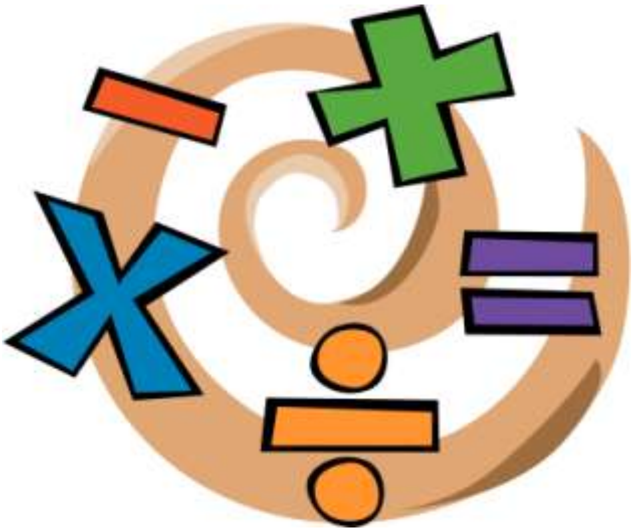
Rangkuman Materi

UJIAN NASIONAL

TAHUN PELAJARAN 2012/2013

Disusun Berdasarkan Topik Materi Per Bab



Matematika SMP

Distributed by :

Pak Anang

Matematika

1 Bilangan

A. MACAM-MACAM BILANGAN

1. **Bilangan Asli**
   1, 2, 3 , 4, 5, 6, … , dan seterusnya.
2. **Bilangan Cacah**
   0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7… , dan seterusnya.
3. **Bilangan Prima**
   Bilangan prima yaitu bilangan asli yang tepat mempunyai 2 faktor, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri. Yaitu: 2, 3, 5, 7, 11, … , dan seterusnya.
4. **Bilangan Bulat**
   …, –2, –1, 0, 1, 2, 3, … , dan seterusnya.
5. **Bilangan Rasional**

   Bilangan rasional yaitu bilangan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b anggota bilangan bulat dan $b \neq 0$. *Contoh:* $\frac{1}{4} \rightarrow a = 1$ dan $b = 4$.

B. SIFAT OPERASI PADA BILANGAN BULAT

Misalkan:

$$B = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

adalah himpunan bilangan bulat.

- Sifat operasi penjumlahan pada bilangan bulat.
  a. Tertutup

  Untuk $a, b \in B$ maka $a + b \in B$

  dengan "∈ " dibaca "anggota himpunan".

  b. Komutatif

  $$\boxed{a + b = b + a}$$

  c. Asosiatif

  $$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

  d. Identitas

  $$\boxed{a + 0 = 0 + a = a}$$

  dengan "0" adalah unsur identitas.

  e. Invers (lawan)

  $$\boxed{a + (-a) = (-a) + a = 0}$$

  dengan "–a" adalah invers dari a.

- Sifat operasi pengurangan pada bilangan bulat, yaitu *tertutup.*

  $$a - b = a + (-b)$$

- Sifat operasi perkalian pada bilangan bulat.
  a. Tertutup

  Untuk $a, b \in B$ maka $a \times b \in B$

  b. Komutatif

  $$\boxed{a \times b = b \times a}$$

  c. Asosiatif

  $$\boxed{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)}$$

  d. Identitas

  $$\boxed{a \times 1 = 1 \times a = a}$$

  dengan "1" adalah elemen identitas terhadap perkalian.

e. Invers

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$$

dengan "$\frac{1}{a}$" adalah invers dari a terhadap perkalian.

f. Distributif terhadap penjumlahan dan pengurangan

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$
$$(a - b) \times c = (a \times c) - (b \times c)$$

➢ Sifat operasi pembagian pada bilangan bulat.

$$a : b = a \times \frac{1}{b}$$

Sifat yang berlaku adalah sifat distributif terhadap penjumlahan dan pengurangan, yaitu:

$$(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$$
$$(a - b) : c = (a : c) - (b : c)$$

C. KPK DAN FPB

1. **KPK (Kelipatan Persekutuan Terkecil)**
2. **FPB (Faktor Persekutuan Terbesar)**

Contoh:

Tentukan KPK dan FPB dari 12 dan 40!

Faktorisasi dari bilangan 12 dan 40 dapat dituliskan:

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$ dan

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$

- KPK dari 12 dan 40: $2^3 \times 3 \times 5 = 120$.
- FPB dari 12 dan 40: $2^2 = 4$.

D. BILANGAN PECAHAN

Contoh: Bilangan $\frac{3}{4}$, dengan 3 (tiga) sebagai pembilang dan 4 (empat) sebagai penyebut.

1. **Macam-macam Bentuk Pecahan**

   a. Pecahan biasa. *Contoh:* $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}$, dll.

   b. Pecahan campuran. *Contoh:* $2\frac{1}{4}, 4\frac{4}{5}$.

   c. Pecahan desimal. *Contoh:* 0,5; 0,75; dll.

   d. Persen (%) atau per seratus. *Contoh:* 25% , 47% ,75%, dll.

   e. Permil ($^0/_{00}$) atau per seribu. *Contoh:* $5^0/_{00}$, $20^0/_{00}$, $860\ ^0/_{00}$, dll.

2. **Operasi pada Bilangan Pecahan**

   a. **Penjumlahan**

   - Jika penyebut dua pecahan sama:

     $$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c},\ c \neq 0$$

     Contoh: $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1+2}{7} = \frac{3}{7}$

   - Jika penyebut dua pecahan berbeda:
     Cara 1: menggunakan perkalian silang.

     $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) + (b \times c)}{b \times d};\ b,d \neq 0$$

Cara 2: menyamakan penyebutnya.

Contoh:

$$\frac{1}{8}+\frac{5}{12}=....$$

Cara 1: menggunakan perkalian silang.

$$\frac{1}{8}+\frac{5}{12}=\frac{1\times12+5\times8}{8\times12}=\frac{12+40}{96}=\frac{52}{96}=\frac{13}{24}$$

Cara 2: menyamakan penyebutnya.

KPK dari 8 dan 12 adalah 24.

$$\frac{1}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3+10}{24}=\frac{13}{24}$$

Sifat penjumlahan bilangan pecahan sama seperti sifat penjumlahan pada bilangan bulat.

- Komutatif

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}}$$

- Asosiatif

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)}$$

b. Pengurangan

- Jika penyebut kedua pecahan sama

$$\boxed{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},\ c\neq0}$$

- Jika penyebut dua pecahan berbeda
  Cara 1: menggunakan perkalian si-lang.

$$\boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{(a\times d)-(b\times c)}{b\times d};\ b,d\neq0}$$

  Cara 2: menyamakan penyebutnya.

Sifat pengurangan bilangan pecahan sama seperti sifat pengurangan pada bilangan bulat.

c. Perkalian

$$\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d};\ b,d\neq0}$$

d. Pembagian

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d};\ b,c,d\neq0}$$

atau

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times c};\ b,c,d\neq0}$$

3. Mengurutkan Pecahan

- **Menyamakan penyebut**
  Semakin besar nilai pembilangnya, maka pecahan tersebut akan bernilai semakin besar dan berlaku sebaliknya.
- **Menyamakan pembilang**
  Semakin kecil nilai penyebutnya, maka pecahan tersebut bernilai semakin besar dan berlaku sebaliknya.

Contoh:

Perhatikan kelompok pecahan berikut.

$$\frac{15}{43},\frac{15}{51},\frac{15}{42},\frac{15}{49}$$

Jika diurut dari pecahan terkecil ke pecahan terbesar menjadi:

$$\frac{15}{51},\frac{15}{49},\frac{15}{43},\frac{15}{42}.$$

E. PEMANGKATAN

$$(a\times b)^m = a^m \times b^m$$
$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Catatan:
$a^0 = 1$, $0^a = 0$
0^0 = tidak terdefinisikan
$(-a)^m = a^m$, m genap,
$(-a)^m = -a^m$, m ganjil,
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

F. PENARIKAN AKAR

$$\sqrt[p]{a\times b} = \sqrt[p]{a}\times\sqrt[p]{b}$$
$$\sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$$
$$\sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{q}{p}}$$
$$\left(\sqrt{a}\right)^c = \sqrt{a^c}$$

G. BENTUK BAKU

1. Bilangan lebih dari 10.

$$\boxed{a\times 10^n}$$

2. Bilangan antara 0 dan 1.

$$\boxed{a\times 10^{-n}}$$

dengan $1\le a\le 10$, n bilangan asli.
Contoh:
- $3{,}750 = 3{,}75\times 10^3$
- $0{,}00432 = 4{,}32\times 10^{-3}$

2 Bentuk Aljabar

A. PENGERTIAN

- *Variabel* adalah suatu besaran matematika yang nilainya dapat berubah-ubah.
- *Koefisien* adalah suatu nilai yang dilengkapi dengan variabel.
- *Konstanta* adalah suatu nilai yang tetap tidak bergantung pada variabel.

Contoh:
1. $a^3 = a\times a\times a$
   $pqr = p\times q\times r$
2. $x^2 + y^2 + 2xy + 10xy + 15$
   Bentuk aljabar tersebut terdiri dari:
   - variabel: x dan y,
   - konstanta: 15,
   - koefisien dari x^2 adalah 1, koefisien dari 2xy adalah 2, dan koefisien dari 10xy adalah 10,
   - derajat bentuk aljabar adalah *derajat yang tebesar* yaitu 2,
   - suku-suku sejenis adalah *suku-suku yang mempunyai variabel sama dan derajat sama*, yaitu: 2xy dan 10xy, x^2 dan y^2 bukan merupakan suku sejenis karena variabelnya berbeda.

B. OPERASI BENTUK ALJABAR

1. Penjumlahan dan Pengurangan Suku Sejenis

Bentuk aljabar dapat dijumlahkan atau dikurangkan hanya jika suku-sukunya sejenis.

Contoh:

- $4x + 2x = (4 + 2)x = 6x$
- $a^2 + b^2 + 12ab - 10ab + 3b^2$

  Pada bentuk aljabar tersebut, suku-suku yang sejenis adalah b^2 dan $3b^2$. Selain itu juga 12ab dan 10ab. Jadi

  $$a^2 + b^2 + 12ab - 10ab + 3b^2$$
  $$= a^2 + b^2 + 3b^2 + 12ab - 10ab$$
  $$= a^2 + (1 + 3)b^2 + (12 - 10)ab$$
  $$= a^2 + 4b^2 + 2ab$$

2. Perkalian dan Pembagian

a. Perkalian

Operasi perkalian bentuk aljabar dapat dilakukan pada suku yang tidak sejenis.

Contoh:

$4p \times 4q \times 4pq$
$= (4 \times 4 \times 4) \times (p \times q \times p \times q) = 64p^2q^2$

b. Pembagian

Contoh:

$$a^2b : ab = \frac{a^2b}{ab} = \frac{a \times a \times b}{a \times b} = a$$

3. Pemangkatan

Sifat-sifat pemangkatan bilangan bulat juga berlaku pada pemangkatan bentuk aljabar.

Contoh:

$(2ab)^2 = 2ab \times 2ab = (2 \times 2) \times (ab \times ab)$
$= 4(ab)^2 = 4a^2b^2$

- Pemangkatan bentuk aljabar dengan bentuk a + b.

  Contoh:

  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$
  $= (a + b)a + (a + b)b$
  $= a^2 + ab + ab + b^2$
  $= a^2 + 2ab + b^2$

- Pemangkatan bentuk aljabar dengan bentuk a – b.

  Contoh:

  $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

Segitiga Pascal.

$$\begin{array}{c}
1 \\
\underbrace{1 \quad\quad 1}_{1+1} \\
\underbrace{1 \quad\quad 2}_{1+2}\underbrace{\quad\quad 1}_{2+1} \\
\underbrace{1 \quad\quad 3}_{1+3}\underbrace{\quad\quad 3}_{3+3}\underbrace{\quad\quad 1}_{3+1} \\
1 \quad\quad 4 \quad\quad 6 \quad\quad 4 \quad\quad 1 \\
\vdots
\end{array}$$

dan seterusnya

Penggunaannya adalah sebagai berikut.
Perpangkatan bentuk aljabar $(a + b)^n$.

- $(a + b)^0 = 1$

  (gunakan baris 1 pola bilangan Pascal)
- $(a + b)^1 = a + b$

  (gunakan baris 2 pola bilangan Pascal)

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  (gunakan baris 3 pola bilangan Pascal)
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
  (gunakan baris 4 pola bilangan Pascal)

Pemangkatan bentuk aljabar $(a - b)^n$ juga mengikuti pola segitiga Pascal. Bedanya, tanda koefisiennya selalu berganti dari (+) untuk suku ganjil dan (–) untuk suku genap.

$(a - b)^0 = 1$
$(a - b)^1 = a - b$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

C. FPB DAN KPK BENTUK ALJABAR

Contoh:
Tentukan KPK dan FPB dari $12a^3b^2c^2$ dan $6a^2c^3$.
Jawab:
$12a^3b^2c^2 = 2^2 \times 3 \times a^3 \times b^2 \times c^2$
$6a^2c^3 = 2 \times 3 \times a^2 \times c^3$

- KPK = $2^2 \times 3 \times a^3 \times b^2 \times c^3 = 12a^3b^2c^3$
- FPB
  Faktor-faktor yang sama: 2^2 dengan 2, 3 dengan 3, a^3 dengan a^2, c^2 dengan c^3. Selanjutnya diambil faktor-faktor yang berderajat terkecil, kemudian dikalikan sehingga diperoleh:
  FPB = $2 \times 3 \times a^2 \times c^2 = 6a^2c^2$

D. PECAHAN BENTUK ALJABAR

Bentuk aljabar juga dapat berupa pecahan.

Contoh: $\frac{a}{2b}$, $\frac{2x}{y+z}$, $\frac{5x+x^3}{xy+xz}$, dan sebagainya.

Operasi pada pecahan bentuk aljabar.

1. **Penjumlahan dan Pengurangan**
   Contoh:
   - $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{2a}{4} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$
   - $\frac{a}{b} - \frac{2}{a} = \frac{a^2}{ab} - \frac{2b}{ab} = \frac{a^2 - 2b}{ab}$
2. **Perkalian dan Pembagian**
   Perkalian pecahan bentuk aljabar:
   $$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}$$
   Pembagian pecahan bentuk aljabar:
   $$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}$$
   Contoh:
   - $\frac{3y}{z} \times \frac{x}{2z} = \frac{3xy}{2z^2}$
   - $\frac{p}{s} : \frac{2}{qr} = \frac{p}{s} \times \frac{qr}{2} = \frac{pqr}{2s}$
3. **Pemangkatan**
   Pemangkatan pecahan bentuk aljabar adalah perkalian pecahan bentuk aljabar tersebut dengan dirinya sendiri sebanyak n kali.

   Contoh: $\left(\frac{y}{3z}\right)^2 = \frac{y}{3z} \times \frac{y}{3z} = \frac{y^2}{9z^2}$

E. PEMFAKTORAN

1. Bentuk distributif

$$\boxed{\begin{array}{l} ax + ay = a(x + y) \\ ax - ay = a(x - y) \end{array}}$$

dengan a bisa koefisien atau variabel.
Contoh:
- $5x + 10y = 5(x + 2y)$, a berbentuk koefisien.
- $xy - xz = x(y - z)$, x berbentuk variabel.

