概率统计疑难分析系列讲座之:

多维随机变量&随机变量的数字特征疑难分析

电子科技大学
杨宇明
数学科学学院

主讲：杨宇明

2017 年 12 月 7 日

两个专题

(I) 多维随机变量的概率计算问题

(II) 随机变量函数的数学期望

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

专题一、多维随机变量的概率计算问题

(A) 利用 第一章的概念、性质和公式；

两个核心问题：

1. 概率怎么算？
2. 算概率的东西怎么算？

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

专题一、多维随机变量的概率计算问题

(A) 利用 第一章的概念、性质和公式；

(B) 利用 联合分布函数计算；

两个核心问题：

1. 概率怎么算？
2. 算概率的东西怎么算？

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

专题一、多维随机变量的概率计算问题

两个核心问题：

1. 概率怎么算？
2. 算概率的东西怎么算？

(A) 利用 第一章的概念、性质和公式；

(B) 利用 联合分布函数计算；

(C) 利用 联合分布律计算；

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

专题一、多维随机变量的概率计算问题

两个核心问题：

1. 概率怎么算？
2. 算概率的东西怎么算？

(A) 利用 第一章的概念、性质和公式；

(B) 利用 联合分布函数计算；

(C) 利用 联合分布律计算；

(D) 利用 联合概率密度计算；

电子科技大学 何子明 数学科学学院

专题一、多维随机变量的概率计算问题

两个核心问题：

1. 概率怎么算？
2. 算概率的东西怎么算？

(A) 利用 第一章的概念、性质和公式；

(B) 利用 联合分布函数计算；

(C) 利用 联合分布律计算；

(D) 利用 联合概率密度计算；

(E) 利用 边缘分布计算；

电子科技大学 数学科学学院 石宇明

专题一、多维随机变量的概率计算问题

两个核心问题：

1. 概率怎么算？
2. 算概率的东西怎么算？

(A) 利用 第一章的概念、性质和公式；

(B) 利用 联合分布函数计算；

(C) 利用 联合分布律计算；

(D) 利用 联合概率密度计算；

(E) 利用 边缘分布计算；

(F) 利用 独立性计算；

电子科技大学 何学明 数学科学学院

专题一、多维随机变量的概率计算问题

两个核心问题：

1. 概率怎么算？
2. 算概率的东西怎么算？

(A) 利用 第一章的概念、性质和公式；

(B) 利用 联合分布函数计算；

(C) 利用 联合分布律计算；

(D) 利用 联合概率密度计算；

(E) 利用 边缘分布计算；

(F) 利用 独立性计算；

(G) 利用 条件分布计算；

电子科技大学 数学科学学院 何宇明

专题一、多维随机变量的概率计算问题

两个核心问题：

1. 概率怎么算？
2. 算概率的东西怎么算？

(A) 利用 第一章的概念、性质和公式；

(B) 利用 联合分布函数计算；

(C) 利用 联合分布律计算；

(D) 利用 联合概率密度计算；

(E) 利用 边缘分布计算；

(F) 利用 独立性计算；

(G) 利用 条件分布计算；

(H) 利用 常见分布特殊计算；

电子科技大学 何字明 数学科学学院

专题二、随机变量函数的数学期望(这是第四章的核心概念!!!)

求随机变量函数的数学期望的主要方法:

(A)利用 定义算(先求出函数的分布);

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

专题二、随机变量函数的数学期望(这是第四章的核心概念!!!)

求随机变量函数的数学期望的主要方法:

(A)利用 定义算(先求出函数的分布);

(B)利用 期望的性质来算，特别是性质$E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

专题二、随机变量函数的数学期望(这是第四章的核心概念!!!)

求随机变量函数的数学期望的主要方法:

(A)利用 定义算(先求出函数的分布);

(B)利用 期望的性质来算，特别是性质$E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$

(C)利用 一元函数的期望公式来算$g(X)$的期望，即:

$$Eg(X) = \begin{cases} \sum_k g(x_k)p_k \\ \int g(x)f(x)dx \end{cases}$$

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

专题二、随机变量函数的数学期望(这是第四章的核心概念!!!)

求随机变量函数的数学期望的主要方法:

(A)利用 定义算(先求出函数的分布);

(B)利用 期望的性质来算，特别是性质$E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$

(C)利用 一元函数的期望公式来算$g(X)$的期望，即：

$$Eg(X) = \begin{cases} \sum_k g(x_k)p_k \\ \int g(x)f(x)dx \end{cases}$$

(D)利用 二元函数的期望公式来算$g(X, Y)$的期望，即：

$$E(G(X, Y)) = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij} \\ \int\int g(x, y)f(x, y)dxdy \end{cases}$$

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

专题二、随机变量函数的数学期望(这是第四章的核心概念!!!)

求随机变量函数的数学期望的主要方法:

(A)利用 定义算(先求出函数的分布);

(B)利用 期望的性质来算，特别是性质$E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$

(C)利用 一元函数的期望公式来算$g(X)$的期望，即:

$$Eg(X) = \begin{cases} \sum_k g(x_k)p_k \\ \int g(x)f(x)dx \end{cases}$$

(D)利用 二元函数的期望公式来算$g(X,Y)$的期望，即:

$$E(G(X,Y)) = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i,y_j)p_{ij} \\ \int\int g(x,y)f(x,y)dxdy \end{cases}$$

(E)利用 常见随机变量数字特征公式算;

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

专题二、随机变量函数的数学期望(这是第四章的核心概念!!!)

求随机变量函数的数学期望的主要方法:

(A)利用 定义算(先求出函数的分布);

(B)利用 期望的性质来算，特别是性质$E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$

(C)利用 一元函数的期望公式来算$g(X)$的期望，即:

$$Eg(X) = \begin{cases} \sum_k g(x_k)p_k \\ \int g(x)f(x)dx \end{cases}$$

(D)利用 二元函数的期望公式来算$g(X, Y)$的期望，即:

$$E(G(X, Y)) = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij} \\ \int\int g(x, y)f(x, y)dxdy \end{cases}$$

(E)利用 常见随机变量数字特征公式算;

请注意: 大多数情况下，求得随机变量或向量的分布是关键!

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 1: 设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<1.96\}$?

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 1：设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<1.96\}$?

分析：Y只有两个取值。可否分情况讨论？怎么讨论？

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 1：设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<1.96\}$?

分析：Y只有两个取值。可否分情况讨论？怎么讨论？

解：按全概率公式：

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 1：设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<1.96\}$?

分析：Y只有两个取值。可否分情况讨论？怎么讨论？

解：按全概率公式：

$$P\{XY \le 1.96\} = P\{XY \le 1.96, Y=0\} + P\{XY \le 1.96, Y=1\}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 1：设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<1.96\}$?

分析：Y只有两个取值。可否分情况讨论？怎么讨论？

解：按全概率公式：

$$\begin{aligned}P\{XY\le 1.96\}=&P\{XY\le 1.96, Y=0\}+P\{XY\le 1.96, Y=1\}\\=&P\{0\le 1.96, Y=0\}+P\{X\le 1.96, Y=1\}\end{aligned}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 1：设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<1.96\}$?

分析：Y只有两个取值。可否分情况讨论？怎么讨论？

解：按全概率公式：

$$
\begin{aligned}
P\{XY \le 1.96\} =& P\{XY \le 1.96, Y=0\} + P\{XY \le 1.96, Y=1\} \\
=& P\{0 \le 1.96, Y=0\} + P\{X \le 1.96, Y=1\} \\
=& 0.5 + P\{X \le 1.96\}P\{Y=1\}
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 1：设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<1.96\}$?

分析：Y只有两个取值。可否分情况讨论？怎么讨论？

解：按全概率公式：

$$
\begin{aligned}
P\{XY \le 1.96\} &= P\{XY \le 1.96, Y=0\} + P\{XY \le 1.96, Y=1\} \\
&= P\{0 \le 1.96, Y=0\} + P\{X \le 1.96, Y=1\} \\
&= 0.5 + P\{X \le 1.96\}P\{Y=1\} \\
&= 0.5 + 0.975/2 = 0.9875
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 1：设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<1.96\}$?

分析：Y只有两个取值。可否分情况讨论？怎么讨论？

解：按全概率公式：

$$\begin{aligned}P\{XY\le 1.96\}=&P\{XY\le 1.96, Y=0\}+P\{XY\le 1.96, Y=1\}\\=&P\{0\le 1.96, Y=0\}+P\{X\le 1.96, Y=1\}\\=&0.5+P\{X\le 1.96\}P\{Y=1\}\\=&0.5+0.975/2=0.9875\end{aligned}$$

进一步，求$P\{XY\le z\}$?怎么计算？

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 2：设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\}$?

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 2：设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\}$?

分析：Y只有两个取值。还是分两种情况讨论。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 2：设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\}$?

分析：Y只有两个取值。还是分两种情况讨论。

解：按全概率公式:

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 2：设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\}$?

分析：Y只有两个取值。还是分两种情况讨论。

解：按全概率公式：

$$P\{XY \leq z\} = P\{XY \leq z, Y=0\} + P\{XY \leq z, Y=1\}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 2：设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\}$?

分析：Y只有两个取值。还是分两种情况讨论。

解：按全概率公式：

$$\begin{aligned} P\{XY \le z\} =& P\{XY \le z, Y=0\} + P\{XY \le z, Y=1\} \\ =& P\{0 \le z, Y=0\} + P\{X \le z, Y=1\} \end{aligned}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 2：设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\}$?

分析：Y只有两个取值。还是分两种情况讨论。

解：按全概率公式：

$$\begin{aligned}P\{XY\le z\} &= P\{XY\le z, Y=0\}+P\{XY\le z, Y=1\}\\ &= P\{0\le z, Y=0\}+P\{X\le z, Y=1\}\\ &= \begin{cases}0.5\Phi(z), & z<0\\ & \end{cases}\end{aligned}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 2：设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\}$?

分析：Y只有两个取值。还是分两种情况讨论。

解：按全概率公式：

$$
\begin{aligned}
P\{XY\le z\} &= P\{XY\le z, Y=0\}+P\{XY\le z, Y=1\}\\
&= P\{0\le z, Y=0\}+P\{X\le z, Y=1\}\\
&= \begin{cases} 0.5\Phi(z), & z<0\\ 0.5+0.5\Phi(z), & z\ge 0\end{cases}
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 2：设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\}$?

分析：Y只有两个取值。还是分两种情况讨论。

解：按全概率公式：

$$\begin{aligned}
P\{XY \le z\} &= P\{XY \le z, Y=0\} + P\{XY \le z, Y=1\} \\
&= P\{0 \le z, Y=0\} + P\{X \le z, Y=1\} \\
&= \begin{cases} 0.5\Phi(z), & z<0 \\ 0.5+0.5\Phi(z), & z \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

若记$F_Z(z)$为随机变量$Z=XY$的分布函数，则$F_Z(z)$间断点个数为?

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 2：设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim N(0,1)$，Y的概率分布为$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=0.5$，求$P\{XY<z\}$?

分析：Y只有两个取值。还是分两种情况讨论。

解：按全概率公式：

$$\begin{aligned} P\{XY \le z\} &= P\{XY \le z, Y=0\} + P\{XY \le z, Y=1\} \\ &= P\{0 \le z, Y=0\} + P\{X \le z, Y=1\} \\ &= \begin{cases} 0.5\Phi(z), & z<0 \\ 0.5+0.5\Phi(z), & z \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

若记$F_Z(z)$为随机变量$Z=XY$的分布函数，则$F_Z(z)$间断点个数为? 答案：一个

典型例题:

例 3: 设随机变量X与Y相互独立，X的概率分布为$P(X=i)=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$,且$Y$的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1,\\ 0, & 其它\end{cases}$$

记$Z=X+Y$.

(1) $P\{Z\le\frac{1}{2}|X=0\}$; (2) 求Z的概率密度$f_Z(z)$。

分析:

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

典型例题:

例 3:设随机变量X与Y相互独立,X的概率分布为$P(X=i)=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$,且$Y$的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1,\\ 0, & 其它\end{cases}$$

记$Z=X+Y$.

(1) $P\{Z\le\frac{1}{2}|X=0\}$; (2) 求Z的概率密度$f_Z(z)$。

分析:

- $P\{X=0\}>0$,根据条件概率定义算;

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

典型例题:

例 3: 设随机变量X与Y相互独立，X的概率分布为$P(X=i)=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$,且$Y$的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1,\\ 0, & 其它\end{cases}$$

记$Z=X+Y$.

(1) $P\{Z\le\frac{1}{2}|X=0\}$; (2) 求Z的概率密度$f_Z(z)$。

分析:

- $P\{X=0\}>0$，根据条件概率定义算;
- 分布函数求导!

