《工程数学》习题一

1.

解：用常微分方程分离变量法

$$\frac{dy}{y(1-y/K)} = rdx$$

由于

$$\frac{1}{y(1-y/K)} = \frac{K}{y(K-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}$$

所以由分离变量法等式两端积分得

$$\ln\frac{y}{K-y} = rx + c_0$$

两端取指数函数，

$$\frac{y}{K-y} = \exp(rx + c_0)$$

整理得

$$y(x) = \frac{K}{1 + \exp(-rx - c_0)}$$

将初值条件代入，得

$$\exp(-c_0) = \frac{K}{y_0} - 1$$

所以

$$y(x) = \frac{K}{1 + (K/y_0 - 1)\exp(-rx)} \text{ 或 } y(x) = \frac{Ky_0}{y_0 + (K - y_0)\exp(-rx)}$$

2.

解：做自变量变换，令 $x = \exp(t)$，即 $t = \ln x$，由于 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$。应用复合函数求导公式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

代入欧拉方程得

$$\frac{d^2y}{dt^2} - n^2y = 0$$

应用二阶常微分方程求解公式得

$$y(t) = C_1\exp(nt) + C_2\exp(-nt)$$

将自变量还原得

$$y(x) = C_1x^n + C_2x^{-n}$$

3.

解：由于是偶函数，展开为余弦级数，设

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx$$

由正交性得

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{2\pi}[-(\pi - x)^2]\big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos kx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}[(\pi - x)\frac{1}{k}\sin kx]\big|_0^{\pi} + \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}[-\cos kx]\big|_0^{\pi} = \frac{2}{k^2\pi}[1 - \cos k\pi] = \frac{2}{\pi k^2}[1 - (-1)^k]$$

有奇数项系数非零

$$a_{2m-1} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{(2m-1)^2}, \ \ (m = 1,2,\cdots)$$

所以

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$$

求满足下列方程的二元函数：$u(x, y)$

4.

解：(1)将方程两端对变量 x 积分，得 $u(x, y) = g(y)$，这里 $g(x)$是任意函数；

(2)将方程两端先对变量 y 积分，得 $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1(x)$；再将两端对 x 积分得

$$u(x, y) = \int f_1(x)dx + g(y)$$

记 $f(x) = \int f_1(x)dx$，得 $u(x, y) = f(x) + g(y)$；

(3)将方程两端先对变量 y 积分，得一阶方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u = f(x)$$

参考一阶常微分方程求解公式，得

$$u(x, y) = \exp(-x)[\int \exp(x)f(x) + g(y)]$$

《工程数学》习题二

1.

解：显然固有值 $\lambda \geq 0$，方程有通解

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

利用边界条件得

$$B = 0，A\cos\sqrt{\lambda}l + B\sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

联立得线性方程组

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos\sqrt{\lambda}l & \sin\sqrt{\lambda}l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

方程组有非零解条件为系数矩阵行列式为零，即

$$\cos\sqrt{\lambda}l = 0$$

由余弦函数零点得：

$$\sqrt{\lambda}l = \frac{2n+1}{2}\pi$$

所以固有值和固有函数分别为

$$\lambda_n = [\frac{(2n+1)\pi}{2l}]^2, \quad X_n = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

2.

解：对应的固有值和固有函数分别为

$$\lambda_n = [\frac{(2n+1)\pi}{2l}]^2, \quad X_n = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x, \quad (n=1,2,\cdots)$$

波动方程通解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t + b_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t]\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

将初值条件代入得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x = 3\sin\frac{3\pi}{2l}x + 6\sin\frac{5\pi}{2l}x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)\pi a}{2l}b_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x = 0$$

对比级数两端，待定系数法得

$$a_1 = 3, \ a_2 = 6, \ a_n = 0, \ (n\neq 1, n\neq 2), \ b_n = 0, \ (n=1,2,\cdots)$$

所以

$$u(x,t) = 3\sin\frac{3\pi}{2l}at\cdot\sin\frac{3\pi}{2l}x + 6\sin\frac{5\pi}{2l}at\cdot\sin\frac{5\pi}{2l}x$$

3.

