Hawstein's Blog

- Home
- Archive
- Categories
- Sitemap
- About

- Subscribe

动态规划之背包问题（一）

March 1, 2013

作者：Hawstein

出处：http://hawstein.com/posts/dp-knapsack.html

一切都要从一则故事说起。

话说有一哥们去森林里玩发现了一堆宝石，他数了数，一共有n个。 但他身上能装宝石的就只有一个背包，背包的容量为C。这哥们把n个宝石排成一排并编上号： 0,1,2,…,n-1。第i个宝石对应的体积和价值分别为V[i]和W[i] 。排好后这哥们开始思考： 背包总共也就只能装下体积为C的东西，那我要装下哪些宝石才能让我获得最大的利益呢？

OK，如果是你，你会怎么做？你斩钉截铁的说：动态规划啊！恭喜你，答对了。 那么让我们来看看，动态规划中最最最重要的两个概念： 状态和状态转移方程在这个问题中分别是什么。

我们要怎样去定义状态呢？这个状态总不能是凭空想象或是从天上掉下来的吧。 为了方便说明，让我们先实例化上面的问题。一般遇到n，你就果断地给n赋予一个很小的数， 比如n=3。然后设背包容量C=10，三个宝石的体积为5，4，3，对应的价值为20，10，12。 对于这个例子，我想智商大于0的人都知道正解应该是把体积为5和3的宝石装到背包里， 此时对应的价值是20+12=32。接下来，我们把第三个宝石拿走， 同时背包容量减去第三个宝石的体积（因为它是装入背包的宝石之一）， 于是问题的各参数变为：n=2，C=7，体积｛5，4｝，价值｛20，10｝。好了， 现在这个问题的解是什么？我想智商等于0的也解得出了：把体积为5的宝石放入背包 （然后剩下体积2，装不下第二个宝石，只能眼睁睁看着它溜走），此时价值为20。 这样一来，我们发现，n=3时，放入背包的是0号和2号宝石；当n=2时， 我们放入的是0号宝石。这并不是一个偶然，没错， 这就是传说中的“全局最优解包含局部最优解”（n=2是n=3情况的一个局部子问题）。 绕了那么大的圈子，你可能要问，这都哪跟哪啊？说好的状态呢？说好的状态转移方程呢？ 别急，它们已经呼之欲出了。

我们再把上面的例子理一下。当n=2时，我们要求的是前2个宝石， 装到体积为7的背包里能达到的最大价值；当n=3时，我们要求的是前3个宝石， 装到体积为10的背包里能达到的最大价值。有没有发现它们其实是一个句式！OK， 让我们形式化地表示一下它们， 定义d(i,j)为前i个宝石装到剩余体积为j的背包里能达到的最大价值。 那么上面两句话即为：d(2, 7)和d(3, 10)。这样看着真是爽多了， 而这两个看着很爽的符号就是我们要找的状态了。 即状态d(i,j)表示前i个宝石装到剩余体积为j的背包里能达到的最大价值。 上面那么多的文字，用一句话概括就是：根据子问题定义状态！你找到子问题， 状态也就浮出水面了。而我们最终要求解的最大价值即为d(n, C)：前n个宝石 （0,1,2…,n-1）装入剩余容量为C的背包中的最大价值。状态好不容易找到了， 状态转移方程呢？顾名思义，状态转移方程就是描述状态是怎么转移的方程（好废话！）。 那么回到例子，d(2, 7)和d(3, 10)是怎么转移的？来，我们来说说2号宝石 （记住宝石编号是从0开始的）。从d(2, 7)到d(3, 10)就隔了这个2号宝石。 它有两种情况，装或者不装入背包。如果装入，在面对前2个宝石时， 背包就只剩下体积7来装它们，而相应的要加上2号宝石的价值12， d(3, 10)=d(2, 10-3)+12=d(2, 7)+12；如果不装入，体积仍为10，价值自然不变了， d(3, 10)=d(2, 10)。记住，d(3, 10)表示的是前3个宝石装入到剩余体积为10 的背包里能达到的最大价值，既然是最大价值，就有d(3, 10)=max{ d(2, 10), d(2, 7)+12 }。好了，这条方程描述了状态d(i, j)的一些关系， 没错，它就是状态转移方程了。把它形式化一下：d(i, j)=max{ d(i-1, j), d(i-1,j-V[i-1]) + W[i-1] }。注意讨论前i个宝石装入背包的时候， 其实是在考查第i-1个宝石装不装入背包（因为宝石是从0开始编号的）。至此， 状态和状态转移方程都已经有了。接下来，直接上代码。

```
for(int i=0; i<=n; ++i){
    for(int j=0; j<=C; ++j){
        d[i][j] = i==0 ? 0 : d[i-1][j];
        if(i>0 && j>=V[i-1])  d[i][j] >?= d[i-1][j-V[i-1]]+W[i-1];
    }
 }
```

