座位号　考场教室　任课教师　学号　姓名　学院

密封线以内答题无效

电子科技大学 2016-2017 学年第 2 学期期末考试 A 卷

考试科目：量子力学与统计物理 考试形式：一页纸开卷 考试日期： 2017 年 7 月 4 日

成绩构成比例：平时 20 %， 期中 20 %， 实验 0 %， 期末 60 %

本试卷由 四 部分构成，共 八 页。考试时长： 120 分钟 注：

题号	一	二	三	四	五	六	七	合计
得分								

得 分

一、填空题（每空一分，共 23 分）

1、 当能量为 5.0ev 的光子射向某金属表面时，从金属表面逸出的电子最大初动能为 1.5ev。为使该金属能产生光电效应，入射光的最低能量必须是 3.5 ev。

2、若电子经过 100V 电压加速，则与之相对应的电子德布罗意波长为 *0.1225* *nm*。

3、设 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 分别表示粒子的两个可能运动状态，则它们线性迭加的态 $c_1\psi_1(x)+c_2\psi_2(x)$ 的几率分布为 $|c_1\psi_1|^2+|c_2\psi_2|^2+c_1^*c_2\psi_1^*\psi_2+c_1c_2^*\psi_1\psi_2^*$.

4、设 $C(p,t)$ 为归一化的动量表象下的波函数，则 $|C(p,t)|^2dp$ 的物理意义为 在 p—p+dp 范围内发现粒子的几率。

5、$[x,\hat{p}_x]=$ $i\hbar$ 。

6、算符 $\hat{L}_x$ 和 $\hat{L}_y$ 的对易关系为 $[\hat{L}_x,\hat{L}_y]=i\hbar\hat{L}_z$,则 $\hat{L}_x$、 $\hat{L}_y$ 的测不准关系是

$$\overline{(\Delta\hat{L}_x)^2}\,\overline{(\Delta\hat{L}_y)^2}\geq\frac{\hbar^2\overline{\hat{L}_z}^2}{4}$$ 。

7、在量子力学中，微观体系的状态被一个 波函数 完全描述。

8、一粒子在一维无限深势阱中运动的状态为$\psi(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_1(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2(x)$，其中$\psi_1(x)$、$\psi_2(x)$是其能量本征函数，则$\psi(x)$在能量表象中的表示是$\underline{\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2\\ 0\\ \vdots\end{pmatrix}}$。

9、线性谐振子的能级为$\underline{(n+1/2)\hbar\omega,(n=0,1,2,\ldots)}$。

10、 $\psi_{nlm}=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$为氢原子的波函数，$n,l,m$的取值范围分别为

$\underline{\boldsymbol{n=1,2,3,\cdots,\ l=0,1,2,\cdots n-1,\ m=-l,-l+1,\cdots,l-1,l}}$。

11、 费米子所组成的全同粒子体系的波函数具有**交换反对称性**______。

12、 对氢原子，考虑自旋但不考虑自旋与轨道角动量的耦合时，能级的简并度为$\underline{\quad 2n^2 \quad}$。

13、 氢原子的一级斯塔克效应中，对于$n=2$的能级由原来的一个能级分裂为<u>三</u>个子能级.

14、 偶极跃迁中，角量子数与磁量子数的选择定则为$\underline{\boldsymbol{\Delta l=\pm1,\ \Delta m=0,\pm1}}$____.

15、 斯特恩(Stern)－革拉赫(Gerlach)实验表明电子具有**自旋**属性，电子自旋角动量在空间任何方向的投影只能是$S_z=\underline{\boldsymbol{\pm\frac{\hbar}{2}}}$。

16、 $\hat{\boldsymbol{S}}$为自旋算符，则其 x 和 y 分量的对易关系为$[\hat{S}_x,\hat{S}_y]=\underline{i\hbar\hat{S}_z}$______。

17、 $\hat{J}_1,\hat{J}_2$是角动量算符，$\hat{J}=\hat{J}_1+\hat{J}_2$，则$[\hat{J}^2,\hat{J}_1^{\,2}]$等于 **0** 。

18、 玻尔兹曼分布函数$\underline{f_B(\varepsilon)=\mathrm{e}^{-\alpha-\beta\varepsilon}}$。

19、 当体系处于绝对零度时，各粒子均处于能量最低的基态，熵$S_{T=0}$为 **0** ____.

