模射，它们的地位由各种关系结构（包括编序和在组合拓扑意义下的“复数”）所取定，这种结构远为不顺应在1930——1960年处于“近世代数”中心地位的一般代数技巧。

与数字计算机和组合学最为有关的几类代数结构（和“关系”结构相对照）是圈、独异点和格（或群芽、半群和半格），它们在1930——1960年是为大多数代数学家所忽略的。粗略地讲，群是关联于对称的，而圈是关联于设计的（或者模式的），独异点相当于作用（即对于一个自动机状态的输入指示），格相应于结构。

特别地，轮换和它的结合已表明，格论已提供了一般地向组合数学进军的方便之处，而恰好不是我已经叙述过的1933年的那些代数。此外 N. S. Mendelsohn 十分现代地把遍代数概念应用到生成组合设计中去，反之亦然。

人们自然地会惊叹，所有这些新的方向将引向何处，我自已确实只有一种想法：它们将不会指向如同 Van der Waerden 已作过的那种详细论述的古典“近世代数学”，更不会作出实的、复的代数或过去了的分析。正如 Knuth 所强调的，算法这个词对计算数学是如此的中心，而它恰恰是对“代数”一词的引进者Al-Khwarizmi 的命名的一种误传。

确实，我已描述过的代数学中的四种潮流，由于研究数字计算机将被激励起来，很象当年微积分和分析是由思考有关几何、力学和数学物理而被激励起一样。它们简单地打开了，为新的一代研究的数学的新领域。随着相互联系和应用的增加和丰富，其中老的和新的思想将会相互渗透，相辅相成。近几十年内新概念和新方向将会从这些渗透和改善中生成。确实这种不断地进化，仅仅表明它能多年不断地使代数学保持成为一个新鲜的、使人兴奋的主题。

〔*American Mathematical Monthly* 1973年 80卷第760页〕

知与无知：自然界是复的吗？*

Roger Penrose 著　崔维征　吴咏时　译

自然界和数

“造物主无疑是狡黠的，但她肯定没有恶意。”至少是凭借爱因斯坦的权威，我们可以这样说。可是，自然界是复的吗？“复的”这个词在这里不止一种意思：首先，同“狡黠”比较，它更接近于“复杂”；其次，它还包含一种有关数的性质的数学意义。

自然界至少在相当大程度上可以按照数的法则予以有效描述。多少世纪以来这一直是非常明显的。但是，缺乏数学基础的人所不熟悉的是：有种种不同类型的数，有的还服从于同样的运算规则。

最原始的是所谓“自然数”：

0, 1, 2, 3, 4…

正是借助于这些数，人们可以定量地描述世界上几乎任何事物。我们可以谈论3个苹果、17个鸡蛋、0只鸡、500个人，或者多少个氢原子、多少次日食、多少次闪电等等。进一步的抽象出现了整数系：

…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …

起初这一些是为了方便而定义的，引入它们是要使算术规则更加系统化，更易于处理。但是世界上有不少事物不能用它们做定量描述。例如，我们不可能精确地说在房间里有−3个人！另一方面，也有各式各样稍微抽象一点的概念可以用整数描述；银行的收支差额恐怕就是一个最容易想到的例子。整数在基础物理学中也发挥了它们的作用。由整数精确地定量描述的物理属性，最明显的例证看来就是电荷。就现在从精密的实验所知，存在着一种电荷的基本单位，即质子电荷；用这种电荷单位进行描述，自然界中其它一切系统所带电荷都是严格的整数：或正、或负、或零。（如果最终发现假设的夸克是作为自由粒子而存在——迄今对夸克粒子的大力搜寻仍然没有结果——那么这种电荷单位本身的数值必须除以三，但物理系统依然能用整数电荷值描述。）还有别的人们不太熟悉的物理量也可以用整数来描述，例如重子数、各种（推测中的）轻子数和物理系统绕某个轴的量子力学自旋等等。

尽管引入负整数简化了减法运算，但除法运算却还不行。为此需要引进分数：

* 本文译自《无知百科全书》。

$$0,1,\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{11}{2},2,-\frac{1}{3}\cdots$$

任何两个这样的数都可以相加、相减、相乘或相除(零除外)。虽然在数学上是方便了，但是在定量描述自然特点方面分数系看来没有起什么明显的作用。人们显然还必须进一步抽象，把一切所谓的实数都包括进来:

$$0,1,\frac{1}{2},-1,\sqrt{2},2^{\sqrt{2}},\pi,-6.1974302\cdots$$

这里每个数都能用(带符号的)无穷位小数展开来表示。它们的有限次算术运算规则与分数完全一样;但实数系则更为完备，即在其中可以进行某些*无穷*次的运算。特别是,存在着无穷项之和,例如:

