量子力学与统计物理

Quantum mechanics and statistical physics

光电信息学院　王智勇

算符对易的物理含义

- （1）一组彼此相互对易的力学量算符，具有共同本征函数系；
- （2）当物体处于其共同本征态时，它们同时具有确定值；
- （3）构成体系力学量完全集的一组力学量算符个数，与确定该体系量子力学状态所需要的自由度数目相同。

1、定理：如果两算符具有共同的本征函数完备系，则它们对易

证明：设有两力学量$\hat{F}$和$\hat{G}$有一组共同的本征函数Φ_n，即：

$$\hat{F}\Phi_n = \lambda_n \Phi_n ; \quad \hat{G}\Phi_n = \mu_n \Phi_n$$

而Φ_n组成完全系，即对于任意的波函数Ψ都可按$\{\Phi_n\}$展为级数：

$$\Psi = \sum_n a_n \Phi_n$$

则：$(\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F})\ \Psi = (\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}) \sum_n a_n \Phi_n$

$$= \sum_n a_n\ (\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F})\ \Phi_n$$

而$(\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F})\ \Phi_n = \hat{F}\hat{G}\ \Phi_n - \hat{G}\hat{F}\ \Phi_n = \hat{F}\ \mu_n \Phi_n - \hat{G}\ \lambda_n \Phi_n$

$$= \mu_n\ \lambda_n \Phi_n - \lambda_n\ \mu_n \Phi_n = 0$$

于是：$(\hat{F}\hat{G}-\hat{G}\hat{F})\ \Psi=0$

而 Ψ 是任意的波函数

所以：$\hat{F}\hat{G}-\hat{G}\hat{F}=0$

即：$[\hat{F},\hat{G}]=0$，定理得证。

2、逆定理：如果两算符对易，则它们具有共同的本征函数完备系。

【证明】(1)如果$[\hat{A},\ \hat{B}]=0$.我们先假定

$$\hat{A}\varphi_n = A_n\varphi_n \qquad (1)$$

即φ_n是$\hat{A}$的本征态，相应的本征值为A_n。接下来讨论A_n简并与不简并时与$\hat{B}$的共同本征函数系。

先设A_n不简并。利用$[\hat{A},\hat{B}]=0$,可知

$$\hat{A}(\hat{B}\varphi_n) = \hat{B}\hat{A}\varphi_n = \hat{B}A_n\varphi_n = A_n\hat{B}\varphi_n$$

$\hat{B}\varphi_n$也是$\hat{A}$的本征态,本征值为A_n,而A_n不简并,则$\hat{B}\varphi_n$与φ_n最多只能差一常数因子,记为B_n,即

$$\hat{B}\varphi_n = B_n\varphi_n \qquad (2)$$

这样φ_n就是$\hat{A}$与$\hat{B}$的共同本征函数.

简并在此不讨论

3、推论（1）：一组力学量算符（两个以上）具有共同本征函数完备系的充要条件是这些算符彼此相互对易。

例题1： 动量 $\vec{p}(\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ 的共同本征态

解： 由于 $[\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\beta] = 0$，则它们可以有共同的本征态，即平面波

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \psi_{p_x}(x)\psi_{p_y}(y)\psi_{p_z}(z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)} e^{i(p_x x + p_y y + p_z z)/\hbar} = \frac{1}{(2\pi\hbar)} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}$$

例题 2： $[\hat{L}^2, \hat{L}_z]=0$ ，则由定理知它们有完全的共同的本征函数系 $\{Y_{\ell m}\}$，由上面得的结论：在它们的本征态 $Y_{\ell m}$ 中，$\hat{L}^2, \hat{L}_z$ 同时具有确定值 $\ell(\ell+1)\hbar^2, m\hbar$ 。但在一般的态中，如 $Y = Y_{\ell m} + Y_{\ell m'}$（$m \neq m'$），$\hat{L}^2$ 有确定值，而 L_z 无确定值。L^2 是 $2\ell+1$ 度简并的，$\hat{L}^2$ 的本征态不一定都是 L_z 的本征态。

