座位号______ 考场教室______ 任课教师______ 学号______ 姓名______ 学院______

密……封……线……以……内……答……题……无……效

电子科技大学 2015-2016 学年第 2 学期期末考试 A 卷

考试科目：量子力学与统计物理 考试形式：一页纸开卷 考试日期： 2016 年 7 月 2 日

成绩构成比例：平时 20 %， 期中 20 %， 实验 0 %， 期末 60 %

本试卷由 七 部分构成，共 九 页。考试时长： 120 分钟 注：________

题号	一	二	三	四	五	六	七	合计
得分								

得 分

一、填空题（每空一分，共 20 分）

1、普朗克常数的大小为 $h = 6.62559 \times 10^{-34} J \cdot S$

2、定态是体系的一种特殊的状态，即能量的本征态。其特点是： 能量 具有确定值，且体系处于定态时，一切不显含时间的力学量的 平均值 及其测量值的 概率分布 都不随时间变化。

3、已知矩阵

$$S = \begin{pmatrix} m & i & 1 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，则有 \ S^T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ i & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}，\ S^+ = \begin{pmatrix} m^* & 0 & 0 \\ -i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4、德布罗意关系为 $E = h\nu = \hbar\omega$ 和 $\vec{p} = \frac{h}{\lambda}\vec{n} = \hbar\vec{k}$ 。

5、力学量 $\hat{F}$ 在运动中守恒的条件是：力学量算符 $\hat{F}$ 不显含时间 t 和 $\hat{F}$ 与哈米顿算符 $\hat{H}$ 对易。

6、如果算符 $\hat{F}$ 表示力学量 F，那么当体系处于 $\hat{F}$ 的本征态 φ_n 时，力学量 F 有确定值，这个值是 $\hat{F}$ 在 φ_n 中的 本征值 ，其特点是一个 实 数。

7、波函数满足标准条件，除了平方可积之外，还有 单值 、 有限 、 连续 。

8、宇称算符的本征值分别为 +1 、 -1 。

9、对于费米子构成的开放体系，现考虑一个能量为ε的单粒子态，可用占据数和能量（N,E_s）进行描述。则其吉布斯因子： 1 ， $e^{-\alpha-\beta\varepsilon}$ ，巨配分函数为 $1+e^{-\alpha-\beta\varepsilon}$ 。

得分

二、选择题（每题只有一个答案，多填答案不得分）（每题 4 分，共 20 分）

1、下列有关不确定性原理的说法，正确的是 （B）

A、不确定性源于测量误差

B、不确定性源于物质的波粒二象性

C、不确定性并不是物质本质特性

D、不确定度的大小与测量工具相关

2、下列哪个方程是自由粒子的薛定谔方程（ B ）

A. $$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\vec{r},t)\right]\psi(\vec{r},t)$$

B. $$i\hbar\frac{\partial\psi_P(\vec{r},t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi_{\vec{P}}(\vec{r},t)$$

C. $$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_1}\nabla_1^2-\frac{\hbar^2}{2\mu_2}\nabla_2^2+U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)\right)\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)$$

D. $$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2\right]\psi(x)=E\psi(x)$$

3、波函数 $\Psi\left(x,y,z,t\right)$ 的物理意义为（C）。

学院______ 姓名______ 学号______ 任课教师______ 考场教室______ 座位号______

密封线以内答题无效

A．在 t 时刻，粒子在点(x,y,z)处的几率为$\Psi\left(x,y,z,t\right)$。

B．在 t 时刻，粒子在点(x,y,z)处的几率为$\left|\Psi\left(x,y,z,t\right)\right|^2$。

C．在 t 时刻，粒子在点(x,y,z)处的几率密度$\left|\Psi\left(x,y,z,t\right)\right|^2$。

D．在 t 时刻，粒子在点(x,y,z)处的几率密度$\Psi\left(x,y,z,t\right)$。

4、下列算符是线性厄米算符的是 （B）

A、$\dfrac{d}{dx}$　　B、$i\dfrac{d}{dx}$　　C、$\hat{x}\hat{p}_x$　　D、e^{x^2}

5、自旋为 4$\hbar$，N 个全同粒子构成的理想气体，设系统能量在ε到ε+dε之间的微观态数目为 dΩ,其总离子数 N 可表示为：（D）

A、$N=\int_0^\infty \dfrac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}+1}\cdot d\Omega$　　B、$N=\int_0^\infty \dfrac{\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}+1}\cdot d\Omega$