2. Selisih kuadrat

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

Contoh:
$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

3. Kuadrat sempurna

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{array}}$$

Contoh:
- $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$
- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

4. Bentuk: $x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$, dengan $p + q = b$ dan $pq = c$
Contoh:
$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

5. Pemfaktoran $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 1$
Contoh:
$2x^2 + 3x + 1$ bila difaktorkan menjadi $(2x + 1)(x + 1)$.
Cara pemfaktorannya sebagai berikut.
Ubah 3x menjadi penjumlahan dua suku, misalnya $x + 2x$.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 1 &= 2x^2 + x + 2x + 1 \\ &= (2x^2 + x) + (2x + 1) \\ &= x(2x + 1) + (2x + 1) \\ &\quad \textit{(sifat distributif)} \\ &= (x + 1)(2x + 1) \end{aligned}$$

F. PENYEDERHANAAN PECAHAN BENTUK ALJABAR

Contoh:

- $a^2b : ab = \dfrac{a^2b}{ab} = \dfrac{a \times a \times b}{a \times b} = a$,

  dilakukan operasi pembagian.

- $\dfrac{4x + 8x^3}{4x} = \dfrac{4x(1 + 2x^2)}{4x} = 1 + 2x^2$,

  dilakukan operasi pemfaktoran dan pembagian.

- $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)} = \dfrac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)} = x - 2$,

  dilakukan operasi pemfaktoran dan pembagian.

3 Persamaan dan Pertidaksamaan Satu Variabel

A. PERSAMAAN LINEAR SATU VARIABEL (PLSV)

- *Persamaan linear* adalah suatu persamaan yang variabel/peubahnya berpangkat (berderajat) paling tinggi 1 (satu).
- *Persamaan linear satu variabel* artinya suatu persamaan yang variabel/ peubahnya berpangkat (berderajat) paling tinggi 1 (satu) dan hanya mempunyai satu variabel.

Bentuk Umum Persamaan Linear Satu Variabel

$$\boxed{ax + b = c}$$

Dengan:

- $a \neq 0$ dengan x disebut variabel/peubah,
- semua suku di sebelah kiri tanda "=" disebut ruas kiri,
- semua suku di sebelah kanan tanda "=" disebut ruas kanan.

2. Operasi Persamaan Linear Satu Variabel

- Kedua ruas dalam satu persamaan dapat ditambah (+), dikurang (–), dikali ($\times$), dibagi (:) dengan bilangan yang sama.
- Setiap perpindahan ruas dari ruas kiri ke ruas kanan atau sebaliknya selalu diikuti dengan perubahan tanda bilangan (dari positif (+) menjadi negatif (–) dan sebaliknya).

Untuk mencari penyelesaian dari PLSV dapat dilakukan dengan cara berikut.

1. Menambah atau mengurangi kedua ruas persamaan dengan bilangan yang sama.
   Contoh:
   $x - 2 = 4$
   $\Leftrightarrow x - 2 + 2 = 4 + 2$
   (*kedua ruas ditambah 2*)
   $\Leftrightarrow x = 6$

2. Mengalikan atau membagi kedua ruas persamaan dengan bilangan yang sama.
   Contoh:
   $3x = 9$
   $\Leftrightarrow 3x : 3 = 9 : 3$ (*kedua ruas dibagi 3*)
   $\Leftrightarrow x = 3$

3. Gabungan dari operasi 1 dan 2.
   Contoh:
   $3x - 3 = 7 + x$
   $\Leftrightarrow 3x - 3 + 3 = 7 + x + 3$
   (*kedua ruas ditambah 3*)
   $\Leftrightarrow 3x = 10 + x$
   $\Leftrightarrow 3x - x = 10 + x - x$
   (*kedua ruas dikurangi* x)
   $\Leftrightarrow 2x = 10$
   $\Leftrightarrow 2x : 2 = 10 : 2$
   (*kedua ruas dibagi 2)*
   $\Leftrightarrow x = 5$
   Jadi, $x = 5$ adalah penyelesaian dari $3x - 3 = 7 + x$.

B. PERTIDAKSAMAAN LINEAR SATU VARIABEL (PtLSV)

Pertidaksamaan linear satu variabel artinya suatu pertidaksamaan yang variabel/pe-ubahnya berpangkat (berderajat) paling tinggi 1 (satu) dan hanya mempunyai satu variabel.

Contoh: $x + 3 > 4$; $x \geq 3x - 1$

Untuk mencari penyelesaian dari pertidak-samaan linear satu variabel (PtSLV) dapat dilakukan dengan cara:

1. menambah atau mengurangi kedua ruas dengan bilangan yang sama;
2. mengalikan atau membagi kedua ruas dengan bilangan yang sama dengan catatan *jika dikalikan atau dibagi bilangan negatif, tanda pertidaksamaannya dibalik.*

Contoh:

$x \geq 3x + 4$

$\Leftrightarrow x - 3x \geq 3x - 3x + 4$ (*kedua ruas dikurangi 3x*)

$\Leftrightarrow -2x \geq 4$

$\Leftrightarrow -2x \times \frac{1}{-2} \leq 4 \times \frac{1}{-2}$

(*kedua ruas dikali* $\frac{1}{-2}$, *akibatnya tanda pertidaksamaannya dibalik*)

$\Leftrightarrow x \leq -2$

Jadi, $x \leq -2$ adalah penyelesaian dari $x \geq 3x + 4$.

4 Aritmetika Sosial

A. HARGA PEMBELIAN, HARGA PENJUALAN, UNTUNG, DAN RUGI

1. **Harga pembelian** yaitu harga yang didapatkan oleh seorang pedagang ketika membeli barang-barang dagangan.
2. **Harga penjualan** yaitu harga yang ditentukan oleh seorang pedagang ketika menjual barang-barang dagangan ke pembeli.
3. **Untung (Laba)** terjadi jika harga penjualan lebih besar (lebih tinggi) daripada pembelian.
4. **Rugi** terjadi jika harga penjualan lebih kecil (lebih rendah) daripada harga pembelian.

UNTUNG

Syarat: harga penjualan > harga pembelian
Untung = harga penjualan – harga pembelian

$$\% \text{ untung} = \frac{\text{untung}}{\text{harga pembelian}} \times 100\%$$

RUGI

Syarat: harga penjualan < harga pembelian
Rugi = harga pembelian – harga penjualan

$$\% \text{ rugi} = \frac{\text{rugi}}{\text{harga pembelian}} \times 100\%$$

HARGA PENJUALAN DAN HARGA PEMBELIAN

Jika untung:
Harga penjualan = harga pembelian + untung
Harga pembelian = harga penjualan – untung

Jika rugi:
Harga penjualan = harga pembelian – rugi
Harga pembelian = harga penjualan + rugi

B. RABAT (DISKON), BRUTO, TARA, DAN NETTO

- *Rabat* atau *diskon* adalah potongan harga.

Diskon = harga semula – harga yang dibayar

$$\%\text{ diskon} = \frac{\text{diskon}}{\text{harga semula}} \times 100\%$$

- *Bruto* adalah berat kotor barang.
- *Netto* adalah berat bersih barang.
- *Tara* adalah berat kemasan.

Bruto = netto + tara
Netto = bruto – tara
Tara = bruto – netto

$$\%\text{Tara} = \frac{\text{tara}}{\text{bruto}} \times 100\%$$

Contoh:

Dalam sebuah peti kemasan mangga terdapat keterangan: Bruto = 100 kg dan tara = 5 %. Diperoleh:
Bruto = 100 kg
Tara = 5% . 100 kg = 5 kg
Netto = Bruto – tara = 100 – 5 = 95 kg

C. BUNGA TABUNGAN (BUNGA BANK)

Misalnya:
Besarnya uang yang ditabung adalah M,
Besar bunga yang diberi bank adalah p%,
Lama menabung adalah t tahun.
Diperoleh:

Bunga selama 1 tahun = $p\% \times M$

Bunga selama t tahun = $(p\% \times M) \times t$

Bunga selama n bulan = $\frac{n}{12} \times p\% \times M$

Jumlah tabungan seluruhnya = M + bunga
Perhitungan suku bunga dalam persen

$$\text{Suku bunga} = \frac{\text{bunga dalam setahun}}{M} \times 100\%$$

Contoh:

Seorang nasabah menabung pada sebuah bank sebesar Rp1.500.000,00 dengan suku bunga 12% per tahun. Besarnya tabungan setelah 6 bulan adalah ….

Jawab:

$$\text{Bunga} = \frac{6}{12} \times 12\% \times \text{Rp}1.500.000,00$$

$$= 6\% \times \text{Rp}1.500.000,00 = \text{Rp}90.000,00$$

Tabungan setelah 6 bulan
= tabungan awal + bunga
= Rp1.500.000,00 + Rp90.000,00
= Rp1.590.000,00

5 Perbandingan

A. SKALA

$$\text{Skala} = \frac{\text{ukuran pada gambar (peta)}}{\text{ukuran sebenarnya}}$$

Skala **1 : n** artinya 1 cm pada peta mewakili n cm pada ukuran sebenarnya
Contoh:
Skala 1 : 100.000 artinya 1 cm mewakili 100.000 cm atau 1 km jarak sebenarnya.

B. PERBANDINGAN SENILAI DAN BERBALIK NILAI

1. Perbandingan Senilai

$$\frac{a}{b} = \frac{a_{naik}}{b_{naik}} = \frac{a_{turun}}{b_{turun}}$$

Contoh:
Banyak liter BBM dan jarak yang ditempuh.

2. Perbandingan Berbalik Nilai

a dan b dikatakan berbanding berbalik nilai jika saat nilai a naik maka nilai b turun, begitu juga sebaliknya jika a turun maka nilai b naik.
Contoh:
Banyak pekerja proyek dan lama waktu mengerjakan proyek.

Contoh:

1. Sebuah lapangan sepak bola berbentuk persegi panjang berukuran panjang 100 m dan lebar 80 m. Jika dibuat model dengan skala 1 : 500 maka luas lapangan bola pada model adalah ….
Jawab:
Panjang sebenarnya = 100 m = 10.000 cm
Lebar sebenarnya = 80 m = 8.000 cm

$$\text{Skala} = \frac{p_{gambar}}{p_{sebenarnya}} = \frac{\ell_{gambar}}{\ell_{sebenarnya}}$$

$$p_{model} = \text{skala} \times p_{sebenarnya}$$
$$= \frac{1}{500} \times 10.000 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

$$\ell_{model} = \text{skala} \times \ell_{sebenarnya}$$
$$= \frac{1}{500} \times 8.000 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$

Ukuran pada model adalah
panjang = 20 cm dan lebar = 16 cm.
Luas = panjang $\times$ lebar
= 20 cm $\times$ 16 cm = 320 cm^2.

2. Untuk menjahit 5 karung beras diperlukan benang sepanjang 25 m, maka untuk menjahit 120 karung beras diperlukan benang sepanjang ….
Jawab:
Misalkan panjang benang yang diperlukan untuk menjahit 120 karung beras adalah A. Maka:

$$\frac{5}{120} = \frac{25}{A}$$
$$\Leftrightarrow 5A = 25 \times 120$$
$$\Leftrightarrow 5A = 3.000$$
$$\Leftrightarrow A = 600$$

6 Himpunan

- *Himpunan* adalah kumpulan benda-benda atau objek yang mempunyai ciri yang sama.
- Nama himpunan ditulis dengan nama huruf kapital dan anggotanya ditulis di antara *kurung kurawal* ({ }).

A. ANGGOTA HIMPUNAN

- Anggota himpunan dilambangkan dengan "$\in$" dan jika bukan anggota dilambangkan dengan "$\notin$".
- Banyaknya anggota himpunan A dinotasikan dengan n(A).

Contoh:

1. Himpunan bilangan bulat, ditulis:
   B = {bilangan bulat} = {… , –2, –1, 0, 1, 2, …}
2. Himpunan bilangan ganjil kurang dari 10, ditulis:
   A = {bilangan ganjil kurang dari 10} atau
   A = {1, 3, 5, 7, 9},
   maka $1 \in A$, $3 \in A$, $5 \in A$, $7 \in A$, $9 \in A$ sedangkan $2 \notin A$, $4 \notin A$.
   Banyaknya anggota himpunan A adalah
   n(A) = 5.

B. MENYATAKAN SUATU HIMPUNAN

Contoh: A adalah himpunan bilangan genap kurang dari 15. Ditulis:

1. **Menuliskan sifat anggotanya.**
   A = {bilangan genap kurang dari 15}
2. **Memberikan notasi pembentuk himpunan.**
   $A = \{x \mid x < 15, x \in \text{ bilangan genap}\}$
   Dibaca: "Himpunan A beranggotakan x, dengan x kurang dari 15 dan x anggota himpunan bilangan genap".
3. **Menyatakan semua anggotanya.**
   A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}

C. MACAM-MACAM HIMPUNAN

1. **Himpunan Kosong**
   Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota. Himpunan kosong dilambangkan dengan { } atau $\varnothing$.
   Contoh:
   K himpunan nama hari yang diawali huruf z. Karena tidak ada nama hari yang diawali huruf z maka K = { }.
2. **Himpunan Terhingga**
   Himpunan terhingga adalah himpunan yang banyak anggotanya terhingga atau terbatas.
   Contoh:
   L himpunan bilangan asli kurang dari 5. Ditulis: L = {1, 2, 3, 4}
3. **Himpunan Tak Terhingga**
   Himpunan tak terhingga adalah himpunan yang banyak anggotanya tak terhingga atau tak terbatas.
   Contoh: Himpunan bilangan asli. Ditulis:
   A = {1, 2, 3, 4, …}

4. **Himpunan Semesta**

Himpunan semesta adalah himpunan yang memuat semua anggota himpunan (objek) yang sedang dibicarakan. Notasi “S”.
Contoh:
M = {apel, mangga, pisang, stroberi, anggur}
Himpunan semesta yang mungkin dari himpunan di atas adalah: S = {nama buah}.

5. **Himpunan Bagian**

Himpunan bagian adalah himpunan yang merupakan anggota dari himpunan keseluruhan. Himpunan bagian dilambangkan dengan “$\subset$”.

➢ Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.
➢ Setiap himpunan merupakan himpunan bagian dari himpunan itu sendiri.

Diketahui himpunan A dengan banyak anggota n(A) maka banyaknya himpunan bagian yang mungkin dari himpunan itu adalah

$$\boxed{2^{n(A)}}$$

Contoh:

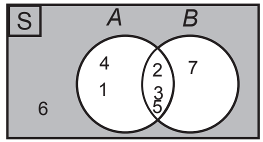
Diketahui himpunan A = {1, 3, 5}
Banyak himpunan bagian yang mungkin dari himpunan A adalah

$$2^{n(A)} = 2^3 = 8$$

Himpunan bagian dari A adalah
A, $\varnothing$, {1}, {3}, {5}, {1, 3}, {1, 5}, {3, 5}.

