, алеМіністерство освіти і науки України
Національний університет “Львівська політехніка”
Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра програмного забезпечення

Звіт
Про виконання лабораторної роботи №7
На тему:
«Чисельні методи розв’язування систем нелінійних рівнянь»
з дисципліни «чисельні методи»

Лектор:
доцент каф. ПЗ
Мельник Н. Б.
Виконав:
ст. гр. ПЗ-11
Ясногородський Н.В.
Прийняла:
доцент каф. ПЗ
Мельник Н. Б.

« __ » ________ 2022 р.

∑ = _____ _________ .

Львів – 2022

Тема: Чисельні методи розв'язування систем нелінійних рівнянь.
Мета: Ознайомлення на практиці з методом ітерацій та методом Ньютона розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Теоретичні відомості

Метод простої ітерації - суть методу полягає у перетворенні системи з двох нелінійних рівнянь до вигляду:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y), \\ y = \varphi_2(x, y), \end{cases}$$

Після цього ітераційний процес зводиться до такого вигляду:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n), \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Для збіжності ітераційного процесу мають виконуватися такі умови:

1) функції $\varphi_1(x, y)$ та $\varphi_2(x, y)$ визначені та неперервно-диференційовані в області D ;
2) початкове наближення і всі наступні наближення належать області D ;
3) в області D виконуються нерівності:

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| \le q_1 < 1 \ , \qquad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1 .$$

Ітераційний процес припиняється якщо $|x_{n+1} - x_n| + |y_{n+1} - y_n| < e$(точність).

Метод простої ітерації, який застосовують для знаходження розв'язку одного нелінійного рівняння або системи двох нелінійних рівнянь, має перший порядок збіжності (лінійну збіжність).

Метод Ньютона – суть методу полягає у перетворенні системи нелінійних рівнянь до вигляду:

$$\begin{cases} f_1(x+\Delta_x, y+\Delta_y)=0, \\ f_2(x+\Delta_x, y+\Delta_y)=0. \end{cases}$$

Після цього ми записуємо якобіан, складений складеної з частинних похідних функцій f_1 і f_2 в деякій точці:

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а поправки Δ_x і Δ_y визначимо за правилом Крамера із системи:

$$\Delta_x = -\frac{1}{\Delta(x_0, y_0)} \begin{vmatrix} f_1(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ f_2(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = -\frac{1}{\Delta(x_0, y_0)} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & f_1(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & f_2(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

Наступне наближення розв'язку системи отримаємо у вигляді:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta_x, \\ y_{n+1} = y_n + \Delta_y, \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Індивідуальне завдання

Розв'язати систему нелінійних рівнянь з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ методом ітерацій та методом Ньютона.

$$5.\quad \begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$$

Код програми.

```
import math

import numpy as np
from l4.l4 import gauss_elim

# sin(x+0.5) - y = 1
# cos(y-2) + x = 0


def simple_iterations(tolerance=1e-4):
    x_i, y_i = 0, 0
    print(
        f"""\nSimple iterations method:
            Initial guess: {[x_i,y_i]}
            Tolerance: {tolerance}
        """
    )

    f1 = lambda x: math.sin(x + 0.5) - 1
    f2 = lambda y: -math.cos(y - 2)

    x_ii, y_ii = x_i, y_i
    iterations = 0

    while True:
        iterations += 1
        x_ii, y_ii = f2(y_i), f1(x_i)
        precision = abs(x_ii - x_i) + abs(y_ii - y_i)
        x_i, y_i = x_ii, y_ii

        print(f"{iterations}: x={x_i:.5f}, y={y_i:.5f}, precision={precision:.5f}")

        if precision < tolerance:
            break


def newton_iterations(tolerance=1e-4):
    X = np.array([0, 0], dtype=float)
    print(
        f"""\nNewtons method:
            Initial guess: {X}
            Tolerance: {tolerance}
        """
    )

    def f(X):
```

```
        x, y = X
        return np.array([math.sin(x + 0.5) - y - 1, math.cos(y - 2) + x])

    def Jf(X):
        x, y = X
        return np.array([[math.cos(x + 0.5), -1], [1, -math.sin(y - 2)]])

    X_delta = X.copy()
    iterations = 0
    while True:
        iterations += 1
        A = Jf(X)
        B = f(X)
        X_delta = gauss_elim(A, B, mute=True)
        X -= X_delta
        norm = np.linalg.norm(B)

        print(f"{iterations}: x={X[0]:.5f}, y={X[1]:.5f}, norm={norm:.5f}")

        if norm < tolerance:
            break


if __name__ == "__main__":
    simple_iterations()
    newton_iterations()
    print
```

Протокол роботи

```
Simple iterations method:
                Initial guess: [0, 0]
                Tolerance: 0.0001

1: x=0.41615, y=-0.52057, precision=0.93672
2: x=0.81329, y=-0.20674, precision=0.71098
3: x=0.59394, y=-0.03297, precision=0.39312
4: x=0.44590, y=-0.11156, precision=0.22663
5: x=0.51479, y=-0.18898, precision=0.14631
6: x=0.57955, y=-0.15063, precision=0.10311
7: x=0.54788, y=-0.11825, precision=0.06405
8: x=0.52052, y=-0.13363, precision=0.04275
9: x=0.53359, y=-0.14762, precision=0.02706
10: x=0.54537, y=-0.14086, precision=0.01854
11: x=0.53969, y=-0.13489, precision=0.01165
12: x=0.53465, y=-0.13775, precision=0.00790
13: x=0.53707, y=-0.14032, precision=0.00498
14: x=0.53923, y=-0.13908, precision=0.00339
15: x=0.53819, y=-0.13799, precision=0.00213
16: x=0.53726, y=-0.13851, precision=0.00145
17: x=0.53771, y=-0.13898, precision=0.00091
18: x=0.53810, y=-0.13876, precision=0.00062
19: x=0.53791, y=-0.13856, precision=0.00039
20: x=0.53775, y=-0.13865, precision=0.00027
21: x=0.53783, y=-0.13874, precision=0.00017
22: x=0.53790, y=-0.13870, precision=0.00011
23: x=0.53786, y=-0.13866, precision=0.00007

Newtons method:
                Initial guess: [0. 0.]
                Tolerance: 0.0001

1: x=0.49472, y=-0.08641, norm=0.44421
2: x=0.53786, y=-0.13789, norm=0.07589
3: x=0.53785, y=-0.13868, norm=0.00131
4: x=0.53785, y=-0.13868, norm=0.00000
```

Висновки

Виконуючи лабораторну роботу No7, я навчився програмувати розв’язки систем нелінійних рівнянь методами простої ітерації та Ньютона.