C、$N=\int_0^\infty \dfrac{\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}-1}\cdot d\Omega$　　D、$N=\int_0^\infty \dfrac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}-1}\cdot d\Omega$

得 分

三、简答题（每题 4 分，共 20 分）

1、 试依据态叠加原理解释为什么单电子双缝干涉实验中电子是同时穿过两个缝的（4 分）。

答： 设电子穿过第一个缝的状态为 Ψ_1，穿过第二个缝的状态为 Ψ_2。由于电子是一个一个地发射并到达屏幕的，如果在实验过程中，每一个电子只是穿过其中一个缝，则屏上出现的应是两个单缝衍射图像的叠加。（2 分）这显然不可能是干涉条纹，因此，电子必然处于 $c_1\Psi_1+c_2\Psi_2$ 的叠加态，即它同时穿过两个缝，并与自身发生干涉形成于波条纹。（2 分）

2、试说明爱因斯坦的自发发射系数、受激辐射系数与吸收系数的物理意义。（ 共 4 分）

答：A_{mk} 称为原子体系由$\in_m$ 能级跃迁到$\in_k$ 能级的自发发射系数，它表示原子在单位时间内由$\in_m$ 能级自发跃迁到$\in_k$ 能级的几率。（ 2 分）

B_{mk} 称为受激发射系数，B_{km} 称为吸收系数。它们的意义分别是：设作用于原子的光波在$\omega \to \omega + d\omega$ 频率范围内的能量密度是$I(\omega)d(\omega)$，则在单位时间内原子由$\in_m$ 能级受激跃迁到$\in_k$ 能级、并发射出能量为$\hbar\omega_{mk}$ 的光子的几率是$B_{mk}I(\omega_{mk})$；（ 1 分）

在单位时间内原子由$\in_k$ 能级跃迁到$\in_m$ 能级、并吸收能量为$\hbar\omega_{mk}$ 的光子的几率是$B_{km}I(\omega_{mk})$。（ 1 分）

3、试述力学量完全集的含义，这个集合元素个数的特点 （4 分）

答：完全确定体系状态所需要的一组两两对易的力学量算符的最小（数目）集合称为一个力学量完全集。(2 分)，特点是所含力学量算符的个数等于体系的自由度（2 分）

4、 宏观态简并度的物理含义。(4 分)

答：宏观态是一个宏观物理量具有确定测量值的态（2 分)，一个宏观态通常包含许许多多的微观态，这些微观态的总数目称为它的简并度 Ω （2 分）

5、试述全同费米子系统的波函数的特点，并写出其具体的表达式。（4 分）

答：全同费米子系统的波函数具有交换反对称性（2 分），其具体形式如下：

$$\Phi_A(q_1,q_2\cdots q_N)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix}\phi_i(q_1) & \phi_i(q_2) & \cdots & \phi_i(q_N)\\ \phi_j(q_1) & \phi_j(q_2) & \cdots & \phi_j(q_N)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \phi_k(q_1) & \phi_k(q_2) & \cdots & \phi_k(q_N)\end{vmatrix}$$ （2 分）

得 分

四、证明题（共 10 分）

试证明算符 $\hat{F}=\frac{1}{2}\left[\hat{y}\hat{p}_y+\hat{p}_y\hat{y}\right]$ 是厄米算符。

证明：设 $\Psi_1(y),\Psi_2(y)$ 是任意两个波函数，则

$$\int\Psi_1^*(y)\hat{F}\Psi_2(y)dy=\int\Psi_1^*(y)\frac{1}{2}\left[\hat{y}\hat{p}_y+\hat{p}_y\hat{y}\right]\Psi_2(y)dy$$ （2 分）