D. DIAGRAM VENN

Diagram Venn adalah diagram yang digunakan untuk menyatakan beberapa himpunan atau hubungan antarhimpunan.
Contoh:
Buatlah diagram Venn dari himpunan-himpunan berikut!
A = {1, 2, 3, 4, 5}; B = {2, 3, 5, 7}
S = {bilangan asli kurang dari 8}
Dari soal, diperoleh S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}



E. HUBUNGAN ANTARHIMPUNAN

1. **Himpunan Ekuivalen**

Himpunan A ekuivalen dengan himpunan B jika n(A) = n(B).
Contoh: A = {1, 2, 3, 4}; B = {5, 6, 7, 8}
Karena n(A) = n(B) maka himpunan A ekuivalen dengan himpunan B.

2. **Himpunan Sama**

Himpunan A dikatakan sama dengan himpunan B jika anggota himpunan A sama dengan anggota himpunan B atau sebaliknya. Jika himpunan A sama dengan B maka dapat ditulis A = B.
Contoh: A = {a, d, i} dan B = {i, d, a}
A = B.

G. IRISAN DAN GABUNGAN DUA HIMPUNAN

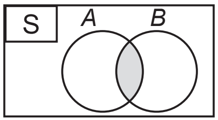
➢ *Irisan dua himpunan* A *dan* B adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota himpunan A sekaligus B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

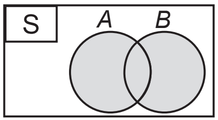
➢ *Gabungan dua himpunan* A *dan* B adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota himpunan A saja atau anggota B saja.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

Irisan dan gabungan dua himpunan dalam diagram Venn.

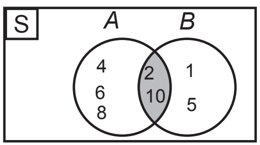


$A \cap B$

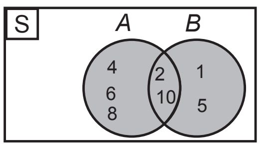


$A \cup B$

Contoh: Diketahui:
A = {bilangan genap kurang dari 11} dan
B = {faktor dari 10}.
Tentukan irisan dan gabungan himpunan A dan B!
Dari soal diketahui:
A = {2, 4, 6, 8, 10} dan B = {1, 2, 5, 10}



$A \cap B$



$A \cup B$

$A \cap B$ = {2, 10} dan $A \cup B$ = {1, 2, 4, 5, 6, 8, 10}

H. SIFAT-SIFAT OPERASI HIMPUNAN

1. Komutatif

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

2. Asosiatif

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Distributif

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

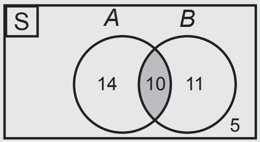
4. Dalil De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Contoh:

1. Dalam suatu kelas terdapat 40 anak, 24 anak gemar menari, 21 anak gemar menyanyi, dan 10 anak gemar keduanya. Banyaknya anak yang tidak gemar keduanya adalah ....
   Jawab:
   Misalkan:
   S = {anak yang ada di kelas} → n(S) = 40
   A = {anak yang gemar menari} → n(A) = 24
   B = {anak yang gemar menyanyi} → n(B) = 21
   $A \cap B$ = {anak yang gemar menari dan menyanyi} → $n(A \cap B) = 10$

$A \cup B$ = {anak yang gemar menari atau menyanyi}
$(A \cup B)^c$ = {anak yang tidak gemar menari atau menyanyi}
Dengan menggunakan rumus diperoleh:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 24 + 21 - 10 = 35$
$n(S) = n(A \cup B) + n(A \cup B)^c$
$\Leftrightarrow 40 = 35 + n(A \cup B)^c$
$\Leftrightarrow n(A \cup B)^c = 5$
Jadi, banyaknya anak yang tidak gemar menari atau menyanyi adalah 5 anak.
Dalam diagram Venn dapat digambarkan



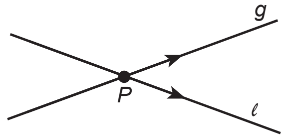
2. Diketahui himpunan berikut.
   A = {b, u, n, d, a}
   B = {i, b, u, n, d, a}
   C = {lima bilangan asli yang pertama}
   D = {bilangan cacah kurang dari 6}
   Jawab:
   A = {b, u, n, d, a} → n(A) = 5
   B = {i, b, u, n, d, a} → n(B) = 6
   C = {lima bilangan asli yang pertama}
   = {1, 2, 3, 4, 5 } → n(C) = 5
   D = {bilangan cacah kurang dari 6}
   = { 0, 1, 2, 3, 4, 5 } → n(C) = 6
   Karena n(A) = n(C) = 5 dan n(B) = n(D) = 6, maka pasangan himpunan yang ekuivalen adalah A dengan C dan B dengan D.

7 Sudut dan Garis

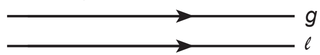
A. Garis

Garis adalah deretan/kumpulan titik-titik yang banyaknya tak terhingga, yang saling bersebelah-an dan memanjang ke dua arah.

1. **Dua Garis Berpotongan**
   Garis *g* dan ℓ berpotongan di titik *P*.



2. **Dua Garis Sejajar**
   Garis *g* dan ℓ tidak berpotongan.

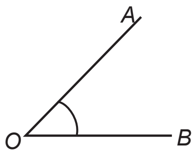


3. **Dua Garis Berimpit**
   Garis g dan ℓ mempunyai lebih dari satu titik potong.

B. Sudut

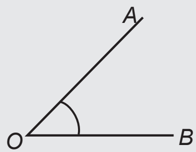
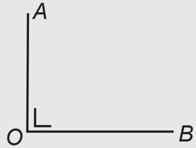
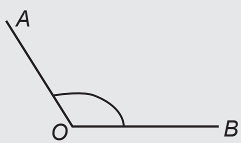
Sudut adalah daerah yang dibatasi oleh dua buah penggalan garis lurus yang bertemu pada satu titik pangkal.

Unsur dan nama sudut



Keterangan:
O = titik pangkal sudut
OA, OB = kaki sudut
$\angle AOB$ = sudut

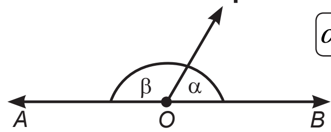
1. Jenis Sudut Berdasarkan Besar Sudut

Jenis sudut	Gambar	Keterangan
Sudut lancip		Sudut yang besarnya antara 0° dan 90°.
Sudut siku-siku		Sudut yang besarnya 90°.
Sudut tumpul		Sudut yang besarnya lebih dari 90°.
Sudut lurus		Sudut yang besarnya 180°.

2. Hubungan Antarsudut

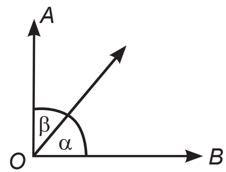
➢ **Dua sudut berpelurus (*bersuplemen*)**

$\boxed{\alpha + \beta = 180^o}$



Sudut α dan β berpelurus dan jumlahnya 180°.

➢ **Dua sudut berpenyiku (*berkomplemen*)**

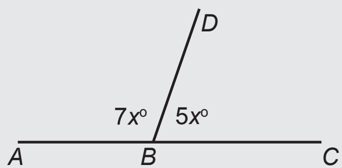


Sudut α dan β berpenyiku dan jumlahnya 90°.

$\boxed{\alpha + \beta = 90^o}$

Contoh:

Perhatikan gambar di bawah. Besar ∠ABD adalah ....



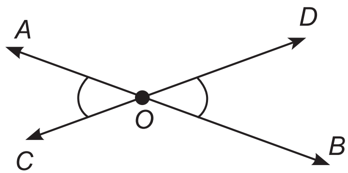
Jawab:

$$\angle ABD + \angle BCD = 180^\circ$$
$$7x + 5x = 180$$
$$12x = 180$$
$$x = 15$$

Besar ∠ABD adalah 7 . 15° = 105°.

➢ **Dua sudut bertolak belakang**

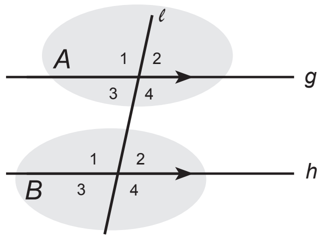
Dua sudut α dan β besarnya sama yaitu $\alpha = \beta$



Berdasarkan gambar di atas diperoleh:

- $\angle AOC$ bertolak belakang dengan $\angle BOD$, sehingga $\angle AOC = \angle BOD$.
- $\angle$AOD bertolak belakang dengan $\angle BOC$, sehingga $\angle AOD = \angle BOC$.

➢ **Sudut-sudut yang terbentuk oleh dua garis sejajar dipotong sebuah garis**



- **Dua sudut sehadap mempunyai besar sudut yang sama.**

  $\angle A_1$ dengan $\angle B_1$ $\quad$ $\angle A_2$ dengan $\angle B_2$

  $\angle A_3$ dengan $\angle B_3$ $\quad$ $\angle A_4$ dengan $\angle B_4$

  $\boxed{\angle A_1 = \angle B_1}$ $\boxed{\angle A_3 = \angle B_3}$

  $\boxed{\angle A_2 = \angle B_2}$ $\boxed{\angle A_4 = \angle B_4}$

- **Dua sudut dalam berseberangan mempunyai besar sudut yang sama.**

  $\angle A_4$ dengan $\angle B_1$ $\quad$ $\angle A_3$ dengan $\angle B_2$,

  $\boxed{\angle A_4 = \angle B_1}$ $\boxed{\angle A_3 = \angle B_2}$

- **Dua sudut luar berseberangan mempunyai besar sudut yang sama.**

  $\angle A_2$ dengan $\angle B_3$ $\quad$ $\angle A_1$ dengan $\angle B_4$

  $\boxed{\angle A_2 = \angle B_3}$ $\boxed{\angle A_1 = \angle B_4}$

- **Dua sudut dalam sepihak jumlah sudutnya adalah 180º.**

  $\angle A_4$ dengan $\angle B_2$ $\quad$ $\angle A_3$ dengan $\angle B_1$

  $\boxed{\angle A_4 + \angle B_2 = 180^o}$ $\boxed{\angle A_3 + \angle B_1 = 180^o}$

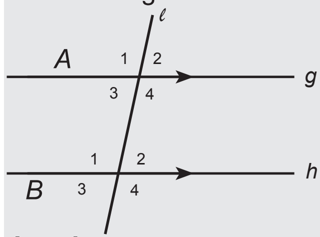
- **Dua sudut luar sepihak besar jumlah sudut-nya adalah 180º.**

  $\angle A_1$ dengan $\angle B_3$ $\quad$ $\angle A_2$ dengan $\angle B_4$

  $\boxed{\angle A_1 + \angle B_3 = 180^o}$ $\boxed{\angle A_2 + \angle B_4 = 180^o}$

Contoh:

Perhatikan gambar di bawah ini!



Jika besar $\angle A_1$ = 105º maka besar sudut $\angle B_4$ adalah ....

Jawab:

Sudut $\angle A_1$ dan $\angle B_4$ merupakan sudut luar berseberangan, maka $\angle A_4 = \angle A_1 = 105^o$

8 Relasi dan Fungsi

A. RELASI

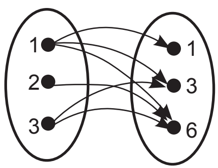
Relasi dari himpunan A *ke himpunan* B adalah pemasangan anggota himpunan A dengan anggota himpunan B.

Menyatakan Relasi

1. **Diagram panah**

   Contoh:

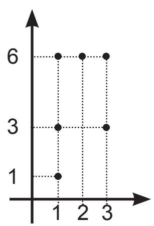
   Diketahui A = {1, 2, 3} dan B = {1, 3, 6}. Maka relasi yaitu "faktor dari" dari himpunan A ke himpunan B dapat dinyatakan dengan diagram panah sebagai berikut:



2. **Diagram Cartesius**

   Contoh:

   Diketahui A = {1, 2, 3} dan B = {1, 3, 6}. Relasi"faktor dari" dari himpunan A ke himpunan B dapat dinyatakan dalam diagram Cartesius disamping.



3. **Himpunan pasangan berurutan**

   Contoh:

   Diketahui A = {1, 2, 3} dan B = {1, 3, 6}. Relasi "faktor dari" dari himpunan A ke himpunan B dapat dinyatakan dalam himpunan pasangan berurutan sebagai berikut.

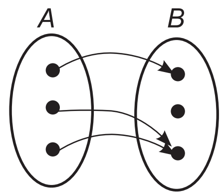
   {(1, 1), (1, 3), (1, 6), (2, 6), (3, 3), (3, 6)}

B. FUNGSI (PEMETAAN)

1. **Pengertian Fungsi (Pemetaan)**

   Fungsi (pemetaan) dari A *ke* B adalah suatu relasi yang lebih khusus yang menghubungkan setiap anggota A dengan *tepat satu* anggota B.

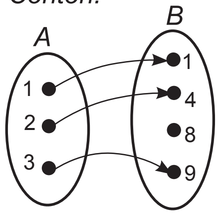
   Contoh:



   Pada contoh, setiap anggota di A dipasangkan dengan tepat satu anggota di B.

2. **Domain, Kodomain, dan Range**
   - *domain* adalah daerah asal atau daerah definisi fungsi itu,
   - *kodomain* adalah daerah kawan,
   - *range* atau *daerah hasil* adalah himpunan bagian dari daerah kawan atau kodomain.

Contoh:



- **Domain:**
  A = {1, 2, 3}
- **Kodomain:**
  B = {1, 4, 8, 9}
- **Range:**
  {1, 4, 9}

3. **Banyak Fungsi (Pemetaan)**
   Diketahui banyak anggota himpunan A adalah n(A) dan banyak anggota himpunan B adalah n(B), maka:

   > ➢ Banyak fungsi dari A ke B = $n(B)^{n(A)}$
   > ➢ Banyak fungsi dari B ke A = $n(A)^{n(B)}$

   Contoh:
   Diketahui A = {1, 2, 3} dan B = {A, B, C, D}, maka n(A) = 3 dan n(B) = 4.
   a. Banyak fungsi yang mungkin dari A ke B $= n(B)^{n(A)} = 4^3 = 64$.
   b. Banyak fungsi yang mungkin dari B ke A $= n(A)^{n(B)} = 3^4 = 81$.

4. **Notasi dan Rumus Fungsi Linear**
   a. **Notasi fungsi linear**
      Fungsi linear dinotasikan dengan

      $$f : x \mapsto ax + b$$

      x variabel.