例题3：$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$

但在L_z的基态： $Y_{00} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$， $\hat{L}_z Y_{00} = 0 Y_{00} = 0$

$$\overline{\Delta \hat{L}_x^2} = \overline{\Delta \hat{L}_y^2} = \overline{[\hat{L}_x, \hat{L}_y]} = 0$$

$$\Delta L_x = \Delta L_y = \Delta L_x \cdot \Delta L_y = 0$$

说明：两算符不对易，一般不能同时具有确定值

思考题1 若两个厄米算符有共同的本征态，是否它们就彼此对易？
（不一定，要求它们所有的本征态相同，且本征态集合完备）

思考题2 若两个厄米算符不对易，是否就一定没有共同本征态？
（不一定，对易子算符可能会存在某个零本征态）

思考题3 若两个厄米算符对易，是否在所有态下它们都同时具有确定的值？（不是，只在共同的本征态下才行，例题2）

思考题4 若[A,B]＝常数，A和B能否有共同本征态？
（对于非零常数，没有）

思考题5 角动量分量 $[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = \mathrm{i}\hbar \hat{l}_z$，

l_x, l_y能否有共同的本征态？（可以）

思考题6 p_x和y可否有共同本征态？（可以）

3、推论（2）：完全确定一个量子态所需要的彼此对易的一组力学量算符的最小集称为力学量完全集，该集合所含力学量的数目与确定该体系量子力学状态所需要的自由度数目相同。

自由度：确定三维空间中平动运动状态的自由度为3；在经典力学中，描述三维空间中一个质点的运动状态，用质点的空间位置与动量构成的六位相空间矢量来描述（$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}$），此时自由度为6。

例如氢原子核外电子力学量完全集 $\{\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z\}$

$$\hat{H}\psi_{nlm} = E_n\psi_{nlm}, \ \hat{L}^2\psi_{nlm} = l(l+1)\hbar^2\psi_{nlm}, \ \hat{L}_z\psi_{nlm} = m\hbar\psi_{nlm}$$

作业：2、以下说法正确的有哪些

（1）若两个厄米算符有共同的本征态，是否它们就彼此对易？

（2）若两个厄米算符不对易，是否就一定没有共同本征态？

（3）若两个厄米算符对易，是否在所有态下它们都同时具有确定的值？

（4）若[A,B]＝常数，A和B能否有共同本征态？（有 or没有）

（5）角动量分量 $[\hat{l}_x,\hat{l}_y]=\mathrm{i}\hbar\hat{l}_z$，

l_x, l_y能否有共同的本征态？

（6）p_x和y可否有共同本征态？

力学量平均值随时间的演化

对称与守恒

物理学中的守恒定律

1. 对称性与守恒量

守恒量： 力学量的值不随时间变化

诺特定理： 系统任何一个连续对称性都对应一种守恒量

作用量平移不变→动量守恒（空间均匀性）

作用量转动不变→角动量守恒（空间各向同性）

作用量时间平移不变→能量守恒（时间均匀性）

2. 量子力学中的守恒量

守恒量： 在任意态下力学量的平均值不随时间变化

$$\overline{A}(t)=\big(\psi(t),A\psi(t)\big)=c.$$

量子力学中有哪些守恒定律，成立条件又是什么？

一、力学量平均值随时间的演化

$$\overline{F}(t)=\overline{\hat{F}(t)}=\left\langle \hat{F}(t)\right\rangle=\int\psi^{*}(t)\hat{F}(t)\psi(t)\mathrm{d}\tau$$

表明：平均值随时间的演化有两方面的原因：

$$\begin{cases}\text{体系所处的状态 } \psi(t) \text{ 随时间变化} \\ \text{力学量算符 } \hat{F}\text{， 随时间变化}\end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{F}}{\mathrm{d}t}=\int\frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}\hat{F}\psi\mathrm{d}\tau+\int\psi^{*}\frac{\partial\hat{F}}{\partial t}\psi\mathrm{d}\tau+\int\psi^{*}\hat{F}\frac{\partial\psi}{\partial t}\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

由薛定谔方程有

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}\psi \qquad \frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}=\frac{-1}{\mathrm{i}\hbar}(\hat{H}\psi)^{*}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{F}}{\mathrm{d}t}=\int\psi^{*}\frac{\partial\hat{F}}{\partial t}\psi\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int\psi^{*}\hat{F}\hat{H}\psi\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int(\hat{H}\psi)^{*}(\hat{F}\psi)\mathrm{d}\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{F}}{\mathrm{d}t}=\int\psi^*\frac{\partial\hat{F}}{\partial t}\psi\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int\psi^*\hat{F}\hat{H}\psi\mathrm{d}\tau-\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int(\hat{H}\psi)^*(\hat{F}\psi)\mathrm{d}\tau$$