$$=\frac{1}{2}\int\Psi_1^*(y)\hat{y}\hat{p}_y\Psi_2(y)dy+\frac{1}{2}\int\Psi_1^*(y)\hat{p}_y\hat{y}\Psi_2(y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\hat{y}\Psi_1(y)\right]^*\hat{p}_y\Psi_2(y)dy+\frac{1}{2}\int\left[\hat{p}_y\Psi_1(y)\right]^*\hat{y}\Psi_2(y)dy$$ （4 分）

$$=\frac{1}{2}\int\left[\hat{p}_y\hat{y}\Psi_1(y)\right]^*\Psi_2(y)dy+\frac{1}{2}\int\left[\hat{y}\hat{p}_y\Psi_1(y)\right]^*\Psi_2(y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\left(\hat{p}_y\hat{y}+\hat{y}\hat{p}_y\right)\Psi_1(y)\right]^*\Psi_2(y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\hat{F}\Psi_1(y)\right]^*\Psi_2(y)dy$$ （2 分）

所以 $\hat{F}=\frac{1}{2}\left[\hat{y}\hat{p}_y+\hat{p}_y\hat{y}\right]$ 是厄米算符。（2 分）

得 分

五、计算题一（10 分）

一粒子在一维无限深势场

$$U(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\\ 0, & 0\le x\le a\\ \infty, & x>a\end{cases}$$ 中运动，

求粒子的能级和对应的波函数。

解：势场$U(x)$时间 t 无关，是定态问题。其定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+U(x)\psi(x)=E\psi(x).$$ 【2 分】

它在各区域的具体形式为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_1(x)+U(x)\psi_1(x)=E\psi_1(x),\ x<0, \quad ①$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_2(x)=E\psi_2(x),\ 0\le x\le a, \quad ②$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_3(x)+U(x)\psi_3(x)=E\psi_3(x),\ x>a. \quad ③$$

由于在①、③方程中，$U(x)=\infty$，要等式成立，只能有$\psi_1(x)=0$，$\psi_2(x)=0$

即粒子在$0<x<a$以外的地方出现的几率为零。 （2 分）

方程②的解为

$$\psi_2(x)=A\sin kx+B\cos kx\,,\quad k=\sqrt{2mE}\big/\hbar. \quad ④$$

根据波函数的标准条件确定系数 A，B，由波函数在 x=0 和 x=a 处满足的连续性条件，得

$\psi_2(0)=\psi_1(0)=0\Rightarrow B=0$，

$\psi_2(a)=\psi_3(a)=0\Rightarrow A\sin ka=0$， 【1 分】

由于$\psi\neq 0$ ，故$\sin ka=0$，即$k=n\pi/a$，$n=1,\ 2,\ 3,\cdots$，从而，

$$\psi_2(x) = A\sin kx = A\sin n\pi x/a .$$

由归一化条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^a |\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x = 1$ 得 $A=\sqrt{2/a}$，因此

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x .$$ 【2 分】

利用 $k = n\pi/a$ 和 $k=\sqrt{2mE}/\hbar$ 可以得到量子化的能量

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2,\ n=1,2,3,\ldots ,$$ 【2 分】

对应于 E_n 的归一化的定态波函数为

$$\psi_n(x,t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x\exp(-\mathrm{i}E_n t/\hbar), & 0\le x\le a\\ 0, & x<a,\ x>a\end{cases}$$ 【1 分】

得 分

六、计算题二（10 分）

已知系统的哈密顿量为

$$H=\begin{pmatrix}2\varepsilon & 0 & \varepsilon\\ 0 & 2\varepsilon & 0\\ \varepsilon & 0 & 2\varepsilon+\lambda\end{pmatrix}=H_0+H'=\begin{pmatrix}2\varepsilon & 0 & \varepsilon\\ 0 & 2\varepsilon & 0\\ \varepsilon & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\qquad \lambda<<\varepsilon=c.$$

（1）求 H_0 的本征值和本征矢 （6 分）

（2）求 H 的能量（至二级近似）和波函数（至一级近似）。（4 分）

解：（1） $$H_0=\begin{pmatrix}2\varepsilon & 0 & \varepsilon\\ 0 & 2\varepsilon & 0\\ \varepsilon & 0 & 2\varepsilon\end{pmatrix}\qquad H'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