20、 电子系统由**<u>费米</u>** 统计来处理。

21、 β的统计意义： **<u>N，V不变时，体系微观态随能量变化时的相对变化量。</u>**

22、 **能量均分定理**：对于处在温度为 T 的平衡状态的经典系统，粒子能量中每一个平方项的平均值等于 $\underline{\frac{1}{2}kT}$ 。

得 分

二、简答题（每题5分，共30分）

1. Stern—Gerlach 实验证实了什么？

Stein – Gerlack 实验证明了电子自旋的存在。（5分）

2. 力学量 $\hat{G}$ 在自身表象中的矩阵表示有何特点？

力学量 $\hat{G}$ 在自身表象中的矩阵是对角的（3 分），对角线上为 $\hat{G}$ 的本征值。（2分）

3. 两个对易的力学量是否一定同时确定？为什么？

不一定，只有在它们共同的本征态下才能同时确定。（3分）

4. 写出电子在 $\hat{S}_z$ 表象下的三个 Pauli 矩阵。

在 $\hat{S}_z$ 表象下.电子的三个泡利(Pauli)矩阵为：

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$ （2分）

（2分） （1分） （2分）

5. 阐述等概率原理并写出热力学量熵和微观态数关系。

答：系统各可能的微观态出现的几率相等（3分） $S=k_B\ln\Omega$ （2分）。

6. 根据费米分布函数，说明费米系统处于平衡态时，各单粒子态（能量为 ε）

被占据的概率都小于等于 1。

$$f_{FD}(\varepsilon)=\frac{1}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/kT}+1}\ \le 1$$

（3 分） 说明（2 分）

得 分

三、证明题（每题 5 分，共 15 分）

1. 证明：若两算符有一组共同完备的本征函数系，则两算符对易。

证： 设 $\hat{F},\hat{G}$ 有共同本征函数系 φ_n 构成完全系，则有

$$\hat{F}\varphi_n=\lambda_n\varphi_n,\ \ \hat{G}\varphi_n=\mu_n\varphi_n$$

λ_n,μ_n 分别是 $\hat{F},\hat{G}$ 本征值。所以有 $\left(\hat{F}\hat{G}-\hat{G}\hat{F}\right)\varphi_n=\lambda_n\mu_n\varphi_n-\mu_n\lambda_n\varphi_n=0$

（2 分）

设 ψ 为任意波函数，由于 φ_n 组成完全系， $\psi=\sum_n a_n\varphi_n$ **（2 分）**

于是可以将 ψ 按 φ_n 展开 $\left(\hat{F}\hat{G}-\hat{G}\hat{F}\right)\psi_n=\sum_n a_n\left(\hat{F}\hat{G}-\hat{G}\hat{F}\right)\varphi_n=0$ **（2 分）。**

因为 ψ 是任意波函数，所以 $\hat{F}\hat{G}-\hat{G}\hat{F}=0$ **（1 分）**

2. 设 $[\hat{G},\hat{F}]=0$，证明 $\hat{F}\hat{G}$ 算符的本征值必为实数，其中 $\hat{F},\hat{G}$ 均是厄米算符。

[证明] $\int\psi^*\hat{F}\hat{G}\varphi d\tau=\int(\hat{F}\psi)^*\hat{G}\varphi d\tau=\int(\hat{G}\hat{F}\psi)^*\varphi d\tau$ （2 分）

$\because[\hat{G}\hat{F}]=0 \qquad \therefore\hat{G}\hat{F}=\hat{F}\hat{G}$

$\therefore\int\psi^*\hat{F}\hat{G}\varphi d\tau=\int(\hat{F}\hat{G}\psi)^*\varphi d\tau$ （2 分）

$\therefore\hat{F}\hat{G}$ 是厄米算符。因厄米算符的本征值为实数，$\therefore\hat{F}\hat{G}$ 的本征值必为实数（1 分）

3．证明：$[\hat{L}_z,\hat{p}_y]=-i\hbar\hat{p}_x$

$$[\hat{L}_z,\hat{p}_y]=[\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x,\hat{p}_y]$$

$$=[\hat{x}\hat{p}_y,\hat{p}_y]-[\hat{y}\hat{p}_x,\hat{p}_y] \qquad （2 分）$$

$$=\hat{x}[\hat{p}_y,\hat{p}_y]+[\hat{x},\hat{p}_y]\hat{p}_y-\hat{y}[\hat{p}_x,\hat{p}_y]-[\hat{y},\hat{p}_y]\hat{p}_x \qquad （2 分）$$

$$=-i\hbar\hat{p}_x \qquad （1 分）$$

得 分

四、计算题（每题 8 分，共 32 分）

1. （8 分）已知一维运动的粒子处于归一化态函数$\psi(x)$所描述的状态时，其坐标x和动量p_x的平均值分别为x_0和p_0，求处于$\varphi(x)=e^{-ip_0x/\hbar}\psi(x+x_0)$态时，坐标$x$和动量$p_x$的平均值。

