, алеМіністерство освіти і науки України
Національний університет “Львівська політехніка”
Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра програмного забезпечення

Звіт
Про виконання лабораторної роботи №6
На тему:
«РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЕРЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ»
з дисципліни «чисельні методи»

Лектор:
доцент каф. ПЗ
Мельник Н. Б.
Виконав:
ст. гр. ПЗ-11
Ясногородський Н.В.
Прийняла:
доцент каф. ПЗ
Мельник Н. Б.

« __ » ________ 2022 р.

∑ = _____ _________ .

Львів – 2022

Тема. Розв'язування перевизначених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Мета. Ознайомлення на практиці з методами розв’язування перевизначених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Теоретичні відомості

Перевизначена система лінійних алгебраїчних рівнянь – це СЛАР в якій кількість рівнянь є більшою за кількість невідомих. Для того, щоб знайти наближені розв’язки перевизначеної СЛАР використовують метод найменших квадратів(МНК).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m - b_1 = \varepsilon_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m - b_2 = \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m - b_n = \varepsilon_n\,. \end{cases}$$

Умови мінімізації функції:

$$S\left(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_m\right) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^2{}_i\,.$$

Після того, як продиференціюємо функцію за змінними $x_i\left(i = \overline{1, m}\right)$ та прирівняємо вирази, які ми визначили на попередньому кроці до нуля, то отримаємо нормальну систему рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j - b_j \right) = 0,\ k = \overline{1, m},$$

в якій кількість рівнянь системи дорівнює кількості невідомих.

Щоб отримати нову нормальну систему, скористаємося формулою:

$$NX = C,$$

$$\partial e\ N = A^T A, \quad C = A^T B\,.$$

Для того, щоб розв’язати нормальну систему рівнянь скористаємось методом квадратного кореня. Для цього розкладемо матрицю за допомогою методу Холецького, який полягає в тому, що задану матрицю розкладаємо на дві матриці $L\ ma\ L^T$. Елементи першої з них визначаємо за формулами:

$$L_{j,j} = (\pm)\sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2},$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}}\left(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k}L_{j,k}\right) \quad \text{for } i > j.$$

Після цього метод поділяється на 2 етапи:

1. Прямий(ми знаходимо значення коренів першої системи рівняння, тобто розв'язки рівняння $AY = B$).
2. Зворотній знаходимо корені нормальної матриці розв'язавши рівняння $A^T X = Y$.

Індивідуальне завдання

Розв'язати перевизначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом найменших квадратів. Отриману відповідну нормальну систему розв'язати методом квадратного кореня.

$$4. \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -13 \\ -x_2 - 5x_3 = 14 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

Код програми.

```
import math
from typing import Tuple

import numpy as np
from l4.l4 import back_sub, forward_sub, print_matrix, run_method

A = np.array(
    [
        [2, -1, -2],
        [3, 1, -5],
        [2, -4, 3],
        [0, -1, -5],
        [-1, 3, 2],
    ],
    dtype=np.double,
```

```
)

B = np.array([7, -1, -13, 14, 7], dtype=np.double)


def least_squares(A: np.ndarray, B: np.ndarray):
    """
    Transform AX = B -> NX = C
    N = A transposed * A
    C = A transposed * B

    N = L * L transposed
    L * Y = C -> forward sub
    L transposed * X = Y -> back sub
    """
    AT = A.transpose()
    N = np.dot(AT, A)
    C = np.dot(AT, B)
    N_det = np.linalg.det(N)

    print_matrix(AT, "A transposed (AT)")
    print_matrix(N, "N = AT * A")
    print_matrix([C], "N = AT * B")
    print(f"\nDeterminant of N = {N_det}")

    if N_det <= 0:
        return []

    L, LT = square_decomposition(N)
    print_matrix(L, "L")
    print_matrix(LT, "L transposed")

    y = forward_sub(L, C)
    x = back_sub(LT, y)
    print_matrix([x], "x")
    print_matrix([y], "y")

    print("\nVerifying results: NX - C = ", np.dot(N, x) - C)
    return x


def square_decomposition(N: np.ndarray) -> Tuple[np.ndarray, np.ndarray]:
    n = N.shape[0]
    L = np.zeros(N.shape)

    L[0, 0] = math.sqrt(N[0, 0])
    for i in range(0, n):
        for j in range(0, n):
            if j == 0:
                L[i, 0] = N[i, 0] / L[0, 0]
                continue
            if i == j:
                L[i, i] = math.sqrt(N[i, i] - sum([L[i, p] ** 2 for p in range(0, i)]))
                continue
            if i > j:
                L[i, j] = (N[i, j] - sum([L[i, p] * L[j, p] for p in range(0, j)])) / L[
                    j, j
                ]

    return L, L.transpose()


if __name__ == "__main__":
    run_method(method_name="Smallest Squares", method=least_squares, A=A, B=B)
```

Протокол роботи

```
Smallest Squares method:

Initial values:

A:
2.0     -1.0    -2.0
3.0     1.0     -5.0
2.0     -4.0    3.0
0.0     -1.0    -5.0
-1.0    3.0     2.0

B:
7.0     -1.0    -13.0   14.0    7.0

A transposed (AT):
2.0     3.0     2.0     0.0     -1.0
-1.0    1.0     -4.0    -1.0    3.0
-2.0    -5.0    3.0     -5.0    2.0

N = AT * A:
18.0    -10.0   -15.0
-10.0   28.0    -4.0
-15.0   -4.0    67.0

N = AT * B:
-22.0   51.0    -104.0

Determinant of N = 19279.99999999999

L:
4.242640687119286       0.0                     0.0
-2.357022603955158      4.737556801183965       0.0
-3.5355339059327373     -2.6033109155020795     6.908167070737919

L transposed:
4.242640687119286       -2.357022603955158      -3.5355339059327373
0.0                     4.737556801183965       -2.6033109155020795
0.0                     0.0                     6.908167070737919

x:
-2.6727178423236495     0.5644709543568475      -2.1169087136929456

y:
-5.1854497287013475     8.185184770362397       -14.623959067691773

Verifying results: NX - C =  [1.77635684e-14 7.10542736e-15 0.00000000e+00]

Resulting vector x:
[-2.67271784  0.56447095 -2.11690871]

Verifying results: AX - B =  [-8.67608921  4.130861   -0.95404564 -3.97992739 -6.86768672]
```

Висновки

Під час виконання лабораторної роботи №6 я ознайомився на практиці з методами розв’язування перевизначених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.