1 模型改动点

1. 考虑了枢纽之间运输的折扣系数。

2 基本假设

1. 外包货机不考虑货机类型，认为只要是外包，运价就是统一的（外包费用=重量×运输时长×单位时长运价，这里指单位时长运价统一），且外包运力没有上限，因此可以认为外包机型为某种单独的特殊机型。

2. 只有枢纽机场可以提供中转服务。

3. 自有货机只服务于一条航线，每个周期内会进行一次双向服务（从城市i到城市j后会从城市j返回城市i）。

3 原模型

3.1 符号说明

3.1.1 集合

K: 飞机种类的集合，其中k_0表示外包货机

N: 城市节点集合

E: 关于城市节点的完全图的所有边的集合，即$E=\{(i,j):i,j\in N,i\neq j\}$

3.1.2 输入参数

n_k: 类型k的自有货机数目，$k\in K$

p_k: 类型k的自有货机容量，$k\in K$

f_i: 将节点i设置为枢纽的额外成本支出，$i\in N$

h_{ij}: $h_{ij}=1$表示弧$i\to j$上有外包货机可用，$h_{ij}=1$表示弧$i\to j$上没有外包货机可用

t_{ij}: 从节点i到节点j的飞行时间，$(i,j)\in E$

D^{od}: 需要从出发地节点o运送到目的地节点d的货物量（业务量），$(o,d)\in E$

c^k_{ij}: 使用k型货机，将货物从节点i运送到节点j的单位时间成本（每小时成本），$(i,j)\in E$，$k\in K$

M: 一个足够大的常数

α: 枢纽间运价折扣系数，$0<\alpha<1$

u: 将货物从出发地送达目的地最多允许经过的枢纽个数

3.1.3 决策变量

y_i: 是否将节点i作为枢纽，$y_i=1$表示将其作为枢纽，$i\in N$

x^{od}_{ij}: 对于出发地为o，目的地为d的这批货物，分派到弧$i\to j$上的运输量，对每对需求的起点和终点对$o-d$，存在2种情形：(1) 如果是直飞，$x^{od}_{od}>0$，对$(i,j)\neq(o,d)$，$x^{od}_{ij}=0$；(2) 如果经过枢纽，即线路可以表示为$o\to i_1\to i_2\to\cdots\to i_l\to d$，则对$(i,j)\in L=\{(o,i_1),(i_1,i_2),\dots,(i_l,d)\}$，有$x^{od}_{ij}>0$，对$(i,j)\notin L$，有$x^{od}_{ij}=0$，$(i,j)\in E$，$(o,d)\in E$

m_{ij}^k: 指派给节点$i \to j$的类型为k的飞机数目（对于外包飞机，实际上就等于其承包的货物重量），$(i,j) \in E, k \in K$

z_{ij}^{od}: 弧段(i,j)是否在派送起点-终点对(o,d)的货物时被使用，$(o,d) \in E$

s_i^{od}: 在派送起点-终点对(o,d)订单时，途径节点i在路径上的顺序号（这里隐含了每个节点i不可能在(o,d)对上出现超过一次的条件）

3.2 数学模型

$$\text{Min} \sum_{i \in N} f_i y_i + \sum_{k \in K \backslash \{k_0\}} \sum_{(i,j) \in E} [c_{ij}^k t_{ij} m_{ij}^k - (1-\alpha) c_{ij}^k t_{ij} m_{ij}^k y_i y_j] + \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}^{k_0} t_{ij} m_{ij}^{k_0} \tag{1}$$

$$x_{ij}^{od} \leq M y_i, \ \forall (i,j) \in E, (o,d) \in E, i \neq o \tag{2}$$

$$x_{ij}^{od} \leq M y_j, \ \forall (i,j) \in E, (o,d) \in E, j \neq d \tag{3}$$

$$\sum_{i \in N \backslash \{l\}} x_{il}^{od} = \sum_{j \in N \backslash \{l\}} x_{lj}^{od}, \ \forall l, o, d \in N, l \neq o, l \neq d \tag{4}$$

$$\sum_{j \in N \backslash \{o\}} x_{oj}^{od} = D^{od}, \ \forall (o,d) \in E \tag{5}$$

$$\sum_{i \in N \backslash \{d\}} x_{id}^{od} = D^{od}, \ \forall (o,d) \in E \tag{6}$$