解：已知粒子在态$\psi(x)$中坐标x和动量p_x的平均值分别为

$$\overline{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)x\psi(x)dx=x_0$$

$$\overline{p_x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)dx=p_0 \quad （2 分）$$

现粒子处在$\varphi(x)$态，坐标x和动量p_x的平均值

$$\overline{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^*(x)x\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x+x_0)x\psi(x+x_0)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x')(x'-x_0)\psi(x')dx'=x_0-x_0=0 \qquad （3 分）$$

$$\overline{p_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip_0x/\hbar}\psi^*(x+x_0)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)[e^{-ip_0x/\hbar}\psi(x+x_0)]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip_0x/\hbar}\psi^*(x+x_0)[-p_0e^{-ip_0x/\hbar}\psi(x+x_0)+e^{-ip_0x/\hbar}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x+x_0)]dx$$

$$= -p_0 + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x')\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\right)\psi(x')dx' = -p_0 + p_0 = 0$$

（3 分）

2.（8 分）一全同双粒子体系服从的薛定谔方程为

$$\left[\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_{\vec{R}}^2-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_{\vec{r}}^2+\frac{1}{2}kr^2\right]\psi(\vec{R},\vec{r}\,)=E\psi(\vec{R},\vec{r}\,)\text{，其中}M=2m\qquad \mu=m/2$$

（1）指出体系的所有守恒量（不必证明）;（2 分）

（2）求基态能量和基态波函数。 （6 分）

解:（1）体系的哈密顿量是中心力场哈密顿，容易得知系统的守恒量为E,L^2,L_z。

（2 分）

（2）考虑相对运动哈密顿量

$$H_r=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_{\vec{r}}^2+\frac{1}{2}kr^2=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_{\vec{r}}^2+\frac{1}{2}\mu\omega^2r^2\qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}}\quad\text{（3 分）}$$

这是三维各向同性谐振子，因此，其基态能量和波函数为

$$E_N=\frac{3}{2}\hbar\omega\qquad \psi(r)=\sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi^{3/2}}}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2r^2}\qquad \alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\quad\text{（3 分）}$$

3. (8 分) 不考虑自旋轨道耦合，设 t=0 时氢原子所处的态为:

$$\psi(\vec{q},0)=\frac{1}{\sqrt{10}}[2\psi_{100\frac{1}{2}}+\psi_{210\frac{1}{2}}+\sqrt{2}\psi_{211-\frac{1}{2}}+\sqrt{3}\psi_{21-1-\frac{1}{2}}]$$

（1）求体系能量的平均值;（2 分）

（2）求任意 t 时刻波函数$\psi(\vec{r},t)$；处于$l=1,m=1$的态的概率，及处在$m_s=\frac{1}{2}$态的几率。(6 分)

解：不考虑自旋轨道耦合时，氢原子定态能量和波函数为

$$E_n=\frac{a_0}{n^2}\qquad \psi_{nlmm_s}(r,\theta,\phi)=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)\,\chi_{m_s}(s_z)$$

$\psi(\vec{r},0)$已归一化，因此有:

（1）$\overline{E}=\frac{4}{10}E_1+\frac{6}{10}E_2=\frac{2}{5}\frac{a_0}{1^2}+\frac{3}{5}\frac{a_0}{2^2}=\frac{11}{20}a_0$ （2 分）

（2）任意 t 时刻波函数

$$\psi(\vec{q},t)=\frac{1}{\sqrt{10}}\{2e^{-iE_1t/\hbar}\psi_{100\frac{1}{2}}(\vec{q})+e^{-iE_2t/\hbar}[\psi_{210\frac{1}{2}}(\vec{q})+\sqrt{2}\psi_{211-\frac{1}{2}}(\vec{q})+\sqrt{3}\psi_{21-1-\frac{1}{2}}(\vec{q})]\}$$ （2 分）

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}e^{-iE_2t/\hbar}\psi_{211-\frac{1}{2}}(\vec{q})$$