因 $\hat{H}$ 是厄米算符 $$\int(\hat{H}\psi)^*(\hat{F}\psi)\mathrm{d}\tau=\int\psi^*\hat{H}\hat{F}\psi\mathrm{d}\tau$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}\overline{F}}{\mathrm{d}t}=\int\psi^*\frac{\partial\hat{F}}{\partial t}\psi\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int\psi^*(\hat{F}\hat{H}-\hat{H}\hat{F})\psi\mathrm{d}\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{F}}{\mathrm{d}t}=\overline{\frac{\partial F}{\partial t}}+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{(\hat{F}\hat{H}-\hat{H}\hat{F})}=\overline{\frac{\partial F}{\partial t}}+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[\hat{F},\hat{H}]}\qquad(2)$$

这就是力学量平均值随时间的演化规律

二、守恒的条件

$$\frac{\mathrm{d}\overline{F}}{\mathrm{d}t}=\overline{\frac{\partial F}{\partial t}}+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[\hat{F},\hat{H}]}$$

如 果：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial \hat{F}}{\partial t}=0 & (\text{即}\hat{F}\text{不显含时间}) \\ [\hat{F},\hat{H}]=0\end{cases}$$

有：
$$\frac{\mathrm{d}\overline{F}}{\mathrm{d}t}=0 \quad \Rightarrow \quad \overline{F}=\text{constant}$$

三、守恒量的性质

（1）若F是守恒量，则其测量值的概率分布也不随时间改变

考虑到 $[\hat{F},\hat{H}]=0$

可以选择包含 $\hat{H}$ 和 $\hat{F}$ 在内的一组力学量完全集，将其共同本征态记为 ϕ_n (不显含时间)，有：

$$\hat{H}\phi_n = E_n\phi_n \qquad \hat{F}\phi_n = F_n\phi_n$$

体系的任一状态 $\psi(t)$ 均可用 ϕ_n 展开：

$$\psi(t) = \sum_n C_n(t)\phi_n, \quad C_n(t) = \int \phi_n^*\psi(t)\mathrm{d}\tau$$

在 $\psi(t)$ 态下，t 时刻测量 $\hat{F}$ 得到 F_n 的概率为 $\left|C_n(t)\right|^2$

下面证明 $\mathrm{d}\left|C_n(t)\right|^2 \Big/ \mathrm{d}t = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|C_n(t)\right|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[C_n^*(t)C_n(t)] = C_n^*(t)[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_n(t)] + [\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_n^*(t)]C_n(t)$$

$$= C_n^*(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_n(t) + [C_n^*(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_n(t)]^*$$

$$C_n^*(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_n(t) = \int \phi_n \psi^*(t)\mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\int \phi_n^* \psi(t)\mathrm{d}\tau]$$

$$= \int \phi_n \psi^*(t)\mathrm{d}\tau \int \phi_n^* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)\mathrm{d}\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_n = 0$$

$$= \int \phi_n \psi^*(t)\mathrm{d}\tau \int \phi_n^* \frac{\hat{H}\psi(t)}{\mathrm{i}\hbar}\mathrm{d}\tau$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi = \hat{H}\psi$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int \phi_n \psi^*(t)\mathrm{d}\tau \int \phi_n^* \hat{H}\psi(t)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int \phi_n \psi^*(t)\mathrm{d}\tau \int (\hat{H}\phi_n)^* \psi(t)\mathrm{d}\tau$$

$$\hat{H}\phi_n = E_n\phi_n$$

$$\hat{H}\phi_n = E_n\phi_n$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int \phi_n \psi^*(t)\mathrm{d}\tau \int (\hat{H}\phi_n)^* \psi(t)\mathrm{d}\tau = \frac{E_n}{\mathrm{i}\hbar}\int \phi_n \psi^*(t)\mathrm{d}\tau \int \phi_n^* \psi(t)\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{E_n}{\mathrm{i}\hbar}[\int \phi_n^* \psi(t)\mathrm{d}\tau]^*[\int \phi_n^* \psi(t)\mathrm{d}\tau],\ C_n(t) = \int \phi_n^* \psi(t)\mathrm{d}\tau \Rightarrow$$

$$C_n^*(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_n(t) = \frac{E_n}{\mathrm{i}\hbar}\left|C_n(t)\right|^2,\ [C_n^*(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_n(t)]^* = -\frac{E_n}{\mathrm{i}\hbar}\left|C_n(t)\right|^2$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|C_n(t)\right|^2 = C_n^*(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_n(t) + [C_n^*(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C_n(t)]^* = 0$$

结论： 如果某力学量A为守恒量，则无论体系处于何种状态，其平均值及各测量值的概率分布都不随时间变化。

四、常用守恒定律

证明：自由粒子的动量是守恒量

$\because \quad \hat{\mathbf{p}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$ 不显含时间 $\longrightarrow$ $\dfrac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial t} = 0$