可见现有表象不是 H_0 表象，设为 h_0，先变换到自身表象⋯【2 分】

学院________ 姓名________ 学号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

密封线以内答题无效

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & 2\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

解 H_0 的本征方程求其本征值和本征矢：

求得结果为：

本征值　$E_1^{(0)} = \varepsilon$　　$E_2^{(0)} = 2\varepsilon$　　$E_3^{(0)} = 3\varepsilon$　【2 分】

相应本征矢　$|1> = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$　$|2> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$|3> = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　【2 分】

（2）　得幺正变换矩阵　$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　【1 分】

把 H 变换转到新表象

$$h_0 = S^+ H_0 S = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 3\varepsilon \end{pmatrix} \qquad h' = S^+ H' S = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} & 0 & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 0 & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$$

现在有：$h = h_0 + h'$　【1 分】

在自身表象，有：　$E_n^{(1)} = h'_{nn}$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n} \frac{|h'_{nm}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$\psi_n^{(1)} = \sum_{m\neq n} \frac{h'_{nm}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)}$$

【1 分】

计算得：　$E_1^{(1)} = \lambda / 2$　　$E_2^{(1)} = 0$　　$E_3^{(1)} = \lambda / 2$

$E_1^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{8\varepsilon}$　　$E_2^{(2)} = 0$　　$E_3^{(2)} = \frac{\lambda^2}{8\varepsilon}$

$$\psi_1^{(1)} = \frac{\lambda}{4\varepsilon}\psi_3^{(0)} \qquad \psi_2^{(1)} = 0 \qquad \psi_3^{(1)} = -\frac{\lambda}{4\varepsilon}\psi_1^{(0)}$$ 【1 分】

得 分

7、计算题三（10 分）

两个电子处于一中心力场中运动，忽略自旋-轨道耦合。

（1） 试求该近独立全同粒子体系的基态波函数及自旋角动量，并讨论简并度 （6 分）

（2）试求该近独立全同粒子体系第一激发态基态波函数及自旋角动量，讨论简并度（4 分）

解：作为近独立体系，两电子间相互作用忽略，体系的能量本征值为

$$E = E_1 + E_2 = E_1\left(\frac{1}{n_1^{\ 2}} + \frac{1}{n_2^{\ 2}}\right)$$

（n_1，n_2＝1, 2, 3, …） 【1 分】

忽略自旋-轨道耦合，体系的波函数可写成

$$\psi(q_1, q_2) = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi(s_{1z}, s_{2z}) \qquad \psi(\vec{r}\,) = |nlm\rangle$$ 【1 分】

作为费米子体系，总波函数是反对称的：

$$\psi_A(q_1, q_2) = \psi_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi_A(s_{1z}, s_{2z})$$

$$\psi_A(q_1, q_2) = \psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi_S(s_{1z}, s_{2z})$$ 【2 分】

(1) 基态时，有 n_1＝n_2＝1，

$$\psi(\vec{r}_1) = \psi(\vec{r}_2) = |100\rangle$$

基态波函数为 $|100\rangle|100\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{2z}) - \chi_{-\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{\frac{1}{2}}(s_{2z})]$

$$\psi_A(q_1, q_2) = \psi_S(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi_A(s_{1z}, s_{2z})$$ 【2 分】

自旋角动量：

$$\hat{S}^2\chi_A = 0$$

$$\hat{S}_z\,\chi_A = 0$$

其大小为零，非自旋简并，　　　　　　　　【1 分】

(2)　第一激发态，　（n₁，n₂）＝（1,2）　或　（n₁，n₂）＝（2,1）【1 分】

相应波函数有：

$$\psi_S(q_1,q_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|100\rangle|200\rangle+|200\rangle|100\rangle)$$

$$\psi_A(q_1,q_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|100\rangle|200\rangle-|200\rangle|100\rangle)$$

$$\chi_S^{(1)}(s_{1z},s_{2z})=\chi_{\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{\frac{1}{2}}(s_{2z})$$

$$\chi_S^{(2)}(s_{1z},s_{2z})=\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{2z})$$

$$\chi_S^{(3)}(s_{1z},s_{2z})=\frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{2z})+\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{\frac{1}{2}}(s_{2z})]$$

$$\chi_A(s_{1z},s_{2z})=\frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{2z})-\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{\frac{1}{2}}(s_{2z})]$$