i=0时，d(i, j)为什么为0呢？因为前0个宝石装入背包就是没东西装入，所以最大价值为0。 if语句里，j>=V[i-1]说明只有当背包剩余体积j大于等于i-1号宝石的体积时， 我才考虑把它装进来的情况，不然d[i][j]就直接等于d[i-1][j]。i>0不用说了吧， 前0个宝石装入背包的情况是边界，直接等于0，只有i>0才有必要讨论， 我是装呢还是不装呢。简单吧，核心算法就这么一丁点，接下来上完整代码knapsack.cpp。

```
/**0-1 knapsack d(i, j)表示前i个物品装到剩余容量为j的背包中的最大重量**/
#include<cstdio>
using namespace std;
#define MAXN 1000
#define MAXC 100000

int V[MAXN], W[MAXN];
int d[MAXN][MAXC];

int main(){
    freopen("data.in", "r", stdin);//重定向输入流
    freopen("data.out", "w", stdout);//重定向输出流
    int n, C;
    while(scanf("%d %d", &n, &C) != EOF){
        for(int i=0; i<n; ++i)   scanf("%d %d", &V[i], &W[i]);

        for(int i=0; i<=n; ++i){
            for(int j=0; j<=C; ++j){
                d[i][j] = i==0 ? 0 : d[i-1][j];
                if(i>0 && j>=V[i-1])  d[i][j] >?= d[i-1][j-V[i-1]]+W[i-1];
            }
        }
        printf("%d\n", d[n][C]);//最终求解的最大价值
    }
    fclose(stdin);
    fclose(stdout);
    return 0;
}
```

其中freopen函数将标准输入流重定向到文件data.in， 这比运行程序时一点点手输要方便许多，将标准输出流重定向到data.out。data.in中每组输入的第一行为宝石数量n及背包体积C，接下来会有n行的数据， 每行两个数对应的是宝石的体积及价值。本测试用例data.in如下：

```
5 10
4 9
3 6
5 1
2 4
5 1
4 9
4 20
3 6
4 20
2 4
5 10
2 6
2 3
6 5
5 4
4 6
```

data.out为算法输出结果，对应该测试用例，输出结果如下：

```
19
40
15
```

好，至此我们解决了背包问题中最基本的0/1背包问题。等等，这时你可能要问， 我现在只知道背包能装入宝石的最大价值，但我还不知道要往背包里装入哪些宝石啊。嗯， 好问题！让我们先定义一个数组x，对于其中的元素为1时表示对应编号的宝石放入背包， 为0则不放入。让我们回到上面的例子，对于体积为5，4，3，价值为20，10，12的3个宝石 ，如何求得其对应的数组x呢？（明显我们目测一下就知道x={1 0 1}， 但程序可目测不出来）OK，让我们还是从状态说起。如果我们把2号宝石放入了背包， 那么是不是也就意味着，前3个宝石放入背包的最大价值要比前2个宝石放入背包的价值大， 即：d(3, 10)>d(2, 10)。再用字母代替具体的数字 （不知不觉中我们就用了不完全归纳法哈），当d(i, j)>d(i-1, j)时，x(i-1)=1;OK， 上代码：

```
//输出打印方案
int j = C;
for(int i=n; i>0; --i){
    if(d[i][j] > d[i-1][j]){
        x[i-1] = 1;
        j = j - V[i-1];//装入第i-1个宝石后背包能装入的体积就只剩下j - V[i-1]
    }
}
for(int i=0; i<n; ++i)  printf("%d ", x[i]);
```