$$m_{ij}^{k_0} = 0, \ \forall (i,j) \in E, \text{where } h_{ij} = 0 \tag{7}$$

$$\sum_{(o,d) \in E} x_{ij}^{od} \leq \sum_k p_k m_{ij}^k, \ \forall (i,j) \in E \tag{8}$$

$$m_{ij}^k = m_{ji}^k, \ \forall (i,j) \in E, k \in K \backslash \{k_0\} \tag{9}$$

$$\sum_{(i,j) \in E} m_{ij}^k \leq 2 n_k, \ \forall k \in K \backslash \{k_0\} \tag{10}$$

$$x_{ij}^{od} \leq M z_{ij}^{od}, \ \forall (i,j) \in E, (o,d) \in E \tag{11}$$

$$s_i^{od} + 1 - s_j^{od} - M(1 - z_{ij}^{od}) \leq 0, \ \forall (i,j) \in E, (o,d) \in E \tag{12}$$

$$s_o^{od} = 0, \ \forall (o,d) \in E \tag{13}$$

$$s_d^{od} \leq u + 1, \ \forall (o,d) \in E \tag{14}$$

$$x_{dj}^{od} = 0, \ \forall (o,d) \in E, j \in N \backslash \{d\} \tag{15}$$

$$x_{io}^{od} = 0, \ \forall (o,d) \in E, i \in N \backslash \{o\} \tag{16}$$

$$y_i \in \{0,1\}, \ \forall i \in N \tag{17}$$

$$z_{ij}^{od} \in \{0,1\}, \forall (i,j) \in E, (o,d) \in E \tag{18}$$

$$s_i^{od}, m_{ij}^k \geq 0, \ \text{integer} \tag{19}$$

$$x_{ij}^{od} \geq 0 \tag{20}$$

1. 最小化枢纽建设成本+自有货机运输成本（考虑枢纽间运价折扣）+外包货机成本

2. 非枢纽机场不得用于货机中转

3. 非枢纽机场不得用于货机中转

4. 对起点-终点对(o,d)，需要在所有中间节点保证流入等于流出

5. 对起点-终点对(o,d)，起点的流出量应等于对应的业务量
6. 对起点-终点对(o,d)，终点的流入量应等于对应的业务量
7. 如果弧$i \rightarrow j$上没有外包货机可用，限制其使用数目为0
8. 对任意弧段，运输量不能超过该弧段上所有货机的运力总和
9. 如果有弧段没有外包飞机，可用外包飞机数为0
10. 所有弧段上使用的特定类型的自有货机数目不得超过实际拥有的数目（由于飞机往返是对称的，有2倍关系）
11. 对起点-终点对(o,d)，没有使用到的弧上的运输量应为0
12. 保证顺序号的顺序关系，同时可以消除子回路
13. 对起点-终点对(o,d)，起点的顺序号为0
14. 限制航线中间途径的hub数目不得超过u
15. 对起点-终点对(o,d)，不会有流向起点的货物
16. 对起点-终点对(o,d)，不会有流出终点的货物

4 模型线性化

4.3 符号说明

4.3.4 集合

K: 飞机种类的集合，其中k_0表示外包货机

N: 城市节点集合

E: 关于城市节点的完全图的所有边的集合，即$E = \{(i,j) : i,j \in N, i \neq j\}$

4.3.5 输入参数

n_k: 类型k的自有货机数目，$k \in K$

p_k: 类型k的自有货机容量，$k \in K$

f_i: 将节点i设置为枢纽的额外成本支出，$i \in N$

h_{ij}: $h_{ij} = 1$表示弧$i \rightarrow j$上有外包货机可用，$h_{ij} = 1$表示弧$i \rightarrow j$上没有外包货机可用