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

解：(1) 由条件概率定义：

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1) 由条件概率定义：

$$P\{Z \le \frac{1}{2}|X=0\} = P\{X+Y \le \frac{1}{2}|X=0\}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(1) 由条件概率定义：

$$P\{Z \leq \frac{1}{2}|X=0\} = P\{X+Y \leq \frac{1}{2}|X=0\}$$

$$= P\{Y \leq \frac{1}{2}|X=0\}$$

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

解：(1) 由条件概率定义：

$$
\begin{aligned}
P\{Z \le \frac{1}{2}|X=0\} &= P\{X+Y \le \frac{1}{2}|X=0\} \\
&= P\{Y \le \frac{1}{2}|X=0\} \\
&= P\{Y \le \frac{1}{2}\}
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(1) 由条件概率定义：

$$
\begin{aligned}
P\{Z \leq \frac{1}{2}|X=0\} &= P\{X+Y \leq \frac{1}{2}|X=0\} \\
&= P\{Y \leq \frac{1}{2}|X=0\} \\
&= P\{Y \leq \frac{1}{2}\} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

解：(2) 先求分布函数，再求导

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 先求分布函数，再求导

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 先求分布函数，再求导

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} \\
&= P\{X + Y \leq z\}
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 先求分布函数，再求导

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} \\
&= P\{X + Y \le z\} \\
&= \sum_{i=-1}^{1} P\{X + Y \le z, X = i\}
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 先求分布函数，再求导

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} \\
&= P\{X + Y \le z\} \\
&= \sum_{i=-1}^{1} P\{X + Y \le z, X = i\} \\
&= P\{-1 + Y \le z, X = -1\} + P\{Y \le z, X = 0\} \\
&\quad + P\{1 + Y \le z, X = 1\}
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 先求分布函数，再求导

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) =& P\{Z \le z\} \\
=& P\{X+Y \le z\} \\
=& \sum_{i=-1}^{1} P\{X+Y \le z, X=i\} \\
=& P\{-1+Y \le z, X=-1\} + P\{Y \le z, X=0\} \\
& + P\{1+Y \le z, X=1\} \\
=& \frac{1}{3}(P\{Y-1 \le z\} + P\{Y \le z\} + P\{Y+1 \le z\})
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 先求分布函数，再求导

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) =& P\{Z \le z\} \\
=& P\{X+Y \le z\} \\
=& \sum_{i=-1}^{1} P\{X+Y \le z, X=i\} \\
=& P\{-1+Y \le z, X=-1\} + P\{Y \le z, X=0\} \\
& + P\{1+Y \le z, X=1\} \\
=& \frac{1}{3}(P\{Y-1 \le z\} + P\{Y \le z\} + P\{Y+1 \le z\}) \\
=& \frac{1}{3}\left[F_Y(z+1) + F_Y(z) + F_Y(z-1)\right]
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 再求导

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 再求导

$$f_Z(z) = F_Z'(z)$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

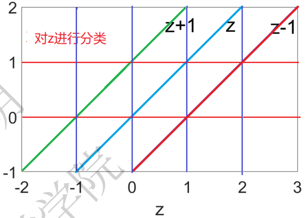
解： (2) 再求导

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) =& F_Z'(z) \\
=& \frac{1}{3}\left[f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)\right]
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨明 数学科学学院

解：(2) 再求导

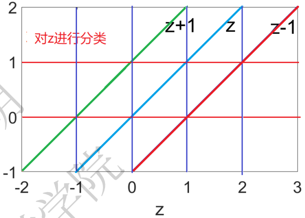
$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{1}{3}\left[f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)\right]$$



电子科技大学 杨家明 数学科学学院

解： (2) 再求导

$$f_Z(z) = F_Z'(z)$$
$$= \frac{1}{3}[f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)]$$

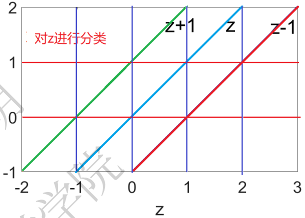


1)横坐标用于讨论z,2)直线用来讨论概率密度自变量

电子科技大学 杨江明 数学科学学院

解: (2) 再求导

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= F_Z'(z) \\
&= \frac{1}{3}\left[f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)\right] \\
&= \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 < z < 2 \\ & \end{cases}
\end{aligned}
$$

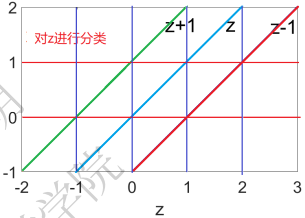


1)横坐标用于讨论z,2)直线用来讨论概率密度自变量

电子科技大学 杨丽明 数学科学学院

解： (2) 再求导

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= F_Z'(z) \\
&= \frac{1}{3}\left[f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)\right] \\
&= \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 < z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$

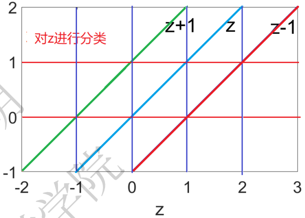


1)横坐标用于讨论z,2)直线用来讨论概率密度自变量

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 再求导

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= F_Z'(z) \\
&= \frac{1}{3}\left[f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)\right] \\
&= \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 < z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$



1)横坐标用于讨论z,2)直线用来讨论概率密度自变量

一个公式：

$$
\boxed{f_Z(z) = \sum_{k=1}^{n} p\{X = x_k\} f_Y(z - x_k)}
$$

典型例题:

例 4：设A, B为随机事件，且
$P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases} \quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

求二维随机变量(X, Y) 的概率分布；

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题:

例 4: 设A, B为随机事件，且
$P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases} \quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

求二维随机变量(X, Y) 的概率分布；

分析：X, Y都是0-1分布，

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题:

例 4：设A, B为随机事件，且
$P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

求二维随机变量(X, Y) 的概率分布；

分析：X, Y都是0-1分布，(X, Y)是二维离散型随机变量。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题:

例 4：设A, B为随机事件，且
$P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

求二维随机变量(X, Y) 的概率分布；
分析：X, Y都是0-1分布，(X, Y)是二维离散型随机变量。
考虑其概率分布即考虑

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题:

例 4：设A, B为随机事件，且

$P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

求二维随机变量(X, Y) 的概率分布；

分析：X, Y都是0-1分布， (X, Y)是二维离散型随机变量。考虑其概率分布即考虑

1. (X, Y)在平面上可取几个点？

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题:

例 4：设A, B为随机事件，且

$$P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2},$$令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases} \quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

求二维随机变量(X, Y) 的概率分布；

分析：X, Y都是0-1分布，(X, Y)是二维离散型随机变量。考虑其概率分布即考虑

1. (X, Y)在平面上可取几个点？
2. 每个点出现的概率是多少？

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：

(X,Y)可取四个点：$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：

(X, Y)可取四个点：$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$
根据定义

$$P\{X=0, Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})$$

电子科技大学 杨宏明 数学科学学院

解：

(X,Y)可取四个点：$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$
根据定义

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})$$
$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)$$

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

解：

(X,Y)可取四个点：$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$
根据定义

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})$$
$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)$$
$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})$$

电子科技大学 杨宏明 数学科学学院

解:

(X,Y)可取四个点：$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$
根据定义

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})$$
$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)$$
$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})$$
$$P\{X=1Y=1\}=P(AB)$$

电子科技大学 杨宏明 数学科学学院

解:

(X, Y)可取四个点：$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$
根据定义

$$P\{X=0, Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})$$
$$P\{X=0, Y=1\}=P(\bar{A}B)$$
$$P\{X=1, Y=0\}=P(A\bar{B})$$
$$P\{X=1 Y=1\}=P(AB)$$

问题的关键是计算：$P(AB), P(\bar{A}B), P(A\bar{B}), P(\bar{A}\bar{B})$

电子科技大学 杨宏明 数学科学学院

由已知

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

由已知

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12} = P(B)P(A|B)$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

由已知

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12} = P(B)P(A|B)$$
$$\Rightarrow P(B) = P(AB)/P(A|B) = \frac{1}{6}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

由已知

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12} = P(B)P(A|B)$$

$$\Rightarrow P(B) = P(AB)/P(A|B) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

由已知

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12} = P(B)P(A|B)$$

$$\Rightarrow P(B) = P(AB)/P(A|B) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{6}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

由已知

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12} = P(B)P(A|B)$$

$$\Rightarrow P(B) = P(AB)/P(A|B) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{12}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

由已知

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12} = P(B)P(A|B)$$
$$\Rightarrow P(B) = P(AB)/P(A|B) = \frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{12}$$
$$\Rightarrow P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

所以(X, Y)的联合分布律为：

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

所以(X,Y)的联合分布律为：

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=\frac{2}{3}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

所以(X,Y)的联合分布律为：

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=\frac{2}{3}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=\frac{1}{12}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

所以(X,Y)的联合分布律为：

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=\frac{2}{3}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=\frac{1}{12}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=\frac{1}{6}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

所以(X,Y)的联合分布律为:

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=\frac{2}{3}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=\frac{1}{12}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=1Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

所以(X, Y)的联合分布律为:

$$P\{X=0, Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=\frac{2}{3}$$

$$P\{X=0, Y=1\}=P(\bar{A}B)=\frac{1}{12}$$

$$P\{X=1, Y=0\}=P(A\bar{B})=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=1 Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}$$

即:

X \ Y	0	1
0	$2/3$	$1/12$
1	$1/6$	$1/12$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

所以(X, Y)的联合分布律为：

$$P\{X=0, Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=\frac{2}{3}$$

$$P\{X=0, Y=1\}=P(\bar{A}B)=\frac{1}{12}$$

$$P\{X=1, Y=0\}=P(A\bar{B})=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=1 Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}$$

即：

$X \backslash Y$	0	1
0	2/3	1/12
1	1/6	1/12

如何求X和Y的相关系数ρ_{XY}？

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题:

例 5: 已知随机变量X, Y以及XY的分布律如下表所示

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求: (1) $P\{X = 2Y\}$, (2) $cov(X - Y, Y)$与ρ_{XY}

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

典型例题:

例 5: 已知随机变量X, Y以及XY的分布律如下表所示

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求: (1) $P\{X=2Y\}$, (2) $cov(X-Y, Y)$与ρ_{XY}

分析:

1. 二维离散型随机变量一般用联合分布律来刻画其概率分布;

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题:

例 5: 已知随机变量X, Y以及XY的分布律如下表所示

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求: (1) $P\{X=2Y\}$, (2) $cov(X-Y, Y)$与ρ_{XY}

分析:

1. 二维离散型随机变量一般用联合分布律来刻画其概率分布;
2. 根据分布律，可进行任何关于(X, Y)的讨论;

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

典型例题:

例 5: 已知随机变量X, Y以及XY的分布律如下表所示

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求: (1) $P\{X = 2Y\}$, (2) $cov(X - Y, Y)$与ρ_{XY}

分析:

1. 二维离散型随机变量一般用联合分布律来刻画其概率分布;
2. 根据分布律，可进行任何关于(X, Y)的讨论;
3. 在取值有限的情况下，可以用列表的方法求解，比较直观。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： 将随机变量(X, Y)联合分布律列成表格

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0				$1/2$
1				$1/3$
2				$1/6$
$p_{\cdot j}$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: 将随机变量(X,Y)联合分布律列成表格

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0				$1/2$
1		$1/3$		$1/3$
2			$1/12$	$1/6$
$p_{\cdot j}$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

解： 将随机变量(X, Y)联合分布律列成表格

Y \ X	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0		0		$1/2$
1	0	$1/3$	0	$1/3$
2		0	$1/12$	$1/6$
$p_{\cdot j}$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： 将随机变量(X, Y)联合分布律列成表格

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0		0		$1/2$
1	0	$1/3$	0	$1/3$
2	$1/12$	0	$1/12$	$1/6$
$p_{\cdot j}$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

解: 将随机变量(X,Y)联合分布律列成表格

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/3$	0	$1/3$
2	$1/12$	0	$1/12$	$1/6$
$p_{\cdot j}$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

解： 将随机变量(X,Y)联合分布律列成表格

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/3	0	1/3
2	1/12	0	1/12	1/6
$p_{\cdot j}$	1/3	1/3	1/3	1

$$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}$$

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

解： 将随机变量(X,Y)联合分布律列成表格

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/3	0	1/3
2	1/12	0	1/12	1/6
$p_{\cdot j}$	1/3	1/3	1/3	1

$$P\{X=2Y\} = P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}$$
$$=1/4+0$$

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

解： 将随机变量(X, Y)联合分布律列成表格

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/3	0	1/3
2	1/12	0	1/12	1/6
$p_{\cdot j}$	1/3	1/3	1/3	1

$$
\begin{aligned}
P\{X = 2Y\} &= P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 2, Y = 1\} \\
&= 1/4 + 0 \\
&= 1/4
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

解： (2)

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) **分析：**

1. X, Y的期望和方差由定义或计算公式直接可算；

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 分析：

1. X, Y的期望和方差由定义或计算公式直接可算；
2. $cov(X-Y, Y) = cov(X, Y) - D(Y)$；

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(2) 分析：

1. X, Y的期望和方差由定义或计算公式直接可算；
2. $cov(X-Y, Y) = cov(X, Y) - D(Y)$；
3. $\rho_{XY} = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$；

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: (2) 分析:

1. X, Y的期望和方差由定义或计算公式直接可算;
2. $cov(X-Y, Y) = cov(X, Y) - D(Y)$;
3. $\rho_{XY} = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$;
4. 计算关键: $E(XY)$, 可利用二元函数期望求解。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 分析：

1. X, Y的期望和方差由定义或计算公式直接可算；
2. $cov(X-Y, Y) = cov(X, Y) - D(Y)$；
3. $\rho_{XY} = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$；
4. 计算关键：$E(XY)$，可利用二元函数期望求解。

$$E(XY) = 1 \times 1 \times 1/3 + 2 \times 2 \times 1/12$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 分析：

1. X, Y的期望和方差由定义或计算公式直接可算；
2. $cov(X-Y, Y) = cov(X, Y) - D(Y)$；
3. $\rho_{XY} = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$；
4. 计算关键：$E(XY)$，可利用二元函数期望求解。

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= 1 \times 1 \times 1/3 + 2 \times 2 \times 1/12 \\
&= 2/3
\end{aligned}
$$

中国科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2) 分析：

1. X, Y的期望和方差由定义或计算公式直接可算；
2. $cov(X-Y, Y) = cov(X, Y) - D(Y)$；
3. $\rho_{XY} = \dfrac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$；
4. 计算关键：$E(XY)$，可利用二元函数期望求解。

$$\begin{aligned} E(XY) &= 1 \times 1 \times 1/3 + 2 \times 2 \times 1/12 \\ &= 2/3 \end{aligned}$$

其它从略

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 6： 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$，

令随机变量

$$Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$$

求:

(1)求Y的分布函数; (2) 求概率$P\{X\le Y\}$。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 6: 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & 其他\end{cases}$,

令随机变量

$$Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$$

求:

(1)求Y的分布函数; (2) 求概率$P\{X\le Y\}$。

分析:

1. Y的取值是分段的，分段讨论是关键;

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 6： 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

令随机变量

$$Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$$

求:

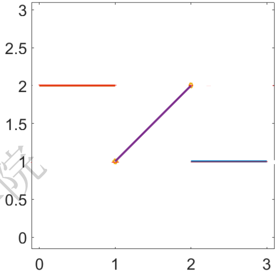
(1)求Y的分布函数; (2) 求概率$P\{X\le Y\}$。

分析:

1. Y的取值是分段的，分段讨论是关键;
2. 可以用图像辅助讨论;

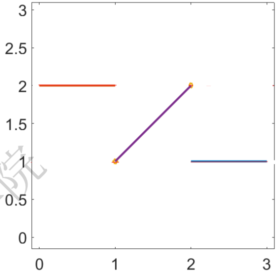
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1)



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

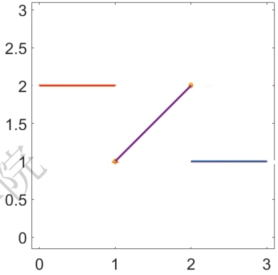
解： (1) Y 的取值范围为 $[1,2]$，故



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(1) Y的取值范围为$[1,2]$，故 当$y<1$时，
$F(y)=P\{Y\le y\}=0$，当$y\ge 2$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=1$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

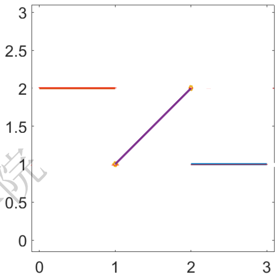


电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1) Y的取值范围为$[1,2]$，故 当$y<1$时，
$F(y)=P\{Y\le y\}=0$，当$y\ge 2$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=1$