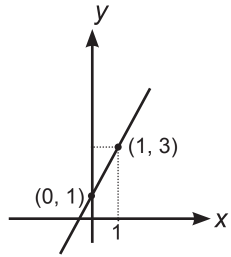
      Keterangan:
      f = nama fungsi
      x = anggota daerah asal
      ax + b = bayangan dari x

   b. **Rumus fungsi linear**

      $$f(x) = ax + b$$

      x variabel dan f(x) nilai fungsi.
      Contoh:
      f(x) = 2x + 1
      Nilai fungsi untuk x = 1 adalah
      $f(1) = (2 \times 1) + 1 = 3$

   c. **Grafik fungsi linear**
      Contoh:
      Diketahui fungsi f(x) = 2x + 1.
      Gambarkan fungsi linear tersebut ke dalam bentuk grafik!
      Diambil nilai x = 0 dan x = 1.
      - Untuk $x = 0 \rightarrow y = 2 \times 0 + 1 = 1$. Maka, diperoleh koordinat (0, 1)
      - Untuk $x = 1 \rightarrow y = 2 \times 1 + 1 = 3$. Maka, diperoleh koordinat (1, 3)



Contoh:

Diketahui pemetaan $f : x \rightarrow 2 - 3x$. Jika daerah asalnya {–2, –1, 0, 1, 2} maka daerah hasilnya adalah ....
Jawab:

Diketahui pemetaan $f : x \rightarrow 2 - 3x$, dengan daerah asal {–2, –1, 0, 1, 2}.
Maka diperoleh:

$f : -2 \rightarrow 2 - (3\times(-2)) = 2 + 6 = 8$
$f : -1 \rightarrow 2 - (3\times(-1)) = 2 + 3 = 5$
$f : 0 \rightarrow 2 - (3\times 0) = 2 - 0 = 2$
$f : 1 \rightarrow 2 - (3\times 1) = 2 - 3 = -1$
$f : 2 \rightarrow 2 - (3\times 2) = 2 - 6 = -4$

Daerah hasilnya adalah {–4, –1, 2, 5, 8}.

C. KORESPONDENSI SATU-SATU

1. **Pengertian Korespondensi Satu-satu**
   Himpunan A *dikatakan berkorespondensi satu-satu dengan himpunan* B *jika setiap anggota* A *dipasangkan dengan tepat satu anggota* B *dan setiap anggota* B *dipasangkan dengan tepat satu anggota* A. Dengan demikian, pada korespondensi satu-satu dari himpunan A ke himpunan B, *banyak anggota himpunan* A *dan himpunan* B *harus sama*.

2. **Banyak Korespondensi Satu-satu**
   Diketahui n(A) = n(B) = n. Maka banyaknya korespondensi satu-satu yang mungkin antara himpunan A dan B adalah

$$\boxed{1\times 2\times 3\times \ldots \times (n-1)\times n}$$

   Contoh:
   Diketahui himpunan A = {1, 2, 3} dan B = {a, b, c}. Banyaknya korespondensi satu-satu yang mungkin untuk himpunan A dan B adalah $1\times 2\times 3 = 6$.

9 Persamaan Garis Lurus

Bentuk umum persamaan garis lurus:

$$\boxed{y = mx + c}$$

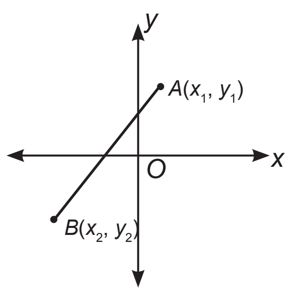
Keterangan:
m = gradien
c = konstanta

Persamaan garis dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk dan variabel.
Contoh: y = 3x + 1 dan a = b + 2

A. GRADIEN

Gradien (m) adalah nilai yang menyatakan kemiringan suatu garis.

1. Garis melalui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$



$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}$$

2. Gradien dua garis sejajar
Garis *g* sejajar dengan garis *h*. Jika gradien garis *h* adalah m_h, maka gradien garis *g* adalah

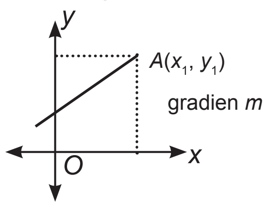
$$\boxed{m_g = m_h}$$

3. Gradien dua garis tegak lurus

$$\boxed{m_g \times m_h = -1} \text{ atau } \boxed{m_g = \frac{-1}{m_h}}$$

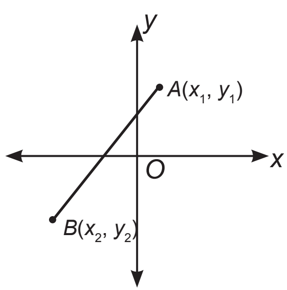
B. RUMUS PERSAMAAN GARIS

1. Persamaan garis yang melaui titik $A(x_1, y_1)$ dan bergradien m.



$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

2. Persamaan garis yang melaui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$.



$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Contoh:

1. Gradien garis yang tegak lurus dengan garis *h* : 3x – 6y + 4 = 0 adalah ….
Jawab:
$$3x - 6y + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow -6y = -3x - 4$$
$$\Leftrightarrow y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{2}{3}$$
Gradien garis h adalah m_h = ½.
Misalkan garis yang ditanyakan adalah garis g, maka gradien garis g adalah
$$m_g = -\frac{1}{m_h} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2\,.$$

2. Persamaan garis yang melalui titik A(2, 3) dan sejajar dengan garis 3x + 5y = 15 adalah ….
Jawab:
$3x + 5y = 5 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + 3$
Gradien garis tersebut adalah $m = -\frac{3}{5}$.
Karena garis yang dicari **sejajar** dengan garis 3x + 5y = 15, maka gradiennya juga $m = -\frac{3}{5}$.
Karena melalui titik A(2, 3), maka persamaan garisnya adalah
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow y - 3 = -\frac{3}{5}(x - 2)$$
$$\Leftrightarrow y - 3 = -\frac{3}{5}x + \frac{6}{5}$$
$$\Leftrightarrow 5y - 15 = -3x + 6$$
$$\Leftrightarrow 3x + 5y = 21$$

10 Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

- *Persamaan linear dua variabel* adalah suatu persamaan yang variabelnya berpangkat (berderajat) paling tinggi 1 (satu) dan mempunyai dua variabel.
  Contoh:
  $3x + 2y = 3$
- *Sistem persamaan linear dengan dua variabel* adalah suatu sistem persamaan yang terdiri atas dua persamaan linear di mana masing-masing persamaan mempunyai dua variabel dan sistem tersebut mempunyai tepat satu penyelesaian.

Bentuk Umum Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}}$$

dengan x dan y adalah variabel.

Menentukan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Contoh:

Carilah penyelesaian dari persamaan:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ 2x + y = 8 \end{array}\right\}$$

Untuk menentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear dua variabel tersebut dapat dilakukan dengan metode berikut.

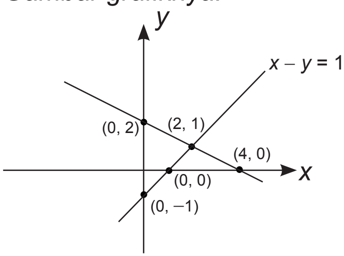
1. **Substitusi**
   Substitusikan persamaan $y = 2x$ ke dalam persamaan $2x + y = 8$, diperoleh:
   $$\begin{aligned} 2x + y = 8 \Rightarrow 2x + 2x &= 8 \\ 4x &= 8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$
   Substitusikan $x = 2$ ke persamaan $y = 2x$, diperoleh:
   $x = 2 \rightarrow y = 2x = 2 \times 2 = 4$
   Jadi, penyelesaiannya adalah $x = 2$ dan $y = 4$.

2. **Eliminasi**
   Untuk menentukan nilai *y* maka *x* dieliminasi dengan cara:
   $$\begin{array}{r|c|rl} x + y = 3 & \times 2 & 2x + 2y &= 6 \\ 2x - y = 0 & \times 1 & 2x - y &= 0 \quad - \\ \hline & & 3y &= 6 \\ & & y &= 2 \end{array}$$
   Untuk menentukan nilai *x* maka *y* dieliminasi dengan cara:
   $$\begin{array}{rl} x + y &= 3 \\ 2x - y &= 0 \quad + \\ \hline 3x &= 3 \Leftrightarrow x = 1 \end{array}$$
   Jadi, penyelesaiannya adalah $x = 1$ dan $y = 2$.

3. **Grafik**

- Menentukan titik potong garis
  $x - y = 1$ dengan sumbu x dan y.
  Jika $x = 0$ maka $y = -1$.
  Jika $y = 0$ maka $x = 1$.
  Jadi, persamaan garis $x - y = 1$ melalui titik $(0, -1)$ dan $(1, 0)$.
- Menentukan titik potong garis
  $x + 2y = 4$ dengan sumbu x dan y.
  Jika $x = 0$ maka $y = 2$.
  Jika $y = 0$ maka $x = 4$.
  Jadi persamaan garis $x + 2y = 4$ melalui $(0, 2)$ dan $(4, 0)$.

  Gambar grafiknya:



Berdasarkan gambar grafik tersebut, titik potong garis $x - y = 1$ dan $x + 2y = 4$ adalah titik $(2, 1)$. Jadi penyelesaiannya adalah $x = 2$ dan $y = 1$.

Contoh:

Harga 2 kg salak dan 3 kg jeruk adalah Rp32.000,00, sedangkan harga 3 kg salak dan 2 kg jeruk adalah Rp33.000,00. Harga 1 kg salak dan 5 kg jeruk adalah ....

Jawab:

Harga 2 kg salak dan 3 kg jeruk adalah Rp32.000,00, sedangkan harga 3 kg salak dan 2 kg jeruk adalah Rp33.000,00.

Dari permasalahan di atas, dapat diperoleh sistem persamaan linear berikut.

Misalkan: harga 1 kg salak dilambangkan *s*;
harga 1 kg jeruk dilambangkan *j*.

Diperoleh:

$$\begin{array}{lll} 2s + 3j = 32.000 & |\times 3| & 6s + 9j = 96.000 \\ 3s + 2j = 33.000 & |\times 2| & \underline{6s + 4j = 66.000} \; - \\ & & \qquad 5j = 30.000 \\ & & \qquad j = 6.000 \end{array}$$

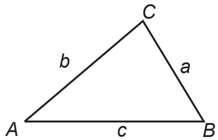
Bila harga 1 kg jeruk adalah Rp6.000,00 maka:

$$\begin{aligned} 2s + 3 \,.\, \text{Rp}6.000,00 &= \text{Rp}32.000,00 \\ 2s + \text{Rp}18.000,00 &= \text{Rp}32.000,00 \\ 2s &= \text{Rp}14.000,00 \\ s &= \text{Rp}7.000,00 \end{aligned}$$

Harga 1 kg salak dan 5 kg jeruk adalah
= Rp7.000,00 + 5 . Rp6.000,00
= Rp37.000,00.

11 Segitiga dan Teorema Pythagoras

Segitiga adalah bangun yang dibatasi oleh tiga ruas garis dan mempunyai tiga titik sudut.
Perhatikan gambar berikut!

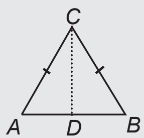
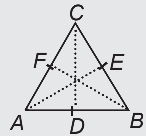
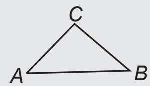


Keterangan:

- Gambar di atas merupakan segitiga ABC yang dibatasi oleh ruas garis AB = c, BC = a, AC = b dan mempunyai tiga titik sudut, yaitu sudut A ($\angle A$), sudut B ($\angle B$), dan sudut C ($\angle C$).
- Lambang sebuah segitiga biasanya dinotasikan dengan Δ . Jadi, segitiga ABC dapat ditulis dengan ΔABC .
- Jumlah sudut-sudut suatu segitiga adalah 180°. Jadi, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

A. JENIS-JENIS SEGITIGA

1. Jenis Segitiga Ditinjau dari Panjang Sisi-sisinya

Segitiga sama kaki		✓ Panjang *AC* = *BC*. ✓ $\angle A = \angle B$. ✓ Mempunyai satu simetri lipat yaitu *CD*, tetapi tidak mempunyai simetri putar.
Segitiga sama sisi		✓ Panjang *AB* = *BC* = *AC*. ✓ $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$. ✓ Mempunyai tiga simetri lipat yaitu *AE*, *BF*, dan *CD*, serta mempunyai tiga simetri putar.
Segitiga sembarang		✓ Panjang $AB \neq BC \neq AC$. ✓ $\angle A \neq \angle B \neq \angle C$.

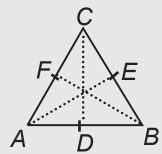
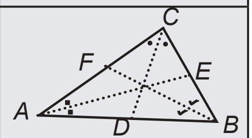
2. Jenis Segitiga Ditinjau dari Besar Sudutnya

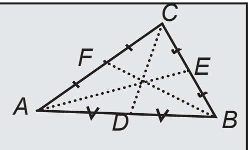
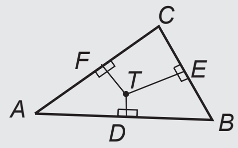
a. Segitiga siku-siku, segitiga yang besar salah satu sudutnya 90°.

b. Segitiga lancip, segitiga yang besar tiap-tiap sudutnya kurang dari 90°.

c. Segitiga tumpul, segitiga yang besar salah satu sudutnya lebih dari 90°.

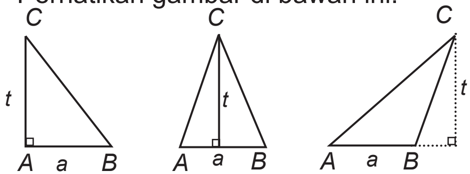
B. MACAM-MACAM GARIS PADA SEGITIGA

Garis *AE*, *BF*, dan *CD* merupakan **garis tinggi** segitiga *ABC*. **Titik tinggi** ΔABC di samping adalah titik *O*.	
Garis *AE, BF*, dan *CD* merupakan **garis bagi** segitiga *ABC*. **Titik bagi** ΔABC di samping adalah titik *O*.	

Garis *AE, BF,* dan *CD* merupakan **garis berat** segitiga *ABC.* **Titik berat** ΔABC di samping adalah titik *O.*	
Garis *TE, TF,* dan *TD* merupakan **garis sumbu** segitiga *ABC.* **Titik sumbu** ΔABC di samping adalah titik *T.*	

C. KELILING DAN LUAS SEGITIGA

Perhatikan gambar di bawah ini!



t = tinggi
a = alas

Keliling segitiga ABC:
K = AB + BC + AC
Luas segitiga ABC:

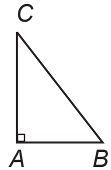
$$L = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi} = \frac{1}{2} \times a \times t$$

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

dengan $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

D. TEOREMA PYTHAGORAS

Teorema Pythagoras:
Pada segitiga siku-siku, berlaku kuadrat sisi miring sama dengan jumlah kuadrat kedua sisi penyikunya.
Perhatikan gambar berikut!



Teorema Pythagoras untuk segitiga ABC dirumuskan dengan:

$$\boxed{(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2}$$

1. Tripel Pythagoras

Tripel Pythagoras adalah tiga pasang bilangan yang memenuhi teorema Pythagoras. Misalkan untuk segitiga siku-siku ABC di atas, tripel Pythagorasnya adalah

AB	AC	BC
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
11	60	61
20	21	29

Tripel tersebut berlaku juga untuk kelipatannya. Misalnya: 6, 8, 10 merupakan kelipatan dari 3, 4, 5. Maka 6, 8, 10 juga merupakan tripel Pythagoras

2. Jenis Segitiga Berdasarkan Ukuran Sisi-sisinya

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow \Delta ABC$ segitiga siku-siku.

$a^2 < b^2 + c^2 \rightarrow \Delta ABC$ segitiga lancip.

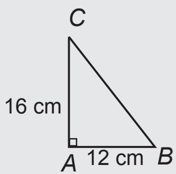
$a^2 > b^2 + c^2 \rightarrow \Delta ABC$ segitiga tumpul.