解：对应的固有值和固有函数分别为

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, \quad X_n = \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad (n=1,2,\cdots)$$

热传导方程通解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}B_n\exp[-(\frac{n\pi}{l}a)^2 t]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

将初值条件代入得

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x = x(l-x)$$

利用固有函数正交性得

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

应用分部积分法，令

$$u = x(l-x), \quad v'' = \sin\frac{n\pi}{l}x$$

于是有

$$u'' = -2, \quad v = -(\frac{l}{n\pi})^2\sin\frac{n\pi}{l}x$$

则积分

$$\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx = \int_0^l uv''dx = [uv'-u'v]\Big|_0^l + \int_0^l u''vdx$$

所以

$$B_n = \frac{4}{l}(\frac{l}{n\pi})^2 \int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{4}{l}(\frac{l}{n\pi})^3[1-\cos n\pi]$$

故热传导方程解为

$$u(x,t) = \frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^3}\exp(\frac{(2m-1)^2\pi^2a^2}{l^2}t)\sin\frac{(2m-1))\pi}{l}x$$

4.

解：用分离变量法，令 $u(x,y) = X(x)Y(y)$ 代入方程，整理得

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -\lambda$$

导出常微分方程

$$Y'' + \lambda Y = 0，\quad X'' - \lambda X = 0$$

利用 Y 方向的齐次边界条件构造固有值问题

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(1) = 0 \end{cases}$$

固有值和固有函数分别为

$$\lambda_n = (n\pi)^2，\quad Y_n = \sin n\pi y,\ (n=1,2,\cdots)$$

将特征值代入 x 方向常微分方程得

$$X'' - (n\pi)^2 X = 0$$

通解为

$$X_n = a_n\sinh(n\pi x) + b_n\cosh(n\pi x)$$

将拉普拉斯方程基本解

$$u_n(x,y) = [a_n\sinh(n\pi x) + b_n\cosh(n\pi x)]\sin n\pi y$$

叠加，得拉普拉斯方程通解

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\sinh(n\pi x) + b_n\cosh(n\pi x)]\sin n\pi y$$

应用 X 方向的边界条件之一，

$$u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi y = 0$$

知 $b_n = 0,\ (n=1,2,\cdots)$。再应用 X 方向另一边界条件

$$u(1,y) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sinh(n\pi)\sin n\pi y = \sin\pi y$$

确定系数

$$a_2 = \frac{1}{\sinh 2\pi}, a_n = 0,\ (n\neq 2)$$

故原方程解

$$u(x,y) = \frac{\sinh(2\pi x)}{\sinh 2\pi}\sin 2\pi y$$

《工程数学》习题三

1.

证：将条件 $\Phi(2\pi) = \Phi(0)，\ \Phi'(2\pi) = \Phi'(0)$ 代入表达式

$$\Phi(\theta) = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta$$

得

$$A = A\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,2\pi \text{ , } B = -A\sin\sqrt{\lambda}\,2\pi + B\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi$$

联立得线性方程组

$$\begin{bmatrix} \cos 2\pi\sqrt{\lambda} - 1 & \sin 2\pi\sqrt{\lambda} \\ -\sin 2\pi\sqrt{\lambda} & \cos 2\pi\sqrt{\lambda} - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

方程组有非零解的条件为系数矩阵行列式为零，即

$$[\cos 2\pi\sqrt{\lambda} - 1]^2 + \sin^2 2\pi\sqrt{\lambda} = 0$$

整理得

$$\cos 2\pi\sqrt{\lambda} = 1$$

利用余弦函数的最大值点得

$$2\pi\sqrt{\lambda} = 2n\pi$$

所以

$$\lambda_n = n^2 \text{ , } \Phi_n(\theta) = A\cos n\theta + B\sin n\theta \text{ , （} A^2 + B^2 \neq 0 \text{）}$$

2．

解：做自变量变换，令 $r = \exp(t)$，即 $t = \ln r$，代入方程化简得

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - n^2 R = 0$$

求解得

$$R = C_1\exp(nt) + C_2\exp(-nt)$$

将 $r = \exp(t)$ 代入得

$$R = C_1 r^n + C_2 r^{-n}$$

3．

解：利用圆域内拉普拉斯方程求解公式

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n[a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta]$$

