

Міністерство освіти і науки України

Національний університет “Львівська політехніка”

Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра програмного забезпечення



Звіт

Про виконання лабораторної роботи №9

на тему:

**«Наближення функцій методом
найменших квадратів»**

Лектор:

доцент каф. ПЗ

Мельник Н.Б.

Виконав:

ст. гр. ПЗ-11

Ясногородський Н.В.

Прийняла:

доцент каф. ПЗ

Мельник Н.Б.

« __ » _____ 2022 р.

Σ = _____ .

Львів – 2022

Тема: Наближення функцій методом найменших квадратів

Мета: ознайомлення на практиці з методом найменших квадратів апроксимації (наближення) функцій.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Апроксимація функцій – процес утворення поліному певного порядку на основі вхідних даних, поданих у виді таблиці певної кількості точок (n). Утворений поліном описує криву, яка містить у собі множину вхідних даних, та дає змогу отримати її проміжні значення.

Апроксимація функцій є ефективним способом нівелювання похибок вхідних даних.

Одним із поширених методів апроксимації функцій є **метод найменших квадратів**. У якості вхідних даних отримуємо таблично задану функцію на деякому проміжку. Мета – сформувати поліном m -го степеня, при чому $m=0, n$.

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

Похибка для поліному представлена середнім квадратичним відхиленням:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (P_m(x_i) - y_i)^2}$$

Суть алгоритму – відшукати невідомі коефіцієнти поліному, при цьому, квадрат кожного відхилення повинен бути мінімальним.

$$\Phi(a_0, a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n (P_m(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n a_j x_i^j - y_i \right)^2$$

Далі – знаходимо похідні за змінними a_k ($k = 0, m$) та прирівнюємо їх до нуля.

Таким чином ми отримаємо **нормальну систему** методу найменших квадратів, яку можна подати як:

$$\sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^n x_i^{j+k} \right) a_j = \sum_{i=0}^n y_i x_i^k$$

Отримавши СЛАР такого типу, її розв'язують довільним способом (точними або наближеними). Отримані розв'язки й будуть шуканими коефіцієнтами поліному.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Варіант 15

Завдання

Методом найменших квадратів побудувати лінійний, квадратичний і кубічний апроксимаційні поліноми для таблично заданої функції.

x	0,72	0,79	0,9	1,01	1,1	1,15
y	2,8	2,94	3,2	3,38	3,53	3,75

ТЕКСТ ПРОГРАММЫ

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from l4.l4 import lu, print_matrix

points = (
    np.array([0.72, 0.79, 0.9, 1.01, 1.1, 1.15]),
    np.array([2.8, 2.94, 3.2, 3.38, 3.53, 3.75]),
)

def polyfit(x, y, degree):
    m = degree + 1
    n = len(x)
    A = np.zeros((m, m))
    B = np.zeros(m)

    for k in range(m):
        for i in range(n):
            B[k] += y[i] * (x[i] ** k)
            for j in range(m):
                A[k][j] += x[i] ** (j + k)

    print_matrix(A, "A")
    print_matrix([B], "B")
    coeffs = lu(A, B, mute=True)
    return np.polyld(coeffs[:-1])

def least_squares_approximation(points, degree):
    p = polyfit(points[0], points[1], degree)
    polyline = np.linspace(np.min(points[0]), np.max(points[0]) * 1.5)
    plt.plot(*points, "*")
    plt.plot(polyline, p(polyline), "--")
    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("y")
    print(p)
    plt.show()

if __name__ == "__main__":
    print("Initial points:")
    print_matrix([points[0]], "X")
    print_matrix([points[1]], "Y")