t_{ij}: 从节点i到节点j的飞行时间，$(i,j) \in E$

D^{od}: 需要从出发地节点o运送到目的地节点d的货物量（业务量），$(o,d) \in E$

c_{ij}^k: 使用k型货机，将货物从节点i运送到节点j的单位时间成本（每小时成本），$(i,j) \in E$，$k \in K$

M: 一个足够大的常数

α: 枢纽间运价折扣系数，$0 < \alpha < 1$

u: 将货物从出发地送达目的地最多允许经过的枢纽个数

4.3.6 决策变量

y_i: 是否将节点i作为枢纽，$y_i=1$表示将其作为枢纽，$i\in N$

x_{ij}^{od}: 对于出发地为o，目的地为d的这批货物，分派到弧$i\rightarrow j$上的运输量，对每对需求的起点和终点对$o-d$，存在2种情形：(1) 如果是直飞，$x_{od}^{od}>0$，对$(i,j)\neq(o,d)$，$x_{ij}^{od}=0$；(2) 如果经过枢纽，即线路可以表示为$o\rightarrow i_1\rightarrow i_2\rightarrow\cdots\rightarrow i_l\rightarrow d$，则对$(i,j)\in L=\{(o,i_1),(i_1,i_2),\ldots,(i_l,d)\}$，有$x_{ij}^{od}>0$，对$(i,j)\notin L$，有$x_{ij}^{od}=0$，$(i,j)\in E$，$(o,d)\in E$

m_{0ij}^{k}: 指派给节点$i\rightarrow j$的类型为k的无枢纽折扣的飞机数目，$(i,j)\in E,k\in K\backslash\{k_0\}$

m_{1ij}^{k}: 指派给节点$i\rightarrow j$的类型为k的有枢纽折扣的飞机数目，$(i,j)\in E,k\in K\backslash\{k_0\}$

$m_{ij}^{k_0}$: 指派给节点$i\rightarrow j$的外包飞机数目，实际上就等于其承包的货物重量

z_{ij}^{od}: 弧段(i,j)是否在派送起点-终点对(o,d)的货物时被使用，$(o,d)\in E$

s_i^{od}: 在派送起点-终点对(o,d)订单时，途径节点i在路径上的顺序号（这里隐含了每个节点i不可能在(o,d)对上出现超过一次的条件）

4.4 数学模型（MIP1）

$$\text{Min}\sum_{i\in N}f_iy_i+\sum_{k\in K\backslash\{k_0\}}\sum_{(i,j)\in E}(c_{ij}^kt_{ij}m_{0ij}^k+\alpha c_{ij}^kt_{ij}m_{1ij}^k)+\sum_{(i,j)\in E}c_{ij}^{k_0}t_{ij}m_{ij}^{k_0} \tag{1}$$

$$x_{ij}^{od}\leq My_i,\ \forall(i,j)\in E,(o,d)\in E,i\neq o \tag{2}$$

$$x_{ij}^{od}\leq My_j,\ \forall(i,j)\in E,(o,d)\in E,j\neq d \tag{3}$$

$$\sum_{i\in N\backslash\{l\}}x_{il}^{od}=\sum_{j\in N\backslash\{l\}}x_{lj}^{od},\ \forall l,o,d\in N,l\neq o,l\neq d \tag{4}$$

$$\sum_{j\in N\backslash\{o\}}x_{oj}^{od}=D^{od},\ \forall(o,d)\in E \tag{5}$$

$$\sum_{i\in N\backslash\{d\}}x_{id}^{od}=D^{od},\ \forall(o,d)\in E \tag{6}$$

$$m_{ij}^{k_0}=0,\ \forall(i,j)\in E,\text{where } h_{ij}=0 \tag{7}$$

$$\sum_{(o,d)\in E}x_{ij}^{od}\leq\sum_{k}p_k(m_{0ij}+m_{1ij})^k,\ \forall(i,j)\in E \tag{8}$$

$$m_{0ij}^k=m_{0ji}^k,\ \forall(i,j)\in E,k\in K\backslash\{k_0\} \tag{9-1}$$

$$m_{1ij}^k=m_{1ji}^k,\ \forall(i,j)\in E,k\in K\backslash\{k_0\} \tag{9-2}$$

$$\sum_{(i,j)\in E}(m_{0ij}^k+m_{1ij}^k)\leq 2n_k,\ \forall k\in K\backslash\{k_0\} \tag{10}$$

$$x_{ij}^{od}\leq Mz_{ij}^{od},\ \forall(i,j)\in E,(o,d)\in E \tag{11}$$

$$s_i^{od}+1-s_j^{od}-M(1-z_{ij}^{od})\leq 0,\ \forall(i,j)\in E,(o,d)\in E \tag{12}$$

$$s_o^{od}=0,\ \forall(o,d)\in E \tag{13}$$

$$s_d^{od}\leq u+1,\ \forall(o,d)\in E \tag{14}$$

$$x_{dj}^{od}=0,\ \forall(o,d)\in E,j\in N\backslash\{d\} \tag{15}$$

$$x_{io}^{od}=0,\ \forall(o,d)\in E,i\in N\backslash\{o\} \tag{16}$$

$$y_i\in\{0,1\},\ \forall i\in N \tag{17}$$

$$z_{ij}^{od}\in\{0,1\},\forall(i,j)\in E,(o,d)\in E \tag{18}$$

$$s_i^{od}, m_{ij}^k \geq 0, \text{ integer} \tag{19}$$

$$x_{ij}^{od} \geq 0 \tag{20}$$

新增约束

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} m_{1ij}^k \leq M y_i, \ \forall i \in N, k \in K \tag{21}$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{j\}} m_{1ij}^k \leq M y_j, \ \forall j \in N, k \in K \tag{22}$$