当$1\le y<2$时

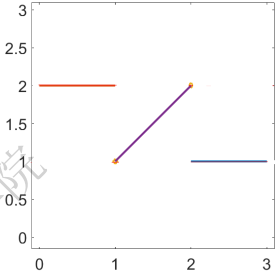
$F(y)=P\{Y\le y\}=$



解：(1) Y的取值范围为$[1,2]$，故 当$y<1$时，
$F(y)=P\{Y\leq y\}=0$，当$y\geq 2$时，$F(y)=P\{Y\leq y\}=1$

当$1\leq y<2$时

$$F(y)=P\{Y\leq y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\leq y\}$$

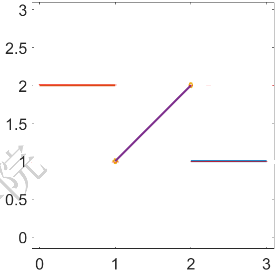


电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(1) Y的取值范围为$[1,2]$，故 当$y<1$时，
$F(y)=P\{Y\le y\}=0$，当$y\ge 2$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=1$

当$1\le y<2$时

$$\begin{aligned}F(y)&=P\{Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\le y\}\\&=P\{2\le X\le 3\}+P\{1<X\le y\}\end{aligned}$$



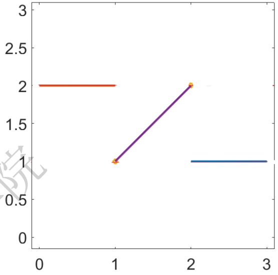
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1) Y 的取值范围为 $[1,2]$，故 当 $y<1$ 时，

$F(y)=P\{Y\leq y\}=0$，当 $y\geq 2$ 时，$F(y)=P\{Y\leq y\}=1$

当 $1\leq y<2$ 时

$$
\begin{aligned}
F(y) =& P\{Y\leq y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\leq y\}\\
=& P\{2\leq X\leq 3\}+P\{1<X\leq y\}\\
=& \int_2^3 \frac{x^2}{9}dx+\int_1^y \frac{x^2}{9}dx=\frac{18+y^3}{27}
\end{aligned}
$$

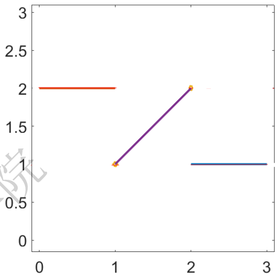


电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1) Y的取值范围为$[1,2]$，故 当$y<1$时，
$F(y)=P\{Y\le y\}=0$，当$y\ge 2$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=1$

当$1\le y<2$时

$$
\begin{aligned}
F(y) &= P\{Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\le y\}\\
&= P\{2\le X\le 3\}+P\{1<X\le y\}\\
&= \int_2^3 \frac{x^2}{9}dx+\int_1^y \frac{x^2}{9}dx=\frac{18+y^3}{27}
\end{aligned}
$$



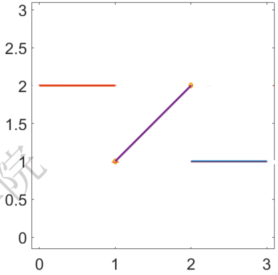
所以Y的分布函数为：

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1) Y的取值范围为$[1,2]$，故 当$y<1$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=0$，当$y\ge 2$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=1$

当$1\le y<2$时

$$\begin{aligned}F(y)&=P\{Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\le y\}\\&=P\{2\le X\le 3\}+P\{1<X\le y\}\\&=\int_2^3\frac{x^2}{9}dx+\int_1^y\frac{x^2}{9}dx=\frac{18+y^3}{27}\end{aligned}$$



所以Y的分布函数为：

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \dfrac{18+y^3}{27}, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2)

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(2)由：

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (2)由：

$$Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$$

可知

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(2)由：

$$Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$$

可知

$$\{X\le Y\}=\{1<X<2\}\cup\{X\le 1\}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(2)由：

$$Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$$

可知 (根据图像同样也可得到该结果，似乎更容易)

$$\{X\le Y\}=\{1<X<2\}\cup\{X\le 1\}$$

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

解：(2)由：

$$Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$$

可知 (根据图像同样也可得到该结果，似乎更容易)

$$\{X\le Y\}=\{1<X<2\}\cup\{X\le 1\}$$

所以

$$P\{X\le Y\}=$$

电子科技大学 数学科学学院 杨学明

解：(2)由：

$$Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$$

可知 (根据图像同样也可得到该结果，似乎更容易)

$$\{X\le Y\}=\{1<X<2\}\cup\{X\le 1\}$$

所以

$$P\{X\le Y\}=P\{1<X<2\}+P\{X\le 1\}$$

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

解：(2)由：

$$Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$$

可知 (根据图像同样也可得到该结果，似乎更容易)

$$\{X\le Y\}=\{1<X<2\}\cup\{X\le 1\}$$

所以

$$\begin{aligned}P\{X\le Y\}&=P\{1<X<2\}+P\{X\le 1\}\\&=\int_1^2\frac{x^2}{9}dx+\int_0^1\frac{x^2}{9}dx\\&=\frac{8}{27}\end{aligned}$$

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

典型例题

例 7: 设随机变量Y的分布函数$F(y)$连续且严格单调增加，而随机变量$X \sim U(0,1)$，令$Z = F^{-1}(X)$，则Z与Y 有相同分布

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 7： 设随机变量Y的分布函数$F(y)$连续且严格单调增加，而随机变量$X \sim U(0,1)$，令$Z = F^{-1}(X)$，则Z与Y 有相同分布

分析：$F(y)$连续且严格单调增加，意味着$F^{-1}(X) \in (-\infty, +\infty)$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 7： 设随机变量Y的分布函数$F(y)$连续且严格单调增加，而随机变量$X \sim U(0,1)$，令$Z = F^{-1}(X)$，则Z与Y 有相同分布

分析：$F(y)$连续且严格单调增加，意味着$F^{-1}(X) \in (-\infty, +\infty)$

证明：

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 7: 设随机变量Y的分布函数$F(y)$连续且严格单调增加，而随机变量$X \sim U(0,1)$，令$Z = F^{-1}(X)$，则Z与Y 有相同分布

分析：$F(y)$连续且严格单调增加，意味着$F^{-1}(X) \in (-\infty, +\infty)$

证明:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \le z\} \\ &= P\{F^{-1}(X) \le z\} \end{aligned}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 7： 设随机变量Y的分布函数$F(y)$连续且严格单调增加，而随机变量$X \sim U(0,1)$，令$Z = F^{-1}(X)$，则Z与Y 有相同分布

分析：$F(y)$连续且严格单调增加，意味着$F^{-1}(X) \in (-\infty, +\infty)$

证明：

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$

$$= P\{F^{-1}(X) \le z\}$$ （这里$F^{-1}(X) \in (-\infty, +\infty)$，不需要讨论z）

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 7： 设随机变量Y的分布函数$F(y)$连续且严格单调增加，而随机变量$X \sim U(0,1)$，令$Z = F^{-1}(X)$，则Z与Y 有相同分布

分析：$F(y)$连续且严格单调增加，意味着$F^{-1}(X) \in (-\infty, +\infty)$

证明：

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} \\
&= P\{F^{-1}(X) \le z\} \quad \text{（这里} F^{-1}(X) \in (-\infty, +\infty)\text{，不需要讨论z）} \\
&= P\{X \le F(z)\}
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 7： 设随机变量Y的分布函数$F(y)$连续且严格单调增加，而随机变量$X \sim U(0,1)$，令$Z = F^{-1}(X)$，则Z与Y 有相同分布

分析：$F(y)$连续且严格单调增加，意味着$F^{-1}(X) \in (-\infty, +\infty)$

证明：

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} \\
&= P\{F^{-1}(X) \le z\} \text{（这里}F^{-1}(X) \in (-\infty, +\infty)\text{，不需要讨论z）} \\
&= P\{X \le F(z)\} \\
&= F(z)\text{因为}F(z) \in (0,1), X \sim U(0,1)
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 7： 设随机变量Y的分布函数$F(y)$连续且严格单调增加，而随机变量$X\sim U(0,1)$，令$Z=F^{-1}(X)$，则Z与Y 有相同分布

分析：$F(y)$连续且严格单调增加，意味着$F^{-1}(X)\in(-\infty,+\infty)$

证明：

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\le z\}\\&=P\{F^{-1}(X)\le z\}\text{（这里}F^{-1}(X)\in(-\infty,+\infty)\text{，不需要讨论z）}\\&=P\{X\le F(z)\}\\&=F(z)\text{因为}F(z)\in(0,1),X\sim U(0,1)\end{aligned}$$

这表明Z与Y有相同的分布函数。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 7： 设随机变量Y的分布函数$F(y)$连续且严格单调增加，而随机变量$X \sim U(0,1)$，令$Z = F^{-1}(X)$，则Z与Y 有相同分布

分析：$F(y)$连续且严格单调增加，意味着$F^{-1}(X) \in (-\infty, +\infty)$

证明：

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} \\
&= P\{F^{-1}(X) \le z\} \text{（这里} F^{-1}(X) \in (-\infty, +\infty)\text{，不需要讨论z）} \\
&= P\{X \le F(z)\} \\
&= F(z) \text{因为} F(z) \in (0,1), X \sim U(0,1)
\end{aligned}
$$

这表明Z与Y有相同的分布函数。

这个方法通常用来由均匀分布生成其它类型的分布。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 8: 设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且严格单调增加，而随机变量$Y=F(X)$，求Y 的分布函数？

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 8： 设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且严格单调增加，而随机变量$Y = F(X)$，求Y 的分布函数？

分析：求分布函数一般要讨论随机变量的值域

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 8： 设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且严格单调增加，而随机变量$Y=F(X)$，求Y 的分布函数？

分析：求分布函数一般要讨论随机变量的值域

解： 由分布函数性质，$Y\in[0,1]$，所以

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 8： 设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且严格单调增加，而随机变量$Y=F(X)$，求Y 的分布函数？

分析：求分布函数一般要讨论随机变量的值域

解： 由分布函数性质，$Y\in[0,1]$，所以

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}$

当$y<0$时， $F_Y(y)=0$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 8： 设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且严格单调增加，而随机变量$Y=F(X)$，求Y 的分布函数？

分析：求分布函数一般要讨论随机变量的值域

解： 由分布函数性质，$Y\in[0,1]$，所以

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}$

当$y<0$时， $F_Y(y)=0$

当$y\geq 1$时， $F_Y(y)=1$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 8: 设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且严格单调增加，而随机变量$Y=F(X)$，求Y 的分布函数？

分析: 求分布函数一般要讨论随机变量的值域

解: 由分布函数性质，$Y\in[0,1]$，所以

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

当$y<0$时， $F_Y(y)=0$

当$y\ge 1$时， $F_Y(y)=1$

当$0\le y<1$时， $F_Y(y)=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}=y$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 8： 设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且严格单调增加，而随机变量$Y=F(X)$，求Y 的分布函数？

分析：求分布函数一般要讨论随机变量的值域

解： 由分布函数性质，$Y\in[0,1]$，所以

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

当$y<0$时， $F_Y(y)=0$

当$y\ge 1$时， $F_Y(y)=1$

当$0\le y<1$时， $F_Y(y)=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}=y$

所以

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ & \\ & \end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 8： 设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且严格单调增加，而随机变量$Y=F(X)$，求Y 的分布函数？

分析：求分布函数一般要讨论随机变量的值域

解： 由分布函数性质，$Y\in[0,1]$，所以

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

当$y<0$时， $F_Y(y)=0$

当$y\ge 1$时， $F_Y(y)=1$

当$0\le y<1$时， $F_Y(y)=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}=y$

所以

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<1\\ & \end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 8： 设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且严格单调增加，而随机变量$Y=F(X)$，求Y的分布函数？

分析：求分布函数一般要讨论随机变量的值域

解： 由分布函数性质，$Y\in[0,1]$，所以

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}$

当$y<0$时， $F_Y(y)=0$

当$y\geq 1$时， $F_Y(y)=1$

当$0\leq y<1$时， $F_Y(y)=P\{F(X)\leq y\}=P\{X\leq F^{-1}(y)\}=y$

所以

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\leq y<1\\ 1, & y\leq 1\end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 8： 设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且严格单调增加，而随机变量$Y=F(X)$，求Y 的分布函数？

分析：求分布函数一般要讨论随机变量的值域

解： 由分布函数性质，$Y\in[0,1]$，所以

$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}$

当$y<0$时， $F_Y(y)=0$

当$y\geq 1$时， $F_Y(y)=1$

当$0\leq y<1$时， $F_Y(y)=P\{F(X)\leq y\}=P\{X\leq F^{-1}(y)\}=y$

所以

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\leq y<1\\ 1, & y\leq 1\end{cases}$$

这表明Y服从均匀分布。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 8： 设随机变量X的分布函数$F(x)$连续且严格单调增加，而随机变量$Y=F(X)$，求Y的分布函数？

分析：求分布函数一般要讨论随机变量的值域

解： 由分布函数性质，$Y\in[0,1]$，所以

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

当$y<0$时， $F_Y(y)=0$

当$y\ge 1$时， $F_Y(y)=1$

当$0\le y<1$时， $F_Y(y)=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}=y$

所以

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & y\le 1\end{cases}$$

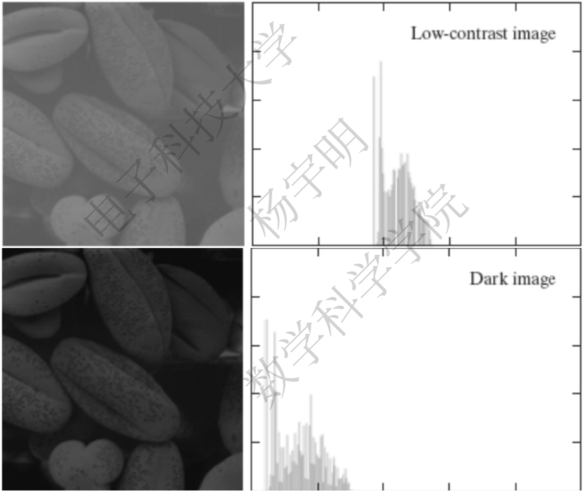
这表明Y服从均匀分布。

这个方法可以用来做图像的灰度变换。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

灰度变换的例子

变换前

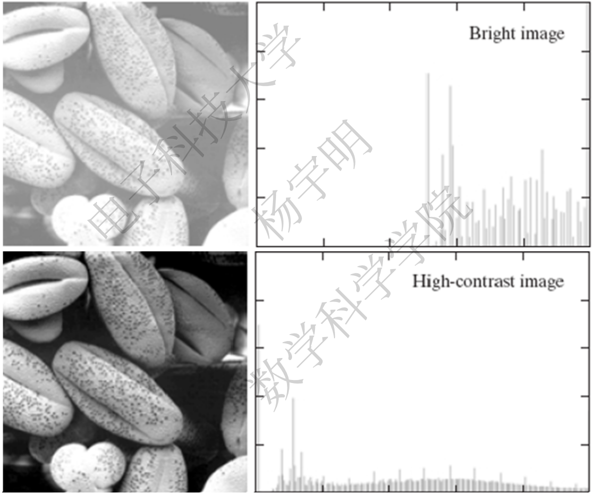


变换前

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

灰度变换的例子

变换前



变换后

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 9： 二维随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, (x, y) \in R^2$$

求常数A及概率$P_{Y|X}\{Y < 0|X = 1\}$?