将边界条件代入得

$$u(r_0,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta]r_0^n = A\sin 2\theta$$

对比两端系数得

$$b_2 r_0^2 = A, \ b_n = 0, (n \neq 2) \text{ , } a_n = 0, \ (n = 1,2,\cdots)$$

故原拉普拉斯方程解

$$u(r,\theta) = \frac{A}{r_0^2}r^2\sin 2\theta$$

4．

解：利用圆域内拉普拉斯方程求解公式

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n[a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta]$$

将边界条件代入得

$$u(1,\theta)\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta] = \cos 2\theta$$

对比两端系数得

$$a_2 = 1 \ a_n = 0, (n \neq 2) \text{ , } b_n = 0, \ (n = 1,2,\cdots)$$

故原拉普拉斯方程解

$$u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta$$

《工程数学》习题四

1.

解：令 $\lambda = \dfrac{2\mu E}{\hbar^2}$，则定态薛定谔方程为，$\psi'' + \lambda\psi = 0$，结合齐次边界条件，得

固有值和固有函数

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{L})^2, \quad \psi_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

由等式，$\lambda_n = \dfrac{2\mu E_n}{\hbar^2}$ 解得 $E_n = \dfrac{\hbar^2}{2\mu}\lambda_n = \dfrac{\hbar^2}{2\mu}(\dfrac{n\pi}{L})^2$。由规一化条件

$$\int_0^L B_n^2 \sin^2\frac{n\pi}{L}x\,dx = B_n^2\frac{L}{2} = 1$$

得规一化系数，$B_n = \sqrt{\dfrac{2}{L}}$。所以波函数

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

2.

解法 1：利用习题 1 结论，做自变量平移变换: $x = z + L/2$。代入波函数得

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi}{L}(z + L/2)$$

应用正弦函数和角公式，得

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}}[\sin\frac{n\pi}{L}z\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{L}z]$$

n 为偶数时，有 $\sin\dfrac{n\pi}{2} = 0$，此时，$\psi_n(z) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\dfrac{n\pi}{L}z$；

n 为奇数时，有 $\cos\dfrac{n\pi}{2} = 0$，此时，$\psi_n(z) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\cos\dfrac{n\pi}{L}x$。

解法 2：令 $\lambda = \dfrac{2\mu E}{\hbar^2}$，方程有通解

$$\psi(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

应用边界条件得齐次线性代数方程

$$\begin{bmatrix} \cos\sqrt{\lambda}L/2 & -\sin\sqrt{\lambda}L/2 \\ \cos\sqrt{\lambda}L/2 & \sin\sqrt{\lambda}L/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

为了使得 A 和 B 不全为零，取系数矩阵行列式为零，即

$$2\cos\frac{\sqrt{\lambda}L}{2}\sin\frac{\sqrt{\lambda}L}{2} = 0$$

由余弦函数零点，得

$$\frac{\sqrt{\lambda}L}{2} = \frac{2n+1}{2}\pi , \quad \lambda_n = (\frac{2n+1}{L}\pi)^2$$

由正弦函数零点，得

$$\frac{\sqrt{\lambda}L}{2} = n\pi , \quad \lambda_n = (\frac{2n}{L}\pi)^2$$

第一种情况代入线性代数方程，得 B=0，A 为任意非零数；第二种情况代入线性代数方程得 A=0，B 为任意非零数。再由规一化条件得两种情况下波函数分别为

$$\psi_{2n+1}(z) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{L}x , \quad \psi_{2n}(z) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{2n\pi}{L}x$$

调整指标，对应的固有值分别为

$$\lambda_{2n+1} = (\frac{2n+1}{L}\pi)^2 , \quad \lambda_{2n} = (\frac{2n}{L}\pi)^2$$

3.