【1 分】

因此体系波函数

单态：　$\Psi^{(1)}=\psi_S(x_1,x_2)\chi_A(x_1,x_2)$

三重态：　$\Psi^{(2,3,4)}=\psi_A(x_1,x_2)\chi_S(x_1,x_2)$　【1 分】

对应自旋角动量：

$$\begin{cases}\hat{S}^2\chi_S^{(1)}=2\hbar^2\chi_S^{(1)}\\ \hat{S}^2\chi_S^{(2)}=2\hbar^2\chi_S^{(2)}\\ \hat{S}^2\chi_S^{(3)}=2\hbar^2\chi_S^{(3)}\\ \hat{S}^2\chi_A=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\hat{S}_z\chi_S^{(1)}=\hbar\chi_S^{(1)}\\ \hat{S}_z\chi_S^{(2)}=-\hbar\chi_S^{(2)}\\ \hat{S}_z\chi_S^{(3)}=0\\ \hat{S}_z\chi_A=0\end{cases}$$

因此自旋三度简并　　　　　　　　【1 分】

学院________ 姓名________ 学号________ 任课教师________ 考场教室________ 座位号________

密封线以内答题无效

电子科技大学2015-2016 学年第2学期期末考试B卷

考试科目：量子力学与统计物理 考试形式：一页纸开卷 考试日期： 2016年7月2日

成绩构成比例：平时 20 %， 期中 20 %， 实验 0 %， 期末 60 %

本试卷由 七 部分构成，共 九 页。考试时长： 120 分钟 注：________

题号	一	二	三	四	五	六	七	合计
得分								

得 分

一、填空题（每空一分，共 20 分）

1、普朗克常数的大小为 $\underline{h = 6.62559 \times 10^{-34}\, J \cdot S}$

2、定态是体系的一种特殊的状态，即能量的本征态。其特点是：能量具有 确定值，且体系处于定态时，一切不显含时间的力学量的平均值及其测量值的 概 率分布 都 不随时间变化 。

3、已知矩阵

$$S = \begin{pmatrix} a & -i & 1 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，则有 \; S^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,S^+ = \begin{pmatrix} a^* & 0 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4、设自由粒子的动能为 E，动量为 $\vec{P}$，质量为 m，则描写自由粒子的德布罗意波的形式为 $\psi_{\vec{P}}(\vec{r},t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{P}\cdot\vec{r}-Et)}$，自由粒子在低速运动时德布罗意波长为 $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2mE}}$。

5、力学量 $\hat{F}$ 在运动中守恒的条件是 力学量算符 $\hat{F}$ 不显含时间 t 和 $\hat{F}$ 与哈米顿算符 $\hat{H}$ 对易 。

6、算符 $\hat{F}$ 表示力学量 F，那么当体系处于 $\hat{F}$ 的本征态 φ_n 时，力学量 F 有确定值，这个值就是 φ_n 态对应的<u>　　本征值　　</u>，该值的特点是<u>　为实数　</u>。

7、波函数的标准条件为<u>　单值、</u>　<u>　连续、</u>　<u>　有限　</u>。

8、宇称的本正值为<u>　+1　　</u>、　<u>　-1　　</u>。

9、玻尔兹曼分布是费米分布和玻色分布在经典条件下的一种近似，它适用于：<u>粒子质量 m 大　</u>、<u>温度 T 高　</u>、<u>粒子密度 N/V 小　</u>　的非简并气体

得 分

二、选择题（每题 4 分，共 20 分）

1、下列有关不确定性原理的说法，正确的是 （A）

A、不确定性源于物质的波粒二象性

B、不确定性源于测量误差

C、不确定性并不是物质本质特性

D、不确定度的大小与测量工具相关

2、下列哪个方程是描述单粒子在力场中运动的薛定谔方程（B）

A. $i\hbar\dfrac{\partial\psi_P(\vec{r},t)}{\partial t}=-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi_{\vec{P}}(\vec{r},t)$