又 $\hat{H} = \hat{T} = \dfrac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{p}}^2$ $\qquad [\hat{\mathbf{p}}, \hat{H}] = [\hat{\mathbf{p}}, \dfrac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{p}}^2] = 0$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t} = \overline{\frac{\partial \hat{\mathbf{p}}}{\partial t}} + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[\hat{\mathbf{p}}, \hat{H}]} = 0$$

$\longrightarrow$ $\overline{\mathbf{p}}$ 守恒

空间平移对称性——动量守恒

证明：粒子在中心力场中运动的角动量是守恒量

求哈密顿算符在球坐标系中的形式：

$$\hat{H}=\hat{T}+V=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(r)$$

$$U(r)=-\frac{Ze_s^2}{r},\ e_s=\frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}]+U(r)$$

$$\because \hat{L}^2=-\hbar^2[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}]$$

$$\boxed{\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2}+U(r)}$$

（1）角动量各分量算符及角动量平方算符均与哈密顿算符对易

（2）在球坐标系中算符 $\hat{L}_x,\hat{L}_y,\hat{L}_z,\hat{L}^2$ 等只是 (θ,φ) 的函数，不显含时间t变量(也不显含径向坐标 r 变量，故与 $\hat{H}$ 对易)

$\therefore$ 角动量各分量及角动量平方均为守恒量－－角动量守恒定律!

空间转动对称——角动量守恒

证明：哈密顿算符不显含时间的体系，能量守恒

当$\hat{H}$不显含t时，$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}=0$$

又 $$[\hat{H},\hat{H}]=0$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}\overline{H}}{\mathrm{d}t}=\overline{\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}}+\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\overline{[\hat{H},\hat{H}]}=0$$

时间平移对称性——能量守恒

证明：哈密顿算符对空间反射不变，宇称守恒

1、宇称算符：

空间反射含义：$\vec{r} \Rightarrow -\vec{r}$

$$\psi(\vec{r},t) \longrightarrow \psi(-\vec{r},t)$$

定义空间反射算符：$\hat{P}\psi(\vec{r},t)=\psi(-\vec{r},t)$

空间反演算符也称为宇称算符

反射算符 $\hat{P}$ 的本征值：$\hat{P}\psi(\vec{r},t)=P\psi(\vec{r},t)$,

$$\hat{P}^2\psi(\vec{r},t)=\hat{P}P\psi(\vec{r},t)=P^2\psi(\vec{r},t)$$

$$\hat{P}^2\psi(\vec{r},t)=\hat{P}[\hat{P}\psi(\vec{r},t)]=\hat{P}\psi(-\vec{r},t)=\psi(\vec{r},t)$$

$\therefore \quad P^2=1 \Longrightarrow$ 本征值 $P=\pm 1$

$$P=\begin{cases}1 & \hat{P}\psi(\vec{r},t)=\psi(-\vec{r},t)=\psi(\vec{r},t)\quad (偶宇称)\\ -1 & \hat{P}\psi(\vec{r},t)=\psi(-\vec{r},t)=-\psi(\vec{r},t)\quad (奇宇称)\end{cases}$$

具有偶宇称或奇宇称的波函数称为具有确定宇称的波函数(具有确定的奇偶性)。宇称是对空间对称性的描述。

2、证明宇称守恒定律

若体系的哈密顿算符具有空间反射不变性，

即 $$\hat{H}(-\vec{r},t)=\hat{H}(\hat{r},t)$$

有： $$\hat{P}\hat{H}(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)=\hat{H}(-\vec{r},t)\psi(-\vec{r},t)=\hat{H}(\hat{r},t)\hat{P}\psi(\vec{r},t)$$

$$\therefore\quad \hat{P}\hat{H}=\hat{H}\hat{P} \Longleftrightarrow [\hat{P},\hat{H}]=0$$

又 $\hat{P}$ 不显含t， $\Longrightarrow$ $\dfrac{\partial \hat{P}}{\partial t} = 0$

故 $$\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \hat{P}}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{P}, \hat{H}] = 0$$

因此，$\hat{P}$ 为运动恒量，证毕！

含义： 若体系的哈密顿量具有空间反射不变性，宇称守恒。此时，哈米顿算符和宇称算符具有共同本征函数，即：能量本征函数也是宇称的本征函数

此时能量的本征函数有确定的奇偶性

对称性与守恒定律的对应关系

变换	不可观测量	守恒律
空间平移	绝对空间位置	动量
时间平移	绝对时间	能量
旋转	绝对空间方向	角动量
空间反演	绝对右或绝对左	宇称
电荷共轭	绝对电荷符号	电荷共轭
时间反演	绝对时间符号	时间反演
粒子置换	全同粒子的差别	玻色统计法或费米统计
规范变换	电荷态间相对相位	电荷