Contoh:

1. Sebuah segitiga panjang alasnya adalah 6 cm dan tingginya 10 cm. Luas segitiga itu adalah … cm^2.
   Jawab:
   Diketahui: alas = 6 cm, tinggi = 10 cm
   Luas segitiga:

$$L = \frac{1}{2} \times alas \times tinggi = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 = 30 \text{ cm}^2$$

2. Sebuah segitiga ABC siku-siku di A. Jika AB = 12 cm, dan AC = 16 cm maka panjang BC adalah ….
   Jawab:



Diketahui segitiga ABC siku-siku di A, dengan panjang AB = 12 cm dan AC = 16 cm.

Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh panjang BC, yaitu:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = 12^2 + 16^2$$
$$= 144 + 256 = 400$$
$$BC = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$$

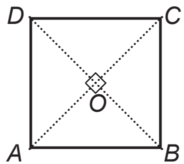
3. Pada segitiga ABC diketahui panjang sisi-sisi a : b : c = 5 : 7 : 8. Jika keliling segitiga ABC 200 cm maka panjang sisi AC adalah … cm.
   Jawab:
   Misalkan: a = 5x, b = 7x, c = 8x

$$\begin{aligned} a + b + c &= 200 \\ 5x + 7x + 8x &= 200 \\ 20x &= 200 \\ x &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

Panjang AC = b = 7x = 7.10 cm = 70 cm.

12 Bangun Datar

A. PERSEGI



Persegi adalah bangun datar yang dibatasi oleh 4 buah sisi yang panjangnya sama.

Keterangan:

- Mempunyai 4 buah sisi yang sama panjang:
  AB = BC = CD = DA.
- Mempunyai 2 pasang sisi yang saling sejajar:
  AB sejajar CD dan AD sejajar BC.
- Mempunyai 4 buah sudut siku-siku (besarnya 90°).
  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 90^\circ$
- Mempunyai 4 sumbu simetri lipat dan 4 simetri putar.
- Mempunyai 2 garis diagonal yang saling berpotongan tegak lurus yang sama panjangnya.
  AC = BD dan $AC \perp BD$.
- Mempunyai 8 cara untuk dipasangkan menempati bingkainya.

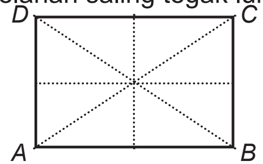
Keliling dan Luas Persegi

Misalkan AB = BC = CD = AD = sisi = s

Keliling persegi = 4s Luas persegi = s^2

B. PERSEGI PANJANG

Persegi panjang adalah bangun datar yang dibatasi oleh 4 buah sisi dengan sisi-sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar, serta sisi-sisi yang bersebelahan saling tegak lurus.



Keterangan:

- Mempunyai 4 buah sisi dengan sisi-sisi yang berhadapan sama panjang: AB = CD dan AD = BC.
- Mempunyai 2 pasang sisi yang saling sejajar: AB sejajar CD dan AD sejajar BC.
- Mempunyai 4 buah sudut siku-siku (besarnya 90º). $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 90^o$.
- Mempunyai 2 buah sumbu simetri lipat dan 2 buah simetri putar.
- Mempunyai 2 garis diagonal yang saling berpotongan yang panjangnya sama: AC = BD.
- Mempunyai 4 cara untuk dipasangkan menempati bingkainya.

Keliling dan Luas Persegi Panjang

AB = CD = panjang = p dan

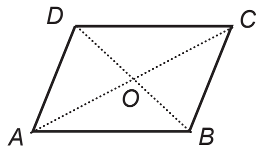
BC = AD = lebar = ℓ

$$\text{Keliling} = 2 \times (\text{panjang} + \text{lebar}) = 2\times(p+\ell)$$

$$\text{Luas} = \text{panjang} \times \text{lebar} = p\times\ell$$

C. JAJARGENJANG

Jajargenjang adalah bangun datar yang dibatasi oleh 4 buah sisi, dengan sisi-sisi yang saling berhadapan sama panjang dan sejajar. Sisi yang saling bersebelahan tidak saling tegak lurus.



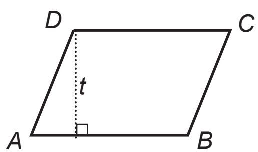
Keterangan:

- Mempunyai 4 buah sisi dengan sisi-sisi yang berhadapan sama panjang: AB = CD dan AD = BC.
- Mempunyai 2 pasang sisi yang saling sejajar: AB sejajar CD dan AD sejajar BC.
- Mempunyai 4 buah sudut dengan susut-sudut yang berhadapan sama besar: $\angle A = \angle C$ dan $\angle B = \angle D$.
- Jumlah dua sudut yang berdekatan adalah 180º. $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle A + \angle D = 180^o$.
- Mempunyai 2 buah simetri putar tetapi tidak mempunyai simetri lipat.
- Mempunyai 2 garis diagonal yang saling berpotongan di titik O yang panjangnya tidak sama. Diagonal-diagonal tersebut saling membagi sama panjang. AO = OC dan OB = OD.
- Mempunyai 2 cara untuk dipasangkan menempati bingkainya.

Keliling dan Luas Jajargenjang

AB = CD = panjang = p dan

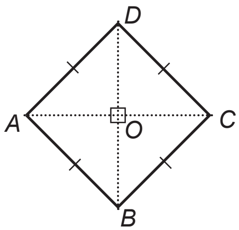
BC = AD = lebar = ℓ.



$$\text{Keliling} = 2 \times (\text{panjang} + \text{lebar}) = 2\times(AB+AD)$$

$$\text{Luas} = \text{panjang} \times \text{tinggi} = AB \times t$$

D. BELAH KETUPAT



Belah ketupat adalah bangun datar yang dibatasi oleh 4 buah sisi yang panjangnya sama, sisi-sisi yang saling berhadapan saling sejajar, dan sisi-sisinya tidak saling tegak lurus.

Keterangan:

- Mempunyai 4 buah sisi yang sama panjang: AB = BC = CD = DA.
- Mempunyai dua pasang sisi yang saling sejajar: AB sejajar CD dan AD sejajar BC.
- Mempunyai 4 buah sudut dengan susut-sudut yang berhadapan sama besar: $\angle A = \angle C$ dan $\angle B = \angle D$.
- Jumlah dua sudut yang berdekatan adalah 180°. $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle A + \angle D = 180^\circ$.
- Mempunyai 2 sumbu simetri lipat dan 2 simetri putar.
- Mempunyai 2 garis diagonal yang saling berpotongan tegak lurus ($AC \perp BD$), tetapi panjangnya berbeda. Diagonal-diagonal tersebut saling membagi sama panjang. AO = OC dan OB = OD.
- Mempunyai empat cara untuk dipasangkan menempati bingkainya.

Keliling dan Luas Belah Ketupat

Misalkan AB = BC = CD = AD = s

$$\text{Keliling} = AB + BC + CD + AD = 4s$$

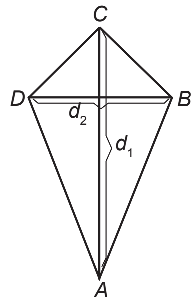
$$\text{Luas} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

Dengan:

d_1 = diagonal 1 = AC

d_2 = diagonal 2 = BD

E. LAYANG-LAYANG



Layang-layang adalah bangun datar segi empat yang dibentuk oleh dua segitiga sama kaki dengan alas yang sama panjang dan berimpit.

Keterangan:

- Mempunyai dua pasang sisi yang sama panjang: AB = AD dan BC = CD.
- Dibentuk oleh 2 buah segitiga sama kaki, yaitu: segitiga ABD dan segitiga CDB.
- Mempunyai 4 buah sudut yang sepasang sudutnya sama besar ($\angle B = \angle D$) dan sepasang lainnya tidak.
- Mempunyai 1 buah sumbu simetri lipat, yaitu AC.
- Mempunyai 2 garis diagonal yang saling berpotongan tegak lurus ($AC \perp BD$), tetapi panjangnya berbeda. Diagonal AC membagi diagonal BD sama panjang (OB = OD).
- Mempunyai 2 cara untuk dipasangkan menempati bingkainya.

Keliling dan Luas Layang-layang

AB = AD = sisi pendek; BC = CD = sisi panjang

$$\text{Keliling} = 2 \times (AB + BC)$$

$$\text{Luas} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

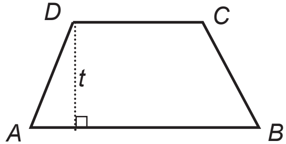
Dengan:

d_1 = diagonal 1 = AC

d_2 = diagonal 2 = BD

F. TRAPESIUM

Trapesium adalah segi empat dengan sepasang sisi yang berhadapan sejajar.



Jenis-jenis Trapesium

a. Trapesium siku-siku
b. Trapesium sama kaki
c. Trapesium sembarang

Keliling dan Luas Trapesium

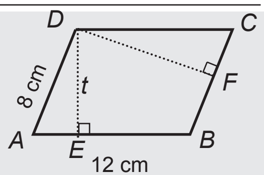
Keliling = AB + BC + CD + AD

Luas $= \frac{1}{2} \times (AB + CD) \times t$

AB dan CD merupakan dua sisi sejajar.

Contoh:

1. Jika luas luas jajargenjang 96 cm^2 maka DE : DF adalah ….



Jawab:
Luas jajargenjang ABCD = $AB \times DE$ … (i)
Luas jajargenjang ABCD = $BC \times DF$ … (ii)

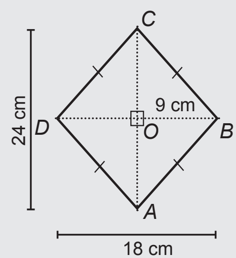
Dengan menggunakan (i) diperoleh:
Luas jajargenjang ABCD = $AB \times DE$
$\Leftrightarrow 96 = 12 \times DE$
$\Leftrightarrow DE = \frac{96}{12} = 8$ cm

Dengan menggunakan (ii) diperoleh:
Luas jajargenjang ABCD = $BC \times DF$
$\Leftrightarrow 96 = 9 \times DF$
$\Leftrightarrow DF = \frac{96}{9} = \frac{32}{3}$ cm

$$\frac{DE}{DF} = \frac{8}{\frac{32}{3}} = \frac{3}{4}$$

2. Diketahui belah ketupat ABCD dengan panjang diagonalnya masing-masing adalah AC = 24 cm dan BD = 18 cm. Keliling belah ketupat tersebut adalah ….
Jawab:
Salah satu sifat belah ketupat adalah keempat sisinya sama panjang. Maka:

AB = BC = CD = AD.



$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2}$$
$$= \sqrt{12^2 + 9^2}$$
$$= \sqrt{144 + 81}$$
$$= \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

Keliling belah ketupat
= AB + BC + CD + AD
= 15 cm + 15 cm + 15 cm + 15 cm = 60 cm.

13 Kesebangunan dan Kekongruenan Bangun Datar

A. KESEBANGUNAN BANGUN DATAR

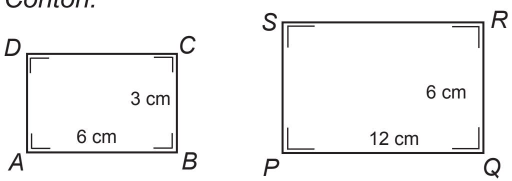
1. Dua Bangun Datar yang Sebangun

Syarat:

a. Panjang sisi-sisi yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut memiliki perbandingan yang senilai.

b. Sudut-sudut yang bersesuaian pada bangun-bangun tersebut sama besar.

Contoh:



Perhatikan bangun persegi panjang *ABCD* dan bangun persegi panjang *PQRS*.

➢ Ukuran persegi panjang *ABCD* dan persegi panjang *PQRS*.

- Perbandingan panjang kedua bangun di atas adalah:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

- Perbandingan lebar kedua bangun di atas adalah:

$$\frac{AD}{PS} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

➢ Besar sudut-sudut pada persegi panjang *ABCD* dan persegi panjang *PQRS*.
Kedua bangun tersebut merupakan bangun persegi panjang, sehingga setiap sudutnya merupakan sudut siku-siku. Diperoleh:

$\angle A = \angle P$; $\angle C = \angle R$; $\angle B = \angle Q$; $\angle D = \angle S$

Dengan demikian, karena kedua syarat dipenuhi, maka persegi panjang *ABCD* sebangun dengan persegi panjang *PQRS*.

2. Dua Segitiga yang Sebangun

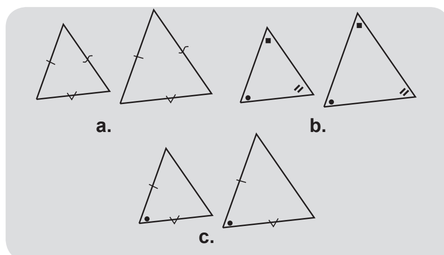
Syarat:

a. Panjang sisi-sisi yang bersesuaian memiliki perbandingan yang sama. Syarat ini disingkat s.s.s (sisi-sisi-sisi).

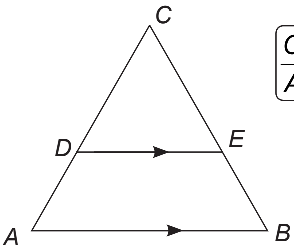
b. Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar. Syarat ini disingkat sd.sd.sd (sudut-sudut-sudut).

c. Dua sisi yang bersesuaian memiliki perbandingan yang sama dan sudut bersesuaian yang diapit sama besar. Syarat ini disingkat s.sd.s (sisi-sudut-sisi).

Kesebangunan dinotasikan dengan “ ~ “.



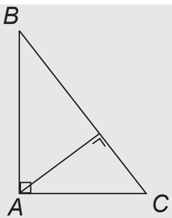
Rumus:



$$\frac{CD}{AC} = \frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC}$$

Contoh:

1. Perhatikan gambar di bawah.
   BD = 4 cm dan AD = 3 cm.
   Panjang BC adalah ....

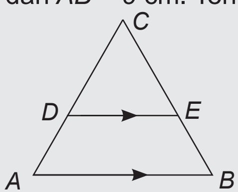
   

   Pembahasan:
   Perhatikan gambar berikut.
   BD = 4 cm dan AD = 3 cm.

   $$AD = \sqrt{CD \times BD}$$
   $$3 = \sqrt{CD \times 4}$$
   $$9 = 4CD$$
   $$CD = 2{,}25$$

   Panjang BC adalah
   BD + CD = 4 cm + 2,25 cm = 6,25 cm.

2. Diketahui panjang CD = 12 cm, AD = 6 cm, dan AB = 9 cm. Tentukan panjang DE.

   Jawab:

   $$\frac{CD}{AC} = \frac{DE}{AB}$$
   $$\frac{12}{12+6} = \frac{DE}{9}$$
   $$DE = \frac{12 \times 9}{18}$$
   $$DE = 6\ cm$$

   Jadi, panjang DE adalah 6 cm.

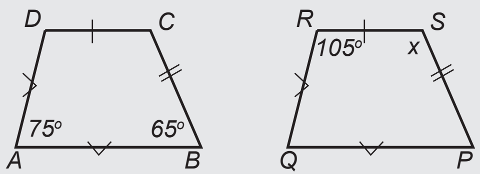
B. KEKONGRUENAN BANGUN DATAR

Dua benda atau lebih yang memiliki bentuk dan ukuran yang sama disebut *kongruen*. Kekongruenan dinotasikan dengan lambang “≅“.