所谓处在$l=1, m=1$态，即 ，

概率为：$(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}})=\frac{1}{5}$；　（2 分）

所谓处在$m=0$态，即$\frac{1}{\sqrt{10}}\{2e^{-iE_1t/\hbar}\psi_{100\frac{1}{2}}(\vec{q})+e^{-iE_2t/\hbar}\psi_{210\frac{1}{2}}(\vec{q})\}$，

概率为 1/2。（2 分）

4. （8 分）有一个二能级体系，哈密顿量为

$$H=\begin{pmatrix} E_1 & \alpha \\ \alpha & E_2 \end{pmatrix}, \text{其中} E_1 \geq E_2 \gg \alpha,$$

用微扰法求能量本征值和本征态。

解：令$H=H_0+H'=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$

由于H_0是对角化的，可选作表象：

$$E_1^{(0)}=E_1\text{；}\quad \psi_1^{(0)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2^{(0)}=E_2\text{；}\quad \psi_2^{(0)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ （2 分）

(1) 对于$E_1\neq E_2$，由非简并微扰论计算公式

$$\begin{cases} E_n=E_n^{(0)}+H'_{nn}+\sum\limits_m{}' \dfrac{|H'_{nm}|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}+\cdots \\ \psi_n=\psi_n^{(0)}+\sum\limits_m{}' \dfrac{H'_{mn}}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\psi_m^{(0)}+\cdots \end{cases}$$

得　$E_1^{(1)}=0$

$$E_1^{(2)}=\frac{|H'_{12}|^2}{E_1^{(0)}-E_2^{(0)}}=\frac{\alpha^2}{E_1-E_2}\text{；}\quad \psi_1^{(1)}=\frac{H'_{21}}{E_1^{(0)}-E_2^{(0)}}\psi_2^{(0)}=\frac{\alpha}{E_1-E_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

同时

$$E_2^{(1)} = 0$$

$$E_2^{(2)} = \frac{\left|H'_{12}\right|^2}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} = \frac{\alpha^2}{E_2 - E_1}$$

$$\psi_2^{(1)} = \frac{H'_{12}}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} \psi_1^{(0)} = \frac{\alpha}{E_2 - E_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以，二级近似能量和一级近似态矢为

$$E_1 + \frac{\alpha^2}{E_1 - E_2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{E_1 - E_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$E_2 + \frac{\alpha^2}{E_2 - E_1}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{E_1 - E_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ （2 分）

（2）对于 $E_1 = E_2$，解久期方程

$$\begin{pmatrix} -E^{(1)} & \alpha \\ \alpha & -E^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

得能量一级修正：

$$E_1^{(1)} = \alpha; \quad E_2^{(1)} = -\alpha$$

简并完全消除，新零级近似态矢为

$$\psi_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\psi_2^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ （2 分）

代入非简并公式，计算一级近似态矢，得

$$\psi_1^{(1)} = \frac{H'_{21}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \psi_2^{(0)} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_2^{(1)} = \frac{H'_{12}}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} \psi_1^{(0)} = -\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$；（2 分）

电子科技大学 2016-2017 学年第 2 学期期末考试 B 卷

考试科目：量子力学与统计物理 考试形式：一页纸开卷 考试日期： 2017 年 7 月 4 日

成绩构成比例：平时 20 %， 期中 20 %， 实验 0 %， 期末 60 %

本试卷由 四 部分构成，共 七 页。考试时长： 120 分钟 注：

题号	一	二	三	四	五	六	七	合计
得分								

得 分

一、填空题（每空 1 分，共 23 分）

1、 光电效应溢出光电子数的多少依赖于入射光的**强度和频率**。

2、 在量子力学中，力学量用 **厄密算符** 表示。

3、 $\int |\psi(r,\theta,\varphi)|^2 r^2 dr$ 表示 **在 r—r+dr 单位立体角的球壳内发现粒子的几率**。

4、 波函数 $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int c(p,t)\exp(\frac{i}{\hbar}px)dp$ 的傅里叶变换式是

$c(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \Psi(x,t)\exp(-\frac{i}{\hbar}px)dx$。

5、 如两力学量算符 $\hat{A},\hat{B}$ 有共同本征函数完全系，则 $[\hat{A},\hat{B}] =$ 0 。

6、 $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] =$ $i\hbar L_x$；

7、 坐标和动量的测不准关系是 $\Delta x \Delta p_x \ge \frac{\hbar}{2}$ 或 $\overline{(\Delta \hat{x})^2}\,\overline{(\Delta \hat{p})^2} \ge \frac{\hbar^2}{4}$。