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{8}\left(\frac{2}{1}\right)+\frac{1}{8^2}\left(\frac{3\times4}{1\times2}\right)+\frac{1}{8^3}\left(\frac{4\times5\times6}{1\times2\times3}\right)+\frac{1}{8^4}\left(\frac{5\times6\times7\times8}{1\times2\times3\times4}\right)+\cdots$$

按照通常接受的看法，时间和距离的量度要用实数予以描述。看来，的确是这些物理观念提供了发明实数的原始动机。

在实数这个数学概念被正式引入之前，著名的"芝诺佯谬"就已经出现了。这些佯谬表达了人们对于长期以来所感到的时间和空间连续性的困惑。由于现在掌握了实数系的严格数学概念，这个问题看来已经解决了。事实上，这一直是实数这个概念所享有的成功，以致于现在很难想象空间和时间还能用其它方法描述。人们得到一种强烈的印象，即时间和空间*本身就是*连续的——恰好具有在实数系中得到严格表述的那种连续性(当然要记住,空间是三维的,而不是一维的)。但是,或许我们正在被表面现象和长期以来对实数的熟悉所蒙蔽。这使我们把时空在普通尺度上表现的连续性外推到无穷小似乎很自然。但最后可能证明，在极小尺度上时间和空间并不具有迄今赋予它们的那种连续性。根据我和另一些人的看法，我们认识中的这一根本转变很可能就快会出现。

如果我们接受当代物理学所绘出的图象，实数系源源不断地提供了为把物理概念定量化而一再得出的要素。例如速度、能量、动量、频率、质量、温度、密度、力等等。然而用实数来描述它们可以溯源到空间和时间的实数连续性，所以从同样是使用这些数的观察当中,实质上得不到新的东西。

可是,数学的发展并没有到此为止。尽管减法、除法与无穷项求和已经在实数范围内成为系统的概念，求解方程的运算却还不计。例如下面这个看上去很简单的方程

$$x^2+2=0$$

就没有实数解。而外观上相似的另一方程

$$x^2-2=0$$

却有两个实数解: $x=\sqrt{2}$ 和 $x=-\sqrt{2}$。几个世纪以来，数学家们已习惯于认为上边第一个方程也有两个解,写为 $x=\sqrt{-2}$ 和 $x=-\sqrt{-2}$。这两个解肯定不是实数（因为负数不可能有实的平方根)，不过它们还是良数。总之,在从自然数到实数的过渡中已经不得不做若干次抽象，所需要的进一步抽象只是在实数系之外再加进另一个数，以及由 i 与实数相乘和相加形成的所有的数。数 i 作为 -1 的平方根:

$$i^2=-1$$

这样造出的扩充的数系,叫做复数系,其一般元素具有如下的形式:

$$a+bi$$

其中 a 和 b 都是实数。特别是当 $a=0$、$b=\pm\sqrt{2}$ 时此式给出上面考虑过的第一个方程的解。

最初,复数概念看上去有点令人迷惑不解。人们已经习惯于认为负数实际上没有平方根。尽管"复数"无疑是逻辑上自洽的,但它们或许只不过是为了数学上的方便而引入的一种形式的工具。在数学上复数肯定是方便的！不仅取平方根有成问题了，而且取立方根、五次方根及任意复数(也许零除外)的任意复数次幂等等也确实都不成问题了。此外，任意变次的多项式方程现在可以用完全系统的方式求解。大量以前没有意料到的新性质显出无比威力,而且格外优美。复数系在抽象数学观念的王国里占据了显赫的位置,对此不可能还有怀疑。况且,复数并不单单是一种"方便"，它们有生存的权利。然而人们可能依然留恋于这样的想法，即复数并不是"实在"的一部分,它们只是人类思维的创造。

可是,我们一定要问,为什么实数本身给人以具有真实性的印象，而复数却似乎并不存在呢？这一部分是由于不熟悉。我们已习惯于用实数（或至少用有限位小数)进行计算,从很小的时候起便与它们接触。但我们即使遇到复数,也是在很晚的时候。更重要的一个原因是,我们感到物理测量,特别是空间和时间的测量，用的都是实数;而对复数系来说，并

没有如此明显的物理实体能“感觉”到它们。

至少经典物理学看来是这样。随着量子力学的出现，情况变了。因为复数在量子理论的一条最基本的公理中起决定性作用。尽管这一事实对亚微观世界物理学是重要的，它在宏观尺度上却渐渐失去了意义。然而复数的作用还是能够在任意尺度物理现象的本质中领悟出来——特别是涉及相对论的那些现象。的确，我们这个世界的几何要比它乍看上去更“复”。