1. Dua Bangun Datar yang Kongruen

Dua bangun atau lebih dikatakan kongruen jika bangun-bangun tersebut memiliki bentuk dan ukuran yang sama serta sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.

Contoh:



Tentukan besar sudut R.
Perhatikan bangun trapesium $ABCD$ dengan bangun trapesium $PQRS$.

Jawab:
Agar dapat menentukan besar sudut *R*, terlebih dahulu kita buktikan bangun trapesium *ABCD* kongruen dengan bangun trapesium *PQRS.*

Bukti:
Berdasarkan gambar diperoleh keterangan bahwa panjang:

$AB = PQ$ $\qquad$ $BC = PS$

$AD = QR$ $\qquad$ $CD = RS$

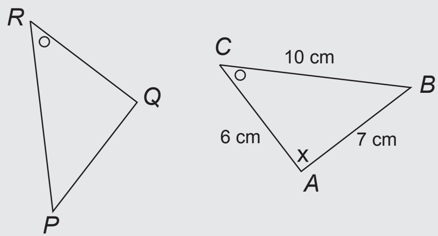
Panjang sisi-sisi pada bangun trapesium *ABCD* ternyata sama panjang atau bersesuaian dengan panjang sisi-sisi bangun trapesium *PQRS*.
Jadi, terbukti jika bangun trapesium *ABCD* kongruen dengan bangun trapesium *PQRS,* atau:
Trapesium *ABCD* ≅ trapesium *PQRS*.
Berdasarkan sifat-sifat kekongruenan yang berlaku maka:
$\angle A = \angle Q = 75°$
$\angle B = \angle P = 65°$
$\angle C = \angle S = 105°$
$\angle D = \angle R$
Pada trapesium berlaku jumlah besar keempat sudutnya adalah 360°.
Dengan demikian,
$\angle D = 360° – (105° + 65° + 75°) = 360° – 245°$
$= 115°$
Jadi, besar sudut $\angle$D adalah 115°.

2. Dua Segitiga yang Kongruen
Bila dua buah segitiga kongruen maka dua segitiga tersebut dapat saling menutupi secara tepat. Dua buah segitiga dikatakan kongruen bila memenuhi syarat-syarat berikut.

a. Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang, disingkat **s.s.s** (*sisi-sisi-sisi*).
b. Dua sisi yang bersesuaian sama panjang dan satu sudut yang diapit oleh kedua sisi tersebut sama besar, disingkat **s.sd.s** (*sisi-sudut-sisi*).
c. Dua sudut yang bersesuaian sama besar dan satu sisi yang bersesuaian sama panjang, disingkat **sd.s.sd** (*sudut-sisi-sudut*).

Contoh:

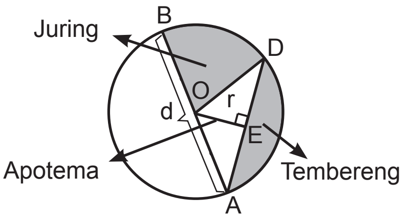
Perhatikan gambar di bawah. Jika ΔABC dan ΔPQR kongruen, panjang sisi *PR* adalah....



Jawab:
Diketahui ΔABC dan ΔPQR kongruen.
$\angle C = \angle R$
$\angle A = \angle Q$
Dengan demikian, $\angle B = \angle P$
Sehingga:
$BC = PR = 10$ cm
$AC = QR = 6$ cm
$AB = PQ = 7$ cm
Panjang sisi *PR* adalah 10 cm

14 Lingkaran dan Garis Singgung Lingkaran

A. UNSUR-UNSUR LINGKARAN



Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap satu titik tetap yang dise-but titik pusat lingkaran.

Unsur-unsur pada lingkaran adalah sebagai berikut.

- Titik O disebut pusat lingkaran
- Garis OA = OB = OD disebut jari-jari lingkaran dan dilambangkan dengan *r*.
- Garis AB disebut diameter dan dilambangkan dengan *d*.
- Garis lurus AD disebut tali busur.
- Garis lengkung AD dan BD disebut busur dan dilambangkan dengan $\overset{\frown}{AD}$ dan $\overset{\frown}{BD}$.
- Garis OE disebut apotema.
- Daerah yang dibatasi oleh dua jari-jari dan satu busur disebut juring. Misalnya: BOD.
- Daerah yang dibatasi oleh sebuah tali busur dan busur disebut tembereng. Pada gambar, tembereng adalah daerah yang diarsir.

B. KELILING DAN LUAS LINGKARAN

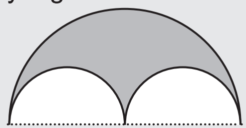
Keliling lingkaran: $K = 2\pi r = \pi d$

Luas lingkaran: $L = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$

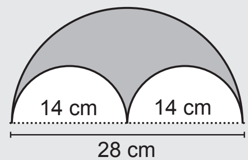
Keterangan: $\pi = \frac{22}{7}$ atau $\pi = 3{,}14$.

Contoh:

Pada gambar di bawah ini, panjang diameter lingkaran besar adalah 28 cm. Keliling lingkaran yang diarsir adalah ….



Jawaban:



Diameter lingkaran besar: d_1 = 28 cm.
Diameter lingkaran kecil: d_2 = 14 cm.
Keliling daerah yang diarsir

$$= \left(\frac{1}{2} \times K \odot \text{ besar}\right) + K \odot \text{ kecil}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \pi d_1\right) + \pi d_2 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 28\right) + \frac{22}{7} \times 14$$

$$= 44 + 44$$

$$= 88 \text{ cm}$$

C. PANJANG BUSUR DAN LUAS JURING

$$\text{Panjang busur } AD = \frac{\angle AOD}{360^o} \times \text{keliling lingkaran}$$

$$\text{Luas juring } AOD = \frac{\angle AOD}{360^o} \times \text{luas lingkaran}$$

Luas tembereng = L.juring AOD – L. Δ AOD

Hubungan antara sudut pusat, panjang busur, dan luas juring.

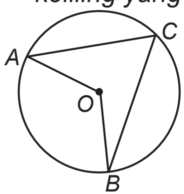
$$\frac{\angle AOD}{360^o} = \frac{\text{panjang busur } AD}{\text{keliling lingkaran}} = \frac{\text{luas juring } AOD}{\text{luas lingkaran}}$$

Hubungan antara sudut pusat, panjang busur, dan luas juring.

$$\frac{\angle AOD}{\angle BOD} = \frac{\text{panjang busur } AD}{\text{panjang busur } BD} = \frac{\text{luas juring } AOD}{\text{luas juring } BOD}$$

D. SUDUT PUSAT DAN SUDUT KELILING

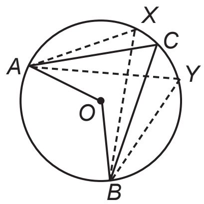
Besar sudut pusat adalah dua kali besar sudut keliling yang menghadap busur yang sama.



Pada gambar, AOB adalah sudut pusat dengan sudut kelilingnya salah satunya adalah ACB. **Hubungan sudut pusat dan sudut keliling dapat dituliskan:**

$$\boxed{\angle AOB = 2 \times \angle ACB}$$

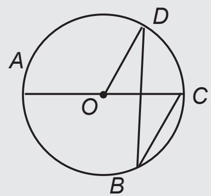
Besar dua sudut keliling yang menghadap busur yang sama adalah sama.



$\angle ACB$, $\angle AXB$, dan $\angle AYB$ menghadap busur yang sama, yaitu busur AB. Jadi

$$\boxed{\angle ACB = \angle AXB = \angle AYB}$$

Contoh:



AC adalah diameter lingkaran. Jika besar $\angle CBD = 20^o$ maka besar $\angle AOD$ adalah ....

Jawab:

$\angle COD$ dan $\angle CBD$ menghadap busur yang sama, yaitu *CD*, di mana $\angle COD$ sudut pusat dan $\angle CBD$ sudut keliling. Maka:

$\angle COD = 2 \times \angle CBD = 2 \times 20^o = 40^o$.

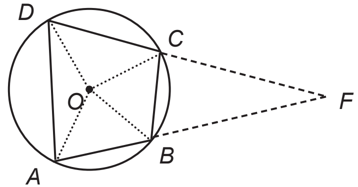
$\angle COD$ dan $\angle AOD$ saling berpelurus, maka:

$$\angle COD + \angle AOD = 180^o$$
$$40^o + \angle AOD = 180^o$$
$$\angle AOD = 140^o$$

E. SEGI EMPAT TALI BUSUR DAN SUDUT ANTARA DUA TALI BUSUR

Segi empat tali busur adalah segi empat yang dibatasi oleh empat tali busur di mana keempat titik sudutnya terletak pada lingkaran.

Pada segi empat tali busur, jumlah dua sudut yang berhadapan adalah 180°.



$$\boxed{\angle A + \angle C = 180^\circ}$$

$$\boxed{\angle B + \angle D = 180^\circ}$$

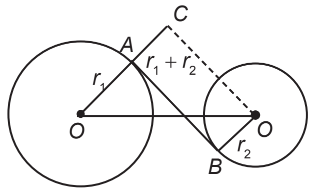
Pada gambar di atas, AB dan DC diperpanjang sehingga berpotongan di titik E, maka:

$$\boxed{\angle BEC = \angle AED = \frac{1}{2} \times (\angle AOD - \angle BOC)}$$

F. GARIS SINGGUNG LINGKARAN

Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran di satu titik dan tegak lurus dengan jari-jari yang melalui titik singgungnya.

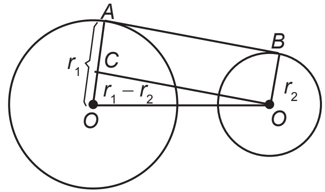
1. **Garis Singgung Persekutuan Dalam Dua Lingkaran**



AB disebut garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran O dan P dan panjangnya:

$$\boxed{AB = \sqrt{OP^2 - (r_1 + r_2)^2}}$$

2. **Garis Singgung Persekutuan Luar Dua Lingkaran**

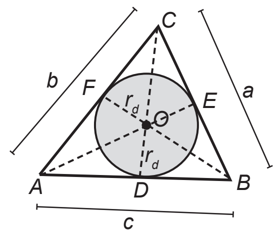


AB disebut garis singgung persekutuan luar dua lingkaran O dan P dan panjangnya:

$$\boxed{AB = \sqrt{OP^2 - (r_1 - r_2)^2}}$$

G. LINGKARAN DALAM DAN LINGKARAN LUAR SEGITIGA

1. **Lingkaran Dalam Segitiga**



Misalkan panjang jari-jari dari lingkaran dalam segitiga ABC adalah r_d, AB = c, BC = a, AC = b

$$\boxed{r_d = \frac{\text{Luas } \Delta ABC}{s}}$$

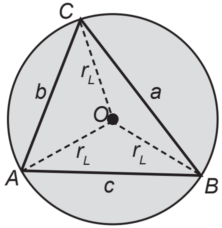
Dengan:

$$\text{Luas } \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{1}{2} \times (a + b + c)$$

2. Lingkaran Luar Segitiga

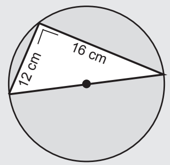
Misalkan panjang jari-jari dari lingkaran dalam segitiga ABC adalah r_L, maka



$$\boxed{r_L = \frac{a \times b \times c}{4 \times \text{Luas } \Delta ABC}}$$

Contoh:

Luas daerah yang diarsir adalah . . . . (π = 3,14).



Jawab:

Panjang sisi miring segitiga di dalam lingkaran:

$$\sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20$$

Untuk mencari jari-jari lingkaran luar segitiga dapat digunakan cara berikut.

$$R = \frac{abc}{4L\Delta} = \frac{16.12.20}{4.\frac{1}{2}.16.12} = 10$$

Jadi, jari-jari lingkaran luar segitiga adalah 10 cm.

Luas segitiga $= \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 96 \text{cm}^2$

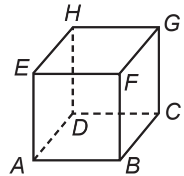
Luas lingkaran = 3,14 × 10 × 10 = 314 cm^2.

Luas daerah yang diarsir = 314 – 96 = 218 cm^2.

15 Bangun Ruang

A. KUBUS

Kubus adalah suatu bangun ruang yang dibatasi oleh enam buah bidang sisi yang kongruen berbentuk persegi.



Keterangan:

- Mempunyai 8 buah titik sudut, yaitu: A, B, C, D, E, F, G, dan H.
- Mempunyai 6 buah sisi yang kongruen berbentuk persegi, yaitu: ABCD, ABFE, BCGF, CDHG, ADHE, dan EFGH.
- Mempunyai 12 buah rusuk yang sama panjang, yaitu: AB, BC, CD, AD, BF, CG, AE, DH, EF, FG, GH, dan HE.
- Mempunyai 12 buah diagonal sisi (bidang) yang sama panjang, yaitu: AC, BD, BG, CF, CH, DG, AH, DE, EG, dan FH.
- Mempunyai 4 buah diagonal ruang, yaitu: HB, DF, CE, dan AG.

Luas dan Volume Kubus

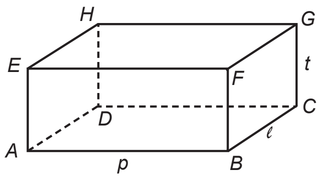
Pada kubus dengan rusuk s, maka:

Luas permukaan: L = $6s^2$
Volume: V = s^3

Rumus-rumus pada kubus:

Jumlah panjang rusuknya = 12s
Panjang diagonal sisi = $s\sqrt{2}$
Panjang diagonal ruang = $s\sqrt{3}$

B. BALOK



Balok adalah suatu bangun ruang yang dibatasi oleh 6 buah persegi panjang yang terdiri dari 3 pasang persegi panjang yang kongruen.

Keterangan:

- Mempunyai 8 buah titik sudut, yaitu: A, B, C, D, E, F, G, dan H.
- Mempunyai 6 buah sisi yang berbentuk persegi panjang yang terdiri dari 3 pasang persegi panjang yang kongruen, yaitu: ABCD dan EFGH, ABFE dan CDHG, serta BCGF dan ADHE.
- Mempunyai 12 buah rusuk yang dikelompokkan menjadi 3 kelompok rusuk-rusuk yang sama dan sejajar, yaitu:
  AB = CD = EF = GH = panjang = p,
  BC = AD = FG = EH = lebar = ℓ,
  AE = BF = CG = DH = tinggi = t.
- Mempunyai 12 buah diagonal sisi (bidang), yaitu: AC, BD, BG, CF, CH, DG, AH, DE, EG, dan FH.
- Mempunyai 4 buah diagonal ruang yang sama panjang, yaitu: HB, DF, CE, dan AG.