学院 姓名 学号 任课教师 考场教室 座位号

密封线以内答题无效

8、线性谐振子的能量本征函数 在能量表象中的表示是$\begin{pmatrix} a/\sqrt{|a|^2+|b|^2} \\ b/\sqrt{|a|^2+|b|^2} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$。

9、线性谐振子的能量本征方程是$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2\right]\psi(x)=E\psi(x)$。

10、 $\psi_{nlm}=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$为氢原子的波函数，$n,l,m$的取值范围分别为

$\boldsymbol{n=1,2,3,\cdots\ l=0,1,2,\cdots n-1\ m=-l,-l+1,\cdots,l-1,l}$。

11、 非简并定态微扰理论的适用条件是$\left|\frac{H'_{mk}}{E_k^{(0)}-E_m^{(0)}}\right|<<1$

12、 玻色子所组成的全同粒子体系的波函数具有**交换对称性**。

13、 对氢原子，不考虑电子的自旋，能级的简并度为n^2。

14、 偶极跃迁中，角量子数与磁量子数的选择定则为$\boldsymbol{\Delta l=\pm1,\ \Delta m=0,\pm1}$.

15、 光谱的精细结构表明电子具有**自旋**属性，电子自旋角动量在空间任何方向的

投影只能是$S_z=\pm\frac{\hbar}{2}$。

16、 $\hat{\vec{S}}$ 为自旋算符，则 $\hat{\vec{S}}^2$本征值$\frac{3}{4}\hbar^2$，$[\hat{\vec{S}}^2,\hat{S}_z]=$ 0 。

17、 $\hat{\vec{J}}_1,\hat{\vec{J}}_2$是角动量算符，$\hat{\vec{J}}=\hat{\vec{J}}_1+\hat{\vec{J}}_2$，$[\hat{J}_z,\hat{\vec{J}}_1^{\,2}]$等于 0.

18、 玻色分布函数$f_{BE}(\varepsilon)=\frac{1}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/kT}-1}$。

19、 熵与总微观态数目的关系为 $S=k_B\ln\Omega$ 。

20、 简并气体、光子气体、声子气体和低温玻色凝聚等问题由**波色**统计处理。

21、 熵的统计意义**是体系微观状态数的量度，是混乱度的度量**。

得 分

二、简答题（每题 5 分，共 30 分）

1. Davison-Germer 实验证实了什么？

Davison-Germer 实验明了电子的波动性。（5 分）

2. 两个不对易的算符所表示的力学量是否一定不能同时确定？举例说明。

不一定（2 分），如 $\hat{L}_x,\hat{L}_y,\hat{L}_z$ 互不对易，但在 Y_{00} 态下，$\hat{L}_x=\hat{L}_y=\hat{L}_z=0$（3 分）

3. Pauli 算符 $\hat{\vec{\sigma}}$ 是否满足角动量的定义式？

将 $\hat{\vec{S}}=\frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\sigma}}$ 代入自旋角动量定义式 $\hat{\vec{S}}\times\hat{\vec{S}}=i\hbar\hat{\vec{S}}$（3 分）得 $\hat{\vec{\sigma}}\times\hat{\vec{\sigma}}=2i\hat{\vec{\sigma}}\neq i\hbar\hat{\vec{\sigma}}$,即算符 $\hat{\vec{\sigma}}$ 不满足角动量定义式.（2 分）

4. 写出德布罗意关系式及自由粒子的德布罗意波。

德布罗意关系： $\boldsymbol{E=h\nu}$， $\boldsymbol{\lambda=h/p}$ （3 分）

自由粒子的德布罗意波： $\psi=Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$ （2 分）

5. 叙述统计物理的等几率原理，说明其成立的条件。

答：系统各可能的微观态出现的几率相等（3 分）。成立的条件当孤立系处于平衡态时（2 分），

6. 根据玻色分布函数，说明玻色系统处于平衡态时，各单粒子态（能量为 ε）被占据的概率是任意数。

$$f_{BE}(\varepsilon)=\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}-1}\geq 0$$

