2018 年《量子力学与统计物理》期中考试试题

一、 判断题（单选,每题 4 分，共 20 分）

1. 关于波函数，下面说法**错误**的是：**D**
   A. 波函数是概率幅，不对应实际的物理场，且满足单值性、连续性和有限性。
   B. 粒子在某处出现的概率与它的波函数在此处的模平方成正比。
   C. 波函数 $\psi_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x/\hbar}$ 与 $\psi_2 = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2x+\pi\hbar)/\hbar}$ 描述了两种相同的概率分布。
   D. 若 ψ_1 与 ψ_2 是粒子的可能状态，A 和 B 是两个满足$|A|>|B|$的常数，则 $A\psi_1+B\psi_2$ 也是粒子的可能状态，此时通过测量会发现，粒子处于 ψ_1 的概率更小。

2. 关于定态，下面说法中**错误**的是：**D**
   A. 若势函数不显含时间，则薛定谔方程描述的量子力学状态是定态，此时系统具有确定的能量。
   B. 定态分为束缚态和散射态，前者波函数在无穷远处为零，且能量是分立的。
   C. 定态的几率密度和几率流密度都与时间无关，且任何不显含时间的力学量，其平均值与时间无关。
   D. 在定态问题中，简谐振子和势垒贯穿研究的都是束缚态。

3. 关于力学量算符，下面说法**错误**的是：**B**
   A. 力学量算符是线性厄米的，其本征值为实数，其本征函数集合是完备的。
   B. 两个力学量算符之和是厄米算符，它们的积也是厄米算符。
   C. 力学量算符属于不同本征值的本征函数正交，而简并的本征函数可以经过重新组合后使它正交归一化。
   D. 在任意量子力学状态下对某力学量进行测量，其测量值必是该力学量算符的本征值之一。

4. 关于算符对易关系，下面说法**错误**的是：**C**
   A. 设 A、B、C 是三个力学量算符，则存在以下对易子关系式:
   $[A, BC]=B[A, C]+[A, B]C$，$[A^2, B]=A[A, B]+[A, B]A$.
   B. 一组彼此相互对易的力学量算符，具有共同的本征函数系。
   C. 相互对易的两个力学量算符，在任意量子力学状态下，都同时具有确定值。
   D. 不确定原理在数学上可以表达为：$\overline{(\Delta\hat{F})^2}\cdot\overline{(\Delta\hat{G})^2} \ge \frac{1}{4}\left|\overline{[\hat{F},\hat{G}]}\right|^2$.

5. 关于表象理论，下面说法**错误**的是：**B**
   A. 表示力学量算符的矩阵是厄密矩阵，其对角元都是实数；力学量算符在自身表象中是对角矩阵，对角元素就是算符的本征值。
   B. 如果矩阵 F 是厄米共轭的，那么它的矩阵元满足 $F_{mn} = F_{mn}^*$ 。
   C. 两个量子体系，如能用某个幺正变换联系起来，则它们在物理上是等价的。
   D. 设力学量算符 $\hat{F}$ 满足 $\hat{F}|\psi_n\rangle = f_n|\psi_n\rangle$，则有 $\sum_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|=1$ (单位矩阵) 。

二、 计算题

1． 已知量子体系状态的时间演化满足如下 Schrödinger 方程：（10 分）

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\hat{H}\psi(x,t)\,. \tag{1}$$

设哈密顿算符 $\hat{H}$ 不显含时间，且已知 t=0 时该体系所处的态为 $\psi(x,0)$，写出此后任意 t 时刻体系所处的态 $\psi(x,t)$。

2． 考虑一个系统的哈密顿量，在选定一组正交归一基下的矩阵形式为：

$$H=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}. \tag{2}$$

（1）当测量系统的能量时，可能的结果是什么？（10 分）

（2）假设一个粒子所处在的量子状态 $|\psi\rangle$，在这组正交归一基下的矩阵形式为

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-\mathrm{i}\\\mathrm{i}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

求 $\langle H\rangle$，$\langle H^2\rangle$ 和 $\Delta H=\sqrt{\langle H^2\rangle-\langle H\rangle^2}$ 。（15 分）

3. 若粒子处于状态

$$\psi(\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{5}}{3}Y_{21}(\theta,\varphi)-\frac{1}{3}Y_{20}(\theta,\varphi)+\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{31}(\theta,\varphi) \tag{4}$$