    least_squares_approximation(points, 1)
    least_squares_approximation(points, 2)
    least_squares_approximation(points, 3)
```

РЕЗУЛЬТАТИ

Initial points:

X:

0.72 0.79 0.9 1.01 1.1 1.15

Y:

2.8 2.94 3.2 3.38 3.53 3.75

A:

6.0 5.67
5.67 5.5051

B:

19.6 18.8279

$2.082 x + 1.299$

A:

6.0 5.67 5.5051
5.67 5.5051 5.477463
5.5051 5.477463 5.568049629999999

B:

19.6 18.8279 18.556987
2
 $0.4864 x + 1.171 x + 1.714$

A:

6.0 5.67 5.5051 5.477463
5.67 5.5051 5.477463 5.568049
5.5051 5.477463 5.568049629999999 5.764564
5.477463 5.568049629999999 5.7645646407 6.059984

B:

19.6 18.8279 18.556987 18.711557690000003
3 2
 $12.2 x - 33.76 x + 32.75 x - 7.85$

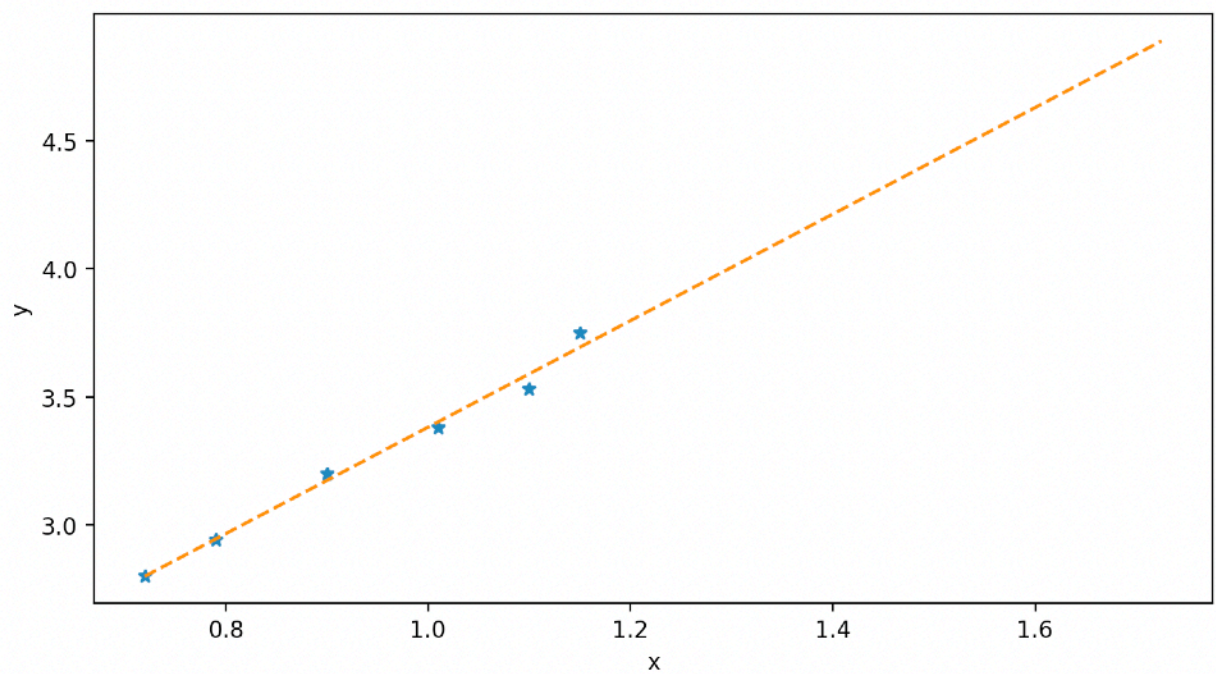


Рис. 2 Результат
(Лінійний поліном)

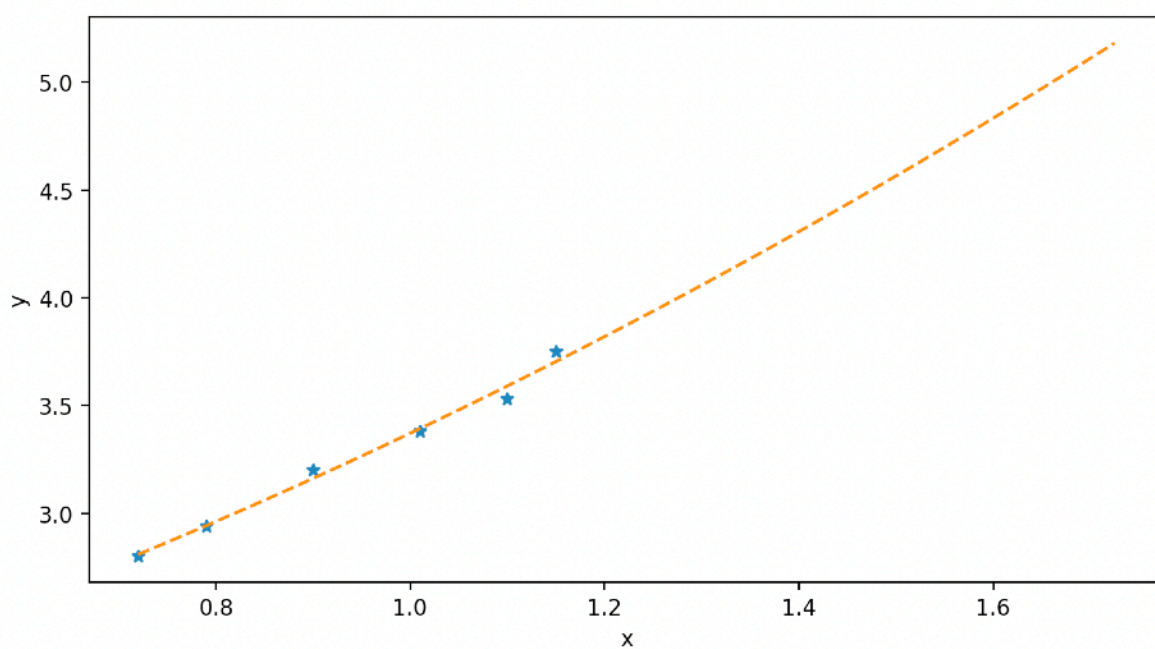


Рис. 3 Результат
(Квадратичний поліном)

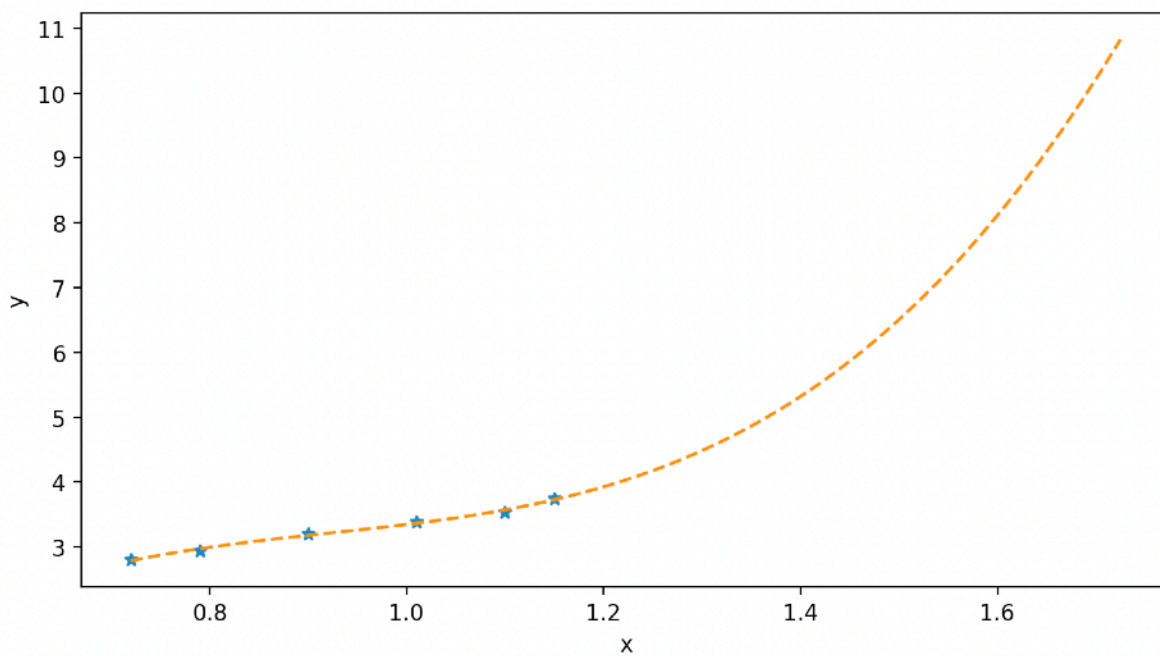


Рис. 4 Результат
(Кубічний поліном)

ВИСНОВКИ

Виконавши лабораторну роботу №9, я отримав необхідні знання для про принципи апроксимації функцій шляхом утворення поліномів різних порядків за допомогою методу найменших квадратів. Використав отримані вміння на практиці, реалізувавши програмний алгоритм виконання цього методу.