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 9： 二维随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, (x, y) \in R^2$$

求常数A及概率$P_{Y|X}\{Y < 0|X = 1\}$?

分析：由归一性可得A，由条件概率密度可算条件概率

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

典型问题

例 9： 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},(x,y)\in R^2$$

求常数A及概率$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}$?

分析： 由归一性可得A，由条件概率密度可算条件概率

解： 由归一性$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，得

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 9： 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},(x,y)\in R^2$$

求常数A及概率$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}$?

分析：由归一性可得A，由条件概率密度可算条件概率

解： 由归一性$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=A\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 9： 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},(x,y)\in R^2$$

求常数A及概率$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}$?

分析：由归一性可得A，由条件概率密度可算条件概率

解： 由归一性$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy &= A\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy\\ &= A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-x)^2}dy\end{aligned}$$

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

典型问题

例 9： 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},(x,y)\in R^2$$

求常数A及概率$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}$?

分析： 由归一性可得A，由条件概率密度可算条件概率

解： 由归一性$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy &=A\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy\\ &=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-x)^2}d(y-x)\\ &=A\pi=1\end{aligned}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 9： 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},(x,y)\in R^2$$

求常数A及概率$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}$?

分析：由归一性可得A，由条件概率密度可算条件概率

解： 由归一性$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy &=A\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy\\ &=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(y-x)^2}d(y-x)\\ &=A\pi=1\\ &\Rightarrow A=1/\pi\end{aligned}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： 由条件概率密度概念可知

$$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}=\int_{-\infty}^{0}f_{Y|X}(y|1)dy$$

而

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：由条件概率密度概念可知

$$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}=\int_{-\infty}^{0}f_{Y|X}(y|1)dy$$

而

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： 由条件概率密度概念可知

$$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}=\int_{-\infty}^{0}f_{Y|X}(y|1)dy$$

而

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dy$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： 由条件概率密度概念可知

$$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}=\int_{-\infty}^{0} f_{Y|X}(y|1)dy$$

而

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： 由条件概率密度概念可知

$$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}=\int_{-\infty}^{0} f_{Y|X}(y|1)dy$$

而

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

从而

$$f_{Y|X}(y|1)=\frac{f(1,y)}{f_X(1)}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： 由条件概率密度概念可知

$$P_{Y|X}\{Y < 0|X = 1\} = \int_{-\infty}^{0} f_{Y|X}(y|1)dy$$

而

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

从而

$$f_{Y|X}(y|1) = \frac{f(1,y)}{f_X(1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(y-1)^2}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: 由条件概率密度概念可知

$$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}=\int_{-\infty}^{0}f_{Y|X}(y|1)dy$$

而

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

从而

$$f_{Y|X}(y|1)=\frac{f(1,y)}{f_X(1)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(y-1)^2}$$

所以

$$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}=$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： 由条件概率密度概念可知

$$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}=\int_{-\infty}^{0}f_{Y|X}(y|1)dy$$

而

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

从而

$$f_{Y|X}(y|1)=\frac{f(1,y)}{f_X(1)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(y-1)^2}$$

所以

$$P_{Y|X}\{Y<0|X=1\}=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(y-1)^2}dy=0.5\Phi(-\sqrt{2})$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 10： 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le x\le 1, 0<y<x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求概率$P\{Y<\frac{1}{8}|X<\frac{1}{4}\}$?

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

典型问题

例 10： 二维随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x \le 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求概率$P\{Y < \frac{1}{8} | X < \frac{1}{4}\}$?

请先思考：这个条件概率该用什么方法算？

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

典型问题

例 10： 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le x\le 1, 0<y<x\\ 0 & 其它\end{cases}$$

求概率$P\{Y<\frac{1}{8}|X<\frac{1}{4}\}$?

请先思考：这个条件概率该用什么方法算？

接下来$P\{Y<\frac{1}{8},X<\frac{1}{4}\}$怎么算？

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型问题

例 10： 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le x\le 1, 0<y<x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求概率$P\{Y<\frac{1}{8}|X<\frac{1}{4}\}$?

请先思考：这个条件概率该用什么方法算？

接下来$P\{Y<\frac{1}{8},X<\frac{1}{4}\}$怎么算？

接下来$P\{X<\frac{1}{4}\}$怎么算？

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 11： 设二维随机变量(X,Y)在矩形

$$G=\{(x,y)|1\leq x\leq 3,1\leq y\leq 3\}$$

服从均匀分布，求$Z=X-Y$的概率密度。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 11: 设二维随机变量(X, Y)在矩形

$$G = \{(x, y)|1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$$

服从均匀分布，求$Z = X - Y$的概率密度。

分析:

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 11: 设二维随机变量(X,Y)在矩形

$$G=\{(x,y)|1\leq x\leq 3,1\leq y\leq 3\}$$

服从均匀分布，求$Z=X-Y$的概率密度。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

分析:

- 先求分布函数，再对其求导

典型例题

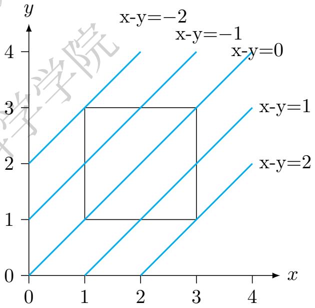
例 11: 设二维随机变量(X, Y)在矩形

$$G = \{(x, y) | 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 3\}$$

服从均匀分布，求$Z = X - Y$的概率密度。

分析:

- 先求分布函数，再对其求导
- 画图像，讨论$\{x - y < z\}$在平面上对应区域



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

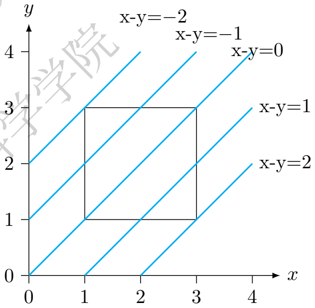
例 11： 设二维随机变量(X, Y)在矩形

$$G = \{(x, y)|1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$$

服从均匀分布，求$Z = X - Y$的概率密度。

分析：

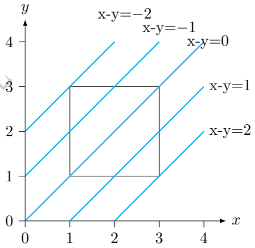
- 先求分布函数，再对其求导
- 画图像，讨论$\{x - y < z\}$在平面上对应区域
- 一定要把关键的$x - y = z$的图像画出来



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

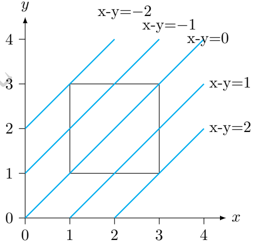
解： (1)

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院



解： (1)Z的取值范围为$[-2,2]$，故

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

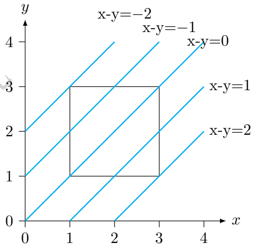


解: (1)Z的取值范围为$[-2,2]$，故

当$z<-2$时，$F(z)=P\{Z\le z\}=0$

当$y\ge 2$时，$F(z)=P\{Z\le z\}=1$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院



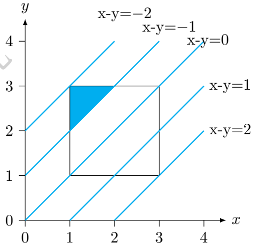
解：(1)Z的取值范围为$[-2,2]$，故

当$z<-2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=0$

当$y\geq 2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=1$

当$-2\leq z<0$时

$$F(z)=P\{Z\leq z\}=$$



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

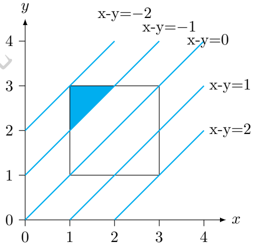
解： (1)Z的取值范围为$[-2,2]$，故

当$z<-2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=0$

当$y\geq 2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=1$

当$-2\leq z<0$时

$$F(z)=P\{Z\leq z\}=P\{Z\leq -2\}+P\{-2<Z\leq z\}$$



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

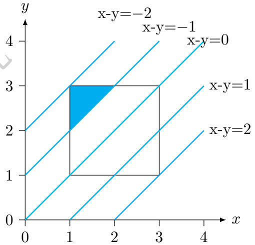
解：(1)Z的取值范围为$[-2,2]$，故

当$z<-2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=0$

当$y\geq 2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=1$

当$-2\leq z<0$时

$$
\begin{aligned}
F(z) &= P\{Z\leq z\}=P\{Z\leq -2\}+P\{-2<Z\leq z\}\\
&= P\{-2<Z\leq z\}
\end{aligned}
$$



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

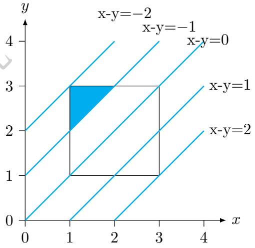
解： (1)Z的取值范围为$[-2,2]$，故

当$z<-2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=0$

当$y\geq 2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=1$

当$-2\leq z<0$时

$$
\begin{aligned}
F(z) &= P\{Z\leq z\}=P\{Z\leq -2\}+P\{-2<Z\leq z\} \\
&= P\{-2<Z\leq z\} \\
&= \frac{(2+z)^2/2}{4}
\end{aligned}
$$



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(1)Z的取值范围为$[-2,2]$，故

当$z<-2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=0$

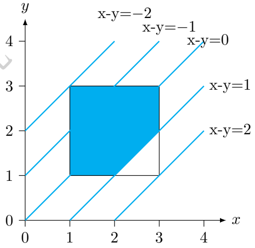
当$y\geq 2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=1$

当$-2\leq z<0$时

$$
\begin{aligned}
F(z)=&P\{Z\leq z\}=P\{Z\leq -2\}+P\{-2<Z\leq z\}\\
=&P\{-2<Z\leq z\}\\
=&\frac{(2+z)^2/2}{4}
\end{aligned}
$$

当$0\leq z<2$时

$$F(z)=P\{Z\leq z\}=P\{Z\leq -2\}+P\{-2<Z\leq z\}$$



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1)Z的取值范围为$[-2,2]$，故

当$z<-2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=0$

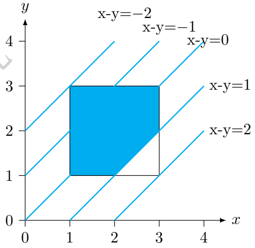
当$y\geq 2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=1$

当$-2\leq z<0$时

$$
\begin{aligned}
F(z)=&P\{Z\leq z\}=P\{Z\leq -2\}+P\{-2<Z\leq z\}\\
=&P\{-2<Z\leq z\}\\
=&\frac{(2+z)^2/2}{4}
\end{aligned}
$$

当$0\leq z<2$时

$$
\begin{aligned}
F(z)=&P\{Z\leq z\}=P\{Z\leq -2\}+P\{-2<Z\leq z\}\\
=&P\{-2<Z\leq z\}
\end{aligned}
$$



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1)Z的取值范围为$[-2,2]$，故

当$z<-2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=0$

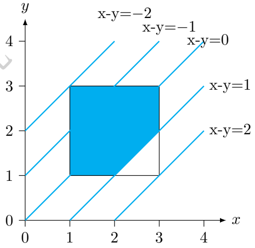
当$y\geq 2$时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=1$

当$-2\leq z<0$时

$$\begin{aligned}F(z)=&P\{Z\leq z\}=P\{Z\leq -2\}+P\{-2<Z\leq z\}\\=&P\{-2<Z\leq z\}\\=&\frac{(2+z)^2/2}{4}\end{aligned}$$

当$0\leq z<2$时

$$\begin{aligned}F(z)=&P\{Z\leq z\}=P\{Z\leq -2\}+P\{-2<Z\leq z\}\\=&P\{-2<Z\leq z\}\\=&1-\frac{(2-z)^2/2}{4}\end{aligned}$$



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

所以Z的分布函数为：

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<-2\\ \dfrac{(2+z)^2}{8}, & -2\le z<0\\ 1-\dfrac{(2-z)^2}{8}, & 0\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

所以Z的分布函数为：

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<-2\\ \dfrac{(2+z)^2}{8}, & -2\le z<0\\ 1-\dfrac{(2-z)^2}{8}, & 0\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

所以Z的密度函数为：

$$f(z)=F^{'}(z)=\begin{cases}\dfrac{2+z}{4}, & -2\le z<0\\ \dfrac{2-z}{4}, & 0\le z<2\\ 0, & z<-2\text{或}z\ge 2\end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 12： 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2^{-x}ln2, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$，对$X$进行独立重复观测，直到第二个大于3的观测值出现时停止，记Y为观测次数.

(1) 求Y的概率分布；

(2) 求数学期望EY。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 12: 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2^{-x}ln2, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$,
对X进行独立重复观测，直到第二个大于3的观测值出现时停止，记Y为观测次数.

(1) 求Y的概率分布;

(2) 求数学期望EY。

分析:

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 12： 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2^{-x}ln2, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$，对$X$进行独立重复观测，直到第二个大于3的观测值出现时停止，记Y为观测次数.

(1) 求Y的概率分布；

(2) 求数学期望EY。

分析：

- (1)显然与贝努利试验有关!

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 12: 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2^{-x}ln2, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$,
对X进行独立重复观测，直到第二个大于3的观测值出现时停止，记Y为观测次数.

(1) 求Y的概率分布；

(2) 求数学期望EY。

分析：

- (1)显然与贝努利试验有关！
- 实际上就是某个事件直到第二次出现时所进行的实验次数的概率分布(不必要纠结于大于几！抑或小于几！或其它！)

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 12： 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2^{-x}ln2, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，对$X$进行独立重复观测，直到第二个大于3的观测值出现时停止，记Y为观测次数.