杨振宁，李政道，吴健雄：
弱相互作用体系宇称不守恒

1956年提出，1957年获诺奖

杨-米尔斯规范场理论

1954年提出后，实现弱相互作用与电磁相互作用的统一

五、关于量子体系的守恒量的几点说明（附）

(1) 量子体系的守恒量并不一定取确定值；

若初始时刻体系处于守恒量F的本征态,则体系保持在该本征态，有确定值;反之,若初始时刻体系并不处于守恒量F的本征态,则以后的状态一般不是F的本征态,因此没有确定值。但无论是不是本征态，F的平均值和测量值概率分布都是确定的，不随时间变的.

(2) 量子体系的各守恒量一般不能同时有确定值.

各量都是守恒量，只能说明它们都与哈密顿量对易，但并不能说明它们之间也对易。即使对易，体系并不一定处于它们共同的本征态。因此一般不能同时有确定值

(3) 守恒量与能级简并.

定理 体系有两不对易的守恒量F和G，即有

$$[\hat{F},\hat{H}]=[\hat{G},\hat{H}]=0,\ \text{but}\ [\hat{F},\hat{G}]\neq 0$$ ，则**能级一般简并**

证明： $[\hat{F},\hat{H}]=0$,则它们有共同的本征函数ψ

$$\hat{H}\psi=E\psi,\quad \hat{F}\psi=F\psi$$

又因为$[\hat{G},\hat{H}]=0$，则 $\hat{H}(\hat{G}\psi)=\hat{G}\hat{H}\psi=\hat{G}E\psi=E(\hat{G}\psi)$

即 $\hat{G}\psi$ 也是哈密顿算符的本征函数，对应的本征值也是E。因为 $[\hat{F},\hat{G}]\neq 0$，它们有不同的本征函数系，即ψ不可能同时也是 $\hat{G}$ 的本征函数。因此，本征能量为E的两个函数ψ和 $\hat{G}\psi$ 一般不会相同，即能级一般是简并的。

推论： 非简并能级E对应的态ψ_E必是守恒量F的本征态

证明： 设ψ_E是能量为E的一个本征态。因F是守恒量，则

$$[\hat{F},\hat{H}]=0 \Rightarrow \hat{H}\hat{F}\psi_E=\hat{F}\hat{H}\psi_E=\hat{F}E\psi_E=E\hat{F}\psi_E$$

$$=> \hat{H}(\hat{F}\psi_E)=E(\hat{F}\psi_E)$$

即：$\hat{F}\psi_E$ 也是能量为E的一个本征态。

由于能级E不简并，$\hat{F}\psi_E$ 与ψ_E两态之间差一个常数(即与同一个本征值E对应的两个态必为同一个态)，设为F

$$\hat{F}\psi_E=F\psi_E$$

即ψ_E也是F的本征态，证毕！

重要： 体系的守恒量总是与体系的对称性相联系，而能级简并也往往也与体系的对称性相关。

根据能级简并，可找出体系的守恒量；根据能级不简并，又可找到守恒量的相应本征态。

守恒量与定态的区别

(1)定态是体系的一种特殊的状态,即能量的本征态,在定态下,一切不显含时间t的力学量的平均值和测量值概率分布都不随时间变化;

(2)守恒量则是体系的一种特殊的力学量,它与体系的Hamilton量对易,它在任意状态下(不管是否定态)的平均值和测量值概率分布都不随时间变化.

只有当:

一个体系不处于定态,同时所讨论的力学量又不是守恒量时,才需要研究该力学量的平均值和测量值概率分布随时间的变化问题.

作业:

(1) 试述定态与守恒量的区别

(2) 在非定态下,力学量的平均值随时间变化吗?

(3) 当体系处于定态,不含时力学量测量值的概率分布随时间变化吗?

(4) 设Hamilton量为守恒量,则体系一定处于定态吗?

(5) 试述守恒量与能级简并的关系

本章小结

1. 算符的定义：算符、线性算符、厄米算符的定义
2. 算符与力学量的关系：测量问题、平均值的计算
3. 算符运算法则：算符的和、算符的乘积,...
4. 对易子运算法则，常用对易关系
5. 厄米算符本征值与本征函数的相关定理
6. 常用算符本征值问题
7. 不确定性原理
8. 共同本征函数问题
9. 运动守恒量