（3 分） 说明（2 分）

学院________ 姓名________ 学号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

密 封 线 以 内 答 题 无 效

得 分

三、证明题（每题 5 分，共 15 分）

1. 证明　厄米算符的平均值都是实数（在任意态）

[证]　由厄米算符的定义

$$\int \psi^* \hat{F} \psi d\tau = \int (\hat{F}\psi)^* \psi d\tau$$

厄米算符 $\hat{F}$ 的平均值（2 分）

$$\overline{F} = \int \psi^* \hat{F} \psi d\tau$$

$$= [\int \psi (\hat{F}\psi)^* d\tau]^*$$

$$= [\int \psi \hat{F}^* \psi^* d\tau]^*$$

$$= [\int (\hat{F}\psi)^* \psi d\tau]^*$$

$$= [\int \psi^* \hat{F} \psi d\tau]^*$$

$$= \overline{F}^*$$

即厄米算符的平均值都是实数（3 分）

2．证明　$i(\hat{P}_x^2 x - x\hat{P}_x^2)$ 是厄米算符

$i(\hat{p}_x^2 x - x\hat{p}_x^2) = i[\hat{p}_x^2, x] = i\hat{p}_x[\hat{p}_x, x] + i[\hat{p}_x, x]\hat{p}_x = 2\hbar\hat{p}_x$，　（3 分）

，因为 $\hat{p}_x$ 是厄密算符，所以 $i(\hat{p}_x^2 x - x\hat{p}_x^2)$ 是厄密算符。　（2 分）

3．证明：$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$

$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_x\right] = \left[\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + L_z^2, \hat{L}_x\right] = \left[\hat{L}_y^2, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_z^2, \hat{L}_x\right] \quad \text{（2 分）}$$

$$= \hat{L}_y\left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right]\hat{L}_y + \hat{L}_z\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right]\hat{L}_z \quad \text{（2 分）}$$

$$= -i\hbar\hat{L}_y\hat{L}_z - i\hbar\hat{L}_z\hat{L}_y + i\hbar\hat{L}_z\hat{L}_y + i\hbar\hat{L}_y\hat{L}_z$$

$$= 0 \quad \text{（1 分）}$$

学院______ 姓名______ 学号______ 任课教师______ 考场教室______ 座位号______

密……封……线……以……内……答……题……无……效

得 分

四、计算题（每题 8 分，共 32 分）

1.已知一维运动的粒子处于归一化态函数$\psi(x)$所描述的状态时，其坐标x和动量p_x的平均值分别为x_0和p_0，求处于$\phi(x)=e^{ip_0x_0/\hbar}\psi(x+x_0)$态时，坐标$x$和动量$p_x$的平均值。

解：已知粒子在态$\psi(x)$中坐标x和动量p_x的平均值分别为

$$\overline{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)x\psi(x)dx=x_0$$

$$\overline{p_x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)dx=p_0$$（3 分）

现粒子处在$\varphi(x)$态，坐标x和动量p_x的平均值

$$\begin{aligned}\overline{x}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^*(x)x\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x+x_0)x\psi(x+x_0)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x')(x'-x_0)\psi(x')dx'=x_0-x_0=0\end{aligned}$$（2 分）

$$\begin{aligned}\overline{p_x}&=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x+x_0)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x+x_0)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x')\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\right)\psi(x')dx'=p_0\end{aligned}$$（3 分）

2. 一个全同非近独立双粒子体系服从的薛定谔方程为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2+\nabla_2^2)+\frac{1}{2}k\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|^2\right]\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=E\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$$

（1）指出体系的所有守恒量（不必证明）;（3 分）

（2）求基态能量和基态波函数。 （5 分）

解:（1）体系的哈密顿量为

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_1^2-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_2^2+\frac{1}{2}k\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|^2$$

引入质心坐标 $\vec{R}$ 和相对坐标 $\vec{r}$： $\vec{R}=\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)$ $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ （1 分）

坐标变换 $\vec{r}_1,\vec{r}_2\Rightarrow\vec{R},\vec{r}$ 后，体系的哈密顿量变为

$$H=-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_{\vec{R}}^2-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_{\vec{r}}^2+\frac{1}{2}kr^2 \qquad M=2m \qquad \mu=m/2$$

这是中心力场哈密顿，所以容易得知系统的守恒量为 E,L^2,L_z。（2 分）

（2）考虑相对运动哈密顿量

$$H_r=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_{\vec{r}}^2+\frac{1}{2}kr^2=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_{\vec{r}}^2+\frac{1}{2}\mu\omega^2r^2 \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \text{（2 分）}$$