解：应用分离变量法，设 $\Psi(x,t) = \psi(x)f(t)$，代入方程整理得

$$i\hbar\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{\psi(x)}[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}]\psi(x) = E$$

由此得常微分方程

$$i\hbar\frac{d}{dt}f(t) = Ef(t) , \quad -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x)$$

第一个常微分方程有特解：

$$f(t) = \exp(-iEt/\hbar)$$

第二个常微分方程为能量固有值问题，由

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu}(\frac{n\pi}{a})^2 , \quad \psi_n = \sin\frac{n\pi}{a}x , \quad (n=1,2,\cdots)$$

原问题基本解

$$\Psi_n(x,t) = \exp(-\frac{iE_n}{\hbar}t)\sin\frac{n\pi}{a}x , \quad (n=1,2,\cdots)$$

原问题级数解

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp(-\frac{iE_n}{\hbar}t)\sin\frac{n\pi}{a}x$$

4.

证明：应用常微分方程得

$$H_m(x)[\exp(-x^2)H_n'(x)]' + \lambda_n\exp(-x^2)H_m(x)H_n(x) = 0$$

$$H_n(x)[\exp(-x^2)H_m'(x)]' + \lambda_m\exp(-x^2)H_n(x)H_m(x) = 0$$

将两式相减，并积分得

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)H_m(x)H_n(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}H_n(x)[\exp(-x^2)H_m'(x)]'dx - \int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)[\exp(-x^2)H_n'(x)]'dx$$

利用分部积分法得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(x)[\exp(-x^2)H_m'(x)]'dx = [H_n\exp(-x^2)H_m']_0^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)H_m'H_n'dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)[\exp(-x^2)H_n'(x)]'dx = [H_m\exp(-x^2)H_n']_0^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)H_n'H_m'dx$$

两式相减右端得零，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) dx = 0，（n \neq m）$$

《工程数学》习题五

1.

解：做自变量变换，令 $r = \exp(t)$，即 $t = \ln r$，则方程化为

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{dR}{dt} - l(l+1)R = 0$$

求解得

$$R = C_1 \exp(lt) + C_2 \exp(-(l+1)t)$$

利用变换得

$$R = C_1 r^l + C_2 r^{-(l+1)}$$

2.

证明：应用乘积函数求高阶导数的莱布尼兹公式，得

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [(-1)^k e^{-x}][\frac{n!}{k!} x^k]$$

所以

$$e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = e^x \sum C_n^k [(-1)^k e^{-x}][\frac{n!}{k!} x^k] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{n!}{k!} x^k = L_n(x)$$

3．证明拉盖多项式的正交性：$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0$，（$m \neq n$）

证：由于 n 阶拉盖多项式 $L_n(x)$ 满足微分方程

$$xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0$$

将方程左右同乘负指数函数，并简化得

$$[xe^{-x} L_n']' + ne^{-x} L_n = 0$$

同理有 m 阶拉盖多项式 $L_m(x)$ 满足微分方程

$$[xe^{-x} L_m']' + me^{-x} L_m = 0$$

由两个等式得

$$L_m [xe^{-x} L_n']' + ne^{-x} L_m L_n = 0，\quad L_n [xe^{-x} L_m']' + me^{-x} L_n L_m = 0$$

将两式相减并积分得

$$(n-m)\int_0^{+\infty} e^{-x} L_m L_n dx = \int_0^{+\infty} (L_n [xe^{-x} L_m']' - L_m [xe^{-x} L_n']') dx$$

利用分部积分公式

$$\int_0^{+\infty} (L_n [xe^{-x} L_m']' - L_m [xe^{-x} L_n']') dx = (L_n [xe^{-x} L_m'] - L_m [xe^{-x} L_n'])\Big|_0^{+\infty}$$

$$- \int_0^{+\infty} [xe^{-x} L_m' L_n' - xe^{-x} L_n' L_n'] dx = 0$$

所以

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0，（m \neq n）$$

4.

