)\to \text{发射跃迁}$$

$$w_{k\to m}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|F_{km}\right|^{2}\delta(\varepsilon_m-\varepsilon_k-\hbar\omega)\to \text{吸收跃迁}$$

因为 $\delta(-x)=\delta(x)$ 有： $w_{k\to m}=w_{m\to k}$

在周期性微扰下,体系由 $\Phi_m \to \Phi_k$ 的发射跃迁速率等于由 $\Phi_k \to \Phi_m$ 的吸收跃迁速率。

两个特定的态之间的相互跃迁几率相等，称细致平衡原理

例： 设 $t=0$ 时刻氢原子处在基态，以后受到单色光的照射而电离。设单色光的电场可以近似地表示为 $\mathcal{E}\sin\omega t$，$\mathcal{E}$ 和 ω 均为常数。求这单色光的最小频率和在 $t>0$ 时刻跃迁到电离态的概率。

解 最小电离能为 $E_\infty - E_1 = -E_1 = 13.6\,\mathrm{eV}$

最小频率则为

$$\omega_{min} = \frac{|E_1|}{\hbar}$$

初态 $\psi_i^{(0)}$ 和末态 $\psi_f^{(0)}$ 分别为

$$\psi_i^{(0)} = \psi_{100}$$

$$\psi_f^{(0)} = \psi_{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{1}{L}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}$$

微扰 Hamiltonian 为

$$\hat{H}' = e\mathcal{E}(t)\cdot\boldsymbol{r} = \frac{e\mathcal{E}\cdot\boldsymbol{r}}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \hat{F}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

设入射光在 xz 平面内，电子电离后运动方向为 z 轴，

$$\hat{F}_{fi} = \langle \psi_{\boldsymbol{p}} | \hat{F} | \psi_{100} \rangle$$

$$= \frac{e}{2i}\left(\frac{1}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \mathcal{E}\cdot\boldsymbol{r} e^{-\frac{r}{a_0}} r^2 \mathrm{d}r \mathrm{d}\Omega$$

$$= \frac{e}{2i}\left(\frac{1}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \int e^{-\frac{i}{\hbar}pr\cos\theta} (\mathcal{E}_x x + \mathcal{E}_z z) e^{-\frac{r}{a_0}} r^2 \mathrm{d}r \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

$$= -\left(\frac{1}{La_0}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \frac{16e\mathcal{E}_z k a_0^5}{(1+a_0^2k^2)^3}, \quad k = \frac{p}{\hbar} \quad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}\cos\theta'$$

末态是连续态，态密度为

$$\rho(E) = \mu p\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \mathrm{d}\Omega'$$

代入 Fermi 黄金规则 $dw = \frac{2\pi}{\hbar} |F_{fi}|^2 \rho(E_f^{(0)})$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \mu p \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \left(\frac{1}{La_0}\right)^3 \pi \left(\frac{16e\mathcal{E}ka_0^5}{(1+a_0^2k^2)^3}\right)^2 \cos^2\theta' \mathrm{d}\Omega'$$

$$w=\int\frac{2\pi}{\hbar}\mu p\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3\left(\frac{1}{La_0}\right)^3\pi\left(\frac{16e\mathcal{E}ka_0^5}{(1+a_0^2k^2)^3}\right)^2\cos^2\theta'\,\mathrm{d}\Omega'$$

$$=\frac{16^2e^2\mathcal{E}^2a_0^7\mu k^3}{3\hbar^2(1+a_0^2k^2)^6}$$

作业：P121, 6.5