求：（1）在 $\psi(\theta,\varphi)$ 上分别测量 $\hat{L}^2$ 和 $\hat{L}_z$ 的可能取值与取相应值时的概率。（10 分）

（2） 在 $\psi(\theta,\varphi)$ 上同时测量 $\hat{L}^2$ 和 $\hat{L}_z$，测得 $L^2=6\hbar^2$, $L_z=\hbar$ 和 $L^2=12\hbar^2$, $L_z=\hbar$ 的概率。（10 分）

（3）在 $\psi(\theta,\varphi)$ 上测量 $\hat{L}^2$ 得到 $L^2=12\hbar^2$ 之后，紧接着再测量 $\hat{L}_z$ 的可能取值与相应的取值概率。（10 分）

（4）在 $\psi(\theta,\varphi)$ 上测量 $\hat{L}_z$ 得到 $L_z=\hbar$ 之后，紧接着再测量 $\hat{L}^2$ 的可能取值与相应的取值概率。（15 分）

参考答案：

2．已知量子体系状态的时间演化满足如下 Schrödinger 方程：（10 分）

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\hat{H}\psi(x,t)\,. \tag{1}$$

设哈密顿算符 $\hat{H}$ 不显含时间，且已知 t=0 时该体系所处的态为 $\psi(x,0)$，写出此后任意 t 时刻体系所处的态 $\psi(x,t)$。

解：由于哈密顿算符 $\hat{H}$ 不显含时间，方程(1)可以写成：

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}\mathrm{d}t\,,$$

对上式进行积分，并结合初始条件 t=0 时 $\psi(x,0)$，可得到形式解：

$$\psi(x,t)=\exp(-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar)\psi(x,0)\,.$$

注一：事实上，如果用狄拉克符号来表达，作如下替换：

$$\psi(x,t)\to|t\rangle,\ \ \psi(x,0)\to|0\rangle,\ \ \hat{U}(t)=\exp(-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar)\,,$$

其中 $\hat{U}(t)=\exp(-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar)$ 是时间演化算符，则有以下等价关系：

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\hat{H}\psi(x,t)\Leftrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle=\hat{H}|t\rangle\,,$$

$$\psi(x,t)=\exp(-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar)\psi(x,0)\Leftrightarrow|t\rangle=\hat{U}(t)|0\rangle\,.$$

其中左边是位置表象下的表达方式，右边是借用狄拉克符号的表达方式，后者更具有一般性，是抽象的，不依赖于任何表象。

注二：如果从哈密顿算符 $\hat{H}$ 不显含时间出发，假定它为 $\hat{H}=\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(x)$，从而分离变量 $\psi(x,t)=\varphi(x)f(t)$，代入薛定谔方程得到

$$\frac{\mathrm{i}\hbar}{f(t)}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\varphi(x)}[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(x)]\varphi(x)=E\,.$$

最后得到 $\psi(x,t)=\varphi(x)\exp(-\mathrm{i}\,Et/\hbar)$，这样也算对。

2. 考虑一个系统的哈密顿量，在选定一组正交归一基下的矩阵形式为：

$$H=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}. \tag{2}$$

（1）当测量系统的能量时，可能的结果是什么？（10 分）

（2）假设一个粒子所处在的量子状态$|\psi\rangle$，在这组正交归一基下的矩阵形式为

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-\mathrm{i}\\\mathrm{i}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

求$\langle H\rangle$，$\langle H^2\rangle$和$\Delta H=\sqrt{\langle H^2\rangle-\langle H\rangle^2}$。（15 分）

解：1）由量子力学原理知，对一个系统的力学量进行测量时，每次获得的结果，应该是它的本征值之一。力学量算符对应的矩阵，变换成对角矩阵之后，对角矩阵的对角元，便是算符的本征值。根据矩阵对角化的数学理论，求矩阵的对角元，即是求与矩阵对应的久期方程。因此能量的可能测值，就是能量的本征值，由题意知，它即是由久期方程$\det(H-\lambda)=0$的解给出，即

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)[(2-\lambda)^2-1]=(1-\lambda)(3-\lambda)^2=0,$$