证明：将幂级数 $L_n^m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 代入方程，由于

$$nL_n^m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} na_k x^k$$

一阶导数部分

$$(m+1-x)[L_n^m(x)]' = (m+1-x)\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}$$

$$= (m+1)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k$$

二阶导数部分

$$x[L_n^m(x)]'' = x\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)ka_{k+1}x^k$$

分别代入方程，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(n-k)a_k + (k+1)(k+1+m)a_{k+1}]x^k = 0$$

比较两端，知系数满足

$$(n-k)a_k + (k+1)(k+1+m)a_{k+1} = 0 \qquad\qquad (*)$$

由于给定级数的通项系数，$a_k = (-1)^k \dfrac{(m+n)!}{k!(n-k)!(m+k)!}$。而

$$(n-k)a_k = (-1)^k \frac{(n-k)(m+n)!}{k!(n-k)!(m+k)!} = (-1)^k \frac{(m+n)!}{k!(n-k-1)!(m+k)!}$$

$$(k+1)(k+1+m)a_{k+1} = (-1)^{k+1}\frac{(k+1)(k+1+m)(m+n)!}{(k+1)!(n-k-1)!(m+k+1)!}$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{(m+n)!}{k!(n-k-1)!(m+k)!}$$

将其代入式（∗）得恒等式，故级数满足常微分方程。该表达式就是方程的解。

《工程数学》习题六

1.

解：由让德多项式微分形式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，令 $\omega_n = (x^2-1)^n$。

用分部积分公式

$$\int_{-1}^{1}[\omega_1']^2 dx = [\omega_1'\ \omega_1]\big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\omega_1''\ \omega_1 dx = -2\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx = \frac{8}{3}$$

所以

$$\int_{-1}^{1}[P_1(x)]^2 dx = \frac{1}{2\times 2}\int_{-1}^{1}[\omega_1']^2 dx = \frac{2}{3}$$

而

$$\int_{-1}^{1}[\omega_2'']^2 dx = [\omega_2''\ \omega_2' - \omega_2'''\ \omega_2]\big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\omega_2^{(4)}\omega_2 dx = 4!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2 dx = 16\times\frac{8}{5}$$

所以

$$\int_{-1}^{1}[P_2(x)]^2 dx = \frac{1}{2^2\times 2^2\times 2\times 2}\int_{-1}^{1}[\omega_1']^2 dx = \frac{2}{5}$$

2.

证：由勒让德多项式递推关系

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

以 n 代替 $(n+1)$ 并将等式两端同乘以 P_n，得

$$n[P_n(x)]^2 - (2n-1)xP_n(x)P_{n-1}(x) + (n-1)P_n(x)P_{n-2}(x) = 0$$

积分得

$$n\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = (2n-1)\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_{n-1}(x)dx$$

再将递推关系变型

$$xP_n = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1} + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}$$

代入，得

$$n\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = n\frac{(2n-1)}{2n+1}\int_{-1}^{1}[P_{n-1}(x)]^2 dx$$

故

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1}[P_{n-1}(x)]^2 dx = \cdots = \frac{1}{2n+1}\int_{-1}^{+1}[P_0(x)]dx = \frac{2}{2n+1}$$

3.

证：由于 $P_n(x)$ 满足勒让德方程

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0$$

写成等价形式

$$[(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n = 0$$

同理 $P_m(x)$ 满足

$$[(1-x^2)P_m'(x)]' + m(m+1)P_m = 0$$

由此得

$$P_m[(1-x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_mP_n = 0$$
$$P_n[(1-x^2)P_m'(x)]' + m(m+1)P_nP_m = 0$$

将两式相减差积分，得

$$[n(n+1)-m(m+1)]\int_{-1}^{+1}P_mP_n dx = \int_{-1}^{+1}(P_m[(1-x^2)P_n']' - P_n[(1-x^2)P_m']')dx$$

应用分部积分公式得

$$\int_{-1}^{+1}(P_m[(1-x^2)P_n']' - P_n[(1-x^2)P_m']')dx = (P_m[(1-x^2)P_n'] - P_n[(1-x^2)P_m'])\Big|_{-1}^{+1}$$

$$-\int_{-1}^{+1}[(1-x^2)P_m'P_n' - (1-x^2)P_n'P_m']dx = 0$$

故

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_m(x)dx = 0, (m \neq n)$$

4.