约束(21)(22)用于确保只有在弧$i \rightarrow j$的两端都是航空枢纽时才能使用航空折扣

5 Cargo distribution and flight timetabling problem

对于每个实际存在的运输流（同起点、终点、中间点也相同，因此一个订单可以对应于多个运输流，一个运输流只能对应于一个订单），先枚举出所有可行的飞行方案（在第一问中，只求解了路径，但路径中的每个航段没有指定相应的起飞时间，也没有指定货机，飞行方案中要对这部分信息进行完善，例如，对运输流$o \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow d$，如果$o \rightarrow i_1$的飞行时间为120，$i_1 \rightarrow i_2$的飞行时间为150，$i_2 \rightarrow d$的飞行时间为100，且$o$的合法出发时间为{20, 40}，$i_1$的合法出发时间包括{100, 200}, i_2的合法出发时间包括{200, 500}，$o - i_1$上有3架飞机在提供服务，$i_1 - i_2$上有5架飞机在提高服务，$i_2 - d$上有2架飞机在提供服务，所有中转需要时间都为30，则从时间上来说只有一个合理方案，但还要考虑到飞机的组合，有$1 \times 3 \times 5 \times 2 = 30$种飞行方案）。

枚举方法：在一个周期内（就是24小时，可以以中午12点到第二天中午12点，因为顺丰希望隔夜达，夜间应该是运输频率最高的时候）进行规划，不允许航班跨周期。对之前找到的每个运输量大于0的route，其最大运输时效减去运输时间和hub中转时间，可以得到允许的最大"等待时间"，即完成中转后等待飞机起飞的时间，根据这个时间，可以cut掉一些不可能的飞行方案。由此得到一个可行的飞行方案集合F。

5.5 假设

1. 每条航线的起飞时间只有有限个离散的时间点（即从城市i飞到城市j只有有限个起飞时间的选择）。

5.6 符号说明

e^{rvs}表示弧$e \in E$的逆向弧

5.6.7 集合

A_e: 从某特定城市飞到另一个特定城市的可行出发时间编号集合，$e \in E$，例如$A_{(i,j)} = \{1, 2, 3\}$表示从城市i到城市j有3个可选的起飞时间，对$\forall a \in A_e$，$T_e(a)$表示对应的实际出发时间（以周期的起始点为0点，以分钟为单位，例如$T_e(a) = 30$表示从周期起始点往后30分钟）。

F: 可行的飞行方案集合

N: 城市节点集合

E: 关于城市节点的完全图的所有边的集合，即$E = \{(i, j) : i, j \in N, i \neq j\}$

E^H: $E^H = \{(i, j) : i, j \in N, i < j\}$

R^*: 上一个模型求得的所有使用到的运输流的集合

J: 整个网络自有货机的集合，对$j \in J$，$\kappa(j)$表示货机j的型号，$\tau_1(j)$和$\tau_2(j)$表示货机j所属航段的两个端点（总是有$\tau_1(j) < \tau_2(j)$，因为货机是双向服务的，实际是属于双向弧段而不是单向弧的）（该集合在上一个模型的m_{ij}^k求出后其实就确定了）