B. $i\hbar\dfrac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}=\left[-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+U(\vec{r},t)\right]\psi(\vec{r},t)$

C. $i\hbar\dfrac{\partial\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)}{\partial t}=\left(-\dfrac{\hbar^2}{2\mu_1}\nabla_1^2-\dfrac{\hbar^2}{2\mu_2}\nabla_2^2+U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)\right)\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)$

D． $\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2\right]\psi(x)=E\psi(x)$

3、波函数$\Psi\left(x,y,z,t\right)$的统计意义为 （D）

A．在 t 时刻，粒子在点(x,y,z)处的几率为$\Psi\left(x,y,z,t\right)$。

B．t 时刻，粒子出现在空间（x, y, z）点附近单位体积内的几率为$\Psi\left(x,y,z,t\right)$。

C．在 t 时刻，粒子在点(x,y,z)处的几率为$\left|\Psi\left(x,y,z,t\right)\right|^2$。

D． t 时刻，粒子出现在空间（x, y, z）点附近单位体积内的几率为$\left|\Psi\left(x,y,z,t\right)\right|^2$。

4、 判断下列哪个算符线性厄米算符 （B）

A、$\frac{d}{dx}$　　　B、∇^2　　　C、$\hat{x}\hat{p}_x$　　　D、e^{x^2}

5、自旋为 4$\hbar$，N 个全同粒子粒子构成的理想气体，设系统能量在ε到ε+dε之间的微观态数目为 dΩ,其总能量 E 可表示为：（C）

A、$E=\int_0^\infty\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}+1}\cdot d\Omega$　　　B、$E=\int_0^\infty\frac{\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}+1}\cdot d\Omega$

C、$E=\int_0^\infty\frac{\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}-1}\cdot d\Omega$　　　D、$E=\int_0^\infty\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT}-1}\cdot d\Omega$

得 分

三、简答题（每题 4 分，共 20 分）

1、试依据态叠加原理解释为什么单电子双缝干涉实验中电子是同时穿过两个缝的（4 分）。

答： 设电子穿过第一个缝的状态为 Ψ_1，穿过第二个缝的状态为 Ψ_2。由于电子是一个一个地发射并到达屏幕的，如果在实验过程中，每一个电子只是穿过其中一个缝，则屏上

出现的应是两个单缝衍射图像的叠加。（2 分）这显然不可能是干涉条纹，因此，电子必然处于 $c_1\Psi_1+c_2\Psi_2$ 的叠加态，即它同时穿过两个缝，并与自身发生干涉形成于波条纹。（2 分）

2、分别说明爱因斯坦的自发发射系数、受激辐射系数与吸收系数的物理意义。（ 共 4 分）

答：A_{mk} 称为原子体系由 $\in_m$ 能级跃迁到 $\in_k$ 能级的自发发射系数，它表示原子在单位时间内由 $\in_m$ 能级自发跃迁到 $\in_k$ 能级的几率。（ 2 分）

B_{mk} 称为受激发射系数，B_{km} 称为吸收系数。它们的意义分别是：设作用于原子的光波在 $\omega \to \omega + d\omega$ 频率范围内的能量密度是 $I(\omega)d(\omega)$，则在单位时间内原子由 $\in_m$ 能级受激跃迁到 $\in_k$ 能级、并发射出能量为 $\hbar\omega_{mk}$ 的光子的几率是 $B_{mk}I(\omega_{mk})$；（ 1 分）

在单位时间内原子由 $\in_k$ 能级跃迁到 $\in_m$ 能级、并吸收能量为 $\hbar\omega_{mk}$ 的光子的几率是 $B_{km}I(\omega_{mk})$。（ 1 分）

3、力学量算符本征函数系的完备性的含义是什么？

答：一个力学量算符具有正交归一的一组本征函数系 （1 分），其完备性是说这个体系的任意一个态函数都可以在这个函数系展开。（3 分）

4、试述统计物理的等几率原理。（4 分）

答：当孤立系处于平衡态时（2 分），系统各可能的微观态出现的几率相等（2 分）。

5、金属中的自由电子可看成电子气体，其波函数应具有何种对称性。写出其 T=0K 时，电子的具体分布函数。(4 分)