好了，加入这部分内容，knapsack.cpp变为如下：

```
/**0-1 knapsack d(i, j)表示前i个物品装到剩余容量为j的背包中的最大重量**/
#include<cstdio>
```

```
using namespace std;
#define MAXN 1000
#define MAXC 100000

int V[MAXN], W[MAXN], x[MAXN];
int d[MAXN][MAXC];

int main(){
    freopen("data.in", "r", stdin);
    freopen("data.out", "w", stdout);
    int n, C;
    while(scanf("%d %d", &n, &C) != EOF){
        for(int i=0; i<n; ++i)   scanf("%d %d", &V[i], &W[i]);
        for(int i=0; i<n; ++i)   x[i] = 0; //初始化打印方案

        for(int i=0; i<=n; ++i){
            for(int j=0; j<=C; ++j){
                d[i][j] = i==0 ? 0 : d[i-1][j];
                if(i>0 && j>=V[i-1])  d[i][j] >?= d[i-1][j-V[i-1]]+W[i-1];
            }
        }
        printf("%d\n", d[n][C]);

        //输出打印方案
        int j = C;
        for(int i=n; i>0; --i){
            if(d[i][j] > d[i-1][j]){
                x[i-1] = 1;
                j = j - V[i-1];
            }
        }
        for(int i=0; i<n; ++i)   printf("%d ", x[i]);
        printf("\n");
    }
    fclose(stdin);
    fclose(stdout);
    return 0;
}
```

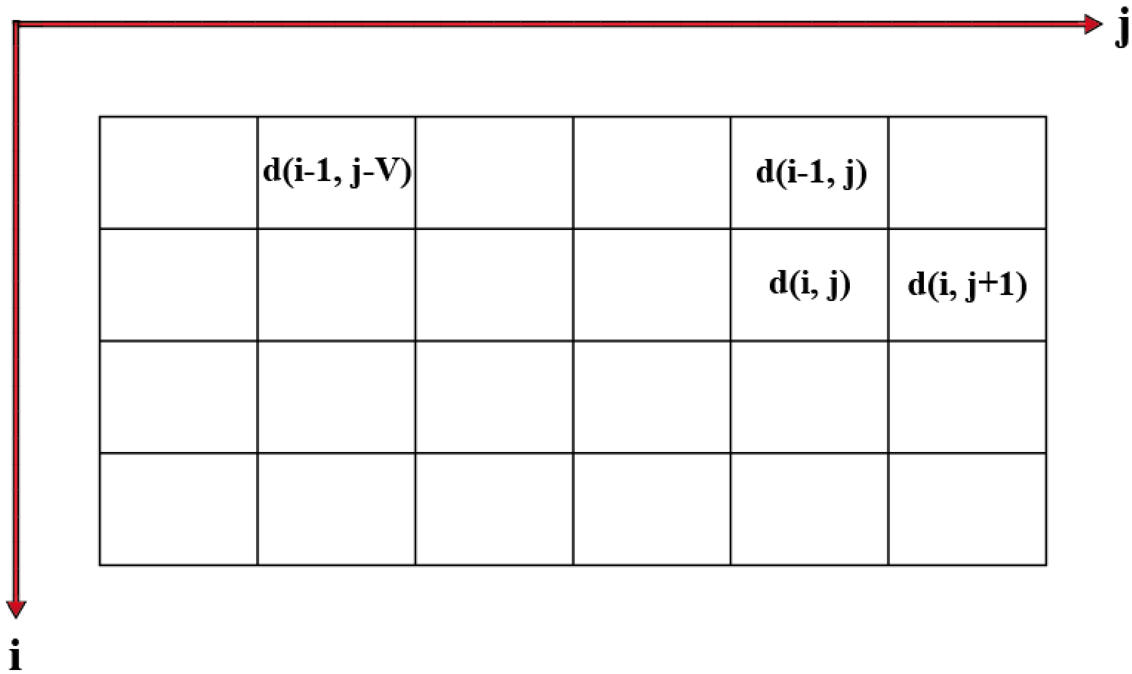
data.out输出结果变为：

```
19
1 1 0 1 0
40
1 0 1 0
15
1 1 0 0 1
```

至此，好像该解决的问题都解决了。当一个问题找到一个放心可靠的解决方案后， 我们往往就要考虑一下是不是有优化方案了。为了保持代码的简洁， 我们暂且把宝石装包方案的求解去掉。该算法的时间复杂度是O(nC)， 即时间都花在两个for循环里了，这个应该是没办法再优化了。再看看空间复杂度， 数组d用来保存每个状态的值，空间复杂度为O(nC)； 数组V和W用来保存每个宝石的体积和价值，空间复杂度为O(n)。程序总的空间复杂度为 O(nC)，这个是可以进一步优化的。首先，我们先把数组V和W去掉， 因为它们没有保存的必要，改为一边读入一边计算：

```
int V = 0, W = 0;
for(int i=0; i<=n; ++i){
    if(i>0) scanf("%d %d", &V,&W);
    for(int j=0; j<=C;++j){
        d[i][j] = i==0 ? 0 : d[i-1][j];
        if(j>=V && i>0) d[i][j] >?= d[i-1][j-V]+W;
    }
}
```