(1) 求Y的概率分布；

(2) 求数学期望EY。

分析：

- (1)显然与贝努利试验有关！
- 实际上就是某个事件直到第二次出现时所进行的实验次数的概率分布(不必要纠结于大于几！抑或小于几！或其它！)
- (2)的关键在于(1)，计算也很关键

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: (1)首先:

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: (1)首先:

$$p = P\{X > 3\} = \int_{3}^{+\infty} f(x)dx = \int_{3}^{+\infty} 2^{-x} ln2dx = \frac{1}{8}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1)首先：

$$p = P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} f(x)dx = \int_3^{+\infty} 2^{-x} ln2dx = \frac{1}{8}$$

其次，由题意可知Y可以取的值为: $2, 3, \cdots, k, \cdots$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1)首先：

$$p = P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} f(x)dx = \int_3^{+\infty} 2^{-x} ln2dx = \frac{1}{8}$$

其次，由题意可知Y可以取的值为: $2, 3, \cdots, k, \cdots$

事件$\{Y = k\}$意味着在前$k-1$次观测中，恰好有一次观测值大于3(位置不确定)，而第k次观测值也大于3

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1)首先：

$$p = P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} f(x)dx = \int_3^{+\infty} 2^{-x} ln2dx = \frac{1}{8}$$

其次，由题意可知Y可以取的值为: $2, 3, \cdots, k, \cdots$

事件$\{Y = k\}$意味着在前$k-1$次观测中，恰好有一次观测值大于3(位置不确定)，而第k次观测值也大于3

所以，Y的分布律

为$P\{Y = k\} = (k-1)(1-p)^{k-2}p^2, k = 2, 3, \cdots, k, \cdots$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1)首先：

$$p = P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} f(x)dx = \int_3^{+\infty} 2^{-x} ln2dx = \frac{1}{8}$$

其次，由题意可知Y可以取的值为: $2, 3, \cdots, k, \cdots$

事件$\{Y = k\}$意味着在前$k-1$次观测中，恰好有一次观测值大于3(位置不确定)，而第k次观测值也大于3

所以，Y的分布律为$P\{Y = k\} = (k-1)(1-p)^{k-2}p^2, k = 2, 3, \cdots, k, \cdots$

(2)由期望定义

$$E(Y) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}p^2$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1)首先：

$$p = P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} f(x)dx = \int_3^{+\infty} 2^{-x} ln2dx = \frac{1}{8}$$

其次，由题意可知Y可以取的值为：$2, 3, \cdots, k, \cdots$

事件$\{Y = k\}$意味着在前$k-1$次观测中，恰好有一次观测值大于3(位置不确定)，而第k次观测值也大于3

所以，Y的分布律为$P\{Y = k\} = (k-1)(1-p)^{k-2}p^2, k = 2, 3, \cdots, k, \cdots$

(2)由期望定义

$$E(Y) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}p^2$$

$$= p^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)''\Big|_{x=1-p}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1)首先：

$$p = P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} f(x)dx = \int_3^{+\infty} 2^{-x} ln2dx = \frac{1}{8}$$

其次，由题意可知Y可以取的值为：$2, 3, \cdots, k, \cdots$

事件$\{Y = k\}$意味着在前$k-1$次观测中，恰好有一次观测值大于3(位置不确定)，而第k次观测值也大于3

所以，Y的分布律为$P\{Y = k\} = (k-1)(1-p)^{k-2}p^2, k = 2, 3, \cdots, k, \cdots$

(2)由期望定义

$$E(Y) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}p^2$$

$$= p^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)'' \Big|_{x=1-p}$$

$$= p^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)'' \Big|_{x=1-p} = \frac{2}{p} = 16$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 13: 设二维随机变量(X,Y)在区域 $D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$$

(I) 写出(X,Y)的概率密度；

(II) 问U与X是否相互独立，并说明理由；

(III) 求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 13： 设二维随机变量(X, Y)在区域$D=\{(x,y)|0<x<1, x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$$

(I) 写出(X, Y)的概率密度；

(II) 问U与X是否相互独立，并说明理由；

(III) 求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

分析：

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 13： 设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$$

(I) 写出(X,Y)的概率密度；

(II) 问U与X是否相互独立，并说明理由；

(III) 求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

分析：

- (1)计算出$S(D)$，由均匀分布定义容易给出!

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 13： 设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$$

(I) 写出(X,Y)的概率密度；

(II) 问U与X是否相互独立，并说明理由；

(III) 求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

分析：

- (1)计算出$S(D)$，由均匀分布定义容易给出！
- 两个随机变量独立性怎么判定？

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

典型例题

例 13: 设二维随机变量(X,Y)在区域
$D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$$

(I) 写出(X,Y)的概率密度;

(II) 问U与X是否相互独立，并说明理由;

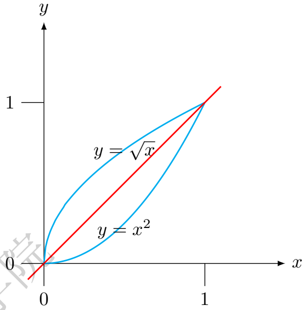
(III) 求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

分析:

- (1)计算出$S(D)$，由均匀分布定义容易给出!
- 两个随机变量独立性怎么判定?
- 类似的问题前面解决过!

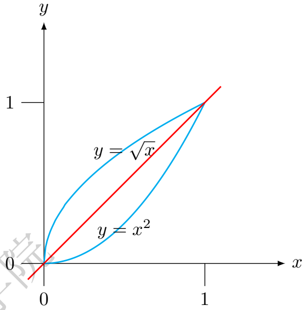
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

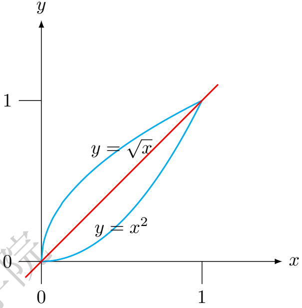
解: (I),$S(D)=\iint_D d\sigma=1/3$



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: (I),$S(D)=\iint_D d\sigma=1/3$

所以:

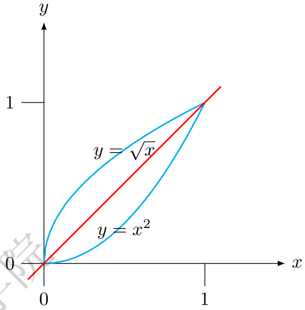


电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: (I),$S(D)=\iint_D d\sigma = 1/3$

所以:

$$f(x,y)=\begin{cases}1/S(D), & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



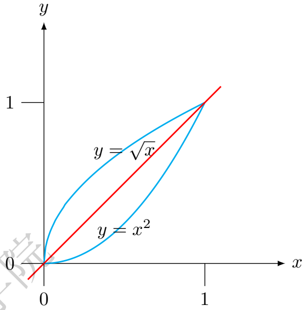
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: (I),$S(D) = \iint_D d\sigma = 1/3$

所以:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/S(D), & (x,y) \in D \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



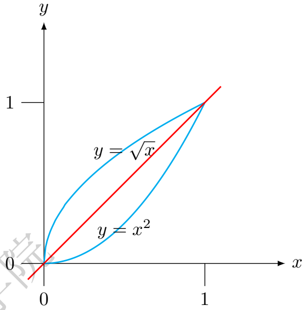
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: (I), $S(D)=\iint_D d\sigma = 1/3$

所以:

$$f(x,y)=\begin{cases}1/S(D), & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



(II)，设$0<a<1, 0<b<1$, 则

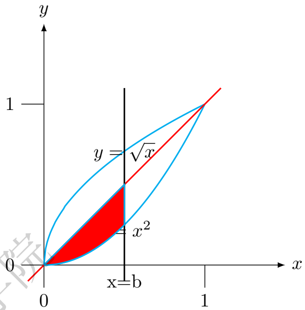
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (I), $S(D) = \iint_D d\sigma = 1/3$

所以:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/S(D), & (x,y) \in D \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3, & (x,y) \in D \\ 0, & 其它 \end{cases}$$



(II)，设$0 < a < 1, 0 < b < 1$, 则

$$P\{U \le a, X \le b\} = P\{X \ge Y, X \le b\}$$

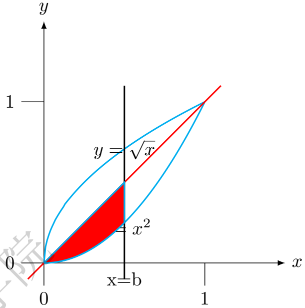
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: (I), $S(D) = \iint_D d\sigma = 1/3$

所以:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/S(D), & (x,y) \in D \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



(II)，设 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 则

$$P\{U \le a, X \le b\} = P\{X \ge Y, X \le b\} = \frac{3}{2}b^2 - b^3$$

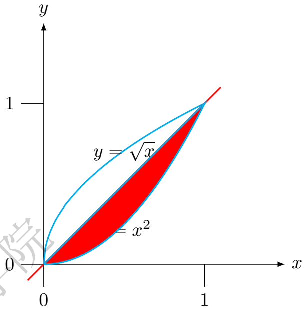
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (I), $S(D) = \iint_D d\sigma = 1/3$

所以:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/S(D), & (x,y) \in D \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



(II)，设$0 < a < 1, 0 < b < 1$, 则

$$P\{U \le a, X \le b\} = P\{X \ge Y, X \le b\} = \frac{3}{2}b^2 - b^3$$

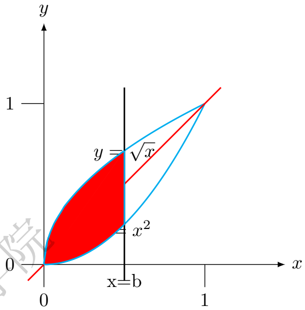
$$P\{U \le a\} = P\{X \ge Y\} = \frac{1}{2},$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: (I),$S(D)=\iint_D d\sigma = 1/3$

所以:

$$f(x,y)=\begin{cases}1/S(D), & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}3, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



(II)，设$0<a<1, 0<b<1$, 则

$$P\{U\le a, X\le b\}=P\{X\ge Y, X\le b\}=\frac{3}{2}b^2-b^3$$

$$P\{U\le a\}=P\{X\ge Y\}=\frac{1}{2}, P\{X\le b\}=2b^{\frac{3}{2}}-b^3$$

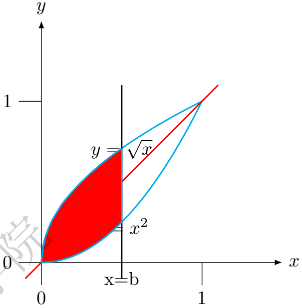
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: (I),$S(D)=\iint_D d\sigma = 1/3$

所以:

$$f(x,y)=\begin{cases}1/S(D), & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



(II),设$0<a<1, 0<b<1$, 则

$$P\{U\le a, X\le b\}=P\{X\ge Y, X\le b\}=\frac{3}{2}b^2-b^3$$

$$P\{U\le a\}=P\{X\ge Y\}=\frac{1}{2}, P\{X\le b\}=2b^{\frac{3}{2}}-b^3$$

$$P\{U\le a, X\le b\}\ne P\{U\le a\}P\{X\le b\}$$

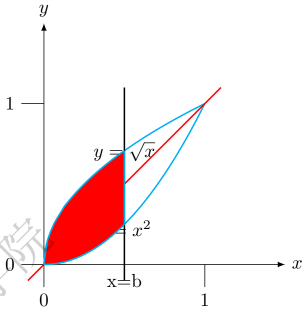
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: (I), $S(D)=\iint_D d\sigma = 1/3$

所以:

$$f(x,y)=\begin{cases}1/S(D), & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



(II), 设$0<a<1, 0<b<1$, 则

$$P\{U\le a, X\le b\}=P\{X\ge Y, X\le b\}=\frac{3}{2}b^2-b^3$$

$$P\{U\le a\}=P\{X\ge Y\}=\frac{1}{2}, P\{X\le b\}=2b^{\frac{3}{2}}-b^3$$

$$P\{U\le a, X\le b\}\ne P\{U\le a\}P\{X\le b\}\quad \therefore U\text{与}X\text{不独立}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(III),

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(III),

$$F(z) = P\{U + X \le z\}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (III),

$$\begin{aligned} F(z) =& P\{U+X\le z\} \\ =& P\{U+X\le z, U=0\}+P\{U+X\le z, U=1\} \end{aligned}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (III),

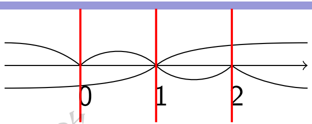
$$
\begin{aligned}
F(z) &= P\{U+X\le z\}\\
&= P\{U+X\le z, U=0\}+P\{U+X\le z, U=1\}\\
&= \begin{cases} 0, & z<0\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1\\ \frac{1}{2}, & z\ge 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (III),

$$
\begin{aligned}
F(z) &= P\{U+X\le z\}\\
&= P\{U+X\le z, U=0\}+P\{U+X\le z, U=1\}\\
&= \begin{cases} 0, & z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1\\ \frac{1}{2}, & z\ge 1\end{cases} + \begin{cases} 0, & z<1\\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2\\ \frac{1}{2}, & z\ge 2\end{cases}
\end{aligned}
$$

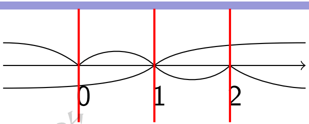
电子科技大学 杨宏明 数学科学学院



解： (III),

$$
\begin{aligned}
F(z) &= P\{U+X \le z\} \\
&= P\{U+X \le z, U=0\} + P\{U+X \le z, U=1\} \\
&= \begin{cases} 0, & z<0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \le z < 1 \\ \frac{1}{2}, & z \ge 1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & z<1 \\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \le z < 2 \\ \frac{1}{2}, & z \ge 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院



解： (III),

$$
\begin{aligned}
F(z) &= P\{U+X\le z\} \\
&= P\{U+X\le z, U=0\} + P\{U+X\le z, U=1\} \\
&= \begin{cases} 0, & z<0 \\ \dfrac{3}{2}z^2 - z^3, & 0\le z<1 \\ \frac{1}{2}, & z\ge 1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & z<1 \\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2 \\ \frac{1}{2}, & z\ge 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & z<1 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0\le z<1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2 \\ 1, & z\ge 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

例 14: 设随机变量X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}0.5, & -1<x<0\\ 0.25, & 0\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

令$Y=X^2$, $F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数，求

(I) 求Y的概率密度$f_Y(y)$;

(II) 求$cov(X,Y)$;

(III) 求$F(-0.5,4)$.