复数的几何

要说明何以如此，让我们先指出用普通几何学表示复数的标准方法。我们考察一个有笛卡儿坐标轴 x、y 的欧氏平面。复数 $\zeta=x+iy$(x 和 y 都是实数)在这个平面上(叫做 ζ 的阿甘德平面)由坐标为 (x, y)的点代表。对于复数的和、差、积、商都有简单的几何法则。

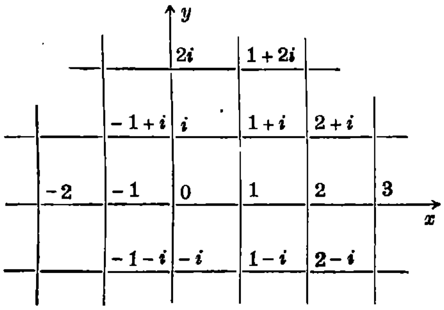

图1　复数在阿甘德平面上的表示

这样看来，平面世界可用复数系几何描述。但是这和我们的三维空间、一维时间的世界有什么关系呢？一种答案要到量子力学的所谓线性迭加基本原理中去寻找。如果A和B表示量子态，则对于每一对复数α和β (α, β 不全为零)，都有一个表为 $\alpha A+\beta B$ 的新态;这里对每个不同的比率 $\alpha:\beta$，我们都得出一种物理上不同情形。尽管这一规则是相当形式的和抽象的，但它与空时几何之间却存在着外表上脆弱、我却认为基本的联系。

这可以在最初等水平上从电子的自旋态看出。每一(纯)自旋态可由空间指向表示——这里电子被看作是绕这一指向依右手定则自旋。假设A是指向上的态，B是指向向下的态，那么其它任意自旋指向都表为 $\alpha A+\beta B$。因而，在空间指向与复数偶的比率 $\alpha:\beta$ 之间存在着一一对应关系。

现在，这样一个比率和单单一个复数之间唯一的区别，就是前者也包括了无限大（即当 $\beta=0$ 时)。这些比率的空间可以表为黎曼球面 S，它与阿甘德平面P之间的联系如下。假设垂直于平面P的第三轴(Z轴) 通过原点 0，取球面S具有单位半经且中心位于O点；正Z轴与球面S轴相交于S的北极N点。考虑一下P平面上代表复数 ζ 的点R。直线 RN (如有必要可延长之)与S相交于N点之外唯一的一点Q(测地投影)。点Q则在S上代表复数ζ,这里ζ现在被看作是一个比率(例如 $\alpha:\beta$)，而N点则代表 $\zeta=\infty$。

就我们现在的目的来说，以上这种对应的意义就在于,如果我们设想电子位于O点,则每个能自旋态 $\alpha A+\beta B$ 都可以由S上的唯一的一个点所代表，即(定向的) 自旋轴与S相交的那一点。业已证明，这个点恰好就是代表比率 $\alpha:\beta$ 的Q点。

这样，在空间指向与复数用于量子的迭加原理这一事实之间,我们便有了一个值得注意的纽带。可以看出，复数系的二维性是与空间的三维性密切相关的。

这种对应关系还可进一步深入。现在设想一个观察者位于球面S的中心 O。他时时张望天空，并把他所看到的每颗星都用在该方向上S的点来表示。用这个办法他可以赋于每颗星一个复数(比率) ζ 作为它的坐标。我们再设想处于任一运动状态的

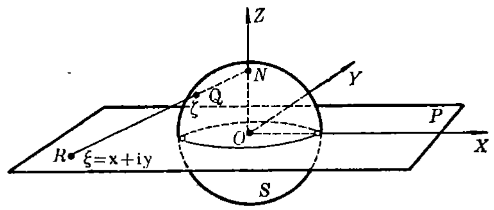

图2　从黎曼球面到阿甘德平面的测地投影

第二个观察者，他总是在观察到星星的那一瞬间与第一个观察者重合。第二个观察者有自己的参考球面 S,并得到另外一个复数 ζ' 给星星作标记。ζ 和 ζ' 之间的对应关系由以下非常简单的公式给出:

$$\zeta'=\frac{\kappa\zeta+\lambda}{\mu\zeta+\nu},$$

其中 κ, λ, μ, ν 都是复参数，它们确定了两个观察者之间的相对运动及其方向。这个公式考虑到这两个观察者有可能彼此相对作旋转运动，也正确地把快速运动观察者之间的相对论性变换及光速有限性考虑在内。