答：电子是费米子，其体系波函数具有交换反对称性（2 分），具体分布函数为：

$$\mathrm{T=0},\quad f_{FD}(\varepsilon)=\begin{cases}0 & \varepsilon>\varepsilon_f\\ 1 & \varepsilon\le\varepsilon_f\end{cases}\qquad（2 分）$$

得 分

四、证明题（共 8 分）

证明算符 $\hat{F}=\frac{1}{2}\left[\hat{y}\hat{p}_y-\hat{p}_y\hat{y}\right]$是厄米算符。

证明：设$\Psi_1(y),\Psi_2(y)$是任意两个波函数，则

$$\int\Psi_1^*(y)\hat{F}\Psi_2(y)dy=\int\Psi_1^*(y)\frac{1}{2i}\left[\hat{y}\hat{p}_y-\hat{p}_y\hat{y}\right]\Psi_2(y)dy$$

$$=\frac{1}{2i}\int\Psi_1^*(y)\hat{y}\hat{p}_y\Psi_2(y)dy-\frac{1}{2i}\int\Psi_1^*(y)\hat{p}_y\hat{y}\Psi_2(y)dy$$

$$=\frac{1}{2i}\int\left[\hat{y}\Psi_1(y)\right]^*\hat{p}_y\Psi_2(y)dy-\frac{1}{2i}\int\left[\hat{p}_y\Psi_1(y)\right]^*\hat{y}\Psi_2(y)dy$$

$$=\frac{1}{2i}\int\left[\hat{p}_y\hat{y}\Psi_1(y)\right]^*\Psi_2(y)dy-\frac{1}{2i}\int\left[\hat{y}\hat{p}_y\Psi_1(y)\right]^*\Psi_2(y)dy$$

$$=\frac{1}{2i}\int\left[\left(\hat{p}_y\hat{y}-\hat{y}\hat{p}_y\right)\Psi_1(y)\right]^*\Psi_2(y)dy$$

$$=\int\left[\hat{F}\Psi_1(y)\right]^*\Psi_2(y)dy$$

所以$\hat{F}=\frac{1}{2i}\left[\hat{y}\hat{p}_y-\hat{p}_y\hat{y}\right]$是厄米算符。

得 分

五、计算题一（8 分）

一粒子在一维势场

$$U(x)=\begin{cases}\infty，x<-2a\\ 0，-2\mathrm{a}\le x\le 0\\ \infty，x>0\end{cases}$$ 中运动，求粒子的能级和对应的波函数。

答案：

解：势场$U(x)$时间 t 无关，是定态问题。其定态薛定谔方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+U(x)\psi(x)=E\psi(x).$$ 【2 分】

粒子在$-2a\le x\le 0$以外的地方出现的几率为零。

方程的解为

$$\psi_2(x) = A\sin kx + B\cos kx\ ,\qquad .$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x\ .\qquad 【2 分】$$

可以得到量子化的能量

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu(2a)^2}\quad n = 1,\ 2,\ 3,\cdots\qquad 【2 分】$$

对应于 E_n 的归一化的定态波函数为

$$\Phi_n(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\sin(\dfrac{n\pi x}{2a})\exp(-iE_n t/\hbar) & -2a \le x \le 0 \\ 0 & x \le -2a, x \ge 0 \end{cases}\qquad 【2 分】$$

得 分

六、计算题二（12 分）

两个电子束缚在一维无限深方势阱(0≤x≤a)内，忽略两电子间的相互作用，试写出该全同粒子体系基态及第一激发态的能量和状态波函数，并讨论能量的简并度。

解：忽略相互作用时，体系的能量本征值为

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}(n_1^2 + n_2^2)$$ （n1，n2＝1,2,3,…）

体系的总波函数是反对称的：

$$\Psi = \psi(x_1, x_2)\chi(s_{1z}, s_{2z})$$

⑴ 基态 n1＝n2＝1，基态能量为 $E = \frac{\pi^2\hbar^2}{\mu a^2}$

基态波函数为

$$\Psi = \psi_S(x_1, x_2)\chi_A(x_1, x_2)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{a} Sin\frac{\pi x_1}{a} Sin\frac{\pi x_2}{a}[\chi_{1/2}(s_{1z})\chi_{-1/2}(s_{2z}) - \chi_{-1/2}(s_{1z})\chi_{1/2}(s_{2z})]$$