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 14: 设随机变量X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}0.5, & -1<x<0\\ 0.25, & 0\leq x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

令$Y=X^2$, $F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数，求

(I) 求Y的概率密度$f_Y(y)$;

(II) 求$cov(X,Y)$;

(III) 求$F(-0.5,4)$.

分析:

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 14： 设随机变量X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}0.5, & -1<x<0\\ 0.25, & 0\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

令$Y=X^2, F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数，求

(I) 求Y的概率密度$f_Y(y)$；

(II) 求$cov(X,Y)$;

(III) 求$F(-0.5,4)$.

分析：

- (I)先求分布函数，再对其求导(画图像，对Y的值域进行分类)；

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 14： 设随机变量X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 0.5, & -1 < x < 0 \\ 0.25, & 0 \le x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

令$Y = X^2, F(x, y)$为二维随机变量(X, Y)的分布函数，求

(I) 求Y的概率密度$f_Y(y)$；

(II) 求$cov(X, Y)$;

(III) 求$F(-0.5, 4)$.

分析：

- (I)先求分布函数，再对其求导(画图像，对Y的值域进行分类)；
- (II)都是跟X有关，先简化，再计算!

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 14: 设随机变量X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}0.5, & -1<x<0\\ 0.25, & 0\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

令$Y=X^2$, $F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数，求

(I) 求Y的概率密度$f_Y(y)$;

(II) 求$cov(X,Y)$;

(III) 求$F(-0.5,4)$.

分析:

- (I)先求分布函数，再对其求导(画图像，对Y的值域进行分类);
- (II)都是跟X有关，先简化，再计算!
- (III)即计算$P\{X\le-0.5, Y<4\}$,

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 14： 设随机变量X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}0.5, & -1<x<0\\ 0.25, & 0\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

令$Y=X^2$, $F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数，求

(I) 求Y的概率密度$f_Y(y)$；

(II) 求$cov(X,Y)$;

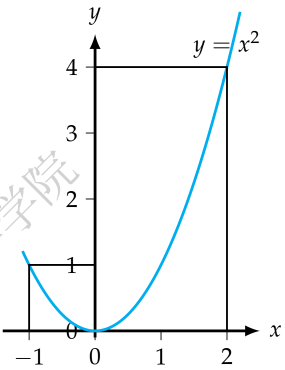
(III) 求$F(-0.5,4)$.

分析：

- (I)先求分布函数，再对其求导(画图像，对Y的值域进行分类)；
- (II)都是跟X有关，先简化，再计算!
- (III)即计算$P\{X\le -0.5, Y<4\}$，但它只与X有关，不必求联合分布函数

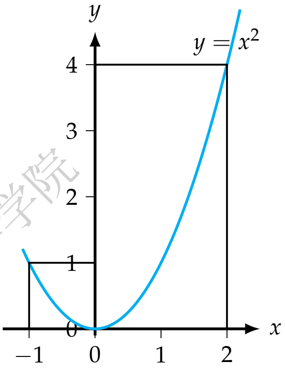
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1)



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(1) Y的取值范围为$[0,4]$，故

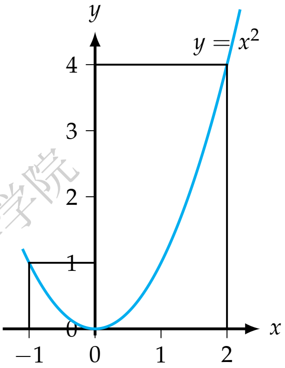


电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(1) Y的取值范围为$[0,4]$，故

当$y<0$时，$F(y)=P\{Y\leq y\}=0$

当$y\geq 4$时，$F(y)=P\{Y\leq y\}=1$

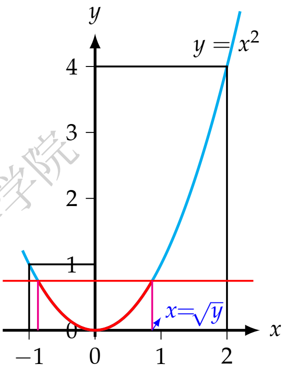


电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解: (1) Y的取值范围为$[0,4]$，故

当$y<0$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=0$
当$y\ge 4$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=1$
当$0\le y<1$时

$F(y)=P\{Y\le y\}=$

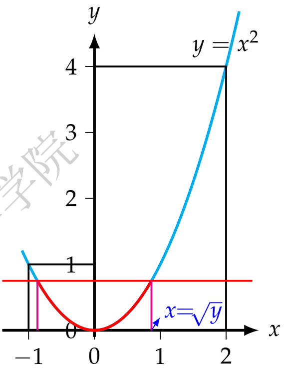


电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(1) Y的取值范围为$[0,4]$，故

当$y<0$时，$F(y)=P\{Y\leq y\}=0$
当$y\geq 4$时，$F(y)=P\{Y\leq y\}=1$
当$0\leq y<1$时
$F(y)=P\{Y\leq y\}=P\{-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y}\}$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

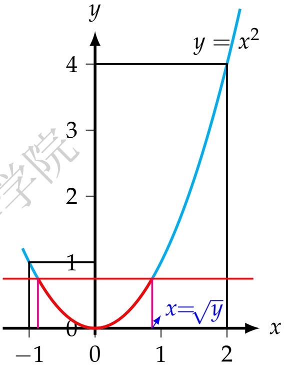


解： (1) Y的取值范围为$[0,4]$，故

当$y<0$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=0$
当$y\ge 4$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=1$
当$0\le y<1$时

$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx$$

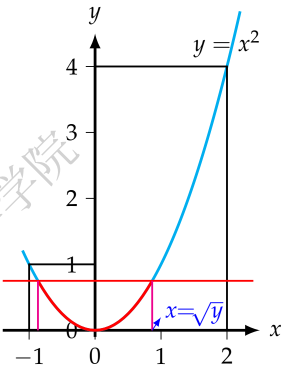


电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解： (1) Y的取值范围为$[0,4]$，故

当$y<0$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=0$
当$y\ge 4$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=1$
当$0\le y<1$时

$$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y}\}$$
$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3\sqrt{y}}{4}$$



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

解：(1) Y的取值范围为$[0,4]$，故

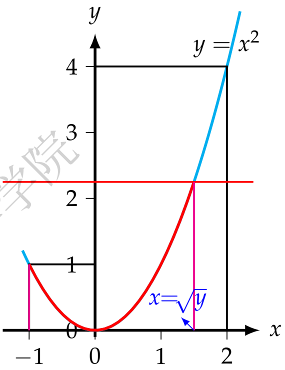
当$y<0$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=0$
当$y\ge 4$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=1$
当$0\le y<1$时

$$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3\sqrt{y}}{4}$$

当$1\le y<4$时

$$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{-1\le X\le\sqrt{y}\}$$



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

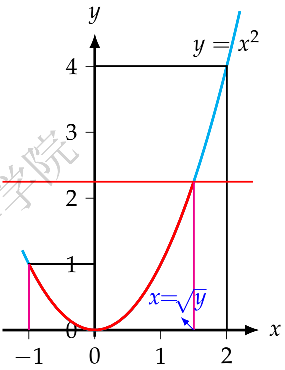
解：(1) Y的取值范围为$[0,4]$，故

当$y<0$时，$F(y)=P\{Y\leq y\}=0$
当$y\geq 4$时，$F(y)=P\{Y\leq y\}=1$
当$0\leq y<1$时

$$F(y)=P\{Y\leq y\}=P\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\}$$
$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3\sqrt{y}}{4}$$

当$1\leq y<4$时

$$F(y)=P\{Y\leq y\}=P\{-1\leq X\leq\sqrt{y}\}$$
$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx$$



电子科技大学 数学科学学院 杨宇明

解：(1) Y的取值范围为$[0,4]$，故

当$y<0$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=0$
当$y\ge 4$时，$F(y)=P\{Y\le y\}=1$
当$0\le y<1$时

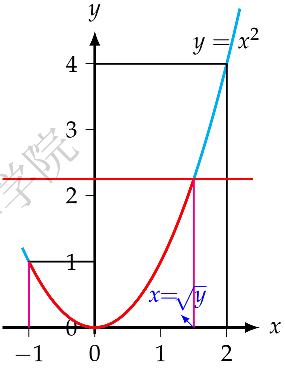
$$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{3\sqrt{y}}{4}$$

当$1\le y<4$时

$$F(y)=P\{Y\le y\}=P\{-1\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$$



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

综上所述:Y的分布函数为

$$F(y) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

综上所述:Y的分布函数为

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ & \\ & \end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

综上所述:Y的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ & \\ & \end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

综上所述:Y的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\leq y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\leq z<4\end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

综上所述:Y的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\le z<4\\ 1, & y\ge 4\end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

综上所述:Y的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\le z<4\\ 1, & y\ge 4\end{cases}$$

所以:Y的概率密度为

$$f_Y(y)=F^{'}(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0\le y<1\\ \\ \\ \end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

综上所述:Y的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\le z<4\\ 1, & y\ge 4\end{cases}$$

所以:Y的概率密度为

$$f_Y(y)=F^{'}(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le z<4\end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

综上所述:Y的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\le z<4\\ 1, & y\ge 4\end{cases}$$

所以:Y的概率密度为

$$f_Y(y)=F'(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le z<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

由协方差的计算公式:

$$cov(X, Y) = cov(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2)$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

由协方差的计算公式:

$$cov(X, Y) = cov(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2)$$

又由一元函数期望的计算公式:

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

由协方差的计算公式:

$$cov(X,Y)=cov(X,X^2)=E(X^3)-E(X)E(X^2)$$

又由一元函数期望的计算公式:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}dx=\frac{1}{4}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

由协方差的计算公式:

$$cov(X,Y)=cov(X,X^2)=E(X^3)-E(X)E(X^2)$$

又由一元函数期望的计算公式:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}dx=\frac{1}{4}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x^2}{4}dx=\frac{5}{6}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

由协方差的计算公式:

$$cov(X,Y)=cov(X,X^2)=E(X^3)-E(X)E(X^2)$$

又由一元函数期望的计算公式:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}dx=\frac{1}{4}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x^2}{4}dx=\frac{5}{6}$$

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}x^3f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x^3}{4}dx=\frac{7}{8}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

由协方差的计算公式:

$$cov(X,Y)=cov(X,X^2)=E(X^3)-E(X)E(X^2)$$

又由一元函数期望的计算公式:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}dx=\frac{1}{4}$$

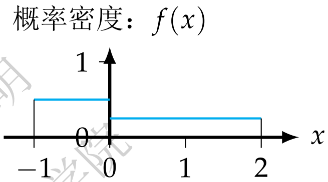
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x^2}{4}dx=\frac{5}{6}$$

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}x^3f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{2}dx+\int_{0}^{2}\frac{x^3}{4}dx=\frac{7}{8}$$

所以:$cov(X,Y)=\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$

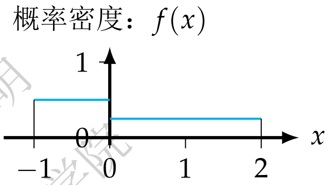
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

根据二维随机变量分布函数的定义:



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

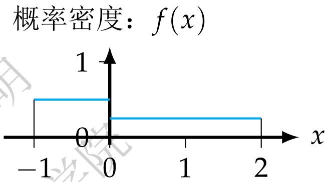
根据二维随机变量分布函数的定义:



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

根据二维随机变量分布函数的定义:

$$F(-\frac{1}{2},4)=P\{X\le-\frac{1}{2},Y\le4\}$$

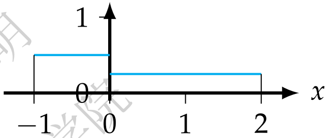


电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

根据二维随机变量分布函数的定义:

$$
\begin{aligned}
F(-\frac{1}{2},4) &= P\{X \le -\frac{1}{2}, Y \le 4\} \\
&= P\{X \le -\frac{1}{2}, X^2 \le 4\}
\end{aligned}
$$

概率密度：$f(x)$

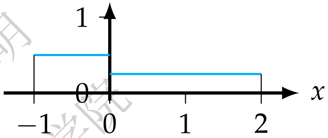


电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

根据二维随机变量分布函数的定义:

$$
\begin{aligned}
F(-\frac{1}{2},4) &= P\{X \le -\frac{1}{2}, Y \le 4\} \\
&= P\{X \le -\frac{1}{2}, X^2 \le 4\} \\
&= P\{-2 \le X \le -\frac{1}{2}\}
\end{aligned}
$$

概率密度：$f(x)$

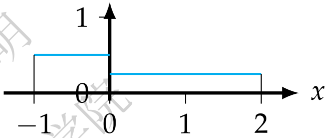


电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

根据二维随机变量分布函数的定义:

$$
\begin{aligned}
F(-\frac{1}{2},4) &= P\{X \le -\frac{1}{2}, Y \le 4\} \\
&= P\{X \le -\frac{1}{2}, X^2 \le 4\} \\
&= P\{-2 \le X \le -\frac{1}{2}\} \\
&= \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f_X(x)dx
\end{aligned}
$$

概率密度：$f(x)$

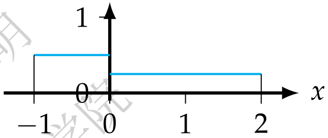


电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

根据二维随机变量分布函数的定义:

$$
\begin{aligned}
F(-\frac{1}{2},4) &= P\{X \le -\frac{1}{2}, Y \le 4\} \\
&= P\{X \le -\frac{1}{2}, X^2 \le 4\} \\
&= P\{-2 \le X \le -\frac{1}{2}\} \\
&= \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f_X(x)dx \\
&= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}dx \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

概率密度：$f(x)$



电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 15:

1. 设随机变量X, Y相互独立，且EX, EY存在，
记$U = max\{X, Y\}, V = min\{X, Y\}$，则$E(UV) = (\quad)$
(1) $EU \cdot EV$, (2) $EX \cdot EY$,
(3) $EU \cdot EY$, (4) $EX \cdot EV$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 15:

1. 设随机变量X, Y相互独立，且EX, EY存在，记$U = max\{X, Y\}, V = min\{X, Y\}$，则$E(UV) = (\quad)$
   (1) $EU \cdot EV$, (2) $EX \cdot EY$,
   (3) $EU \cdot EY$, (4) $EX \cdot EV$
2. 设二维随机变量(X, Y)服从二维正态$N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$则$E(XY^2) =$ ______.