好了，接下来让我们继续压榨空间复杂度。保存状态值我们开了一个二维数组d， 在看过把一维数组V和W变为一个变量后，我们是不是要思考一下， 有没有办法将这个二维数组也压榨一下呢？换言之， 这个二维数组中的每个状态值我们真的有必要都保存么？ 让我们先来看一下以下的一张示意图（参照《算法竞赛入门经典》P169的图画的）



由上面那一小段优化过后的代码可知，状态转移方程为：d(i, j)=max{ d(i-1, j), d(i-1, j-V)+W }，也就是在计算d(i, j)时我们用到了d(i-1,j)和d(i-1, j-V)的值。 如果我们只用一个一维数组d(0)～d(C)来保存状态值可以么？将i方向的维数去掉， 我们可以将原来二维数组表示为一维数据：d(i-1, j-V)变为d(j-V)， d(i-1, j)变为d(j)。当我们要计算d(i, j)时，只需要比较d(j)和d(j-V)+W的大小， 用较大的数更新d(j)即可。等等，如果我要计算d(i, j+1)，而它恰好要用到d(i-1, j)的值， 那么问题就出来了，因为你刚刚才把它更新为d(i, j)了。那么，怎么办呢？ 按照j递减的顺序即可避免这种问题。比如，你计算完d(i, j)， 接下来要计算的是d(i,j-1)，而它的状态转移方程为d(i, j-1)=max{ d(i-1, j-1), d(i-1, j-1-V)+W }，它不会再用到d(i-1,j)的值！所以， 即使该位置的值被更新了也无所谓。好，上代码：

```
memset(d, 0, sizeof(d));
for(int i=0; i<=n; ++i){
    if(i>0) scanf("%d %d", &V,&W);
    for(int j=C;j>=0; --j){
        if(j>=V && i>0) d[j] >?= d[j-V]+W;
    }
}
```

优化后的完整代码如下，此时空间复杂度仅为O(C)。

```
/**0-1 knapsack d(i, j)表示前i个物品装到剩余容量为j的背包中的最大重量**/
#include<cstdio>
#include<cstdlib>
#include<cstring>
using namespace std;

int main(){
    freopen("data.in", "r", stdin);
    freopen("data.out", "w", stdout);
    int n, C, V = 0, W = 0;
    while(scanf("%d %d", &n, &C) != EOF){
        int* d = (int*)malloc((C+1)*sizeof(int));
        memset(d, 0, (C+1)*sizeof(int));

        for(int i=0; i<=n; ++i){
            if(i>0)   scanf("%d %d", &V, &W);
            for(int j=C; j>=0; --j){
                if(j>=V && i>0)    d[j] >?= d[j-V]+W;
            }
        }
```

```
        printf("%d\n", d[C]);
        free(d);
    }
    fclose(stdin);
    fclose(stdout);
    return 0;
}
```

OK，背包问题暂时先讲这么多，以后接着讲。

2

Random Posts

- 01 Jul 2014 » [把《The Swift Programming Language》读薄]
- 06 Mar 2014 » [把《把时间当作朋友》读薄]
- 20 Jan 2014 » [Google Java编程风格指南]
- 11 Aug 2013 » [把《编程珠玑》读薄]
- 23 Jul 2013 » [如何用C++实现一个LRU Cache]

20 Comments　Hawstein's Blog　Login

Sort by Best　Share　Favorite

Join the discussion…

yyyy • a year ago
我只想说是怎么一种扭曲的心态把 value数组定义为 w[], weight数组定义为 v[]
除此之外是好文
8 • Reply • Share ›

blackkettle yyyy • 9 months ago
你也可以这么理解嘛
体积 volume

价值 worthiness
6 • Reply • Share ›

Ukyoi (右京祥一) • 5 months ago
受教了……

不过如果用递归解的话，因为并不是所有的d(i, j)都需要计算，似乎时间复杂度能够得到优化？……嘛我是初学者，说得不对还望轻喷。
1 • Reply • Share ›

Peter • a year ago
Your Printing block has one issue:

//输出打印方案
int j = C;
for(int i=n; i>0; --i){
if(d[i][j] > d[i-1][j]){
x[i-1] = 1;
j = j - V[i-1];//装入第i-1个宝石后背包能装入的体积就只剩下j - V[i-1]
}
}
for(int i=0; i<n; ++i)="" printf("%d="" ",="" x[i]);="" should="" be:="" j="j" -="" w[i-1];="" 装入第i-1个宝石后背包能装入的体积就只剩下j="" -="" w[i-1]="">
1 • Reply • Share ›