Luas dan Volume Balok

Luas permukaan:

$$L = 2\times((p\times \ell)+(p\times t)+(\ell\times t))$$

Volume: $V = p \times \ell \times t$

Jumlah panjang rusuknya = $4\,(p + \ell + t)$

Panjang diagonal sisi depan = $\sqrt{p^2 + t^2}$

Panjang diagonal sisi samping = $\sqrt{\ell^2 + t^2}$

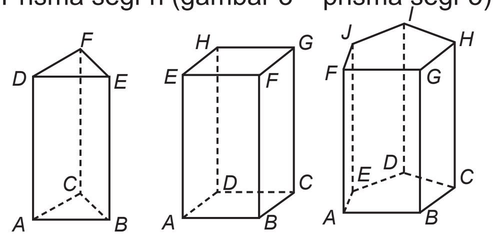
Panjang diagonal sisi alas = $\sqrt{p^2 + \ell^2}$

Panjang diagonal ruang = $\sqrt{p^2 + \ell^2 + t^2}$

C. PRISMA

Prisma adalah bangun ruang yang dibatasi oleh 2 buah bidang berbentuk segi banyak sejajar serta dibatasi oleh sisi-sisi tegak yang berbentuk segi empat. **Macam-macam prisma.**

1. Prisma segitiga (gambar 1).
2. Prisma segi empat (gambar 2).
3. Prisma segi-n (gambar 3 – prisma segi-5).



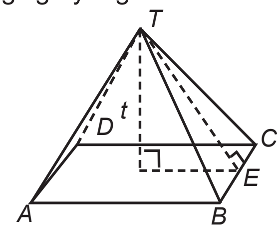
(1) (12) (3)

Luas dan Volume Prisma

Luas permukaan: L = (2 $\times$ L.alas) + L. sisi tegak
Volume: V = luas alas $\times$ tinggi

D. LIMAS

Limas adalah bangun ruang yang dibatasi oleh sebuah alas berbentuk segi-n dan sisi sam-ping berupa segitiga yang bertemu di satu titik.

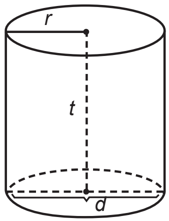


Luas dan Volume Limas

Luas permukaan: L = L.alas + L.sisi miring

Volume: $V = \frac{1}{3} \times (\text{luas alas} \times \text{tinggi})$

E. TABUNG



Tabung adalah bangun ruang berbentuk prisma tegak beraturan yang alas dan tutupnya berupa lingkaran.

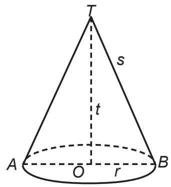
Keterangan:

- Mempunyai 3 buah bidang sisi, yaitu bidang alas, bidang tutup, dan sisi tegak.
- Bidang alas dan bidang tutup berbentuk lingkaran.
- Sisi tegak berupa bidang lengkung dan disebut selimut tabung.
- Mempunyai 2 buah rusuk.
- Tinggi tabung adalah jarak antara titik pusat lingkaran alas dengan titik pusat lingkaran tutup.
- Jari-jari lingkaran alas dan tutup besarnya sama.

Luas dan Volume Tabung

Luas permukaan:
Luas = 2.luas alas + luas selimut
= $2\pi r^2 + 2\pi rt$
= $2\pi r(r + t)$
Volume:
V = luas alas $\times$ tinggi = $\pi r^2 t$

F. KERUCUT



Kerucut adalah bangun ruang berbentuk limas dengan alasnya berbentuk lingkaran.

Keterangan:

- Mempunyai 2 buah bidang sisi, yaitu bidang alas dan bidang lengkung yang disebut selimut kerucut.
- Mempunyai sebuah rusuk dan sebuah titik sudut
- Tinggi kerucut adalah jarak antara puncak kerucut dengan titik pusat lingkaran alas.

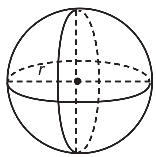
Luas dan Volume Kerucut

Diketahui $s = \sqrt{r^2 + t^2}$, maka:

Luas permukaan:
Luas = luas alas + luas selimut
= $\pi r^2 + \pi rs = \pi r(r + s)$

Volume: $V = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi} = \frac{1}{3}\pi r^2 t$

G. BOLA



Bola adalah bangun ruang yang dibatasi oleh sebuah bidang sisi yang berbentuk lengkung.

Keterangan:

- Mempunyai sebuah bidang sisi lengkung.
- Tidak mempunyai rusuk dan tidak mempunyai titik sudut.
- Jari-jari bola adalah r.

Luas dan Volume Bola

Luas permukaan: $L = 4\pi r^2$
Volume: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Contoh:

1. Diketahui sebuah prisma tegak yang alasnya berbentuk belah ketupat dengan panjang diagonal 24 cm dan 10 cm. Jika luas permukaan prisma 1.020 cm^2, volume prisma tersebut adalah . . . cm^3.

   Jawab:

   Luas alas prisma = luas tutup prisma yaitu:

   $\frac{1}{2}\times 24\times 10 = 120$ cm^2

   Panjang sisi belah ketupat

   $$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\times 24\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\times 10\right)^2} = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

   $$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

   Misalkan tinggi prisma dilambangkan t.

   Dengan demikian:

   $$\begin{aligned} 2 \cdot 120 + 4 \cdot 13 \cdot t &= 1.020 \\ 240 + 52t &= 1.020 \\ 52t &= 780 \\ t &= 15 \end{aligned}$$

   Volume prisma tersebut = 120 . 15 = 1.800 cm^3.

2. Sebuah aquarium berbentuk tabung tanpa tutup dengan panjang jari-jari alas 14 cm dan tinggi 100 cm. Jika aquarium terbuat dari kaca, luas kaca yang diperlukan untuk membuat aquarium adalah ....

   Jawab:

   Diketahui aquarium terbuat dari kaca.

   Luas kaca yang diperlukan untuk membuat aquarium adalah luas selimut + luas alas tabung. Diperoleh:

   $= 2\pi rt + \pi r^2$

   $= 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 14 \cdot 100 + \frac{22}{7} \cdot 14^2$

   $= 8.800 + 616$

   $= 9.416$

   Jadi, luas kaca yang diperlukan 9.416 cm^2.

3. Kawat sepanjang 10 m akan dibuat model kerangka balok yang berukuran 5 cm $\times$ 4 cm $\times$ 3 cm. Banyak model kerangka balok yang dapat dibuat adalah ….

   Jawab:

   Panjang kawat yang dibutuhkan untuk membentuk satu balok

   = 5 cm (4) + 4 cm (4) + 3 cm (4)

   = 20 cm + 16 cm + 12 cm

   = 48 cm = 0,48 m = 0,5 m

   Sedangkan kawat yang tersedia sepanjang 10m. Jadi dari kawat tersebut dapat dibentuk model balok sebanyak: $\frac{10}{0,5} = 20$

16 Statistika dan Peluang

A. Statistika

- *Statistik* adalah pengetahuan yang berhubungan dengan cara-cara pengumpulan data, pengolahan data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan berdasarkan kumpulan data yang dilakukan.
- *Data* adalah suatu informasi yang diperoleh dari pengamatan atau penelitian.

Macam-macam data.

1. *Data kuantitatif* adalah data berupa angka. *Contoh:* data nilai matematika siswa SMP.
2. *Data kualitatif* adalah data yang berhubungan dengan kategori yang berupa kata-kata (bukan angka). *Contoh:* data tentang warna favorit.

1. Penyajian Data

Data dapat disajikan dengan:

a. Tabel Frekuensi
b. Diagram Batang
c. Diagram Garis
d. Diagram Lingkaran
e. Piktogram

Contoh:

1. Di bawah ini adalah nilai ulangan matematika dari 30 siswa SMP.

5	9	8	7	5	5	4	6	6	8
9	8	7	6	6	5	5	9	8	4
5	5	9	8	8	7	7	6	6	7

Tabel Frekuensi
Nilai Matematika Siswa SMP

Nilai	Turus	Frekuensi
4	II	2
5	IIII II	7
6	IIII I	6
7	IIII	5
8	IIII I	6
9	IIII	4
Jumlah		30

2. Misalnya, data berat badan 40 siswa sebagai berikut.

Tabel berat badan 40 siswa

No.	Berat Badan	Banyak Siswa
1.	28 kg	5
2.	29 kg	15
3.	30 kg	6
4.	31 kg	10
5.	32 kg	4
	Jumlah	40

Bentuk penyajian data dengan diagram batangnya seperti berikut.

Diagram Batang

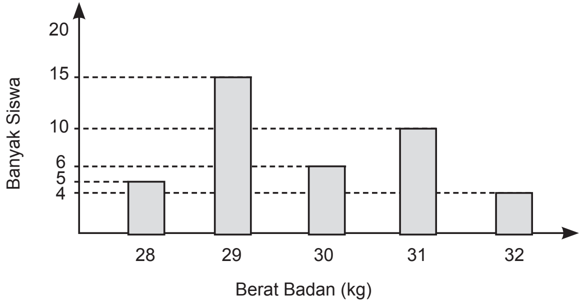


Diagram Garis

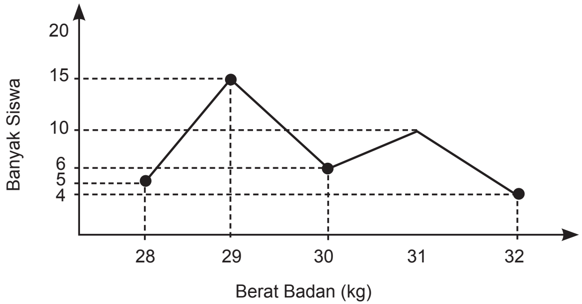


Diagram Lingkaran

Perhatikan tabel frekuensi yang menyatakan hobi dari 40 siswa SMP berikut.

Tabel Frekuensi
Hobi 40 Siswa SMP

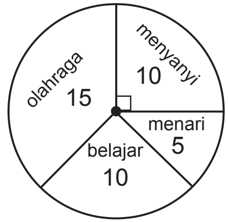
Hobi	Frekuensi
Olahraga	15
Menyanyi	10
Menari	5
Belajar	10
Jumlah	40

$$\text{Olahraga} = \frac{15}{40} \times 360^\circ = 135^\circ.$$

$$\text{Menyanyi} = \frac{10}{40} \times 360^\circ = 90^\circ.$$

$$\text{Belajar} = \frac{10}{40} \times 360^\circ = 90^\circ.$$

$$\text{Menari} = \frac{5}{40} \times 360^\circ = 45^\circ.$$



Piktogram

Piktogram adalah diagram yang disajikan dalam bentuk gambar atau lambang.

Contoh:

Nilai	Frekuensi
4	☺ ☺
5	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
6	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
7	☺ ☺ ☺ ☺ ☺
8	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
9	☺ ☺ ☺ ☺
Jumlah	☺ = mewakili 10 orang

b. Ukuran Pemusatan data

1) Mean ($\overline{x}$) atau rata-rata

$$\boxed{\text{Rata} - \text{rata} = \frac{\text{jumlah nilai data}}{\text{banyaknya data}}}$$

Contoh:

Tabel di bawah ini menyatakan nilai ulangan matematika.

Nilai	Jumlah Siswa
5	3

6	8
7	12
8	10
9	7

Banyak siswa yang mendapat nilai **kurang dari** nilai rata-rata adalah ....

Jawab:

Rata-rata nilainya adalah:

$$\frac{(5\times3)+(6\times8)+(7\times12)+(8\times10)+(9\times7)}{3+8+12+10+7}$$

$$=\frac{15+48+84+80+63}{40}$$

$$=\frac{290}{40}=7{,}25$$

Banyak siswa yang mendapat nilai **kurang dari** nilai rata-rata atau < 7,25 adalah

12 + 8 + 3 = 23 orang.

2) Modus (Mo)

Modus (Mo) adalah data yang paling sering muncul atau data yang memiliki frekuensi terbesar.

3) Median dan Kuartil

a) *Median (Me)* adalah nilai tengah dari kumpulan data yang telah diurutkan.

Data ganjil: $Me = x_{\frac{n+1}{2}}$

Data genap: $Me = \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

Contoh:

Diberikan data sebagai berikut.

2, 4, 4, 5, 9, 8, 7, 4, 6, 3

Jawab:

Data setelah diurutkan:

2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Diketahui n = 10. Karena n = 10 genap, maka:

$$Me = \frac{x_{\frac{10}{2}} + x_{\frac{10}{2}+1}}{2} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$$

b) *Kuartil (Q)* adalah aturan membagi data menjadi 4 bagian.

Q_1 = kuartil pertama (bawah)

Q_2 = kuartil kedua (median)

Q_3 = kuartil ketiga (atas)

Contoh:

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ & Q_1 & & Q_2 & Q_3 & \end{array}$$

$$Q_2 = \mathrm{Me} = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$$

c. Ukuran Penyebaran Data

Jangkauan data (range)

$$\boxed{\text{Range = data terbesar – data terkecil}}$$

Jangkauan kuartil (hamparan)

$$\boxed{H = Q_3 - Q_1}$$

B. Peluang

1. Ruang Sampel dan Titik Sampel

- *Percobaan* adalah usaha yang memunculkan kemungkinan-kemungkinan tertentu.
- *Ruang sampel* adalah himpunan semua hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan.
- *Titik sampel* adalah semua anggota ruang sampel.
- Banyaknya anggota ruang sampel dinotasikan dengan $n(S)$.

Contoh:

Pada percobaan melempar sebuah dadu, diperoleh:

- Titik sampelnya adalah 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.
- Himpunan ruang sampel, yaitu:
  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(S) = 6$.

Menentukan Ruang Sampel Suatu Percobaan

Untuk menentukan ruang sampel suatu percobaan dapat dilakukan dengan cara:

a. membuat tabel,
b. membuat diagram pohon.

Contoh:

Suatu percobaan melempar dua uang logam yang sama dilakukan bersama-sama. Ruang sampelnya dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

a. **Membuat tabel**

Mata uang ke-		Titik sampel
1	2	
A	*A*	*AA*
A	*G*	*AG*
G	*A*	*GA*
G	*G*	*GG*

A = muncul angka dan *G* = muncul gambar
Misalkan, titik sampel *AA* berarti uang ke-1 muncul angka dan uang ke-2 muncul angka.
Ruang sampelnya adalah
$S = \{AA, AG, GA, GG\}$ dan $n(S) = 4$.

b. **Membuat diagram pohon**

$$A\begin{cases} A & \rightarrow AA \\ G & \rightarrow AG \end{cases}$$

$$G\begin{cases} A & \rightarrow GA \\ G & \rightarrow GG \end{cases}$$

Ruang sampelnya adalah
$S = \{AA, AG, GA, GG\}$ dan $n(S) = 4$.

2. Peluang Suatu Kejadian

Peluang suatu kejadian adalah perbandingan antara banyaknya kejadian yang diamati dengan banyaknya kejadian yang mungkin.

Rumus:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}}$$

Keterangan:
$P(A)$ = nilai peluang munculnya kejadian A.
$n(A)$ = banyaknya kejadian A.

Diketahui $\overline{A}$ adalah kejadian yang bukan merupakan kejadian A, maka:

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Contoh:

Pada pelemparan 3 buah mata uang secara bersamaan, peluang munculnya 2 angka dan 1 gambar adalah ….