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 15:

1. 设随机变量X, Y相互独立，且EX, EY存在，记$U = max\{X, Y\}, V = min\{X, Y\}$，则$E(UV) = ($　$)$
   (1) $EU \cdot EV$,　(2) $EX \cdot EY$,
   (3) $EU \cdot EY$,　(4) $EX \cdot EV$
2. 设二维随机变量(X, Y)服从二维正态$N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$则$E(XY^2) =$ ______.
3. 将长度为$1m$的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为______。

数学科学学院

例 15:

1. 设随机变量X, Y相互独立，且EX, EY存在，记$U = max\{X, Y\}, V = min\{X, Y\}$，则$E(UV) = (\quad)$
   (1) $EU \cdot EV$，(2) $EX \cdot EY$，
   (3) $EU \cdot EY$，(4) $EX \cdot EV$
2. 设二维随机变量(X, Y)服从二维正态$N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$
   则$E(XY^2) =$ ______.
3. 将长度为$1m$的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为______。
4. 设连续型随机变量X_1, X_2相互独立，且方差均存在，X_1, X_2的概率密度分别为$f_1(x), f_2(x)$，随机变量Y_1的概率密度为
   $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}(f_1(y) + f_2(y))$，随机变量$Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$则$(\quad)$
   (1) $EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$ (2) $EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$
   (3) $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$ (4) $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$

电子科技大学 数学科学学院

4. 显然$E(Y_2)=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2)), D(Y_2)=\frac{1}{4}(D(X_1)+D(X_2))$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

4. 显然$E(Y_2)=\dfrac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2)), D(Y_2)=\dfrac{1}{4}(D(X_1)+D(X_2))$
关键是$E(Y_1), D(Y_1)$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

4. 显然$E(Y_2)=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2)), D(Y_2)=\frac{1}{4}(D(X_1)+D(X_2))$
关键是$E(Y_1), D(Y_1)$

$$E(Y_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{2}(f_1(y)+f_2(y))dy=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2))$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

4. 显然$E(Y_2)=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2)), D(Y_2)=\frac{1}{4}(D(X_1)+D(X_2))$
关键是$E(Y_1), D(Y_1)$

$$E(Y_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{2}(f_1(y)+f_2(y))dy=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2))$$

$$E(Y_1^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{2}(f_1(y)+f_2(y))dy=\frac{1}{2}(E(X_1^2)+E(X_2^2))$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

4. 显然$E(Y_2)=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2)), D(Y_2)=\frac{1}{4}(D(X_1)+D(X_2))$
关键是$E(Y_1), D(Y_1)$

$$E(Y_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{2}(f_1(y)+f_2(y))dy=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2))$$

$$E(Y_1^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{2}(f_1(y)+f_2(y))dy=\frac{1}{2}(E(X_1^2)+E(X_2^2))$$

$$\therefore D(Y_1)=\frac{1}{2}(E(X_1^2)+E(X_2^2))-[\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2))]^2$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

4. 显然$E(Y_2)=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2)), D(Y_2)=\frac{1}{4}(D(X_1)+D(X_2))$
关键是$E(Y_1), D(Y_1)$

$$E(Y_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{2}(f_1(y)+f_2(y))dy=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2))$$

$$E(Y_1^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{2}(f_1(y)+f_2(y))dy=\frac{1}{2}(E(X_1^2)+E(X_2^2))$$

$$\begin{aligned}\therefore D(Y_1)&=\frac{1}{2}(E(X_1^2)+E(X_2^2))-[\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2))]^2\\&=\frac{1}{4}(D(X_1)+D(X_2))+\frac{1}{4}(E(X_1^2)+E(X_2^2)-2E(X_1)E(X_2))\end{aligned}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

4. 显然$E(Y_2)=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2)), D(Y_2)=\frac{1}{4}(D(X_1)+D(X_2))$
关键是$E(Y_1), D(Y_1)$

$$E(Y_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{2}(f_1(y)+f_2(y))dy=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2))$$

$$E(Y_1^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^2}{2}(f_1(y)+f_2(y))dy=\frac{1}{2}(E(X_1^2)+E(X_2^2))$$

$$\therefore D(Y_1)=\frac{1}{2}(E(X_1^2)+E(X_2^2))-[\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2))]^2$$

$$=\frac{1}{4}(D(X_1)+D(X_2))+\frac{1}{4}(E(X_1^2)+E(X_2^2)-2E(X_1)E(X_2))$$

$$E[(X_1-X_2)^2]=E(X_1^2)+E(X_2^2)-2E(X_1)E(X_2)\geq 0$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 15:

5. 设随机变量X, Y不相关，且$EX = 2, EY = 1, DX = 3$，
则$E(X(X + Y - 2)) = (\quad)$
(1) -3, (2) 3, (3) -5, (4) 5

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 15:

5. 设随机变量X, Y不相关，且$EX = 2, EY = 1, DX = 3$，则$E(X(X + Y - 2)) = (\quad)$
 (1) -3, (2) 3, (3) -5, (4) 5
6. 随机试验E有两两不相容的结果A_1, A_2, A_3，且三种结果发生的概率均为$\frac{1}{3}$，将试验E独立重复做2次，X表示2次试验中A_1发生的次数，Y表示2次试验中A_2发生的次数，则X与Y的相关系数为$(\quad)$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

6. 解法(1)，X, Y的联合分布律为

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	1/9	2/9	1/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9
2	1/9	0	0	1/9
$p_{\cdot j}$	4/9	4/9	1/9	1

解法(2)，$X \sim B(2, 1/3), Y \sim B(2, 1/3)$

$EX = EY = 2/3, DX = DY = 4/9$

$E(XY) = 1 \times 1 \times P\{X = 1, Y = 1\} = 2/9,\ \rho = -1/2$

电子科技大学 杨宏明 数学科学学院

6. 解法(3):

$$\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{cov(X,2-X-Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$
$$=\frac{-cov(X,X)-cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$
$$=\frac{-cov(X,X)+cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$
$$\therefore 2\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{-cov(X,X)}{\sqrt{DX}\sqrt{DX}}=-1$$
$$\therefore \rho=-1/2$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

7. 设随机变量X的分布函数$F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$E(X)$?

$f(x)=F^{'}(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi(\frac{x-4}{2})$

所以:

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

7. 设随机变量X的分布函数$F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$E(X)$?
$f(x)=F^{'}(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi(\frac{x-4}{2})$
所以：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

7. 设随机变量X的分布函数$F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$E(X)$?

$f(x)=F'(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi(\frac{x-4}{2})$

所以：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}0.5x\varphi(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}0.25x\varphi(\frac{x-4}{2})dx$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

7. 设随机变量X的分布函数$F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$E(X)$?

$f(x)=F^{'}(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi(\frac{x-4}{2})$

所以:

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 0.5x\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 0.25x\varphi(\frac{x-4}{2})dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 0.25x\varphi(\frac{x-4}{2})dx \end{aligned}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

7. 设随机变量X的分布函数$F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$E(X)$?

$f(x)=F^{'}(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi(\frac{x-4}{2})$

所以：

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 0.5x\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 0.25x\varphi(\frac{x-4}{2})dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 0.25x\varphi(\frac{x-4}{2})dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 0.5(2t+4)\varphi(t)dt
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

7. 设随机变量X的分布函数$F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$E(X)$?

$f(x)=F'(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi(\frac{x-4}{2})$

所以:

$$\begin{aligned}EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 0.5x\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 0.25x\varphi(\frac{x-4}{2})dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 0.25x\varphi(\frac{x-4}{2})dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 0.5(2t+4)\varphi(t)dt \\ &=2\end{aligned}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

7. 设随机变量X的分布函数$F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$E(X)$?

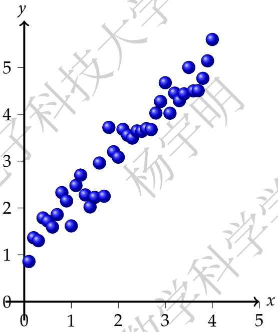
$f(x)=F'(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi(\frac{x-4}{2})$

所以：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}0.5x\varphi(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}0.25x\varphi(\frac{x-4}{2})dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}0.5x\varphi(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}0.5\frac{x}{\sqrt{2\pi}2}e^{\frac{(x-4)^2}{2\times 4}}dx=2$$

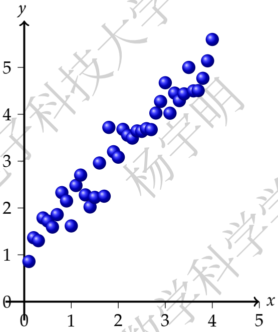
电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

一个概念的讨论：为什么相关系数ρ反应的是线性关系？



电子科技大学 杨学明 数学科学学院

一个概念的讨论：为什么相关系数ρ反应的是线性关系？



电子科技大学 杨学明 数学科学学院

考虑: $\alpha X+\beta$ 近似Y产生的均方误差:$MSE = E(Y-\alpha X-\beta)^2$。

均方误差$(mean - square - error, MSE)$是反映估计量与被估计量之间差异程度的一种度量

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

均方误差$(mean - square - error, MSE)$是反映估计量与被估计量之间差异程度的一种度量

$$MSE = E(Y^2 + \alpha^2 X^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta X - 2\alpha XY - 2\beta Y)$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

均方误差$(mean - square - error, MSE)$是反映估计量与被估计量之间差异程度的一种度量

$$MSE = E(Y^2 + \alpha^2 X^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta X - 2\alpha XY - 2\beta Y)$$

为了让MSE取到最小值，需要解驻点方程组

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

均方误差($mean - square - error, MSE$)是反映估计量与被估计量之间差异程度的一种度量

$$MSE = E(Y^2 + \alpha^2 X^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta X - 2\alpha XY - 2\beta Y)$$

为了让MSE取到最小值，需要解驻点方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial MSE}{\partial \alpha} = & 2E(X^2)\alpha + 2E(X)\beta - 2E(XY) = 0 \\ \frac{\partial MSE}{\partial \beta} = & 2E(X)\alpha + 2\beta - 2E(Y) = 0 \end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

均方误差$(mean-square-error, MSE)$是反映估计量与被估计量之间差异程度的一种度量

$$MSE = E(Y^2+\alpha^2X^2+\beta^2+2\alpha\beta X-2\alpha XY-2\beta Y)$$

为了让MSE取到最小值，需要解驻点方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial MSE}{\partial \alpha} = & 2E(X^2)\alpha+2E(X)\beta-2E(XY)=0 \\ \frac{\partial MSE}{\partial \beta} = & 2E(X)\alpha+2\beta-2E(Y)=0 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} \alpha = & \dfrac{cov(X,Y)}{D(X)} \\ \beta = & E(Y)-\dfrac{cov(X,Y)}{D(X)}E(X) \end{cases}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

再次代回MSE化简整理可得

$$\underset{min}{MSE}=(1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

再次代回MSE化简整理可得

$$\underset{min}{MSE} = (1 - \rho_{XY}^2)D(Y)$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

再次代回MSE化简整理可得

$$\underset{min}{MSE} = (1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

再次代回MSE化简整理可得

$$\underset{min}{MSE} = (1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

再次代回MSE化简整理可得

$$\underset{min}{MSE} = (1 - \rho_{XY}^2)D(Y)$$

- 这意味着$|\rho|$越大，用$\alpha X + \beta$近似Y产生的最小均方误差:$MSE = E(Y - \alpha X - \beta)^2$就越小;

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

再次代回MSE化简整理可得

$$\underset{min}{MSE} = (1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

- 这意味着$|\rho|$越大，用$\alpha X+\beta$近似Y产生的最小均方误差:$MSE = E(Y-\alpha X-\beta)^2$就越小;
- 当$|\rho|=1$时，均方误差为0，表明Y与X有良好的线性关系。

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

再次代回MSE化简整理可得

$$\underset{min}{MSE} = (1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

- 这意味着$|\rho|$越大，用$\alpha X+\beta$近似Y产生的最小均方误差:$MSE = E(Y-\alpha X-\beta)^2$就越小;
- 当$|\rho| = 1$时，均方误差为0，表明Y与X有良好的线性关系。
- 当$\rho = 0$时，均方误差等于$D(Y)$，这意味着用X的一个线性表达去近似Y产生的均方误差完全与X无关，仅仅取决于随机变量Y自身的波动。可以认为Y与X没有线性相关。

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

例17:试证：若X, Y都是只取两个值的随机变量，则X, Y不相关时，X, Y一定相互独立。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例17:试证：若X, Y都是只取两个值的随机变量，则X, Y不相关时，X, Y一定相互独立。

证明：设(X, Y)的联合分布律为

X \ Y	c	d	$p_{i\cdot}$
a	p_{11}	$p_1 - p_{11}$	p_1
b	$p_2 - p_{11}$	$1 - p_1 - p_2 + p_{11}$	$1 - p_1$
$p_{\cdot j}$	p_2	$1 - p_2$	1

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例17:试证：若X, Y都是只取两个值的随机变量，则X, Y不相关时，X, Y一定相互独立。

证明：设(X, Y)的联合分布律为

X \ Y	c	d	$p_{i\cdot}$
a	p_{11}	$p_1 - p_{11}$	p_1
b	$p_2 - p_{11}$	$1 - p_1 - p_2 + p_{11}$	$1 - p_1$
$p_{\cdot j}$	p_2	$1 - p_2$	1

若X, Y不相关，则有$EXY = EX \cdot EY$，

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例17:试证：若X, Y都是只取两个值的随机变量，则X, Y不相关时，X, Y一定相互独立。

证明：设(X, Y)的联合分布律为

X \ Y	c	d	$p_{i\cdot}$
a	p_{11}	$p_1 - p_{11}$	p_1
b	$p_2 - p_{11}$	$1 - p_1 - p_2 + p_{11}$	$1 - p_1$
$p_{\cdot j}$	p_2	$1 - p_2$	1

若X, Y不相关，则有$EXY = EX \cdot EY$，
即:

$$
\begin{aligned}
&acp_{11} + ad(p_1 - p_{11}) + bc(p_2 - p_{11}) + bd(1 - p_1 - p_1 + p_{11}) \\
=&(ap_1 + b(1 - p_1))(cp_2 + d(1 - p_2)) \\
=&acp_1p_2 + adp_1(1 - p_2) + bc(1 - p_1)p_2 + bd(1 - p_1)(1 - p_2)
\end{aligned}
$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

展开并消去左侧和右侧相等的项得到:

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

展开并消去左侧和右侧相等的项得到:

$$\begin{aligned} & acp_{11} - adp_{11} - bcp_{11} + bdp_{11} \\ = & acp_1 p_2 - adp_1 p_2 - bcp_1 p_2 + bdp_1 p_2 \end{aligned}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

展开并消去左侧和右侧相等的项得到:

$$
\begin{aligned}
& acp_{11} - adp_{11} - bcp_{11} + bdp_{11} \\
= & acp_1 p_2 - adp_1 p_2 - bcp_1 p_2 + bdp_1 p_2
\end{aligned}
$$

整理得到:

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

展开并消去左侧和右侧相等的项得到:

$$\begin{aligned} & acp_{11} - adp_{11} - bcp_{11} + bdp_{11} \\ = & acp_1p_2 - adp_1p_2 - bcp_1p_2 + bdp_1p_2 \end{aligned}$$

整理得到:

$$(ac - ad - bc + bd)p_{11} = (ac - ad - bc + bd)p_1p_2$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

展开并消去左侧和右侧相等的项得到:

$$\begin{aligned} & acp_{11} - adp_{11} - bcp_{11} + bdp_{11} \\ =& acp_1p_2 - adp_1p_2 - bcp_1p_2 + bdp_1p_2 \end{aligned}$$

整理得到:

$$(ac - ad - bc + bd)p_{11} = (ac - ad - bc + bd)p_1p_2$$

即得到:

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

展开并消去左侧和右侧相等的项得到:

$$\begin{aligned} & acp_{11} - adp_{11} - bcp_{11} + bdp_{11} \\ = & acp_1p_2 - adp_1p_2 - bcp_1p_2 + bdp_1p_2 \end{aligned}$$

整理得到:

$$(ac - ad - bc + bd)p_{11} = (ac - ad - bc + bd)p_1p_2$$

即得到: $p_{11} = p_1p_2$,

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

展开并消去左侧和右侧相等的项得到:

$$
\begin{aligned}
&acp_{11} - adp_{11} - bcp_{11} + bdp_{11} \\
=&acp_1p_2 - adp_1p_2 - bcp_1p_2 + bdp_1p_2
\end{aligned}
$$

整理得到:

$$(ac - ad - bc + bd)p_{11} = (ac - ad - bc + bd)p_1p_2$$

即得到: $p_{11} = p_1p_2$，这意味着:

$$P\{X = a, Y = c\} = P\{X = a\}P\{Y = c\}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

展开并消去左侧和右侧相等的项得到:

$$\begin{aligned}&acp_{11} - adp_{11} - bcp_{11} + bdp_{11}\\ =&acp_1p_2 - adp_1p_2 - bcp_1p_2 + bdp_1p_2\end{aligned}$$

整理得到:

$$(ac - ad - bc + bd)p_{11} = (ac - ad - bc + bd)p_1p_2$$

即得到: $p_{11} = p_1p_2$, 这意味着:

$$P\{X = a, Y = c\} = P\{X = a\}P\{Y = c\}$$

类似的方法可以证明:

$$P\{X = a, Y = d\} = P\{X = a\}P\{Y = d\}$$
$$P\{X = b, Y = c\} = P\{X = b\}P\{Y = c\}$$
$$P\{X = b, Y = d\} = P\{X = b\}P\{Y = d\}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

展开并消去左侧和右侧相等的项得到:

$$
\begin{aligned}
& acp_{11} - adp_{11} - bcp_{11} + bdp_{11} \\
= & acp_1p_2 - adp_1p_2 - bcp_1p_2 + bdp_1p_2
\end{aligned}
$$

整理得到:

$$(ac - ad - bc + bd)p_{11} = (ac - ad - bc + bd)p_1p_2$$

即得到: $p_{11} = p_1p_2$ ，这意味着:

$$P\{X = a, Y = c\} = P\{X = a\}P\{Y = c\}$$

类似的方法可以证明:

$$
\begin{aligned}
P\{X = a, Y = d\} &= P\{X = a\}P\{Y = d\} \\
P\{X = b, Y = c\} &= P\{X = b\}P\{Y = c\} \\
P\{X = b, Y = d\} &= P\{X = b\}P\{Y = d\}
\end{aligned}
$$

这就证明了X, Y 是相互独立的。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 18:

将n封不同的信的n张信笺与n个信封进行随机匹配，记N为匹配成对数，求N 的望？

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 18:

将n封不同的信的n张信笺与n个信封进行随机匹配，记N为匹配成对数，求N 的望？

分析:

- 分布律虽然是可以求出来的，但期望不好算（错配!）

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 18:

将n封不同的信的n张信笺与n个信封进行随机匹配，记N为匹配成对数，求N 的望？

分析:

- 分布律虽然是可以求出来的，但期望不好算（错配!）
- 可考虑用期望性质算

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例 18:

将n封不同的信的n张信笺与n个信封进行随机匹配，记N为匹配成对数，求N 的望？

分析:

- 分布律虽然是可以求出来的，但期望不好算（错配!）
- 可考虑用期望性质算

解: 设 X_i为第$i(i=1,2,\cdots,n)$个信封与信笺匹配成对数，则

电子科技大学 杨宏明 数学科学学院

例 18:

将n封不同的信的n张信笺与n个信封进行随机匹配，记N为匹配成对数，求N 的望？

分析:

- 分布律虽然是可以求出来的，但期望不好算（错配!）
- 可考虑用期望性质算

解: 设 X_i为第$i(i=1,2,\cdots,n)$个信封与信笺匹配成对数，则

$$N=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

电子科技大学 杨宗明 数学科学学院

例 18:

将n封不同的信的n张信笺与n个信封进行随机匹配，记N为匹配成对数，求N 的望?

分析:

- 分布律虽然是可以求出来的，但期望不好算（错配!）
- 可考虑用期望性质算

解: 设 X_i为第$i(i=1,2,\cdots,n)$个信封与信笺匹配成对数，则

$$N=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

根据抽签公平性：$X_i(i=1,2,\cdots,n)$同分布且都服从$0-1$分布，分布律为:

电子科技大学 杨宏明 数学科学学院

例 18:

将n封不同的信的n张信笺与n个信封进行随机匹配，记N为匹配成对数，求N 的望？

分析:

- 分布律虽然是可以求出来的，但期望不好算（错配!）
- 可考虑用期望性质算

解: 设 X_i为第$i(i=1,2,\cdots,n)$个信封与信笺匹配成对数，则

$$N=\sum_{i=1}^{n} X_i$$

根据抽签公平性：$X_i(i=1,2,\cdots,n)$同分布且都服从$0-1$分布，分布律为:

X_i	0	1
p_i	1-1/n	1/n

电子科技大学 杨宏明 数学科学学院

所以

$$E(X_i) = 1/n \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

所以

$$E(X_i) = 1/n \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$EN = E(\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

所以

$$E(X_i) = 1/n \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$EN = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 1$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例19:

在网球比赛中有一个规则叫：长盘决胜制。假如两个人在网球比赛中进入决胜盘比赛，胜出规则为有一人至少胜出6局且净胜出2局，假定每局比赛中两个人获胜的概率都是1/2，问决胜盘平均要赛多少局？

分析:

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

例19:

在网球比赛中有一个规则叫：长盘决胜制。假如两个人在网球比赛中进入决胜盘比赛，胜出规则为有一人至少胜出6局且净胜出2局，假定每局比赛中两个人获胜的概率都是$1/2$，问决胜盘平均要赛多少局？

分析：

- 设比赛所用的局数为X，X可取值$6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16\cdots;$

电子科技大学 何宇明 数学科学学院

例19:

在网球比赛中有一个规则叫：长盘决胜制。假如两个人在网球比赛中进入决胜盘比赛，胜出规则为有一人至少胜出6局且净胜出2局，假定每局比赛中两个人获胜的概率都是$1/2$，问决胜盘平均要赛多少局？

分析：

- 设比赛所用的局数为X，X可取值$6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16 \cdots$;
- 注意：获胜可分为甲获胜或乙获胜。

电子科技大学 何宇明 数学科学学院

例19:

在网球比赛中有一个规则叫：长盘决胜制。假如两个人在网球比赛中进入决胜盘比赛，胜出规则为有一人至少胜出6局且净胜出2局，假定每局比赛中两个人获胜的概率都是$1/2$，问决胜盘平均要赛多少局？

分析：

- 设比赛所用的局数为X，X可取值$6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16\cdots$;
- 注意：获胜可分为甲获胜或乙获胜。

解：设比赛所用的局数为X，X可取值$6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16\cdots$，

电子科技大学 何宇明 数学科学学院

例19:

在网球比赛中有一个规则叫：长盘决胜制。假如两个人在网球比赛中进入决胜盘比赛，胜出规则为有一人至少胜出6局且净胜出2局，假定每局比赛中两个人获胜的概率都是1/2，问决胜盘平均要赛多少局？

分析：

- 设比赛所用的局数为X，X可取值$6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16 \cdots$;
- 注意：获胜可分为甲获胜或乙获胜。

解：设比赛所用的局数为X，X可取值$6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16 \cdots$，记事件$A_k$ ={甲用了k局获胜}，B_k ={乙用了k局获胜}

电子科技大学 数学科学学院 杨宇明

例19:

在网球比赛中有一个规则叫：长盘决胜制。假如两个人在网球比赛中进入决胜盘比赛，胜出规则为有一人至少胜出6局且净胜出2局，假定每局比赛中两个人获胜的概率都是$1/2$，问决胜盘平均要赛多少局？

分析：

- 设比赛所用的局数为X，X可取值$6,7,8,9,10,12,14,16\cdots$；
- 注意：获胜可分为甲获胜或乙获胜。

解：设比赛所用的局数为X，X可取值$6,7,8,9,10,12,14,16\cdots$，记事件$A_k=${甲用了$k$局获胜}，$B_k=${乙用了$k$局获胜}

$$P\{X=k\}=P(A_k\cup B_k)=2P(A_k)$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

所以X的分布律为：

X	6	7	8	9	10
p	$2C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$2C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$2C_7^5\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$2C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^9$	$2C_9^5\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

X	12	14	$\cdots$	2k	$\cdots$
p	$2C_{10}^5\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$	$2C_{10}^5\left(\frac{1}{2}\right)^{13}$	$\cdots$	$2C_{10}^5\left(\frac{1}{2}\right)^{k+6}$	$\cdots$

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

所以X的分布律为：

X	6	7	8	9	10
p	$2C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$2C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$2C_7^5\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$2C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^9$	$2C_9^5\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

X	12	14	$\cdots$	2k	$\cdots$
p	$2C_{10}^5\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$	$2C_{10}^5\left(\frac{1}{2}\right)^{13}$	$\cdots$	$2C_{10}^5\left(\frac{1}{2}\right)^{k+6}$	$\cdots$

$$EX = 2\left(\sum_{k=6}^{10} kC_{k-1}^5\left(\frac{1}{2}\right)^k + C_{10}^5\sum_{k=6}^{\infty} 2k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+6}\right) \approx 10.0313$$

电子科技大学 杨学明 数学科学学院

柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式:

对两个随机变量X, Y，若$E(X^2), E(Y^2)$存在，证明

$$E^2(XY) \le E(X^2)E(Y^2).$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式：

对两个随机变量X, Y，若$E(X^2), E(Y^2)$存在，证明

$$E^2(XY) \le E(X^2)E(Y^2).$$

分析：柯西-施瓦兹不等式常用构造一元二次实函数证明。

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式：

对两个随机变量X, Y，若$E(X^2), E(Y^2)$存在，证明

$$E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2).$$

分析：柯西-施瓦兹不等式常用构造一元二次实函数证明。

证明：考虑t的一元二次函数

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式:

对两个随机变量X, Y，若$E(X^2), E(Y^2)$存在，证明

$$E^2(XY) \le E(X^2)E(Y^2).$$

分析：柯西-施瓦兹不等式常用构造一元二次实函数证明。

证明：考虑t的一元二次函数

$$f(t) = E[(X+tY)^2]$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式:

对两个随机变量X, Y，若$E(X^2), E(Y^2)$存在，证明

$$E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2).$$

分析：柯西-施瓦兹不等式常用构造一元二次实函数证明。

证明：考虑t的一元二次函数

$$\begin{aligned} f(t) =& E[(X+tY)^2] \\ =& E(X^2) + 2tE(XY) + t^2E(Y^2) \geq 0 \end{aligned}$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式：

对两个随机变量X, Y，若$E(X^2), E(Y^2)$存在，证明

$$E^2(XY) \le E(X^2)E(Y^2).$$

分析：柯西-施瓦兹不等式常用构造一元二次实函数证明。

证明：考虑t的一元二次函数

$$\begin{aligned} f(t) &= E[(X+tY)^2] \\ &= E(X^2) + 2tE(XY) + t^2E(Y^2) \ge 0 \end{aligned}$$

$$\text{故}\Delta = 4E^2(XY) - 4E(X^2)E(Y^2) \le 0$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

柯西-施瓦兹(Cauchy-Schwarz)不等式：

对两个随机变量X, Y，若$E(X^2), E(Y^2)$存在，证明

$$E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2).$$

分析：柯西-施瓦兹不等式常用构造一元二次实函数证明。

证明：考虑t的一元二次函数

$$\begin{aligned} f(t) =& E[(X+tY)^2] \\ =& E(X^2) + 2tE(XY) + t^2E(Y^2) \geq 0 \\ \text{故}\Delta =& 4E^2(XY) - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0 \end{aligned}$$

即

$$E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2).$$

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

总结:

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

总结：

- 分布函数、概率密度和分布律刻画了随机变量的概率分布，一般来讲是计算概率的关键；

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

总结：

- 分布函数、概率密度和分布律刻画了随机变量的概率分布，一般来讲是计算概率的关键；
- 条件分布和独立性讨论了两个随机变量之间的关系，讨论关系一般就是指这两种情形；

电子科技大学 杨宇明 数学科学学院

总结：

- 分布函数、概率密度和分布律刻画了随机变量的概率分布，一般来讲是计算概率的关键；
- 条件分布和独立性讨论了两个随机变量之间的关系，讨论关系一般就是指这两种情形；
- 遇到复杂问题时最好分情况讨论，当加一个"限制"在问题上时，问题往往会被简化；

电子科技大学 数学科学学院 数学科学学院

总结:

- 分布函数、概率密度和分布律刻画了随机变量的概率分布，一般来讲是计算概率的关键;
- 条件分布和独立性讨论了两个随机变量之间的关系，讨论关系一般就是指这两种情形;
- 遇到复杂问题时最好分情况讨论，当加一个"限制"在问题上时，问题往往会被简化;
- 即便抽象能力很强，使用图形辅助解决问题往往让问题变得形象，因此更容易理解。

数学科学学院

总结:

- 分布函数、概率密度和分布律刻画了随机变量的概率分布，一般来讲是计算概率的关键;
- 条件分布和独立性讨论了两个随机变量之间的关系，讨论关系一般就是指这两种情形;
- 遇到复杂问题时最好分情况讨论，当加一个"限制"在问题上时，问题往往会被简化;
- 即便抽象能力很强，使用图形辅助解决问题往往让问题变得形象，因此更容易理解。
- 最好熟悉基本结论，基本方法，问题不管怎么变化，基本的东西不会变。

XX科技大学 数学科学学院