5.6.8 输入参数

（所有标注了$*$的都是根据上一个模型求解得到的参数）

X_r^*: 运输流r的总运量，$r \in R$

M_e^{k*}: 弧e使用到的类型为k的货机数目，$e \in E, k \in K$

w_f: 飞行方案的总时效（从起飞至到达终点的总时长），$f \in F$

$\phi(f,r)$: 飞行方案f是否对应于运输流r，$\phi(f,r)=1$表示对应，否则不对应，$f \in F, r \in R$

$\sigma(f,j,e,a)$: 飞行方案f是否用到$T_e(a)$时刻起飞并经过弧e的飞机j，若有，取值为1，否则取值为0

p_k: 类型k的自有货机容量，$k \in K$

t_e: 在飞过弧段e并在弧段e终端完成“中转”用时，由于需要返航，目的地即使不是枢纽，也存在这个时间延迟。

M: 一个足够大的常数

5.6.9 决策变量

x_f: 飞行序列f承担的运量，$f \in F$

y_{ea}^j: 如果航段e用到$T_e(a)$时刻起飞并经过弧e的飞机$j \in J$，取值为1，否则取值为0，$e \in E$

$l_{ea}^{k_0}$: 航段e用到$T_e(a)$时刻起飞并经过弧e的外包重量

z_j: 定义见下面

5.7 数学模型（MIP2）

目前没有加上每个航段各个出发时间最多仅允许一架飞机起飞的限制（论文中的约束(20)）

$$\text{Min} \sum_{f \in F} w_f x_f \tag{2-1}$$

$$\sum_{f \in F} \phi(f,r) x_f = X_r^*,\ \forall r \in R^* \tag{2-2}$$

$$y_{ea}^j = 0,\ \forall e \in E, \forall a \in A_e, \forall j \in J : e \notin \{(\tau_1(j), \tau_2(j)), (\tau_2(j), \tau_1(j))\} \tag{2-3}$$

$$\sum_{a \in A_e} \sum_{j \in J: \kappa(j)=k} y_{ea}^j = M_e^{k*},\ \forall e \in E, \forall k \in K \backslash \{k_0\} \tag{2-4}$$

$$\sum_{f \in F} \sigma(f,j,e,a) x_f \le p_{\kappa(j)} y_{ea}^j,\ \forall e \in E, \forall a \in A_e, \forall j \in J \tag{2-5}$$

$$x_f \ge 0,\ \forall f \in F \tag{2-6}$$

$$y_{ea}^j \in \{0,1\},\ \forall e \in E, \forall a \in E_e, \forall j \in J \tag{2-7}$$

增加约束（出发的飞机要返回，也就是如果从$i \to j$，中间的时间间隔至少要大于$t_e, e=(i,j)$）

情况1：f先走e^{rvs}再走e

$$\sum_{a \in A_e} T_e(a) y_{ea}^j - \sum_{a \in A_{e^{rvs}}} T_{e^{rvs}}(a) y_{e^{rvs}a}^j \ge t_{e^{rvs}}$$

或

情况2：f先走e再走e^{rvs}

$$\sum_{a\in A_{e^{rvs}}} T_{e^{rvs}}(a)y^j_{e^{rvs}a} - \sum_{a\in A_e} T_e(a)y^j_{ea} \geq t_e$$

为对上述约束进行建模，引入决策变量z_j，$z_j=1$表示j先走e再走e^{rvs}, $z_j=0$表示j先走e^{rvs}再走e

$$\sum_{a\in A_e} T_e(a)y^j_{ea} - \sum_{a\in A_{e^{rvs}}} T_{e^{rvs}}(a)y^j_{e^{rvs}a} \geq t_{e^{rvs}} - Mz_j \tag{2-8}$$

$$\sum_{a\in A_{e^{rvs}}} T_{e^{rvs}}(a)y^j_{e^{rvs}a} - \sum_{a\in A_e} T_e(a)y^j_{ea} \geq t_e - M(1-z_j) \tag{2-9}$$

$$z_j \in \{0,1\},\ \forall j \in J \tag{2-10}$$

防止出现对称解

$$\sum_{a\in A_e} T_e(a)y^{j_1}_{ea} \leq \sum_{a\in A_e} T_e(a)y^{j_2}_{ea},\ \forall e\in E^H, \forall j_1, j_2 \in J, j_1 < j_2 \tag{2-11}$$

1. 最小化货物在航空网络中的总滞留时间（以货物质量为权重）

2. 所有服务于运输流r的飞行方案的总运量为上一个模型的求得的运量

3. 如果某个飞机根本不是服务于航段e的，$y^j_{ea}=0$

4. 每个航段的每种飞机的使用数目为上一个模型求得的数目

5. 货机运量不得超过自身装载能力

约束2-8和2-9不对，j要除去那些端点不是e的飞机，同时e也只在E^H中讨论即可（不必在E中讨论）

约束2-5也是，k要去掉外包机类型，同时，如果路线上使用了外包货机，约束就不存在了