Jawab:

Untuk menentukan ruang sampel dari pelemparan tiga buah mata uang, dilakukan dengan membuat diagram pohon.

$$A\begin{cases} A\begin{cases} A & \rightarrow AAA \\ G & \rightarrow AAG \end{cases} \\ G\begin{cases} A & \rightarrow AGA \\ G & \rightarrow AGG \end{cases} \end{cases} \qquad G\begin{cases} A\begin{cases} A & \rightarrow GAA \\ G & \rightarrow GAG \end{cases} \\ G\begin{cases} A & \rightarrow GGA \\ G & \rightarrow GGG \end{cases} \end{cases}$$

Ruang sampelnya adalah

$S = \{AAA, AAG, AGA, AGG, GAA, GAG, GGA, GGG\}$

$n(S) = 8$

Misalkan A = kejadian munculnya 2 angka dan 1 gambar.

$A = \{AAG, AGA, GAA\}$, maka $n(A) = 3$.

Jadi, peluang munculnya 2 angka dan 1 gambar pada pelemparan 3 buah mata uang secara bersamaan adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}.$$

3. Frekuensi Harapan (Ekspektasi)

Misalkan A adalah sebuah kejadian pada ruang sampel S dari suatu percobaan. Jika percobaan tersebut dilakukan sebanyak n kali, maka frekuensi harapan kejadian A atau $E(A)$ dari n kali percobaan dirumuskan:

$$\boxed{E(A) = n \times P(A)}$$

Keterangan:

$E(A)$ = frekuensi harapan A

$P(A)$ = nilai peluang munculnya kejadian A

Contoh:

Andi melempar koin sebanyak 100 kali. Frekuensi harapan munculnya angka adalah ….

Jawab:

Pada pelemparan koin, ruang sampelnya adalah

$S = \{A, G\}$.

$n(S) = 2$

$n(A) = 1$

$n = 100$ kali.

Peluang munculnya angka:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

Frekuensi harapan munculnya angka:

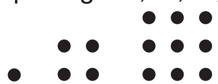
$$E(A) = n \times P(A) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

17 Pola Bilangan

A. PENGERTIAN POLA BILANGAN

Pola bilangan adalah aturan terbentuknya sebuah kelompok bilangan dengan suatu aturan yang telah diurutkan.

1. Pola bilangan asli: 1, 2, 3, 4, 5,…
   Pola bilangan: **n**, n bilangan asli
2. Pola bilangan genap: 2, 4, 6, 8,…
   Pola bilangan: **2n**, n bilangan asli.
3. Pola bilangan ganjil: 1, 3, 5, 7,…
   Pola bilangan: **2n –1** , n bilangan asli.
4. Pola bilangan persegi: $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$

   Pola bilangan: $\mathbf{n^2}$, n bilangan asli.
5. Pola bilangan segitiga: 1, 3, 6, 10,…

   Pola bilangan: $\frac{1}{2}$**n(n + 1)**, n bilangan asli.
6. Pola bilangan persegi panjang: 2, 6, 12, …

   Pola bilangan: **n(n + 1)**, n bilangan asli.
7. Pola bilangan segitiga Pascal

   1
   1 1
   1 2 1
   1 3 3 1
   1 4 6 4 1

   Pola bilangan: $\mathbf{2^{n-1}}$, n bilangan asli.

B. BARISAN DAN DERET

1. Aritmatika

Barisan aritmatika adalah barisan bilangan yang mempunyai beda suku yang berdekatan sama.

Deret arimatika merupakan jumlah suku-suku pada barisan aritmatika.

Beda = $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots = U_n - U_{n-1}$

Suku ke-n barisan dan jumlahan n suku deret aritmatika dicari dengan rumus:

$$U_n = a + (n-1)b$$

$$S_n = \frac{1}{2}(U_1 + U_n) \text{ atau } S_n = \frac{1}{2}\left(2a + (n-1)b\right)$$

Keterangan:
a = suku pertama
b = beda
U_n = suku ke-n, dengan n = 1, 2, 3, ….
S_n = jumlah n suku bilangan, dengan n = 1, 2, 3, ….

2. Geometri

Barisan geometri adalah suatu barisan bilangan yang mempunyai rasio suku yang berdekatan sama.

Deret geometri merupakan jumlah suku-suku pada barisan geometri.

$$\text{Rasio} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \ ... \ = \frac{U_n}{U_{n-1}}.$$

Suku ke-n barisan dan jumlah n suku geometri dicari dengan rumus:

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \text{ untuk } r > 1$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \text{ untuk } r < 1$$

Keterangan:
a = suku pertama; r = rasio

Contoh:

1. Diketahui pola bilangan 2, 6, 10, 14, …. Rumus suku ke-n dari pola bilangan tersebut adalah ….
   Jawab:
   Diketahui suku pertama: a = 2
   Beda: b = 6 – 2 = 10 – 6 = 4
   Rumus suku ke-n adalah
   $$Un = a + (n-1)b = 2 + (n-1)4 = 4n - 2$$

2. Suku ke-10 dari barisan 512, 256, 128, … adalah ….
   Jawab:
   Dari barisan tersebut diperoleh a = 512 dan
   $$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{256}{512} = \frac{1}{2}, \text{ maka:}$$
   $$U_{10} = ar^{10-1} = 512.(\tfrac{1}{2})^9 = 1$$

18 Bilangan Berpangkat dan Bentuk Akar

A. Bilangan Berpangkat

Definisi:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ faktor}}$$

1. **Bilangan Berpangkat Sebenarnya**
   Bilangan berpangkat sebenarnya adalah bilangan yang diperoleh dengan melakukan perkalian berulang.
   Contoh: 8^3, 10^8, 12^2.

2. **Bilangan Berpangkat Tak Sebenarnya**
   Bilangan berpangkat tak sebenarnya adalah bilangan berpangkat yang tidak dapat diperoleh dengan perkalian berulang.
   Contoh: 2^{-5}, $64^{\frac{3}{2}}$, $6^{\frac{1}{2}}$, 7^0.

Sifat-sifat perpangkatan bilangan.

1. $(a \times b)^p = a^p + b^p$
2. $a^p \times b^q = a^{p+q}$
3. $a^p : a^q = a^{p-q}$
4. $(a^p)^q = a^{pq}$
5. $a^0 = 1$, dengan a adalah bilangan real.
   $0^a = 0$
   0^0 = tidak terdefinisikan

Catatan:
$(-a)^p = a^p$, untuk p bilangan genap,
$(-a)^p = -(a^p)$, untuk p bilangan ganjil,
$a^{-p} = \frac{1}{(a^p)}$

Contoh:

Hasil dari $8^{-5} \times 8^{-2}$ adalah....
Jawab:
Menggunakan sifat pemangkatan:
$8^{-5} \times 8^{-2} = 8^{-5+(-2)} = 8^{-7}$

B. Bentuk Akar

1. Bilangan Rasional

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan ke dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan *a, b* merupakan anggota bilangan bulat, dan $b \neq 0$. *Contoh:* $-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{9}{2}$. Sifat-sifat yang berlaku pada bilangan bulat berpangkat bilangan bulat berlaku juga pada bilangan rasional berpangkat bulat.
Contoh:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

2. Bilangan Irasional

Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan ke dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan *a, b* merupakan anggota bilangan bulat, dan $b \neq 0$. Contoh: $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{5}$. Bentuk bilangan seperti $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{5}$ disebut bentuk *akar*.

Sifat-sifat bentuk akar seperti berikut.

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, dengan *a* dan *b* merupakan bilangan real positif.
   Contoh: $\sqrt{21} = \sqrt{7} \times \sqrt{3}$.
2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, dengan $a \geq 0$ dan $b > 0$.
   Contoh: $\sqrt{\frac{2}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Operasi aljabar pada bentuk akar mempunyai sifat-sifat seperti berikut.

1. $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$, dengan *a, b, c* bilangan real dan $c \geq 0$.
2. $a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a-b)\sqrt{c}$, dengan *a, b, c* bilangan real dan $c \geq 0$.
3. $a\sqrt{c} \times b\sqrt{d} = (ab)\sqrt{cd}$, dengan *a, b, c, d* bilangan real dengan $a \geq 0$ dan $b \geq 0$.
4. $\frac{c\sqrt{a}}{d\sqrt{b}} = \frac{c}{d}\sqrt{\frac{a}{b}}$, dengan *a, b, c, d* bilangan real dengan $a \geq 0$ dan $b \geq 0$.

- Bentuk akar $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ dapat dirasionalkan dengan cara:

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\sqrt{b}}$$

- Bentuk akar $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

  Sekawan penyebut $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ adalah.

$$\boxed{\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}}$$

Catatan:
Bila penyebutnya adalah $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, maka bentuk sekawannya adalah $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Contoh:

1. Hasil dari $\sqrt{108}+\sqrt{12}-\sqrt{48}$ adalah ....
   Jawab:
   $$\begin{aligned}\sqrt{108}+\sqrt{12}-\sqrt{48} &= \sqrt{36\times 3}+\sqrt{4\times 3}-\sqrt{16\times 3} \\ &= 6\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

2. Jika $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = a + b\sqrt{6}$ dengan *a* dan *b* bilangan bulat, maka *a* + *b* = ...
   Jawab:
   Diketahui $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = a + b\sqrt{6}$
   dengan a dan b bilangan bulat.
   Bentuk rasional dari $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ adalah:
   $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}{2-3} = \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}{-1} \\ &= -\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 = -\left(2-2\sqrt{6}-3\right) \\ &= 1+2\sqrt{6}\end{aligned}$$
   Nilai a + b = 1 + 2 = 3.

19 Persamaan dan Pertidak-samaan Kuadrat

A. PERSAMAAN KUADRAT

Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan yang pangkat (derajat) tertingginya dari variabel/ peubahnya adalah 2 (dua).

1. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat memiliki bentuk umum:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

dengan a, b, c $\in$ R dan a $\neq$ 0 dan x variabel.

Contoh:

$2x^2 - 4x + 3 = 0$, a = 2, b = –4, c = 3.

2. Mencari Akar-akar Persamaan Kuadrat

Akar-akar dari persamaan kuadrat dapat ditentukan dengan cara berikut.

a. Pemfaktoran

Contoh:

- Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Jawab:

Untuk memfaktorkan bentuk $x^2 + 4x + 3 = 0$, dicari nilai dua bilangan yang mana:

❖ jumlahnya 4, (*dari koefisien x*)

❖ hasil kalinya 3.
(*hasil kali koefisien x^2 dengan konstanta*)

Bilangan-bilangan itu adalah 1 dan 3.

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x + 1)(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow$ $x + 1 = 0$ atau $x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = -1$ atau $x = -3$

Jadi, himpunan penyelesaiannya = {–1, –3}.

- Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Jawab:

Untuk memfaktorkan bentuk $2x^2 + 5x - 3 = 0$, terlebih dahulu dicari nilai dua bilangan yang mana:

❖ jumlahnya 5, (*dari koefisien x*)

❖ hasil kalinya –6. (*hasil kali koefisien x^2 dengan konstanta* $(2 \times (-3) = -6)$)

Bilangan-bilangan itu adalah –1 dan 6.

$2x^2 + 5x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $2x^2 + 6x - x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $2x(x + 3) - (x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(2x - 1)(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow$ $2x - 1 = 0$ atau $x + 3 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ atau $x = -3$

Jadi, himpunan penyelesaiannya = {½, –3}.

b. Menggunakan Rumus ABC

Diketahui bentuk persamaan kuadarat $ax^2 + bx + c = 0$. Rumus ABC:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Jawab:

Diektahui a = 1, b = –4, dan c = 3, maka:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.3}}{2 \times 1} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \end{aligned}$$

$x_1 = 2 + 1 = 3$, $x_2 = 2 - 1 = 1$.
Jadi, himpunan penyelesaiannya = {3, 1}.

c. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Contoh:
Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $x^2 - 4x + 3 = 0$.
Jawab:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = -3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x + \left(\frac{-4}{2}\right))^2 = -3 + 4$$
$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x - 2 = \pm 1$$
$$x_1 = 1 + 2 = 3 \text{ dan } x_2 = -1 + 2 = 1$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya = {3, 1}.

3. Menyusun Persamaan Kuadrat Jika Diketahui Akar-akarnya

Diketahui x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat. Persamaan kuadrat tersebut adalah:

$$\boxed{\begin{gathered}(x - x_1)(x - x_2) = 0 \\ x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0\end{gathered}}$$

Secara umum, bentuk persamaan kuadrat adalah:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \text{ atau } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0}$$

Diperoleh:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ dan } x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$$

Contoh:

- Diketahui akar-akar persamaan kuadrat adalah 2 dan 4. Tentukan persamaan kuadratnya!
  Jawab:
  Diketahui $x_1 = 2$ dan $x_2 = 4$.
  Persamaan kuadratnya adalah
  $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$
  $\Leftrightarrow x^2 - (2 + 4)x + 2.4 = 0$
  $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$
  Jadi, persamaan kuadrat yang dimaksud adalah $x^2 - 6x + 8 = 0$

- Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 2 = 0$ adalah x_1 dan x_2.
  Tentukan nilai $x_1 + x_2$ dan $x_1.x_2$!
  Jawab:

Diketahui: $x^2 - 2x + 2 = 0$.
Diperoleh a = 1, b = –2, dan c = 2.

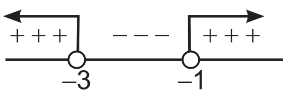
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-2)}{1} = 2$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

B. PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu pertidaksamaan yang variabel/peubahnya berpangkat (berderajat) paling tinggi 2 (dua).

Contoh:
Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 + 4x + 3 > 0$.
Jawab:
Dengan menggunakan pemfaktoran diperoleh
$x^2 + 4x + 3 > 0$
$\Leftrightarrow$ $(x + 1)(x + 3) > 0$
Harga nol dari $(x + 1)(x + 3) = 0$ adalah $x = -1$ atau $x = -3$.
Kemudian dengan menggunakan garis bilangan diperoleh:



Keterangan:
(i) *Bilangan –1 dan –3 merupakan harga nol untuk pertidaksamaan* $x^2 + 4x + 3 > 0$.
(ii) *Tanda (+) diperoleh dengan memasukkan bilangan di sebelah kanan –1 misalnya nol (0). Masukkan nilai* $x = 0$ *ke* $x^2 + 4x + 3$ *sehingga diperoleh* $0^2 + 4.0 + 3 =$ **3 > 0.**
(iii) *Tanda (–) diperoleh dengan memasukkan bilangan antara –3 dan –1 misalnya –2. Masukkan nilai* $x = -2$ *ke* $x^2 + 4x + 3$ *sehingga diperoleh* $(-2)^2 + 4.(-2) + 3 =$ **–1 < 0.**

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah
$\{x \mid x > -1 \text{ atau } x < -3\}$

Contoh penerapan

Hasil kali dua bilangan asli genap yang berurutan adalah 360. Bilangan terbesarnya adalah ….
Jawab:
Misalkan:
Bilangan I = x
Bilangan II = (x + 2)
Hasil kali dua bilangan asli genap yang berurutan adalah 360, maka:
$x(x + 2) = 360$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 360$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 360 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 18)(x + 20) = 0$
$\Leftrightarrow x = 18$ atau $x = -20$

Karena bilangan yang dimaksud adalah bilangan cacah genap maka:
Bilangan I = x = 18
Bilangan II = x + 2 = 20
Bilangan yang terbesar di antara keduanya adalah 20.