因此，能量的可能测值是$E_1=1$和$E_2=3$，其中$E_2=3$是二重简并。

2）本题主要考核态矢的狄拉克符号表达，以及算符与态矢矩阵表达

$$\langle H\rangle=\langle\psi|H|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-\mathrm{i}\\\mathrm{i}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-\mathrm{i}\\3\mathrm{i}\end{pmatrix}=\frac{5}{3},$$

$$\begin{aligned}\langle H^2\rangle&=\langle\psi|H^2|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-\mathrm{i}\\\mathrm{i}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-\mathrm{i}\\3\mathrm{i}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-\mathrm{i}\\9\mathrm{i}\end{pmatrix}=\frac{11}{3}\end{aligned},$$

$$\Delta H=\sqrt{\langle H^2\rangle-\langle H\rangle^2}=\sqrt{\frac{11}{3}-\frac{25}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

3. 若粒子处于状态

$$\psi(\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{5}}{3}Y_{21}(\theta,\varphi)-\frac{1}{3}Y_{20}(\theta,\varphi)+\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{31}(\theta,\varphi) \tag{4}$$

求:（1）在$\psi(\theta,\varphi)$上分别测量$\hat{L}^2$和$\hat{L}_z$的可能取值与取相应值时的概率。（10 分）

（2） 在$\psi(\theta,\varphi)$上同时测量$\hat{L}^2$和$\hat{L}_z$，测得$L^2=6\hbar^2$, $L_z=\hbar$和$L^2=12\hbar^2$, $L_z=\hbar$的概率。（10 分）

（3）在$\psi(\theta,\varphi)$上测量$\hat{L}^2$得到$L^2=12\hbar^2$之后，紧接着再测量$\hat{L}_z$的可能取值与相应的取值概率。（10 分）

（4）在$\psi(\theta,\varphi)$上测量$\hat{L}_z$得到$L_z=\hbar$之后，紧接着再测量$\hat{L}^2$的可能取值与相应的取值概率。（15 分）

解：本题主要考核对态叠加原理的理解、力学量算符的本征态集合可以作为完备基，展开任何量子力学状态，以及对展开系数的物理含义的理解。

已知球谐函数$Y_{lm}(\theta,\varphi)$是算符$\hat{L}^2$和$\hat{L}_z$共同的本征函数，并且满足本征方程：

$$\hat{L}^2Y_{lm}(\theta,\varphi)=l(l+1)\hbar^2Y_{lm}(\theta,\varphi)，\quad \hat{L}_zY_{lm}(\theta,\varphi)=m\hbar Y_{lm}(\theta,\varphi)，$$

作为力学量算符的本征函数集合，$\{Y_{lm}(\theta,\varphi)\}$是一组正交归一的完备基函数，任一个量子力学状态$\psi(\theta,\varphi)$可以用这组基线性展开，

$$\psi(\theta,\varphi)=\sum_{lm}C_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)， \tag{5}$$

当$\psi(\theta,\varphi)$是归一化的时候，展开系数的模平方，是力学量取相应本征值的概率。

因此先检查一下由(4)式给出的量子力学状态$\psi(\theta,\varphi)$是否归一。由于基函数是正交归一的，判断$\psi(\theta,\varphi)$是否归一，只需看展开系数的模平方之和是否等于 1。

由(4)式知

$$C_{21}=\sqrt{5}/3，\ C_{20}=-1/3，\ C_{31}=1/\sqrt{3}，\text{其他系数}\ C_{lm}=0。$$

由于

$$\sum_{lm}|C_{lm}|^2=(\frac{\sqrt{5}}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2=1，$$

所以$\psi(\theta,\varphi)$是归一的。

事实上，选定了正交归一基函数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 之后，表达式（4）相当于矢量 $\psi(\theta,\varphi)$ 用基矢展开，展开系数（“坐标”）构成的列矩阵，即是矢量 $\psi(\theta,\varphi)$ 的矩阵表示。

判断 $\psi(\theta,\varphi)$ 是否归一，就看矢量的“长度”是否等于 1，即矢量与自身的内积是否等于 1.

$$\psi(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}\sqrt{5}/3\\ -1/3\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\Rightarrow\psi^{\dagger}\psi=\begin{pmatrix}\sqrt{5}/3 & -1/3 & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}/3\\ -1/3\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}=1.$$