这是三维各向同性谐振子，因此，其基态能量和波函数为

$$E_N=\frac{3}{2}\hbar\omega \qquad \psi(r)=\sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi^{3/2}}}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2r^2} \qquad \alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} \quad \text{（3 分）}$$

3. 设 t=0 时氢原子所处的态为：

$$\psi(\vec{q},0)=\frac{1}{\sqrt{10}}[2\psi_{100}+\psi_{210}+\sqrt{2}\psi_{211}+\sqrt{3}\psi_{21-1}]$$

（1）求体系能量的平均值；（4 分）

（2）求任意 t 时刻波函数 $\psi(\bar{r},t)$；处于 $l=1,m=1$ 的态的概率，及处在 $m\ =0$ 态的几率。（4 分）

解：不考虑自旋轨道耦合时，氢原子定态能量和波函数为

$$E_n=\frac{a_0}{n^2}\qquad \psi_{nlm}(r,\theta,\phi)=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$$ （2 分）

$\psi(\bar{r},0)$ 已归一化，因此有：

（1）$\overline{E}=\frac{4}{10}E_1+\frac{6}{10}E_2=\frac{2}{5}\frac{a_0}{1^2}+\frac{3}{5}\frac{a_0}{2^2}=\frac{11}{20}a_0$ （2 分）

（2）任意 t 时刻波函数

$$\psi(\vec{q},t)=\frac{1}{\sqrt{10}}\{2e^{-iE_1t/\hbar}\psi_{100}(\vec{q})+e^{-iE_2t/\hbar}[\psi_{210}(\vec{q})+\sqrt{2}\psi_{211}(\vec{q})+\sqrt{3}\psi_{21-1}(\vec{q})]\}$$ （2 分）

所谓处在 $l=1,m=1$ 态，即 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}e^{-iE_2t/\hbar}\psi_{211}(\vec{q})$，

概率为：$(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}})=\frac{1}{5}$；

所谓处在 $m=0$ 态，即 $\frac{1}{\sqrt{10}}\{2e^{-iE_1t/\hbar}\psi_{100}(\vec{q})+e^{-iE_2t/\hbar}\psi_{210}(\vec{q})\}$，

概率为 1/2。（2 分）

4.有一个二能级体系，哈密顿量为

$$H=\begin{pmatrix} E_1 & \alpha \\ \beta & E_2 \end{pmatrix},\text{其中} E_1 \geq E_2 \gg \alpha \geq \beta > 0,$$

用微扰法求能量一级修正和波函数一级修正。

解：令 $H=H_0+H'=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$

由于 H_0 是对角化的，可选作表象：

$E_1^{(0)}=E_1$ ； $\psi_1^{(0)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_2^{(0)}=E_2$ ； $\psi_2^{(0)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ （2 分）

(1) 对于 $E_1 \neq E_2$ ，由非简并微扰论计算公式

$$\begin{cases} E_n=E_n^{(0)}+H'_{nn}+\sum_m{}' \dfrac{|H'_{nm}|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}+\cdots \\ \psi_n=\psi_n^{(0)}+\sum_m{}' \dfrac{H'_{mn}}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\psi_m^{(0)}+\cdots \end{cases}$$

得 $E_1^{(1)}=0$

$$\psi_1^{(1)}=\frac{H'_{21}}{E_1^{(0)}-E_2^{(0)}}\psi_2^{(0)}=\frac{\beta}{E_1-E_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

同时

$$E_2^{(1)}=0$$

$$\psi_2^{(1)}=\frac{H'_{12}}{E_2^{(0)}-E_1^{(0)}}\psi_1^{(0)}=\frac{\alpha}{E_2-E_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ （2 分）

（2）对于 $E_1=E_2$，解久期方程

$$\begin{pmatrix} -E^{(1)} & \alpha \\ \beta & -E^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

得能量一级修正：

$$E_1^{(1)} = \sqrt{\alpha\beta}\ ;\quad E_2^{(1)} = -\sqrt{\alpha\beta}\ ;$$

简并完全消除，新零级近似态矢为

$$\psi_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\psi_2^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$（2 分）

代入非简并公式，计算其一级修正，得

$$\psi_1^{(1)} = \frac{H'_{21}}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}\psi_2^{(0)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha\beta}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_2^{(1)} = \frac{H'_{12}}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}}\psi_1^{(0)} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha\beta}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$（2 分）