可见基态能级不简并。

⑵ 第一激发态，（n1，n2）＝（1,2） 或 （n1，n2）＝（2,1）

能量为

$$E=\frac{5\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}$$

波函数有：

$$\psi_S(x_1,x_2)=\frac{2}{a}[Sin\frac{\pi x_1}{a}Sin\frac{2\pi x_2}{a}+Sin\frac{2\pi x_1}{a}Sin\frac{\pi x_2}{a}]$$

$$\psi_A(x_1,x_2)=\frac{2}{a}[Sin\frac{\pi x_1}{a}Sin\frac{2\pi x_2}{a}-Sin\frac{2\pi x_1}{a}Sin\frac{\pi x_2}{a}]$$

$$\chi_S^{(1)}(s_{1z},s_{2z})=\chi_{\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{\frac{1}{2}}(s_{2z})$$

$$\chi_S^{(2)}(s_{1z},s_{2z})=\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{2z})$$

$$\chi_S^{(3)}(s_{1z},s_{2z})=\frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{2z})+\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{\frac{1}{2}}(s_{2z})]$$

$$\chi_A(s_{1z},s_{2z})=\frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_{\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{2z})-\chi_{-\frac{1}{2}}(s_{1z})\chi_{\frac{1}{2}}(s_{2z})]$$

因此有：

单态； $\Psi^{(1)}=\psi_S(x_1,x_2)\chi_A(x_1,x_2)$ 三重态： $\Psi^{(2,3,4)}=\psi_A(x_1,x_2)\chi_S(x_1,x_2)$

得 分

7、计算题三（12 分）有一个二能级体系，哈密顿量为 $H=H_0+H'$，H_0 和微扰算符 H' 的矩阵表示为

$$H_0=\begin{pmatrix}E_1 & 0\\ 0 & E_2\end{pmatrix} \qquad H'=\lambda\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

其中λ表征微扰强度，

（1）$E_1<E_2$，用微扰法求H的本征值（至二级近似）和本征函数（至一级近似）。（6 分）

（2）$E_1=E_2$，用微扰法求H的本征值（至一级近似）和本征函数（至一级近似）。（6 分）

解：由于是对角化的，可见选用表象为H_0表象

对于$E_1<E_2$，由非简并微扰论计算公式

$$\begin{cases}E_n=E_n^{(0)}+H'_{nn}+\sum\limits_m{}' \dfrac{|H'_{nm}|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}+\cdots\\ \psi_n=\psi_n^{(0)}+\sum\limits_m{}' \dfrac{H'_{mn}}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\psi_m^{(0)}+\cdots\end{cases}$$

得 $E_1^{(1)}=0$

$$E_1^{(2)}=\frac{\left|H'_{12}\right|^2}{E_1^{(0)}-E_2^{(0)}}=\frac{\lambda^2}{E_1-E_2} \qquad \psi_1^{(1)}=\frac{H'_{21}}{E_1^{(0)}-E_2^{(0)}}\psi_2^{(0)}=\frac{\lambda}{E_1-E_2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$E_2^{(1)}=0$

$$E_2^{(2)}=\frac{\left|H'_{12}\right|^2}{E_2^{(0)}-E_1^{(0)}}=\frac{\lambda^2}{E_2-E_1} \qquad \psi_2^{(1)}=\frac{H'_{12}}{E_2^{(0)}-E_1^{(0)}}\psi_1^{(0)}=\frac{\lambda}{E_2-E_1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

所以 ，二级近似能量和一级近似态矢为

$$E_1+\frac{\lambda^2}{E_1-E_2}，\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{\lambda}{E_1-E_2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}；$$

$$E_2+\frac{\lambda^2}{E_2-E_1}，\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{\lambda}{E_1-E_2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}。$$

对于$E_1=E_2$，由简并微扰论计算得一级近似能量和零级近似态矢为

$E_1+\lambda$， $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$； $E_1-\lambda$， $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$。