有了以上准备，就可以求解如下（后面不再详细分析，学生自己体会）：

	角动量平方		角动量z分量	
可能取值	$2(2+1)\hbar^2=6\hbar^2$	$3(3+1)\hbar^2=12\hbar^2$	$\hbar$	0
几率	$\frac{5}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}+\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$
平均值	$8\hbar^2$		$8\hbar/9$	

（2）因为算符 $\hat{L}^2$ 与 $\hat{L}_z$ 是对易的，所以两者有共同本征函数系，并且可以同时取确定值。相应的取值概率分别为

$$W\left(L^2=6\hbar^2,\hat{L}_z=\hbar\right)=|c_{21}|^2=\frac{5}{9}$$

$$W\left(L^2=12\hbar^2,\hat{L}_z=\hbar\right)=|c_{31}|^2=\frac{1}{3}$$

（3）在状态 $\psi(\theta,\varphi)$ 上测量 $\hat{L}^2$ 得 $L^2=12\hbar^2\,(l=3)$ 后，状态 $\psi(\theta,\varphi)$ 已经变到的 $\hat{L}^2$ 本征态 $Y_{31}(\theta,\varphi)$ 上，而它恰好是 $\hat{L}_z$ 的对应本征值 $L_z=\hbar$ 的本征态上，所以这时再测量 $\hat{L}_z$ 必将得到确定值 $\hbar$，或者说，测量值为 $\hbar$ 的概率是1。但是，由于在状态 $\psi(\theta,\varphi)$ 上测量 $\hat{L}^2$ 得 $L^2=12\hbar^2\,(l=3)$ 的概率为 $\frac{1}{3}$，所以从 $\psi(\theta,\varphi)$ 出发测得 $\hat{L}_z$ 的值为 $\hbar$ 的概率应是 $\frac{1}{3}$。

$$\psi(\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{5}}{3}Y_{21}(\theta,\varphi)-\frac{1}{3}Y_{20}(\theta,\varphi)+\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{31}(\theta,\varphi)$$
$$\to Y_{31}(\theta,\varphi)$$

注：如同有同学得到再测量 $\hat{L}_z$ 获得 $L_z=\hbar$ 的概率是 1，也算对，此题的理解有一定的歧义，如果理解为从测量完 $\hat{L}^2$ 之后的态出发，概率就是 1。

（4）在状态 $\psi(\theta,\varphi)$ 上测量 $L_z=\hbar$ 后，使得状态变到一个新的状态

$$\psi(\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{5}}{3}Y_{21}(\theta,\varphi)-\frac{1}{3}Y_{20}(\theta,\varphi)+\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{31}(\theta,\varphi)$$

$$\rightarrow\phi(\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{5}}{3}Y_{21}(\theta,\varphi)+\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{31}(\theta,\varphi)$$

为了求出在 $\phi(\theta,\varphi)$ 上 $\hat{L}^2$ 的可能取值及相应的取值概率，必须将 $\phi(\theta,\varphi)$ 归一化，即令

$$\phi(\theta,\varphi)=A\left(\frac{\sqrt{5}}{3}Y_{21}(\theta,\varphi)+\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{31}(\theta,\varphi)\right)$$

于是由 $|A|^2\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\right)=1$

知 $A=\sqrt{\frac{9}{8}}$

归一化后的 $\phi(\theta,\varphi)$ 为

$$\phi(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{8}}Y_{21}(\theta,\varphi)+\sqrt{\frac{3}{8}}Y_{31}(\theta,\varphi)$$

在状态 $\phi(\theta,\varphi)$ 上测量 $\hat{L}^2$ 的可能取值为 $6\hbar^2$ 和 $12\hbar^2$ 的取值概率分别为

$$W'(L^2=6\hbar^2)=\frac{5}{8}$$

$$W'(L^2=12\hbar^2)=\frac{3}{8}$$

而从状态 $\phi(\theta,\varphi)$ 出发，相应的取值概率分别为

$$W(L^2=6\hbar^2)=\frac{8}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{9}$$

$$W(L^2=12\hbar^2)=\frac{8}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{3}$$

以上不仅仅为同学们提供参考答案，同时也是对相关内容的进一步讲解，希望同学们掌握，只有这样，才能达到期中考试的目的。