解：当 $k<n$ 时，有

$$x^k = \sum_{j=0}^{k}c_jP_j(x)$$

利用勒让德多项式正交性，得

$$\int_{-1}^{+1} x^k P_n(x)dx = 0, \ (k < n)$$

当 $k = n$ 时，有

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} c_j P_j(x)$$

参考勒让德多项式微分表达式，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，最高项系数为

$$\frac{(2n-1)!!}{n!}$$

所以 $c_n = \dfrac{n!}{(2n-1)!!}$，故

$$\int_{-1}^{+1} x^n P_n(x)dx = \frac{n!}{(2n-1)!!} \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = 2\frac{n!}{(2n+1)!!}$$

《工程数学》习题七

1.

解：先将 $(2+3x)$ 表示为勒让德多项式组合形式，

$$(2+3x) = 2P_0 + 3P_1$$

所以

$$\int_{-1}^{+1} (2+3x)P_n(x)dx = \int_{-1}^{+1} [2P_0 P_n + 3P_1 P_n]dx$$

利用正交性得

$$\int_{-1}^{+1} (2+3x)P_n(x)dx = \begin{cases} 4, & n=0 \\ 2, & n=1 \\ 0, & n \neq 0,1 \end{cases}$$

2.

解：用分离变量法，令 $u = F(r)G(\theta)$，代入方程，得

$$G(r^2 F'' + 2rF') + F(G'' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}G') = 0$$

上式各项同除 FG，得

$$\frac{r^2 F'' + 2rF'}{F} + \frac{G'' + c\tan G'}{G} = 0$$

令

$$\frac{G'' + c\tan G'}{G} = -\frac{r^2 F'' + 2rF'}{F} = -\lambda$$

得常微分方程

$$G'' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}G' + \lambda G = 0$$

$$r^2 F'' + 2rF' - \lambda F = 0$$

在第一个方程中，令 $\cos\theta = x$，$y(x) = y(\cos\theta) = G(\theta)$ 则方程化为勒让德方程

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

当 $\lambda = n(n+1)$ 时，有 n 阶勒让德多项式 $P_n(x)$ 解。将 $\lambda = n(n+1)$ 代入第二个方程，得

$$r^2 F'' + 2rF' - n(n+1)F = 0$$

这是欧拉方程，求解得

$$F_n(r) = C_n r^n$$

所以原方程有基本解 $u_n = C_n r^n P_n(\cos\theta)$，由叠加原理得通解如下

$$u(r,\theta) = \sum_{b=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta)$$

利用边界条件，得

$$u(1,\theta) = \sum_{b=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta) = \cos^2\theta$$

令 $\cos\theta = x$，由于

$$P_0 = 1, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

所以

$$x^2 = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_0$$

即有

$$\sum_{b=0}^{\infty} C_n P_n(x) = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_0$$

对比系数，得

$$C_0 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{2}{3}, \quad C_n = 0, \ (n \neq 0,2)$$

最后得边值问题的解为

$$u(r,\theta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}r^2 P_2(\cos\theta) = \frac{1}{3} + r^2(\cos^2\theta - \frac{1}{3})$$

3.

证明：由 n 阶贝塞尔函数的级数形式

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! \Gamma(n+m+1)}$$

得

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{-1/2+2m}}{2^{-1/2+2m} m! \Gamma(-1/2+m+1)}$$

利用伽玛函数的特殊值 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$，得

$$\Gamma(m-1/2+1) = (m-1/2)(m-3/2)\cdots(1/2)\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{2^m}(2m-1)(2m-3)\cdots 1\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^m}(2m-1)!!$$

所以

$$2^{2m}m!\Gamma(-1/2+m+1) = \sqrt{\pi}(2m)!!(2m-1)!! = \sqrt{\pi}(2m)!$$

由于

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m}$$

故

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{-1/2+2m}}{2^{-1/2+2m}m!\Gamma(-1/2+m+1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

4．

证：利用贝塞尔函数级数表达式得

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = \frac{d}{dx}[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}] = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 2m\, x^{2m-1}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}$$

令 $m = k+1$，并消去公因式得

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{2^{n+1+2k}k!\Gamma(n+1+k+1)} = -x^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{n+1+2k}}{2^{n+1+2k}k!\Gamma(n+1+k+1)}$$

$$= -x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{n+1+2m}}{2^{n+1+2m}m!\Gamma(n+1+m+1)} = -x^n J_{n+1}(x)$$