这个公式尤其值得注意的是，它是所谓“全纯”的。这意味着它是完全由 $\zeta=x+iy$ 解析地表达的,

所谓复共轭 $\zeta=x-y$ 丝毫没有涉及。这种全纯性质是重要的，它的出现只是由于问题已根据相对论正确作了处理；在牛顿理论中出现不了这样的结果。复分析的全部威力和优美只有考虑到全纯性质才能真正体现出来。在此我们开始看到的，正是相对论的空时几何与复空间的全纯几何之间富有成效的交流的第一步。

扭　量*

实际上，我们刚才研究了光子空间几何的一个方面。那些进入我们两位观察者眼睛的光子是用复数作全纯式的标记，这是第一个迹象表明所有可能的空子的空间实际上是一个复空间。就是说不同的（经典）光子态可以用复参数全纯地描述。光子是一种无质量粒子。所有无质量粒子都以光速运动，但光子与其它此种粒子的区别在于：它绕运动方面的自旋大小为 $\hbar$；其它粒子的自旋值则是 $\hbar$ 的不同倍数。无质量粒子可以直观地用空时中所画直线即世界线来体现。但这不是严格准确的，因为自旋不为零的粒子并不完全定域。更准确地（经典的）无质量粒子的状态，应当用其能量、动量及围绕某原点的相对论性角动量来描述。所有这些信息已被证明可以“编码”为某种叫做扭量的复数量；这种扭量（全纯地）依赖于四个复数参量。

这些扭量可作为初始要素，用以探讨一种代替时空点作用的物理学。我们用扭量来描写粒子，代替空时轨迹的描述。我们可认为扭量在概念上位于点与粒子之间。点本身要从扭量造出，粒子也同样如此。已证明：为了代替量子力学中粒子的波函数，我们需要一个或多个扭量的全纯函数。单扭量粒子都是无质量的（光子、引力系……）；双扭量粒子看来是“轻子”（电子、μ 介子……）；三扭量粒子则为“强子”（质子、中子、π 介子、κ 介子……）；同时也可能有四扭量粒子等等，它们形成更多的粒子家族（例如新发现的 J/ψ 粒子）。此外，在必要时所用扭量的数目可以表观上增加，使 n 扭量粒子也能起 $(n+1)$ 扭量粒子的作用。因此，通常的空时描述完全被取消掉了，虽然必要时也可以翻译为空时术语。到目前为止，这样提出的基本粒子指述一定会被认为有很大的臆测性，然而有关的数学看来却很迷人——而所提出的分类方案看来也与标准的基本粒子理论的已知结果也相互吻合。

我的论点是：我们这个世界用扭量来描述比用空时描述更为基本。在经典的宏观尺度上而不涉及广义相对论时，这两种描述是等价的；但对量子粒子的微观世界（例如在 10^{-13} 厘米或更小的尺度上），我认为扭量描述最终将给出一个更为精确的图象。而且，扭量的几何从根本上就是复的，它正在实现量子力学原理和几何观念的实质性结合。

下一步向何处去？

比复数更复杂的数怎么样呢？数学上定义了诸如四元数、八元数及其它各种不同种类的对象。但是每一次都证明必须牺牲一些算术定则。假如我们希望这些定则原封不动地保留下来，我们就只能前进到复数为止。况且，如不保留这些算术定则，看来就不可能得到合适的函数理论。

具有讽刺意味的是，以二维连续性为标志的复数，第一次以基本方法引入物理学时，却是为了对具有不连续（分立）性现象进行数学描述。量子理论，就象它的名称所意味的，是立意要处理分立现象的理论，却又以适用复连续统作为基础。这并不象它初看上去那么自相矛盾。在复连续性和分立性之间存在着一定的亲缘关系——反映了量子物理中波粒二象性的一种二重性。全纯函数显示出一种突变函数所完全没有的刚性。在标准的量子理论中已经从象是沼泽的复连续性中显出了分立性。对于扭量理论，可以说更是如此。特别是，电荷以某一定值的整倍数出现这个事实在此理论中得到了解释——这是全纯函数刚性的一个推论。

所以，也许我们最终将兜一个圈子。通过将数的概念从我们有直接经验的自然数开始尽可能地予以推广，同时最大限度地保留运算性质，我们宛如又回到似乎已被我们遗忘的分立性。或许，物理定律最终具有基本上是分立的简单组合本性——但就我们目前的知识水平而言，似乎正是复连续统为更深入地理解物理世界提供最清晰的航线。

[*Encyclopedia of Ignorance*]

---

* twistor，本文作者所发明的一种新型数学量，与向量（vector），张量（tensor）和旋量（spinor）并列，它的中译名我们建议叫作“扭量”。——译者